Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Co)Ações Parciais de Álgebras de Hopf Fracas em Coálgebras

Tese de Doutorado

GRAZIELA LANGONE FONSECA

Porto Alegre, 15 de fevereiro de 2018

Tese submetida por Graziela Langone Fonseca*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS - Orientador)
Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)
Prof. Dr. Glauber Rodrigues de Quadros (UFSM)
Prof. Dra. Grasiela Martini (FURG)

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenolvimento Científico e Técnico (CNPq)

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus por todas as bençãos que tem me proporcionado.

Agradeço aos meus pais por serem pessoas corretas que sempre batalharam para conquistar seus sonhos e nunca precisaram tirar vantagem de ninguém para realizá-los. Foi com exemplo que eles ensinaram a mim e a minha irmã de como é possível ser uma pessoa honesta e bem sucedida ao mesmo tempo.

Agradeço ao meu marido Átila por sempre acreditar em mim, principalmente nos momentos mais difíceis. Obrigada por nunca deixar que a minha descrença superasse minha fé.

Agradeço aos meus anjos da guarda: Grasiela, Eneilson, Danielle e Leonardo. Muito obrigada por me convidarem para participar do grupo de pesquisa com vocês. Durante a construção desse trabalho a opinião e a ajuda de vocês foi essencial.

Agradeço a todos os colegas de pós-graduação. É emocionante poder fazer parte de um grupo de estudantes que se ajudam mutuamente e que tem como lema ”um por todos e todos por um”. Vocês me ensinaram o real sentido do que deve ser uma amizade.

Agradeço ao meu orientador Antonio Paques por ter acreditado no meu trabalho e por ter me guiado durante essa jornada de conhecimento.

Agradeço a todos os membros da banca por investirem uma grande parte do seu tempo lendo e revisando esse trabalho. Acredito que suas sugestões e correções enriqueceram imensamente esse trabalho.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Querido passado,

obrigada por tudo que me ensinou...

Querido futuro, pode vir!

Resumo

Nesse trabalho serão introduzidas as noções de (co)ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra, bem como a noção de ação parcial de um grupoide em uma coálgebra. Uma equivalência entre as noções de ação parcial de grupoide e ação parcial será apresentada. Além disso, será visto sob quais condições é possível gerar uma álgebra de Hopf fraca a partir do coproduto smash e do coproduto smash parcial. Por fim, será estabelecido uma relação dual entre as estruturas de ação e coação parcial, assim como serão apresentados teoremas de globalização para ambas estruturas.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf fracas, globalização, dualização, módulo coálgebra parcial, comódulo coálgebra parcial, ação parcial de grupoide, coproduto smash fraco.

Abstract

In this work the notions of partial (co)action of a weak Hopf algebra on a coalgebra, as well as the notion of partial action of a groupoid on a coalgebra will be introduced. An equivalence between the notions of partial action of grupoid and partial action will be presented. In addition, it will be seen under what conditions it is possible to generate a weak Hopf algebra from the smash coproduct and the partial smash coproduct. Finally, a dual relationship between the structures of partial action and coaction will be established, just as globalization theorems will be presented for both structures.

Keywords: Weak Hopf algebras, globalization, dualization, partial module coalgebra, partial comodule coalgebra, partial grupoid action, weak smash coproduct.

Índice

Introdução

A noção de ações parciais de um grupo em um conjunto apareceu pela primeira vez no artigo [15] de R. Exel. O objetivo de R. Exel nesse trabalho foi descrever C^*-álgebras cujo grupo de automorfismos é o círculo unitário S_1. Mais tarde, M. Dokuchaev e R. Exel definiram, em [13], a ação parcial de um grupo em uma álgebra, trazendo as ações parciais para um contexto puramente algébrico. A partir daí, muitos resultados foram obtidos, um deles é o desenvolvimento da teoria de Galois para ações parciais de grupos em anéis de M. Dokuchaev, M. Ferrero e A. Paques, [14]. Esse trabalho motivou a definição de ações parciais de álgebras de Hopf apresentada pela primeira vez por S. Caenepeel e K. Janssen em [8]. Além disso, em [8] o conceito de coações parciais de álgebras de Hopf também foi introduzido.

Em [13], E. Exel e M. Dokuchaev investigaram sob quais condições uma ação parcial de grupo possui uma globalização (também conhecida como ação envolvente). Generalizando essa noção, M. Alves e E. Batista, em [1], construíram uma globalização para uma ação parcial de uma álgebra de Hopf em uma álgebra. Esses resultados ficaram conhecidos como Teoremas de Globalização.

A teoria de ações de álgebras de Hopf fraca iniciou com G. Böhm, F. Nill e K. Szlachányi em [6] e vem sendo desenvolvida em trabalhos como [7] e [22]. Nesse ínterim, D. Bagio e A. Paques exibiram em [3] a definição de ação parcial de grupoide em uma álgebra, estendendo a noção de ação parcial de grupo em álgebra. Nesse trabalho também foram generalizadas algumas propriedades apresentadas em [13].

Dando continuidade, F. Castro, A. Paques, G. Quadros e A, Sant'Ana introduziram em [10] o conceito de ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma álgebra e averiguaram que os resultados de álgebras de Hopf são válidos, de forma análoga, para esse novo contexto. Por exemplo, foi estabelecida uma equivalência entre uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em uma álgebra unitária A e a ação parcial da álgebra de grupoide $\Bbbk\mathcal{G}$ em A.

Uma pergunta natural que também surgiu foi saber o que acontece quando a ação parcial não é mais de uma álgebra de Hopf em uma álgebra e sim em uma coálgebra. Assim, no trabalho [9], F. Castro e G. Quadros desenvolvem uma teoria nova para o contexto de coálgebras. Inspirados na definição apresentada em [4] eles apresentaram teoremas de globalização e construiram coproduto smash parcial gerado por coações parciais de álgebras de Hopf em coálgebras, dentre outros resultados.

Dessa forma o estudo de (co)ações parciais de álgebras de Hopf fracas em coálgebras dá continuidade à teoria desenvolvida até aqui. Por isso, o principal intuito deste trabalho é definir uma (co)ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra e averiguar como as propriedades válidas para a teoria de álgebras de Hopf se comportam nesse contexto mais genérico.

No primeiro capítulo deste trabalho é apresentada a base teórica necessária para a compreensão deste texto. Esse capítulo está dividido em três partes: álgebras de Hopf, álgebras de Hopf fracas e (co)ações parciais em álgebras. Todas as propriedades e resultados apresentados nessa parte já existem na literatura, por isso, as respectivas demonstrações serão omitidas. No entanto, as referências são devidamente apresentadas para um maior aprofundamento do assunto.

Na primeira parte do segundo capítulo a definição de ação (global) de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra é reformulada, e, em seguida, é apresentada a definição de ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra, bem como suas respectivas propriedades. Nesse capítulo também é exibida uma família de exemplos de ações parciais de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra. Além disso, é investigado quais condições são necessárias e suficientes para que um módulo coálgebra parcial possa ser gerado a partir de um módulo coálgebra (global) via uma projeção. Por fim, a noção de ação parcial de um grupoide em uma coálgebra é apresentada generalizando a ação de grupo em coálgebra de E. Batista e J. Vercruysse definida em [4], e uma equivalência entre a ação de um grupoide $\mathcal{G}$ em uma coálgebra C e a ação da álgebra de grupode $\Bbbk\mathcal{G}$ em C é construída.

No terceiro capítulo, analogamento ao Capítulo 2, o conceito de coação (global) de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra é reformulado. Logo após, é apresentada a definição de coação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra junto com suas propriedades e uma família de exemplos. Também é averiguado quais condições são necessárias e suficientes para que um comódulo coálgebra parcial possa ser gerado a partir de um comódulo coálgebra (global) via uma projeção. Na última parte desse capítulo é investigado sob quais condições o coproduto smash fraco gera uma álgebra de Hopf fraca, e, por conseguinte, se essas mesmas condições tornam o coproduto smash fraco parcial uma álgebra de Hopf fraca.

No Capítulo 4 deste trabalho há três seções. A primeira seção trata de dualizações, isto é, são averiguadas as correspondências duais entre as estruturas de módulo álgebra parcial, módulo coálgebra parcial, comódulo álgebra parcial e comódulo coálgebra parcial. Já na segunda e na terceira seção são investigadas as condições necessárias para que um módulo coálgebra parcial e um comódulo coálgebra parcial tenham uma globalização, estendendo a ideia apresentada em [11] por F. Castro e G. Quadros.

Convenções

Antes de começar, fixamos as notações que serão usadas ao longo do texto. Denotaremos por $\Bbbk$ um corpo genérico, a menos que seja feita alguma especificação adicional sobre tal estrutura. Além disso, todos os produtos tensoriais serão sobre o corpo $\Bbbk$, assim, utilizaremos a notação $\otimes$ no lugar de $\otimes_{\Bbbk}$. A sempre denotará uma álgebra, C uma coálgebra e H uma álgebra de Hopf fraca. Ao longo do texto outras propriedades podem ser exigidas sobre as estruturas A, C e H, mas elas serão mencionadas na devida oportunidade. Além disso, todas as aplicações consideradas serão $\Bbbk$-lineares e os espaços vetoriais serão considerados sobre o corpo $\Bbbk$. Por fim, o isomorfismo $V \otimes \Bbbk \simeq V \simeq \Bbbk \otimes V$ será usado automaticamente para todo espaço vetorial V.

Capítulo 1

Pre-requisitos

1.1 Álgebra de Hopf

Nesta seção veremos algumas propriedades de álgebras de Hopf que serão necessárias para a compreensão dos próximos capítulos. Apresentaremos apenas os principais resultados dessa teoria, para mais informações fazemos referência a [20] e [19].

Iniciamos com a noção de $\Bbbk$-*álgebra* que é uma tripla (A, m, u), tal que A é $\Bbbk$-espaço vetorial e $m : A \otimes A \to A$ e $u : \Bbbk \to A$ são aplicações $\Bbbk$-lineares que satisfazem:

(i) $m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m)$;

(ii) $m \circ (id_A \otimes u) = m \circ (u \otimes id_A)$.

Seguindo a notação acima, m e u são ditas, respectivamente, multiplicação e unidade de A. O item (ii) nos diz que $u(1_\Bbbk) = 1_A$ é unidade bilateral de A, ou seja, $a1_A = a = 1_A a$, para todo $a \in A$.

O próximo conceito será um dos mais usados no decorrer desse trabalho. É a noção de $\Bbbk$-*coálgebra* que também é uma tripla (C, Δ, ε) onde C é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \Bbbk$ são aplicações $\Bbbk$-lineares que satisfazem:

(i) $(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta$;

(ii) $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \varphi = (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta$.

Com a notação acima, Δ e ε são ditas, respectivamente, comultiplicação e counidade de C. Além disso, usaremos a notação de Sweedler [21] para Δ, isto é,

$$\Delta(h) = \sum_h h_1 \otimes h_2,$$

ou simplesmente,

$$\Delta(h) = h_1 \otimes h_2,$$

onde o somatório está subentendido.

Visto esses conceitos, podemos definir uma estrutura que seja tanto álgebra (H, m, u), quanto coálgebra (H, Δ, ε) e que satisfaça uma compatibilidade entre (H, m, u) e (H, Δ, ε). Dessa forma, um $\Bbbk$-espaço vetorial H é dito uma *biálgebra* se existem aplicações $\Bbbk$-lineares

$$m : H \otimes H \to H, \qquad u : \Bbbk \to H$$

e

$$\Delta : H \to H \otimes H, \qquad \varepsilon : H \to \Bbbk$$

tais que (H, m, u) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e Δ e ε são homomorfismos de álgebras, ou seja,

$$\Delta(hk) = \Delta(h)\Delta(k), \qquad \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$$

e

$$\varepsilon(hk) = \varepsilon(h)\varepsilon(k), \qquad \varepsilon(1_H) = 1_{\Bbbk},$$

para todos $h, k \in H$.

Também é fácil observar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras se, e somente se, m e u são homomorfismos de coálgebras, isto é,

$$(hk)_1 \otimes (hk)_2 = h_1k_1 \otimes h_2k_2, \qquad \varepsilon(hk) = \varepsilon(h)\varepsilon(k)$$

e

$$\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H, \qquad \varepsilon(1_H) = 1_{\Bbbk},$$

para todos $h, k \in H$.

Com isso, estamos aptos a apresentar o conceito de álgebra de Hopf. Considere A uma álgebra e C uma coálgebra. O espaço vetorial $Hom_{\Bbbk}(C, A)$ é uma álgebra, com multiplicação dada por:

$$f * g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C,$$

para todo $f, g \in Hom_{\Bbbk}(C, A)$, mais conhecida como produto convolução. Não é difícil ver que a unidade dessa álgebra é a aplicação $u \circ \varepsilon$ ([12]). No caso em que $A = C = H$ é uma biálgebra, podemos definir a aplicação inversa da identidade id_H, que denotaremos por $S \in Hom_{\Bbbk}(H, H)$ e chamaremos de *antípoda* de H.

Definição 1.1.1. Uma *álgebra de Hopf* é uma biálgebra H que possui antípoda.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da antípoda.

Proposição 1.1.2. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para todo $g, h \in H$,*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$;

(ii) $S(1_H) = 1_H$;

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Proposição 1.1.3. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S, então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*, dada por $S^*(f) = f \circ S$, para todo $f \in S$.*

No que segue, veremos um exemplo de álgebra de Hopf que será útil ao longo desse texto.

Exemplo 1.1.4 (Álgebra de grupo)**.** Sejam G um grupo e $\Bbbk G$ o $\Bbbk$-espaço vetorial com base $\{\delta_g\}_{g\in G}$. Então, $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com as seguintes estruturas:

$$m(\delta_g \otimes \delta_h) = \delta_{gh}$$

$$u(1_{\Bbbk}) = 1_G$$

$$\Delta(\delta_g) = \delta_g \otimes \delta_g$$

$$\varepsilon(\delta_g) = 1_{\Bbbk}$$

$$S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

1.2 Álgebra de Hopf Fraca

Nessa seção, relembraremos a noção de álgebra de Hopf fraca à partir do conceito mais geral de biálgebra fraca. Também apresentaremos várias propriedades importantes dessas estruturas, que serão fundamentais para o desenvolvimento da teoria de (co)ações parciais de álgebras de Hopf fracas em coálgebras. Com intuito de não tornar o texto extenso, iremos omitir as demonstrações de tais propriedades, mas elas podem ser facilmente encontradas em [5] e [7].

Como vimos, uma biálgebra $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma estrutura na qual ε e Δ são multiplicativas e preservam a unidade. Agora, trabalharemos com uma noção semelhante a essa, embora um pouco mais genérica, no sentido que não exigiremos todas essas condições para Δ e ε. Assim, um $\Bbbk$-espaço vetorial H é dito uma *biálgebra fraca* se existem aplicações $\Bbbk$-lineares

$$m : H \otimes H \to H, \qquad u : \Bbbk \to H$$

e

$$\Delta : H \to H \otimes H, \qquad \varepsilon : H \to \Bbbk$$

tais que (H, m, u) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e, além disso, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\Delta(hk) = \Delta(h)\Delta(k)$.

(ii) $\varepsilon(hk\ell) = \varepsilon(hk_1)\varepsilon(k_2\ell) = \varepsilon(hk_2)\varepsilon(k_1\ell)$.

(iii) $(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) = \Delta^2(1_H)$.

Com as notações apresentadas anteriormente, o item (iii) indica que

$$1_{1'} \otimes 1_1 1_{2'} \otimes 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 1_{1'} \otimes 1_{2'} = 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3.$$

Além disso, como Δ é multiplicativa, concluímos que $\Delta(h) = \Delta(h1_H) = \Delta(1_H h)$, então,

$$\begin{aligned} h_1 \otimes h_2 &= h_1 1_1 \otimes h_2 1_2 && (1.1)\\ &= 1_1 h_1 \otimes 1_2 h_2 && (1.2)\end{aligned}$$

Observemos que toda biálgebra é também uma biálgebra fraca, assim, a definição acima generaliza a que vimos na Seção 1.1.

Visto isso, podemos usar a counidade ε para definir as seguintes aplicações que são $\Bbbk$-lineares pela $\Bbbk$-linearidade de ε:

$$\varepsilon_t : H \to H$$

$$
\begin{aligned}
h &\mapsto \varepsilon(1_1 h)1_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s : H &\to H \\
h &\mapsto 1_1\varepsilon(h1_2).
\end{aligned}
$$

Essas funções são ditas, respectivamente, de função alvo (*target*) e função fonte (*source*), o que dá origem à notação usada. A partir delas, obtemos os conjuntos $H_t = \varepsilon_t(H)$ e $H_s = \varepsilon_s(H)$. Notemos que, H_t e H_s são espaços vetoriais devido à linearidade das funções que lhes deu origem. Assim, para uma álgebra de Hopf fraca qualquer H, todo elemento $h \in H$ pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
h &= (\varepsilon \otimes I)\Delta(h) \\
&= (\varepsilon \otimes I)\Delta(1_H h) \\
&= (\varepsilon \otimes I)(1_{H1}h_1 \otimes 1_{H2}h_2) \\
&= \varepsilon(1_{H1}h_1)1_{H2}h_2 \\
&= \varepsilon_t(h_1)h_2. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
h &= (I \otimes \varepsilon)\Delta(h) \\
&= (I \otimes \varepsilon)\Delta(h1_H) \\
&= (I \otimes \varepsilon)(h_1 1_{H1} \otimes h_2 1_{H2}) \\
&= h_1 1_{H1}\varepsilon(h_2 1_{H2}) \\
&= h_1\varepsilon_s(h_2). \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Também é fácil ver que as seguintes propriedades são estabelecidas direto da definição:

$$
\varepsilon_t(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(h), \forall h \in H \qquad (1.5)
$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(\varepsilon_s(h)) &= \varepsilon_s(h), \forall h \in H &(1.6)\\
\varepsilon(h\varepsilon_t(k)) &= \varepsilon(hk), \forall h, k \in H &(1.7)\\
\varepsilon(\varepsilon_s(h)k) &= \varepsilon(hk), \forall h, k \in H. &(1.8)
\end{aligned}$$

Além disso, usando *Lema* 1.4.5 de [12], é possível mostrar que

$$\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t \qquad (1.9)$$

e, dessa forma, obter que H_t e H_s são isomorfos como $\Bbbk$-espaços vetoriais quando assumimos que a $\Bbbk$-dimensão de H é finita.

Observação 1.2.1. No caso em que H é uma álgebra de Hopf, $\varepsilon_t(h) = \varepsilon_s(h) = 1_H\varepsilon(h)$, e as propriedades acima são triviais. Assim, encontramos que $H_t = H_s = \Bbbk 1_H$.

Com as propriedades 1.7 e 1.8, é fácil mostrar que,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(h\varepsilon_t(k)) &= \varepsilon_t(hk), \forall h, k \in H &(1.10)\\
\varepsilon_s(\varepsilon_s(h)k) &= \varepsilon_s(hk), \forall h, k \in H. &(1.11)
\end{aligned}$$

Assim, é possível ver que $\Delta(H_t) \subseteq H \otimes H_t$ e que $\Delta(H_s) \subseteq H_s \otimes H$. E, ainda mais especificamente,

$$\begin{aligned}
\Delta(h) &= 1_1 h \otimes 1_2, \forall h \in H_t &(1.12)\\
\Delta(h) &= 1_1 \otimes h 1_2, \forall h \in H_s. &(1.13)
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos também que,

$$\begin{aligned}
h_1 \otimes \varepsilon_t(h_2) &= 1_1 h \otimes 1_2, \forall h \in H &(1.14)\\
\varepsilon_s(h_1) \otimes h_2 &= 1_1 \otimes h 1_2, \forall h \in H &(1.15)\\
h\varepsilon_t(k) &= \varepsilon(h_1 k) h_2, \forall h, k \in H &(1.16)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_s(h)k \quad = \quad k_1\varepsilon(hk_2), \forall h, k \in H. \tag{1.17}$$

Dadas essas propriedades, podemos apresentar um importante resultado que diz que H_t e H_s são subálgebras de H tais que contêm 1_H e que

$$hk \quad = \quad kh, \ \forall h \in H_t, \ k \in H_s. \tag{1.18}$$

Para finalizar, ainda é possível mostrar que

$$1_{1'} \otimes \varepsilon_t(1_{2'}) \otimes 1_{3'} \quad = \quad 1_1 1_{1'} \otimes 1_2 \otimes 1_{2'} \tag{1.19}$$

$$1_1 \otimes \varepsilon_s(1_2) \otimes 1_3 \quad = \quad 1_1 \otimes 1_{1'} \otimes 1_2 1_{2'} \tag{1.20}$$

$$\varepsilon_t(\varepsilon_t(h)k) \quad = \quad \varepsilon_t(h)\varepsilon_t(k), \forall h, k \in H \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_s(h\varepsilon_s(k)) \quad = \quad \varepsilon_s(h)\varepsilon_s(k), \forall h, k \in H. \tag{1.22}$$

Com esses resultados, estamos aptos a introduzir o conceito de álgebra de Hopf fraca. Assim como em álgebras de Hopf, uma nova aplicação é definida, chamada antípoda. Assim como na teoria clássica, a antípoda está relacionada com a counidade, como podemos ver a seguir.

Definição 1.2.2. Seja H uma biálgebra fraca. Dizemos que H é uma *álgebra de Hopf fraca* se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear S, chamada antípoda, que satisfaz

(i) $h_1S(h_2) = \varepsilon_t(h), \forall h \in H$

(ii) $S(h_1)h_2 = \varepsilon_s(h), \forall h \in H$

(iii) $S(h_1)h_2S(h_3) = S(h), \forall h \in H.$

Assim como na teoria clássica, a antípoda de uma álgebra de Hopf fraca é *anti-multiplicativa*, isto é, $S(hk) = S(k)S(h)$, e *anti-comultiplicativa*, o que significa que $S(h)_1 \otimes S(h)_2 = S(h_2) \otimes S(h_1)$. Além disso, as seguintes identidades são válidas para todo $h \in H$:

$$\varepsilon_t(h) \quad = \quad \varepsilon(S(h)1_1)1_2 \tag{1.23}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s(h) &= 1_1\varepsilon(1_2S(h)) && (1.24)\\
\varepsilon_t(h) &= S(1_1)\varepsilon(1_2h) && (1.25)\\
\varepsilon_s(h) &= \varepsilon(h1_1)S(1_2) && (1.26)\\
\varepsilon_t\circ S &= \varepsilon_t\circ\varepsilon_s = S\circ\varepsilon_s && (1.27)\\
\varepsilon_s\circ S &= \varepsilon_s\circ\varepsilon_t = S\circ\varepsilon_t. && (1.28)
\end{aligned}
$$

Com essas propriedades mostramos que $S(1_H) = 1_H$, $\varepsilon \circ S = \varepsilon$, $S(H_t) = H_s$, $S(H_s) = H_t$ e

$$1_1 \otimes 1_2 = S(1_2) \otimes S(1_1). \tag{1.29}$$

Dessa forma, conclui-se que se H é uma álgebra de Hopf franca, então $S(H)$ também o é, com mesma counidade e antípoda. Além disso, seguem as seguintes identidades, onde as três últimas são válidas se a antípoda é bijetiva:

$$
\begin{aligned}
h_1\otimes h_2S(h_3) &= 1_1h\otimes 1_2,\ \forall h\in H && (1.30)\\
S(h_1)h_2\otimes h_3 &= 1_1\otimes h1_2,\ \forall h\in H && (1.31)\\
h_1\otimes S(h_2)h_3 &= h1_1\otimes S(1_2),\ \forall h\in H && (1.32)\\
h_1S(h_2)\otimes h_3 &= S(1_1)\otimes 1_2h,\ \forall h\in H && (1.33)\\
h_2S^{-1}(h_1)\otimes h_3 &= S(\varepsilon_t(h_1))\otimes h_2 = 1_1\otimes 1_2h,\ \forall h\in H && (1.34)\\
1_1S^{-1}(h)\otimes 1_2 &= 1_1\otimes 1_2h,\ \forall h\in H_t && (1.35)\\
1_1\otimes S^{-1}(h)1_2 &= h1_1\otimes 1_2,\ \forall h\in H_s. && (1.36)
\end{aligned}
$$

Já vimos que toda álgebra de Hopf é uma álgebra de Hopf fraca. Uma pergunta natural que surge é "sob quais condições um álgebra de Hopf fraca se torna uma álgebra de Hopf?". Com o intuito de respondê-la apresentamos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. *Uma álgebra de Hopf fraca é uma álgebra de Hopf se uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

(i) $\Delta(1_H) = 1_h \otimes 1_H$

(ii) $\varepsilon(hk) = \varepsilon(h)\varepsilon(k), \forall h, k \in H$

(iii) $h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H, \forall h \in H$

(iv) $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H, \forall h \in H$

(v) $H_t = H_s = \Bbbk 1_H$.

Com a finalidade de construirmos um exemplo de álgebra de Hopf fraca, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.2.4 (Grupoide)**.** Considere $\mathcal{G}$ um conjunto não vazio munido de uma operação binária, definida parcialmente, a qual será denotada pela concatenação. Chamaremos essa operação de produto. Dados $g, h \in \mathcal{G}$, escrevemos $\exists gh$ sempre que o produto gh estiver definido (analogamente usaremos $\nexists gh$ sempre que o produto não estiver definido). Um elemento e é chamado de identidade se $\exists ge$ implicar $ge = g$ e $\exists eg$ implicar que $eg = g$. Assim, $\mathcal{G}$ é chamado de *grupoide* se

(i) Para todos $g, h, l \in \mathcal{G}$, $\exists (gh)l$ se, e somente se, $\exists g(hl)$, e neste caso, $(gh)l = g(hl)$.

(ii) Para todos $g, h, l \in \mathcal{G}$, $\exists (gh)l$ se, e somente se, $\exists gh$ e $\exists hl$.

(iii) Para cada $g \in \mathcal{G}$ existem únicos elementos $d(g), r(g) \in \mathcal{G}$ tais que $\exists gd(g)$, $\exists r(g)g$ e $gd(g) = g = r(g)g$.

(iv) Para cada $g \in \mathcal{G}$ existe um elemento tal que $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$.

Da Definição 1.2.4 é possível mostrar que o elemento g^{-1} é o único que satisfaz tal propriedade e, além disso, $(g^{-1})^{-1} = g, \forall g \in \mathcal{G}$. Também temos que um elemento e é dito identidade em $\mathcal{G}$ se, para algum $g \in \mathcal{G}$, $e = d(g) = r(g^{-1})$. Nesse caso, dizemos que e é identidade domínio de g e identidade imagem de g^{-1}. Outra propriedade extremamente útil é que $e^2 = e$, o que implica que $d(e) = e = r(e)$ e que $e = e^{-1}$. Denotaremos por $\mathcal{G}_0$ o conjunto de todos os elementos identidade de $\mathcal{G}$.

Como a operação binária definida em $\mathcal{G}$ é parcial, nem sempre podemos operar dois elementos quaisquer de $\mathcal{G}$, por isso definimos o conjunto

$$\mathcal{G}^2 = \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \exists gh\}$$

de todos os pares de elementos operáveis em $\mathcal{G}$.

A seguir, veremos um resultado que apresenta propriedades fundamentais ao se trabalhar com a teoria de grupoides.

Proposição 1.2.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então, para todos $g, h \in \mathcal{G}$, temos:*

(i) $\exists gh$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$ e, nesse caso, $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$.

(ii) $\exists gh$ se, e somente se, $\exists h^{-1}g^{-1}$ e, nesse caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Exemplo 1.2.6 (Álgebra de grupoide)**.** Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide tal que a cardinalidade $|\mathcal{G}_0|$ de $\mathcal{G}_0$ é finita e $\Bbbk\mathcal{G}$ o $\Bbbk$-espaço vetorial com base indexada pelos elementos de $\mathcal{G}$ dada por $\{\delta_g\}_{g\in\mathcal{G}}$. Então, $\Bbbk\mathcal{G}$ é uma álgebra de Hopf fraca com as seguintes estruturas:

$$1_{\Bbbk\mathcal{G}} = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_e$$

$$m(\delta_g \otimes \delta_h) = \begin{cases} \delta_{gh}, & \text{se } \exists gh \ , \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$u(1_\Bbbk) = 1_\mathcal{G}$$

$$\Delta(\delta_g) = \delta_g \otimes \delta_g$$

$$\varepsilon(\delta_g) = 1_\Bbbk$$

$$S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

Assim como no caso de uma álgebra de Hopf, quando assumimos que a $\Bbbk$-dimensão de uma álgebra de Hopf fraca H é finita obtemos que a estrutura dual $H^* = Hom(H, \Bbbk)$ é uma álgebra de Hopf fraca com o produto convolução dado por

$$m(f \otimes g)(h) = f(h_1)g(h_2),$$

unidade dada por $u(1_\Bbbk) = 1_{H^*} = \varepsilon_H$, coproduto definido pela relação

$$\Delta(f) = f_1 \otimes f_2 \Leftrightarrow f(ab) = f_1(a)f_2(b)$$

e counidade dada por

$$\varepsilon_{H^*}(f) = f(1_H).$$

Além disso, temos que

$$(\varepsilon_t)_{H^*}(f) = f \circ \varepsilon_t$$

e

$$(\varepsilon_s)_{H^*}(f) = f \circ \varepsilon_s.$$

O exemplo abaixo é apresentado para ilustrar esse resultado.

Exemplo 1.2.7 (Dual de uma Álgebra de grupoide)**.** Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide finito e $(\Bbbk\mathcal{G})^*$ o $\Bbbk$-espaço vetorial com base indexada pelos elementos de $\mathcal{G}$ dada por $\{p_g\}_{g\in\mathcal{G}}$, onde

$$p_g(\delta_h) = \begin{cases} 1_\Bbbk, & \text{se } g = h \ , \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, $(\Bbbk\mathcal{G})^*$ é uma álgebra de Hopf fraca com as seguintes estruturas:

$$m(p_g \otimes p_h)(k) = p_g(k_1)p_h(k_2)$$

$$u(1_\Bbbk) = 1_{(\Bbbk\mathcal{G})^*} = \varepsilon_{\Bbbk\mathcal{G}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} p_g$$

$$\Delta(p_g) = \sum_{h \in \mathcal{G}, \exists h^{-1}g} p_h \otimes p_{h^{-1}g}$$

$$\varepsilon(p_g) = p_g(1_{\Bbbk\mathcal{G}})$$

$$S(p_g) = p_g \circ S.$$

1.3 (Co)Ações em Álgebras

Nesta seção apresentaremos um pouco da teoria de (co)ações de álgebras de Hopf fraca em álgebras. Para isso, veremos as noções introduzidas por F. Castro, A. Paques, G. Quadros e A. Sant'Ana, em [10], de (co)ações parciais de álgebras de Hopf fraca em álgebras. O leitor interessado por mais detalhes pode consultar [7], [10] , [11] e [18]. Ao longo da seção, H representa uma álgebra de Hopf fraca.

Definição 1.3.1. [7] Seja A uma álgebra. Uma ação (global) à esquerda de H em A é uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \triangleright \colon H \otimes A &\longrightarrow A \\ h \otimes a &\longmapsto h \triangleright a \end{aligned}$$

tal que para $h, k \in H$ e $a, b \in A$,

(i) $1_H \triangleright a = a$

(ii) $h \triangleright ab = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b)$

(iii) $h \triangleright (k \triangleright a) = hk \triangleright a$

(iv) $h \triangleright 1_A = \varepsilon_t(h) \triangleright 1_A$.

Nesse caso, dizemos que A é um *H-módulo álgebra (global) à esquerda*. Analogamente, podemos definir um H-módulo álgebra à direita. Em [10], F. Castro, A.

Paques, G. Quadros e A. Sant'Ana mostraram que as condições (i)-(iii) implicam que

$$h \triangleright 1_A = \varepsilon_t(h) \triangleright 1_A.$$

Definição 1.3.2. [10] Uma álgebra A é um *H-módulo álgebra parcial à esquerda* se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \cdot : H \otimes A &\longrightarrow A \\ h \otimes a &\longmapsto h \cdot a \end{aligned}$$

tal que para $h, k \in H$ e $a, b \in A$,

(i) $1_H \cdot a = a$

(ii) $h \cdot ab = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$

(iii) $h \cdot (k \cdot a) = (h_1 \cdot 1_A)(h_2 k \cdot a)$.

Nesse caso, dizemos que existe uma ação parcial de H em A. Se além dos itens acima, tivermos a hipótese adicional de que $h \cdot (k \cdot a) = (h_1 k \cdot a)(h_2 \cdot 1_A)$, dizemos que a ação parcial é *simétrica*. De forma análoga, define-se módulo álgebra parcial à direita.

Pode-se mostrar que os itens (i), (ii) e (iii) acima são equivalentes aos itens.

(i)' $1_H \cdot a = a$

(ii)' $h \cdot (a(k \cdot b)) = (h_1 \cdot a)(h_2 k \cdot b)$.

Em [10] os autores mostraram que todo módulo álgebra global é parcial. E, além disso, um módulo álgebra parcial é global se e somente se

$$h \cdot 1_A = \varepsilon_t(h) \cdot 1_A.$$

Exemplo 1.3.3. [10] Seja $H_4 =< g, x | g^2 = 1,\ x^2 = 0\ e\ gx = -xg >_{\Bbbk}$ a álgebra de Sweedler. Defina $\lambda \in Hom(H_4, \Bbbk)$ dada por

$$\begin{aligned} \lambda : H_4 &\to \Bbbk \\ 1 &\mapsto 1_{\Bbbk} \\ g &\mapsto 0 \\ x &\mapsto r \\ xg &\mapsto -r \end{aligned}$$

onde $r \in \Bbbk$. Então tomando H uma álgebra de Hopf fraca qualquer, a aplicação

$$\begin{aligned} H \otimes H_4 \otimes H &\to H \\ h \otimes v \otimes k &\mapsto h_1 k S(h_2) \lambda(v) \end{aligned}$$

define em H uma estrutura de $(H \otimes H_4)$-módulo álgebra parcial.

Além disso, F. Castro, A. Paques, G. Quadros e A. Sant'Ana também caracterizaram uma família particular de exemplos. Considere H uma álgebra de Hopf fraca e A uma álgebra. Temos que

$$\begin{aligned} \cdot : H \otimes A &\longrightarrow A \\ h \otimes a &\longmapsto h \cdot a = \lambda(h) a \end{aligned}$$

é uma ação parcial à esquerda de H sobre a álgebra A se e somente se a aplicação $\Bbbk$-linear $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $\lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(h_1)\lambda(h_2 k)$, para quaisquer $h, k \in H$.

A definição de ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em uma álgebra foi introduzida por D. Bagio e A. Paques em [3]. Essa noção foi um fator importante para a teoria desenvolvida por G. Quadros em [18].

Definição 1.3.4. [3] Uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em uma álgebra A é um par

$$\alpha = (\{\alpha_g\}, \{D_g\})_{g \in \mathcal{G}}$$

onde para cada $e \in \mathcal{G}_0$ e $g \in \mathcal{G}$, D_e é um ideal de A, D_g é um ideal de $D_{r(g)}$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo de álgebra tal que:

(i) α_e é identidade de D_e

(ii) $\alpha_{h^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x), \forall x \in \alpha_{h^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$,

para todo $e \in G_0$ e $g, h \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = r(h)$.

Em [10] a Definição 1.3.4 foi usada pelos autores para estabelecer uma relação biunívoca entre essa noção e a de H-módulo álgebra parcial, onde H é uma álgebra de Hopf fraca particular, como é possível ser visto no seguinte resultado.

Teorema 1.3.5. *Sejam A uma álgebra e $\mathcal{G}$ um grupoide tal que $|\mathcal{G}_0|$ é finito. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Exite uma ação parcial $\alpha = (\{\alpha_g\}, \{D_g\})_{g \in \mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em A tal que os ideais D_g são unitários e $A = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} D_e$.

(ii) A é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo álgebra parcial simétrico.

De forma análoga ao caso de álgebras de Hopf, em [10], os autores definiram uma globalização para um módulo álgebra parcial como podemos ver a seguir.

Definição 1.3.6. [10] Seja A um H-módulo álgebra parcial. Nós dizemos que (B, θ) é uma globalização de A se B é um H-módulo coálgebra via $\triangleright : H \otimes B \to B$, e

(i) $\theta : A \to B$ é um monomorfismo de álgebras tal que $\theta(A)$ é um ideal à direita de B.

(ii) A ação parcial em A é equivalente à ação parcial induzida por $\triangleright$ em $\theta(A)$, isto é, $\theta(h \cdot a) = h \cdot \theta(a) = \theta(1_A)(h \triangleright \theta(a))$.

(iii) B é um H-módulo álgebra gerado por $\theta(A)$, isto é, $B = H \triangleright \theta(A)$.

Além disso, eles mostraram que sempre é possível construir uma globalização para um módulo álgebra parcial.

Assim como no contexto de álgebras de Hopf, quando H é uma álgebra de Hopf fraca também é possível definir uma estrutura de comódulo em uma álgebra, como podemos ver a seguir.

Definição 1.3.7. [6] Seja A uma álgebra. Uma coação (global) à direita de H em A é uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow A \otimes H \\ a &\longmapsto a^0 \otimes a^1 \end{aligned}$$

tal que para $a, b \in A$,

(i) $(I \otimes \varepsilon)\rho(a) = a$

(ii) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$

(iii) $(\rho \otimes I)\rho(a) = (I \otimes \Delta)\rho(a)$

(iv) $\rho(1_A) = (I \otimes \varepsilon_t)\rho(1_A)$.

Nesse caso, dizemos que A é um H-*comódulo álgebra à direita*. Analogamente, podemos definir um A é um H-comódulo álgebra à esquerda. Em [18], G. Quadros mostrou que as condições (i)-(iii) implicam que

$$\rho(1_A) = (I \otimes \varepsilon_t)\rho(1_A).$$

Definição 1.3.8. [18] Seja A uma álgebra. Uma coação parcial (à direita) de H em A é uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \overline{\rho} : A &\longrightarrow A \otimes H \\ a &\longmapsto a^0 \otimes a^1 \end{aligned}$$

tal que para $a \in A$,

(i) $(I \otimes \varepsilon)\overline{\rho}(a) = a$

(ii) $\overline{\rho}(ab) = \overline{\rho}(a)\overline{\rho}(b)$

(iii) $(\overline{\rho} \otimes I)\overline{\rho}(a) = (\overline{\rho}(1_A) \otimes 1_H)((I \otimes \Delta)\overline{\rho}(a))$.

Sob essas condições, dizemos que A é um H-*comódulo álgebra parcial*. Se, além dessas condições, A satisfizer $(\overline{\rho}\otimes I)\overline{\rho}(a) = ((I\otimes\Delta)\overline{\rho}(a))(\overline{\rho}(1_A)\otimes 1_H)$, então, dizemos que A é um H-comódulo álgebra parcial *simétrico*. Notemos que os itens acima são equivalentes aos itens:

(i') $(I \otimes \varepsilon)\overline{\rho}(a) = a$

(ii') $(\overline{\rho} \otimes I)((a \otimes 1_H)\overline{\rho}(b)) = (\overline{\rho}(a) \otimes 1_H)((I \otimes \Delta)\overline{\rho}(b))$,

para todos $a, b \in A$. Já o item de simetria é equivalente a

$$(\overline{\rho} \otimes I)(\overline{\rho}(b)(a \otimes 1_H)) = ((I \otimes \Delta)\overline{\rho}(b))(\overline{\rho}(a) \otimes 1_H).$$

Em [18], G. Quadros mostrou que todo comódulo álgebra global é parcial. E, além disso, um módulo álgebra parcial é global se e somente se

$$\rho(1_A) = (I \otimes \varepsilon_t)\rho(1_A).$$

Exemplo 1.3.9. [18] Seja $H_4 =< g, x | g^2 = 1,\ x^2 = 0\ e\ gx = -xg >_{\Bbbk}$ a álgebra de Sweedler sobre um corpo $\Bbbk$ de característica diferente de 2. Tome $v = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}g + rxg$ um elemento em H_4 com $r \in \Bbbk$. Para uma álgebra de Hopf fraca H, defina

$$\begin{aligned} \overline{\rho} : H &\to H \otimes H \otimes H_4 \\ h &\mapsto h_1 \otimes h_2 \otimes v. \end{aligned}$$

Assim, $\overline{\rho}$ define em H uma estrutura de $H \otimes H_4$-comódulo álgebra parcial.

Capítulo 2

Ações Parciais de Álgebras de Hopf fracas em Coálgebras

Começaremos esse capítulo introduzindo a noção apresentada por G. Böhm, em [6], de ações de álgebras de Hopf fracas em coálgebras e algumas contribuições acerca desse assunto. Isso dará motivação para definirmos ações parciais de álgebras de Hopf fracas em coálgebras bem como algumas propriedades que se mostrarão de grande importância para a teoria desenvolvida.

2.1 Módulo Coálgebra

Em [6], G. Böhm diz que C é um *H-módulo coálgebra* (global) à esquerda se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \triangleright : H \otimes C &\to C \\ h \otimes c &\mapsto h \triangleright c \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $h, k \in H$ e $c \in C$:

(i) $\Delta(h \triangleright c) = h_1 \triangleright c_1 \otimes h_2 \triangleright c_2$

(ii) $1_H \triangleright c = c$

(iii) $h \triangleright k \triangleright c = hk \triangleright c$

(iv) $\varepsilon(h \triangleright c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \triangleright c)$.

Todavia, o último item dessa definição é desnecessário pois segue dos anteriores, como vemos a seguir.

Proposição 2.1.1. *Se existe uma aplicação linear*

$$\begin{aligned} \triangleright : H \otimes C &\to C \\ h \otimes c &\mapsto h \triangleright c \end{aligned}$$

que satisfaz

(i) $\Delta(h \triangleright c) = h_1 \triangleright c_1 \otimes h_2 \triangleright c_2$

(ii) $1_H \triangleright c = c$

(iii) $h \triangleright g \triangleright c = hg \triangleright c$,

então a condição

$$\varepsilon(h \triangleright c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \triangleright c)$$

é automaticamente satisfeita.

Demonstração. Sejam $c \in C$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h \triangleright c) &= \varepsilon(h \triangleright 1_H \triangleright c) \\
&= \varepsilon(1_{H_1} \triangleright c_1)\varepsilon(h \triangleright 1_{H_2} \triangleright c_2) \\
&= \varepsilon(1_{H_1} \triangleright c_1)\varepsilon(h1_{H_2} \triangleright c_2) \\
&= \varepsilon(\varepsilon_s(h_1) \triangleright c_1)\varepsilon(h_2 \triangleright c_2) \\
&= \varepsilon(S(h_1)h_2 \triangleright c_1)\varepsilon(h_3 \triangleright c_2) \\
&= \varepsilon(S(h_1) \triangleright h_2 \triangleright c_1)\varepsilon(h_3 \triangleright c_2) \\
&= \varepsilon(S(h_1) \triangleright h_2 \triangleright c) \\
&= \varepsilon(S(h_1)h_2 \triangleright c) \\
&= \varepsilon(\varepsilon_s(h) \triangleright c).
\end{aligned}$$

□

É imediato que, no caso em que H é uma álgebra de Hopf, as definições de H-módulo coálgebra são equivalentes, incluindo também esse último resultado, pois, se H é Hopf, para todo $h \in H$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varepsilon_s(h) \triangleright c) &= \varepsilon(1_H\varepsilon(h) \triangleright c) \\
&= \varepsilon(1_H \triangleright c)\varepsilon(h) \\
&= \varepsilon(c)\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Assim, a definição de módulo coálgebra (à esquerda), para uma álgebra de Hopf fraca, pode ser vista da seguinte forma:

Definição 2.1.2. Dizemos que C é um H-módulo coálgebra à esquerda se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned}
\triangleright : H \otimes C &\to C \\
h \otimes c &\mapsto h \triangleright c
\end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $h, g \in H$ e $c \in C$:

(MC1) $\Delta(h \triangleright c) = h_1 \triangleright c_1 \otimes h_2 \triangleright c_2$

(MC2) $1_H \triangleright c = c$

(MC3) $h \triangleright g \triangleright c = hg \triangleright c$.

Nesse caso, dizemos também que H age na coálgebra C. Similarmente, podemos definir um H-módulo coálgebra à direita.

Exemplo 2.1.3. Considere H uma álgebra de Hopf fraca, então, H é um H-módulo coálgebra via a mutiplicação de H,

$$\begin{aligned} \triangleright : H \otimes H &\to H \\ h \otimes g &\mapsto hg. \end{aligned}$$

2.2 Módulo Coálgebra Parcial

Ao longo dessa seção, apresentaremos o conceito de uma ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra. Também veremos algumas propriedades e alguns exemplos que dão base para essa teoria.

Definição 2.2.1. Dizemos que C é um *H-módulo coálgebra parcial* à esquerda (ou que H age parcialmente em C à esquerda) se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \cdot : \ H \otimes C &\to C \\ h \otimes c &\mapsto h \cdot c \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $h, k \in H$ e $c \in C$:

(MCP1) $\Delta(h \cdot c) = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2$

(MCP2) $1_H \cdot c = c$

(MCP3) $h \cdot k \cdot c = (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(k_2 \cdot c_2)$.

Além disso, dizemos que C é um *H-módulo coálgebra parcial simétrico* à esquerda se ainda satisfizer,

$$h \cdot k \cdot c = \varepsilon(k_1 \cdot c_1)(hk_2 \cdot c_2).$$

De forma análoga à apresentada Definição 2.2.1, podemos definir um H-módulo coálgebra parcial (simétrico) à direita. Ao longo dessa seção sempre quando nos referirmos a um H-módulo coálgebra parcial ele será considerado à esquerda. Além disso, a noção de módulo coálgebra parcial generaliza a de módulo coálgebra (global) no sentido que todo H-módulo coálgebra (global) (à esquerda) é, na verdade, um H-módulo coálgebra parcial (à esquerda). De fato, dados $c \in C$ e $h, k \in H$,

$$\begin{aligned} h \triangleright k \triangleright c &= h \triangleright (k_1 \triangleright c_1)\varepsilon(k_2 \triangleright c_2) \\ &= (hk_1 \triangleright c_1)\varepsilon(k_2 \triangleright c_2). \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ álgebra de grupoide, sendo $\mathcal{G}$ gerado pela união disjunta dos grupos G_1, G_2. Então a álgebra de grupos $\Bbbk G_1$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra parcial via

$$\delta_g \cdot \zeta_h = \begin{cases} \zeta_h, \ se \ g = e_1 \\ 0, se \ g \neq e_1, \end{cases}$$

sendo e_1 o elemento neutro do grupo G_1, e $\{\zeta_g\}_{g \in G_1}$ base de $\Bbbk G_1$.

Lema 2.2.3. *Seja C um H-módulo coálgebra parcial à esquerda tal que*

$$\varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot c),$$

então

$$h \cdot c = (h1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(S(1_{H_2}) \cdot c_2),$$

para todo $h \in H$ e $c \in C$.

Demonstração. Sabemos que um módulo coálgebra global satisfaz a condição $h \cdot c = (h1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(S(1_{H_2}) \cdot c_2)$. Vejamos agora a recíproca. Sejam $h \in H$ e $c \in C$,

$$(h1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(S(1_{H_2}) \cdot c_2) \overset{1.32}{=} (h_1 \cdot c_1)\varepsilon(S(h_2)h_3 \cdot c_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= (h_1 \cdot c_1)\varepsilon(\varepsilon_s(h_2) \cdot c_2)\\
&= (h_1 \cdot c_1)\varepsilon(h_2 \cdot c_2)\\
&= h \cdot c.
\end{aligned}
$$

□

O Lema acima é importante para o próximo resultado que caracteriza a condição necessária e suficiente pra que um H-módulo coálgebra parcial (à esquerda) seja um H-módulo coálgebra global (à esquerda).

Proposição 2.2.4. *Seja C um H-módulo coálgebra parcial (à esquerda). Então, C é um H-módulo coálgebra global (à esquerda) se, e somente se,*

$$\varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot c),$$

para todo $h \in H$ e $c \in C$.

Demonstração. Para tal, basta mostrarmos que $h \cdot k \cdot c = hk \cdot c$, para todos $h, k \in H$ e $c \in C$. De fato,

$$
\begin{aligned}
h \cdot k \cdot c &= (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(k_2 \cdot c_2)\\
&= (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(\varepsilon_s(k_2) \cdot c_2)\\
&= (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(S(k_2)k_3 \cdot c_2)\\
&\overset{1.32}{=} (hk1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(S(1_{H_2}) \cdot c_2)\\
&\overset{2.2.3}{=} hk \cdot c,
\end{aligned}
$$

□

É imediato observar que se C é um H-módulo coálgebra global, então C satisfaz

$$h \triangleright c = (h1_{H_1} \triangleright c_1)\varepsilon(S(1_{H_2}) \triangleright c_2).$$

Os próximos resultados tem o objetivo de apresentar algumas propriedades que envolvem H_t e H_s. A ideia é explorar como as ações dessas subálgebras podem ser caracterizadas.

Proposição 2.2.5. *Suponha que C é um H-módulo coálgebra parcial (à esquerda), então, para todo $h \in H_t$, $k \in H$ e $c \in C$ temos:*

(i) $h \cdot k \cdot c = hk \cdot c$

(ii) $\Delta(h \cdot c) = h \cdot c_1 \otimes c_2$.

Demonstração. Sejam $h \in H_t$, $k \in H$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned} h \cdot k \cdot c &= (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(k_2 \cdot c_2) \\ &= (h1_{H_1}k_1 \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_2}k_2 \cdot c_2) \\ &\overset{(1.18)}{=} (1_{H_1}hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_2}k_2 \cdot c_2) \\ &\overset{(1.12)}{=} (h_1k_1 \cdot c_1)\varepsilon(h_2k_2 \cdot c_2) \\ &= ((hk)_1 \cdot c_1)\varepsilon((hk)_2 \cdot c_2) \\ &= hk \cdot c \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta(h \cdot c) &= (h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2) \\ &= (h1_{H_1} \cdot c_1) \otimes (1_{H_2} \cdot c_2) \\ &= (h \cdot 1_{H_1} \cdot c_1) \otimes (1_{H_2} \cdot c_2) \\ &= h \cdot c_1 \otimes c_2, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue de (i) e a última igualdade segue de

$$\begin{aligned} c_1 \otimes c_2 &= \Delta(c) \\ &= \Delta(1_H \cdot c) \\ &= 1_{H_1} \cdot c_1 \otimes 1_{H_2} \cdot c_2. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.6. *Se $h \in H_t$, então $\varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot c)$, para todo $c \in C$.*

Demonstração. Basta observar que, para todo $h \in H_t$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h \cdot c) &= \varepsilon(h \cdot 1_H \cdot c) \\
&= \varepsilon(1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(h \cdot 1_{H_2} \cdot c_2) \\
&\overset{2.2.5}{=} \varepsilon(1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(h1_{H_2} \cdot c_2) \\
&\overset{(1.15)}{=} \varepsilon(\varepsilon_s(h_1) \cdot c_1)\varepsilon(h_2 \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(S(h_1)h_2 \cdot c_1)\varepsilon(h_3 \cdot c_2) \\
&\overset{(1.12)}{=} \varepsilon(S(1_{H_1}h)1_{H_2} \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_3} \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(S(h)S(1_{H_1})1_{H_2} \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_3} \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(S(h)\varepsilon_s(1_{H_1}) \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_2} \cdot c_2) \\
&\overset{(1.9)}{=} \varepsilon(S(h)1_{H_1} \cdot c_1)\varepsilon(1_{H_2} \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(S(h) \cdot 1_H \cdot c) \\
&= \varepsilon(S(h) \cdot c) \\
&= \varepsilon(S(h)\varepsilon_s(1_H) \cdot c) \\
&= \varepsilon(S(h)S(1_{H_1})1_{H_2} \cdot c) \\
&= \varepsilon(S(1_{H_1}h)1_{H_2} \cdot c) \\
&\overset{(1.12)}{=} \varepsilon(S(h_1)h_2 \cdot c) \\
&= \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot c).
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.7. *Se $H = H_t$, então todo H-módulo coálgebra parcial é um H-módulo coálgebra.*

Ainda analisando essa situação, podemos pensar o que acontece quando adicionamos a hipótese de simetria nesse H-módulo coálgebra parcial. O esperado é que, analogamente ao que foi feito, possamos encontrar propriedades com a subálgebra H_s, e é exatamente isso que obtemos, como é possível observar nos próximos resultados.

Proposição 2.2.8. *Suponha que C é um H-módulo coálgebra parcial simétrico (à esquerda), então, para todo $h \in H_s$, $k \in H$ e $c \in C$ temos:*

(i) $h \cdot k \cdot c = hk \cdot c$

(ii) $\Delta(h \cdot c) = c_1 \otimes h \cdot c_2$.

Demonstração. Sejam $h \in H_s$, $k \ni H$ e $c \in C$,

(i)

$$\begin{aligned} h \cdot k \cdot c &= (hk_2 \cdot c_2)\varepsilon(k_1 \cdot c_1) \\ &= (h1_{H_2}k_2 \cdot c_2)\varepsilon(1_{H_1}k_1 \cdot c_1) \\ &\overset{(1.13)}{=} (h_2k_2 \cdot c_2)\varepsilon(h_1k_1 \cdot c_1) \\ &= ((hk)_2 \cdot c_2)\varepsilon((hk)_1 \cdot c_1) \\ &= hk \cdot c \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta(h \cdot c) &= (h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2) \\ &\overset{(1.13)}{=} (1_{H_1} \cdot c_1) \otimes (h1_{H_2} \cdot c_2) \\ &= (1_{H_1} \cdot c_1) \otimes (h \cdot 1_{H_2} \cdot c_2) \\ &= c_1 \otimes h \cdot c_2. \end{aligned}$$

□

Além disso, a condição $\varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot c)$ que caracteriza um H-módulo coálgebra (global) à esquerda é naturalmente satisfeita quando $h \in H_s$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.9. *Se $H = H_s$, então todo H-módulo coálgebra parcial é um H-módulo coálgebra.*

2.3 Caracterizando Ações via λ

O objetivo dessa seção é explorar uma família específica de exemplos de módulo coalgebra e de módulo coalgebra parcial. Para tal, considere $\lambda \in Hom_{\Bbbk}(H, \Bbbk)$. Dizemos que C é um H-*módulo coálgebra (à esquerda) via* λ se

$$\begin{aligned} \triangleright\colon\ H \otimes C &\to C \\ h \otimes c &\mapsto \lambda(h)c \end{aligned}$$

define uma ação de uma álgebra de Hopf fraca H na coálgebra C.

Teorema 2.3.1. *C é um H-módulo coálgebra (à esquerda) via λ se, e somente se,*

(i) $\lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $\lambda(h) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$

(iii) $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(hk)$,

para todo $h, k \in H$.

Demonstração. Suponha que C é um H-módulo coálgebra via λ, $h \in H$ e $c \in C$ então:

(i) $\Delta(h \triangleright c) = h_1 \triangleright c_1 \otimes h_2 \triangleright c_2$

$\Rightarrow \Delta(\lambda(h)c) = \lambda(h_1)c_1 \otimes \lambda(h_2)c_2$

$\Rightarrow \lambda(h)\Delta(c) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)(c_1 \otimes c_2)$

$\Rightarrow \lambda(h)(I \otimes \varepsilon)\Delta(c) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)(I \otimes \varepsilon)(c_1 \otimes c_2)$

$\Rightarrow \lambda(h)c = \lambda(h_1)\lambda(h_2)c, \forall c \in C$

$\Rightarrow \lambda(h) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$

(ii) $1_H \triangleright c = c$

$\Rightarrow \lambda(1_H)c = c, \forall c \in C$

$\Rightarrow \lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$

(iii) $h \triangleright k \triangleright c = hk \triangleright c$

$\Rightarrow \lambda(h)\lambda(k)c = \lambda(hk)c, \forall c \in C$

$\Rightarrow \lambda(h)\lambda(k) = \lambda(hk)$

A recíproca é imediata pelas mesmas contas apresentadas nessa demonstração.

$\square$

Além disso, se λ satisfaz as três condições dadas, então, pelas contas acima, é imediato ver que C é um H-módulo coálgebra global, ou seja, se λ satisfaz as três condições do Teorema 2.3.1, então λ também satisfaz

$$\lambda(h) = \lambda(\varepsilon_s(h)), \forall h \in H.$$

Para tal, basta observar que então C é um H-módulo coálgebra global, então

$$\varepsilon(h \triangleright c) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \triangleright c), \forall c \in C \text{ e } h \in H$$

o que implica em

$$\lambda(h)\varepsilon(c) = \lambda(\varepsilon_s(h))\varepsilon(c), \forall c \in C \text{ e } h \in H.$$

Em particular, tomando $c \in C$ tal que $\varepsilon(c) = 1_{\Bbbk}$ obtemos,

$$\lambda(h) = \lambda(\varepsilon_s(h)).$$

Além disso, observamos que se tomarmos ε no lugar de λ, temos que C é um H-módulo coálgebra global via ε se, e somente se, H é uma álgebra de Hopf no sentido usual. Isso ocorre porque precisamos que o item (iii) do Teorema 2.3.1 seja satisfeito, ou seja, precisamos que ε seja multiplicativa.

Exemplo 2.3.2. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide formado pela união disjunta de grupos finitos $G_1, G_2, ..., G_n$, e escolha G_j um desses grupos. Assim, considerando $\Bbbk\mathcal{G}$ a álgebra de grupoide, podemos definir $\lambda \in Hom_{\Bbbk}(\Bbbk\mathcal{G}, \Bbbk)$ da seguinte forma

$$\lambda(\delta_g) = \begin{cases} 1, \ se\ g \in G_j \\ 0, se\ g \notin G_j. \end{cases}$$

Pensando, agora, no caso parcial, dizemos que C é um *H-módulo coálgebra parcial (à esquerda) via* λ se

$$\begin{aligned} \cdot : \ H \otimes C \ &\to C \\ h \otimes c \ &\mapsto \lambda(h)c \end{aligned}$$

define uma ação parcial de H na coálgebra C. De forma análoga ao que foi feito, podemos caracterizar a ação parcial via λ de uma álgebra de Hopf fraca em uma coálgebra.

Teorema 2.3.3. *C é um H-módulo coálgebra parcial (à esquerda) via λ se, e somente se,*

(i) $\lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(hk_1)\lambda(k_2)$.

Demonstração. Suponha que C é um H-módulo coálgebra parcial via λ, então:

(i) $1_H \cdot c = c$

$\Rightarrow \lambda(1_H)c = c, \forall c \in C$

$\Rightarrow \lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$

(iii) $h \cdot k \cdot c = (hk_1 \cdot c_1)\varepsilon(k_2 \cdot c_2)$

$\Rightarrow \lambda(h)\lambda(k)c = \lambda(hk_1)c_1\lambda(k_2)\varepsilon(c_2)$

$\Rightarrow \lambda(h)\lambda(k)c = \lambda(hk_1)\lambda(k_2)c, \forall c \in C$

$\Rightarrow \lambda(h)\lambda(k) = \lambda(hk_1)\lambda(k_2)$.

Por outro lado, se λ satisfaz as duas condições dadas, então, pelas contas acima, é imediato ver que C é um H-módulo coálgebra parcial.

$\square$

Além disso, notemos que a ação parcial de H em C é simétrica se, e somente se, λ satisfaz adicionalmente que

$$\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(k_1)\lambda(hk_2).$$

Para tal, basta notar que

$$
\begin{aligned}
& h \cdot k \cdot c = \varepsilon(k_1 \cdot c_1)(hk_2 \cdot c_2), \forall c \in C \\
\Rightarrow\ & \lambda(h)\lambda(k)c = \lambda(k_1)\varepsilon(c_1)\lambda(hk_2)c_2, \forall c \in C \\
\Rightarrow\ & \lambda(h)\lambda(k)c = \lambda(k_1)\lambda(hk_2)c, \forall c \in C \\
\Rightarrow\ & \lambda(h)\lambda(k) = \lambda(k_1)\lambda(hk_2).
\end{aligned}
$$

A recíproca é imediata.

Observação 2.3.4.
1. C é um H-módulo coálgebra parcial via ε se, e somente se, H é uma álgebra de Hopf no sentido usual. E, assim como observado em [10], nesse caso, ε é a única convolução idempotente em $Alg(H, \Bbbk)$, pois $Alg(H, \Bbbk)$ será um grupo com elemento neutro ε.

2. Se λ caracteriza uma ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca H em uma coálgebra C, então λ satisfaz $\lambda(h) = \lambda(\varepsilon_s(h))$, para todo $h \in H$, se, e somente se, C é um H-módulo coálgebra global.

Exemplo 2.3.5. [18] Considere $\mathcal{G}$ o grupoide gerado pela união disjunta dos grupos $G_1, ..., G_n$, e fixe G_j um desses grupos. Então, qualquer subgrupo V de G_j define uma ação parcial de $\Bbbk\mathcal{G}$ em uma coálgebra C via λ, basta ver que

$$\lambda(\delta_g) = \begin{cases} 1, & se\ g \in V \\ 0, & se\ g \notin V. \end{cases}$$

satisfaz as condições do Teorema 2.3.3.

Assim como G. Quadros em [10], também podemos caracterizar a ação da álgebra de Hopf fraca $\Bbbk\mathcal{G}$ em $\Bbbk$, onde $\mathcal{G}_0$ é finito, Todavia, agora estamos vendo $\Bbbk$ como uma coálgebra.

Proposição 2.3.6. *$\Bbbk$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra parcial via λ se, e somente se, $V = \{g \in \mathcal{G};\ \delta_g \cdot 1_\Bbbk = 1_\Bbbk = \delta_{d(g)} \cdot 1_\Bbbk\}$ é um grupo.*

Demonstração. Suponhamos que $\Bbbk$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra parcial via

$$\delta_g \cdot 1_\Bbbk = \lambda(\delta_g).$$

Como $(\delta_g \cdot 1_\Bbbk)(\delta_h \cdot 1_\Bbbk) = (\delta_g\delta_h \cdot 1_\Bbbk)(\delta_h \cdot 1_\Bbbk)$, então

$$\begin{aligned} (\delta_g \cdot 1_\Bbbk) &= (1_{\Bbbk\mathcal{G}} \cdot 1_\Bbbk)(\delta_g \cdot 1_\Bbbk) \\ &= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} (\delta_e \cdot 1_\Bbbk)(\delta_g \cdot 1_\Bbbk) \\ &= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} (\delta_e\delta_g \cdot 1_\Bbbk)(\delta_g \cdot 1_\Bbbk) \\ &= (\delta_g \cdot 1_\Bbbk)^2. \end{aligned}$$

Como estamos lidando com um corpo $\Bbbk$ e $(\delta_g \cdot 1_\Bbbk)^2 = (\delta_g \cdot 1_\Bbbk)$, então, $(\delta_g \cdot 1_\Bbbk) = 1$ ou $(\delta_g \cdot 1_\Bbbk) = 0$. Além disso, temos que $V \neq \varnothing$, pois $\lambda(1_{\Bbbk\mathcal{G}}) = 1_\Bbbk$. Para mostrar que V é um grupo, suponha que $g, h \in V$, então

$$\begin{aligned} 1_\Bbbk &= \lambda(\delta_g)\lambda(\delta_h) \\ &= \lambda(\delta_g\delta_h)\lambda(\delta_h) \\ &= \lambda(\delta_g\delta_h) \end{aligned}$$

o que mostra que existe gh, caso contrário $\lambda(\delta_g\delta_h) = \lambda(0) = 0$. Além disso, $\lambda(\delta_{gh}) = \lambda(\delta_g\delta_h) = 1_\Bbbk$. Logo $gh \in V$. Mostraremos agora que se $g \in V$, temos necessariamente que $g^{-1} \in V$. Para tal, notemos que

$$1_\Bbbk = \lambda(\delta_{d(g)})\lambda(\delta_g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(\delta_{g^{-1}g})\lambda(\delta_g) \\
&= \lambda(\delta_{g^{-1}}\delta_g)\lambda(\delta_g) \\
&= \lambda(\delta_{g^{-1}})\lambda(\delta_g) \\
&\overset{g\in V}{=} \lambda(\delta_{g^{-1}}).
\end{aligned}
$$

Para finalizar, é necessário mostrar que $d(g) = r(g) = d(h)$ para todo $h, g \in V$. Sejam $h, g \in V$, já sabemos que existe gh^{-1}, então, pelo Lema 1.1.4 de [17], temos que

$$d(g) = r(h^{-1}) = h^{-1}h = d(h). \tag{2.1}$$

Como (2.1) vale para todo $h \in V$, em particular, para $h = g^{-1}$, obtemos que $d(g) = r(g)$. O que mostra que V é, de fato, um grupo.

A recíproca é um cálculo análogo ao do Exemplo 2.3.5. □

Analogamente, temos um resultado semelhante quando consideramos a ação da álgebra de Hopf fraca $(\Bbbk\mathcal{G})^*$ sobre o corpo $\Bbbk$, para $\mathcal{G}$ um grupoide finito, quando olhamos $\Bbbk$ como uma coálgebra.

Proposição 2.3.7. *$\Bbbk$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-módulo coálgebra parcial via λ se, e somente se, $V = \{g \in \mathcal{G};\ p_g \cdot 1_\Bbbk \neq 0$ e $p_{g^{-1}} \cdot 1_\Bbbk \neq 0\}$ é um grupo quando a característica de $\Bbbk$ não divide a ordem de V. Além disso, a ação é definida por*

$$\lambda(p_g) = \begin{cases} \dfrac{1}{|V|}, & \textit{se } g \in V \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos mostrar que $\Bbbk$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*-$módulo coálgebra parcial via λ. Para tal, basta notar que

(i) $\lambda(1_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}) = 1_\Bbbk$, de fato,

$$\lambda(1_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}) = \lambda(\sum_{g\in\mathcal{G}} p_g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \lambda(p_g)\\
&= |V|\frac{1}{|V|}\\
&= 1_{\Bbbk}.
\end{aligned}
$$

(ii) $\lambda(p_g)\lambda(p_h) = \lambda(p_g(p_h)_1)\lambda((p_h)_2)$, de fato, por um lado,

$$
\lambda(p_g)\lambda(p_h) = \begin{cases} \dfrac{1}{|V|^2}, & \text{se } g,h \in V \ , \\ \quad 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\lambda(p_g(p_h)_1)\lambda((p_h)_2) &= \sum_{l\in\mathcal{G},\exists l^{-1}g} \lambda(p_g p_l)\lambda(p_{l^{-1}h})\\
&= \sum_{l\in\mathcal{G},\exists l^{-1}g} \delta_{g,l}\lambda(p_g)\lambda(p_{l^{-1}h})\\
&= \lambda(p_g)\lambda(p_{g^{-1}h})\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{|V|^2}, & \text{se } g,h \in V \ , \\ \quad 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ,
\end{aligned}
$$

sendo $\delta_{g,l} = 1_{\Bbbk}$ se $g = l$ e $\delta_{g,l} = 0$ se $g \neq l$.

A recíproca segue da mesma forma como a apresentada na Proposição 2.3.7 de [18].

$\square$

2.4 Ação Induzida para Módulo Coálgebra

Uma pergunta pertinente é saber se podemos construir uma ação parcial de uma álgebra de Hopf fraca H em uma coálgebra à partir de um H-módulo coálgebra global. Ou seja, dada uma ação global de H em uma coálgebra C, será que é possível construir uma ação parcial de H em uma subcoálgebra de C? O intuito dessa seção é caracterizar as condições necessária e suficientes para que isso ocorra, e investigar quando essa ação construída é, na verdade, uma ação global.

Suponha que H age na coálgebra C (à esquerda) via

$$\begin{aligned} \triangleright : H \otimes C &\to C \\ h \otimes c &\mapsto h \triangleright c \end{aligned}$$

e considere $D \subseteq C$ uma subcoálgebra de C tal que existe uma projeção $\pi : C \to C$ sobre D, isto é,

1. $\pi^2 = \pi$
2. $Im\pi = D$.

Nessas condições temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4.1. *D é um H-módulo coálgebra parcial simétrico via*

$$\begin{aligned} \cdot : \ H \otimes D &\to D \\ h \otimes d &\mapsto \pi(h \triangleright d) \end{aligned}$$

se, e somente se, a projeção π satisfaz

(i) $(\pi \otimes \pi)\Delta(h \triangleright d) = \Delta(\pi(h \triangleright d))$

(ii) $\pi(h \triangleright \pi(k \triangleright d)) = \varepsilon(\pi(k_1 \triangleright d_1))\pi(hk_2 \triangleright d_2)$
$= \varepsilon(\pi(k_2 \triangleright d_2))\pi(hk_1 \triangleright d_1)$, *para todos $h, k \in H$ e $d \in D$.*

Demonstração. Suponha que D é um H-módulo coálgebra parcial simétrico via

$$\begin{aligned} \cdot : \ H \otimes D &\to D \\ h \otimes d &\mapsto \pi(h \triangleright d), \end{aligned}$$

então, dados $h, k \in K$ e $d \in D$,

(i) $\Delta(h \cdot d) = h_1 \cdot d_1 \otimes h_2 \cdot d_2$ implica que

$$\begin{aligned} \Delta(\pi(h \triangleright d)) &= \pi(h_1 \triangleright d_1) \otimes \pi(h_2 \triangleright d_2) \\ &= (\pi \otimes \pi)\Delta(h \triangleright d). \end{aligned}$$

(ii) $h \cdot k \cdot d = \varepsilon(k_1 \cdot d_1)(hk_2 \cdot d_2)$ implica que

$$\pi(h \triangleright \pi(k \triangleright d)) = \varepsilon(\pi(k_1 \triangleright d_1))\pi(hk_2 \triangleright d_2).$$

(ii) $h \cdot k \cdot d = (hk_1 \cdot d_1)\varepsilon(k_2 \cdot d_2)$ implica que

$$\pi(h \triangleright \pi(k \triangleright d)) = \varepsilon(\pi(k_2 \triangleright d_2))\pi(hk_1 \triangleright d_1).$$

Reciprocamente, suponha que π satisfaz essas duas condições, então,

(i)

$$\begin{aligned} 1_H \cdot d &= \pi(1_H \triangleright d) \\ &= \pi(d) \\ &= d \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta(h \cdot d) &= \Delta(\pi(h \triangleright d)) \\ &= (\pi \otimes \pi)\Delta(h \triangleright d) \\ &= \pi(h_1 \triangleright d_1) \otimes \pi(h_2 \triangleright d_2) \\ &= h_1 \cdot d_1 \otimes h_2 \cdot d_2 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} h \cdot k \cdot d &= \pi(h \triangleright \pi(k \triangleright d)) \\ &= \varepsilon(\pi(k_2 \triangleright d_2))\pi(hk_1 \triangleright d_1) \\ &= (hk_1 \cdot d_1)\varepsilon(k_2 \cdot d_2) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} h \cdot k \cdot d &= \pi(h \triangleright \pi(k \triangleright d)) \\ &= \varepsilon(\pi(k_1 \triangleright d_1))\pi(hk_2 \triangleright d_2) \\ &= (hk_2 \cdot d_2)\varepsilon(k_1 \cdot d_1). \end{aligned}$$

$\square$

Chamamos a ação parcial construída na Proposição 2.4.1 de ação induzida. É imediato ver que a ação induzida gera uma ação global se, e somente se, $\varepsilon(h \cdot d) = \varepsilon(\varepsilon_s(h) \cdot d)$ o que é equivalente a

$$\varepsilon(\pi(h \triangleright d)) = \varepsilon(\pi(\varepsilon_s(h) \triangleright d)),$$

para todo $h \in H$ e $d \in D$.

Exemplo 2.4.2. 1. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ com $\mathcal{G}$ um grupoide. Já sabemos que $\Bbbk\mathcal{G}$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra via o produto. Se considerarmos $\mathcal{G}$ como sendo o grupoide gerado pela união disjunta dos grupos finitos $G_1, ..., G_n$, então fixamos G_j um desses grupos e um $h \in G_j$. Assim, o $\Bbbk$-espaço vetorial $< \delta_h >_{\Bbbk} = D$ é uma subcoálgebra de $\Bbbk\mathcal{G}$. Além disso, podemos definir

$$\pi(\delta_g) = \begin{cases} \delta_g, \ se \ \delta_g \in D \\ 0, se \ \delta_g \notin D. \end{cases}$$

O próximo exemplo ilustra uma situação em que o módulo coálgebra parcial construído não é global.

2. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ a álgebra de grupoide, então, $\Bbbk\mathcal{G}$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra via

$$\begin{aligned} \triangleright : \Bbbk\mathcal{G} \otimes \Bbbk\mathcal{G} &\to \Bbbk\mathcal{G} \\ \delta_h \otimes \delta_g &\mapsto \delta_g S(\delta_h). \end{aligned}$$

Então, a projeção

$$\pi(\delta_g) = \begin{cases} \delta_g, \ se \ \delta_g \in D \\ 0, se \ \delta_g \notin D. \end{cases}$$

caracteriza uma ação parcial de $\Bbbk\mathcal{G}$ em $D =< \delta_l >_{\Bbbk}$, para um l fixo de $\mathcal{G}$. Além disso, note que

$$\varepsilon(\pi(\delta g \triangleright d)) \neq \varepsilon(\pi(\varepsilon_s(\delta g) \triangleright d)),$$

basta tomar d e g como l.

2.5 Ação de Grupoide em Coálgebra

Nessa seção trabalharemos com $\mathcal{G}$ um grupoide tal que $|\mathcal{G}_0|$ é finita.

Definição 2.5.1. A *ação parcial de um grupoide* $\mathcal{G}$ *em uma coálgebra* C é uma família de subcoálgebras $\{C_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ e isomorfismos de coálgebras $\{\theta_g : C_{g^{-1}} \to C_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ tais que

(i) Para todo $g \in \mathcal{G}$ existe uma projeção comultiplicativa

$$P_g : C \twoheadrightarrow C_g$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} P_g(c) &= P_{r(g)}(c_1)\varepsilon(P_g(c_2)) \\ &= P_{r(g)}(c_2)\varepsilon(P_g(c_1)) \end{aligned}$$

para todo $c \in C$

(ii) Para cada $e \in \mathcal{G}_0$, $\theta_e = I_{C_e}$

(iii) (1) $P_g \circ P_h = P_h \circ P_g, \forall g, h \in \mathcal{G}$

(2) $\theta_{h^{-1}} \circ P_h \circ P_{g^{-1}} = P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h, \forall (g, h) \in \mathcal{G}^2$

(3) $\theta_g \circ \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ P_{h^{-1}} = \theta_{gh} \circ P_{(gh)^{-1}} \circ P_{h^{-1}}, \forall (g,h) \in \mathcal{G}^2$.

Observação 2.5.2. 1. No item (i), P_g são projeções no sentido que

(a) $P_g \circ P_g = P_g$

(b) P_g é sobrejetora.

Assim, note que, para todo $c \in C_g$ temos que $P_g(c) = c$, pois se $c \in C_g = ImP_g$, então existe $d \in C$ tal que $c = P_g(d)$, mas

$$\begin{aligned} P_g(c) &= P_g(P_g(d)) \\ &= P_g(d). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} c &= P_g(d) \\ &= P_g(c), \text{ para todo } c \in C_g \ . \end{aligned}$$

2. Dizemos que as projeções $\{P_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ são comultiplicativas, no sentido que, para cada $g \in \mathcal{G}$,

$$(P_g \otimes P_g)\Delta(c) = \Delta(P_g(c)), \forall c \in C.$$

Além disso, quando pedimos que os isomorfismos $\{\theta_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ sejam de coálgebras, queremos dizer que além de satisfazerem a propriedade acima, eles também satisfazem

$$\varepsilon(\theta_g(c)) = \varepsilon(c), \forall c \in C_{g^{-1}}.$$

3. Do item (i), podemos concluir que $ImP_g \subseteq ImP_{r(g)}$.

Lema 2.5.3. *Suponha que um grupoide $\mathcal{G}$ age parcialmente numa coálgebra. Então:*

(i) Se $e = r(g)$, ou seja, $eg = g$, então

(I) $\theta_e \circ \theta_g = \theta_g$

(II) $\theta_e \circ P_g = P_g$.

(ii) Para todo $g \in \mathcal{G}$, $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$.

(iii) $P_{g^{-1}} \circ \theta_h = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ I_{C_{h^{-1}}}, \forall (g,h) \in \mathcal{G}^2$.

Demonstração. (i) Suponha que $e = r(g)$, então $eg = g$, e ainda, $e = gg^{-1}$.

(I) Substituindo g por e na equação (3) da Definição 2.5.1, e h por g, temos

$\theta_e \circ \theta_g \circ P_{(eg)^{-1}} \circ P_{g^{-1}} = \theta_{eg} \circ P_{(eg)^{-1}} \circ P_{g^{-1}}$.

Como $eg = g$, então,

$\theta_e \circ \theta_g \circ P_{g^{-1}} \circ P_{g^{-1}} = \theta_g \circ P_{g^{-1}} \circ P_{g^{-1}}$.

Mas, $P_{g^{-1}}$ é projeção, assim, $P_{g^{-1}} \circ P_{g^{-1}} = P_{g^{-1}}$, o que implica que

$\theta_e \circ \theta_g \circ P_{g^{-1}} = \theta_g \circ P_{g^{-1}}$.

E, portanto, a igualdade segue já que o domínio de θ_g é $C_g^{-1} = ImP_g^{-1}$.

(II) Por (I), sabemos que $\theta_e \circ \theta_g = \theta_g$, além disso, $Im\theta_g = C_g = ImP_g$. Então, para cada $c \in C$ (domínio de P_g), existe $d \in C_{g^{-1}}$ (domínio de θ_g) tal que

$$P_g(c) = \theta_g(d),$$

portanto,

$$\begin{aligned} \theta_e \circ P_g(c) &= \theta_e(P_g(c)) \\ &= \theta_e(\theta_g(d)) \\ &= \theta_g(d) \\ &= P_g(c), \forall c \in C. \end{aligned}$$

(ii) Em (3) da Definição 2.5.1, substituindo h por g^{-1} temos

$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \circ P_{(gg^{-1})^{-1}} \circ P_{(g^{-1})^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} \circ P_{(gg^{-1})^{-1}} \circ P_{(g^{-1})^{-1}}$

$\Rightarrow \theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \circ P_{e^{-1}} \circ P_g = \theta_e \circ P_{e^{-1}} \circ P_g$,

onde $e = gg^{-1}$, então $e = r(g)$, e $e^{-1} = e$. Assim,

$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \circ P_e \circ P_g = \theta_e \circ P_e \circ P_g$.

Como, $ImP_g \subseteq ImP_{r(g)} = ImP_e$, então, $P_e \circ P_g = P_g$, pois P_e é projeção. Portanto, usando (II)

$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \circ P_g = \theta_e \circ P_g = P_g$.

Agora, note que o domínio de $\theta_{g^{-1}}$ é igual ao domínio de I_{C_g} que é igual a $C_g = ImP_g$, então, segue que $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = I_{C_g}$. Além disso, como θ_g é bijeção e a inversa é única, concluímos que $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$.

(iii) Sabemos, por (1) e (2) da Definição 2.5.1 que

$$\begin{aligned} \theta_{h^{-1}} \circ P_{g^{-1}} \circ P_h &= \theta_{h^{-1}} \circ P_h \circ P_{g^{-1}} \\ &= P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h. \end{aligned}$$

Então, aplicando-se θ_h em ambos os lados dessa igualdade, temos

$\theta_h \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_{g^{-1}} \circ P_h = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h$

$\Rightarrow I_{C_h} \circ P_h \circ P_{g^{-1}} = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h$

$\Rightarrow P_h \circ P_{g^{-1}} = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h$

$\Rightarrow P_{g^{-1}} \circ P_h = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h$.

Por hipótese temos que $ImP_h = C_h = Im\theta_h$, então, para cada $d \in C_{h^{-1}}$ (domínio de θ_h) existe $c \in C$ (domínio de P_h) tal que $\theta_h(d) = P_h(c)$. Usando isso e essa última igualdade, vamos mostrar que

$$P_{g^{-1}} \circ \theta_h = \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_h.$$

Para tal, notemos que

$$\begin{aligned} P_{g^{-1}} \circ \theta_h(d) &= P_{g^{-1}}(P_h(c)) \\ &= \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}}(P_h(c)) \\ &= \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}}(\theta_h(d)), \forall d \in C_{h^{-1}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_{g^{-1}} \circ \theta_h &= \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_h \\ &= \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ I_{C_{h^{-1}}}, \forall g, h \in \mathcal{G}^2. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5.4. *Suponha que um grupoide $\mathcal{G}$ age parcialmente na coálgebra $C = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C_e$, então*

$$\begin{aligned} \cdot : \Bbbk\mathcal{G} \otimes C &\to C \\ \delta_g \otimes c &\mapsto \theta_g(P_{g^{-1}}(c)) \end{aligned}$$

define uma ação parcial simétrica de $\Bbbk\mathcal{G}$ em C.

Demonstração.

- $1_{\Bbbk\mathcal{G}} \cdot c = c$

  Antes de tudo, vamos observar que

$$P_f \circ P_e = \begin{cases} P_e, \ se \ e = f \\ 0, se \ e \neq f. \end{cases}$$

  Isso ocorre pois $C = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C_e = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} ImP_e$, então,

$$ImP_e \cap \sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} ImP_f = \{0\},$$

  dessa forma $ImP_e \cap ImP_f = \{0\}$ sempre que $f \neq e$, já que

$$ImP_f \subseteq \sum_{k\in\mathcal{G}_0 \ k\neq e} ImP_k.$$

  Portanto,

$$P_f(P_e(c)) = P_e(P_f(c)) \in ImP_e \cap ImP_f = \{0\}, \forall c \in C$$

$$\Rightarrow P_f(P_e(c)) = 0, \forall c \in C.$$

  Agora perceba que, como $C = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C_e$, então para cada $c \in C$,

$$c = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} P_e(c).$$

Isso ocorre pois, $ImP_e = C_e$, então existem $c_e \in C$ tais que

$$c = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} P_e(c_e).$$

Assim,

$$\sum_{f \in \mathcal{G}_0} P_f(c) = \sum_{f \in \mathcal{G}_0} P_f(\sum_{e \in \mathcal{G}_0} P_e(c_e)).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\sum_{f \in \mathcal{G}_0} P_f(c) &= \sum_{f \in \mathcal{G}_0} P_f(\sum_{e \in \mathcal{G}_0} P_e(c_e)) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} P_e(c_e) \\
&= c.
\end{aligned}$$

Visto isso, estamos aptos para calcular $1_{\Bbbk\mathcal{G}} \cdot c = c$, usando o Lema 2.5.3:

$$\begin{aligned}
1_{\Bbbk\mathcal{G}} \cdot c &= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_e \cdot c \\
&= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \theta_e(P_{e^{-1}}(c)) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \theta_e(P_e(c)) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} P_e(c) \\
&= c.
\end{aligned}$$

- $\varDelta(\delta_g \cdot c) = \delta_g \cdot c_1 \otimes \delta_g \cdot c_2$

$$\begin{aligned}
\varDelta(\delta_g \cdot c) &= \varDelta(\theta_g(P_{g^{-1}}(c))) \\
&= \theta_g(P_g^{-1}(c)_1) \otimes \theta_g(P_g^{-1}(c)_2) \\
&= \theta_g(P_g^{-1}(c_1)) \otimes \theta_g(P_g^{-1}(c_2)) \\
&= \delta_g \cdot c_1 \otimes \delta_g \cdot c_2
\end{aligned}$$

- $\delta_g \cdot \delta_h \cdot c = (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) = (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_1)$

1º caso) Suponha que $(g,h) \notin \mathcal{G}^2$, então $\nexists gh$, assim sabemos que $\delta_{gh} = 0$. Portanto, basta mostrar que $\delta_g \cdot \delta_h \cdot c = 0$

Primeiro note que, se não existe gh, então $d(g) \neq r(h) = d(h^{-1})$, assim

$$P_{d(g)} \circ P_{d(h^{-1})} = 0,$$

pelo que vimos. Além disso, pela Observação (3) da Definição 2.5.1

$$\begin{aligned} P_{g^{-1}} \circ P_h &= P_{r(g^{-1})} \circ P_{g^{-1}} \circ P_{r(h)} \circ P_h \\ &= P_{g^{-1}} \circ P_{r(g^{-1})} \circ P_{r(h)} \circ P_h \\ &= P_{g^{-1}} \circ P_{d(g)} \circ P_{r(h)} \circ P_h \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos que $r(g^{-1}) = d(g)$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta_g \cdot \delta_h \cdot c &= \theta_g(P_{g^{-1}}(\underbrace{\theta_h(P_{h^{-1}}(c))))}_{\in ImP_h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2º caso) No caso em que $(g,h) \in \mathcal{G}^2$, separaremos a demonstração em três passos.

1º passo) Considere e tal que $he = h \Rightarrow eh^{-1} = h^{-1}$. Vamos mostrar

$$\delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c = (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2).$$

Para isso, basta notar que

$$\begin{aligned} \delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_{e^{-1}}(c)))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c)))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_1)))\varepsilon(P_e(c_2)) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_1)))\varepsilon(\theta_e(P_e(c_2))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_1)))\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(P_e(c_1)))\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\ &= \theta_{gh}(P_e(P_{(gh)^{-1}}(c_1)))\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\ &\overset{\circledast}{=} \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(c_1))\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\ &= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \end{aligned}$$

Onde, a terceira igualdade segue do fato de P_e ser comultiplicativa, e a quarta segue do Lema 2.5.3. Para mostrar $\circledast$, primeiro lembramos que $P_{r(g)} \circ P_g = P_g$, pois $P_{r(g)}$ é projeção e $ImP_g \subseteq ImP_{r(g)}$. Agora, note que

$$\begin{aligned} e(gh)^{-1} &= eh^{-1}g^{-1} \\ &= h^{-1}g^{-1} \\ &= (gh)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $P_e \circ P_{(gh)^{-1}} = P_{(gh)^{-1}}$.

Além disso, analogamente temos que

$$\delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c = (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1).$$

Para tal, basta observar que

$$\begin{aligned} \delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_{e^{-1}}(c)))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c)))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_2)))\varepsilon(P_e(c_1)) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_2))))\varepsilon(\theta_e(P_e(c_2))) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}\theta_e(P_e(c_2))))\varepsilon(\delta_e \cdot c_1) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(P_e(c_2)))\varepsilon(\delta_e \cdot c_1) \\ &= \theta_{gh}(P_e(P_{(gh)^{-1}}(c_2)))\varepsilon(\delta_e \cdot c_1) \\ &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(c_2))\varepsilon(\delta_e \cdot c_1) \\ &= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1). \end{aligned}$$

2º passo) Mostraremos que

$$\begin{aligned} \delta_{gh} \cdot P_{h^{-1}}(c) &= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) \\ &= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_1). \end{aligned}$$

Para tal, basta tomar $eh^{-1} = h^{-1}$ e notar que

$$\begin{aligned}
\delta_{gh} \cdot P_{h^{-1}}(c) &\overset{(*)}{=} \delta_{gh} \cdot P_e(c_1)\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_2)) \\
&\overset{(***)}{=} \delta_{gh} \cdot \theta_e(P_e(c_1))\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&\overset{(**)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_3))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\theta_e(P_e(c_2)))\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_3))) \\
&\overset{(*)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(P_e(c_2))\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_3)) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_2)) \\
&\overset{(***)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2).
\end{aligned}$$

onde observamos que $(*)$ segue da definição de ação de grupoide em coálgebra, $(**)$ segue do 1º passo e $(***)$ é satisfeita pois θ_g é de coálgebra para todo $g \in \mathcal{G}$. Analogamente, mostramos

$$\begin{aligned}
\delta_{gh} \cdot P_{h^{-1}}(c) &= \delta_{gh} \cdot P_e(c_2)\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_1)) \\
&= \delta_{gh} \cdot \theta_e(P_e(c_2))\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_1))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\theta_e(P_e(c_1)))\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_2))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(P_e(c_1))\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_2)) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(P_{h^{-1}}(c_1) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\theta_h(P_{h^{-1}}(c_1))) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_1).
\end{aligned}$$

3º passo) Agora, basta mostrar

$$\begin{aligned}
\delta_g \cdot \delta_h \cdot c &= (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_1).
\end{aligned}$$

Para isso, usaremos em $(*)$ o item (iii) do Lema 2.5.3, o item (iii) da Definição 2.5.1 em $(**)$ e o 2º passo em $(***)$.

$$\begin{aligned}
\delta_g \cdot \delta_h \cdot c &= \theta_g(P_{g^{-1}}\theta_h(P_{h^{-1}}(c)))) \\
&\overset{(*)}{=} \theta_g(\theta_h(P_{(gh)^{-1}}(P_{h^{-1}}(c)))) \\
&\overset{(**)}{=} \theta_{gh}((P_{(gh)^{-1}}(P_{h^{-1}}(c)))) \\
&= \delta_{gh} \cdot (P_{h^{-1}}(c)) \\
&\overset{(***)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) \\
&\overset{(***)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_1).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma ação parcial $\theta = (\{\theta_g\}, \{C_g\})_{g \in \mathcal{G}}$ *de* $\mathcal{G}$ *em* C *tal que* $C = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} C_e$.

(ii) C *é um* $\Bbbk\mathcal{G}$*-módulo coálgebra parcial simétrico.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Segue pela Prosição 2.5.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que C é um $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo coálgebra parcial simétrico.

1º passo) Pela simetria da ação parcial sabemos que, para cada $g \in \mathcal{G}$ e para e tal que $e = gg^{-1}$,

$$\begin{aligned}
\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c &= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)(\delta_g\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)(\delta_{gg^{-1}} \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)(\delta_e \cdot c_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c &= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)(\delta_g\delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\
&= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)(\delta_{gg^{-1}} \cdot c_1) \\
&= \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)(\delta_e \cdot c_1).
\end{aligned}$$

2º passo) Definiremos $P_g(c) = \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)(\delta_e \cdot c_2) = \varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)(\delta_e \cdot c_1)$, onde $e = gg^{-1}$ então:

$$eg = g$$

$$g^{-1}e = g^{-1}.$$

Além disso, tome $C_g = ImP_g$, para cada $g \in \mathcal{G}$. Dessa forma, para cada $g \in \mathcal{G}$, P_g é sobrejetora e

- $P_g(P_g(c)) = P_g(c), \forall c \in C$

$$\begin{aligned}
P_g(P_g(c)) &= P_g(\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)(\delta_e \cdot c_1)) \\
&= P_g((\delta_e \cdot c_1))\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\
&= (\delta_e \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_3) \\
&\overset{(*)}{=} (\delta_e\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}}\delta_e \cdot c_4)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_5) \\
&= (\delta_{ee} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}e} \cdot c_4)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_5) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_4)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_5) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\
&= P_g(c)
\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue pela simetria da ação parcial.

- $P_g(c) = P_e(c_1)\varepsilon(P_g(c_2)) = P_e(c_2)\varepsilon(P_g(c_1))$, onde $eg = g$.

Para tal, primeiro note que, $\forall e \in \mathcal{G}_0$,

$$\begin{aligned}
P_e(c) &= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\
&= \delta_e \cdot c, \forall c \in C.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P_e(c_1)\varepsilon(P_g(c_2)) &= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(P_g(c_2)) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\
&= P_g(c),
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}
P_e(c_2)\varepsilon(P_g(c_1)) &= (\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(P_g(c_1)) \\
&= (\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\
&= (\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\
&= P_g(c).
\end{aligned}$$

- P_g é comultiplicativa.

$$\begin{aligned}
\Delta(P_g(c)) &= \Delta(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\
&= (\delta_e \cdot c_1 \otimes \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_e \cdot c_1 \otimes \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_4) \\
&\overset{(*)}{=} (\delta_e \cdot c_1 \otimes \delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_4) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \otimes (\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_4) \\
&= P_g(c_1) \otimes P_g(c_2) \\
&= (P_g \otimes P_g)\Delta(c)
\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue pelo que foi visto no 1º passo.

3º passo) Definiremos $\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) = \delta_g \cdot P_{g^{-1}}(c)$.

- $\theta_e = I_{C_e}, \forall e \in \mathcal{G}_0$

$$\begin{aligned}
\theta_e(P_{e^{-1}}(c)) &= \delta_e \cdot P_{e^{-1}}(c) \\
&= \delta_e \cdot P_e(c) \\
&= \delta_e \cdot \delta_e \cdot c \\
&= (\delta_e\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\
&= (\delta_{ee} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\
&= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\
&= \delta_e \cdot c \\
&= P_e(c).
\end{aligned}$$

- θ_g é de coálgebra

  Primeiro note que, tomando f tal que $fg^{-1} = g^{-1}$

$$\begin{aligned}\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) &= (\delta_g \cdot c_1)\varepsilon(\delta_f \cdot c_2)\\ &= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1),\end{aligned}$$

  pois,

$$\begin{aligned}\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) &= \delta_g \cdot P_{g^{-1}}(c)\\ &= (\delta_g \cdot \delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_2)\\ &\overset{(*)}{=} (\delta_g\delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3)\\ &= (\delta_{gf} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3)\\ &= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3)\\ &= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1)\end{aligned}$$

  onde, em $(*)$ usamos a condição de simetria de módulo coálgebra parcial. Analogamente,

$$\begin{aligned}\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) &= \delta_g \cdot P_{g^{-1}}(c)\\ &= (\delta_g \cdot \delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot c_1)\\ &= (\delta_g\delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3)\varepsilon(\delta_g \cdot c_1)\\ &= (\delta_{gf} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3)\varepsilon(\delta_g \cdot c_1)\\ &= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3)\varepsilon(\delta_g \cdot c_1)\\ &= (\delta_g \cdot c_1)\varepsilon(\delta_f \cdot c_2).\end{aligned}$$

  Então, por um lado,

$$\begin{aligned}(\theta_g \otimes \theta_g)\Delta(P_{g^{-1}}(c)) &= (\theta_g \otimes \theta_g)(P_{g^{-1}} \otimes P_{g^{-1}})\Delta(c)\\ &= \theta_g(P_{g^{-1}}(c_1)) \otimes \theta_g(P_{g^{-1}}(c_2))\\ &= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \otimes (\delta_g \cdot c_4)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\theta_g(P_{g^{-1}})(c) &= \Delta(\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \\
&= (\delta_g \cdot c_2) \otimes (\delta_g \cdot c_3)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \\
&= (\delta_g \cdot c_3)\varepsilon(\delta_f \cdot c_2) \otimes (\delta_g \cdot c_4)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \\
&\overset{(*)}{=} (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3) \otimes (\delta_g \cdot c_4)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \\
&= (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \otimes (\delta_g \cdot c_4)\varepsilon(\delta_f \cdot c_3).
\end{aligned}
$$

Note que a igualdade $(*)$ segue do 1º passo. Além disso, precisamos mostrar que $\varepsilon(\theta_g(P_{g^{-1}}(c))) = \varepsilon(P_{g^{-1}}(c))$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\theta_g(P_{g^{-1}}(c))) &= \varepsilon(\delta_g \cdot c_1)\varepsilon(\delta_f \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(P_{g^{-1}}(c)).
\end{aligned}
$$

- θ_g é injetora

  Suponha que $\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) = 0$ e que f é tal que $fg^{-1} = g^{-1}$.. A ideia é mostrar que $P_{g^{-1}}(c) = 0$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\theta_g(P_{g^{-1}}(c)) &= 0 \\
\Rightarrow \delta_g \cdot P_{g^{-1}}(c) &= 0 \\
\Rightarrow (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) &= 0.
\end{aligned}
$$

  Assim,

$$
\begin{aligned}
P_{g^{-1}}(c) &= (\delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_2) \\
&= \varepsilon(\delta_f \cdot c_1)(\delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(\delta_f \cdot c_1)(\delta_{g^{-1}g} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3) \\
&= \varepsilon(\delta_f \cdot c_1)(\delta_{g^{-1}}\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot c_3) \\
&= \varepsilon(\delta_f \cdot c_1)(\delta_{g^{-1}} \cdot \delta_g \cdot c_2) \\
&= \delta_{g^{-1}} \cdot (\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_f \cdot c_1) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

  A igualdade $(*)$ segue pelo fato de $fg^{-1} = g^{-1}$, então $gf = g$ e $f = g^{-1}g$. Já a última igualdade segue pelo que foi observado acima.

- θ_g é sobrejetora

  Primeiro note que $P_g(c) = \delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c$, pois,

$$\begin{aligned} P_g(c) &= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= (\delta_{gg^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= (\delta_g\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= (\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c). \end{aligned}$$

  Assim,

$$\begin{aligned} \theta_g(\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)) &= \varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\theta_g(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= \varepsilon(\delta_e \cdot c_1)(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= \varepsilon(\delta_e \cdot c_1)(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_3) \\ &= (\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= P_g(c). \end{aligned}$$

  Então, para finalizar a sobrejetividade de θ_g, basta mostrarmos que

$$\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \in C_{g^{-1}} = ImP_{g^{-1}}.$$

  Para tal, observe que, para f tal que $fg^{-1} = g^{-1}$

$$\begin{aligned} P_{g^{-1}}(\delta_{g^{-1}} \cdot c) &= (\delta_f \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_f\delta_{g^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_{fg^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_{g^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_{g^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_g\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2) \\ &= (\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{gg^{-1}} \cdot c_1) \\ &= (\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1). \end{aligned}$$

  Ou seja, $(\delta_{g^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1) = P_{g^{-1}}(\delta_{g^{-1}} \cdot c) \in ImP_{g^{-1}} = C_{g^{-1}}$.

4º passo) $P_g \circ P_h = P_h \circ P_g, \forall g, h \in \mathcal{G}$.

Sejam e tal que $eh = h$ e f tal que $fg^{-1} = g^{-1}$. Então

$$\begin{aligned}
P_h(P_g(c)) &= P_h(P_f(c_2))\varepsilon(P_g(c_1)) \\
&= P_h(\delta_f \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_f \cdot c_2) \\
&= P_h(\delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\
&= (\delta_e \cdot \delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_f \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1) \\
&= \begin{cases} 0, \ se \ e \neq f \\ (\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1), \ se \ e = f. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
P_g(P_h(c)) &= P_g(P_e(c_1))\varepsilon(P_h(c_2)) \\
&= P_g(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2) \\
&= P_g(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2) \\
&= (\delta_f \cdot \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
&= \begin{cases} 0, \ se \ e \neq f \\ (\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{g^{-1}} \cdot c_1), \ se \ e = f. \end{cases}
\end{aligned}$$

5º passo) Se $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, então $\theta_{h^{-1}} \circ P_{g^{-1}} \circ P_h = P_{(gh)^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}} \circ P_h$.

Lembre-se que se existe gh então $d(g) = r(h)$. Além disso, considere f tal que $fh = h$ e e tal que $eg^{-1} = g^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\theta_{h^{-1}}(P_{g^{-1}}(P_h(c))) &= \theta_{h^{-1}}(P_{g^{-1}}(\delta_f \cdot c_1))\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2) \\
&= \theta_{h^{-1}}(\delta_e \cdot \delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_e \cdot \delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3).
\end{aligned}$$

Mas, como $e = r(g^{-1}) = d(g) = r(h) = f$, então

$$\begin{aligned}
\theta_{h^{-1}}(P_{g^{-1}}(P_h(c))) &= (\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_e \cdot \delta_f \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_f \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_e \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot \delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
&= (\delta_{h^{-1}}\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4) \\
&= (\delta_{h^{-1}e} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{ge} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4) \\
&= (\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4).
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que se k é tal que $kh^{-1} = h^{-1}$, então também satisfaz $k(gh)^{-1} = (gh)^{-1}$. Assim, usando que $e = f = r(h)$,

$$\begin{aligned}
& P_{(gh)^{-1}}(\theta_{h^{-1}}(P_h(c))) \\
= \;& P_{(gh)^{-1}}(\theta_{h^{-1}}(\delta_e \cdot c_1))\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2) \\
= \;& P_{(gh)^{-1}}(\delta_{h^{-1}} \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2) \\
= \;& P_{(gh)^{-1}}(\delta_{h^{-1}}\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
= \;& P_{(gh)^{-1}}(\delta_{h^{-1}e} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
= \;& P_{(gh)^{-1}}(\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3) \\
= \;& (\delta_k \cdot \delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot \delta_{h^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4) \\
= \;& (\delta_k\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot \delta_{h^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_4)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_5) \\
\overset{(*)}{=} \;& (\delta_{kh^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{ghh^{-1}} \cdot c_4)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_5)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_6) \\
= \;& (\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_{ghh^{-1}} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_4)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_5) \\
= \;& (\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{ge} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4) \\
= \;& (\delta_{h^{-1}} \cdot c_1)\varepsilon(\delta_g \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_3)\varepsilon(\delta_{h^{-1}} \cdot c_4).
\end{aligned}$$

Onde em $(*)$ usamos a simetria da ação parcial.

6º passo) Se $(g,h)\ \mathcal{G}^2$, então

$$\theta_g \circ \theta_h \circ P_{(gh)^{-1}} \circ P_{h^{-1}} = \theta_{gh} \circ P_{(gh)^{-1}} \circ P_{h^{-1}}.$$

Considere e tal que $eh^{-1} = h^{-1}$, então $e(gh)^{-1} = (gh)^{-1}$, assim,

$$\begin{aligned}
\theta_g(\theta_h(P_{(gh)^{-1}}(P_{h^{-1}}(c))) &= \theta_g(\theta_h(P_{(gh)^{-1}}(\delta_e \cdot c_1))\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) \\
&= \theta_g(\theta_h(\delta_e \cdot \delta_e \cdot c_1))\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3) \\
&= \theta_g(\delta_h \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3) \\
&= \theta_g(\delta_h\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= \theta_g(\delta_{he} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_g \cdot \delta_h \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_4)\varepsilon(\delta_h \cdot c_5) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&\overset{(*)}{=} (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos a simetria da ação parcial. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(P_{h^{-1}}(c)) &= \theta_{gh}(P_{(gh)^{-1}}(\delta_e \cdot c_1))\varepsilon(\delta_h \cdot c_2) \\
&= \theta_{gh}(\delta_e \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3) \\
&= (\delta_{gh} \cdot \delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3) \\
&= (\delta_{gh}\delta_e \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_{ghe} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_{gh} \cdot c_3)\varepsilon(\delta_h \cdot c_4) \\
&= (\delta_{gh} \cdot c_2)\varepsilon(\delta_e \cdot c_1)\varepsilon(\delta_h \cdot c_3).
\end{aligned}$$

7º passo) $C = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C_e$. Pelo Lema 2.5.3, temos

$$\begin{aligned} c &= 1_{\Bbbk\mathcal{G}} \cdot c \\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_e \cdot c \\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \theta_e(P_e(c)) \\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} P_e(c). \end{aligned}$$

Assim $C = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} ImP_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} C_e$. Além disso, como

$$\delta_e \cdot \delta_f \cdot c = \begin{cases} 0, \ se \ e \neq f \\ \delta_e \cdot c, \ se \ e = f, \end{cases}$$

e $P_e(c) = \delta_e \cdot c$, então se

$$d \in ImP_e \cap \sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} ImP_f,$$

temos então existem $b, c \in C$ tais que $d = P_e(c) = \sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} P_f(b)$. Logo,

$$\begin{aligned} d &= P_e(c) \\ &= P_e(P_e(c)) \\ &= P_e(\textstyle\sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} P_f(b)) \\ &= \textstyle\sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} P_e(P_f(b)) \\ &= \textstyle\sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} \delta_e \cdot \delta_f \cdot b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $ImP_e \cap \sum_{f\in\mathcal{G}_0 \ f\neq e} ImP_f = \{0\}$.

$\square$

Capítulo 3

Coações Parciais de Álgebras de Hopf fracas em Coálgebras

3.1 Comódulo Coálgebra

Em [22], Yu. Wang e L. Zhang definiram C como sendo um H*-comódulo coálgebra* (global) à esquerda se exite uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \rho : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{-1} \otimes c^{0} \end{aligned}$$

tal que, para todo $c \in C$,

(i) $(\varepsilon_H \otimes I)\rho(c) = c$

(ii) $(I_H \otimes \Delta_C)\rho(c) = (m_H \otimes I_C \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{C,H} \otimes I_C)(\rho \otimes \rho)\Delta(c)$

(iii) $(I_H \otimes \rho)\rho(c) = (\Delta_H \otimes I_C)\rho(c)$

(iv) $(I_H \otimes \varepsilon_C)\rho(c) = (\varepsilon_t \otimes \varepsilon_C)\rho(c)$.

Nesse caso, dizemos que H coage na coálgebra C. Notemos que os itens acima podem ser reescritos como:

(i) $\varepsilon_H(c^{-1})c^0 = c$

(ii) $c^{-1} \otimes c^0{}_1 \otimes c^0{}_2 = c_1{}^{-1}c_2{}^{-1} \otimes c_1{}^0 \otimes c_2{}^0$

(iii) $c^{-1} \otimes c^{0-1} \otimes c^{00} = c^{-1}{}_1 \otimes c^{-1}{}_2 \otimes c^0$

(iv) $c^{-1}\varepsilon_C(c^0) = \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_C(c^0)$.

Todavia, o último item dessa definição é desnecessário pois segue dos anteriores, como vemos a seguir.

Proposição 3.1.1. *Se existe uma aplicação linear*

$$\begin{aligned} \rho : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{-1} \otimes c^0 \end{aligned}$$

que satisfaz, para todo $c \in C$,

(i) $(\varepsilon_H \otimes I)\rho(c) = c$

(ii) $(I_H \otimes \Delta_C)\rho(c) = (m_H \otimes I_C \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{C,H} \otimes I_C)(\rho \otimes \rho)\Delta(c)$

(iii) $(I_H \otimes \rho)\rho(c) = (\Delta_H \otimes I_C)\rho(c)$,

então a condição

$$(I_H \otimes \varepsilon_C)\rho(c) = (\varepsilon_t \otimes \varepsilon_C)\rho(c).$$

é automaticamente satisfeita.

Demonstração. Suponha que existe uma aplicação ρ que satisfaz as condições do enunciado, então:

$$\varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_C(c^0) \quad = \quad c^{-1}{}_1 S(c^{-1}{}_2)\varepsilon_C(c^0)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(iii)}{=} && c^{-1}S(c^{0-1})\varepsilon_C(c^{00}) \\
&= && c^{-1}(S\otimes\varepsilon_C)(\rho(c^0)) \\
&= && c^{-1}(S\otimes\varepsilon_C)(\rho(c^0{}_2))\varepsilon_C(c^0{}_1) \\
&= && c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}(S\otimes\varepsilon_C)(\rho(c_2{}^0))\varepsilon_C(c_1{}^0) \\
&= && c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}S(c_2{}^{0-1})\varepsilon_C(c_2{}^{00})\varepsilon_C(c_1{}^0) \\
&\overset{(iii)}{=} && c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}S(c_2{}^{0-1})\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2{}^{00}) \\
&= && c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}{}_1S(c_2{}^{-1}{}_2)\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2{}^0) \\
&= && c_1{}^{-1}\varepsilon_t(c_2{}^{-1})\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2{}^0) \\
&\overset{(1.16)}{=} && c_1{}^{-1}{}_2\varepsilon_H(c_1{}^{-1}{}_1c_2{}^{-1})\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2{}^0) \\
&= && c_1{}^{-1}{}_2\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2{}^0)\varepsilon_H(c_1{}^{-1}{}_1c_2{}^{-1}) \\
&\overset{(iii)}{=} && c_1{}^{0-1}\varepsilon_C(c_1{}^{00})\varepsilon_C(c_2{}^0)\varepsilon_H(c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}) \\
&\overset{(ii)}{=} && c^0{}_1{}^{-1}\varepsilon_C(c^0{}_1{}^0)\varepsilon_C(c^0{}_2)\varepsilon_H(c^{-1}) \\
&= && (I_H\otimes\varepsilon_C\otimes\varepsilon_C)(\rho(c^0{}_1)\otimes c^0{}_2)\varepsilon_H(c^{-1}) \\
&= && (I_H\otimes\varepsilon_C\otimes\varepsilon_C)(\rho\otimes I_C)\Delta(c^0)\varepsilon_H(c^{-1}) \\
&\overset{(i)}{=} && (I_H\otimes\varepsilon_C\otimes\varepsilon_C)(\rho\otimes I_C)\Delta(c) \\
&= && c_1{}^{-1}\varepsilon_C(c_1{}^0)\varepsilon_C(c_2) \\
&= && (I_H\otimes\varepsilon_C)(\rho(c_1))\varepsilon_C(c_2) \\
&= && (I_H\otimes\varepsilon_C)(\rho(c)).
\end{aligned}
$$

□

Naturalmente, podemos ver que no caso em que H é uma álgebra de Hopf, as definições de H-comódulo coálgebra são equivalentes, incluindo também esse último resultado, pois, se H é Hopf,

$$\begin{aligned} c^{-1}\varepsilon_C(c^0) &= \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_C(c^0) \\ &= \varepsilon_H(c^{-1})1_H\varepsilon_C(c^0) \\ &= \varepsilon_C(c)1_H. \end{aligned}$$

Assim, a definição de comódulo coálgebra (à esquerda) pode ser vista da seguinte forma:

Definição 3.1.2. Dizemos que C é um H-comódulo coálgebra à esquerda se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \rho : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{-1} \otimes c^0 \end{aligned}$$

tal que, para todo $c \in C$,

(CC1) $(\varepsilon_H \otimes I)\rho(c) = c$

(CC2) $(I_H \otimes \Delta_C)\rho(c) = (m_H \otimes I_C \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{C,H} \otimes I_C)(\rho \otimes \rho)\Delta(c)$

(CC3) $(I_H \otimes \rho)\rho(c) = (\Delta_H \otimes I_C)\rho(c)$.

De forma similar, podemos definir um H-comódulo coálgebra à direita e a observação feita acima segue de forma análoga para esse caso.

Exemplo 3.1.3. [22] Considere H uma álgebra de Hopf fraca de dimensão finita. Então H é um H^*-comódulo coálgebra com coação

$$\begin{aligned} \rho : H &\longrightarrow H^* \otimes H \\ h_i &\longmapsto {h_i}^* \otimes h_i \end{aligned}$$

onde $\{h_i\}_{i=1}^n$ é uma base para H e $\{{h_i}^*\}_{i=1}^n$ é uma base dual tal que

$$(h_i)^* h_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \ , \\ 0, & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

3.2 Comódulo Coálgebra Parcial

Nessa seção, estamos interessados em introduzir o conceito de uma coação parcial de uma álgebra de Hopf fraca H em uma coálgebra. Também veremos alguns exemplos que sustentam a teoria exposta aqui e algumas propriedades.

Definição 3.2.1. Dizemos que C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda (ou ainda que H coage parcialmente em C à esquerda) se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \overline{\rho} : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0}} \end{aligned}$$

tal que, para qualquer $c \in C$:

(CCP1) $(\varepsilon_H \otimes I)\overline{\rho}(c) = c$

(CCP2) $(I_H \otimes \Delta_C)\overline{\rho}(c) = (m_H \otimes I_C \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{C,H} \otimes I_C)(\overline{\rho} \otimes \overline{\rho})\Delta(c)$

(CCP3) $(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(c) = (m_H \otimes I_H \otimes I_C)[(I_H \otimes \varepsilon_C)(\overline{\rho}(c_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c_2)]$

Podemos reescrever as condições acima da seguinte forma:

(CCP1) $\varepsilon_H(c^{\overline{-1}})c^{\overline{0}} = c$

(CCP2) $c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0}}{}_1 \otimes c^{\overline{0}}{}_2 = c_1{}^{\overline{-1}}c_2{}^{\overline{-1}} \otimes c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{0}}$

(CCP3) $c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0-1}} \otimes c^{\overline{00}} = c_1{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})c_2{}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes c_2{}^{\overline{0}}.$

Além disso, dizemos que C é um *H-comódulo coálgebra parcial simétrico* à esquerda se ainda satisfizer,

$$(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(c) = (m_H \otimes I_H \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{H\otimes C,H})[(\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c_1) \otimes (I_H \otimes \varepsilon_C)(\overline{\rho}(c_2))]$$

que pode ser reescrito como

$$c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0-1}} \otimes c^{\overline{00}} = {c_1}^{\overline{-1}}{}_1 {c_2}^{\overline{-1}} \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \otimes {c_1}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_1}^{\overline{0}}.$$

De forma análoga, podemos definir um H-comódulo coálgebra parcial (simétrico) à direita. Ao longo dessa seção sempre quando nos referirmos a um H-comódulo coálgebra parcial ele será considerado à esquerda. Também temos que a noção de comódulo coálgebra parcial generaliza a de comódulo coálgebra no sentido que todo H-comódulo coálgebra global (à esquerda) é um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda). De fato, usando que todo comódulo coálgebra (global) satisfaz $c^{-1}\varepsilon_C(c^0) = \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_C(c^0)$, temos

$$\begin{aligned}
(I_H \otimes \rho)\rho(c) &= c^{-1} \otimes c^{0-1} \otimes c^{00} \\
&\overset{(CC3)}{=} {c^{-1}}_1 \otimes {c^{-1}}_2 \otimes c^0 \\
&= {c^{-1}}_1 \otimes {c^{-1}}_2 \otimes {c^0}_2 \varepsilon_c({c^0}_1) \\
&\overset{(CC2)}{=} {c_1}^{-1}{}_1 {c_2}^{-1}{}_1 \otimes {c_1}^{-1}{}_2 {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \varepsilon_c({c_1}^0) \\
&\overset{3.1.1}{=} \varepsilon_t({c_1}^{-1})_1 {c_2}^{-1}{}_1 \otimes \varepsilon_t({c_1}^{-1})_2 {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \varepsilon_c({c_1}^0) \\
&\overset{(1.12)}{=} 1_{H1} \varepsilon_t({c_1}^{-1}) {c_2}^{-1}{}_1 \otimes 1_{H2} {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \varepsilon_c({c_1}^0) \\
&\overset{(1.18)}{=} \varepsilon_t({c_1}^{-1}) 1_{H1} {c_2}^{-1}{}_1 \otimes 1_{H2} {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \varepsilon_c({c_1}^0) \\
&\overset{(1.1)}{=} {c_1}^{-1} {c_2}^{-1}{}_1 \otimes {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \varepsilon_c({c_1}^0) \\
&= {c_1}^{-1} \varepsilon({c_1}^0) {c_2}^{-1}{}_1 \otimes {c_2}^{-1}{}_2 \otimes {c_2}^0 \\
&= (m_H \otimes I_H \otimes I_C)[(I_H \otimes \varepsilon_c)(\rho(c_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_C)\rho(c_2)].
\end{aligned}$$

Além disso, temos o seguinte resultado que caracteriza um comódulo coálgebra global.

Proposição 3.2.2. *Seja C um H-comódulo coálgebra parcial. Então, C é um H-*

comódulo coálgebra (global) se, e somente se,

$$c^{\overline{-1}}\varepsilon_C(c^{\overline{0}}) = \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon_C(c^{\overline{0}}).$$

Demonstração. Suponha que C um H-comódulo coálgebra parcial que satisfaz $c^{\overline{-1}}\varepsilon_C(c^{\overline{0}}) = \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon_C(c^{\overline{0}})$, então, basta mostrarmos que

$$(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(c) = (\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c).$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(c) &= (m_H \otimes I_H \otimes I_C)[(I_H \otimes \varepsilon_c)(\overline{\rho}(c_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c_2)] \\
&= {c_1}^{\overline{-1}}\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}){c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&\overset{(1.1)}{=} {c_1}^{\overline{-1}}\varepsilon({c_1}^{\overline{0}})1_{H1}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes 1_{H2}{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&= \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon({c_1}^{\overline{0}})1_{H1}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes 1_{H2}{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&\overset{(1.18)}{=} 1_{H1}\varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}){c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes 1_{H2}{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&\overset{(1.12)}{=} \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})_1\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}){c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})_2{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&= c^{\overline{-1}}{}_1\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}){c_2}^{\overline{-1}}{}_1 \otimes c^{\overline{-1}}{}_2{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&= c^{\overline{-1}}{}_1{c_2}^{\overline{-1}}{}_1\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}) \otimes c^{\overline{-1}}{}_2{c_2}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&= (c^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}})_1\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}) \otimes (c^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}})_2 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \\
&\overset{(CCP2)}{=} c^{\overline{-1}}{}_1\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1) \otimes c^{\overline{-1}}{}_2 \otimes c^{\overline{0}}{}_2 \\
&= c^{\overline{-1}}{}_1 \otimes c^{\overline{-1}}{}_2 \otimes c^{\overline{0}} \\
&= (\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c).
\end{aligned}$$

E, isso finaliza a demonstração. □

Exemplo 3.2.3. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ álgebra de grupoide, sendo $\mathcal{G}$ gerado pela união disjunta dos grupos G_1, G_2. Então a álgebra de grupos $\Bbbk G_1$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-comódulo coálgebra parcial via

$$\rho : \Bbbk G_1 \;\; \rightarrow \;\; (\Bbbk\mathcal{G})^* \otimes \Bbbk G_1$$

$$\zeta_h \mapsto \sum_{g\in\mathcal{G}} p_g \otimes \zeta_h \leftharpoondown \widehat{\delta_g}$$

onde estamos identificando $\Bbbk\mathcal{G}$ com $(\Bbbk\mathcal{G})^{**}$ via

$$\begin{aligned}\delta_g \mapsto \widehat{\delta_g} : (\Bbbk\mathcal{G})^* &\to \Bbbk\\ p_h &\mapsto p_h(\delta_g)\end{aligned}$$

e, além disso, estamos vendo $(\Bbbk\mathcal{G})^{**}$ agir à direita em $\Bbbk G_1$ via

$$\zeta_h \leftharpoondown \widehat{\delta_g} = \begin{cases} \zeta_h, & \text{se } g = e_1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

e sabemos que essa ação torna $\Bbbk G_1$ um $(\Bbbk\mathcal{G})^{**}$-módulo coálgebra à direita, pelo Exemplo 2.2.2.

3.3 Caracterizando Coações via ρ_h

Nessa seção exploraremos uma família específica de exemplos de comódulo coálgebra global e de comódulo coálgebra parcial. Para tal, precisamos começar introduzindo a seguinte definição.

Dizemos que C é um *H-comódulo coálgebra global (à esquerda) via* ρ_h, para algum $h \in H$ fixo, se a aplicação linear

$$\begin{aligned}\rho_h : C &\longrightarrow H \otimes C\\ c &\longmapsto h \otimes c\end{aligned}$$

define uma estrutura de comódulo coálgebra (global) em C.

Notemos que não é para todo $h \in H$ que ρ_h define uma estrutura de H-comódulo coálgebra em C. Para tal, basta observarmos que $\rho_{1_H}(c) = 1_H \otimes c$ torna C um comódulo coálgebra se, e somente se, H é uma álgebra de Hopf, o que não nos interessa pois estamos explorando coações de álgebras de Hopf fracas em coálgebras. Todavia, o seguinte resultado tem o intuito de caracterizar as propriedades que $h \in H$ deve satisfazer para que tenhamos ρ_h uma coação de H na coálgebra C, onde H é uma álgebra de Hopf fraca qualquer.

Teorema 3.3.1. *C é um H-comódulo coálgebra à esquerda via*

$$\begin{aligned} \rho_h : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto h \otimes c \end{aligned}$$

se, e somente se,

(i) $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $h^2 = h$

(iii) $\Delta(h) = h \otimes h.$

Demonstração. Suponha que C é um H-comódulo coálgebra via ρ_h, então

(i) $(\varepsilon_H \otimes I)\rho(c) = c$
$\Rightarrow \varepsilon_H(h)c = c, \ \forall c \in C$
$\Rightarrow \varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}.$

(ii) $(I_H \otimes \Delta_C)\rho(c) = (m_H \otimes I_C \otimes I_C)(I_H \otimes \tau_{C,H} \otimes I_C)(\rho \otimes \rho)\Delta(c)$
$\Rightarrow h \otimes c_1 \otimes c_2 = h^2 \otimes c_1 \otimes c_2$
$\Rightarrow (I_H \otimes \varepsilon_C \otimes \varepsilon_C)(h \otimes c_1 \otimes c_2) = (I_H \otimes \varepsilon_C \otimes \varepsilon_C)(h^2 \otimes c_1 \otimes c_2)$
$\Rightarrow h\varepsilon_C(c) = h^2\varepsilon_C(c), \ \forall c \in C$
$\Rightarrow h = h^2.$

(iii) $(I_H \otimes \rho)\rho(c) = (\Delta_H \otimes I_C)\rho(c)$
$\Rightarrow h \otimes h \otimes c = h_1 \otimes h_2 \otimes c$

$$\Rightarrow (I_H \otimes I_H \otimes \varepsilon_C)(h \otimes h \otimes c) = (I_H \otimes I_H \otimes \varepsilon_C)(h_1 \otimes h_2 \otimes c)$$
$$\Rightarrow (h \otimes h)\varepsilon_C(c) = (h_1 \otimes h_2)\varepsilon_C(c), \ \forall c \in C$$
$$\Rightarrow (h \otimes h) = (h_1 \otimes h_2)$$
$$\Rightarrow (h \otimes h) = \Delta(h).$$

A recíproca segue de forma totalmente análoga ao que foi feito. $\square$

Além disso, notemos que se $h \in H$ satisfaz essas três propriedades então também satisfaz $h = \varepsilon_t(h)$. Para tal, basta notar que, pela Proposição 3.1.1, temos

$$c^{-1}\varepsilon_C(c^0) = \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_C(c^0), \ \forall c \in C,$$

então, $h\varepsilon_C(c) = \varepsilon_t(h)\varepsilon_C(c)$, para todo $c \in C$, o que implica que $h = \varepsilon_t(h)$.

Exemplo 3.3.2. Considere um grupoide $\mathcal{G}$ e $\Bbbk\mathcal{G}$ a álgebra de grupoide gerada à partir de $\mathcal{G}$. Então, fixando um elemento $e \in \mathcal{G}_0$, sabemos que

$$\begin{aligned} \rho_{\delta_e} : C &\longrightarrow \Bbbk\mathcal{G} \otimes C \\ c &\longmapsto \delta_e \otimes c \end{aligned}$$

garante uma estrutura de $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra (global) em uma coálgebra qualquer C. De fato, δ_e pertence à base $\{\delta_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ de $\Bbbk\mathcal{G}$. Portanto temos que $\varepsilon(\delta_e) = 1_\Bbbk$ e $\Delta(\delta_e) = \delta_e \otimes \delta_e$ são automaticamente satisfeitas. Também temos que ${\delta_e}^2 = \delta_e$ ocorre por $e \in \mathcal{G}_0$. Assim, pelo Teorema 3.3.1, segue que C é um $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra.

Além disso, notemos que se tomarmos $\Bbbk\mathcal{G}$ a álgebra de grupoide gerada à partir do grupoide $\mathcal{G}$, então, ρ_{δ_g} definido da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \rho_{\delta_g} : C &\longrightarrow \Bbbk\mathcal{G} \otimes C \\ c &\longmapsto \delta_g \otimes c \end{aligned}$$

garante uma estrutura de H-comódulo coálgebra (global) em uma coálgebra qualquer C, se, e somente se, $g \in \mathcal{G}_0$. Isso ocorre pois, ${\delta_g}^2 = \delta_g$ implica que $g^2 = g$. Assim, temos que $g = d(g) = r(g)$, logo $g \in \mathcal{G}_0$.

Pensando agora no caso parcial, dizemos que C é um *H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) via $\overline{\rho_h}$*, para algum $h \in H$ fixo, se a aplicação linear

$$\begin{aligned} \overline{\rho_h} : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto h \otimes c \end{aligned}$$

determina uma estrutura de H-comódulo coálgebra parcial em C.

De forma similar ao caso global, temos o seguinte resultado que caracteriza as propriedades que $h \in H$ deve satisfazer para que $\overline{\rho_h}$ seja uma coação parcial de H em C.

Teorema 3.3.3. *C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda via*

$$\begin{aligned} \overline{\rho_h} : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto h \otimes c \end{aligned}$$

se, e somente se,

(i) $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $(h \otimes 1_H)\Delta(h) = h \otimes h$.

Observemos que se $h \in H$ satisfaz as propriedades (i) e (ii) do Teorema, então $h^2 = h$, pois se $(h \otimes 1_H)\Delta(h) = h \otimes h$, então,

$$(I \otimes \varepsilon_H)((h \otimes 1_H)\Delta(h)) = (I \otimes \varepsilon_H)(h \otimes h)$$

$$\Rightarrow hh_1\varepsilon(h_2) = h_1\varepsilon(h_2)$$

$$\Rightarrow h^2 = h.$$

Demonstração. Suponha que C é um H-comódulo coálgebra parcial via $\overline{\rho_h}$, então,

(i) $(\varepsilon_H \otimes I)\overline{\rho}(c) \overset{(CCP1)}{=} c$

$\Rightarrow \varepsilon_H(h)c = c, \ \forall c \in C$

$\Rightarrow \varepsilon_H(h) = 1_{\Bbbk}.$

(ii) $(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(c) \overset{(CCP3)}{=} (m_H \otimes I_H \otimes I_C)[(I_H \otimes \varepsilon_c)(\overline{\rho}(c_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_C)\overline{\rho}(c_2)]$

$\Rightarrow h \otimes h \otimes c = h\varepsilon(c_1)h_1 \otimes h_2 \otimes c_2$

$\Rightarrow (I_H \otimes I_H \otimes \varepsilon_C)(h \otimes h \otimes c) = (I_H \otimes I_H \otimes \varepsilon_C)(hh_1 \otimes h_2 \otimes c)$

$\Rightarrow (h \otimes h)\varepsilon_C(c) = (hh_1 \otimes h_2)\varepsilon_C(c), \ \forall c \in C$

$\Rightarrow (h \otimes h) = (hh_1 \otimes h_2)$

$\Rightarrow (h \otimes h) = (h \otimes 1_H)\Delta(h).$

Reciprocamente, supondo que $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$ e $(h \otimes 1_H)\Delta(h) = h \otimes h$, sabemos que $h^2 = h$ pelo que foi observado, e assim C é um H-comódulo coálgebra parcial, de forma totalmente similar ao que foi feito. $\square$

Além disso, C é um H-comódulo coálgebra parcial simétrico via $\overline{\rho_h}$ se, e somente se,

(i) $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $(h \otimes 1_H)\Delta(h) = h \otimes h$

(iii) $\Delta(h)(h \otimes 1_H) = h \otimes h.$

Para tal, basta nós observarmos a condição de simetria

$$c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0}\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0}\overline{0}} = {c_1}^{\overline{-1}}{}_1 {c_2}^{\overline{-1}}\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \otimes {c_1}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {c_1}^{\overline{0}}$$

é satisfeita.

Então, para esse exemplo, temos,

$$h \otimes h \otimes c = h_1\varepsilon(c_2)h \otimes h_2 \otimes c_1,$$

o que implica que

$$h \otimes h\varepsilon(c) = h_1 h \otimes h_2\varepsilon(c), \ \forall c \in C.$$

Portanto, obtemos a propriedade que $h \in H$ deve satisfazer

$$h \otimes h = \Delta(h)(h \otimes 1_H).$$

Observação 3.3.4. Já vimos na Proposição 3.2.2 que se C é um H-comódulo coálgebra parcial que satisfaz

$$c^{\overline{-1}}\varepsilon_C(c^{\overline{0}}) = \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon_C(c^{\overline{0}}),$$

então, C é um H-comódulo coálgebra (global). Além disso, a recíproca também é verdadeira, isto é, todo H-comódulo coálgebra satisfaz $c^{\overline{-1}}\varepsilon_C(c^{\overline{0}}) = \varepsilon_t(c^{\overline{-1}})\varepsilon_C(c^{\overline{0}})$.

Agora notemos que, no nosso caso a identidade acima equivale a:

$$h\varepsilon_C(c) = \varepsilon_t(h)\varepsilon_C(c), \forall c \in C.$$

Mas, $h\varepsilon_C(c) = \varepsilon_t(h)\varepsilon_C(c), \forall c \in C$ ocorre, se, e somente se, $h = \varepsilon_t(h)$. Um lado é imediato, para mostrar o outro lado, basta tomar, em particular, um $c \in C$ tal que $\varepsilon_C(c) = 1_{\Bbbk}$. Assim, obtemos que $\varepsilon_t(h) = h$.

Ou seja, um H-comódulo coálgebra parcial via

$$\begin{aligned} \overline{\rho_h} : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto h \otimes c \end{aligned}$$

é um H-comódulo coálgebra (global) se, e somente se $\varepsilon_t(h) = h$.

O seguinte exemplo foi inspirado no Exemplo 3.2.3 de [18], onde $\Bbbk$ é visto como um $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo álgebra parcial.

Exemplo 3.3.5. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ a álgebra de grupoide gerada à partir do grupoide $\mathcal{G}$, dado pela união disjunta dos grupos finitos G_1 e G_2. Nessas condições, uma coálgebra qualquer C é um $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra parcial via

$$\begin{aligned} \overline{\rho_h} : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto h \otimes c \end{aligned}$$

onde,

$$h = \sum_{g \in G_1} \frac{1}{|G_1|} \delta_g,$$

As contas desse exemplo serão omitidas por se tratarem das mesmas contas da Proposição 3.2.3 de [18], apresentada por G. Quadros.

De forma análoga ao que G. Quadros fez [18], também podemos caracterizar a coação da álgebra de Hopf fraca $\Bbbk\mathcal{G}$ em $\Bbbk$, para $\mathcal{G}$ um grupoide finito. Embora, estejamos vendo $\Bbbk$ como uma coálgebra.

Proposição 3.3.6. *$\Bbbk$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra parcial via $\overline{\rho_h}(1_\Bbbk) = h \otimes 1_\Bbbk$ se, e somente se, $h = \sum_{g \in V} \frac{1}{|V|} \delta_g$, para V um grupo em $\mathcal{G}$.*

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma da Proposição 3.2.3 apresentada por G. Quadros em [18]. Isso ocorre pois as condições do Teorema 3.3.3 são as mesmas do Teorema 3.2.1 [18]. □

Semelhante ao que foi feito, temos um resultado quando consideramos a coação da álgebra de Hopf fraca $(\Bbbk\mathcal{G})^*$ sobre o corpo $\Bbbk$, quando olhamos $\Bbbk$ como uma coálgebra.

Proposição 3.3.7. *$\Bbbk$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-comódulo coálgebra parcial via $\overline{\rho_f}(1_\Bbbk) = f \otimes 1_\Bbbk$ se, e somente se, $f = \sum_{g \in V} p_g$, onde V é um grupo em $\mathcal{G}$.*

Demonstração. A prova para esse resultado é igual à apresentada na Proposição 3.2.2 por G. Quadros em [18]. Novamente, isso acontece pois as condições do Teorema 3.3.3 são as mesmas do Teorema 3.2.1 [18]. □

3.4 Coação Induzida para Comódulo Coálgebra

Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C uma coálgebra, e suponha que C é um H-comódulo coálgebra (global) à esquerda via

$$\begin{aligned} \rho : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{-1} \otimes c^{0} \end{aligned}$$

Nosso objetivo nessa seção é construir um H-comódulo coálgebra parcial simétrico à esquerda à partir desse H-comódulo coálgebra (global) já existente. Para isso, considere $D \subseteq C$ uma subcoálgebra de C tal que existe uma projeção $\pi : C \to C$ sobre D, isto é,

$$\pi(\pi(c)) = \pi(c), \forall c \in C,$$

$$Im\pi = D.$$

Nessas condições, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.4.1. *D é um H-comódulo coálgebra parcial simétrico à esquerda via*

$$\begin{aligned} \overline{\rho} : D &\longrightarrow H \otimes D \\ d &\longmapsto (I_H \otimes \pi)\rho(d) = d^{-1} \otimes \pi(d^{0}) \end{aligned}$$

se, e somente se, a projeção π satisfaz:

(i) $d^{-1} \otimes \Delta(\pi(d^{0})) = d^{-1} \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta(d^{0}))$

(ii) $d^{-1} \otimes \pi(d^0)^{-1} \otimes \pi(\pi(d^0)^0) = {d_1}^{-1}\varepsilon(\pi({d_1}^0)){d_2}^{-1}{}_1 \otimes {d_2}^{-1}{}_2 \otimes \pi({d_2}^0)$
$= {d_1}^{-1}{}_1{d_2}^{-1}\varepsilon(\pi({d_2}^0)) \otimes {d_1}^{-1}{}_2 \otimes \pi({d_1}^0)$
para todo $d \in D$*. Nesse caso dizemos que* $\overline{\rho}$ *é uma coação induzida.*

Demonstração. Suponha que D é um H-comódulo coálgebra parcial simétrico à esquerda via

$$\overline{\rho}(c) = (I_H \otimes \pi)\rho(d) = d^{-1} \otimes \pi(d^0).$$

Então:

(i)

$$\begin{aligned}
d^{-1} \otimes \Delta(\pi(d^0)) &= (I_H \otimes \Delta)(\overline{\rho}(d)) \\
&\overset{(CCP2)}{=} (m_H \otimes I_D \otimes I_D)(I_H \otimes \tau_{H,D} \otimes I_D)(\overline{\rho} \otimes \overline{\rho})\Delta(d) \\
&= (m_H \otimes I_D \otimes I_D)(I_H \otimes \tau_{H,D} \otimes I_D)(\overline{\rho}(d_1) \otimes \overline{\rho}(d_2)) \\
&= {d_1}^{-1}{d_2}^{-1} \otimes \pi({d_1}^0) \otimes \pi({d_2}^0) \\
&= (I_H \otimes \pi \otimes \pi)({d_1}^{-1}{d_2}^{-1} \otimes {d_1}^0 \otimes {d_2}^0) \\
&\overset{(*)}{=} (I_H \otimes \pi \otimes \pi)(d^{-1} \otimes {d^0}_1 \otimes {d^0}_2) \\
&= (I_H \otimes \pi \otimes \pi)(d^{-1} \otimes \Delta(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \pi({d^0}_1) \otimes \pi({d^0}_2) \\
&= d^{-1} \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta(d^0))
\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do fato de C ser um H-comódulo coálgebra (global) à esquerda.

(ii)

$$\begin{aligned}
d^{-1} \otimes \pi(d^0)^{-1} \otimes \pi(\pi(d^0)^0) &= (I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(d) \\
&\overset{(CCP3)}{=} (m_H \otimes I_H \otimes I_D)[(I_H \otimes \varepsilon_D)(\overline{\rho}(d_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_D)\overline{\rho}(d_2)] \\
&= {d_1}^{-1}\varepsilon(\pi({d_1}^0)){d_2}^{-1}{}_1 \otimes {d_2}^{-1}{}_2 \otimes \pi({d_2}^0).
\end{aligned}$$

Analogamente, usando a condição de simetria,

$$\begin{aligned}
d^{-1} \otimes \pi(d^0)^{-1} \otimes \pi(\pi(d^0)^0) &= (I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(d) \\
&= d_1{}^{\overline{-1}}{}_1 d_2{}^{\overline{-1}} \varepsilon(d_2{}^{\overline{0}}) \otimes d_1{}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes d_1{}^{\overline{0}} \\
&= d_1{}^{-1}{}_1 d_2{}^{-1} \varepsilon(\pi(d_2{}^0)) \otimes d_1{}^{-1}{}_2 \otimes \pi(d_1{}^0).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que a projeção π satisfaz as condições dadas, então,

(i)

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_H \otimes I_D)\overline{\rho}(d) &= (\varepsilon_H \otimes I_D)(d^{-1} \otimes \pi(d^0)) \\
&= \varepsilon_H(d^{-1})\pi(d^0) \\
&= \pi(\varepsilon_H(d^{-1})d^0) \\
&= \pi(d) \\
&= d
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(I_H \otimes \Delta)\overline{\rho}(d) &= (I_H \otimes \Delta)(d^{-1} \otimes \pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \Delta(\pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes (\pi \otimes \pi)\Delta(d^0) \\
&= (I_H \otimes \pi \otimes \pi)(d^{-1} \otimes \Delta(d^0)) \\
&= (I_H \otimes \pi \otimes \pi)(d^{-1} \otimes d^0{}_1 \otimes d^0{}_2) \\
&\overset{(*)}{=} (I_H \otimes \pi \otimes \pi)(d_1{}^{-1} d_2{}^{-1} \otimes d_1{}^0 \otimes d_2{}^0) \\
&= d_1{}^{-1} d_2{}^{-1} \otimes \pi(d_1{}^0) \otimes \pi(d_2{}^0) \\
&= (m_H \otimes I_D \otimes I_D)(I_H \otimes \tau_{H,D} \otimes I_D)(\overline{\rho}(d_1) \otimes \overline{\rho}(d_2)) \\
&= (m_H \otimes I_D \otimes I_D)(I_H \otimes \tau_{H,D} \otimes I_D)(\overline{\rho} \otimes \overline{\rho})\Delta(d)
\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do fato de C ser um H-comódulo coálgebra (global) à esquerda.

(ii)

$$
\begin{aligned}
(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(d) &= (I_H \otimes \overline{\rho})(d^{-1} \otimes \pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \overline{\rho}(\pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \pi(d^0)^{-1} \otimes \pi(\pi(d^0)^0) \\
&= {d_1}^{-1}\varepsilon(\pi({d_1}^0)){d_2}^{-1}{}_1 \otimes {d_2}^{-1}{}_2 \otimes \pi({d_2}^0) \\
&= (m_H \otimes I_H \otimes I_D)[(I_H \otimes \varepsilon_D)(\overline{\rho}(d_1)) \otimes (\Delta_H \otimes I_D)\overline{\rho}(d_2)].
\end{aligned}
$$

Similarmente, a condição de simetria é satisfeita,

$$
\begin{aligned}
(I_H \otimes \overline{\rho})\overline{\rho}(d) &= (I_H \otimes \overline{\rho})(d^{-1} \otimes \pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \overline{\rho}(\pi(d^0)) \\
&= d^{-1} \otimes \pi(d^0)^{-1} \otimes \pi(\pi(d^0)^0) \\
&= {d_1}^{-1}{}_1{d_2}^{-1}\varepsilon(\pi({d_2}^0)) \otimes {d_1}^{-1}{}_2 \otimes \pi({d_1}^0) \\
&= {d_1}^{\overline{-1}}{}_1{d_2}^{\overline{-1}}\varepsilon({d_2}^{\overline{0}}) \otimes {d_1}^{\overline{-1}}{}_2 \otimes {d_1}^{\overline{0}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Notemos que a coação induzida gera um H-comódulo coálgebra (global) à esquerda se, e somente se,

$$\varepsilon_t(d^{-1})\varepsilon(\pi(d^0)) = d^{-1}\varepsilon(\pi(d^0)),$$

para todo $d \in D$.

O exemplo a seguir ilustra um caso em que, sob certas condições, a coação induzida à partir de um H-comódulo coálgebra gera, na verdade, um H-comódulo coálgebra (global). O que nos diz que nem sempre a coação induzida gerará um H-comódulo coálgebra parcial que não é global.

Exemplo 3.4.2. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\Bbbk\mathcal{G}$ sua álgebra de grupoide. Então, pelo Teorema 3.3.1, sabemos que $\Bbbk\mathcal{G}$ é um $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra à esquerda via

$$\rho_h : \Bbbk\mathcal{G} \longrightarrow \Bbbk\mathcal{G} \otimes \Bbbk\mathcal{G}$$

$$\delta_g \longmapsto h \otimes \delta_g$$

onde, h satisfaz as seguintes propriedades.

(i) $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$

(ii) $h^2 = h$

(iii) $\Delta(h) = h \otimes h$.

Considere a projeção

$$\begin{array}{rcl} \pi : \Bbbk\mathcal{G} & \to & \Bbbk\mathcal{G} \\ \delta_g & \mapsto & \begin{cases} \delta_g, & \text{se } \delta_g \in D \ , \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{array}$$

onde D é uma subcoálgebra de $\Bbbk\mathcal{G}$. Sob tais hipóteses, π satisfaz as condições da Proposição 3.4.1, dando a D uma estrutura de $\Bbbk\mathcal{G}$-comódulo coálgebra parcial. De fato, considere $\delta_d \in D$, então

(i)

$$\begin{aligned} {\delta_d}^{-1} \otimes \Delta(\pi({\delta_d}^{0})) &= h \otimes \Delta(\pi(\delta_d)) \\ &\overset{(*)}{=} h \otimes \Delta(\delta_d) \\ &\overset{(**)}{=} h \otimes \delta_d \otimes \delta_d \\ &= h \otimes \pi(\delta_d) \otimes \pi(\delta_d) \\ &= h \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta(\delta_d)) \\ &= {\delta_d}^{-1} \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta({\delta_d}^{0})), \end{aligned}$$

onde, em $(*)$, estamos usando que π é uma projeção, então $Im\pi = D$ e $\pi^2 = \pi$. Já em $(**)$, estamos usando o fato que D é uma subcoálgebra de C e que π é uma projeção.

(ii)

$$
\begin{aligned}
{\delta_d}^{-1} \otimes \pi({\delta_d}^0)^{-1} \otimes \pi(\pi({\delta_d}^0)^0) &= h \otimes \pi(\delta_d)^{-1} \otimes \pi(\pi(\delta_d)^0) \\
&= h \otimes {\delta_d}^{-1} \otimes {\delta_d}^0 \\
&= h \otimes h \otimes \delta_d \\
&\overset{(*)}{=} h \otimes h \otimes \delta_d \varepsilon(\delta_d) \\
&= h \otimes h \otimes \pi(\delta_d)\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= {\delta_{d1}}^{-1}\varepsilon(\pi({\delta_{d1}}^0)){\delta_{d2}}^{-1}{}_1 \otimes {\delta_{d2}}^{-1}{}_2 \otimes \pi({\delta_{d2}}^0) \\
&= {\delta_{d1}}^{-1}{}_1{\delta_{d2}}^{-1}\varepsilon(\pi({\delta_{d2}}^0)) \otimes {\delta_{d1}}^{-1}{}_2 \otimes \pi({\delta_{d1}}^0).
\end{aligned}
$$

Novamente, em $(*)$, estamos usando que π é uma projeção, então $Im\pi = D$ e $\pi^2 = \pi$.

No entanto, notemos que, se no lugar de h, tomarmos δ_e, para algum $e \in G_0$ temos que esse $\Bbbk\mathcal{G}$- comódulo coálgebra parcial construído é, na verdade, um $\Bbbk\mathcal{G}$- comódulo coálgebra (global), pois,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t({\delta_d}^{-1})\varepsilon(\pi({\delta_d}^0)) &= \varepsilon_t(\delta_e)\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= (\delta_e)_1 S((\delta_e)_2)\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= \delta_e S(\delta_e)\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= \delta_e(\delta_e)^{-1}\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= \delta_e\delta_e\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= \delta_{e^2}\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= \delta_e\varepsilon(\pi(\delta_d)) \\
&= {\delta_d}^{-1}\varepsilon(\pi({\delta_d}^0)).
\end{aligned}
$$

Todavia, nosso obejetivo nessa seção é construir H-comódulos coálgebras parciais que não sejam globais, pois já estamos partindo de um H-comódulo coálgebra (global). Portanto, a seguir, apresentamos um exemplo de coação parcial induzida que não é global.

Exemplo 3.4.3. Considere G_1 e G_2 dois grupos finitos, $\mathcal{G}$ o grupoide gerado pela união disjunta desses grupos e $\Bbbk\mathcal{G}$ sua álgebra de grupoide. Definimos

$$\begin{aligned} \rho : \Bbbk G_1 &\longrightarrow (\Bbbk\mathcal{G})^* \otimes \Bbbk G_1 \\ \zeta_h &\longmapsto \sum_{g\in\mathcal{G}} p_g \otimes \zeta_h\zeta_g \end{aligned}$$

sendo $\{\zeta_g\}_{g\in G_1}$ base da álgebra de Hopf $\Bbbk G_1$ e $\{p_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ base para a álgebra de Hopf fraca $(\Bbbk\mathcal{G})^*$, onde:

$$p_g(\delta_h) = \begin{cases} 1, & \text{se h=g} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $\{\delta_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ base para a álgebra de Hopf fraca $\Bbbk\mathcal{G}$. Dessa forma, $\Bbbk G_1$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-comódulo coálgebra global (à esquerda). De fato,

1. $(\varepsilon \otimes I)\rho(c) = c$, pois

$$\begin{aligned} \sum_{g\in\mathcal{G}} \varepsilon(p_g)\zeta_h\zeta_g &= \sum_{g\in G_1} \varepsilon(p_g)\zeta_{hg} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G_1} p_g(1_{\Bbbk\mathcal{G}})\zeta_{hg} \\ &= \sum_{g\in G_1}\sum_{e\in\mathcal{G}_0} p_g(\delta_e)\zeta_{hg} \\ &\overset{g\in G_1}{=} \sum_{g\in G_1} p_g(\delta_{e_1})\zeta_{hg} \\ &\overset{(**)}{=} \zeta_{he_1} \\ &\overset{h\in G_1}{=} \zeta_h \end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição de $\varepsilon_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}$ e em $(**)$ a definição de $\{p_g\}_{g\in\mathcal{G}}$.

2. $(I \otimes \Delta)\rho(c) = (m \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{C,H} \otimes I)(\rho \otimes \rho)(c)$, pois

$$\begin{aligned}
& (m \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{C,H} \otimes I)(\sum_{g \in G_1} p_g \otimes \zeta_{hg} \otimes \sum_{l \in G_1} p_l \otimes \zeta_{hl}) \\
= & \sum_{g,l \in G_1} (p_g p_l)\zeta_{hg} \otimes \zeta_{hl} \\
\overset{(*)}{=} & \sum_{g,l \in G_1} (\delta_{g,l}) p_g \otimes \zeta_{hg} \otimes \zeta_{hl} \\
\overset{g=l}{=} & \sum_{g \in G_1} p_g \otimes \zeta_{hg} \otimes \zeta_{hg} \\
= & (I \otimes \Delta)(\sum_{g \in G_1} p_g \otimes \zeta_{hg}) \\
= & (I \otimes \Delta)(\sum_{g \in \mathcal{G}} p_g \otimes \zeta_h \zeta_g)
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição de produto em $(\Bbbk\mathcal{G})^*$. É necessário chamar a atenção que $\delta_{g,l} = 1$ se $g = l$ e $\delta_{g,l} = 0$ se $g \neq l$.

3. $(\Delta \otimes I)\rho(c) = (I \otimes \rho)\rho(c)$, pois

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)(\sum_{l \in G_1} p_l \otimes \zeta_{hl}) & \overset{(*)}{=} \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{\exists g^{-1}l \; l \in G_1} p_g \otimes p_{g^{-1}l} \otimes \zeta_{hl} \\
& \overset{g \in G_1}{=} \sum_{g,l \in G_1} p_g \otimes p_{g^{-1}l} \otimes \zeta_{hl}
\end{aligned}$$

Tomando $q = g^{-1}l$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\rho(\zeta_h) & = \sum_{q,g \in G_1} p_g \otimes p_q \otimes \zeta_{hgq} \\
& = (I \otimes \rho)\rho(\zeta_h)
\end{aligned}$$

.

Notemos que em $(*)$ usamos a definição do coproduto em $(\Bbbk\mathcal{G})^*$.

Portanto, $\Bbbk\mathcal{G}$ é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-comódulo coálgebra (global).

Definimos novamente

$$\pi : \Bbbk\mathcal{G} \rightarrow \Bbbk\mathcal{G}$$

$$\delta_g \quad \mapsto \quad \begin{cases} \delta_g, & \text{se } \delta_g \in D \ , \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $D =< \delta_l >$, para algum l fixo em G_1.

Vamos mostrar que essa projeção satisfaz as condições da Proposição 3.4.1. De fato,

(i)

$$\begin{aligned}
{\zeta_h}^{-1} \otimes \Delta(\pi({\zeta_h}^0)) &= \sum_{g \in G_1} p_g \otimes \Delta(\pi(\zeta_{hg})) \\
&\overset{hg=l}{=} p_{h^{-1}l} \otimes \zeta_l \otimes \zeta_l \\
&= \sum_{g \in G_1} p_g \otimes \pi(\zeta_{hg}) \otimes \pi(\zeta_{hg}) \\
&= {\zeta_h}^{-1} \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta({\zeta_h}^0))
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
{\zeta_h}^{-1} \otimes \pi({\zeta_h}^0)^{-1} \otimes \pi(\pi({\zeta_h}^0)^0) &= \sum_{g \in G_1} p_g \otimes \pi(\zeta_{hg})^{-1} \otimes \pi(\pi(\zeta_{hg})^0) \\
&\overset{hg=l}{=} p_{h^{-1}l} \otimes \pi(\zeta_l)^{-1} \otimes \pi(\pi(\zeta_l)^0) \\
&= p_{h^{-1}l} \otimes {\zeta_l}^{-1} \otimes \pi({\zeta_l}^0) \\
&= p_{h^{-1}l} \otimes \sum_{q \in G_1} p_q \otimes \pi(\zeta_{lq}) \\
&\overset{q=e_1}{=} p_{h^{-1}l} \otimes p_{e_1} \otimes \pi(\zeta_{le_1}) \\
&= p_{h^{-1}l} \otimes p_{e_1} \otimes \pi(\zeta_l) \\
&= p_{h^{-1}l} \otimes p_{e_1} \otimes \zeta_l
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$${\zeta_{h_1}}^{-1} \varepsilon(\pi({\zeta_{h_1}}^0)) {\zeta_{h_2}^{-1}}_1 \otimes {\zeta_{h_2}^{-1}}_2 \otimes \pi({\zeta_{h_2}}^0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in G_1} p_g\varepsilon(\pi(\zeta_{hg}))\zeta_h{}^{-1}{}_1 \otimes \zeta_h{}^{-1}{}_2 \otimes \pi(\zeta_h{}^0)\\
&\overset{hg=l}{=} p_{h^{-1}l}\varepsilon(\zeta_l)\zeta_h{}^{-1}{}_1 \otimes \zeta_h{}^{-1}{}_2 \otimes \pi(\zeta_h{}^0)\\
&\overset{\varepsilon(\zeta_l)=1_{\Bbbk}}{=} p_{h^{-1}l}\zeta_h{}^{-1}{}_1 \otimes \zeta_h{}^{-1}{}_2 \otimes \pi(\zeta_h{}^0)\\
&= \sum_{q\in G_1} p_{h^{-1}l}(p_q)_1 \otimes (p_q)_2 \otimes \pi(\zeta_{hq})\\
&\overset{hq=l}{=} p_{h^{-1}l}(p_{h^{-1}l})_1 \otimes (p_{h^{-1}l})_2 \otimes \zeta_l\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{r\in\mathcal{G}\ \exists r^{-1}h^{-1}l} p_{h^{-1}l}p_r \otimes p_{r^{-1}h^{-1}l} \otimes \zeta_l\\
&\overset{r=h^{-1}l}{=} p_{h^{-1}l} \otimes p_{e_1} \otimes \zeta_l
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade usamos que $\{p_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ é base ortogonal de $(\Bbbk\mathcal{G})^*$ e em $(*)$ usamos a definição de coproduto em $(\Bbbk\mathcal{G})^*$. Portanto, segue a igualdade. Além disso, a coação induzida gerada nesse exemplo não é global, pois por um lado,

$$
\begin{aligned}
\zeta_h{}^{-1}\varepsilon(\pi(\zeta_h^0)) &= \sum_{g\in G_1} p_g\varepsilon(\pi(\zeta_{hg}))\\
&\overset{hg=l}{=} p_{h^{-1}l}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{t_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}}(\zeta_h{}^{-1})\varepsilon(\pi(\zeta_h^0)) &= \sum_{g\in G_1} \varepsilon_{t_{\Bbbk\mathcal{G}^*}}(p_g)\varepsilon(\pi(\zeta_{hg}))\\
&\overset{hg=l}{=} \varepsilon_{t_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}}(p_{h^{-1}l}).
\end{aligned}
$$

Notemos agora que,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{t_{(\Bbbk\mathcal{G})^*}}(p_{h^{-1}l})(\delta_q) &= p_{h^{-1}l}(\varepsilon_t(\delta_q))\\
&= p_{h^{-1}l}(\delta_q S(\delta_q))\\
&= p_{h^{-1}l}(\delta_q\delta_{q^{-1}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{h^{-1}l}(\delta_{qq^{-1}}) \\
&= p_{h^{-1}l}(\delta_{e_1}) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } h = l \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Todavia,

$$
p_{h^{-1}l}(\delta_q) = \begin{cases} 1, & \text{se } h^{-1}l = q \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Portanto não são iguais, logo não é um $(\Bbbk\mathcal{G})^*$-comódulo coálgebra global.

3.5 Coproduto Smash Fraco

Yu. Wang e L. Yu. Zhang em [22], apresentam a definição de uma nova estrutura gerada à partir de um H-comódulo coálgebra global, o coproduto smash fraco. Nesse mesmo artigo, eles mostram que essa nova estrutura é, na verdade, uma coálgebra. Com isso, uma questão natural que surge é

"*Sob quais condições a estrutura apresentada por Yu. Wang e L. Yu. Zhang em [22] torna-se uma álgebra de Hopf fraca?*"

Portanto, essa seção tem o intuito de responder tal pergunta e de apresentar uma contribuição à teoria já existente. Inicialmente começamos com algumas propriedades do espeço vetorial $C \otimes H$.

Proposição 3.5.1. *O espaço vetorial $C \otimes H$ é uma coálgebra não necessariamente counitária com estrutura*

$$\Delta(c \otimes h) = c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^{0} \otimes h_2.$$

Além disso, se C também é uma álgebra unitária temos que $C \otimes H$ é uma álgebra com multiplicação dada por

$$(c \otimes h)(d \otimes k) = (cd \otimes hk),$$

e unidade

$$1_{(C\otimes H)} = 1_C \otimes 1_H.$$

Demonstração. De fato, para todo $c \in C$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta((c \otimes h)) &= (I \otimes \Delta)(c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^0 \otimes h_2) \\
&= c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1 \otimes \Delta({c_2}^0 \otimes h_2) \\
&= c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1 \otimes {{c_2}^0}_1 \otimes {{{c_2}^0}_2}^{-1}h_2 \otimes {{{c_2}^0}_2}^0 \otimes h_3 \\
&\overset{(CC2)}{=} c_1 \otimes {c_2}^{-1}{c_3}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^0 \otimes {c_3}^{0-1}h_2 \otimes {c_3}^{00} \otimes h_3 \\
&\overset{(CC3)}{=} c_1 \otimes {c_2}^{-1}{{c_3}^{-1}}_1h_1 \otimes {c_2}^0 \otimes {{c_3}^{-1}}_2h_2 \otimes {c_3}^0 \otimes h_3 \\
&= \Delta(c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1) \otimes ({c_2}^0 \otimes h_2) \\
&= (\Delta \otimes I)(c_1 \otimes {c_2}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^0 \otimes h_2) \\
&= (\Delta \otimes I)\Delta((c \otimes h)).
\end{aligned}$$

Além disso, para todos $a, b, c \in C$ e $h, k, l \in C$, temos

$$\begin{aligned}
(a \otimes k)((c \otimes h)(b \otimes l)) &= (a \otimes k)(cb \otimes hl) \\
&= (a(cb) \otimes k(hl)) \\
&= ((ac)b \otimes (kh)l) \\
&= (ac \otimes kh)(b \otimes l) \\
&= ((a \otimes k)(c \otimes h))(b \otimes l).
\end{aligned}$$

E, naturalmente,

$$1_{(C\otimes H)} = 1_C \otimes 1_H.$$

$\square$

Definição 3.5.2. [22] Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C um H-comódulo coálgebra à esquerda. Então, o *coproduto smash fraco* é definido da seguinte forma:

$$C \times H = \{c^0 \otimes h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1)\}$$

gerado como $\Bbbk$-espaço vetorial.

Podemos pensar nesse espaço vetorial $C \times H = \{c^0 \otimes h_2\varepsilon(c^{-1}h_1)\}$ como um subespaço vetorial de $C \otimes H$, com comultiplicação e counidade dadas da seguinte forma:

$$\Delta(c \times h) = c_1 \times {c_2}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^0 \times h_2,$$

$$\varepsilon(c \times h) = \varepsilon(c^0)\varepsilon(c^{-1}h).$$

Proposição 3.5.3. *$C \times H = \{c^0 \otimes h_2\varepsilon(c^{-1}h_1)\}$ é um subespaço vetorial de $C \otimes H$. Além disso, $C \times H$ é uma coálgebra counitária.*

Demonstração. Primeiro notemos que o coproduto de $C \times H$ coincide com o coproduto de $C \otimes H$ quando vemos um elemento de $C \times H$ em $C \otimes H$, ou seja,

$$\Delta_{C\times H}(c \times h) = \Delta_{C\otimes H}(c^0 \otimes h_2 \varepsilon c^{-1}h_1).$$

Para tal, basta notarmos que

$$\begin{aligned}
c_1 \times {c_2}^{-1}h_1 \otimes {c_2}^0 \times h_2 \quad &= \quad {c_1}^0 \otimes ({c_2}^{-1}h_1)_2\varepsilon({c_1}^{-1}({c_2}^{-1}h_1)_1) \otimes {c_2}^{00} \otimes (h_2)_2\varepsilon({c_2}^{0-1}(h_2)_1) \\
&= \quad {c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1 h_1) \otimes {c_2}^{00} \otimes h_4\varepsilon({c_2}^{0-1}h_3) \\
&\overset{(CC3)}{=} \quad {c_1}^0 \otimes ({{c_2}^{-1}}_1)_2 h_2\varepsilon({c_1}^{-1}({{c_2}^{-1}}_1)_1 h_1) \otimes {c_2}^0 \otimes h_4\varepsilon({{c_2}^{-1}}_2 h_3) \\
&= \quad {c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1 h_1) \otimes {c_2}^0 \otimes h_4\varepsilon({{c_2}^{-1}}_3 h_3) \\
&= \quad {c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h_2\varepsilon({{c_2}^{-1}}_3 h_3)\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1 h_1) \otimes {c_2}^0 \otimes h_4 \\
&= \quad {c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1 h_1) \otimes {c_2}^0 \otimes h_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(CC3)}{=} && {c_1}^0 \otimes {c_2}^{0-1} h_2 \varepsilon({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1) \otimes {c_2}^{00} \otimes h_3 \\
&\overset{(CC2)}{=} && {c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1) \otimes {{c^0}_2}^0 \otimes h_3 \\
&= && \Delta(c^0 \otimes h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1)) \\
&= && \Delta(c \times h).
\end{aligned}
$$

Finalizando, basta mostrarmos que $C \times H$ é counitária. Para tal, notemos que

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_{C\otimes H} \otimes I)\Delta(c \times h) &= (\varepsilon_{C\otimes H} \otimes I)(\Delta(c^0 \otimes h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1))) \\
&= (\varepsilon_{C\otimes H} \otimes I)({c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1) \otimes {{c^0}_2}^0 \otimes h_3) \\
&= \varepsilon({c^0}_1)\varepsilon({{c^0}_2}^{-1}h_2)\varepsilon(c^{-1}h_1)({{c^0}_2}^0 \otimes h_3) \\
&= \varepsilon(c^{0-1}h_2)\varepsilon(c^{-1}h_1)(c^{00} \otimes h_3) \\
&\overset{(CC3)}{=} \varepsilon({c^{-1}}_2 h_2)\varepsilon({c^{-1}}_1 h_1)(c^0 \otimes h_3) \\
&= \varepsilon(c^{-1}h_1)(c^0 \otimes h_2) \\
&= c \times h.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \varepsilon_{C\otimes H})\Delta(c \times h) &= (I \otimes \varepsilon_{C\otimes H})(\Delta(c^0 \otimes h_2 \varepsilon c^{-1}h_1)) \\
&= (I \otimes \varepsilon_{C\otimes H})({c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2 \varepsilon(c^{-1}h_1) \otimes {{c^0}_2}^0 \otimes h_3) \\
&= ({c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2)\varepsilon(c^{-1}h_1)\varepsilon({{c^0}_2}^0)\varepsilon(h_3) \\
&= ({c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2 \varepsilon(h_3))\varepsilon(c^{-1}h_1)\varepsilon({{c^0}_2}^0) \\
&= ({c^0}_1 \otimes {{c^0}_2}^{-1} h_2)\varepsilon(c^{-1}h_1)\varepsilon({{c^0}_2}^0) \\
&\overset{(CC2)}{=} ({c_1}^0 \otimes {c_2}^{0-1} h_2)\varepsilon({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon({c_2}^{00}) \\
&\overset{(CC3)}{=} ({c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h_2)\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1 h_1)\varepsilon({c_2}^0) \\
&= ({c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_3 h_2)\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1)\varepsilon({{c_2}^{-1}}_2 h_1)\varepsilon({c_2}^0) \\
&= ({c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_3 h_2 \varepsilon({{c_2}^{-1}}_2 h_1))\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1)\varepsilon({c_2}^0) \\
&= ({c_1}^0 \otimes {{c_2}^{-1}}_2 h)\varepsilon({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1)\varepsilon({c_2}^0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{=} && ({c_1}^0 \otimes \varepsilon_t({c_2}^{-1})_2 h)\varepsilon({c_1}^{-1}\varepsilon_t({c_2}^{-1})_1)\varepsilon({c_2}^0)\\
&\overset{(1.12)}{=} && ({c_1}^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon({c_1}^{-1} 1_{H1}\varepsilon_t({c_2}^{-1}))\varepsilon({c_2}^0)\\
&\overset{(1.18)}{=} && ({c_1}^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon({c_1}^{-1}\varepsilon_t({c_2}^{-1}) 1_{H1})\varepsilon({c_2}^0)\\
&\overset{(*)}{=} && ({c_1}^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon({c_1}^{-1}{c_2}^{-1} 1_{H1})\varepsilon({c_2}^0)\\
&= && ({c^0}_1 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1} 1_{H1})\varepsilon({c^0}_2)\\
&= && ({c^0}_1\varepsilon({c^0}_2) \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1} 1_{H1})\\
&= && (c^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1} 1_{H1})\\
&\overset{(1.9)}{=} && (c^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_s(1_{H1}))\\
&\overset{(1.7)}{=} && (c^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(\varepsilon_s(1_{H1})))\\
&\overset{(1.27)}{=} && (c^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(S(1_{H1})))\\
&\overset{(1.7)}{=} && (c^0 \otimes 1_{H2} h)\varepsilon(c^{-1} S(1_{H1}))\\
&\overset{(1.33)}{=} && (c^0 \otimes h_2)\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(h_1))\\
&\overset{(1.7)}{=} && (c^0 \otimes h_2)\varepsilon(c^{-1} h_1)\\
&= && c \times h.
\end{aligned}
$$

Notemos que em $(*)$ estamos usando a propriedade de caracterização de H-comódulo coálgebra global dada por $c^{-1}\varepsilon(c^0) = \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon(c^0)$.

Portanto, $C \times H = \{c^0 \otimes h_2\varepsilon(c^{-1}h_1)\}$ é um subespaço vetorial de $C \otimes H$. $\square$

A definição que segue é uma das condições necessárias que exigiremos para C para que tenhamos $C \times H$ uma álgebra de Hopf fraca.

Definição 3.5.4. Sejam C uma biálgebra fraca e H uma álgebra de Hopf fraca. Dizemos que C é um H-comódulo biálgebra à esquerda se existe uma aplicação linear

$$\rho : C \to H \otimes C$$

tal que ρ define simultaneamente uma estrutura de H-comódulo coálgebra è esquerda e de H-comódulo álgebra è esquerda em C.

À partir de agora, suponha que C é um H-comódulo biálgebra (então C é uma biálgebra fraca) onde H é uma álgebra de Hopf fraca comutativa. Segue da comutatividade de H que ε_t e ε_s são multiplicativas. De fato, dados $h, k \in H$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(h)\varepsilon_t(k) &\overset{(1.21)}{=} \varepsilon_t(\varepsilon_t(h)k) \\
&= \varepsilon(1_1\varepsilon_t(h)k)1_2 \\
&= \varepsilon(1_1k\varepsilon_t(h))1_2 \\
&\overset{(1.7)}{=} \varepsilon(1_1kh)1_2 \\
&= \varepsilon(1_1hk)1_2 \\
&= \varepsilon_t(hk).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(h)\varepsilon_s(k) &\overset{(1.22)}{=} \varepsilon_s(h\varepsilon_s(k)) \\
&= 1_1\varepsilon(h\varepsilon_s(k)1_2) \\
&= 1_1\varepsilon(\varepsilon_s(k)h1_2) \\
&\overset{(1.8)}{=} 1_1\varepsilon(kh1_2) \\
&= 1_1\varepsilon(hk1_2) \\
&= \varepsilon_s(hk).
\end{aligned}$$

Além disso, S. Caenepeel e E. De Groot mostraram em [7] que

$$\varepsilon_t \circ \overline{\varepsilon_t} = \varepsilon_t \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_s \circ \overline{\varepsilon_s} = \varepsilon_s \tag{3.2}$$

onde, $\overline{\varepsilon_t}(h) = 1_{H1}\varepsilon(1_{H2}h)$ e $\overline{\varepsilon_s}(h) = 1_{H2}\varepsilon(h1_{H1})$, para todo $h \in H$ uma álgebra de

Hopf fraca qualquer. Como, no nosso caso, H é comutativa temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon_t}(h) &= 1_{H1}\varepsilon(1_{H2}h) \\
&= 1_{H1}\varepsilon(h1_{H2}) \\
&= \varepsilon_s(h).
\end{aligned}$$

E, analogamente

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon_s}(h) &= 1_{H2}\varepsilon(h1_{H1}) \\
&= 1_{H2}\varepsilon(1_{H1}h) \\
&= \varepsilon_t(h).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\varepsilon_t \circ \varepsilon_s = \varepsilon_t \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_s \circ \varepsilon_t = \varepsilon_s. \tag{3.4}$$

Essas propriedades obtidas para ε_t e ε_s serão comumente usadas ao longo dessa seção.

Lema 3.5.5. *O produto em $C \otimes H$ induz um produto em $C \times H$ definido da seguinte forma*

$$(c \times h)(b \times k) = (cb \times hk).$$

para todo $c \in C$ e $h \in H$.

Demonstração. Sejam $c, b \in C$ e $h, k \in H$.

$$\begin{aligned}
(c \times h)(b \times k) &= (c^0 \otimes h_2\varepsilon(c^{-1}h_1))(b^0 \otimes k_2\varepsilon(b^{-1}k_1)) \\
&= c^0b^0 \otimes h_2k_2\varepsilon(c^{-1}h_1)\varepsilon(b^{-1}k_1) \\
&\overset{(1.7)}{=} c^0b^0 \otimes h_2k_2\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(h_1))\varepsilon(b^{-1}\varepsilon_t(k_1))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.33)}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(c^{-1}S(1_{H1}))\varepsilon(b^{-1}S(1_{H1'})) \\
&\overset{1.7}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(S(1_{H1})))\varepsilon(b^{-1}\varepsilon_t(S(1_{H1'}))) \\
&\overset{(1.27)}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(\varepsilon_s(1_{H1})))\varepsilon(b^{-1}\varepsilon_t(\varepsilon_s(1_{H1'}))) \\
&\overset{(1.9)}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(c^{-1}\varepsilon_t(1_{H1}))\varepsilon(b^{-1}\varepsilon_t(1_{H1'})) \\
&\overset{(1.7)}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(c^{-1}1_{H1})\varepsilon(b^{-1}1_{H1'}) \\
&\overset{H comutt.}{=} && c^0b^0 \otimes 1_{H2}h1_{H2'}k\varepsilon(1_{H1}c^{-1})\varepsilon(1_{H1'}b^{-1}) \\
&= && c^0b^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon(1_{H1}c^{-1})h1_{H2'}\varepsilon(1_{H1'}b^{-1})k \\
&\overset{H comutt.}{=} && c^0b^0 \otimes \varepsilon_t(c^{-1})h\varepsilon_t(b^{-1})k \\
&= && c^0b^0 \otimes \varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_t(b^{-1})hk \\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && c^0b^0 \otimes \varepsilon_t(c^{-1}b^{-1})hk \\
&\overset{(*)}{=} && (cb)^0 \otimes \varepsilon_t((cb)^{-1})hk \\
&= && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon(1_{H1}(cb)^{-1})hk \\
&\overset{1.9}{=} && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon(\varepsilon_s(1_{H1})(cb)^{-1})hk \\
&\overset{H comutt.}{=} && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon((cb)^{-1}\varepsilon_s(1_{H1}))hk \\
&\overset{(1.7)}{=} && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon((cb)^{-1}\varepsilon_t(\varepsilon_s(1_{H1})))hk \\
&\overset{(1.27)}{=} && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon((cb)^{-1}\varepsilon_t(S(1_{H1})))hk \\
&\overset{(1.7)}{=} && (cb)^0 \otimes 1_{H2}\varepsilon((cb)^{-1}S(1_{H1}))hk \\
&= && (cb)^0 \otimes 1_{H2}hk\varepsilon((cb)^{-1}S(1_{H1})) \\
&\overset{(1.33)}{=} && (cb)^0 \otimes (hk)_2\varepsilon((cb)^{-1}\varepsilon_t((hk)_1)) \\
&= && (cb \times hk)
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ estamos usando que ρ é multiplicativa, pois C é um H- comódulo biálgebra via ρ. $\square$

Notemos que as associatividades das álgebras C e H garantem a associatividade de $C \times H$. Isso ocorre pela forma como o produto é definido, pois

$$\begin{aligned}
[(c \times h)(b \times k)](d \times l) &= (cb \times hk)(d \times l) \\
&= ((cb)d \times (hk)l) \\
&= (c(bd) \times h(kl)) \\
&= (c \times h)[(b \times k)(d \times l)].
\end{aligned}$$

Também temos que, como o produto é definido da forma $(c\times h)(b\times k) = (cb\times hk)$, então $1_{C\times H} = 1_C \times 1_H$, pois

$$\begin{aligned}
(c \times h)(1_C \times 1_H) &= (c \times h) \\
&= (1_C \times 1_H)(c \times h).
\end{aligned}$$

para todos $b, c, d \in C$ e $h, k \in H$.

Para o próximo resultado considere $C \times H$ com o produto dado no Lema 3.5.5 e o coproduto dado na Definição 3.5.2 da seguinte forma,

$$\Delta(c \times h) = c_1 \times {c_2}^{-1} h_1 \otimes {c_2}^{0} \times h_2.$$

para todo $c \in C$ e $h \in H$.

Lema 3.5.6. *Nessas condições, o coproduto em $C \times H$ é mutiplicativo.*

Demonstração. Dados $b, c \in C$ e $h, k \in H$,

$$\begin{aligned}
\Delta((c \times h)(b \times k)) &= \Delta(cb \times hk) \\
&= (cb)_1 \times {(cb)_2}^{-1}(hk)_1 \otimes {(cb)_2}^{0} \times (hk)_2 \\
&\overset{(*)}{=} c_1 b_1 \times (c_2 b_2)^{-1} h_1 k_1 \otimes (c_2 b_2)^{0} \times h_2 k_2 \\
&\overset{(**)}{=} c_1 b_1 \times {c_2}^{-1} {b_2}^{-1} h_1 k_1 \otimes {c_2}^{0} {b_2}^{0} \times h_2 k_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{H comtt.}{=} && c_1 b_1 \times {c_2}^{-1} h_1 {b_2}^{-1} k_1 \otimes {c_2}^0 {b_2}^0 \times h_2 k_2 \\
&= && (c_1 \times {c_2}^{-1} h_1)(b_1 \times {b_2}^{-1} k_1) \otimes ({c_2}^0 \times h_2)({b_2}^0 \times k_2) \\
&= && [(c_1 \times {c_2}^{-1} h_1) \otimes ({c_2}^0 \times h_2)][(b_1 \times {b_2}^{-1} k_1) \otimes ({b_2}^0 \times k_2)] \\
&= && \Delta(c \times h)\Delta(b \times k).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ usamos a multiplicatividade de Δ_C e de Δ_H, e em $(**)$ usamos a multiplicatividade de ρ. □

Tendo provado a multiplicidade do coproduto de $C \times H$ e sabendo que a coassociatividade segue pelo fato do coproduto smash fraco ser uma subcoálgebra de $C \otimes H$, estamos aptos para mostrar as propriedades de biálgebra fraca para $\varepsilon_{C \times H}$ como podemos ver no lema a seguir.

Lema 3.5.7. *Seja $C \times H$ o coproduto smash fraco Então, a counidade satisfaz $C \times H$ satisfaz*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((a \times k)(c \times h)(b \times l)) &= \varepsilon((a \times k)(c \times h)_1)\varepsilon((c \times h)_2(b \times l)) \\
&= \varepsilon((a \times k)(c \times h)_2)\varepsilon((c \times h)_1(b \times l)).
\end{aligned}
$$

para todos $a, b, c \in C$ e $h, k, l \in H$.

Demonstração. Primeiro, começaremos com o lado mais simples. Sejam $a, b, c \in C$ e $h, k, l \in H$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((a \times k)(c \times h)(b \times l)) &= \varepsilon(acb \times khl) \\
&= \varepsilon((acb)^0)\varepsilon((acb)^{-1} khl) \\
&= \varepsilon(a^0 c^0 b^0)\varepsilon(a^{-1} c^{-1} b^{-1} khl)
\end{aligned}
$$

Por um lado,

$$
\varepsilon((a \times k)(c \times h)_1)\varepsilon((c \times h)_2(b \times l))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon((a\times k)(c_1\times {c_2}^{-1}h_1))\varepsilon(({c_2}^0\times h_2)(b\times l))\\
&= \varepsilon(ac_1\times k{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon({c_2}^0 b\times h_2 l)\\
&= \varepsilon((ac_1)^0)\varepsilon((ac_1)^{-1}k{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon(({c_2}^0 b)^0)\varepsilon(({c_2}^0 b)^{-1}h_2 l)\\
&= \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}k{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon({c_2}^{00}b^0)\varepsilon({c_2}^{0-1}b^{-1}h_2 l)\\
&\overset{(CC3)}{=} \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}k{c_2}^{-1}{}_1h_1)\varepsilon({c_2}^0 b^0)\varepsilon({c_2}^{-1}{}_2 b^{-1}h_2 l)\\
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}k{c_2}^{-1}{}_1h_1)\varepsilon({c_2}^0 b^0)\varepsilon({c_2}^{-1}{}_2 h_2 b^{-1} l)\\
&= \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}k{c_2}^{-1}{}_1h_1)\varepsilon({c_2}^{-1}{}_2 h_2 b^{-1} l)\varepsilon({c_2}^0 b^0)\\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}k{c_2}^{-1}hb^{-1}l)\varepsilon({c_2}^0 b^0)\\
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0{c_1}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_1}^{-1}{c_2}^{-1}khb^{-1}l)\varepsilon({c_2}^0 b^0)\\
&\overset{(CC2)}{=} \varepsilon(a^0{c^0}_1)\varepsilon(a^{-1}c^{-1}khb^{-1}l)\varepsilon({c^0}_2 b^0)\\
&= \varepsilon(a^0{c^0}_1)\varepsilon({c^0}_2 b^0)\varepsilon(a^{-1}c^{-1}khb^{-1}l)\\
&= \varepsilon(a^0c^0b^0)\varepsilon(a^{-1}c^{-1}khb^{-1}l)\\
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0c^0b^0)\varepsilon(a^{-1}c^{-1}b^{-1}khl).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon((a\times k)(c\times h)_2)\varepsilon((c\times h)_1(b\times l))\\
&= \varepsilon((a\times k)({c_2}^0\times h_2))\varepsilon((c_1\times {c_2}^{-1}h_1)(b\times l))\\
&= \varepsilon(a{c_2}^0\times kh_2)\varepsilon(c_1 b\times {c_2}^{-1}h_1 l)\\
&= \varepsilon((a{c_2}^0)^0)\varepsilon((a{c_2}^0)^{-1}kh_2)\varepsilon((c_1 b)^0)\varepsilon((c_1 b)^{-1}{c_2}^{-1}h_1 l)\\
&= \varepsilon(a^0{c_2}^{00})\varepsilon(a^{-1}{c_2}^{0-1}kh_2)\varepsilon({c_1}^0 b^0)\varepsilon({c_1}^{-1}b^{-1}{c_2}^{-1}h_1 l)\\
&\overset{(CC3)}{=} \varepsilon(a^0{c_2}^0)\varepsilon(a^{-1}{c_2}^{-1}{}_2kh_2)\varepsilon({c_1}^0 b^0)\varepsilon({c_1}^{-1}b^{-1}{c_2}^{-1}{}_1h_1 l)\\
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0{c_2}^0)\varepsilon(a^{-1}k{c_2}^{-1}{}_2h_2)\varepsilon({c_1}^0 b^0)\varepsilon({c_2}^{-1}{}_1h_1 l{c_1}^{-1}b^{-1})\\
&= \varepsilon(a^0{c_2}^0)\varepsilon(a^{-1}k{c_2}^{-1}{}_2h_2)\varepsilon({c_2}^{-1}{}_1h_1 l{c_1}^{-1}b^{-1})\varepsilon({c_1}^0 b^0)\\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(a^0{c_2}^0)\varepsilon(a^{-1}k{c_2}^{-1}hl{c_1}^{-1}b^{-1})\varepsilon({c_1}^0 b^0)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0{c_2}^0)\varepsilon(a^{-1}khl{c_1}^{-1}{c_2}^{-1}b^{-1})\varepsilon({c_1}^0b^0)\\
&\overset{(CC2)}{=} \varepsilon(a^0{c^0}_2)\varepsilon(a^{-1}khlc^{-1}b^{-1})\varepsilon({c^0}_1b^0)\\
&= \varepsilon(a^0{c^0}_2)\varepsilon({c^0}_1b^0)\varepsilon(a^{-1}khlc^{-1}b^{-1})\\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(a^0c^0b^0)\varepsilon(a^{-1}khlc^{-1}b^{-1})\\
&\overset{H comutt.}{=} \varepsilon(a^0c^0b^0)\varepsilon(a^{-1}c^{-1}b^{-1}khl).
\end{aligned}$$

Onde, em $(*)$ estamos usando usando a seguinte propriedade para ε_H,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(khl) &= \varepsilon(kh_1)\varepsilon(h_2l)\\
&= \varepsilon(kh_2)\varepsilon(h_1l),
\end{aligned}$$

e o resultado análogo para ε_C. □

Para finalizar a construção de uma estrutura de biálgebra fraca para $C \times H$, basta mostrarmos a propriedade

$$\begin{aligned}
(1_{C\times H} \otimes \Delta(1_{C\times H}))(\Delta(1_{C\times H}) \otimes 1_{C\times H}) &= (\Delta(1_{C\times H}) \otimes 1_{C\times H})(1_{C\times H} \otimes \Delta(1_{C\times H}))\\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(1_{C\times H})\\
&\overset{(*)}{=} (\Delta \otimes I)\Delta(1_{C\times H}).
\end{aligned}$$

Observemos que a igualdade $(*)$ acima segue pela coassociatividade do coproduto de $C \times H$ mostrada no Lema 3.5.6.

Lema 3.5.8. *Seja $C \times H$ o coproduto smash fraco. Então,*

$$\begin{aligned}
(1_{C\times H} \otimes \Delta(1_{C\times H}))(\Delta(1_{C\times H}) \otimes 1_{C\times H}) &= (\Delta(1_{C\times H}) \otimes 1_{C\times H})(1_{C\times H} \otimes \Delta(1_{C\times H}))\\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(1_{C\times H})\\
&= (\Delta \otimes I)\Delta(1_{C\times H}).
\end{aligned}$$

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
& (\Delta(1_{C\times H})\otimes 1_{C\times H})(1_{C\times H}\otimes \Delta(1_{C\times H}))\\
= \quad & (\Delta(1_C\times 1_H)\otimes 1_C\times 1_H)(1_C\times 1_H\otimes \Delta(1_C\times 1_H))\\
= \quad & ((1_{C1}\times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1})\otimes(1_{C2}{}^{0}\times 1_{H2})\otimes(1_C\times 1_H))\\
& ((1_C\times 1_H)\otimes(1_{C1'}\times 1_{C2'}{}^{-1}1_{H1'})\otimes(1_{C2'}{}^{0}\times 1_{H2'}))\\
= \quad & ((1_{C1}1_C\times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1}1_H)\otimes(1_{C2}{}^{0}1_{C1'}\times 1_{H2}1_{C2'}{}^{-1}1_{H1'})\otimes(1_C1_{C2'}{}^{0}\times 1_H1_{H2'}))\\
= \quad & ((1_{C1}\times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1})\otimes(1_{C2}{}^{0}1_{C1'}\times 1_{H2}1_{C2'}{}^{-1}1_{H1'})\otimes(1_{C2'}{}^{0}\times 1_{H2'}))\\
\overset{H comutt.}{=} \quad & ((1_{C1}\times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1})\otimes(1_{C2}{}^{0}1_{C1'}\times 1_{H2}1_{H1'}1_{C2'}{}^{-1})\otimes(1_{C2'}{}^{0}\times 1_{H2'}))\\
\overset{(*)}{=} \quad & ((1_{C1}\times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1})\otimes(1_{C2}{}^{0}1_{C1'}\times 1_{H2}1_{C2'}{}^{-1})\otimes(1_{C2'}{}^{0}\times 1_{H3}))\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{H1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H4}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{H3}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{00}\otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{H5})\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H4}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{H3}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{00}\otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{H5})\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1})\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H4}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{H3}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{00}\otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{H5})\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H3}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{H2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{00}\otimes 1_{H5}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{H4})\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H3}1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{00}\otimes 1_{H5}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{H4})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{00} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H3} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \varepsilon(1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}) \otimes \\
& && 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
&= && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{00} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H3} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3} \varepsilon(1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}) \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
&= && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{00} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{H4} \varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1} 1_{H3}) \\
&\overset{(CC3)}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H4} \varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3} 1_{H3}) \\
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{H3} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}) \varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H4} \\
&= && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}) \otimes 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.7)}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} \varepsilon_t(1_{C2}{}^{-1}{}_{3})) \otimes 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.14)}{=} && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{H1'} 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H2} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{H2'}) \otimes 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&= && 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{H1'} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{H2'}) 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\otimes 1_{C2'}{}^{0}\times 1_{H3}\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes \varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{H2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\otimes 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes \varepsilon_s(1_{H1'}1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{H2'}1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2})1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\otimes 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{H comutt.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{H1'}1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\otimes 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
= \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{H1'}1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{\varepsilon_s\ multipl.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{H1'})\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{H comutt.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes \varepsilon_s(1_{H1'})1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{(1.9)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{H1'}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{(***)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_t(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}))\otimes\\
& 1_{C2'}{}^{0}\otimes 1_{H3}\\
\overset{(1.7)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0}\otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\otimes\\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0}\otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{3})\otimes
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}{}_{1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C1'}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}) \otimes \\
& 1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
\overset{CC3}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{00} \otimes 1_{C2'}{}^{0-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C1'}{}^{0-1}1_{C2'}{}^{0-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{H3} \\
\overset{CC2}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
\overset{(****)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
= \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{3}1_{H3})\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{0} \otimes 1_{H4} \\
= \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{0}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{0} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{3}1_{H3}) \\
\overset{CC3}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C^{0}{}_{2}}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(1.1)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{H1'}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{0} \otimes 1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C^{0}{}_{1}}{}^{-1}1_{C^{0}{}_{2}}{}^{-1}{}_{1}) \otimes
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{Hcomutt.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H2'}1_{H1}\varepsilon(1_{H1'}1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(1.15)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(\varepsilon_{s}(1_{C}{}^{-1}{}_{1})1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(1.8)}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{1}1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{Hcomutt.}{=} \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
= \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1})\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3}1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H3})\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H5}) \\
= \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{C}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3}1_{H4}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H3}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H5}) \\
= \quad & 1_{C1}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{C}{}^{-1}{}_{1}1_{H1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H4}\varepsilon(1_{C2}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}1_{H3}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H5}) \\
= \quad & 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{C}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0}1_{C}{}^{0}{}_{1} \times 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}1_{H2} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \times 1_{H3} \\
\overset{(CC2)}{=} \quad & 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0}1_{C1'}{}^{0} \times 1_{C2'}{}^{0-1}1_{H2} \otimes 1_{C2'}{}^{00} \times 1_{H3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(**)}{=} && 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{C3}{}^{-1} 1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0} \times 1_{C3}{}^{0-1} 1_{H2} \otimes 1_{C3}{}^{00} \times 1_{H3} \\
&\overset{(CC2)}{=} && 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0}{}_{1} \times 1_{C2}{}^{0}{}_{2}{}^{-1} 1_{H2} \otimes 1_{C2}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \times 1_{H3} \\
&= && 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1} \otimes \Delta(1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2}) \\
&= && (I \otimes \Delta)(1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2}) \\
&= && (I \otimes \Delta)\Delta(1_C \times 1_H) \\
&= && (I \otimes \Delta)\Delta(1_{C\times H}).
\end{aligned}
$$

Onde, em $(*)$ estamos usando a propriedade

$$
\begin{aligned}
(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) &= (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) \\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(1_H) \\
&= (\Delta \otimes I)\Delta(1_H).
\end{aligned}
$$

Em $(**)$ usamos a propriedade $1_{C1} \otimes 1_{C2} \otimes 1_{C3} = 1_{C1} \otimes 1_{C2} 1_{C1'} \otimes 1_{C2'}$. Em $(***)$ usamos a propriedade (1.14) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
h_1 \otimes h_2 \otimes \varepsilon_t(h_3) &= h_1 \otimes h_{21} \otimes \varepsilon_t(h_{22}) \\
&\overset{(1.14)}{=} h_1 \otimes 1_{H1} h_2 \otimes 1_{H1}.
\end{aligned}
$$

Já em $(****)$, estamos usando a propriedade $\rho(1) \in H_s \otimes C$ da Proposição 4.11 de [7].

Agora, analisaremos a outra igualdade.

$$
\begin{aligned}
& && (1_{C\times H} \otimes \Delta(1_{C\times H}))(\Delta(1_{C\times H}) \otimes 1_{C\times H}) \\
&= && (1_C \times 1_H \otimes \Delta(1_C \times 1_H))(\Delta(1_C \times 1_H) \otimes 1_C \times 1_H) \\
&= && ((1_C \times 1_H) \otimes (1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1}) \otimes (1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2})) \otimes \\
& && ((1_{C1'} \times 1_{C2'}{}^{-1} 1_{H1'}) \otimes (1_{C2'}{}^{0} \times 1_{H2'}) \otimes (1_C \times 1_H))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rl}
= & (1_C 1_{C1'} \times 1_H 1_{C2'}{}^{-1} 1_{H1'}) \otimes (1_{C1} 1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1} 1_{H2'}) \otimes (1_{C2}{}^{0} 1_C \times 1_{H2} 1_H) \\
= & (1_{C1'} \times 1_{C2'}{}^{-1} 1_{H1'}) \otimes (1_{C1} 1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H1} 1_{H2'}) \otimes (1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2}) \\
\overset{(*)}{=} & (1_{C1'} \times 1_{C2'}{}^{-1} 1_{H1}) \otimes (1_{C1} 1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C2}{}^{-1} 1_{H2}) \otimes (1_{C2}{}^{0} \times 1_{H3}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{H1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H5}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3} 1_{H2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C'_2}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H5}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{3} 1_{H2} \varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1}) \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H5}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H3} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H2}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3} 1_{H3} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \times 1_{H5} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3} 1_{H3} \varepsilon(1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2}) \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2} \varepsilon(1_{C1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
 & 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H4} \varepsilon(1_{C2}{}^{0-1} 1_{H3})
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(CC3)}{=} && {1_{C1'}}^0 \otimes {1_{C2'}}^{-1}{}_2 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_3 {1_{C2}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H4} \varepsilon({1_{C2}}^{-1}{}_3 1_{H3}) \\
&= && {1_{C1'}}^0 \otimes {1_{C2'}}^{-1}{}_2 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C2}}^{-1}{}_3 1_{H3}) \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_3 {1_{C2}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H4} \\
&= && {1_{C1'}}^0 \otimes {1_{C2'}}^{-1}{}_2 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_3 {1_{C2}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3} \\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1'}}^0 \otimes {1_{C2'}}^{-1}{}_2 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}{}_1 {1_{C2'}}^{-1}{}_3) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.7)}{=} && {1_{C1'}}^0 \otimes {1_{C2'}}^{-1}{}_2 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}{}_1 \varepsilon_t({1_{C2'}}^{-1}{}_3)) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.14)}{=} && {1_{C1'}}^0 \otimes 1_{H1'} {1_{C2'}}^{-1} 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}{}_1 1_{H2'}) \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3} \\
&= && {1_{C1'}}^0 \otimes 1_{H1'} \varepsilon({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}{}_1 1_{H2'}) {1_{C2'}}^{-1} 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3} \\
&= && {1_{C1'}}^0 \otimes \varepsilon_s({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}{}_1) {1_{C2'}}^{-1} 1_{H1} \varepsilon({1_{C1'}}^{-1}{1_{C2'}}^{-1}{}_1) \otimes \\
& && {1_{C1}}^0 {1_{C2'}}^0 \otimes {1_{C2}}^{-1}{}_2 1_{H2} \otimes \\
& && {1_{C2}}^0 \otimes 1_{H3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{H1'})\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2} \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&= && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1}1_{H1'})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{\varepsilon_s\ multipl.}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})\varepsilon_s(1_{H1'})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes \varepsilon_s(1_{H1'})1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.9)}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{H1'}1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(***)}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_t(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3})) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{(1.7)}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3} \\
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}{}_{1}1_{C2}{}^{-1}{}_{1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& && 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{-1}{}_{3}1_{H2}\varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{C1}{}^{-1}{}_{2}1_{C2}{}^{-1}{}_{2}) \otimes \\
& && 1_{C2}{}^{0} \otimes 1_{H3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(CC3)}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C1}{}^{00}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C2}{}^{0-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{C1}{}^{0-1}1_{C2}{}^{0-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C2}{}^{00} \otimes 1_{H3} \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3}1_{H3})\varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \otimes 1_{H4} \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2'}{}^{-1}{}_{3}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3}1_{H3}) \\
\overset{(CC3)}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}\varepsilon_s(1_{C}{}^{-1})1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C2'}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(****)}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C2'}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(1.1)}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{H2'}1_{C}{}^{-1}1_{H1}\varepsilon(1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}1_{H1'}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C2'}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{Hcomutt}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}1_{H2'}1_{H1}\varepsilon(1_{H1'}1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C2'}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3}) \\
\overset{(1.15)}{=}\quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2}1_{C}{}^{-1}{}_{2}1_{H1}\varepsilon(\varepsilon_s(1_{C}{}^{-1}{}_{1})1_{C1'}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0}1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2}1_{H2}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1}1_{C2'}{}^{0-1}1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4}\varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1}1_{H3})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(1.8)}{=} \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{1} 1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H3}) \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H4} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H3}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3} 1_{H3} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2}) \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{3} 1_{H3} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1}) \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H3} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H2}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H5} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H4}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{3} 1_{H2} \varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1}) \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H5}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{3} 1_{H2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1}) \varepsilon(1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H5}) \\
= \quad & 1_{C1'}{}^{0} \otimes 1_{C2'}{}^{-1}{}_{2} 1_{C}{}^{-1}{}_{2} 1_{H2} \varepsilon(1_{C1'}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{-1}{}_{1} 1_{C}{}^{-1}{}_{1} 1_{H1}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{0} 1_{C2'}{}^{00} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{2} 1_{H4} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{1}{}^{-1} 1_{C2'}{}^{0-1} 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}{}_{1} 1_{H3}) \otimes \\
& 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{00} \otimes 1_{H6} \varepsilon(1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0-1} 1_{H5})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 1_{C1'} \times 1_{C}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{1}1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}1_{H2} \otimes 1_{C}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \times 1_{H3} \\
&\overset{(CC2)}{=} \quad 1_{C1'} \times 1_{C1}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C2}{}^{0-1}1_{H2} \otimes 1_{C2}{}^{00} \times 1_{H3} \\
&\overset{H comutt.}{=} \quad 1_{C1'} \times 1_{C1}{}^{-1}1_{C2'}{}^{-1}1_{C2}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C1}{}^{0}1_{C2'}{}^{0} \times 1_{C2}{}^{0-1}1_{H2} \otimes 1_{C2}{}^{00} \times 1_{H3} \\
&\overset{(**)}{=} \quad 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{C3}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0} \times 1_{C3}{}^{0-1}1_{H2} \otimes 1_{C3}{}^{00} \times 1_{H3} \\
&\overset{(CC2)}{=} \quad 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0}{}_{1} \times 1_{C2}{}^{0}{}_{2}{}^{-1}1_{H2} \otimes 1_{C2}{}^{0}{}_{2}{}^{0} \times 1_{H3} \\
&= \quad 1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1} \otimes \Delta(1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2}) \\
&= \quad (I \otimes \Delta)(1_{C1} \times 1_{C2}{}^{-1}1_{H1} \otimes 1_{C2}{}^{0} \times 1_{H2}) \\
&= \quad (I \otimes \Delta)\Delta(1_{C} \times 1_{H}) \\
&= \quad (I \otimes \Delta)\Delta(1_{C \times H}).
\end{aligned}
$$

Onde, em $(*)$ estamos usando a propriedade

$$
\begin{aligned}
(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) &= (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) \\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(1_H) \\
&= (\Delta \otimes I)\Delta(1_H).
\end{aligned}
$$

Em $(**)$ usamos a propriedade $1_{C1} \otimes 1_{C2} \otimes 1_{C3} = 1_{C1'} \otimes 1_{C1}1_{C2'} \otimes 1_{C2}$. Em $(***)$ usamos a propriedade (1.14) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
h_1 \otimes h_2 \otimes \varepsilon_t(h_3) &= h_1 \otimes h_{21} \otimes \varepsilon_t(h_{22}) \\
&\overset{(1.14)}{=} h_1 \otimes 1_{H1}h_2 \otimes 1_{H2}.
\end{aligned}
$$

Já em $(****)$ estamos usando a propriedade $\rho(1) \in H_s \otimes C$ da Proposição 4.11 de [7].

Então, $\Delta_{C \times H}$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
(1_{C\times H}\otimes\Delta(1_{C\times H}))(\Delta(1_{C\times H})\otimes 1_{C\times H}) &= (\Delta(1_{C\times H})\otimes 1_{C\times H})(1_{C\times H}\otimes\Delta(1_{C\times H}))\\
&= (I\otimes\Delta)\Delta(1_{C\times H})\\
&= (\Delta\otimes I)\Delta(1_{C\times H}).
\end{aligned}
$$

□

O que fizemos até agora foi considerar a coálgebra $C\times H$ com coproduto

$$\Delta(c\times h) = c_1\times {c_2}^{-1}h_1\otimes {c_2}^{0}\times h_2$$

e counidade

$$\varepsilon(c\times h) = \varepsilon(c^0)\varepsilon(c^{-1}h),$$

e, supor adicionalmente que C é um H-comódulo biálgebra, com H uma álgebra de Hopf fraca comutativa. Com isso, conseguimos dar uma estrtura de álgebra para $C\times H$ via o produto

$$(c\times h)(b\times k) = (cb\times hk),$$

como vimos no Lema 3.5.5. Além disso, pelo Lema 3.5.6 concluímos a multiplicatividade do coproduto, pelo Lema 3.5.7 vimos que a counidade satisfaz

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((a\times k)(c\times h)(b\times l)) &= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_1)\varepsilon((c\times h)_2(b\times l))\\
&= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_2)\varepsilon((c\times h)_1(b\times l)),
\end{aligned}
$$

e, pelo Lema 3.5.8 vimos que $C\times H$ tem uma estrutura de biálgebra fraca, pois satisfaz

$$
\begin{aligned}
(1_{C\times H}\otimes\Delta(1_{C\times H}))(\Delta(1_{C\times H})\otimes 1_{C\times H}) &= (\Delta(1_{C\times H})\otimes 1_{C\times H})(1_{C\times H}\otimes\Delta(1_{C\times H}))\\
&= (I\otimes\Delta)\Delta(1_{C\times H})\\
&= (\Delta\otimes I)\Delta(1_{C\times H}).
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.5.9. *Sejam C uma biálgebra fraca e H uma álgebra de Hopf fraca tais que C é um H-comódulo biálgebra e H é comutativa. Então, $C \times H$ é uma biálgebra fraca.*

O próximo passo é saber se conseguimos dar uma estrutura de álgebra de Hopf fraca para $C \times H$. Todavia, para tal é necessário impor uma condição natural sobre C, como podemos ver no Teorema 3.5.10.

Teorema 3.5.10. *Sejam C e H duas álgebras de Hopf fracas, tais que C é um H-comódulo biálgebra e H é comutativa. Então, $C \times H$ é uma álgebra de Hopf fraca.*

Demonstração. Pela Proposição 3.5.9 sabemos que $C \times H$ já é uma biálgebra fraca, portanto, basta definir uma aplicação $S_{C\times H}$ de $C \times H$ para $C \times H$ e mostrar que $S_{C\times H}$ satisfaz as propriedades de antípoda de uma álgebra de Hopf fraca. Como estamos supondo que C também é uma álgebra de Hopf fraca, é natural definir $S_{C\times H}$ usando a antípoda de C e de H, como segue,

$$S_{C\times H}(c \times h) = S_C(c^0) \times S_H(c^{-1}h),$$

para todo $c \in C$ e $h \in H$.

Uma vez definida a antípoda $S_{C\times H}$, precisamos mostrar que

(I) $(c \times h)_1 S((c \times h)_2) = \varepsilon_t(c \times h)$

(II) $S((c \times h)_1)(c \times h)_2 = \varepsilon_s(c \times h)$

(III) $S((c \times h)_1)(c \times h)_2 S((c \times h)_3) = S(c \times h)$.

Vejamos primeiro o item (I).

(I) $(c \times h)_1 S((c \times h)_2) = \varepsilon_t(c \times h)$

$$
\begin{aligned}
& (c \times h)_1 S((c \times h)_2) \\
= \quad & (c_1 \times c_2{}^{-1} h_1) S(c_2{}^0 \times h_2) \\
= \quad & (c_1 \times c_2{}^{-1} h_1)(S(c_2{}^{00}) \times S(c_2{}^{0-1} h_2)) \\
= \quad & c_1 S(c_2{}^{00}) \times c_2{}^{-1} h_1 S(c_2{}^{0-1} h_2) \\
\overset{(CC3)}{=} \quad & c_1 S(c_2{}^0) \times c_2{}^{-1}{}_1 h_1 S(c_2{}^{-1}{}_2 h_2) \\
= \quad & c_1 S(c_2{}^0) \times \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h) \\
= \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h)_2 \varepsilon(c_1{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h)_1) \\
\overset{(1.12)}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes 1_{H2} \varepsilon(c_1{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} 1_{H1} \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h)) \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes 1_{H2} \varepsilon(1_{H1} c_1{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h)) \\
= \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} \varepsilon_t(c_2{}^{-1} h)) \\
\overset{(1.7)}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} c_2{}^{-1} h) \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1} c_2{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} h) \\
\overset{\varepsilon_t \ multipl.}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1}) \varepsilon_t(c_2{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} h) \\
\overset{1.3}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(\varepsilon_t(c_1{}^{-1}{}_1) c_1{}^{-1}{}_2) \varepsilon_t(c_2{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} h) \\
\overset{(1.10)}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1}{}_1) \varepsilon_t(c_1{}^{-1}{}_2) \varepsilon_t(c_2{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} h) \\
\overset{\varepsilon_t \ multipl.}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1}{}_1 c_1{}^{-1}{}_2 c_2{}^{-1} S(c_2{}^0)^{-1} h) \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & c_1{}^0 S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{-1}{}_2 S(c_2{}^0)^{-1} c_1{}^{-1}{}_1 c_2{}^{-1} h) \\
\overset{(CC3)}{=} \quad & c_1{}^{00} S(c_2{}^0)^0 \otimes \varepsilon_t(c_1{}^{0-1} S(c_2{}^0)^{-1} c_1{}^{-1} c_2{}^{-1} h) \\
\overset{(CC2)}{=} \quad & c^0{}_1{}^0 S(c^0{}_2)^0 \otimes \varepsilon_t(c^0{}_1{}^{-1} S(c^0{}_2)^{-1} c^{-1} h) \\
= \quad & c^0{}_1{}^0 S(c^0{}_2)^0 \otimes 1_{H2} \varepsilon(1_{H1} c^0{}_1{}^{-1} S(c^0{}_2)^{-1} c^{-1} h) \\
\overset{(1.7)}{=} \quad & c^0{}_1{}^0 S(c^0{}_2)^0 \otimes 1_{H2} \varepsilon(1_{H1} c^0{}_1{}^{-1} S(c^0{}_2)^{-1} \varepsilon_t(c^{-1} h)) \\
\overset{H comutt.}{=} \quad & c^0{}_1{}^0 S(c^0{}_2)^0 \otimes 1_{H2} \varepsilon(c^0{}_1{}^{-1} S(c^0{}_2)^{-1} 1_{H1} \varepsilon_t(c^{-1} h)) \\
\overset{(1.12)}{=} \quad & c^0{}_1{}^0 S(c^0{}_2)^0 \otimes \varepsilon_t(c^{-1} h)_2 \varepsilon(c^0{}_1{}^{-1} S(c^0{}_2)^{-1} \varepsilon_t(c^{-1} h)_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= && c^0{}_1 S(c^0{}_2) \times \varepsilon_t(c^{-1}h) \\
&\overset{(CC2)}{=} && {c_1}^0 S({c_2}^0) \times \varepsilon_t({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h) \\
&= && (1_C c_1)^0 S({c_2}^0) \times \varepsilon_t((1_C c_1)^{-1}{c_2}^{-1}h) \\
&= && {1_C}^0 {c_1}^0 S({c_2}^0) \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}{c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h) \\
&\overset{(CC2)}{=} && {1_C}^0 c^0{}_1 S(c^0{}_2) \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h) \\
&= && {1_C}^0 \varepsilon_t(c^0) \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h) \\
&= && {1_C}^0 \varepsilon(1_{C1}c^0)1_{C2} \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h) \\
&= && \varepsilon(1_{C1}c^0)({1_C}^0 1_{C2} \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h)) \\
&\overset{(1.15)}{=} && \varepsilon(\varepsilon_s({1_C}^0{}_1)c^0)({1_C}^0{}_2 \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h)) \\
&\overset{1.8}{=} && \varepsilon({1_C}^0{}_1 c^0)({1_C}^0{}_2 \times \varepsilon_t({1_C}^{-1}c^{-1}h)) \\
&\overset{(CC2)}{=} && \varepsilon({1_{C1}}^0 c^0)({1_{C2}}^0 \times \varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}c^{-1}h)) \\
&\overset{H comutt.}{=} && \varepsilon({1_{C1}}^0 c^0)({1_{C2}}^0 \times \varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}c^{-1}{1_{C2}}^{-1}h)) \\
&= && \varepsilon({1_{C1}}^0 c^0)\varepsilon(1_{H1}{1_{C1}}^{-1}c^{-1}{1_{C2}}^{-1}h)({1_{C2}}^0 \times 1_{H2}) \\
&\overset{H comutt.}{=} && \varepsilon({1_{C1}}^0 c^0)\varepsilon({1_{C1}}^{-1}c^{-1}{1_{C2}}^{-1}1_{H1}h)({1_{C2}}^0 \times 1_{H2}) \\
&= && \varepsilon(1_{C1}c \times {1_{C2}}^{-1}1_{H1}h)({1_{C2}}^0 \times 1_{H2}) \\
&= && \varepsilon((1_{C1} \times {1_{C2}}^{-1}1_{H1})(c \times h))({1_{C2}}^0 \times 1_{H2}) \\
&= && \varepsilon((1_C \times 1_H)_1(c \times h))(1_C \times 1_H)_2 \\
&= && \varepsilon_t(c \times h).
\end{aligned}
$$

Além disso, observemos que, pela demonstração de (I), temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t(c \times h) &= c^0{}_1 S(c^0{}_2) \times \varepsilon_t(c^{-1}h) \\
&= \varepsilon_t(c^0) \times \varepsilon_t(c^{-1}h). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

(II) $S((c \times h)_1)(c \times h)_2 = \varepsilon_s(c \times h)$

$$S((c \times h)_1)(c \times h)_2$$

$$
\begin{aligned}
&= && S(c_1 \times {c_2}^{-1}h_1)({c_2}^0 \times h_2) \\
&= && (S({c_1}^0) \times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1))({c_2}^0 \times h_2) \\
&= && S({c_1}^0){c_2}^0 \times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)h_2 \\
&\overset{(CC2)}{=} && S({c^0}_1){c^0}_2 \times S(c^{-1}h_1)h_2 \\
&= && S({c^0}_1){c^0}_2 \times S(h_1)S(c^{-1})h_2 \\
&\overset{H comtt.}{=} && S({c^0}_1){c^0}_2 \times S(c^{-1})S(h_1)h_2 \\
&= && \varepsilon_s(c^0) \times S(c^{-1})\varepsilon_s(h) \\
&= && 1_{C1}\varepsilon(c^0 1_{C2}) \times S(c^{-1})\varepsilon_s(h) \\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)_2\varepsilon({1_{C1}}^{-1}S(c^{-1})_1\varepsilon_s(h)_1) \\
&\overset{(1.13)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)1_{H2}\varepsilon({1_{C1}}^{-1}S(c^{-1})_1 1_{H1}) \\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)1_{H2}\varepsilon(1_{H1}{1_{C1}}^{-1}S(c^{-1})_1) \\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}S(c^{-1})_1) \\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1})\varepsilon_t(S(c^{-1})_1) \\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes \varepsilon_t(S(c^{-1})_1)S(c^{-1})_2\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{1.3}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon((c1_C)^0 1_{C2}) \otimes S((c1_C)^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_C}^0 1_{C2}) \otimes S(c^{-1}{1_C}^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{(*)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes S(c^{-1}\overline{\varepsilon_t}({1_{C2}}^{-1}))\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{\overline{\varepsilon_t}=\varepsilon_s}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes S(c^{-1}\varepsilon_s({1_{C2}}^{-1}))\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes S(\varepsilon_s({1_{C2}}^{-1}))S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{(1.27)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes \varepsilon_t(\varepsilon_s({1_{C2}}^{-1}))S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{(3.3)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes \varepsilon_t({1_{C2}}^{-1})S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}) \\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1})\varepsilon_t({1_{C2}}^{-1}) \\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0) \otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(CC2)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t({1_C}^{-1})\\
&\overset{(3.3)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\varepsilon_t(\varepsilon_s({1_C}^{-1}))\\
&\overset{(1.27)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(c^{-1})\varepsilon_s(h)S(\varepsilon_s({1_C}^{-1}))\\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(\varepsilon_s({1_C}^{-1}))S(c^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&= && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(c^{-1}\varepsilon_s({1_C}^{-1}))\varepsilon_s(h)\\
&\overset{(**)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{1_C}^0{}_2)\otimes S(c^{-1}{1_C}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&\overset{(CC2)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S(c^{-1}{1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&\overset{H comtt.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S(c^{-1}{1_{C2}}^{-1}{1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon((c1_{C2})^0)\otimes S((c1_{C2})^{-1}{1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&\overset{3.1.1}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon((c1_{C2})^0)\otimes S(\varepsilon_t(c{1_{C2}}^{-1}){1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S(\varepsilon_t(c^{-1}{1_{C2}}^{-1}){1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S(\varepsilon_t(c^{-1})\varepsilon_t({1_{C2}}^{-1}){1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S({1_{C1}}^{-1})S(\varepsilon_t({1_{C2}}^{-1}))S(\varepsilon_t(c^{-1}))\varepsilon_s(h)\\
&\overset{(1.28)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S({1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s(\varepsilon_t({1_{C2}}^{-1}))\varepsilon_s(\varepsilon_t(c^{-1}))\varepsilon_s(h)\\
&\overset{(3.4)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S({1_{C1}}^{-1})\varepsilon_s({1_{C2}}^{-1})\varepsilon_s(c^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&= && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S({1_{C1}}^{-1})S({1_{C2}}^{-1}{}_1){1_{C2}}^{-1}{}_2\varepsilon_s(c^{-1})\varepsilon_s(h)\\
&\overset{\varepsilon_s\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes S({1_{C1}}^{-1})S({1_{C2}}^{-1}{}_1){1_{C2}}^{-1}{}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(CC3)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^{00})\otimes S({1_{C1}}^{-1})S({1_{C2}}^{-1}){1_{C2}}^{0-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^{00})\otimes S({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}){1_{C2}}^{0-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(CC2)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{{1_C}^0{}_2}^0)\otimes S({1_C}^{-1}){{1_C}^0{}_2}^{-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(**)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{{1_C}^0{}_2}^0)\otimes S(\varepsilon_s({1_C}^{-1})){{1_C}^0{}_2}^{-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(1.27)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{{1_C}^0{}_2}^0)\otimes \varepsilon_t(\varepsilon_s({1_C}^{-1})){{1_C}^0{}_2}^{-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(3.3)}{=} && {1_C}^0{}_1\varepsilon(c^0{{1_C}^0{}_2}^0)\otimes \varepsilon_t({1_C}^{-1}){{1_C}^0{}_2}^{-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{(CC2)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^{00})\otimes \varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}{1_{C2}}^{-1}){1_{C2}}^{0-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(CC3)}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_1){{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\otimes\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1})\varepsilon_t({{1_{C2}}^{-1}}_1){{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon_t({{1_{C2}}^{-1}}_1)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{(1.5)}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon_t({{1_{C2}}^{-1}}_1)\varepsilon_t(\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}))\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon_t({{1_{C2}}^{-1}}_1\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}))\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{(1.10)}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon_t({{1_{C2}}^{-1}}_1{1_{C1}}^{-1})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{H comutt.}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon_t({1_{C1}}^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_1)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&= && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)1_{H2}\varepsilon({1_{C1}}^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_1 1_{H1})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{(1.13)}{=} && {1_{C1}}^0\otimes{{1_{C2}}^{-1}}_2\varepsilon_s(c^{-1}h)_2\varepsilon({1_{C1}}^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_1\varepsilon_s(c^{-1}h)_1)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&= && 1_{C1}\times{1_{C2}}^{-1}\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{1.4}{=} && 1_{C1}\times{{1_{C2}}^{-1}}_1\varepsilon_s({{1_{C2}}^{-1}}_2)\varepsilon_s(c^{-1}h)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{\varepsilon_s\ multipl.}{=} && 1_{C1}\times{{1_{C2}}^{-1}}_1\varepsilon_s({{1_{C2}}^{-1}}_2c^{-1}h)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&\overset{H comutt.}{=} && 1_{C1}\times{{1_{C2}}^{-1}}_1\varepsilon_s(c^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_2h)\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&= && 1_{C1}\times{{1_{C2}}^{-1}}_1 1_{H1}\varepsilon(c^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_2h1_{H2})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\\
&= && (1_{C1}\times{{1_{C2}}^{-1}}_1 1_{H1})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^0)\varepsilon(c^{-1}{{1_{C2}}^{-1}}_2h1_{H2})\\
&\overset{(CC3)}{=} && (1_{C1}\times{1_{C2}}^{-1}1_{H1})\varepsilon(c^0{1_{C2}}^{00})\varepsilon(c^{-1}{1_{C2}}^{0-1}h1_{H2})\\
&= && (1_{C1}\times{1_{C2}}^{-1}1_{H1})\varepsilon(c{1_{C2}}^0\times h1_{H2})\\
&= && (1_{C1}\times{1_{C2}}^{-1}1_{H1})\varepsilon((c\times h)({1_{C2}}^0\times 1_{H2}))\\
&= && (1_C\times 1_H)_1\varepsilon((c\times h)(1_C\times 1_H)_2)\\
&= && \varepsilon_s(c\times h).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ usamos a Proposição 4.27 de [[7]]. Já, em $(**)$ estamos usando a propriedade $\rho(1)\in H_s\otimes C$ da Proposição 4.11 de [7].

(III) $S((c\times h)_1)(c\times h)_2S((c\times h)_3)=S(c\times h)$.

$$S((c\times h)_1)(c\times h)_2S((c\times h)_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= S((c\times h)_1)\varepsilon_t((c\times h)_2)\\
&= S(c_1\times {c_2}^{-1}h_1)\varepsilon_t({c_2}^0\times h_2)\\
&\overset{(3.5)}{=} (S({c_1}^0)\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1))(\varepsilon_t({c_2}^{00})\times \varepsilon_t({c_2}^{0-1}h_2))\\
&= (S({c_1}^0)\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1))(\varepsilon_t({c_2}^{00})\times \varepsilon_t({c_2}^{0-1}h_2))\\
&= S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon_t({c_2}^{0-1}h_2)\\
&\overset{(3.3)}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)\varepsilon_t(\varepsilon_s({c_2}^{0-1}h_2))\\
&\overset{(1.27)}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)S(\varepsilon_s({c_2}^{0-1}h_2))\\
&\overset{H comutt.}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S(\varepsilon_s({c_2}^{0-1}h_2))S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1)\\
&= S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1\varepsilon_s({c_2}^{0-1}h_2))\\
&\overset{\varepsilon_s\ multipl.}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{00})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h_1\varepsilon_s({c_2}^{0-1})\varepsilon_s(h_2))\\
&\overset{(CC3)}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{0})\times S({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1h_1\varepsilon_s({{c_2}^{-1}}_2)\varepsilon_s(h_2))\\
&\overset{H comutt.}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{0})\times S({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1\varepsilon_s({{c_2}^{-1}}_2)h_1\varepsilon_s(h_2))\\
&\overset{1.4}{=} S({c_1}^0)\varepsilon_t({c_2}^{0})\times S({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}h)\\
&\overset{comod}{=} S({c^0}_1)\varepsilon_t({c^0}_2)\times S(c^{-1}h)\\
&\overset{(*)}{=} S(c^0)\times S(c^{-1}h)\\
&= S(c\times h).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ estamos usando a seguinte propriedade para a antípoda de C,

$$
\begin{aligned}
S(c) &= S(c_1)c_2S(c_3)\\
&= S(c_1)\varepsilon_t(c_2),
\end{aligned}
$$

para todo $c\in C$.

$\square$

3.6 Coproduto Smash Fraco Parcial

Sejam C uma coálgebra e H uma álgebra de Hopf fraca tais que C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda. Assim como Yu. Wang e L. Yu. Zhang em [22] construíram uma coálgebra counitária, $C \times H$, à partir de um H-comódulo coálgebra (global), construiremos aqui uma coálgebra à partir de um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda. Todavia, veremos ao longo dessa seção, que podemos garantir apenas a counidade à esquerda dessa nova estrutura. Portanto, trabalharemos com uma subestrtura que chamaremos de Coproduto Smash Fraco Parcial de maneira que possamos ter uma coálgebra counitária.

Proposição 3.6.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda. Então $C \otimes H$ tem estrutura de coálgebra dada por*

$$\Delta(c \otimes h) = c_1 \otimes {c_2}^{-1} h_1 \otimes {c_2}^{0} \otimes h_2.$$

Além disso, se C também é uma álgebra unitária temos que $C \otimes H$ é uma álgebra com multiplicação dada por

$$(c \otimes h)(d \otimes k) = (cd \otimes hk)$$

e unidade

$$1_{C \otimes H} = 1_C \otimes 1_H.$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a coassociativade. De fato,

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta(c \otimes h) &= (I \otimes \Delta)(c_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}} h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \otimes h_2) \\
&= c_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}} h_1 \otimes \Delta({c_2}^{\overline{0}} \otimes h_2) \\
&= c_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}} h_1 \otimes {{c_2}^{\overline{0}}}_1 \otimes {{{c_2}^{\overline{0}}}_2}^{\overline{-1}} h_2 \otimes {{{c_2}^{\overline{0}}}_2}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP2)}{=} c_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}} {c_3}^{\overline{-1}} h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \otimes {c_3}^{\overline{0-1}} h_2 \otimes {c_3}^{\overline{00}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP3)}{=} c_1 \otimes {c_2}^{\overline{-1}} {c_3}^{\overline{-1}} {{c_4}^{\overline{-1}}}_1 \varepsilon({c_3}^{\overline{0}}) h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \otimes {{c_4}^{\overline{-1}}}_2 h_2 \otimes {c_4}^{\overline{0}} \otimes h_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(CCP2)}{=} c_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}}{}_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_2) h_1 \otimes c_2{}^{\overline{0}}{}_1 \otimes c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2 \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\stackrel{(CCP2)}{=} c_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 \otimes c_2{}^{\overline{0}}{}_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_2) \otimes c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2 \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\stackrel{(CCP2)}{=} c_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 \otimes c_2{}^{\overline{0}} \otimes c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2 \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&= \Delta(c_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}} h_1) \otimes (c_2{}^{\overline{0}} \otimes h_2) \\
&= (\Delta \otimes I)(c_1 \otimes c_2{}^{\overline{-1}} h_1 \otimes c_2{}^{\overline{0}} \otimes h_2) \\
&= (\Delta \otimes I)\Delta(c \otimes h).
\end{aligned}$$

Além disso, a associatividade da multiplicação segue pela associatividade das álgebras C e H. Pela definição da multiplicação, naturalmente temos que

$$1_{C \otimes H} = 1_C \otimes 1_H.$$

□

Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda. Então, podemos definir o espaço vetorial $C \times H$ da seguinte forma:

$$C \times H = \{c^{\overline{0}} \otimes h_2 \varepsilon(c^{\overline{-1}} h_1)\}$$

gerado como $\Bbbk$-espaço vetorial. Notemos que $C \times H$ é naturalmente um subespaço vetorial de $C \otimes H$.

Proposição 3.6.2. *$C \times H$ tem comultiplicação e a counidade (à esquerda) dadas por*

$$\Delta(c \times h) = c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h_1 \otimes c_2{}^{\overline{0}} \times h_2,$$

$$\varepsilon(c \times h) = \varepsilon(c^{\overline{0}}) \varepsilon(c^{\overline{-1}} h).$$

Demonstração. Notemos que o coproduto de $C \times H$ coincide com o coproduto de $C \otimes H$ quando vemos um elemento de $C \times H$ em $C \otimes H$, ou seja,

$$\Delta_{C \times H}(c \times h) = \Delta_{C \otimes H}(c^0 \otimes h_2 \varepsilon c^{-1} h_1).$$

Basta notarmos que,

$$
\begin{aligned}
\Delta(c \times h) &= c_1{\times}{c_2}^{\overline{-1}}h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{\times}h_2 \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{00}} \otimes h_4\varepsilon({c_2}^{\overline{0-1}}h_3) \\
&\overset{(CCP3)}{=} {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 {c_3}^{\overline{-1}}{}_2 \varepsilon({c_2}^{\overline{0}})h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 {c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_3}^{\overline{0}} \otimes h_4\varepsilon({c_3}^{\overline{-1}}{}_3 h_3) \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 {c_3}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_3}^{\overline{-1}}{}_3 h_3)\varepsilon({c_2}^{\overline{0}})\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 {c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_3}^{\overline{0}} \otimes h_4 \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 {c_3}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_2}^{\overline{0}})\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 {c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_3}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes ({c_2}^{\overline{-1}}{c_3}^{\overline{-1}})_2 h_2\varepsilon({c_2}^{\overline{0}})\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}({c_2}^{\overline{-1}}{c_3}^{\overline{-1}})_1 h_1) \otimes {c_3}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP2)}{=} {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_2 \otimes h_3 \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_2\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1) \otimes h_3 \\
&= {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&= {c_1}^{\overline{0}}{}_1\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}{}_2) \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP2)}{=} {c_1}^{\overline{0}}\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \otimes {c_3}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_3}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP3)}{=} {c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{0-1}}h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}h_1) \otimes {c_2}^{\overline{00}} \otimes h_3 \\
&\overset{(CCP2)}{=} c^{\overline{0}}{}_1 \otimes {c^{\overline{0}}{}_2}^{\overline{-1}}h_2\varepsilon(c^{\overline{-1}}h_1) \otimes {c^{\overline{0}}{}_2}^{\overline{0}} \otimes h_3 \\
&= \Delta(c^{\overline{0}} \otimes h_2\varepsilon(c^{\overline{-1}}h_1)).
\end{aligned}
$$

Portanto, não há diferença entre mostrar a coassociatividade do coproduto $\Delta_{C\times H}$ ou do coproduto de $C{\times}H$ definido em $C \otimes H$. Assim, segue a coassociatividade.

Agora, vamos mostrar que $C{\times}H$ tem counidade à esquerda.

$$
\begin{aligned}
& (\varepsilon \otimes I)\Delta(c{\times}h) \\
={}& (\varepsilon \otimes I)(c_1{\times}{c_2}^{\overline{-1}}h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{\times}h_2) \\
={}& (\varepsilon \otimes I)(c_1{\times}{c_2}^{\overline{-1}}h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{\times}h_2) \\
={}& (\varepsilon \otimes I)({c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{00}} \otimes h_4\varepsilon({c_2}^{\overline{0-1}}h_3)) \\
={}& (\varepsilon \otimes I)({c_1}^{\overline{0}} \otimes {c_2}^{\overline{-1}}{}_3 h_2\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{}_1)\varepsilon({c_2}^{\overline{-1}}{}_2 h_1) \otimes {c_2}^{\overline{00}} \otimes h_4\varepsilon({c_2}^{\overline{0-1}}h_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_3 h_2 \varepsilon(c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1)\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_2{}^{\overline{00}} \otimes h_4 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0-1}} h_3))\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1 \varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_2{}^{\overline{00}} \otimes h_3 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0-1}} h_2))\\
&\overset{(CCP3)}{=} (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) h_1 \varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1 c_3{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_3 \varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_3 h_2))\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1 \varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_3 h_2)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1 c_3{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_3)\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1 c_3{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2)\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_3 c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2)\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_3 c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 \varepsilon(c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}}{}_1) h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2)\\
&= (\varepsilon \otimes I)(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}} h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) \otimes c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2)\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}} \otimes c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1) c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}}{}_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{-1}}{}_2 c_3{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) c_3{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&\overset{(CCP2)}{=} \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_1{}^{\overline{0}}{}_2) c_2{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c_1{}^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}} h_1) c_2{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}} h_1) c_2{}^{\overline{0}} \otimes h_2\\
&\overset{(CCP2)}{=} \varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c^{\overline{-1}} h_1) c^{\overline{0}}{}_2 \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1) c^{\overline{0}}{}_2 \otimes h_2\\
&= \varepsilon(c^{\overline{-1}} h_1) c^{\overline{0}} \otimes h_2.
\end{aligned}
$$

□

Como podemos ver, geramos uma estrutura de coálgebra em $C \times H = \{c^{\overline{0}} \otimes h_2 \varepsilon(c^{\overline{-1}} h_1)\}$. Todavia, a counidade $\varepsilon_{C\times H}$ é apenas à esquerda. Como estamos construindo uma coálgebra counitária, analogamente ao que Yu. Wang e L. Yu. Zhang fizeram em [22], $C \times H$ não servirá. Portanto, trabalharemos com uma subestrutura de $C{\times}H$, definida a seguir.

Definição 3.6.3. Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda. Então, o *coproduto smash fraco parcial* é definido da seguinte forma:

$$\overline{C{\times}H} = \{c_1{\times}\overline{c_2}^{-1}h_1\varepsilon(\overline{c_2}^{0}{\times}h_2)\}$$

gerado como $\Bbbk$-espaço vetorial.

Primeiro, notemos que um elemento de $\overline{C{\times}H}$ pode ser visto da seguinte forma:

$$c_1{\times}\overline{c_2}^{-1}h_1\varepsilon(\overline{c_2}^{0}{\times}h_2) \quad = \quad (I\otimes\varepsilon_{C\times H})\Delta(c{\times}h).$$

Então, pela Proposição 4.1.3 de [9], concluímos que

$$\varepsilon(\overline{c{\times}h}) = \varepsilon(\overline{c}^{0})\varepsilon(\overline{c}^{-1}h)$$

é counidade (bilateral) de $\overline{C{\times}H}$, e, além disso, $\overline{C{\times}H}$ é subcoálgebra de $C{\times}H$, de forma que

$$\Delta(\overline{c{\times}h}) = (\overline{c{\times}h})_1\otimes(\overline{c{\times}h})_2 = \overline{(c{\times}h)_1}\otimes\overline{(c{\times}h)_2}.$$

Dessa forma, obtemos que a comultiplicação é dada por

$$\Delta(\overline{c{\times}h}) = \overline{c_1{\times}\overline{c_2}^{-1}h_1}\otimes\overline{\overline{c_2}^{0}{\times}h_2}.$$

Na seção anterior, partimos de H uma álgebra de Hopf fraca comutativa e C um H-comódulo biálgebra, e vimos que $C\times H$ é uma biálgebra fraca. Além disso, mostramos que se C é adicionalmente uma álgebra de Hopf fraca, então, $C\times H$ é uma álgebra de Hopf fraca. Nosso próximo objetivo é partir de estruturas parciais às consideradas na seção anterior e chegar nas mesmas conclusões. Para tal, começaremos com a definição a seguir.

Definição 3.6.4. Considere H uma álgebra de Hopf fraca e C uma biálgebra fraca. Dizemos que C é um H-comódulo biálgebra parcial à esquerda se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\overline{\rho} : C \to H \otimes C$$

tal que $\overline{\rho}$ define simultaneamente uma estrutura de H-comódulo álgebra parcial à esquerda e H-comódulo coálgebra parcial à esquerda em C. Além disso, dizemos que C é um H-comódulo biálgebra parcial simétrico à esquerda se $\overline{\rho}$ define simultaneamente uma estrutura de H-comódulo álgebra parcial simétrico à esquerda e H-comódulo coálgebra parcial simétrico à esquerda em C.

À partir de agora, suponha que C é um H-comódulo biálgebra parcial simétrico à esquerda onde H é uma álgebra de Hopf fraca comutativa. Já sabemos que comutatividade de H que ε_t e ε_s são multiplicativas, pela seção anterior.

Proposição 3.6.5. *O coproduto smash parcial* $\overline{C\times H} = \{c_1\times c_2{}^{\overline{-1}}h_1\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}\times h_2)\}$ *é uma álgebra associativa com produto*

$$(\overline{c\times h})(\overline{b\times k}) = (\overline{cb\times hk})$$

e unidade

$$(\overline{1_C\times 1_H}).$$

Demonstração. Primeiro note que, sob tais hipóteses,

$$(c\times h)(b\times k) = (cb\times hk)$$

pois na demostração feita no Lema 3.5.5 para o caso global usamos apenas as propriedades de H ser uma álgebra de Hopf fraca comutativa.

$$\begin{aligned} & (\overline{c\times h})(\overline{b\times k}) \\ = \quad & (c_1\times c_2{}^{\overline{-1}}h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}\overline{\times h_2})(b_1\times b_2{}^{\overline{-1}}k_1)\varepsilon(b_2{}^{\overline{0}}\overline{\times k_2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}h_1b_2^{\overline{-1}}k_1)\varepsilon(c_2^{\overline{0}}\overline{\times h_2})\varepsilon(b_2^{\overline{0}}\overline{\times k_2})\\
&= (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}h_1b_2^{\overline{-1}}k_1)\varepsilon(c_2^{\overline{00}})\varepsilon(c_2^{\overline{0-1}}h_2)\varepsilon(b_2^{\overline{00}})\varepsilon(b_2^{\overline{0-1}}k_2)\\
&\overset{(CCP3)}{=} (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}c_3^{\overline{-1}}{}_1\varepsilon(c_2^{\overline{0}})h_1b_2^{\overline{-1}}b_3^{\overline{-1}}{}_1\varepsilon(b_2^{\overline{0}})k_1)\varepsilon(c_3^{\overline{0}})\varepsilon(c_3^{\overline{-1}}{}_2h_2)\varepsilon(b_3^{\overline{0}})\varepsilon(b_3^{\overline{-1}}{}_2k_2)\\
&= (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}c_3^{\overline{-1}}{}_1h_1\varepsilon(c_3^{\overline{-1}}{}_2h_2)b_2^{\overline{-1}}b_3^{\overline{-1}}{}_1k_1\varepsilon(b_3^{\overline{-1}}{}_2k_2))\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_3^{\overline{0}})\varepsilon(b_3^{\overline{0}})\\
&= (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}c_3^{\overline{-1}}hb_2^{\overline{-1}}b_3^{\overline{-1}}k)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_3^{\overline{0}})\varepsilon(b_3^{\overline{0}})\\
&\overset{(CCP2)}{=} (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}hb_2^{\overline{-1}}k)\varepsilon(c_2^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(b_2^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c_2^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(b_2^{\overline{0}}{}_2)\\
&= (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}hb_2^{\overline{-1}}k)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&\overset{H comutt.}{=} (c_1b_1\times c_2^{\overline{-1}}b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&= (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}{}_2b_2^{\overline{-1}}{}_2h_2k_2)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}}c_2^{\overline{-1}}{}_1b_2^{\overline{-1}}{}_1h_1k_1)\\
&= (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}{}_3b_2^{\overline{-1}}{}_2h_2k_2)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}}c_2^{\overline{-1}}{}_1)\varepsilon(c_2^{\overline{-1}}{}_2b_2^{\overline{-1}}{}_1h_1k_1)\\
&= (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}{}_3b_2^{\overline{-1}}{}_2h_2k_2)\varepsilon(c_2^{\overline{-1}}{}_2b_2^{\overline{-1}}{}_1h_1k_1)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}}c_2^{\overline{-1}}{}_1)\\
&= (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}{}_2b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\varepsilon(c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}}c_2^{\overline{-1}}{}_1)\\
&\overset{H comutt.}{=} (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}{}_2\varepsilon(c_2^{\overline{-1}}{}_1c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}})b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&\overset{(1.16)}{=} (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}\varepsilon_t(c_1^{\overline{-1}}b_1^{\overline{-1}})b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&\overset{\varepsilon_t\ multipl.}{=} (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}\varepsilon_t(c_1^{\overline{-1}})\varepsilon_t(b_1^{\overline{-1}})b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&= (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}c_1^{\overline{-1}}{}_1S(c_1^{\overline{-1}}{}_2)b_1^{\overline{-1}}{}_1S(b_1^{\overline{-1}}{}_2)b_2^{\overline{-1}}hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&\overset{H comutt.}{=} (c_1^{\overline{0}}b_1^{\overline{0}}\otimes c_2^{\overline{-1}}c_1^{\overline{-1}}{}_1b_1^{\overline{-1}}{}_1b_2^{\overline{-1}}S(c_1^{\overline{-1}}{}_2)S(b_1^{\overline{-1}}{}_2)hk)\varepsilon(c_2^{\overline{0}})\varepsilon(b_2^{\overline{0}})\\
&\overset{(*)}{=} (c^{\overline{00}}b^{\overline{00}}\otimes c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}S(c^{\overline{0-1}})S(b^{\overline{0-1}})hk)\\
&= ((cb)^{\overline{00}}\otimes(cb)^{\overline{-1}}S((cb)^{\overline{0-1}})hk)\\
&\overset{(*)}{=} ((cb)_1^{\overline{0}}\otimes(cb)_1^{\overline{-1}}{}_1(cb)_2^{\overline{-1}}S((cb)_1^{\overline{-1}}{}_2)hk)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}})\\
&\overset{H comutt.}{=} ((cb)_1^{\overline{0}}\otimes(cb)_2^{\overline{-1}}(cb)_1^{\overline{-1}}{}_1S((cb)_1^{\overline{-1}}{}_2)hk)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}})\\
&= ((cb)_1^{\overline{0}}\otimes(cb)_2^{\overline{-1}}\varepsilon_t((cb)_1^{\overline{-1}})hk)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}})\\
&= ((cb)_1^{\overline{0}}\otimes(cb)_2^{\overline{-1}}\varepsilon_t((cb)_1^{\overline{-1}})hk)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}}{}_2)\\
&\overset{(CCP2)}{=} ((cb)_1^{\overline{0}}\otimes(cb)_2^{\overline{-1}}(cb)_3^{\overline{-1}}\varepsilon_t((cb)_1^{\overline{-1}})hk)\varepsilon((cb)_2^{\overline{0}})\varepsilon((cb)_3^{\overline{0}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cl}
\overset{Hcomutt.}{=} & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {(cb)_2}^{\overline{-1}}\varepsilon_t({(cb)_1}^{\overline{-1}}){(cb)_3}^{\overline{-1}}hk)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}})\varepsilon({(cb)_3}^{\overline{0}}) \\
= & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {(cb)_2}^{\overline{-1}}\varepsilon_t({(cb)_1}^{\overline{-1}}){{(cb)_3}^{\overline{-1}}}_1h_1k_1)\varepsilon({{(cb)_3}^{\overline{-1}}}_2h_2k_2)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}})\varepsilon({(cb)_3}^{\overline{0}}) \\
\overset{Hcomutt.}{=} & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {(cb)_2}^{\overline{-1}}{{(cb)_3}^{\overline{-1}}}_1\varepsilon_t({(cb)_1}^{\overline{-1}})h_1k_1)\varepsilon({{(cb)_3}^{\overline{-1}}}_2h_2k_2)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}})\varepsilon({(cb)_3}^{\overline{0}}) \\
\overset{CCP3}{=} & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {(cb)_2}^{\overline{-1}}\varepsilon_t({(cb)_1}^{\overline{-1}})h_1k_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0-1}}h_2k_2)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{00}}) \\
\overset{1.16}{=} & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_2h_1k_1)\varepsilon({{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_1{(cb)_1}^{\overline{-1}})\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0-1}}h_2k_2)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{00}}) \\
\overset{Hcomutt.}{=} & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_2h_1k_1)\varepsilon({(cb)_1}^{\overline{-1}}{{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}} \times h_2k_2) \\
= & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_3h_2k_2)\varepsilon({{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_2h_1k_1)\varepsilon({(cb)_1}^{\overline{-1}}{{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}} \times h_3k_3) \\
= & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_3h_2k_2)\varepsilon({(cb)_1}^{\overline{-1}}{{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_1)\varepsilon({{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_2h_1k_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}} \times h_3k_3) \\
= & ({(cb)_1}^{\overline{0}} \otimes {{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_2h_2k_2)\varepsilon({(cb)_1}^{\overline{-1}}{{(cb)_2}^{\overline{-1}}}_1h_1k_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}} \times h_3k_3) \\
= & ((cb)_1 \times {(cb)_2}^{\overline{-1}}h_1k_1)\varepsilon({(cb)_2}^{\overline{0}} \times h_2k_2) \\
= & \overline{cb \times hk}.
\end{array}
$$

Onde em $(*)$ estamos usando a propriedade de comódulo coálgebra parcial simétrico.

Agora, vejamos a associatividade,

$$
\begin{array}{rcl}
[(\overline{c\times h})(\overline{b\times k})](\overline{d\times l}) & = & (\overline{cb\times hk})(\overline{d\times l}) \\
& = & (\overline{(cb)d\times(hk)l}) \\
& = & (\overline{c(bd)\times h(kl)}) \\
& = & (\overline{c\times h})[(\overline{b\times k})(\overline{d\times l})].
\end{array}
$$

Além disso, a unidade de $\overline{C\times H}$ é $\overline{1_C\times 1_H}$ pela forma como o produto é definido,

$$
\begin{array}{rcl}
(\overline{c\times h})(\overline{1_C\times 1_H}) & = & (\overline{c1_C\times h1_H}) \\
& = & (\overline{(c\times(h}) \\
& = & (\overline{1_Cc\times 1_Hh}) \\
& = & (\overline{1_C\times 1_H})(\overline{c\times h}).
\end{array}
$$

$\square$

O próximo resultado mostra que vale a propriedade de biálgebra fraca para a counidade

$$\varepsilon(\overline{c \times h}) = \varepsilon(c^{\overline{0}})\varepsilon(c^{\overline{-1}}h).$$

Proposição 3.6.6. *Seja $\overline{C \times H}$ o coproduto produto smash fraco parcial. Então, $\varepsilon_{C\times H}$ satisfaz*

$$\begin{aligned}
\varepsilon((\overline{a\times k})(\overline{c\times h})(\overline{b\times l})) &= \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(c\times h)}_1)\varepsilon(\overline{(c\times h)}_2(\overline{b\times l})) \\
&= \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(c\times h)}_2)\varepsilon(\overline{(c\times h)}_1(\overline{b\times l})).
\end{aligned}$$

Demonstração. Para tal, primeiro vejamos que

$$\varepsilon(\overline{c \times h}) = \varepsilon(c \times h).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\overline{c\times h}) &= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}} \times h_2) \\
&= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{00}})\varepsilon(c_2{}^{\overline{0-1}} h_2) \\
&\overset{(CCP3)}{=} \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1)\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2) \\
&= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_1 \varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2))\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}) \\
&= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}) \\
&= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}) \\
&\overset{(CCP2)}{=} \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_2) \\
&= \varepsilon(c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) \\
&= \varepsilon(c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_1{}^{\overline{-1}} c_2{}^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) \\
&\overset{(CCP2)}{=} \varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c^{\overline{-1}} h)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_2) \\
&= \varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(c^{\overline{-1}} h) \\
&= \varepsilon(c^{\overline{0}})\varepsilon(c^{\overline{-1}} h) \\
&= \varepsilon(c \times h).
\end{aligned}$$

Assim, antes de tudo, vamos provar que vale:

$$\begin{aligned}\varepsilon((a\times k)(c\times h)(b\times l)) &= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_1)\varepsilon((c\times h)_2(b\times l))\\ &= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_2)\varepsilon((c\times h)_1(b\times l)).\end{aligned}$$

Vejamos a primeira igualdade:

$$\begin{aligned}\varepsilon((a\times k)(c\times h)(b\times l)) &= \varepsilon(acb\times khl)\\ &= \varepsilon((acb)^{\overline{0}})\varepsilon((acb)^{\overline{-1}}khl)\\ &= \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon((a\times k)(c\times h)_1)\varepsilon((c\times h)_2(b\times l))\\
= \;& \varepsilon((a\times k)(c_1\times c_2{}^{\overline{-1}}h_1))\varepsilon((c_2{}^{\overline{0}}\times h_2)(b\times l))\\
= \;& \varepsilon((ac_1\times kc_2{}^{\overline{-1}}h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}b\times h_2l)\\
= \;& \varepsilon((ac_1)^{\overline{0}})\varepsilon((ac_1)^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}h_1)\varepsilon((c_2{}^{\overline{0}}b)^{\overline{0}})\varepsilon((c_2{}^{\overline{0}}b)^{\overline{-1}}h_2l)\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}h_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{00}}b^{\overline{0}})\varepsilon(c_2{}^{\overline{0-1}}b^{\overline{-1}}h_2l)\\
\overset{(CCP3)}{=} \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}}{}_1h_1)\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2b^{\overline{-1}}h_2l)\\
\overset{H comutt.}{=} \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}}{}_1h_1)\varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2h_2b^{\overline{-1}}l)\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})c_3{}^{\overline{-1}}hb^{\overline{-1}}l)\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}c_3{}^{\overline{-1}}hb^{\overline{-1}}l)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}})\varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\\
\overset{(CCP2)}{=} \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}hb^{\overline{-1}}l)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}{}_2b^{\overline{0}})\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}kc_2{}^{\overline{-1}}hb^{\overline{-1}}l)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\\
\overset{H comutt.}{=} \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c_1{}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c_1{}^{\overline{-1}}c_2{}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\\
\overset{(CCP2)}{=} \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_2b^{\overline{0}})\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_2b^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\\
= \;& \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl).
\end{aligned}$$

Assim, resta apenas mostrar a última igualdade:

$$
\begin{array}{rl}
 & \varepsilon((a\times k)(c\times h)_2)\varepsilon((c\times h)_1(b\times l)) \\
= & \varepsilon((a\times k)({c_2}^{\overline{0}}\times h_2))\varepsilon((c_1\times {c_2}^{\overline{-1}}h_1)(b\times l)) \\
= & \varepsilon((a{c_2}^{\overline{0}}\times kh_2)\varepsilon(c_1 b\times {c_2}^{\overline{-1}}h_1 l) \\
= & \varepsilon((a{c_2}^{\overline{0}})^{\overline{0}})\varepsilon((a{c_2}^{\overline{0}})^{\overline{-1}}kh_2)\varepsilon((c_1 b)^{\overline{0}})\varepsilon((c_1 b)^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}h_1 l) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_2}^{\overline{00}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{0-1}}kh_2)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}h_1 l) \\
\overset{(CCP3)}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_3}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_3}^{\overline{-1}}{}_2 kh_2)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_1}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}){c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 l) \\
\overset{H comutt.}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_3}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}k{c_3}^{\overline{-1}}{}_2 h_2)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 {c_1}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}l)\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_3}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}k{c_3}^{\overline{-1}}{}_2 h_2)\varepsilon({c_3}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 {c_1}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}l)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_3}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}k{c_3}^{\overline{-1}}h{c_1}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}l)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \\
\overset{H comutt.}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_3}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}{c_3}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \\
\overset{(CCP2)}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_2}^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_2}^{\overline{0}}{}_2\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1))\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}}) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}{c_2}^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}{c_1}^{\overline{-1}}{c_2}^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon({c_1}^{\overline{0}}b^{\overline{0}}) \\
\overset{(CCP2)}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1 b^{\overline{0}}) \\
\overset{(CCP2)}{=} & \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}{}_2)\varepsilon(c^{\overline{0}}{}_1 b^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl) \\
= & \varepsilon(a^{\overline{0}}c^{\overline{0}}b^{\overline{0}})\varepsilon(a^{\overline{-1}}c^{\overline{-1}}b^{\overline{-1}}khl).
\end{array}
$$

Agora, estamos aptos a mostrar que a counidade de $\overline{C\times H}$ satisfaz:

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon((\overline{a\times k})(\overline{c\times h})(\overline{b\times l})) & = & \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(\overline{c\times h})}_1)\varepsilon(\overline{(\overline{c\times h})}_2(\overline{b\times l})) \\
 & = & \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(\overline{c\times h})}_2)\varepsilon(\overline{(\overline{c\times h})}_1(\overline{b\times l})).
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon((\overline{a\times k})(\overline{c\times h})(\overline{b\times l})) &= \varepsilon((\overline{acb\times khl}) \\
&= \varepsilon(acb\times khl) \\
&= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_1)\varepsilon((c\times h)_2(b\times l)) \\
&= \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(c\times h)_1})\varepsilon(\overline{(c\times h)_2}(\overline{b\times l})) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon((\overline{a\times k})((\overline{c\times h})_1)\varepsilon(\overline{(c\times h)}_2(\overline{b\times l})).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\varepsilon((\overline{a\times k})(\overline{c\times h})(\overline{b\times l})) &= \varepsilon((\overline{acb\times khl}) \\
&= \varepsilon(acb\times khl) \\
&= \varepsilon((a\times k)(c\times h)_2)\varepsilon((c\times h)_1(b\times l)) \\
&= \varepsilon((\overline{a\times k})\overline{(c\times h)_2})\varepsilon(\overline{(c\times h)_1}(\overline{b\times l})) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon((\overline{a\times k})((\overline{c\times h})_2)\varepsilon(\overline{(c\times h)}_1(\overline{b\times l})).
\end{aligned}$$

Onde $(*)$ segue pela Proposição 4.1.3 de [9]. $\square$

Por [7], sabemos que:

$$\Delta^2(1_{\overline{C\times H}}) = (1_{\overline{C\times H}} \otimes \Delta(1_{\overline{C\times H}}))(\Delta(1_{\overline{C\times H}}) \otimes 1_{\overline{C\times H}})$$

se, e somente se, para todo $\overline{c\times h} \in \overline{C\times H}$,

$$(I \otimes \varepsilon_t)\Delta(\overline{c\times h}) = \Delta(1_{\overline{C\times H}})(\overline{c\times h} \otimes 1_{\overline{C\times H}}).$$

E, analogamente,

$$\Delta^2(1_{\overline{C\times H}}) = (\Delta(1_{\overline{C\times H}}) \otimes 1_{\overline{C\times H}})(1_{\overline{C\times H}} \otimes \Delta(1_{\overline{C\times H}}))$$

se, e somente se, para todo $\overline{c \times h} \in \overline{C \times H}$,

$$(I \otimes \overline{\varepsilon_s})\Delta(\overline{c \times h}) = (\overline{c \times h} \otimes 1_{\overline{C \times H}})\Delta(1_{\overline{C \times H}}).$$

Assim, usando tais equivalências, encontramos um exemplo em que vale

$$\begin{aligned}
(1_{\overline{C\times H}} \otimes \Delta(1_{\overline{C\times H}}))(\Delta(1_{\overline{C\times H}}) \otimes 1_{\overline{C\times H}}) &= (\Delta(1_{\overline{C\times H}}) \otimes 1_{\overline{C\times H}})(1_{\overline{C\times H}} \otimes \Delta(1_{\overline{C\times H}})) \\
&= (I \otimes \Delta)\Delta(1_{\overline{C\times H}}) \\
&= (\Delta \otimes I)\Delta(1_{\overline{C\times H}}).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6.7. Sejam C uma biálgebra fraca e H uma álgebra de Hopf fraca, tais que H é comutativa e C é um H-comódulo biálgebra parcial simétrico via

$$\overline{\rho}(c) = z \otimes c,$$

onde h satisfaz:

(I) $\Delta(z)(z \otimes 1_H) = (z \otimes 1_H)\Delta(z) = z \otimes z$

(II) $\varepsilon(z) = 1_{\Bbbk}$.

Primeiro vejamos que

$$\overline{c \times h} = c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}). \tag{3.6}$$

Para tal, basta notar que:

$$\begin{aligned}
\overline{c \times h} &= c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}} \times h_2) \\
&= c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} h_1 \varepsilon(c_2{}^{\overline{00}}) \varepsilon(c_2{}^{\overline{0-1}} h_2) \\
&\overset{(CCP3)}{=} c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) c_3{}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 \varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}) \varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2) \\
&= c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) c_3{}^{\overline{-1}}{}_1 h_1 \varepsilon(c_3{}^{\overline{-1}}{}_2 h_2) \varepsilon(c_3{}^{\overline{0}}) \\
&= c_1 \times c_2{}^{\overline{-1}} c_3{}^{\overline{-1}} h \varepsilon(c_2{}^{\overline{0}}) \varepsilon(c_3{}^{\overline{0}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{cl}
\stackrel{(CCP2)}{=} & c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1)\varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_2) \\
= & c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}).
\end{array}
$$

Além disso, temos que:

$$
\Delta(\overline{c \times h}) = (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1}{}_1 h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \times \overline{c_3}^{-1}{}_2 h_2 \varepsilon({c_3}^{\overline{0}})), \tag{3.7}
$$

pois:

$$
\begin{array}{cl}
& \Delta(\overline{c \times h}) \\
= & ((\overline{c \times h})_1) \otimes ((\overline{c \times h})_2) \\
= & (\overline{(c \times h)_1} \otimes \overline{(c \times h)_2}) \\
= & (\overline{c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h_1} \otimes \overline{{c_2}^{\overline{0}} \times h_2}) \\
\stackrel{(3.6)}{=} & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1} h_1 \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}) \otimes {c_3}^{\overline{0}}{}_1 \times \overline{{c_3}^{\overline{0}}{}_2}^{-1} h_2 \varepsilon({{c_3}^{\overline{0}}{}_2}^{\overline{0}})) \\
\stackrel{(CCP2)}{=} & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h_1 \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1) \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_2 \times \overline{{c_2}^{\overline{0}}{}_3}^{-1} h_2 \varepsilon({{c_2}^{\overline{0}}{}_3}^{\overline{0}})) \\
= & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h_1 \otimes \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_1) {c_2}^{\overline{0}}{}_2 \times \overline{{c_2}^{\overline{0}}{}_3}^{-1} h_2 \varepsilon({{c_2}^{\overline{0}}{}_3}^{\overline{0}})) \\
= & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_1 \times \overline{{c_2}^{\overline{0}}{}_2}^{-1} h_2 \varepsilon({{c_2}^{\overline{0}}{}_2}^{\overline{0}})) \\
\stackrel{(CCP2)}{=} & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1} h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \times {c_3}^{\overline{0-1}} h_2 \varepsilon({c_3}^{\overline{00}})) \\
\stackrel{(CCP3)}{=} & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1} \varepsilon({c_3}^{\overline{0}}) \overline{c_4}^{-1}{}_1 h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \times \overline{c_4}^{-1}{}_2 h_2 \varepsilon({c_4}^{\overline{0}})) \\
\stackrel{(CCP2)}{=} & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_2) \overline{c_3}^{-1}{}_1 h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_1 \times \overline{c_3}^{-1}{}_2 h_2 \varepsilon({c_3}^{\overline{0}})) \\
= & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1}{}_1 h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}}{}_1 \varepsilon({c_2}^{\overline{0}}{}_2) \times \overline{c_3}^{-1}{}_2 h_2 \varepsilon({c_3}^{\overline{0}})) \\
= & (c_1 \times \overline{c_2}^{-1} \overline{c_3}^{-1}{}_1 h_1 \otimes {c_2}^{\overline{0}} \times \overline{c_3}^{-1}{}_2 h_2 \varepsilon({c_3}^{\overline{0}}))
\end{array}
$$

Assim, por um lado,

$$
\begin{array}{cl}
& (I \otimes \varepsilon_t)\Delta(\overline{c \times h}) \\
= & c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon_t(\overline{c_2 \times h_2})
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon((\overline{1_{C1} \times z 1_{H1}})(\overline{c_2 \times h_2}))\overline{1_{C2} \times 1_{H2}} \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(\overline{1_{C1} c_2 \times z 1_{H1} h_2})\overline{1_{C2} \times 1_{H2}} \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2 \times z 1_{H1} h_2) 1_{C2} \times z 1_{H2} \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2 \times z_1 h_2) 1_{C2} \times z_2 \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2 \times z z_1 h_2) 1_{C2} \times z_2 \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2 \times z h_2) 1_{C2} \times z \\
&= c_1 \times z h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2) \varepsilon(z h_2) 1_{C2} \times z \\
&= c_1 \times z z_1 h_1 \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2) \varepsilon(z_2 h_2) 1_{C2} \times z \\
&= c_1 \times z z_1 h_1 \varepsilon(z_2 h_2) \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2) 1_{C2} \times z \\
&= c_1 \times z h \otimes \varepsilon(1_{C1} c_2) 1_{C2} \times z \\
&= c_1 \times z h \otimes \varepsilon_t(c_2) \times z.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
& \Delta(1_{\overline{C \times H}})(\overline{c \times h} \otimes 1_{\overline{C \times H}}) \\
\overset{(3.7)}{=} \; & (1_{C1} \times {1_{C2}}^{\overline{-1}} {{1_{C3}}^{\overline{-1}}}_1)(c_1 \times {c_2}^{\overline{-1}} h \varepsilon({c_2}^{\overline{0}})) \otimes ({1_{C2}}^{\overline{0}} \times {{1_{C3}}^{\overline{-1}}}_2) \varepsilon({1_{C3}}^{\overline{0}}) \\
= \; & (1_{C1} c_1 \times {1_{C2}}^{\overline{-1}} {{1_{C3}}^{\overline{-1}}}_1 {c_2}^{\overline{-1}} h \varepsilon({c_2}^{\overline{0}})) \otimes ({1_{C2}}^{\overline{0}} \times {{1_{C3}}^{\overline{-1}}}_2) \varepsilon({1_{C3}}^{\overline{0}}) \\
= \; & 1_{C1} c_1 \times z z_1 z h \varepsilon(c_2) \otimes 1_{C2} \times z_2 \varepsilon(1_{C3}) \\
= \; & 1_{C1} c_1 \varepsilon(c_2) \times z z_1 z h \otimes 1_{C2} \varepsilon(1_{C3}) \times z_2 \\
= \; & 1_{C1} c \times z z_1 z h \otimes 1_{C2} \times z_2 \\
\overset{(z \otimes 1_H)\Delta(z) = z \otimes z}{=} \; & 1_{C1} c \times z z h \otimes 1_{C2} \times z \\
\overset{z^2 = z}{=} \; & 1_{C1} c \times z h \otimes 1_{C2} \times z \\
= \; & 1_{C1} c \otimes z_2 h_2 \varepsilon(z z_1 h_1) \otimes 1_{C2} \otimes z_2 \varepsilon(z z_1) \\
\overset{H comutt.}{=} \; & 1_{C1} c \otimes z_2 h_2 \varepsilon(z_1 h_1 z) \otimes 1_{C2} \otimes z_{2'} \varepsilon(z z_{1'}) \\
\overset{(1.16)}{=} \; & 1_{C1} c \otimes z h \varepsilon_t(z) \otimes 1_{C2} \otimes z_{2'} \varepsilon(z z_{1'}) \\
\overset{H comutt.}{=} \; & 1_{C1} c \otimes z \varepsilon_t(z) h \otimes 1_{C2} \otimes z_{2'} \varepsilon(z z_{1'})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{H\,comutt.}{=} && 1_{C1}c \otimes z_2\varepsilon(zz_1)h \otimes 1_{C2} \otimes z_{2'}\varepsilon(zz_{1'}) \\
&\overset{(z\otimes 1_H)\Delta(z)=z\otimes z}{=} && 1_{C1}c \otimes z\varepsilon(z)h \otimes 1_{C2} \otimes z\varepsilon(z) \\
&\overset{\varepsilon(z)=1_{\Bbbk}}{=} && 1_{C1}c \otimes zh \otimes 1_{C2} \otimes z. \\
&\overset{1.14}{=} && c_1 \otimes zh \otimes \varepsilon_t(c_2) \otimes z.
\end{aligned}
$$

Logo, se C é um H-comódulo biálgebra parcial simétrico à esquerda (não necessariamente global) onde H é uma álgebra de Hopf fraca comutativa, obtemos para o caso particular do exemplo acima que $\overline{C \times H}$ é uma biálgebra fraca.

Capítulo 4

Dualizações e Globalizações

4.1 Dualização

O Teorema 3.1.16 apresentado por F. Castro em [9], nos diz que, na teoria clássica para álgebras de Hopf, dado um H-módulo coálgebra parcial é possível obter um H-módulo álgebra parcial. Esse resultado se verifica, pois, dado uma coálgebra C qualquer, sabemos que seu dual C^* é sempre uma álgebra. Nesse mesmo texto, F. Castro mostrou que a recíproca também é verdadeira, ou seja, dado um H-módulo álgebra parcial é possível construir a partir dessa estrutura um H-módulo coálgebra parcial, todavia, nesse caso teríamos que partir de uma álgebra A de dimensão finita para garantir que seu dual A^* seja um coálgebra. Mas a ideia apresentada por F. Castro nos mostra que essa condição adicional não é necessária se partirmos da álgebra C^* como um H-módulo álgebra parcial para chegarmos que a coálgebra C é um H-módulo coálgebra parcial. Além disso, nesse mesmo Teorema, F. Castro também monstra que uma coação parcial em uma coálgebra pode gerar uma ação parcial em uma coálgebra e vice-versa. Nosso objetivo nessa seção é generalizar esses resultados para o caso de álgebras de Hopf fracas.

Teorema 4.1.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C um H-módulo coálgebra parcial à esquerda via*

$$\begin{aligned} \cdot : H \otimes C &\rightarrow C \\ h \otimes c &\mapsto h \cdot c. \end{aligned}$$

Então, C^* é um H-módulo álgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \leftharpoonup : C^* \otimes H &\rightarrow C^* \\ \alpha \otimes h &\mapsto (\alpha \leftharpoonup h), \end{aligned}$$

sendo

$$(\alpha \leftharpoonup h)(c) = \alpha(h \cdot c), \forall c \in C.$$

Além disso, se C é um H-módulo coálgebra parcial simétrico à esquerda, então C^* é um H-módulo álgebra parcial simétrico à direita.

Demonstração. Para mostrar que C^* é um H-módulo álgebra parcial, precisamos mostrar que os itens

(i) $\alpha \leftharpoonup 1_H = \alpha$

(ii) $(\alpha\beta \leftharpoonup h) = (\alpha \leftharpoonup h_1)(\beta \leftharpoonup h_2)$

(iii) $\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g = (\alpha \leftharpoonup hg_1)(1_{C^*} \leftharpoonup g_2)$

são satisfeitos. De fato,

(i) $\alpha \leftharpoonup 1_H = \alpha$, pois para todo $c \in C$

$$\begin{aligned} (\alpha \leftharpoonup 1_H)(c) &= \alpha(1_H \cdot c) \\ &= \alpha(c). \end{aligned}$$

(ii) $(\alpha\beta \leftharpoonup h) = (\alpha \leftharpoonup h_1)(\beta \leftharpoonup h_2)$, pois para todo $c \in C$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta \leftharpoonup h)(c) &= (\alpha\beta)(h \cdot c) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha((h \cdot c)_1)\beta((h \cdot c)_2) \\
&\overset{(MCP1)}{=} \alpha(h_1 \cdot c_1)\beta(h_2 \cdot c_2) \\
&= (\alpha \leftharpoonup h_1)(c_1)(\beta \leftharpoonup h_2)(c_2) \\
&\overset{(*)}{=} ((\alpha \leftharpoonup h_1)(\beta \leftharpoonup h_2))(c)
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução de C^*.

(iii) $\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g = (\alpha \leftharpoonup hg_1)(1_{C^*} \leftharpoonup g_2)$, pois para todo $c \in C$

$$\begin{aligned}
(\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g)(c) &= (\alpha \leftharpoonup h)(g \cdot c) \\
&= \alpha(h \cdot g \cdot c) \\
&\overset{(MCP3)}{=} \alpha(hg_1 \cdot c_1)\varepsilon(g_2 \cdot c_2) \\
&= (\alpha \leftharpoonup hg_1)(c_1)(\varepsilon \leftharpoonup g_2)(c_2) \\
&\overset{(*)}{=} ((\alpha \leftharpoonup hg_1)(\varepsilon \leftharpoonup g_2))(c) \\
&\overset{(**)}{=} ((\alpha \leftharpoonup hg_1)(1_{C^*} \leftharpoonup g_2))(c)
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução de C^* e em $(**)$ estamos usando que $1_{C^*} = \varepsilon_C$.

Suponha agora que C é um H-módulo coálgebra parcial simétrico à esquerda. Mostraremos que C^* é um H-módulo álgebra parcial simétrico à direita. Para tal, basta mostrar a condição de simetria:

$$\begin{aligned}
(\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g)(c) &= (\alpha \leftharpoonup h)(g \cdot c) \\
&= \alpha(h \cdot g \cdot c) \\
&\overset{(***)}{=} \varepsilon(g_1 \cdot c_1)\alpha(hg_2 \cdot c_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varepsilon \leftharpoonup g_1)(c_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2)(c_2) \\
&\overset{(*)}{=} ((\varepsilon \leftharpoonup g_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2))(c) \\
&\overset{(**)}{=} ((1_{C^*} \leftharpoonup g_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2))(c)
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução de C^*, em $(**)$ estamos usando que $1_{C^*} = \varepsilon_C$ e em $(***)$ usamos a condição de simetria do H-módulo coálgebra parcial à esquerda. □

Veremos agora o resultado recíproco ao apresentado acima, ou seja, partiremos de um H-módulo álgebra parcial à direita e mostraremos que a partir dessa estrutura podemos construir um H-módulo coálgebra parcial à esquerda.

Teorema 4.1.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e C^* um H-módulo álgebra parcial à direita via*

$$
\begin{aligned}
\leftharpoonup : C^* \otimes H &\to C^* \\
\alpha \otimes h &\mapsto (\alpha \leftharpoonup h).
\end{aligned}
$$

Então, C é um H-módulo coálgebra parcial à esquerda via

$$
\begin{aligned}
\cdot : H \otimes C &\to C \\
h \otimes c &\mapsto h \cdot c.
\end{aligned}
$$

tal que

$$(\alpha \leftharpoonup h)(c) = \alpha(h \cdot c),$$

para todo $c \in C$, $\alpha \in C^*$ e $h \in H$.

Além disso, se C^* é um H-módulo álgebra parcial simétrico à direita, então C é um H-módulo coálgebra parcial simétrico à esquerda.

Demonstração. Para mostrar que C é um H-módulo coálgebra parcial, precisamos mostrar que os itens

(i) $1_H \cdot c = c$

(ii) $\Delta(h \cdot c) = (h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2)$

(iii) $h \cdot g \cdot c = (hg_1 \cdot c_1)\varepsilon(g_2 \cdot c_2)$

são satisfeitos. De fato,

(i) $1_H \cdot c = c$, pois para todo $\alpha \in C^*$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H \cdot c) &= (\alpha \leftharpoonup 1_H)(c) \\ &= \alpha(c). \end{aligned}$$

(ii) $\Delta(h \cdot c) = (h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2)$, pois para todo $\alpha, \beta \in C^*$

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(\Delta(h \cdot c)) &= \alpha((h \cdot c)_1)\beta((h \cdot c)_2) \\ &\overset{(*)}{=} (\alpha\beta)(h \cdot c) \\ &= (\alpha\beta \leftharpoonup h)(c) \\ &\overset{(**)}{=} [(\alpha \leftharpoonup h_1)(\beta \leftharpoonup h_2)](c) \\ &\overset{(*)}{=} (\alpha \leftharpoonup h_1)(c_1)(\beta \leftharpoonup h_2)(c_2) \\ &= \alpha(h_1 \cdot c_1)\beta(h_2 \cdot c_2) \\ &= (\alpha \otimes \beta)[(h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2)] \end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução em C^* e em $(**)$ estamos usando que C^* é um H-módulo álgebra parcial à direita.

(iii) $h \cdot g \cdot c = (hg_1 \cdot c_1)\varepsilon(g_2 \cdot c_2)$, pois para todo $\alpha \in C^*$

$$\alpha(h \cdot g \cdot c) = (\alpha \leftharpoonup h)(g \cdot c)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g)(c) \\
&\overset{(**)}{=} [(\alpha \leftharpoonup hg_1)(1_{C^*} \leftharpoonup g_2)](c) \\
&\overset{(*)}{=} (\alpha \leftharpoonup hg_1)(c_1)(1_{C^*} \leftharpoonup g_2)(c_2) \\
&\overset{(***)}{=} (\alpha \leftharpoonup hg_1)(c_1)(\varepsilon \leftharpoonup g_2)(c_2) \\
&= \alpha(hg_1 \cdot c_1)\varepsilon(g_2 \cdot c_2)
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução em C^*, em $(**)$ estamos usando que C^* é um H-módulo álgebra parcial à direita e em $(***)$ estamos usando que $1_{C^*} = \varepsilon_C$.

Suponha agora que C^* é um H-módulo álgebra parcial simétrico à direita. Mostraremos que C é um H-módulo coálgebra parcial simétrico à esquerda. Para tal, basta mostrar a condição de simetria:

$$
\begin{aligned}
\alpha(h \cdot g \cdot c) &= (\alpha \leftharpoonup h)(g \cdot c) \\
&= (\alpha \leftharpoonup h \leftharpoonup g)(c) \\
&\overset{**}{=} [(1_{C^*} \leftharpoonup g_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2)](c) \\
&\overset{*}{=} (1_{C^*} \leftharpoonup g_1)(c_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2)(c_2) \\
&\overset{***}{=} (\varepsilon \leftharpoonup g_1)(c_1)(\alpha \leftharpoonup hg_2)(c_2) \\
&= \varepsilon(g_1 \cdot c_1)\alpha(hg_2 \cdot c_2)
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução em C^*, em $(**)$ estamos usando que C^* é um H-módulo álgebra parcial simétrico à direita e em $(***)$ estamos usando que $1_{C^*} = \varepsilon_C$. □

A fim de mostrarmos que uma coação parcial em uma coálgebra pode gerar uma ação parcial em uma coálgebra e vice-versa, precisamos supor a hipótese adicional de que a dimensão da álgebra de Hopf fraca H sobre o corpo $\Bbbk$ é finita. Dessa forma, sabemos que o dual H^* de H também é uma álgebra de Hopf fraca.

Teorema 4.1.3. *Sejam C uma coálgebra e H uma álgebra de Hopf fraca de dimensão finita. São equivalentes:*

(i) C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda.

(ii) C é um H^*-módulo coálgebra parcial à direita.

Além disso, dizer que C é um H-comódulo coálgebra parcial simétrico à esquerda é equivalente a dizer que C é um H^*-módulo coálgebra parcial simétrico à direita.

Demonstração. Suponha que C é um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) via

$$\begin{aligned} \rho : C &\rightarrow H \otimes C \\ c &\mapsto c^{-1} \otimes c^{0}. \end{aligned}$$

Então, C é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita) via

$$\begin{aligned} \leftharpoonup : C \otimes H^* &\rightarrow C \\ c \otimes f &\mapsto c \leftharpoonup f = f(c^{-1})c^{0}. \end{aligned}$$

De fato,

(i) $c \leftharpoonup 1_{H^*} = c$, pois

$$\begin{aligned} c \leftharpoonup 1_{H^*} &\overset{(*)}{=} c \leftharpoonup \varepsilon_H \\ &= \varepsilon_H(c^{-1})c^{0} \\ &= c, \end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando que $1_{H^*} = \varepsilon_H$.

(ii) $\Delta(c \leftharpoondown f) = c_1 \leftharpoondown f_1 \otimes c_2 \leftharpoondown f_2$, pois

$$\begin{aligned}
\Delta(c \leftharpoondown f) &= f(c^{-1})\Delta(c^0) \\
&= f(c^{-1}){c^0}_1 \otimes {c^0}_2 \\
&\overset{(CCP2)}{=} f({c_1}^{-1}{c_2}^{-1}){c_1}^0 \otimes {c_2}^0 \\
&\overset{(*)}{=} f_1({c_1}^{-1})f_2({c_2}^{-1}){c_1}^0 \otimes {c_2}^0 \\
&= f_1({c_1}^{-1}){c_1}^0 \otimes f_2({c_2}^{-1}){c_2}^0 \\
&= c_1 \leftharpoondown f_1 \otimes c_2 \leftharpoondown f_2,
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a propriedade de Δ_{H^*}.

(iii) $c \leftharpoondown f \leftharpoondown g = \varepsilon_C(c_1 \leftharpoondown f_1)(c_2 \leftharpoondown f_2 g)$, pois

$$\begin{aligned}
c \leftharpoondown f \leftharpoondown g &= (f(c^{-1})c^0) \leftharpoondown g \\
&= f(c^{-1})g({c^0}^{-1}){c^0}^0 \\
&\overset{(CCP3)}{=} f({c_1}^{-1}{{c_2}^{-1}}_1)\varepsilon_C({c_1}^0)g({{c_2}^{-1}}_2){c_2}^0 \\
&\overset{(*)}{=} f_1({c_1}^{-1})f_2({{c_2}^{-1}}_1)\varepsilon_C({c_1}^0)g({{c_2}^{-1}}_2){c_2}^0 \\
&= f_1({c_1}^{-1})\varepsilon_C({c_1}^0)f_2({{c_2}^{-1}}_1)g({{c_2}^{-1}}_2){c_2}^0 \\
&\overset{(**)}{=} f_1({c_1}^{-1})\varepsilon_C({c_1}^0)(f_2 g)({c_2}^{-1}){c_2}^0 \\
&= \varepsilon_C(f_1({c_1}^{-1}){c_1}^0)(f_2 g)({c_2}^{-1}){c_2}^0 \\
&= \varepsilon_C(c_1 \leftharpoondown f_1)(c_2 \leftharpoondown f_2 g),
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a propriedade de Δ_{H^*} e em $(**)$ estamos usando a definição do produto convolução em H^*.

Agora, vejamos a condição de simetria,

$$\begin{aligned}
c \leftharpoondown f \leftharpoondown g &= (f(c^{-1})c^0) \leftharpoondown g \\
&= f(c^{-1})g({c^0}^{-1}){c^0}^0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f({c_1}^{-1}{}_1{c_2}^{-1})\varepsilon_C({c_2}^0)g({c_1}^{-1}{}_2){c_1}^0\\
&\overset{(*)}{=} f_1({c_1}^{-1}{}_1)f_2({c_2}^{-1})\varepsilon_C({c_2}^0)g({c_1}^{-1}{}_2){c_1}^0\\
&= f_1({c_1}^{-1}{}_1)g({c_1}^{-1}{}_2){c_1}^0\varepsilon_C({c_2}^0)f_2({c_2}^{-1})\\
&\overset{(**)}{=} (f_1g)({c_1}^{-1}){c_1}^0\varepsilon_C({c_2}^0)f_2({c_2}^{-1})\\
&= (f_1g)({c_1}^{-1}){c_1}^0\varepsilon_C(f_2({c_2}^{-1}){c_2}^0)\\
&= (c_1 \leftharpoondown f_1g)\varepsilon_C(c_2 \leftharpoondown f_2),
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a propriedade de Δ_{H^*} e em $(**)$ estamos usando a definição do produto convolução em H^*.

Reciprocamente, suponha que C é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita) via

$$
\begin{aligned}
\leftharpoondown : C \otimes H^* &\to C\\
c \otimes f &\mapsto c \leftharpoondown f.
\end{aligned}
$$

Então, C é um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) via

$$
\begin{aligned}
\rho : C &\to H \otimes C\\
c &\mapsto \sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c \leftharpoondown {h_i}^*)
\end{aligned}
$$

sendo, $\{h_i\}_{i=1}^n$ uma base de H e $\{{h_i}^*\}_{i=1}^n$ a base de H^* dada por:

$$
h_i^*(h_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j\\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.
$$

Além disso, se $f \in H^*$, temos que f pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos $\{{h_i}^*\}_{i=1}^n$, mais precisamente

$$
f = \sum_{i=1}^{n} f(h_i){h_i}^*. \tag{4.1}
$$

De fato,

(i) $\varepsilon_H(c^{-1})c^0 = c$, pois

$$\begin{aligned}
\varepsilon_H(c^{-1})c^0 &= (\varepsilon_H \otimes I)\rho(c) \\
&= (\varepsilon_H \otimes I)(\sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c \leftharpoonup {h_i}^*)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_H(h_i) \otimes c \leftharpoonup {h_i}^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(c \leftharpoonup \varepsilon_H(h_i){h_i}^*) \\
&\overset{(4.1)}{=} (c \leftharpoonup \varepsilon_H) \\
&\overset{(*)}{=} (c \leftharpoonup 1_{H^*}) \\
&= c
\end{aligned}$$

(ii) $(I \otimes \Delta)\rho(c) = (m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{C,H} \otimes I)(\rho \otimes \rho)\Delta(c)$, pois, para todos $f \in H^*$, $\alpha, \beta \in C^*$,

$$\begin{aligned}
&(f \otimes \alpha \otimes \beta)(I \otimes \Delta)\rho(c) \\
= \; &(f \otimes \alpha \otimes \beta)(I \otimes \Delta)(\sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c \leftharpoonup {h_i}^*)) \\
= \; &\sum_{i=1}^{n} f(h_i)\alpha((c \leftharpoonup {h_i}^*)_1)\beta((c \leftharpoonup {h_i}^*)_2) \\
= \; &\sum_{i=1}^{n} f(h_i)(\alpha\beta)(c \leftharpoonup {h_i}^*) \\
= \; &(\alpha\beta)(c \leftharpoonup \sum_{i=1}^{n} f(h_i){h_i}^*) \\
= \; &(\alpha\beta)(c \leftharpoonup f) \\
= \; &\alpha((c \leftharpoonup f)_1)\beta((c \leftharpoonup f)_2) \\
= \; &\alpha(c_1 \leftharpoonup f_1)\beta(c_2 \leftharpoonup f_2) \\
= \; &\alpha(c_1 \leftharpoonup \sum_{i=1}^{n} f_1(h_i){h_i}^*)\beta(c_2 \leftharpoonup \sum_{j=1}^{n} f_2(h_j){h_j}^*) \\
= \; &\sum_{i,j=1}^{n} f_1(h_i)f_2(h_j)\alpha(c_1 \leftharpoonup {h_i}^*)\beta(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} f(h_i h_j)\alpha(c_1 \leftharpoondown h_i{}^*)\beta(c_2 \leftharpoondown h_j{}^*) \\
&= (f \otimes \alpha \otimes \beta) \sum_{i,j=1}^{n} (h_i h_j \otimes c_1 \leftharpoondown h_i{}^* \otimes c_2 \leftharpoondown h_j{}^*) \\
&= (f \otimes \alpha \otimes \beta)(m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{C,H} \otimes I)[\sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c_1 \leftharpoondown h_i{}^*) \otimes \sum_{j=1}^{n}(h_j \otimes c_2 \leftharpoondown h_j{}^*)] \\
&= (f \otimes \alpha \otimes \beta)(m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{C,H} \otimes I)(\rho \otimes \rho)\Delta(c).
\end{aligned}
$$

Como segue para todo funcional linear $f \in H^*$, $\alpha, \beta \in C^*$, obtemos a igualdade.

(iii) $(I \otimes \rho)\rho(c) = (m_H \otimes I \otimes I)[(I \otimes \varepsilon_C)\rho \otimes (\Delta \otimes I)\rho]\Delta(c)$, pois

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \rho)\rho(c) &= (I \otimes \rho) \sum_{i=1}^{n} (h_i \otimes c \leftharpoondown h_i{}^*) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (h_i \otimes h_j \otimes c \leftharpoondown h_i{}^* \leftharpoondown h_j{}^*). \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
& (m_H \otimes I \otimes I)[(I \otimes \varepsilon_C)\rho \otimes (\Delta \otimes I)\rho]\Delta(c) \\
&= (m_H \otimes I \otimes I)[(I \otimes \varepsilon_C)\rho(c_1) \otimes (\Delta \otimes I)\rho(c_2)] \\
&= (m_H \otimes I \otimes I)[(I \otimes \varepsilon_C) \sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c_1 \leftharpoondown h_i{}^*) \otimes (\Delta \otimes I) \sum_{j=1}^{n}(h_j \otimes c_2 \leftharpoondown h_j{}^*)] \\
&= (m_H \otimes I \otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i \varepsilon(c_1 \leftharpoondown h_i{}^*) \otimes \sum_{j=1}^{n}(h_{j_1} \otimes h_{j_2} \otimes c_2 \leftharpoondown h_j{}^*)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_{j_1} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown h_i{}^*) \otimes h_{j_2} \otimes c_2 \leftharpoondown h_j{}^*. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Basta notar que aplicando $(f \otimes g \otimes I)$ em (4.2) obtemos $(f \otimes g \otimes I)$ aplicado em (4.3), para todo $f, g \in H^*$, concluindo então que (4.2) e (4.3) são iguais. De fato,

$$
(f \otimes g \otimes I) \sum_{i,j=1}^{n} (h_i \otimes h_j \otimes c \leftharpoondown h_i{}^* \leftharpoondown h_j{}^*)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} f(h_i)g(h_j)c \leftharpoondown {h_i}^* \leftharpoondown {h_j}^* \\
&= c \leftharpoondown \sum_{i=1}^{n} f(h_i){h_i}^* \leftharpoondown \sum_{j=1}^{n} g(h_j){h_j}^* \\
&\overset{(4.1)}{=} c \leftharpoondown f \leftharpoondown g \\
&= \varepsilon_C(c_1 \leftharpoondown f_1)(c_2 \leftharpoondown f_2 g) \\
&\overset{(4.1)}{=} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown \sum_{i=1}^{n} f_1(h_i){h_i}^*)(c_2 \leftharpoondown \sum_{j=1}^{n}(f_2 g)(h_j){h_j}^*) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown {h_i}^*)(c_2 \leftharpoondown f_1(h_i)(f_2 g)(h_j){h_j}^*) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown {h_i}^*)(c_2 \leftharpoondown f_1(h_i)f_2(h_{j_1})g(h_{j_2}){h_j}^*) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown {h_i}^*)(c_2 \leftharpoondown f(h_i h_{j_1})g(h_{j_2}){h_j}^*) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f(h_i h_{j_1})\varepsilon(c_1 \leftharpoondown {h_i}^*)g(h_{j_2})(c_2 \leftharpoondown {h_j}^*) \\
&= (f \otimes g \otimes I)[\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_{j_1}\varepsilon(c_1 \leftharpoondown {h_i}^*) \otimes h_{j_2} \otimes c_2 \leftharpoondown {h_j}^*]
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição do produto de H^* e em $(**)$ estamos usando a propriedade de Δ_{H^*}.

Agora, basta provar a condição de simetria. Notemos que, por um lado,

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \rho)\rho(c) &= (I \otimes \rho)\sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c \leftharpoondown {h_i}^*) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(h_i \otimes h_j \otimes c \leftharpoondown {h_i}^* \leftharpoondown {h_j}^*) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
& (m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{H\otimes C,H})[(\Delta \otimes I)\rho \otimes (I \otimes \varepsilon_C)\rho]\Delta(c) \\
= \;& (m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{H\otimes C,H})[(\Delta \otimes I)\rho(c_1) \otimes (I \otimes \varepsilon_C)\rho(c_2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{H\otimes C,H})[(\Delta \otimes I)\sum_{i=1}^{n}(h_i \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^*) \otimes (I \otimes \varepsilon_C)\sum_{j=1}^{n}(h_j \otimes c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)] \\
&= (m_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau_{H\otimes C,H})[\sum_{i=1}^{n} h_{i1} \otimes h_{i2} \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^* \otimes \sum_{j=1}^{n} h_j \varepsilon_C(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)] \\
&= (m_H \otimes I \otimes I)[\sum_{i,j=1}^{n} h_{i1} \otimes h_j \otimes h_{i2} \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^* \varepsilon_C(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}h_j \otimes h_{i2} \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^* \varepsilon_C(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}h_j \varepsilon_C(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*) \otimes h_{i2} \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^*. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Basta notar que aplicando $(f \otimes g \otimes I)$ em (4.4) obtemos $(f \otimes g \otimes I)$ aplicado em (4.5), para todo $f, g \in H^*$, concluindo então que (4.4) e (4.5) são iguais. De fato,

$$
\begin{aligned}
& (f \otimes g \otimes I)\sum_{i,j=1}^{n}(h_i \otimes h_j \otimes c \leftharpoonup {h_i}^* \leftharpoonup {h_j}^*) \\
= \;& \sum_{i,j=1}^{n} f(h_i)g(h_j)c \leftharpoonup {h_i}^* \leftharpoonup {h_j}^* \\
= \;& c \leftharpoonup \sum_{i=1}^{n} f(h_i){h_i}^* \leftharpoonup \sum_{j=1}^{n} g(h_j){h_j}^* \\
\overset{(4.1)}{=} \;& c \leftharpoonup f \leftharpoonup g \\
= \;& \varepsilon_C(c_2 \leftharpoonup f_2)(c_1 \leftharpoonup f_1 g) \\
\overset{(4.1)}{=} \;& \varepsilon(c_2 \leftharpoonup \sum_{j=1}^{n} f_2(h_j){h_j}^*)(c_1 \leftharpoonup \sum_{i=1}^{n}(f_1 g)(h_i){h_i}^*) \\
= \;& \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)(c_1 \leftharpoonup f_2(h_j)(f_1 g)(h_i){h_i}^*) \\
\overset{(*)}{=} \;& \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)(c_1 \leftharpoonup f_2(h_j)f_1(h_{i1})g(h_{i2}){h_i}^*) \\
\overset{(*)}{=} \;& \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)(c_1 \leftharpoonup f_1(h_{i1})f_2(h_j)g(h_{i2}){h_i}^*) \\
\overset{(**)}{=} \;& \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)(c_1 \leftharpoonup f(h_{i1}h_j)g(h_{i2}){h_i}^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} f(h_{i1}h_j)\varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*)g(h_{i2})(c_1 \leftharpoonup {h_i}^*)\\
&= (f \otimes g \otimes I)[\sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}h_j\varepsilon(c_2 \leftharpoonup {h_j}^*) \otimes h_{i2} \otimes c_1 \leftharpoonup {h_i}^*]
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição do produto de H^* e em $(**)$ estamos usando a propriedade de Δ_{H^*}. $\square$

Outro resultado de dualização obtido é aquele que diz que o elemento λ definido a partir da ação parcial via λ apresentada no Teorema 2.3.3 é igual ao elemento definido a partir da coação parcial $\overline{\rho_\lambda}$ apresentada no Teorema 3.3.3. Assim, obtemos o seguinte o seguinte resultado.

Corolário 4.1.4. *C é um H-módulo coálgebra parcial (à direita) via λ definido como $c \leftharpoonup h = c\lambda(h)$ se, e somente se, C é um H^*-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) via $\overline{\rho_\lambda}(c) = \lambda \otimes c$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que

- $\varepsilon_{H^*}(\lambda) = 1_{\Bbbk}$, pois

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{H^*}(\lambda) &= \lambda(1_H)\\
&= 1_{\Bbbk}
\end{aligned}
$$

- $(\lambda \otimes 1_{H^*})\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$, pois

$$
\begin{aligned}
(\lambda \otimes 1_{H^*})\Delta(\lambda)(h \otimes k) &= (\lambda\lambda_1)(h)(\lambda_2)(k)\\
&\overset{(*)}{=} (\lambda)(h_1)(\lambda_1)(h_2)(\lambda_2)(k)\\
&\overset{(**)}{=} (\lambda)(h_1)(\lambda)(h_2k)\\
&\overset{2.3.3}{=} (\lambda)(h)(\lambda)(k)\\
&= (\lambda \otimes \lambda)(h \otimes k)
\end{aligned}
$$

onde (*) segue pelo produto convolução em H^* e (**) segue pela definição do coproduto em H^*.

A recíproca segue pelas mesma contas apresentadas acima.

$\square$

4.2 Globalização para Módulo Coálgebra Parcial

Como já vimos na Seção 2.4, a partir de um H-módulo coálgebra (global), é possível, sob certas condições, induzir um H-módulo coálgebra parcial. A recíproca dessa situação é partir de um H-módulo coálgebra parcial e construir um H-módulo coálgebra (global). Sob essa motivação apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.2.1 (*Globalização para módulo coálgebra parcial*)**.** Seja H uma álgebra de Hopf fraca e $(C, \leftharpoonup)$ um H-módulo coálgebra parcial (à direita). Uma globalização de C é uma tripla (D, θ, π), onde:

- D é um H-módulo coálgebra (à direita) via

$$\blacktriangleleft : D \otimes H \to D,$$

- $\theta : C \to D$ é monomorfismo de coálgebras,
- $\pi : D \to D$ é projeção comultiplicativa de D sobre $\theta(C)$, tais que:

(i) $\pi(\pi(d) \blacktriangleleft h) = \varepsilon(\pi(d_1))\pi(d_2 \blacktriangleleft h)$

(ii) $\theta(c \leftharpoonup h) = \theta(c) \leftharpoonup_i h$

(iii) D é uma H-módulo gerado por $\theta(C)$, isto é, $D = \theta(C) \blacktriangleleft H$.

Observação 4.2.2. 1. π é projeção no sentido que

(a) $\pi \circ \pi = \pi$

(b) $Im\pi = \theta(C)$.

Assim, note que, para todo $e \in \theta(C)$ temos que $\pi(e) = e$, pois se $e \in \theta(C) = Im\pi$, então existe $d \in D$ tal que $e = \pi(d)$, mas

$$\begin{aligned} \pi(e) &= \pi(\pi(d)) \\ &= \pi(d). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} e &= \pi(d) \\ &= \pi(e), \text{ para todo } e \in \theta(C)\ . \end{aligned}$$

2. Dizemos que a projeção π é comultiplicativa, no sentido que,

$$(\pi \otimes \pi)\Delta(d) = \Delta(\pi(d)), \forall d \in D.$$

3. Quando pedimos que θ seja morfismo de coálgebras, queremos dizer que além de satisfazer

$$(\theta \otimes \theta)\Delta(c) = \Delta(\theta(c)), \forall c \in C,$$

também satisfaz

$$\varepsilon(\theta(c)) = \varepsilon(c), \forall c \in C.$$

4. A ação parcial denotada pelo símbolo $\leftharpoonup_i$ é a mesma apresentada na Seção 2.4, dada por

$$\theta(c) \leftharpoonup_i h = \pi(\theta(c) \blacktriangleleft h).$$

Uma vez definida a globalização para um H-módulo coálgebra parcial, podemos seguir os mesmos passos apresentados F. Castro em [9]. Dessa forma, as próximas seções serão destinadas para estabelecer uma relação entre globalizações de módulo álgebra parcial e módulo coálgebra parcial e para determinar sob quais hipóteses um H-módulo coálgebra parcial possui uma globalização como a apresentada na Definição 4.2.1.

4.2.1 Equivalência entre Globalizações

Nosso objetivo agora é partir de uma globalização de um módulo coálgebra parcial, assim como na Definição 4.2.1, e dualizar essa globalização gerando a globalização de um módulo álgebra parcial. Para tal, suponhamos $(C, \leftharpoonup)$ um H-módulo coálgebra parcial (à direita) e $(D, \blacktriangleleft)$ um H-módulo coálgebra (à direita). Então, pelo Teorema 4.1.1, C^* é um H-módulo álgebra parcial (à esquerda) via

$$(h \rightharpoondown \alpha)(c) = \alpha(c \leftharpoonup h) \tag{4.6}$$

e, analogamente, D^* um H-módulo álgebra (à direita) via

$$(h \triangleright \beta)(c) = \beta(c \blacktriangleleft h). \tag{4.7}$$

Além disso, consideraremos $\theta : C \to D$ um monomorfismo de coálgebra e $\pi : D \to D$ uma projeção comultiplicativa sobre $\theta(C)$. Dessa forma, podemos definir o monomorfismo multiplicativo

$$\begin{aligned} \varphi : C^* &\to D^* \\ \alpha &\mapsto \varphi(\alpha) = \alpha \circ \theta^{-1} \circ \pi. \end{aligned}$$

Sob essas condições temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.3. *Se $(\theta(C) \blacktriangleleft H, \theta, \pi)$ é uma globalização para C, então $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*.*

Demonstração. Suponha que $(\theta(C) \blacktriangleleft H, \theta, \pi)$ é uma globalização para C. Mostraremos que $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*, segundo a definição de globalização para módulo álgebra parcial apresentada em [10]. De fato,

(i) $B = H \triangleright \varphi(C^*)$ é um H-módulo álgebra via

$$\triangleright : H \otimes B \to B$$

$$h \otimes (k \triangleright \varphi(\alpha)) \quad \mapsto \quad h \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha)),$$

sendo

$$[h \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d) = (k \triangleright \varphi(\alpha))(d \blacktriangleleft h),$$

pois $B = H \triangleright \varphi(C^*) \subseteq D^*$.

– $1_H \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha)) = (k \triangleright \varphi(\alpha))$, pois

$$\begin{aligned} [1_H \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d) &= (k \triangleright \varphi(\alpha))(d \blacktriangleleft 1_H) \\ &= (k \triangleright \varphi(\alpha))(d) \end{aligned}$$

– $h \triangleright l \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha)) = hl \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))$, pois

$$\begin{aligned} [h \triangleright l \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d) &= [l \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d \blacktriangleleft h) \\ &= (k \triangleright \varphi(\alpha))(d \blacktriangleleft h \blacktriangleleft l) \\ &= (k \triangleright \varphi(\alpha))(d \blacktriangleleft hl) \\ &= [hl \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d) \end{aligned}$$

– $h \triangleright [(k \triangleright \varphi(\alpha))(l \triangleright \varphi(\beta))] = [h_1 \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))][h_2 \triangleright (l \triangleright \varphi(\beta))]$, pois

$$\begin{aligned} & [h \triangleright [(k \triangleright \varphi(\alpha))(l \triangleright \varphi(\beta))]](d) \\ = \; & [(k \triangleright \varphi(\alpha))(l \triangleright \varphi(\beta))](d \blacktriangleleft h) \\ \overset{(*)}{=} \; & (k \triangleright \varphi(\alpha))((d \blacktriangleleft h)_1)(l \triangleright \varphi(\beta))((d \blacktriangleleft h)_2) \\ = \; & (k \triangleright \varphi(\alpha))(d_1 \blacktriangleleft h_1)(l \triangleright \varphi(\beta))(d_2 \blacktriangleleft h_2) \\ = \; & [h_1 \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))](d_1)[h_2 \triangleright (l \triangleright \varphi(\beta))](d_2) \\ \overset{(*)}{=} \; & [[h_1 \triangleright (k \triangleright \varphi(\alpha))][h_2 \triangleright (l \triangleright \varphi(\beta))]](d) \end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição do produto de D^*.

(ii) $\varphi(C^*)$ é ideal à direita de B. De fato,

$$\begin{aligned}
[\varphi(\beta)(h \triangleright \varphi(\alpha))](d) &\overset{(*)}{=} \varphi(\beta)(d_1)(h \triangleright \varphi(\alpha))(d_2) \\
&\overset{(4.7)}{=} \varphi(\beta)(d_1)(\varphi(\alpha))(d_2 \blacktriangleleft h) \\
&\overset{\varphi}{=} \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_2 \blacktriangleleft h))) \\
&= \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\varepsilon(d_2)\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_3 \blacktriangleleft h))) \\
&= \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)_2))\varepsilon(\pi(d_1)_2)\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_2 \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{(**)}{=} \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\varepsilon(\pi(d_2))\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_3 \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{4.2.1(i)}{=} \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(d_2) \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{(***)}{=} \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_2) \leftharpoonup_i h))) \\
&\overset{4.2.1(ii)}{=} \beta(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\alpha(\theta^{-1}(\pi(d_2)) \leftharpoonup h) \\
&\overset{(4.6)}{=} \varphi(\beta)(d_1)(h \rightharpoondown \alpha)(\theta^{-1}(\pi(d_2))) \\
&\overset{\varphi}{=} \varphi(\beta)(d_1)\varphi(h \rightharpoondown \alpha)(d_2) \\
&\overset{(*)}{=} [\varphi(\beta)\varphi(h \rightharpoondown \alpha)](d) \\
&\overset{(****)}{=} [\varphi(\beta(h \rightharpoondown \alpha))](d)
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição do produto de D^*, em $(**)$ estamos usando que π é comultiplicativa, em $(***)$ estamos usando a definição de ação induzida apresentada na Seção 2.4 e em $(****)$ estamos usando que φ é multiplicativa. Além disso, usamos também a propriedade 4.2.1(ii) para θ^{-1}, de fato, se $\theta(c \leftharpoonup h) = \theta(c) \leftharpoonup_i h$, então, aplicando θ^{-1} em ambos os lados da igualdade obtemos $(c \leftharpoonup h) = \theta^{-1}(\theta(c) \leftharpoonup_i h)$. Como para todo elemento $d \in \theta(C)$, sabemos que existe $c \in C$ tal que $d = \theta(c)$ isso implica que $\theta^{-1}(d) = c$, portanto obtemos para cada $d \in \theta(C)$

$$\theta^{-1}(d) \leftharpoonup h \;=\; (c \leftharpoonup h)$$

$$\begin{aligned} &= \theta^{-1}(\theta(c) \leftharpoondown_i h) \\ &= \theta^{-1}(d \leftharpoondown_i h). \end{aligned}$$

(iii) B é subálgebra de D. De fato, como $\varphi(C^*)$ é ideal à direita de B,

$$(h \triangleright \varphi(\alpha))(k \triangleright \varphi(\beta)) = h_1 \triangleright \underbrace{(\varphi(\alpha)(S(h_2)k \triangleright \varphi(\beta))}_{\in \varphi(C^*)} \in B.$$

(iv) $\varphi(h \rightharpoonup \alpha) = h \rightharpoonup_i \varphi(\alpha) = \varphi(1_{C^*})(h \triangleright \varphi(\alpha))$. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(1_{C^*})(h \triangleright \varphi(\alpha)) &\overset{(*)}{=} \varphi(\varepsilon_C)(h \triangleright \varphi(\alpha)) \\ &\overset{(**)}{=} \varphi(\varepsilon \underbrace{(h \rightharpoondown \alpha)}_{\in C^*}) \\ &\overset{(*)}{=} \varphi((h \rightharpoondown \alpha)) \end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando que a unidade de C^* é ε_C e em $(**)$ estamos usando que

$$\varphi(\beta)(h \triangleright \varphi(\alpha)) = \varphi(\beta(h \triangleright \varphi(\alpha)))$$

que provamos ao mostrar que $\varphi(C^*)$ é ideal de B.

E isso mostra que $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*.

$\square$

Reciprocamente, queremos mostrar que é possível dualizar uma globalização de um módulo álgebra parcial gerando uma globalização de um módulo coálgebra parcial. Para tal, tomaremos novamente $(C, \leftharpoondown)$ um H-módulo coálgebra parcial (à direita) e $(D, \blacktriangleleft)$ um H-módulo coálgebra (à direita). Como já foi observado, C^* é um H-módulo álgebra parcial (à esquerda) via

$$(h \rightharpoondown \alpha)(c) = \alpha(c \leftharpoondown h) \tag{4.8}$$

e, D^* um H-módulo álgebra (à direita) via

$$(h \triangleright \beta)(c) = \beta(c \blacktriangleleft h). \tag{4.9}$$

Também consideraremos $\theta : C \to D$ um monomorfismo de coálgebra e $\pi : D \to D$ uma projeção comultiplicativa sobre $\theta(C)$. Assim como antes, tomaremos monomorfismo multiplicativo

$$\begin{aligned} \varphi : C^* &\to D^* \\ \alpha &\mapsto \varphi(\alpha) = \alpha \circ \theta^{-1} \circ \pi. \end{aligned}$$

Além disso, notemos que existem as aplicações lineares dadas por:

$$\pi(d) \leftharpoonup_I h = \pi(\pi(d) \blacktriangleleft h) \tag{4.10}$$

e

$$h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha) = \varphi(\varepsilon)(h \rhd \varphi(\alpha)). \tag{4.11}$$

Como estamos lidando com a situação recíproca do Teorema 4.2.3, partiremos de uma globalização para um módulo álgebra parcial. Dessa forma, a equação (4.11) define uma ação induzida para o módulo álgebra global D^*. Em contrapartida, em (4.10) não podemos garantir que a aplicação $\leftharpoonup_I$ é induzida, portanto ela será vista apenas como uma aplicação linear. Usaremos essa aplicação para provar a condição (ii) da Definição 4.2.1.

Sob essas condições temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.4. *Se $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*, então $(\theta(C) \blacktriangleleft H, \theta, \pi)$ é uma globalização para C.*

Demonstração. Como $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*, então:

$$\varphi(h \rightharpoondown \alpha) = h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha) = \varphi(\varepsilon)(h \rhd \varphi(\alpha)). \tag{4.12}$$

Usando (4.12) é possível mostrar que $(h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha))(\pi(d)) = \varphi(\alpha)(\pi(d) \leftharpoondown_I h)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha))(\pi(d)) &\overset{(4.12)}{=} (\varphi(\varepsilon)(h \triangleright \varphi(\alpha)))(\pi(d)) \\
&\overset{(*)}{=} \varphi(\varepsilon)((\pi(d))_1)(h \triangleright \varphi(\alpha))((\pi(d))_2) \\
&\overset{(**)}{=} \varphi(\varepsilon)(\pi(d_1))(h \triangleright \varphi(\alpha))(\pi(d_2)) \\
&\overset{(4.9)}{=} \varphi(\varepsilon)(\pi(d_1))(\varphi(\alpha))(\pi(d_2) \blacktriangleleft h) \\
&\overset{\varphi}{=} \varepsilon(\theta^{-1}(\pi(\pi(d_1))))\alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(d_2) \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{\pi^2=\pi}{=} \varepsilon(\theta^{-1}(\pi(d_1)))\alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(d_2) \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{(***)}{=} \varepsilon(\pi(d_1))\alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(d_2) \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{(**)}{=} \varepsilon((\pi(d))_1)\alpha(\theta^{-1}(\pi((\pi(d))_2 \blacktriangleleft h))) \\
&= \alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(d) \blacktriangleleft h))) \\
&\overset{\pi^2=\pi}{=} \alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(\pi(d) \blacktriangleleft h)))) \\
&\overset{\varphi}{=} \varphi(\alpha)\pi(\pi(d) \blacktriangleleft h) \\
&\overset{(4.10)}{=} \varphi(\alpha)(\pi(d) \leftharpoondown_I h)
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto convolução em D^*, em $(**)$ estamos usando que π é comultiplicativa, e em $(***)$ estamos usando que θ é de coálgebra, portanto, θ^{-1} também é.

Logo, obtemos a identidade

$$(h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha))(\pi(d)) = \varphi(\alpha)(\pi(d) \leftharpoondown_I h). \tag{4.13}$$

Assim, estamos aptos para mostrar que $(\theta(C) \blacktriangleleft H, \theta, \pi)$ é uma globalização para C. Para tal, considere $E = \theta(C) \blacktriangleleft H$, naturalmente E é um H-módulo coálgebra global (à direita) via $\triangleleft$, dada por:

$$\theta(c) \blacktriangleleft h \triangleleft k = \theta(c) \blacktriangleleft h \blacktriangleleft k = \theta(c) \blacktriangleleft hk.$$

Além disso,

(i) $\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h) = \pi(e_2 \blacktriangleleft h)\varepsilon(\pi(e_1))$, pois aplicando $\alpha \circ \theta^{-1}$ em $\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h))) &\overset{\pi^2=\pi}{=} \alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h)))) \\
&\overset{(4.10)}{=} \alpha(\theta^{-1}(\pi(\pi(e) \leftharpoonup_I h))) \\
&\overset{\varphi}{=} \varphi(\alpha)(\pi(e) \leftharpoonup_I h) \\
&\overset{(4.13)}{=} (h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha))(\pi(e)) \\
&\overset{4.12}{=} \varphi(h \rightharpoondown \alpha)(\pi(e)) \\
&\overset{\varphi}{=} (h \rightharpoondown \alpha)(\theta^{-1}(\pi(\pi(e)))) \\
&\overset{\pi^2=\pi}{=} (h \rightharpoondown \alpha)(\theta^{-1}(\pi(e))) \\
&\overset{\varphi}{=} \varphi(h \rightharpoondown \alpha)(e) \\
&\overset{(4.12)}{=} (\varphi(\varepsilon)(h \triangleright \varphi(\alpha)))(e) \\
&\overset{(*)}{=} (\varphi(\varepsilon)(e_1)(h \triangleright \varphi(\alpha)))(e_2) \\
&\overset{\varphi}{=} \varepsilon(\theta^{-1}(\pi(e_1)))(h \triangleright \varphi(\alpha)))(e_2) \\
&\overset{(4.9)}{=} \varepsilon(\theta^{-1}(\pi(e_1)))(\varphi(\alpha))(e_2 \blacktriangleleft h) \\
&\overset{(**)}{=} \varepsilon(\pi(e_1))\alpha(\theta^{-1}(\pi(e_2 \blacktriangleleft h)))
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ estamos usando o produto definido em D^*, e em $(**)$ estamos usando que θ é de coálgebra, portanto, θ^{-1} também é.

Agora notemos que como a igualdade acima vale para todo $\alpha \in C^*$, obtemos

$$\theta^{-1}(\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h)) = \varepsilon(\pi(e_1))\theta^{-1}(\pi(e_2 \blacktriangleleft h))$$

e aplicando θ em ambos os lados dessa igualdade temos que

$$\pi(\pi(e) \blacktriangleleft h) = \varepsilon(\pi(e_1))\pi(e_2 \blacktriangleleft h),$$

pois, como $Im\pi = \theta(C) = Im\theta = Dom\theta^{-1}$, então,

$$\theta \circ \theta^{-1} = Id_{|_{Dom\theta^{-1}}} = Id_{|_{Im\pi}}.$$

(ii) $\theta(c \leftharpoonup h) = \theta(c) \leftharpoonup_i h$, pois aplicando $\alpha \circ \theta^{-1}$ no lado direito obtemos,

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \theta^{-1})(\theta(c) \leftharpoonup_i h) &\overset{(4.10)}{=} (\alpha \circ \theta^{-1})(\pi(\theta(c) \blacktriangleleft h)) \\
&\overset{\varphi}{=} \varphi(\alpha)(\theta(c) \blacktriangleleft h) \\
&= (h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c)) \\
&= (h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c_2))\varepsilon(c_1) \\
&= (h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c_2))\varepsilon(\theta^{-1}(\theta(c_1))) \\
&\overset{Im\theta \in \pi(D)}{=} (h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c_2))\varepsilon(\theta^{-1}(\pi(\theta(c_1)))) \\
&\overset{\varphi}{=} (h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c_2))\varphi(\varepsilon)(\theta(c_1)) \\
&\overset{(*)}{=} \varphi(\varepsilon)(\theta(c)_1)(h \triangleright \varphi(\alpha))(\theta(c)_2) \\
&\overset{(**)}{=} (\varphi(\varepsilon)(h \triangleright \varphi(\alpha)))(\theta(c)) \\
&\overset{(4.11)}{=} (h \rightharpoondown_i \varphi(\alpha))(\theta(c)) \\
&\overset{(***)}{=} \varphi(h \rightharpoondown \alpha)(\theta(c)) \\
&\overset{\varphi}{=} (h \rightharpoondown \alpha)(\theta^{-1}(\pi(\theta(c)))) \\
&\overset{Im\theta \in \pi(D)}{=} (h \rightharpoondown \alpha)(\theta^{-1}(\theta(c))) \\
&= (h \rightharpoondown \alpha)(c) \\
&\overset{(4.8)}{=} \alpha(c \leftharpoonup h) \\
&= \alpha(\theta^{-1}(\theta(c \leftharpoonup h)))
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ estamos usando que θ é de coálgebra, em $(**)$ estamos usando o produto convolução em D^* e em $(***)$ estamos usando que φ é globalização. Além disso, é necessário chamar a atenção que a primeira igualdade segue pelo fato de já termos mostrado que a aplicação linear $\leftharpoonup_i$ é de fato a ação induzida.

Dessa forma, $(\alpha \circ \theta^{-1})(\theta(c) \leftharpoonup_i h) = \alpha(\theta^{-1}(\theta(c \leftharpoonup h)))$, para todo $\alpha \in C^*$, o que implica que $(\theta(c) \leftharpoonup_i h) = (\theta(c \leftharpoonup h))$ como queríamos mostrar.

□

É necessário ressaltar que todos os pensamentos e ideias das demonstrações dessa seção são baseados nos resultados apresentados em [9], por F. Castro.

4.2.2 Construindo uma Globalização

Consideremos C um H-módulo coálgebra parcial à direita. Em [9], F. Castro construiu um globalização padrão para C, com H um álgebra de Hopf via às aplicações

$$\begin{aligned} \theta : C &\rightarrow C \otimes H \\ c &\mapsto c \otimes 1_H \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi : C \otimes H &\rightarrow \theta(C) \\ c \otimes h &\mapsto c \leftharpoonup h \otimes 1_H \end{aligned}$$

sendo θ um monomorfismo de coálgebras e π uma projeção comultiplicativa. Todavia, para o caso de álgebra de Hopf fraca, como o elemento 1_H não é um group-like (isto é, $\Delta(1_H) \neq 1_H \otimes 1_H$) as aplicações θ e π não satisfazem tais propriedades. Portanto, é natural considerarmos uma hipótese adicional para essa álgebra de Hopf fraca, como podemos ver no resultado a seguir.

Teorema 4.2.5. *Suponha que C é um H-módulo coálgebra parcial para H uma álgebra de Hopf fraca que possui um elemento $e \in H$ que satisfaz*

$$\Delta(e) = e \otimes e \tag{4.14}$$

$$c \leftharpoonup he = c \leftharpoonup eh = c \leftharpoonup h, \tag{4.15}$$

para todo $c \in C$. Então C possui uma globalização.

Demonstração. Definiremos

$$\begin{aligned} \theta : C &\to C \otimes H \\ c &\mapsto c \otimes e, \end{aligned}$$

então θ é injetivo, pois como e é group-like $\varepsilon(e) = 1_{\Bbbk}$. Também temos que θ é de coálgebras, pois $\varepsilon(\theta(c)) = \varepsilon(c \otimes e) = \varepsilon(c)\varepsilon(e) = \varepsilon(c)$, e

$$\begin{aligned} (\theta \otimes \theta)\Delta(c) &= \theta(c_1) \otimes \theta(c_2) \\ &= c_1 \otimes e \otimes c_2 \otimes e \\ &= (c \otimes e)_1 \otimes (c \otimes e)_2 \\ &= \Delta(\theta(c)). \end{aligned}$$

Além disso, note que essa última igualdade é satisfeita se, e somente se, e é group-like.

Definiremos

$$\begin{aligned} \pi : C \otimes H &\to \theta(C) \\ c \otimes h &\mapsto c \leftharpoonup h \otimes e \end{aligned}$$

então π é projeção comultiplicativa. De fato, podemos ver $(C \otimes H)$ como uma coálgebra com comultiplicação $\Delta(c \otimes h) = (c_1 \otimes h_1) \otimes (c_2 \otimes h_2)$. Assim,

1. $(\pi \otimes \pi)(\Delta(c \otimes h)) = \Delta(\pi(c \otimes h))$, pois

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi)(\Delta(c \otimes h)) &= (\pi \otimes \pi)((c \otimes h)_1 \otimes (c \otimes h)_2) \\
&= \pi(c_1 \leftharpoondown h_1) \otimes \pi(c_2 \leftharpoondown h_2) \\
&= c_1 \leftharpoondown h_1 \otimes e \otimes c_2 \leftharpoondown h_2 \otimes e \\
&= \Delta(c \leftharpoondown h \otimes e) \\
&= \Delta(\pi(c \otimes h)).
\end{aligned}$$

2. $\pi(\pi(c \otimes h)) = \pi(c \otimes h)$, pois

$$\begin{aligned}
\pi(\pi(c \otimes h)) &= (c \leftharpoondown h) \leftharpoondown e \otimes e \\
&= \varepsilon(c_1 \leftharpoondown h_1)(c_2 \leftharpoondown h_2 e) \otimes e \\
&\overset{4.15}{=} \varepsilon(c_1 \leftharpoondown h_1)(c_2 \leftharpoondown h_2) \otimes e \\
&= c \leftharpoondown h \otimes e \\
&= \pi(c \otimes h).
\end{aligned}$$

3. $\pi(\theta(c)) = \theta(c)$, pois $\theta(c) = c \otimes e = c \leftharpoondown 1_H \otimes e = \pi(c \otimes 1_H)$, então:

$$\pi(\theta(c)) = \pi(\pi(c \otimes 1_H)) = \pi(c \otimes 1_H) = \theta(c).$$

4. $\pi(\pi(c \otimes h) \blacktriangleleft g) = \varepsilon(\pi(c_1 \otimes h_1))\pi((c_2 \otimes h_2) \blacktriangleleft g)$, onde $C \otimes H$ é visto como um H-módulo coálgebra à direita via o produto no último fator. Basta notar que

$$\begin{aligned}
\pi(\pi(c \otimes h) \blacktriangleleft g) &= \pi((c \leftharpoondown h \otimes e) \blacktriangleleft g) \\
&= \pi(c \leftharpoondown h \otimes eg) \\
&= c \leftharpoondown h \leftharpoondown eg \otimes e \\
&\overset{(4.15)}{=} c \leftharpoondown h \leftharpoondown g \otimes e \\
&= \varepsilon(c_1 \leftharpoondown h_1)(c_2 \leftharpoondown h_2 g) \otimes e
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\varepsilon(e)=1_{\Bbbk}}{=} && \varepsilon(c_1 \leftharpoonup h_1 \otimes e)(c_2 \leftharpoonup h_2 g) \otimes e \\
&= && \varepsilon(c_1 \leftharpoonup h_1 \otimes e)\pi(c_2 \otimes h_2 g) \\
&= && \varepsilon(\pi(c_1 \otimes h_1))\pi((c_2 \otimes h_2) \blacktriangleleft g).
\end{aligned}
$$

5. $\theta(c) \leftharpoonup_i h = \theta(c \leftharpoonup h)$, pois

$$
\begin{aligned}
\theta(c) \leftharpoonup_i h &= \pi(\theta(c) \blacktriangleleft h) \\
&= \pi((c \otimes e) \blacktriangleleft h) \\
&= \pi(c \otimes eh) \\
&= c \leftharpoonup eh \otimes e \\
&\overset{(4.15)}{=} c \leftharpoonup h \otimes e \\
&= \theta(c \leftharpoonup h).
\end{aligned}
$$

E isso finaliza a demonstração. $\square$

Chamaremos a globalização apresentada no Teorema 4.2.5 de globalização padrão. Vejamos agora um exemplo que ilustra uma globalização padrão.

Exemplo 4.2.6. Considere $\Bbbk\mathcal{G}$ com $\mathcal{G}$ um grupoide dado pela união disjunta dos grupos G_1 e G_2. Considere

$$
\lambda(\delta_g) = \begin{cases} 1_{\Bbbk}, & se\ g = e_1 \\ 0, & se\ g \neq e_1. \end{cases}
$$

Dessa forma, basta tomar o group-like δ_{e_1} e a ação parcial $c \leftharpoonup \delta_g = c\lambda(\delta_g)$. Como $\lambda(\delta_g) = \lambda(\delta_{e_1}\delta_g) = \lambda(\delta_g\delta_{e_1})$, segue que essa ação parcial é globalizável.

Assim como F. Castro apresentou no Teorema 2.2.5 em [9], temos também para o nosso caso uma relação entre a globalização padrão apresentada nessa seção e a globalização padrão apresentada na Proposição 2.4.3 em [18].

Proposição 4.2.7. *Suponha que C é um H-módulo coálgebra parcial para H uma álgebra de Hopf fraca que possui um elemento $e \in H$ que satisfaz*

$$\Delta(e) = e \otimes e$$

$$c \leftharpoonup he = c \leftharpoonup eh = c \leftharpoonup h,$$

para todo $c \in C$. Então a globalização padrão para C é dual da globalização padrão para C^* como um H-módulo álgebra parcial.

Demonstração. Considerando as aplicações

$$\begin{aligned} \theta : C &\rightarrow C \otimes H \\ c &\mapsto c \otimes e, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi : C \otimes H &\rightarrow \theta(C) \\ c \otimes h &\mapsto c \leftharpoonup h \otimes e \end{aligned}$$

apresentadas no Teorema 4.2.5 , podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : C^* &\rightarrow (C \otimes H)^* \\ \alpha &\mapsto \varphi(\alpha) = \alpha \circ \theta^{-1} \circ \pi. \end{aligned}$$

igualmente definida para o Teorema 4.2.3. Então nós temos que $(H \triangleright \varphi(C^*), \varphi)$ é uma globalização para C^*, onde a ação em $(C \otimes H)^*$ é dada por

$$(h \triangleright f)(c \otimes k) = f(c \otimes kh)$$

onde $f \in (C \otimes H)^*$. Considerando o isomorfismo de álgebras dado por

$$\psi : (C \otimes H)^* \rightarrow Hom(H, C^*)$$

$$f \mapsto [\psi(f)(h)](c) = f(c \otimes h)$$

é um morfismo de H-módulos da mesma forma que F. Castro apresentou em [9], ou seja,

$$\begin{aligned}
[\psi(h \triangleright f)(k)](c) &= [h \triangleright f](c \otimes k) \\
&= f(c \otimes kh) \\
&= [\psi(f)(kh)](c) \\
&= [(h \triangleright \psi(f))(k)](c)
\end{aligned}$$

para todo $c \in C$, portanto, $\psi(h \triangleright f)(k) = (h \triangleright \psi(f))(k)$, para todo $h \in H$, $f \in (C \otimes H)^*$ e $h \in H$.

Além disso, obtemos que

$$\begin{aligned}
[\psi(\varphi(\alpha))(h)](c) &= \varphi(\alpha)(c \otimes h) \\
&= \alpha(\theta^{-1}(\pi(c \otimes h))) \\
&= \alpha(\theta^{-1}(c \leftharpoondown h \otimes e)) \\
&= \alpha(c \leftharpoondown h) \\
&\overset{(4.8)}{=} (h \rightharpoondown \alpha)(c) \\
&= [\phi(\alpha)(h)](c),
\end{aligned}$$

sendo $\phi : C^* \to Hom(H, C^*)$ dada por $\phi(\alpha)(h) = h \rightharpoondown \alpha$ que é o monomorfismo apresentado por G. Quadros em [18]. O que finaliza o resultado.

$\square$

4.3 Globalização para Comódulo Coálgebra Parcial

Na Seção 3.4 vimos que dado um H-módulo coálgebra (global), podemos, sob certas condições, induzir um H-comódulo coálgebra parcial. Podemos pensar agora na recíproca dessa situação. Sob essa motivação, apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.3.1 (*Globalização para comódulo coálgebra parcial*)**.** Seja H uma álgebra de Hopf fraca e $(C, \overline{\rho})$ um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda). Uma globalização de C é uma tripla (D, θ, π), onde:

- D é um H-comódulo coálgebra (à esquerda)
- $\theta : C \to D$ é monomorfismo de coálgebras
- $\pi : D \to D$ é projeção comultiplicativa de D sobre $\theta(C)$, tais que:

(i) $\pi(d)^{-1} \otimes \pi(\pi(d)^0) = d_2^{-1} \otimes \varepsilon(\pi(d_1))\pi(d_2^0)$.

(ii) θ é uma equivalência de H-comódulo coálgebra parcial.

(iii) D é uma H-comódulo gerado por $\theta(C)$.

Observação 4.3.2. 1. π é projeção no sentido que

(a) $\pi \circ \pi = \pi$

(b) $Im\pi = \theta(C)$.

Assim, note que, para todo $e \in \theta(C)$ temos que $\pi(e) = e$.

2. A projeção π é dita comultiplicativa se satisfaz

$$(\pi \otimes \pi)\Delta(d) = \Delta(\pi(d)), \forall d \in D.$$

3. A aplicação θ é dita de coálgebras, quando satisfizer

$$(\theta \otimes \theta)\Delta(c) = \Delta(\theta(c)), \forall c \in C,$$

e, também

$$\varepsilon(\theta(c)) = \varepsilon(c), \forall c \in C.$$

4. Dizer que θ é uma equivalência de H-comódulo coálgebra parcial, significa dizer que satisfaz

$$\theta(c)^{-1} \otimes \pi(\theta(c)^0) = \overline{c^{-1}} \otimes \theta(\overline{c^0}).$$

5. Dizer que D é um H-comódulo gerado por $\theta(C)$ significa dizer que não existe subcomódulo de D que contém $\theta(C)$, ou seja, $\rho(\theta(C)) = H \otimes D$.

Assim como fizemos para o caso de globalização de um H-módulo coálgebra parcial, para a globalização de um H-comódulo coálgebra parcial podemos seguir os passos apresentados F. Castro em [9]. Portanto, as seções seguintes serão destinadas a mostrar uma relação biunívoca entre globalizações de comódulo álgebra parcial e comódulo coálgebra parcial, bem como, para apresentar sob quais hipóteses um H-comódulo coálgebra parcial possui uma globalização como a apresentada na Definição 4.3.1.

4.3.1 Equivalência entre Globalizações

No que segue, assumiremos que H é uma álgebra de Hopf fraca de dimensão finita sobre o corpo $\Bbbk$.

Suponhamos $(C, \overline{\rho})$ seja um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda). Já sabemos que $(C, \leftharpoonup)$ é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita), pelo Teorema 4.1.3. Nessa seção investigaremos se, dada uma globalização $((D, \rho), \theta, \pi)$ para C

(como um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda)), existe uma globalização pra C como um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita).

Dessa forma, se denotarmos a coação parcial de H sobre C por $\overline{\rho}(c) = c^{\overline{-1}} \otimes c^{\overline{0}}$, sabemos que C é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita) via

$$(c \leftharpoonup f) = f(c^{\overline{-1}})c^{\overline{0}} \tag{4.16}$$

e, se $\rho(d) = d^{-1} \otimes d^0$, então $(D, \blacktriangleleft)$ é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita) via

$$(d \blacktriangleleft f) = f(d^{-1})d^0 \tag{4.17}$$

Além disso, como $\theta : C \to D$ é um monomorfismo de coálgebra e $\pi : D \to D$ é uma projeção comultiplicativa, podemos induzir uma estrutura de H^*- módulo coálgebra parcial em $\theta(C)$. Basta ver que

$$\begin{aligned} \pi(\pi(d) \blacktriangleleft f) &= f(\pi(d)^{-1})\pi(\pi(d)^0) \\ &\overset{4.3.1}{=} f({d_2}^{-1})\pi({d_2}^0)\varepsilon(\pi(d_1)) \\ &= \pi(f({d_2}^{-1}){d_2}^0)\varepsilon(\pi(d_1)) \\ &= \pi(d_2 \blacktriangleleft f)\varepsilon(\pi(d_1)) \end{aligned}$$

para todo elemento $d \in D$, em particular, para os elementos de $\theta(C)$.

Agora, podemos mostrar que θ é um morfismo de ações parciais, isto é, $\theta(c) \leftharpoonup_i f = \theta(c \leftharpoonup f)$.

$$\begin{aligned} \theta(c) \leftharpoonup_i f &\overset{(*)}{=} \pi(\theta(c) \blacktriangleleft f) \\ &= f(\theta(c)^{-1})\pi(\theta(c)^0) \\ &\overset{4.3.1}{=} f(c^{\overline{-1}})\theta(c^{\overline{0}}) \\ &= \theta(f(c^{\overline{-1}})c^{\overline{0}}) \end{aligned}$$

$$= \quad \theta(c \leftharpoonup f)$$

sendo que em $(*)$ estamos usando a definição de ação induzida apresentação na Seção 2.4.

Teorema 4.3.3. *Se C é um H-comódulo coálgebra partial (à esquerda) e (D, θ, π) é uma globalização para C, então (D, θ, π) é uma globalização para C como um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita).*

Demonstração. Já mostramos que

$$\pi(\pi(d) \blacktriangleleft f) \quad = \quad \pi(d_2 \blacktriangleleft f)\varepsilon(\pi(d_1))$$

para todo elemento $d \in D$ e $f \in H^*$ e que

$$\theta(c) \leftharpoonup_i f \quad = \quad \theta(c \leftharpoonup f)$$

para todo elemento $c \in C$ e $f \in H^*$. Então, basta mostrarmos que $\theta(C) \blacktriangleleft H^* = D$. Consideremos M um H^*-submódulo coálgebra de D que contém $\theta(C)$. A ideia é mostrarmos que $M = D$. Para isso, mostraremos que M é um H-subcomódulo coálgebra de D. Dessa forma, pela definição 4.3.1, concluiremos que $M = D$.

Sejam $m \in M$ e $\{h_i\}_{i=1}^n$ base de H. Portanto, $\{h_i{}^*\}_{i=1}^n$ é base de H^*. Tomamos a coação (herdada de D)

$$\rho(m) = \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes m_i,$$

sendo que o lado esquerdo do produto tensorial é base de H e os elementos $m_1, ..., m_k$ são todos distintos de zero. Sabemos que D é um H^*-módulo coálgebra via (4.17) e M é um H^*-submódulo coálgebra de D, assim

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} h_j{}^*(h_i)m_i = m \blacktriangleleft h_j{}^* \in M \blacktriangleleft H^* \subseteq M.$$

Logo, $\rho(m) \in H \otimes M$, o que implica que M é um H-subcomódulo coálgebra de D contendo $\theta(C)$. Dessa forma concluímos que $M = D$, portanto, (D, θ, π) é uma globalização para C como um H^*-módulo coálgebra (à direita). $\square$

Novamente, chamamos atenção para o fato que todos os pensamentos e ideias das demonstrações dessa seção são baseados nos resultados apresentados em [9], por F. Castro.

4.3.2 Construindo uma Globalização

Em [9], F. Castro ao construir uma globalização para um H-comódulo coálgebra parcial precisou da noção de módulo racional. Dessa forma, começamos recordando que se M é um H^*-módulo (à direita), então existe uma aplicação linear

$$\varphi : M \to Hom_{\Bbbk}(H^*, M)$$

dada por $\varphi(m)(f) = m \leftharpoonup f$, e uma outra aplicação linear injetiva

$$\psi : H \otimes M \to Hom_{\Bbbk}(H^*, M)$$

dada por $\psi(h \otimes m)(f) = f(h)m$. Sob tais condições, dizemos que M é um H^*-*módulo racional* se $\varphi(M) \subseteq \psi(H \otimes M)$. Assim, dado um H^*-módulo racional, nós temos uma estrutura de H-comódulo (à esquerda) em M satisfazendo

$$\rho(m) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes m_i \Leftrightarrow m \leftarrow f = \sum_{i=1}^{n} f(h_i)m_i, \tag{4.18}$$

para todo $f \in H^*$.

Dado (C, $\overline{\rho}$) um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) nós sabemos, pelo Teorema 4.1.3, que $(C, \leftharpoonup)$ é um H^*-módulo coálgebra parcial (à direita). E, pelo

Teorema 4.2.5, sabemos que, sob certas condições, $(C\otimes H^*, \theta, \pi)$ é uma globalização para $(C, \leftharpoonup)$.

Lembremos que, pelo Teorema 4.2.5, $C \otimes H^*$ é uma globalização para $(C, \leftharpoonup)$ cuja ação de H^* é dada por

$$(c \otimes f) \blacktriangleleft g = c \otimes (fg).$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.3, $C \otimes H^*$ é um H-comódulo coálgebra (à esquerda) via

$$\rho(c \otimes f) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes c \otimes (f{h_i}^*).$$

Observação 4.3.4. 1. É possível mostrar que $C \otimes H^*$ é um H^*-módulo racional, pois

$$\begin{aligned} c \otimes f \blacktriangleleft g &= c \otimes (fg) \\ &\overset{(*)}{=} c \otimes (f \sum_{i=1}^{n} g(h_i){h_i}^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(h_i)(c \otimes f{h_i}^*) \end{aligned}$$

sendo que $(*)$ segue da existência da base dual. Portanto, $\rho(c\otimes f) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes c \otimes (f{h_i}^*)$ implica que $c \otimes f \blacktriangleleft g = \sum_{i=1}^{n} g(h_i)(c \otimes f{h_i}^*)$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} c \otimes f \blacktriangleleft g &= c \otimes (fg) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(h_i)(c \otimes f{h_i}^*) \end{aligned}$$

então, pelo Teorema 4.1.3, obtemos que $\rho(c \otimes f) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes c \otimes (f{h_i}^*)$.

2. Suponhamos que C é um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) tal que existe $l \in H^*$ satisfazendo

(i) $\Delta(l) = l \otimes l$

(ii) $\varepsilon(l) = 1_{\Bbbk}$

(iii) $\overline{c^{-1}} \otimes \overline{c^0} = l(\overline{c^{-1}}_1)(\overline{c^{-1}}_2 \otimes \overline{c^0}) = l(\overline{c^{-1}}_2)(\overline{c^{-1}}_1 \otimes \overline{c^0})$.

Isso implica que, para todo $f \in H^*$

$$f(\overline{c^{-1}})\overline{c^0} = l(\overline{c^{-1}}_1)f(\overline{c^{-1}}_2)\overline{c^0} = l(\overline{c^{-1}}_2)f(\overline{c^{-1}}_1)\overline{c^0}.$$

Ou seja, usando o Teorema 4.1.3, existe $l \in H^*$ tal que

$$c \leftharpoonup f = c \leftharpoonup lf = c \leftharpoonup fl. \tag{4.19}$$

Portanto, pelo Teorema 4.2.5, $(C \otimes H^*, \theta, \pi)$ é uma globalização para C, como um H^*-módulo coálgebra parcial, onde

$$\theta(c) = c \otimes l \qquad \text{e} \qquad \pi(c \otimes f) = c \leftharpoonup f \otimes l.$$

Teorema 4.3.5. *Seja C um H-comódulo coálgebra parcial (à esquerda) tal que existe $l \in H^*$ satisfazendo*

(i) $\Delta(l) = l \otimes l$

(ii) $\varepsilon(l) = 1_{\Bbbk}$

(iii) $\overline{c^{-1}} \otimes \overline{c^0} = l(\overline{c^{-1}}_1)(\overline{c^{-1}}_2 \otimes \overline{c^0}) = l(\overline{c^{-1}}_2)(\overline{c^{-1}}_1 \otimes \overline{c^0})$.

Então $(C \otimes H^*, \theta, \pi)$ é uma globalização para $(C, \overline{\rho})$.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\pi(c \otimes f)^{-1} \otimes \pi(\pi(c \otimes f)^0) = (c \otimes f)_2{}^{-1} \otimes \varepsilon(\pi((c \otimes f)_1))\pi((c \otimes f)_2{}^0)$. De fato,

$$(g \otimes I)[\pi(c \otimes f)^{-1} \otimes \pi(\pi(c \otimes f)^0)]$$

$$
\begin{aligned}
&= (g\otimes I)[(c \leftharpoondown f\otimes l)^{-1}\otimes \pi((c\leftharpoondown f\otimes l)^0)]\\
&= (g\otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i\otimes \pi(c\leftharpoondown f\otimes lh_i{}^*)]\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(h_i)(c\leftharpoondown f\leftharpoondown lh_i{}^*\otimes l)\\
&= (c\leftharpoondown f\leftharpoondown l\sum_{i=1}^{n} g(h_i)h_i{}^*\otimes l)\\
&\overset{(*)}{=} (c\leftharpoondown f\leftharpoondown lg\otimes l)\\
&\overset{4.3.4}{=} (c\leftharpoondown f\leftharpoondown g\otimes l)\\
&\overset{(MPC3)}{=} \varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)(c_2\leftharpoondown f_2g\otimes l)\\
&= \varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)\pi(c_2\otimes f_2g)\\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)\pi(c_2\otimes f_2\sum_{i=1}^{n} g(h_i)h_i{}^*)\\
&= \varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)\sum_{i=1}^{n} g(h_i)\pi(c_2\otimes f_2h_i{}^*)\\
&= (g\otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i\otimes \pi(\varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)(c_2\otimes f_2h_i{}^*))]\\
&= (g\otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i\otimes \pi(\varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1)\varepsilon(l)(c_2\otimes f_2h_i{}^*))]\\
&= (g\otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i\otimes \pi(\varepsilon(c_1\leftharpoondown f_1\otimes l)(c_2\otimes f_2h_i{}^*))]\\
&= (g\otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i\otimes \pi(\varepsilon(\pi(c_1\otimes f_1))(c_2\otimes f_2h_i{}^*))]\\
&= (g\otimes I)[(c_2\otimes f_2)^{-1}\otimes \varepsilon(\pi((c_1\otimes f_1)))\pi((c_2\otimes f_2)^0)]\\
&= (g\otimes I)[(c\otimes f)_2{}^{-1}\otimes \varepsilon(\pi((c\otimes f)_1))\pi((c\otimes f)_2{}^0)]
\end{aligned}
$$

sendo que em $(*)$ usamos a base dual.

Agora, vamos mostrar que θ é uma equivalência de H-comódulo coálgebra parcial, isto é, $\theta(c)^{-1} \otimes \pi(\theta(c)^0) = \overline{c^{-1}} \otimes \theta(\overline{c^0})$. Para tal, notemos que para todo $g \in H^*$

$$\begin{aligned}
(g \otimes I)[\overline{c^{-1}} \otimes \theta(\overline{c^0})] &= g(\overline{c^{-1}})\theta(\overline{c^0}) \\
&= g(\overline{c^{-1}})(\overline{c^0} \otimes l) \\
&\overset{4.1.3}{=} c \leftharpoonup g \otimes l \\
&\overset{(4.19)}{=} c \leftharpoonup lg \otimes l \\
&\overset{(*)}{=} c \leftharpoonup l \sum_{i=1}^{n} g(h_i){h_i}^* \otimes l \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(h_i) c \leftharpoonup l{h_i}^* \otimes l \\
&= (g \otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes c \leftharpoonup l{h_i}^* \otimes l] \\
&= (g \otimes I)[\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes \pi(c \otimes l{h_i}^*)] \\
&= (g \otimes I)[(I \otimes \pi) \sum_{i=1}^{n} (h_i \otimes c \otimes l{h_i}^*)] \\
&= (g \otimes I)[(I \otimes \pi)\rho(c \otimes l)] \\
&= (g \otimes I)[(I \otimes \pi)\rho(\theta(c))] \\
&= (g \otimes I)[\theta(c)^{-1} \otimes \pi(\theta(c)^0)],
\end{aligned}$$

sendo que em $(*)$ usamos a base dual. Portanto segue que θ é uma equivalência de H-comódulo coálgebra parcial.

Para finalizar, basta mostrar que $C \otimes H^*$ é um H-comódulo gerado por $\theta(C)$. Suponha que M é um H-subcomódulo coálgebra de $C \otimes H^*$ que contém $\theta(C)$. Então, pelo Teorema 4.1.3, M é um H^*-submódulo coálgebra que contém $\theta(C)$. Todavia, pela Observação 4.3.4, sabemos que $(C \otimes H^*, \theta, \pi)$ é uma globalização para C, como um H^*-módulo coálgebra parcial, portanto, $M = C \otimes H^*$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. Alves, E. Batista, Enveloping actions for partial Hopf actions. Communications in Algebra 38, 2872 - 2902, 2010.

[2] M. Alves, E. Batista, Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications, Contemporary Mathematics 537, 13-30, 2011.

[3] D. Bagio, A. Paques, Partial grupoide actions: globalization, Morita theory, and Galois theory, Communications in Algebra 40, (10) 3658 - 3678, 2012.

[4] E. Batista, J. Vercruysse, Dual constructions for partial actions of Hopf algebras, Journal of Pure and Applied Algebra 220 (2) , 518-559, 2016.

[5] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf Algebras I: Integral Theory and C^*-Structure. Journal of Algebra 221 (2), 385-438, 1999.

[6] G. Böhm, Doi-Hopf modules over weak Hopf algebras. Communications in Algebra, 28, 4687 - 4698, 2000.

[7] S. Caenepeel, E. De Groot, Modules Over Weak Entwining Structures in "New trends Hopf Algebra Theory", Contemporary Mathematics 267 , 31-54, 2000.

[8] S. Caenepeel, K. Janssen, Partial (Co)Actions of hopf algebras and Partial Hopf-Galois Theory, Communications in Algebra 36:8, 2923-2946, 2008.

[9] F. Castro, On Partial (Co)Actions on Coalgebras: Globalizations and Some Galois Theory. Tese de doutorado, UFRGS, 2015.

[10] F. Castro, A. Paques, G. Quadros, A. Sant'Ana, Partial actions of weak Hopf algebras: smash products, globalization and Morita theory, Journal of Pure and Applied Algebra 29, 5511 - 5538, 2015.

[11] F. Castro, G. Quadros, Globalizations for partial (co)actions on coalgebras, http://arxiv.org/abs/1510.01388v1.

[12] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, Hopf algebras: An Introduction, Marcel Dekker, A Series of Monographs and Textbooks, 2001.

[13] M. Dokuchaev, R. Exel, Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (5) 1931-1952, 2005.

[14] M. Dokuchaev, M. Ferrero, A. Paques, Partial Actions and Galois Theory, Journal of Pure and Applied Algebra 208 (1) 77-87, 2007.

[15] R. Exel, Circle Actions on C^*-Algebras, Partial Automorphisms and Generalized PimsnerVoiculescu Exect Sequences, J. Funct. Anal.122 (3) 361-401, 1994.

[16] R. Exel, Partial Actions of Groups and Actions of Semigroups, Proc. Am. Math. Soc. 126 (12), 3481-3494, 1998.

[17] D. Flôres, Ações de grupoides sobre álgebras: Teoremas de Estrutura. Tese de doutorado, UFRGS, 2011.

[18] G. Quadros, Partial (co)actions of weak Hopf algebras: globalizations, Galois theory and Morita theory. Tese de doutorado, UFRGS, 2016.

[19] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[20] D. Radford, Hopf algebras, Series on Knots and Everything. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (42), 2012.

[21] M. Sweedler, Hopf algebras, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[22] Yu. Wang, L. Yu. Zhang, The Structure Theorem for Weak Module Coalgebras, Mathematical Notes 88 (1), 3 - 17, 2010.