

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**MODOS EM VIGAS COM SECÇÃO TRANSVERSAL DE
VARIAÇÃO LINEAR**

por

JOVITA RASCH BRACHT JUVER

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre

Mai de 2002

MODOS EM VIGAS COM SECÇÃO TRANSVERSAL DE VARIAÇÃO LINEAR

por

JOVITA RASCH BRACHT JUVER
Bacharel em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Controle de Sinais

Orientador: Prof. Dr. Tereza Tsukazan de Ruiz

Aprovada por:

Prof. Dr. German Canahualpa Suazo

Prof. Dra. Liliane B. Barichello

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Maio de 2002

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é a obtenção dos modos e as frequências naturais de vigas de variação linear e em forma de cunha, com condições de contorno clássicas e não-clássicas, descritas pelo modelo estrutural de Euler-Bernoulli. A forma dos modos foi determinado com o uso das funções cilíndricas. No caso forçado se considera uma força harmônica pontual e se resolve o problema pelo método espectral, utilizando o software simbólico MapleV5. Realiza-se uma análise comparativa dos resultados obtidos com os resultados existentes na literatura para vigas uniformes.

ABSTRACT

TITLE: “MODES IN BEAMS WITH LINEAR VARIATION OF TRANSVERSAL PROPERTIES”

The aim of this work is the attainment of modes and natural frequencies of linear variation transversal properties and wedge-type beams, with classical and non-classical boundary conditions, described by the structural Euler-Bernoulli model. In the forced case, it is considered a point harmonic force and the problem was solved through the spectral method, using symbolic software MapleV5. It was performed a comparative analysis of current results with the existing ones found in the literature for uniform beams.

ÍNDICE

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | MODELAGEM | 4 |
| 1.1 | Equação de Bernoulli | 4 |
| 1.2 | Condições Iniciais e de Contorno | 4 |
| 2 | FREQÜÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO | 6 |
| 2.1 | Freqüências Características | 6 |
| 2.2 | Ortogonalidade | 7 |
| 3 | VIBRAÇÕES FORÇADAS | 9 |
| 3.1 | Método espectral | 9 |
| 4 | ESTUDO DAS EQUAÇÕES | 11 |
| 4.1 | Equação de Bessel | 11 |
| 4.2 | Equação Modal para Vigas com Variação Linear na Seção Transversal | 15 |
| 4.3 | Equação Modal para Vigas em Forma de Cunha | 18 |
| 4.4 | Condições de Contorno | 19 |
| 5 | CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS COM VARIAÇÃO LINEAR NA SEÇÃO TRANSVERSAL COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS | 21 |
| 5.1 | Valores Numéricos dos Parâmetros | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.2 | Caso 1: Viga Apoiada-Fixa | 23 |
| 5.3 | Caso 2: Viga Fixa-Apoiada | 27 |
| 5.4 | Caso 3: Viga Apoiada-Apoiada | 31 |
| 5.5 | Caso 4: Viga Fixa-Fixa | 35 |
| 5.6 | Caso 5: Viga Fixa-Livre | 39 |
| 5.7 | Caso 6: Viga Livre-Fixa | 43 |
| 6 | CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS COM VARIAÇÃO LINEAR NA SEÇÃO TRANSVERSAL COM MOLA NUMA EXTREMIDADE | 47 |
| 6.1 | Caso 7: Viga Mola-Apoiada | 48 |
| 6.2 | Caso 8: Viga Mola-Fixa | 51 |
| 6.3 | Caso 9: Viga Fixa-Mola | 54 |
| 6.4 | Caso 10: Viga Apoiada-Mola | 57 |
| 7 | CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS EM FORMA DE CUNHA | 60 |
| 7.1 | Caso 1: Viga Apoiada-Fixa | 61 |
| 7.2 | Caso 2: Viga Fixa-Apoiada | 65 |
| 7.3 | Caso 3: Viga Apoiada-Apoiada | 69 |
| 7.4 | Caso 4: Viga Fixa-Fixa | 73 |
| 7.5 | Caso 5: Viga Fixa-Livre | 77 |

| | |
|---------------------------------------|----|
| 7.6 Caso 6: Viga Livre-Fixa | 81 |
| 8 CONCLUSÕES | 85 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 86 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 4.1 | <i>Esquema de uma viga com variação linear na seção transversal</i> | 15 |
| Figura 5.1 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-fixo de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 24 |
| Figura 5.2 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-fixa</i> | 25 |
| Figura 5.3 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-fixa</i> | 26 |
| Figura 5.4 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-apoiado.</i> | 28 |
| Figura 5.5 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-apoiada</i> | 29 |
| Figura 5.6 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-apoiada</i> | 30 |
| Figura 5.7 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-apoiado.</i> | 32 |
| Figura 5.8 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-apoiada</i> | 33 |
| Figura 5.9 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-apoiada</i> | 34 |
| Figura 5.10 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-fixo.</i> | 36 |
| Figura 5.11 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-fixa</i> | 37 |
| Figura 5.12 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-fixa</i> | 38 |
| Figura 5.13 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-livre.</i> | 40 |
| Figura 5.14 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-livre</i> | 41 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 5.15 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-livre</i> | 42 |
| Figura 5.16 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos livre-fixo.</i> | 44 |
| Figura 5.17 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga livre-fixa</i> | 45 |
| Figura 5.18 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga livre-fixa</i> | 46 |
| Figura 6.1 | <i>Modos da viga mola-apoiada $X(x)$ para diversos valores de ξ_0 (6 modos)</i> | 49 |
| Figura 6.2 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ para uma viga mola-apoiada</i> | 50 |
| Figura 6.3 | <i>Modos $X(x)$ para a viga mola-fixa</i> | 52 |
| Figura 6.4 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ para a viga mola-fixa</i> | 53 |
| Figura 6.5 | <i>Modos $X(x)$ para a viga fixa-mola</i> | 55 |
| Figura 6.6 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ para a viga fixa-mola</i> | 56 |
| Figura 6.7 | <i>Modos $X(x)$ para a viga apoiada-mola</i> | 58 |
| Figura 6.8 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-mola (6 modos)</i> | 59 |
| Figura 7.1 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-fixo de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 62 |
| Figura 7.2 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-fixa</i> | 63 |
| Figura 7.3 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-fixa</i> | 64 |
| Figura 7.4 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-apoiado de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 66 |
| Figura 7.5 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-apoiada</i> | 67 |

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 7.6 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-apoiada</i> | 68 |
| Figura 7.7 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-apoiado de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 70 |
| Figura 7.8 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-apoiada</i> | 71 |
| Figura 7.9 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-apoiada</i> | 72 |
| Figura 7.10 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-fixo de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 74 |
| Figura 7.11 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-fixa</i> | 75 |
| Figura 7.12 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-fixa</i> | 76 |
| Figura 7.13 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-livre de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 78 |
| Figura 7.14 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-livre</i> | 79 |
| Figura 7.15 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-livre</i> | 80 |
| Figura 7.16 | <i>Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos livre-fixo de b_0/b_1 vs. β^*.</i> | 82 |
| Figura 7.17 | <i>Modos normalizados $X(x)$ para a viga livre-fixa</i> | 83 |
| Figura 7.18 | <i>Vibração forçada $u(x, t)$ da viga livre-fixa</i> | 84 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | | |
|------------|---|----|
| Tabela 1.1 | Tabela da condições iniciais e de contorno | 5 |
| Tabela 5.1 | <i>Autovalores corrigidos para a viga apoiada-fixa</i> | 24 |
| Tabela 5.2 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-apoiada</i> | 28 |
| Tabela 5.3 | <i>Autovalores corrigidos para a viga apoiada-apoiada</i> | 32 |
| Tabela 5.4 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-fixa</i> | 36 |
| Tabela 5.5 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-livre</i> | 40 |
| Tabela 5.6 | <i>Autovalores corrigidos para a viga livre-fixa</i> | 44 |
| Tabela 7.1 | <i>Autovalores corrigidos para a viga apoiada-fixa</i> | 62 |
| Tabela 7.2 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-apoiada</i> | 66 |
| Tabela 7.3 | <i>Autovalores corrigidos para a viga apoiada-apoiada</i> | 70 |
| Tabela 7.4 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-fixa</i> | 74 |
| Tabela 7.5 | <i>Autovalores corrigidos para a viga fixa-livre</i> | 78 |
| Tabela 7.6 | <i>Autovalores corrigidos para a viga livre-fixa</i> | 82 |

INTRODUÇÃO

Um tema de interesse nas aplicações é a determinação das frequências livres e modos ou autofunções de variados tipos de vigas que são utilizadas na modelagem matemática com estruturas. Torres elétricas, antenas, prédios, reservatórios e braços móveis tem todos um comportamento parecido com o de uma viga fixa-livre. Nesta situação, o problema dinâmico envolve vigas com características geométricas e elásticas que variam espacialmente. Com esta suposição, os modelos são considerados mais realísticos porque as propriedades estruturais estão distribuídas ao invés de concentradas num determinado número finito em pontos discretos.

O objetivo deste trabalho é a determinação dos modos relativos às vibrações transversais de vigas descritas pela equação de Euler-Bernoulli com seção transversal quadrática ou linear e o cálculo de respostas forçadas. São consideradas condições de contorno clássicas e não-clássicas. O caso de seção uniforme tem sido considerado em (Moschen e Morelatto). Neste trabalho, o fato de ter a seção transversal variável ocasiona que a equação diferencial parcial que descreve a dinâmica da viga apresente uma singularidade espacial num extremo, devido que a rigidez EI da viga é variável espacialmente.

A procura de vibrações livres de tipo oscilatório no tempo e variável no espaço, leva ao estudo de uma equação diferencial linear ordinária de 4ª ordem com coeficientes variáveis, possuindo uma singularidade localizada em $x = 0$. Para contornar esta dificuldade, considera-se que as características espaciais da viga estão definidas no intervalo $[\xi_0, 1]$ para $\xi_0 > 0$. Deste modo, tem-se uma base de soluções formada pelas funções de Bessel de 1ª classe $J(x)$ e de 2ª classe $Y(x)$ e as funções de Bessel modificadas de 1ª classe $I(x)$ e de 2ª classe $K(x)$, [Ward, 1913; Conway & Dubil, 1965; Sanger, 1968]. Observa-se que a complexidade funcional envolvida no cálculo de autofunções de vigas com seção quadrática ou linear será bem maior

do que com vigas de seção constante. Neste último tipo de viga, a base de soluções envolve as funções trigonométricas e hiperbólicas elementares ($\text{sen}, \text{cos}, \text{senh}, \text{cosh}$) as quais não apresentam nenhuma singularidade espacial. Entretanto, para ξ_0 muito perto do extremo $x=1$, é de esperar que a viga se comporta de maneira semelhante ao caso de uma viga com seção uniforme.

O estudo de vigas com seção linear tem sido realizado do ponto de vista numérico através do método de aproximação de Rayleigh-Ritz [Klein, 1974]. Vigas com outros tipos de seções transversais variáveis ou com condições de contorno não-clássicas, tem sido consideradas, entre outros, por Mabie & Rogers(1968) e Lee & Lin (1992).

A descrição desta dissertação é considerada a seguir.

No capítulo 1 apresenta-se o modelo matemático de Euler-Bernoulli correspondente a uma viga com seção transversal variável sujeita a uma carga externa e tipos de condições de contorno consideradas neste trabalho.

No capítulo 2, é derivada a equação diferencial que descreve os modos de vibração correspondente a uma viga com seção transversal variável. Utilizando o fato que o operador diferencial envolvido é simétrico, é estabelecida a ortogonalidade dos modos de vibração.

No capítulo 3, vibrações forçadas devidas a aplicação de forças pontuais em vigas com seção transversal linear e e quadrática, são descritas através do método de variação de parâmetros com o uso da base espectral constituída pelos modos ortogonais de vibração.

No capítulo 4, o estudo modal em todos os casos de seções consideradas é reduzido ao estudo de uma equação de quarta ordem homogênea com coeficientes

polinomiais , escrita na forma fatorizada

$$\left(z \frac{d}{dz} + a\right) \left(z \frac{d}{dz} + a - 2b\right) \left(z \frac{d}{dz} + a - 2b\nu\right) \left(z \frac{d}{dz} + a - 2b\nu - 2b\right) u = b^4 c^4 z^{4b} u.$$

No capítulo 5 e 6 são obtidos os modos e vibrações forçadas em vigas com variação linear na seção transversal. São consideradas condições de contorno clássicas e a condição não-clássica de uma viga com uma mola fixa numa extremidade.

No capítulo 7 são apresentados os modos e vibrações forçadas em vigas com variação quadrática ("forma de cunha") na seção transversal.

Finalmente, apresentam-se as conclusões pertinentes a esse trabalho e a bibliografia utilizada.

1 MODELAGEM

Neste capítulo apresenta-se o modelo matemático de Euler-Bernoulli com as condições iniciais e de contorno da vigas de variação linear na secção transversal, bem como das vigas em forma de cunha.

1.1 Equação de Bernoulli

O modelo matemático de Euler-Bernoulli representa a vibração transversal de uma viga [Newland, 1989],

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = p(x, t), \quad \xi_0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

onde t representa o tempo, x a posição, $u(x, t)$ o deslocamento no tempo t e posição x , ρ a massa específica, $A(x)$ a área da seção transversal retangular, E o módulo elástico de Young, $I(x)$ o momento de inércia sobre o eixo z , $p(x, t)$ a força aplicada e $L - \xi_0$ o comprimento da viga.

1.2 Condições Iniciais e de Contorno

Na resolução da equação (1.1) são necessárias duas condições iniciais, consistindo no deslocamento inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ e a velocidade inicial $u_t(x, 0) = u_1(x)$ e quatro condições de contorno, que envolvem o deslocamento e suas derivadas em relação a x que são

- deslocamento $u(x, t)$
- giro $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$
- momento fletor $EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$

- força de cisalhamento $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)$

definidas em $x = \xi_0$ e em $x = L$.

Apresenta-se a seguir as condições de contorno para as diferentes vigas

| VIGA | $x = \xi_0$ | $x = L$ |
|--------------|---|--|
| APOIADA | $u(\xi_0, t) = 0$ $\frac{\partial^2 u(\xi_0, t)}{\partial x^2} = 0$ | $u(L, t) = 0$ $\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0$ |
| FIXA | $u(\xi_0, t) = 0$ $\frac{\partial u(\xi_0, t)}{\partial x} = 0$ | $u(L, t) = 0$ $\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$ |
| LIVRE | $\frac{\partial^2 u(\xi_0, t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(\xi_0, t)}{\partial x^2} \right) = 0$ | $\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} \right) = 0$ |
| MOLA LATERAL | $\frac{\partial^2 u(\xi_0, t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(\xi_0, t)}{\partial x^2} \right) = -k_m u(\xi_0, t)$ | $\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} \right) = k_m u(L, t)$ |

Tabela 1.1 Tabela da condições iniciais e de contorno

2 FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO

Em vigas sem cargas, os modos estão associados a estados de deslocamento possíveis diante das condições de contorno. A ortogonalidade dos modos permite utilizar o método espectral de Fourier para determinar movimentos sujeitos a diferentes condições iniciais e forças externas.

2.1 Frequências Características

Para o cálculo dos modos precisamos de soluções com frequências ω

$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)X(x),$$

com $X(x)$ uma função não identicamente nula, o que equivale a resolver

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 x}{dx^2} \right) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) - A(x) \rho \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) X(x) = 0$$

$$(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 x}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho A(x) X(x) \right] = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 x}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho A(x) X(x) = 0$$

$$(-\omega^2 \rho A(x) \mathcal{I} + \mathcal{K}) X(x) = 0 \text{ com } X \neq 0$$

onde \mathcal{K} é um operador, isto é, atua sobre um domínio de funções reais definidas no intervalo $[\xi_0, L]$ e é dado por

$$\mathcal{K}(X) = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right) X$$

2.2 Ortogonalidade

Os modos são as soluções de um problema de contorno, provaremos que o operador \mathcal{K} é um operador simétrico isto é as autofunções geradas pelo problema para diferentes autovalores são funções ortogonais entre si.

A equação modal pode ser escrita como

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \omega^2 \rho A(x) X(x). \quad (2.1)$$

Sejam X_i e X_j dois modos associados a autovalores diferentes ω_i, ω_j , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) &= \omega_i^2 \rho A(x) X_i(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} \right) &= \omega_j^2 \rho A(x) X_j(x) \end{aligned}$$

Multiplicando por X_j a primeira equação e integrando em $[\xi_0, L]$ e multiplicando por X_i a segunda equação e integrando em $[\xi_0, L]$ e subtraindo resulta

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_0}^1 \left[X_j \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) - X_i \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} \right) \right] dx \\ &= \int_{\xi_0}^1 \rho A(x) X_i(x) X_j(x) (\omega_i^2 - \omega_j^2) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes duas vezes o lado esquerdo da equação anterior obtém-se

$$\begin{aligned}
& X_j \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) - X_i \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} \right) \Big|_{\xi_0}^1 \\
& - EI(x) \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_j}{dx} - \frac{d^2 X_j}{dx^2} \frac{dX_i}{dx} \right) \Big|_{\xi_0}^1 \\
& + \int_{\xi_0}^1 EI(x) \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_j}{dx^2} - \frac{d^2 X_j}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) dx \\
& = X_j \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) - X_i \frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} \right) \Big|_{\xi_0}^1 \\
& - EI(x) \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_j}{dx} - \frac{d^2 X_j}{dx^2} \frac{dX_i}{dx} \right) \Big|_{\xi_0}^1 \\
& = \rho(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_{\xi_0}^1 A(x) X_i(x) X_j(x) dx \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Observamos que as condições de contorno dos casos estudados conduzem necessariamente à ortogonalidade dos modos. Verificamos como exemplo, o caso particular em que o extremo esquerdo é apoiado e o direito é fixo, isto é,

$$X(\xi_0) = 0, \quad \frac{d^2 X(\xi_0)}{dx^2} = 0; \quad X(1) = 0, \quad \frac{dX(1)}{dx} = 0$$

e substituindo estes valores na equação (2.2) resulta

$$(\omega_i - \omega_j) \int_{\xi_0}^1 \rho A(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0$$

Assim,

$$\langle X_i(x), X_j(x) \rangle_{A(x)} = \int_{\xi_0}^1 \rho A(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \tag{2.3}$$

e devido a $A(x)$ ser uma função não negativa, pode-se concluir que para uma viga apoiada-fixa, os modos X_i , X_j são ortogonais com respeito ao produto interno definido pela função peso $A(x)$ no intervalo $[\xi_0, L]$. Denotemos por $\|X_n(x)\|_{A(x)} = \langle X_n(x), X_n(x) \rangle_{A(x)}$.

3 VIBRAÇÕES FORÇADAS

Utilizando os modos obtidos anteriormente, sob aplicação de uma força normal, apresentamos um problema relativo a uma viga de seção transversal constante. A solução deste problema é obtida através do método espectral de Fourier.

3.1 Método espectral

Consideremos a equação do movimento de uma viga sob a ação de uma carga $p(t, x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

e com condições iniciais prescritas

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x)$$

As condições de contorno podem ser quaisquer das consideradas nos capítulos 1 e 2.

No método espectral, a solução tem a forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (3.2)$$

onde os $X_n(x)$ são os modos relativos às condições de contorno do problema.

Substituindo a equação (3.2) em (3.1), resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2}{dx^2} X_n(x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A(x) \rho \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} X_n(x) = p(x, t) \quad (3.3)$$

Como $X_n(x)$ satisfaz a equação modal (2.1), a equação (3.3) pode ser escrita conforme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \omega^2 \rho A(x) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A(x) \rho \frac{d^2 f_n}{dt^2} X_n(x) = p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) X_n(x) \quad (3.4)$$

onde multiplicando ambos os membros de (3.4) por $X_m(x)$, e integrando no intervalo $[\xi_0, L]$ e utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos obtém-se

$$f_m(t) \omega^2 \rho \int_{\xi_0}^L X_m^2(x) A(x) dx + \rho \frac{d^2 f_m}{dt^2} \int_{\xi_0}^L X_m^2 A(x) dx = \int_{\xi_0}^L p(x, t) X_m^2(x) dx \quad (3.5)$$

sendo que $f_m(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\frac{d^2 f_m(t)}{dt^2} + \omega^2 f_m(t) = \frac{p_m(t)}{\rho}, \quad (3.6)$$

$$f_m(0) = u_{0,m}, \quad f'_m(0) = u_{1,m}$$

onde

$$p_m(t) = \frac{\int_{\xi_0}^L p(x, t) X_m(x) dx}{\|X_m\|_{A(x)}^2},$$

$$u_{0,m} = \frac{\int_{\xi_0}^L u_0(x) X_m^2(x) dx}{\|X_m\|_{A(x)}^2},$$

e

$$u_{1,m} = \frac{\int_{\xi_0}^L u_1(x) X_m(x) dx}{\|X_m\|_{A(x)}^2}.$$

4 ESTUDO DAS EQUAÇÕES

Observamos que a equação modal está definida por uma equação diferencial ordinária de 4ª ordem, com coeficientes variáveis. Posteriormente provaremos que a solução geral pode expressar-se em termos das funções de Bessel.

4.1 Equação de Bessel

A equação de Bessel de ordem ν é

$$x^2 y'' + xy + (x^2 - \nu^2)y = 0; \quad (4.1)$$

cujas soluções fundamentais $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ são denominadas *funções de Bessel* de 1ª e 2ª classe de ordem ν . A solução geral da equação de Bessel é então dada por

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$$

onde

$$x \in]0, \infty[$$

Como se sabe as equações de Bessel apresentam-se quando os problemas estão relacionados com as coordenadas cilíndricas.

Definição: Dizemos que uma função C_ν é cilíndrica de ordem ν se $C_\nu(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$ onde A e B são constantes, e considerando o espaço vetorial pelas funções de Bessel de ordem ν . [Watson, 1958 pág 82]

A equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$x^2 y'' + (1 - 2s)xy' + [(s^2 - b^2\nu^2) + \gamma^2 b^2 x^{2b}]y = 0 \quad (4.2)$$

pode ser reduzida a uma equação de Bessel de ordem ν através da transformação das variáveis independentes e dependentes $(x, y) \longrightarrow (t, u)$, da forma

$$t = \gamma x^b,$$

$$y = x^s u.$$

Tem-se, então,

$$\frac{dy}{dx} = sx^{s-1}u + x^s \frac{du}{dt} \gamma b x^{b-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= s(s-1)x^{s-2}u + sx^{s-1} \frac{du}{dt} \gamma b x^{b-1} \\ &+ \gamma b(s+b-1)x^{s+b-2} \frac{du}{dt} \\ &+ \gamma b x^{s+b-1} \frac{d^2u}{dt^2} \gamma b x^{b-1} \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (4.2), tem-se

$$\begin{aligned} &x^2 y'' + (1-2s)xy' + [(s^2 - b^2\nu^2) + \gamma^2 b^2 x^{2b}]y \\ &= x^2 \left[\gamma b^2 x^{s+2b-2} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} [s\gamma b + \gamma b(s+b-1)] x^{s+b-2} + s(s-1)x^{s-2}u \right] \\ &(1-2s)x \left[sx^{s-1}u + x^{s+b-1} \frac{du}{dt} \gamma b \right] + [(s^2 - b^2\nu^2) + \gamma^2 b^2 x^{2b}] x^s u \\ &= \frac{d^2u}{dt^2} [\gamma^2 b^2 x^{s+2b}] + \frac{du}{dt} [(2s\gamma b + \gamma b^2 - \gamma b)x^{s+b} + x^{s+b}(1-2s)\gamma b] \\ &+ x^s u [s(s-1) + s(1-2s) + (s^2 - 2b^2\gamma^2)] + x^{s+2b} \gamma^2 b^2 u \\ &x^s b^2 \left[\gamma^2 x^{2b} \frac{d^2u}{dt^2} + \gamma x^b \frac{du}{dt} - \gamma^2 u + x^{2b} \gamma^2 u \right] = 0 \end{aligned}$$

obtendo-se a equação

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)u = 0 \quad (4.3)$$

cuja solução geral é, como anteriormente,

$$u(t) = AJ_\nu(t) + BY_\nu(t).$$

Então, a solução geral de (4.2) é

$$y(x) = x^s [AJ_\nu(\gamma x^b) + BY_\nu(\gamma x^b)]$$

ou como função cilíndrica

$$y(x) = x^s \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b).$$

Observe que (4.2) pode ser escrita na forma

$$x^2 y'' + (1 - 2s)xy' + (s^2 - b^2 \nu^2)y = -\gamma^2 b^2 x^{2b} y \quad (4.4)$$

A equação diferencial (4.4) pode ser expressa como um produto de operadores de acordo com Watson [Watson, 1958].

$$\left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha\right) y = x^2 y'' + x[2\alpha - 2b\nu + 1]y' + (\alpha^2 - 2\alpha b\nu)y = -\gamma^2 b^2 x^{2b} y$$

com $s = b^{\nu-\alpha}$.

A solução de

$$\left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha\right) y = -\gamma^2 b^2 x^{2b} y$$

é da forma

$$y = x^{b\nu-\alpha} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b)$$

Aplicando novamente o produto de operadores na equação anterior a equação de 4ª ordem podemos deduzir que:

$$\begin{aligned} \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha\right) y &= (-\gamma^2 b^2)^2 x^{4b} y \\ & \quad (4.5) \\ \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\right) (-\gamma^2 b^2 x^{2b} y) & \end{aligned}$$

e tem-se

$$y = x^{b\nu - \alpha} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b)$$

$$x^2 y = x^{2b\nu - \alpha - 2b}$$

também é solução da equação (4.5), pois

$$\begin{aligned} & \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha\right) y \\ &= -\gamma^2 b^2 \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\nu - 2b\right) \left(x \frac{d}{dx} + \alpha - 2b\right) x^{2b} x^{b\nu - \alpha} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b) \\ &= -\gamma^2 b^2 \left(x \frac{d}{dx} + (\alpha - 2b) - 2b\nu\right) \left(x \frac{d}{dx} + (\alpha - 2b)\nu\right) x^{b\nu - (\alpha - 2b)} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b) \\ &= -\gamma^2 b^2 [-\gamma^2 b^2 x^{2b} x^{b\nu - (\alpha - 2b)} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b)] = (-1)^2 (\gamma^2 b^2)^2 x^{4b} x^{b\nu - (\alpha - 2b)} \mathcal{C}_\nu(\gamma x^b) \\ &= (\gamma^2 b^2)^2 x^{4b} y \end{aligned}$$

Os valores de γ são dados por $\gamma = e^{-\frac{i\pi l}{2}} c$, $l = 0, 1$. Para $l = 0$, temos o valor $\gamma_1 = c$ e para $l = 1$ temos o valor $\gamma_2 = ic$. Para γ_1 correspondem as soluções fundamentais:

$$x^{b\nu - \alpha} J_\nu(cx^b), \quad x^{b\nu - \alpha} Y_\nu(cx^b)$$

e para γ_2 correspondem as soluções fundamentais e ν são números inteiros não negativos:

Onde I_ν e K_ν são as funções modificadas de Bessel de 1ª classe e 2ª classe de ordem ν que satisfazem a equação diferencial modificada de Bessel de ordem ν com

$s=0$, $b=1$, $\gamma=i$. As quatro soluções formam um sistema fundamental de soluções. Reduziremos as equações modais ao problema.

4.2 Equação Modal para Vigas com Variação Linear na Seção Transversal

Considere vigas com variação linear na seção transversal como é mostrado na figura 4.1

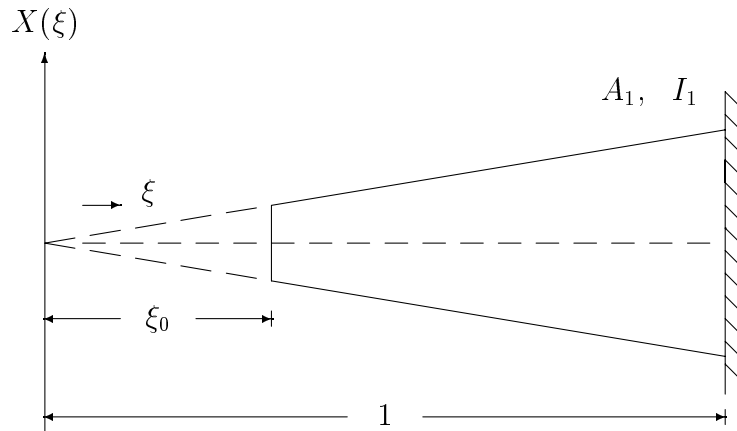


Figura 4.1 *Esquema de uma viga com variação linear na seção transversal*

A variável ξ é igual à distância da origem até qualquer ponto ao longo da viga, dividido pelo comprimento da viga triangular. Isto possibilita a adimensionalização do deslocamento lateral da viga. A área da seção transversal e a inércia podem ser expressas como

$$A(\xi) = A_1 \xi^2, \quad \text{para } \xi \in (\xi_0, 1) \quad \text{e} \quad (4.6)$$

$$I(\xi) = I_1 \xi^4, \quad \text{para } \xi \in (\xi_0, 1) \quad (4.7)$$

Enfim, a equação modal (2.1) pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \xi^2 \beta^4 X(\xi), \quad (4.8)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\rho A_1 \omega^2}{EI_1}.$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\xi^4 \frac{d^3}{d\xi^3} + 4\xi^3 \frac{d^2}{d\xi} \right) = \xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 8\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} + 12 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

Para a resolução da equação (4.8) utilizam-se os resultados da seção anterior, com os valores $\alpha = 2$, $b = 1/2$, $\nu = 2$ e $c = 2\beta$ substituídos na equação (4.5).

Afirmamos que a equação (4.8) é equivalente a:

$$\left(\xi \frac{d}{d\xi} - 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 2 \right) X(\xi) = \xi^2 \beta^4 X(\xi),$$

pois

$$\left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 2 \right) = \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 3\xi \frac{d}{d\xi}$$

$$\left(\xi \frac{d}{d\xi} - 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 1 \right) \left(\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 3\xi \frac{d}{d\xi} \right) = \xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} + 6\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 6\xi \frac{d}{d\xi}$$

$$\left(\xi \frac{d}{d\xi} - 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 2 \right) = \xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 8\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} + 12\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2}. \quad (4.9)$$

e então a solução geral para $X(\xi)$

$$X(\xi) = \frac{1}{\xi} [\mathcal{C}_2(2\beta\sqrt{\xi})\mathcal{C}_2(i2\beta\xi)]. \quad (4.10)$$

para $\xi_0 < \xi < 1$ onde $\xi_0 > 0$.

Mediante a utilização da propriedade das funções de Bessel [Watson, 1958], p. 83,

$$z\mathcal{C}'_{\nu}(z) - \nu\mathcal{C}_{\nu}(z) = -z\mathcal{C}_{\nu+1}(z)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dX(\xi)}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} (\xi^{-1} (c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2}))) \\ &= \frac{1}{\xi^2} (c_1 \beta \xi^{1/2} J_2'(2\beta\xi^{1/2}) - c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2})) + \frac{1}{\xi^2} (c_2 \beta \xi^{1/2} Y_2'(2\beta\xi^{1/2}) - c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2})) \\ &\quad + \frac{1}{\xi^2} (c_3 \beta \xi^{1/2} I_2'(2\beta\xi^{1/2}) - c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2})) + \frac{1}{\xi^2} (c_4 \beta \xi^{1/2} K_2'(2\beta\xi^{1/2}) - c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})) \\ &= \frac{c_1}{\xi^2} (-\beta \xi^{1/2} J_3(2\beta\xi^{1/2})) + \frac{c_2}{\xi^2} (-\beta \xi^{1/2} Y_3(2\beta\xi^{1/2})) \\ &\quad + \frac{c_3}{\xi^2} (\beta \xi^{1/2} I_3(2\beta\xi^{1/2})) + \frac{c_4}{\xi^2} (-\beta \xi^{1/2} K_3(2\beta\xi^{1/2})) \end{aligned}$$

obtendo-se o seguinte resultado para a primeira derivada de $X(\xi)$:

$$\frac{dX(\xi)}{d\xi} = -\beta \xi^{-3/2} (c_1 J_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_3(2\beta\xi^{1/2}) - c_3 I_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_3(2\beta\xi^{1/2})). \quad (4.11)$$

De maneira similar, obtém-se os resultados para a segunda e terceira derivadas de $X(\xi)$,

$$\frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} = \beta^2 \xi^{-2} (c_1 J_4(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_4(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_4(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_4(2\beta\xi^{1/2})), \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = -\beta \xi^{-3/2} (c_1 J_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_3(2\beta\xi^{1/2}) - c_3 I_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_3(2\beta\xi^{1/2})). \quad (4.13)$$

De maneira semelhante podemos obter os resultados da secção (4.1) para obter a solução geral da equação modal para vigas em forma de cunha.

4.3 Equação Modal para Vigas em Forma de Cunha

Nesta seção, são consideradas vigas em forma de cunha, isto é, vigas cuja área da seção transversal e inércia são dadas por

$$A(\xi) = A_1\xi, \quad e \quad (4.14)$$

$$I(\xi) = I_1\xi^3, \quad (4.15)$$

respectivamente.

Agora, a equação modal (2.1) pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \xi\beta^4 X(\xi). \quad (4.16)$$

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \xi^2\beta^4 X(\xi). \quad (4.17)$$

A equação (4.16) é um caso particular da equação diferencial ordinária linear (4.5) com os valores $\alpha = 1$, $b = 1/2$, $\nu = 1$ e $c = 2$, então a solução geral para $X(\xi)$:

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X}{d\xi^2} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} - 1 \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} + 1 \right) X(\xi) = \xi^2\beta^4 X(\xi)$$

resulta

$$X(\xi) = \xi^{-1/2} (c_1 J_1(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_1(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_1(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_1(2\beta\xi^{1/2})). \quad (4.18)$$

De modo semelhante ao procedimento da seção anterior, tem-se resultados válidos para as derivadas de $X(x)$:

$$\frac{dX(\xi)}{d\xi} = -\beta\xi^{-1} (c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_1(2\beta\xi^{1/2}) - c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})), \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} = \beta^2 \xi^{-3/2} (c_1 J_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_3(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_3(2\beta\xi^{1/2})), \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^3 \xi (c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) - c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})). \quad (4.21)$$

4.4 Condições de Contorno

Para ilustrar a abordagem matricial do cálculo dos modos, realizados com auxílio do software MapleV-5, escolhemos o caso de uma viga com variação linear na seção transversal do tipo apoiada-fixa.

Neste caso, a parte espacial $X(\xi)$ deve satisfazer a equação modal

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(EI(\xi) \frac{d^2 X}{d\xi^2} \right) = \omega^2 \rho A(\xi) X(\xi). \quad (4.22)$$

com as condições de contorno

$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X(\xi_0)}{d\xi^2} = 0, \quad (4.23)$$

$$X(1) = \frac{dX(1)}{d\xi} = 0.$$

Para o extremo esquerdo $\xi = \xi_0$, a condição $X(\xi_0) = 0$ significa que

$$\frac{1}{\xi} [c_1 J_2(z_0) + c_2 Y_2(z_0) + c_3 I_2(z_0) + c_4 K_2(z_0)] = 0, \quad (4.24)$$

onde $z_0 = 2\beta\xi_0^{1/2}$. A outra condição $\frac{d^2 X(\xi_0)}{d\xi^2} = 0$, e utilizando (4.21)

$$[c_1 J_4(z_0) + c_2 Y_4(z_0) + c_3 I_4(z_0) + c_4 K_4(z_0)] = 0. \quad (4.25)$$

Para o extremo direito $\xi = 1$, a condição $X(1) = 0$ significa que

$$c_1 J_2(2\beta) + c_2 Y_2(2\beta) + c_3 I_2(2\beta) + c_4 K_2(2\beta) = 0. \quad (4.26)$$

A outra condição, $\frac{dX(1)}{d\xi} = 0$ implica em

$$c_1 J_3(2\beta) + c_2 Y_3(2\beta) + c_3 I_3(2\beta) + c_4 K_3(2\beta) = 0. \quad (4.27)$$

Agrupando as quatro equações (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) na forma matricial, tem-se o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

O sistema linear (4.28) é homogêneo e, portanto, para ter solução não nula requer que o determinante da matriz de tal sistema seja nulo. Com isto, conseguimos os valores das constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 dependendo de um parâmetro.

Este processo é repetido para vigas com outras condições de contorno e com as vigas em forma de cunha e com mola.

5 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS COM VARIACÃO LINEAR NA SEÇÃO TRANSVERSAL COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS

O objetivo da abordagem matricial desenvolvida nos capítulos anteriores é a obtenção da frequência e do modo normal das vigas sob estudo.

Neste capítulo, especificamente, são apresentados os modos relativos aos diversos tipos de vigas com variação linear na seção transversal, caracterizados pelas suas condições de contorno clássicas.

A abordagem considera a base apresentada, envolvendo as funções de Bessel. O cálculo foi realizado de maneira simbólica com o auxílio do “software” MAPLE V 5. A equação característica foi obtida calculando indiretamente o determinante da matriz do sistema linear homogêneo associado a cada tipo de viga.

No caso forçado, é considerada uma força harmônica na seção $x = a$ da viga

$$p(t, x) = P_0 \text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x - a). \quad (5.1)$$

Neste caso,

$$Q_n(t) = P_0 \text{sen}(\hat{\omega}t)X_n(a), \quad (5.2)$$

e a integral de convolução é representada por:

$$\int_0^t Q_n(\tau)\text{sen } \omega_n(t - \tau)d\tau = \frac{P_0 X_n(a)}{\hat{\omega}^2 - \omega_n^2} [\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}t)]. \quad (5.3)$$

Nesta análise, foram considerados os seguintes valores para os parâmetros da entrada harmônica:

$$P_0 = 1000 \text{ N},$$

$$\hat{\omega} = 120 \text{ rad},$$

$$a = \frac{L}{2}.$$

Aproximamos a série de Fourier utilizando os seis primeiros termos.

5.1 Valores Numéricos dos Parâmetros

Para as simulações numéricas, foram utilizados os seguintes valores dos parâmetros físicos:

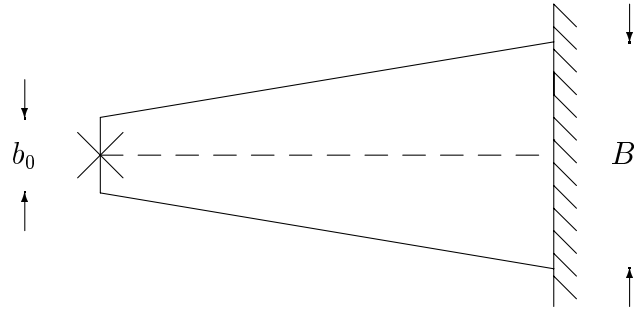
$$L = 1 \text{ m}, E = 7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, I_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \rho = 12 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ e } A_1 = 0.01 \text{ m}^2$$

A seguir, apresentamos os resultados gráficos para vigas com variação linear na seção transversal e condições de contorno clássicas.

Para melhor entendimento dos gráficos,

- a cor vermelha representa o 1^o autovalor,
- a cor azul representa o 2^o autovalor,
- a cor verde representa o 3^o autovalor,
- a cor preta representa o 4^o autovalor,
- a cor rosa representa o 5^o autovalor,
- e a cor amarela representa o 6^o autovalor.

5.2 Caso 1: Viga Apoiada-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

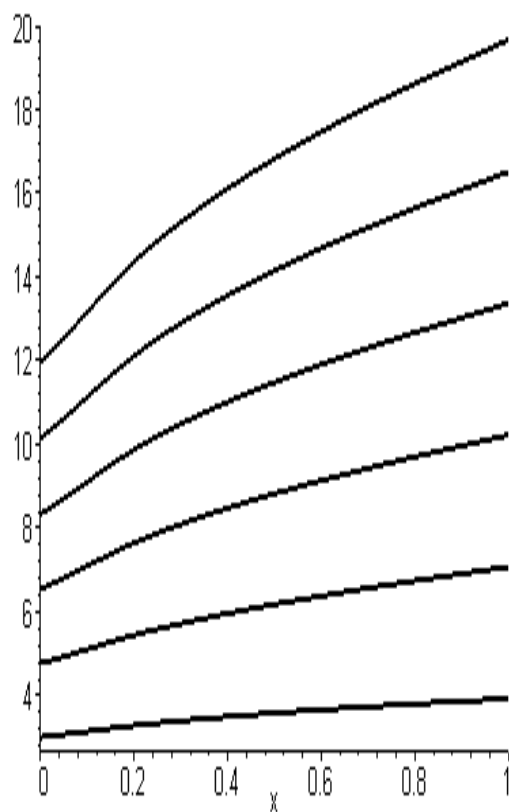
$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 3.15 | 5.11 | 7.10 | 9.11 | 11.13 | 13.17 |
| 0.2 | 3.29 | 5.45 | 7.65 | 9.88 | 12.12 | 14.37 |
| 0.3 | 3.40 | 5.72 | 8.09 | 10.49 | 12.89 | 15.31 |
| 0.4 | 3.50 | 5.96 | 8.48 | 11.01 | 13.56 | 16.11 |
| 0.5 | 3.58 | 6.18 | 8.82 | 11.48 | 14.15 | 16.82 |
| 0.6 | 3.66 | 6.38 | 9.14 | 11.91 | 14.69 | 17.47 |
| 0.7 | 3.74 | 6.57 | 9.43 | 12.30 | 15.18 | 18.06 |
| 0.8 | 3.80 | 6.74 | 9.70 | 12.67 | 15.64 | 18.62 |
| 0.9 | 3.87 | 6.91 | 9.96 | 13.02 | 16.08 | 19.14 |

Tabela 5.1 Autovalores corrigidos para a viga apoiada-fixa

Figura 5.1 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-fixo de b_0/b_1 vs. β^* .

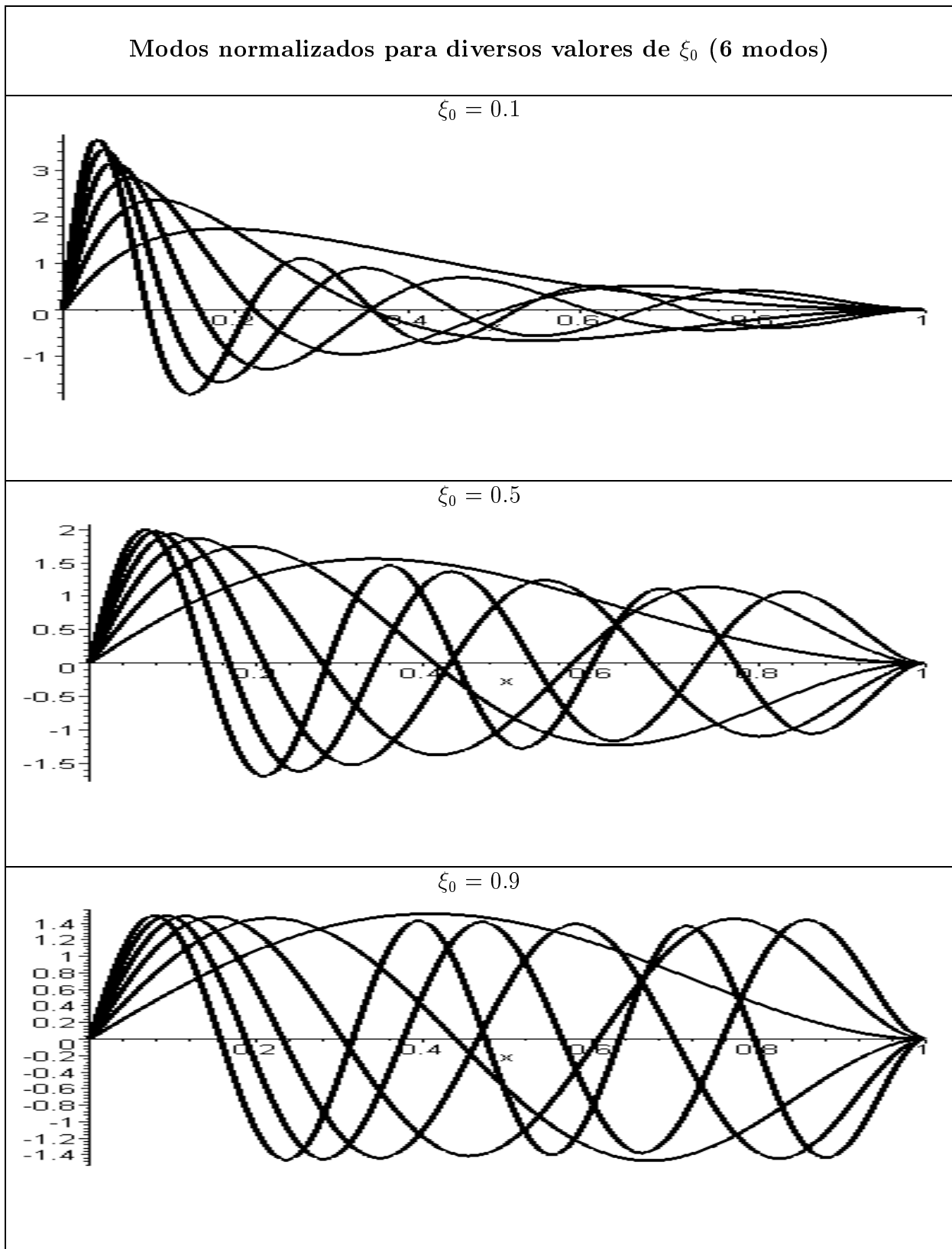
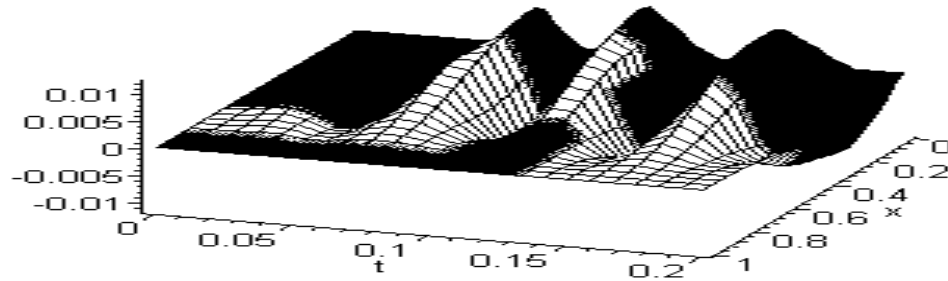


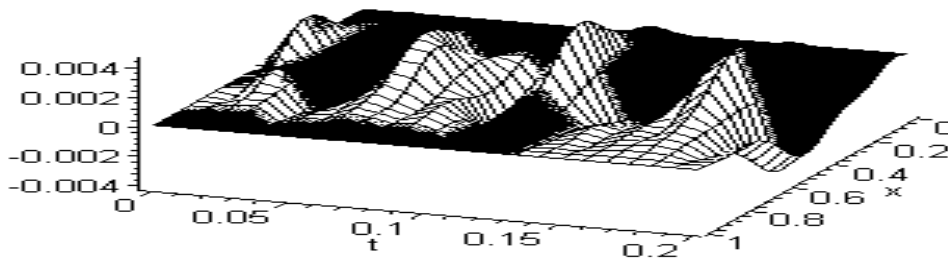
Figura 5.2 Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-fixa

Vibração forçada para diversos valores de ξ_0 (6 modos)

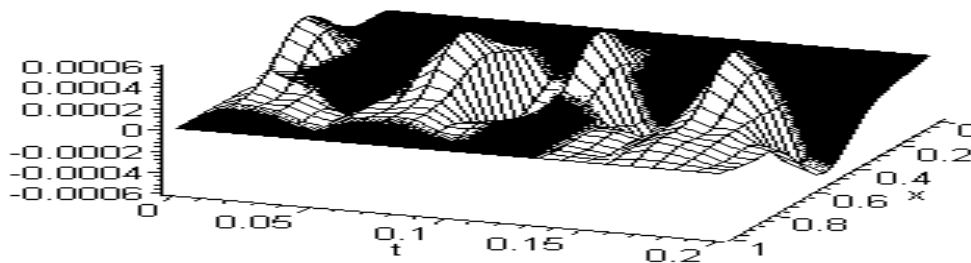
$$\xi_0 = 0.1$$



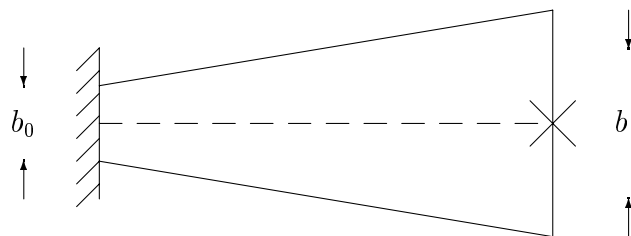
$$\xi_0 = 0.5$$



$$\xi_0 = 0.9$$

Figura 5.3 Vibração forçada $u(x,t)$ da viga apoiada-fixa

5.3 Caso 2: Viga Fixa-Apoiada



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & -I_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_4(2\beta) & Y_4(2\beta) & I_4(2\beta) & K_4(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores Corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 1.9232 | 4.5624 | 6.6900 | 8.7775 | 10.8535 | 12.9250 |
| 0.2 | 2.3429 | 4.9921 | 7.3220 | 9.6181 | 11.9032 | 14.1836 |
| 0.3 | 2.6453 | 5.3458 | 7.8272 | 10.2804 | 12.7237 | 15.1625 |
| 0.4 | 2.8925 | 5.6551 | 8.2622 | 10.8463 | 13.4219 | 15.9934 |
| 0.5 | 3.1064 | 5.9340 | 8.6508 | 11.3493 | 14.0407 | 16.7287 |
| 0.6 | 3.2975 | 6.1903 | 9.0057 | 11.8070 | 14.6027 | 17.3956 |
| 0.7 | 3.4719 | 6.4291 | 9.3346 | 12.2300 | 15.1213 | 18.0105 |
| 0.8 | 3.6333 | 6.6536 | 9.6428 | 12.6255 | 15.6054 | 18.5840 |
| 0.9 | 3.7842 | 6.8661 | 9.9337 | 12.9982 | 16.0613 | 19.1237 |

Tabela 5.2 Autovalores corrigidos para a viga fixa-apoiada

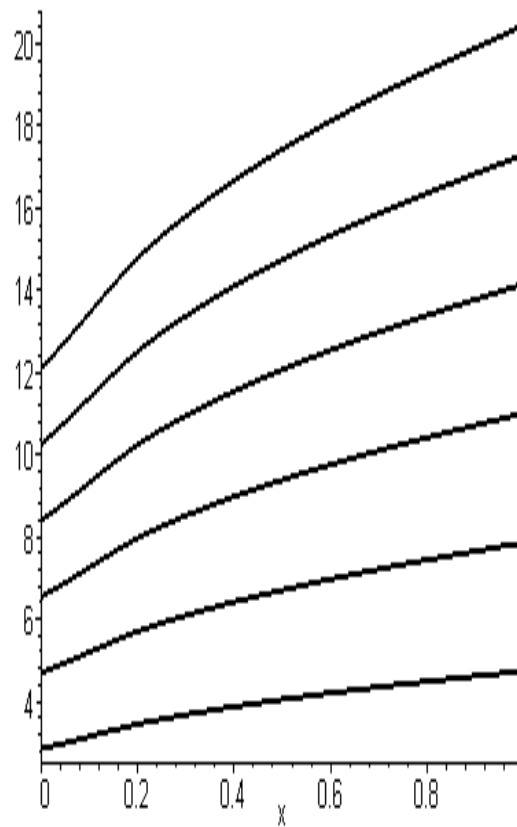


Figura 5.4 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-apoiado.

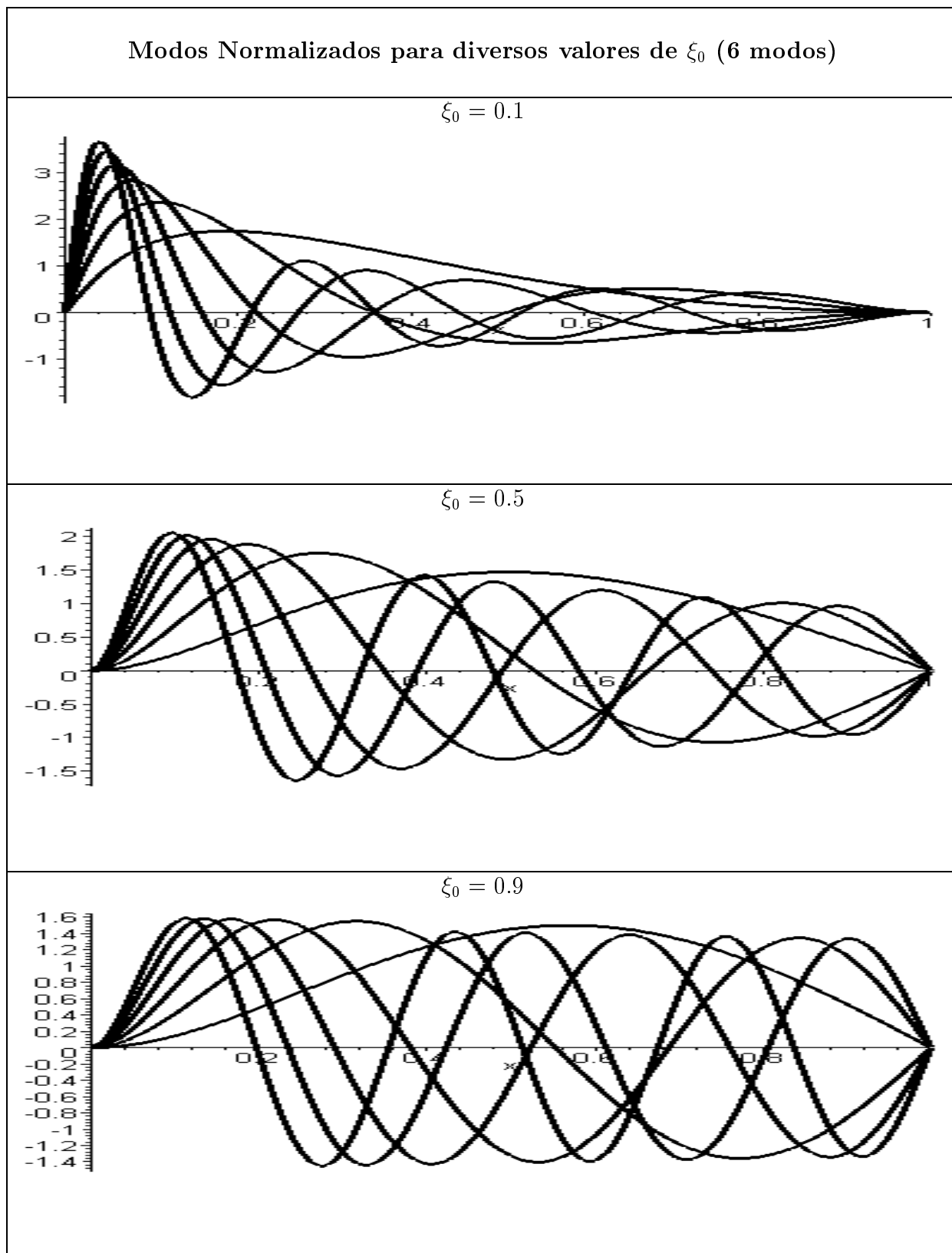
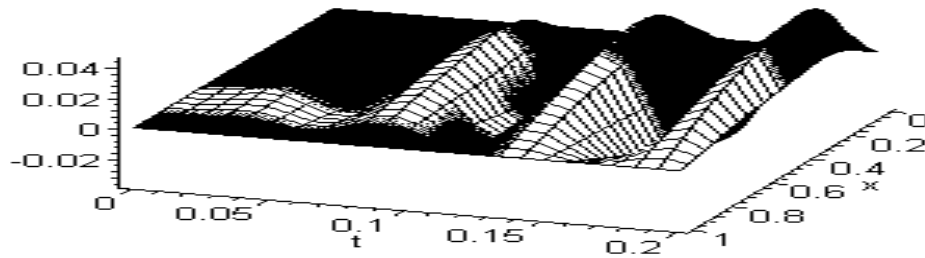
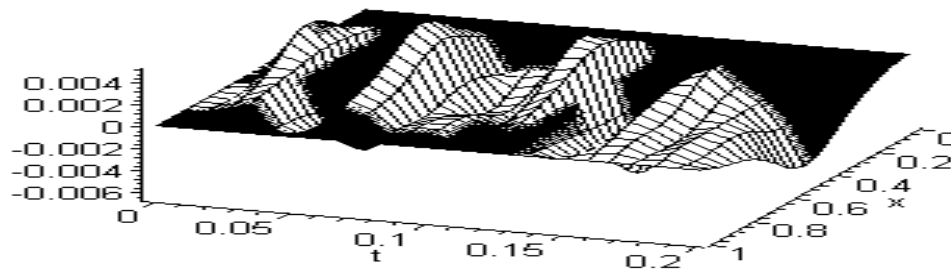
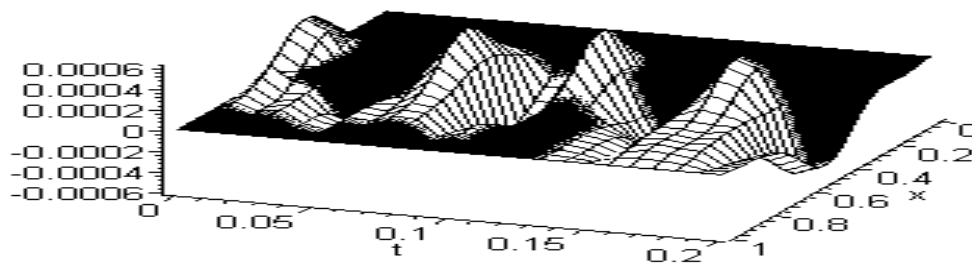
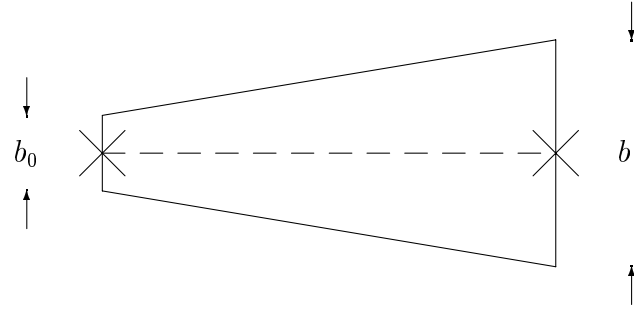


Figura 5.5 Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-apoiada

Vibração forçada para diversos valores de ξ_0 (6 modos) $\xi_0 = 0.1$  $\xi_0 = 0.5$  $\xi_0 = 0.9$ Figura 5.6 *Vibração forçada $u(x,t)$ da viga fixa-apoiada*

5.4 Caso 3: Viga Apoiada-Apoiada



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0$$

Solução geral a equação modal:

$$X(\xi) = \xi_{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_4(2\beta) & Y_4(2\beta) & I_4(2\beta) & K_4(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores Corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 1.7468 | 4.3696 | 6.4416 | 8.4879 | 10.5329 | 12.5805 |
| 0.2 | 2.0863 | 4.6838 | 6.9572 | 9.2157 | 11.4746 | 13.7357 |
| 0.3 | 2.3149 | 4.9477 | 7.3782 | 9.7995 | 12.2213 | 14.6448 |
| 0.4 | 2.4917 | 5.1819 | 7.7454 | 10.3033 | 12.8616 | 15.4210 |
| 0.5 | 2.6375 | 5.3954 | 8.0764 | 10.7539 | 13.4318 | 16.1104 |
| 0.6 | 2.7625 | 5.5935 | 8.3807 | 11.1659 | 13.9514 | 16.7372 |
| 0.7 | 2.8723 | 5.7794 | 8.6642 | 11.5481 | 14.4320 | 17.3162 |
| 0.8 | 2.9706 | 5.9553 | 8.9310 | 11.9063 | 14.8816 | 17.8570 |
| 0.9 | 3.0598 | 6.1228 | 9.1838 | 12.2447 | 15.3056 | 18.3665 |

Tabela 5.3 Autovalores corrigidos para a viga apoiada-apoiada

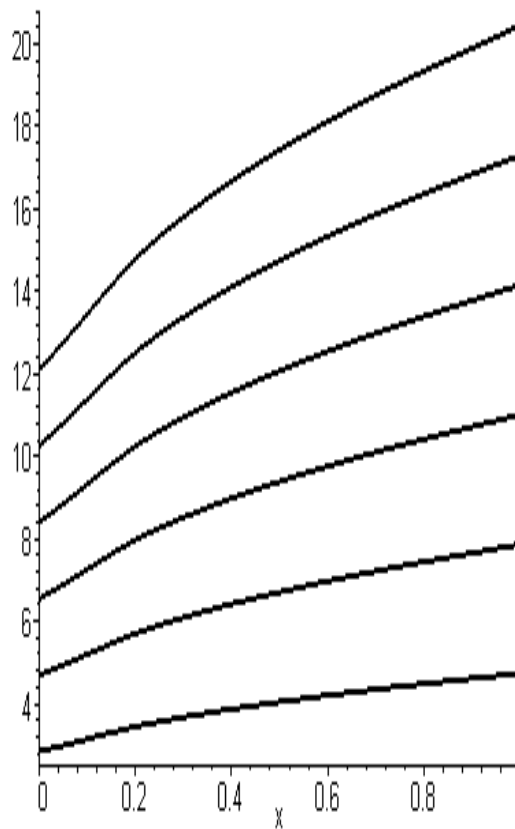


Figura 5.7 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-apoiado.

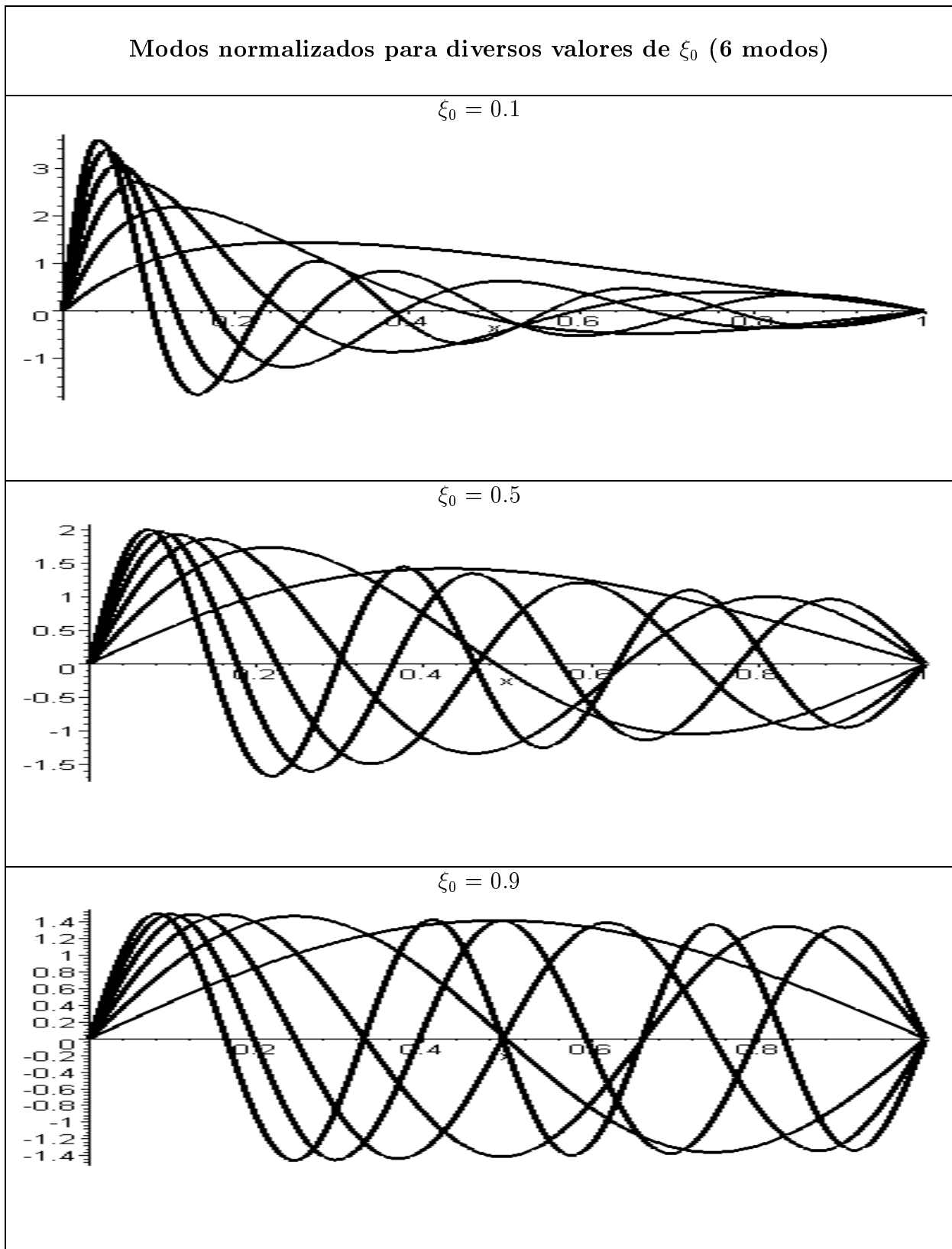


Figura 5.8 Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-apoiada

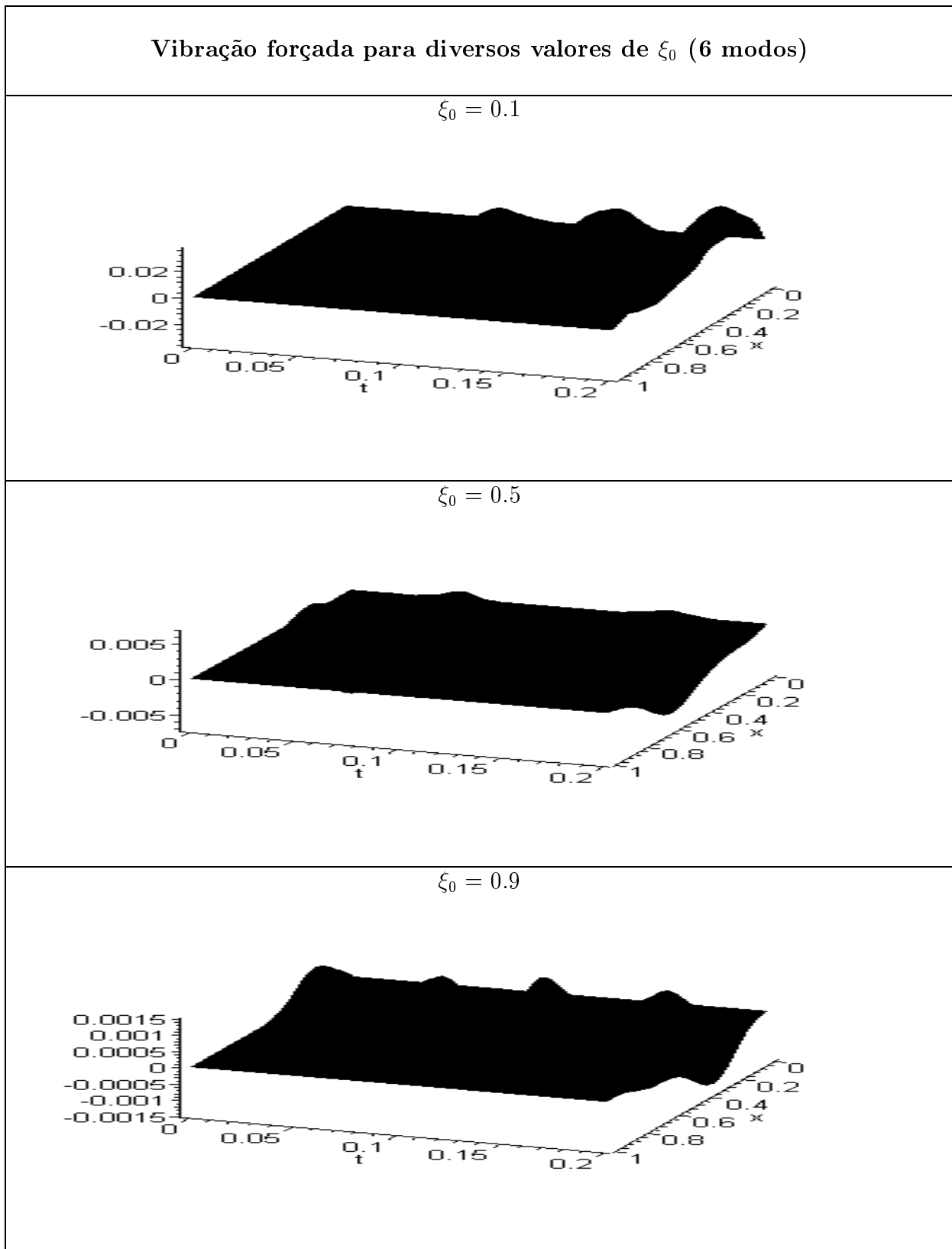
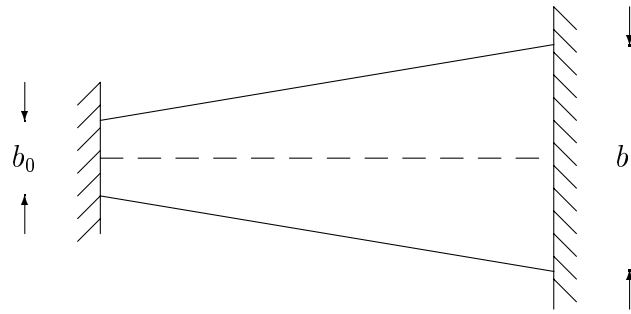


Figura 5.9 Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-apoiada

5.5 Caso 4: Viga Fixa-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & -I_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 3.2808 | 5.3137 | 7.3553 | 9.4037 | 11.4570 | 13.5138 |
| 0.2 | 3.5188 | 5.7635 | 8.0212 | 10.2833 | 12.5486 | 14.8159 |
| 0.3 | 3.7195 | 6.1264 | 8.5480 | 10.9722 | 13.3985 | 15.8260 |
| 0.4 | 3.8974 | 6.4402 | 8.9988 | 11.5587 | 14.1199 | 16.6819 |
| 0.5 | 4.0594 | 6.7213 | 9.3996 | 12.0785 | 14.7582 | 17.4384 |
| 0.6 | 4.2095 | 6.9784 | 9.7645 | 12.5505 | 15.3370 | 18.1237 |
| 0.7 | 4.3501 | 7.2170 | 10.1017 | 12.9859 | 15.8704 | 18.7550 |
| 0.8 | 4.4829 | 7.4408 | 10.4168 | 13.3923 | 16.3678 | 19.3434 |
| 0.9 | 4.6093 | 7.6522 | 10.7139 | 13.7747 | 16.8357 | 19.8966 |

Tabela 5.4 Autovalores corrigidos para a viga fixa-fixa

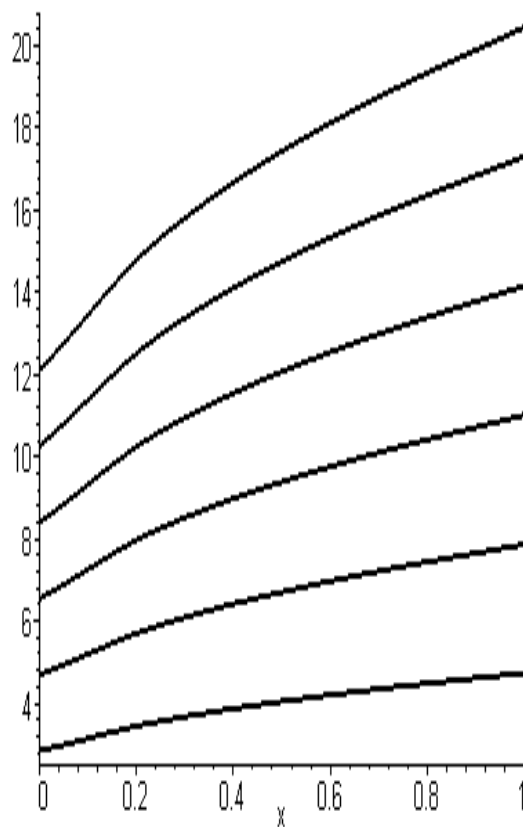


Figura 5.10 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-fixo.

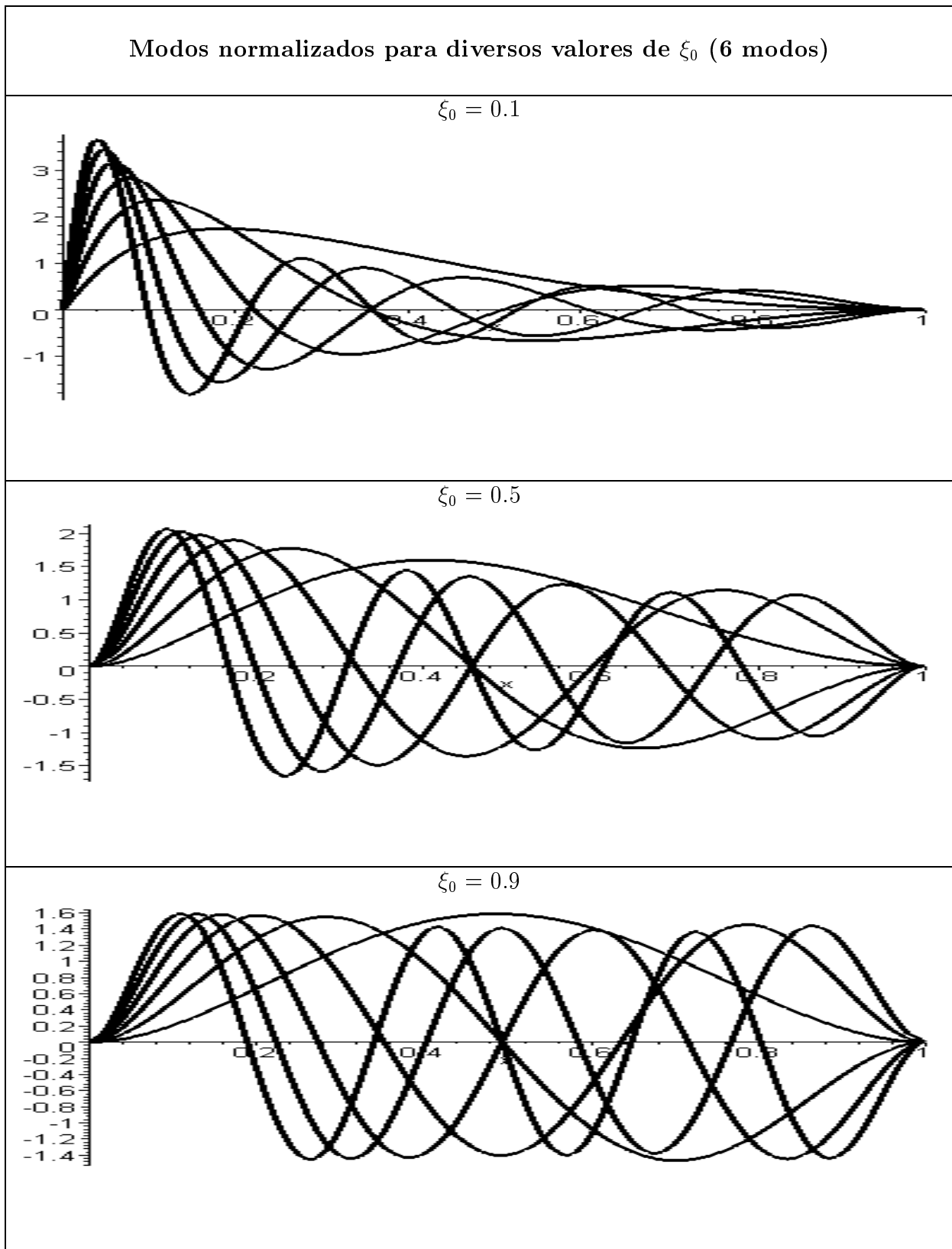
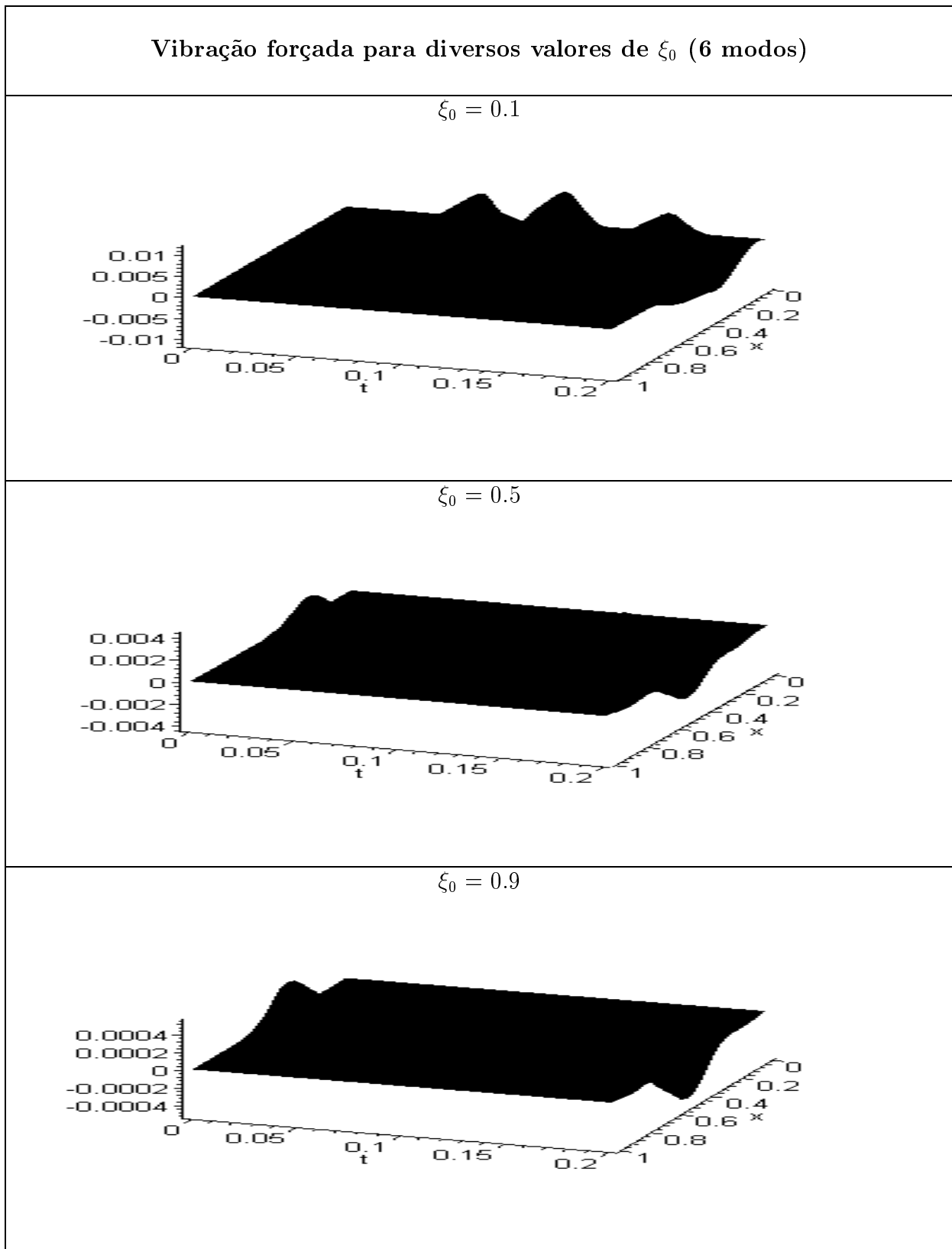
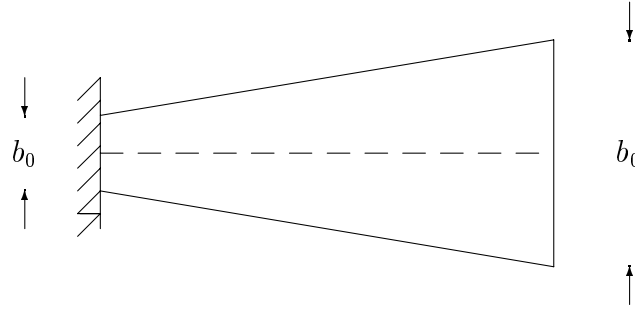


Figura 5.11 *Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-fixa*

Figura 5.12 Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-fixa

5.6 Caso 5: Viga Fixa-Livre



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(EI(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & -I_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_4(2\beta) & Y_4(2\beta) & I_4(2\beta) & K_4(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & -K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 0.3479 | 2.1875 | 4.9207 | 7.0896 | 9.2018 | 11.2939 |
| 0.2 | 0.5818 | 2.6873 | 5.4203 | 7.7869 | 10.1048 | 12.4042 |
| 0.3 | 0.7844 | 3.0557 | 5.8320 | 8.3450 | 10.8172 | 13.2728 |
| 0.4 | 0.9684 | 3.3621 | 6.1927 | 8.8265 | 11.4267 | 14.0128 |
| 0.5 | 1.1393 | 3.6311 | 6.5487 | 9.2575 | 11.9693 | 14.6694 |
| 0.6 | 1.3003 | 3.8744 | 6.8192 | 9.6518 | 12.4637 | 15.2663 |
| 0.7 | 1.4531 | 4.0987 | 7.0997 | 10.0179 | 12.9212 | 15.8177 |
| 0.8 | 1.5993 | 4.3083 | 7.3641 | 10.3614 | 13.3494 | 16.3328 |
| 0.9 | 1.7397 | 4.5061 | 7.6151 | 10.6863 | 13.7534 | 16.8182 |

Tabela 5.5 Autovalores corrigidos para a viga fixa-livre

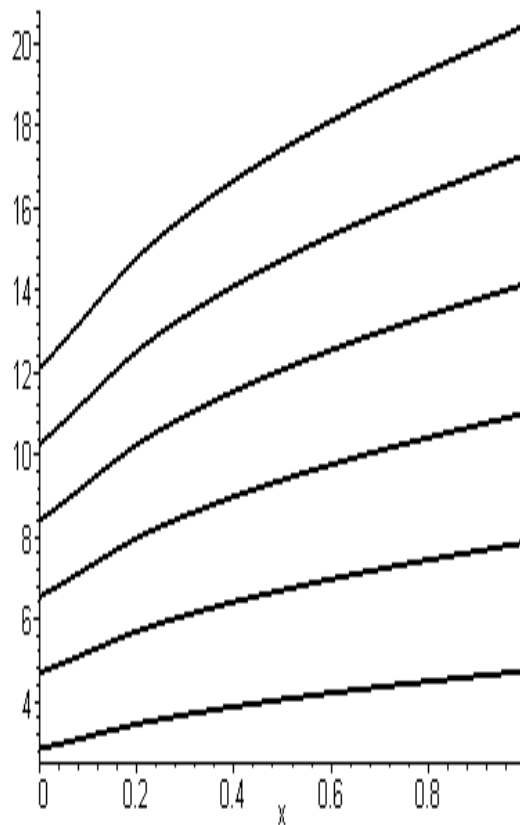


Figura 5.13 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-livre.

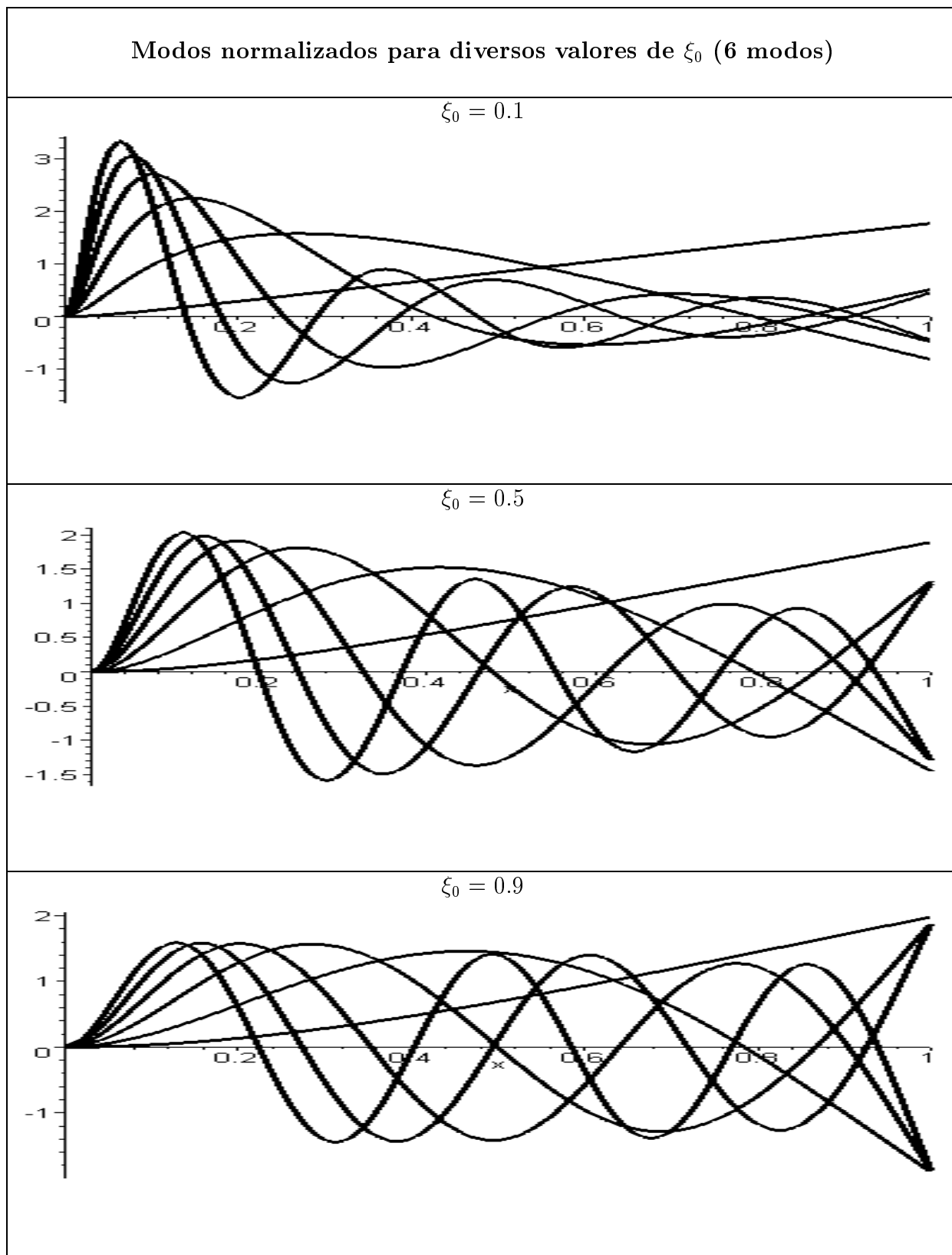


Figura 5.14 *Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-livre*

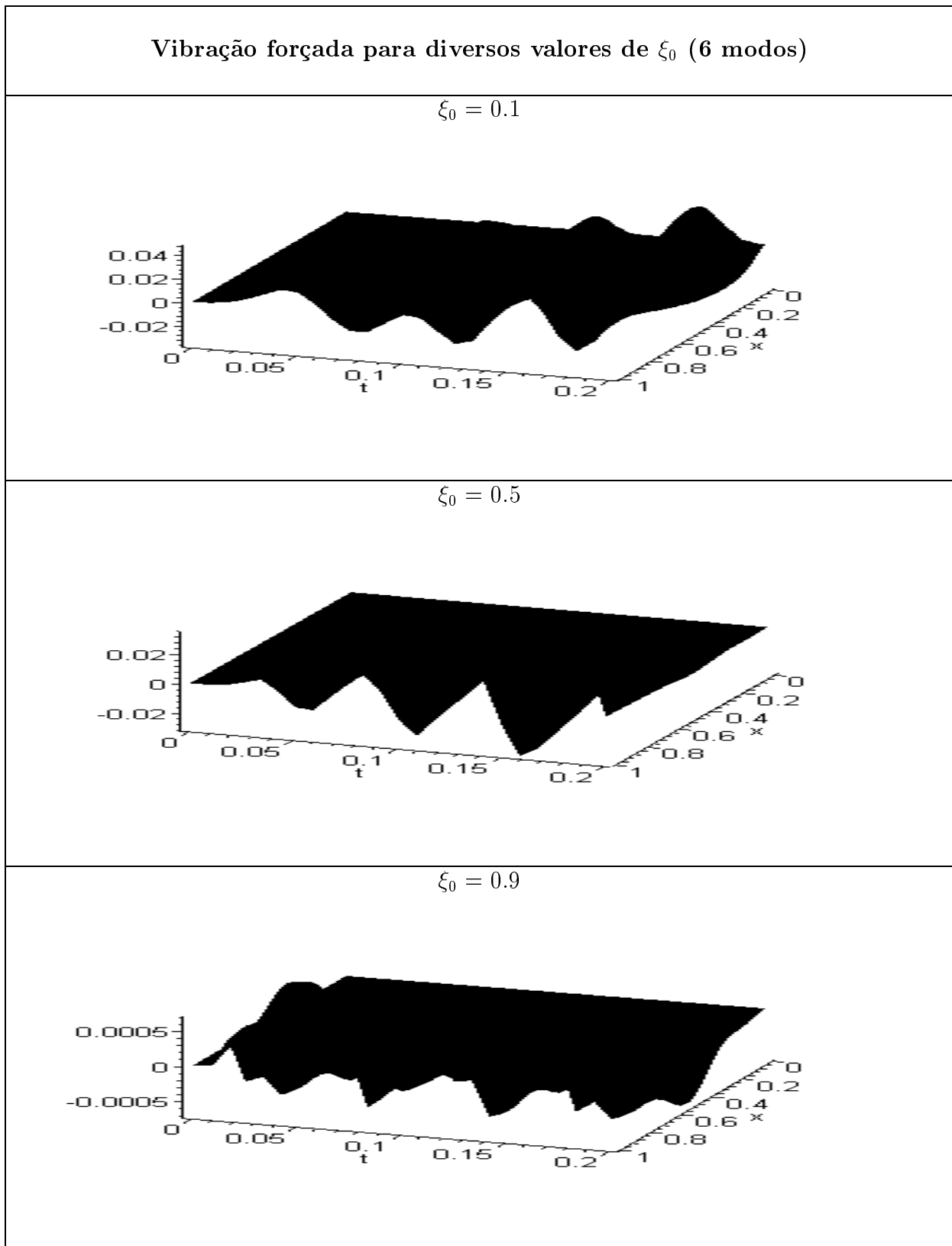
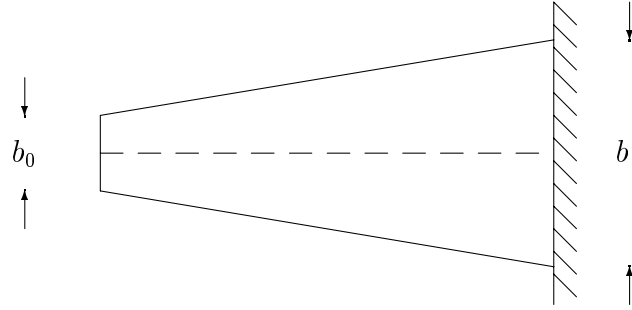


Figura 5.15 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-livre*

5.7 Caso 6: Viga Livre-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xxx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(EI(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta\xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta\xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & I_3(2\beta\xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta\xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & -I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 2.6842 | 4.3221 | 6.0929 | 7.9690 | 9.9079 | 11.8841 |
| 0.2 | 2.4893 | 4.2878 | 6.3114 | 8.4405 | 10.6220 | 12.8323 |
| 0.3 | 2.3472 | 4.3175 | 6.5430 | 8.8612 | 11.2227 | 13.6069 |
| 0.4 | 2.2381 | 4.3663 | 6.7630 | 9.2382 | 11.7488 | 14.2774 |
| 0.5 | 2.1506 | 4.4213 | 6.9699 | 9.5819 | 12.2225 | 14.8771 |
| 0.6 | 2.0782 | 4.4777 | 7.1648 | 9.8997 | 12.6569 | 15.4246 |
| 0.7 | 2.0167 | 4.5338 | 7.3495 | 10.1968 | 13.0605 | 15.9317 |
| 0.8 | 1.9634 | 4.5888 | 7.5253 | 10.4768 | 13.4392 | 16.4063 |
| 0.9 | 1.9167 | 4.6422 | 7.6934 | 10.7423 | 13.7970 | 16.8539 |

Tabela 5.6 Autovalores corrigidos para a viga livre-fixa

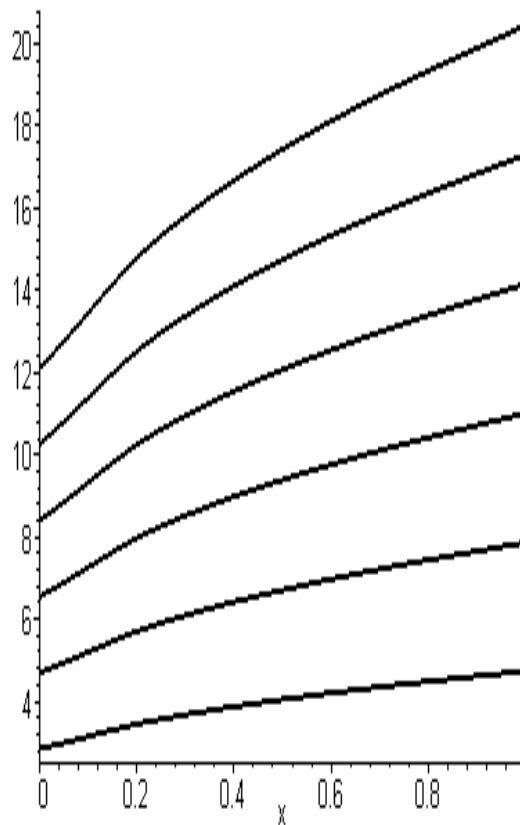
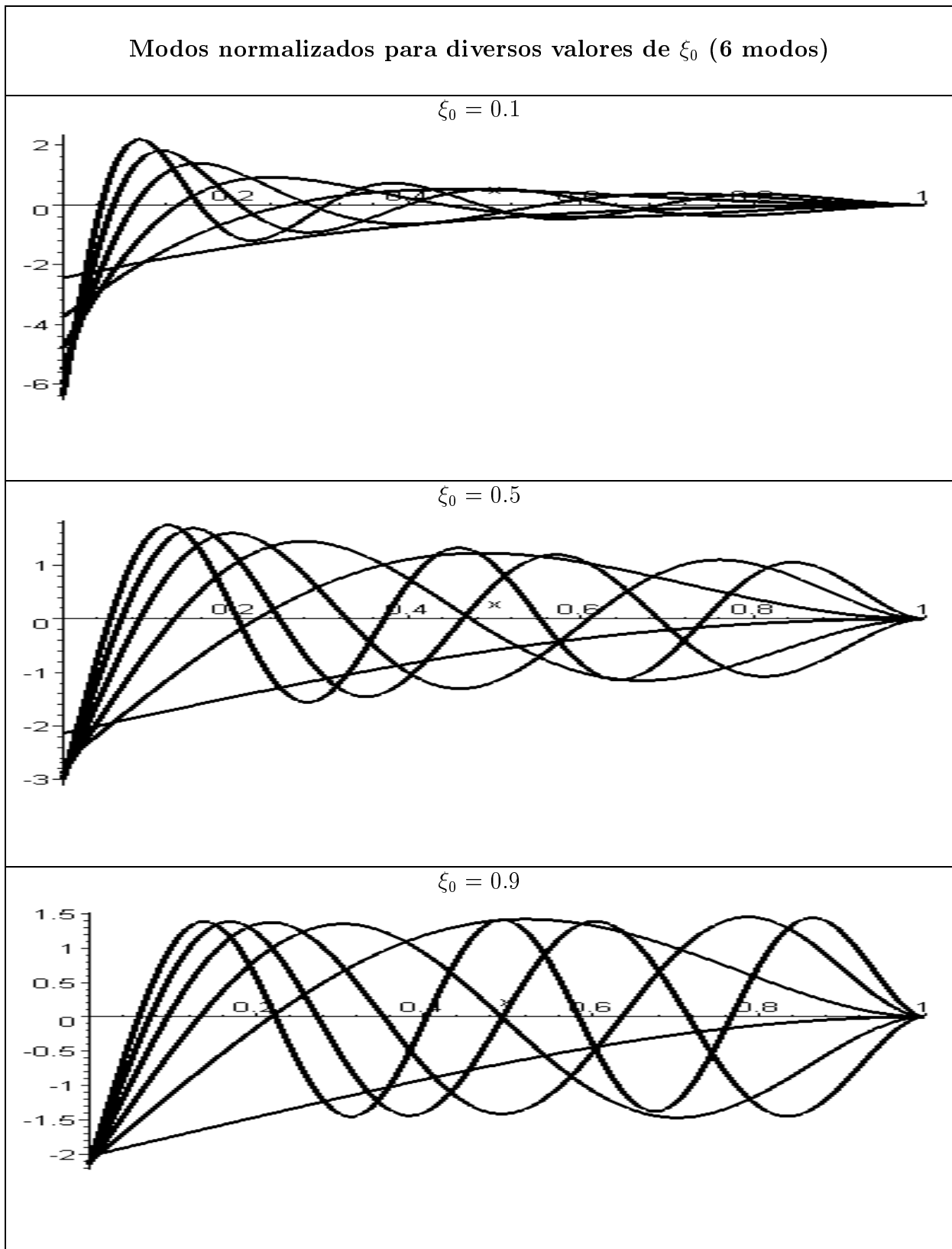
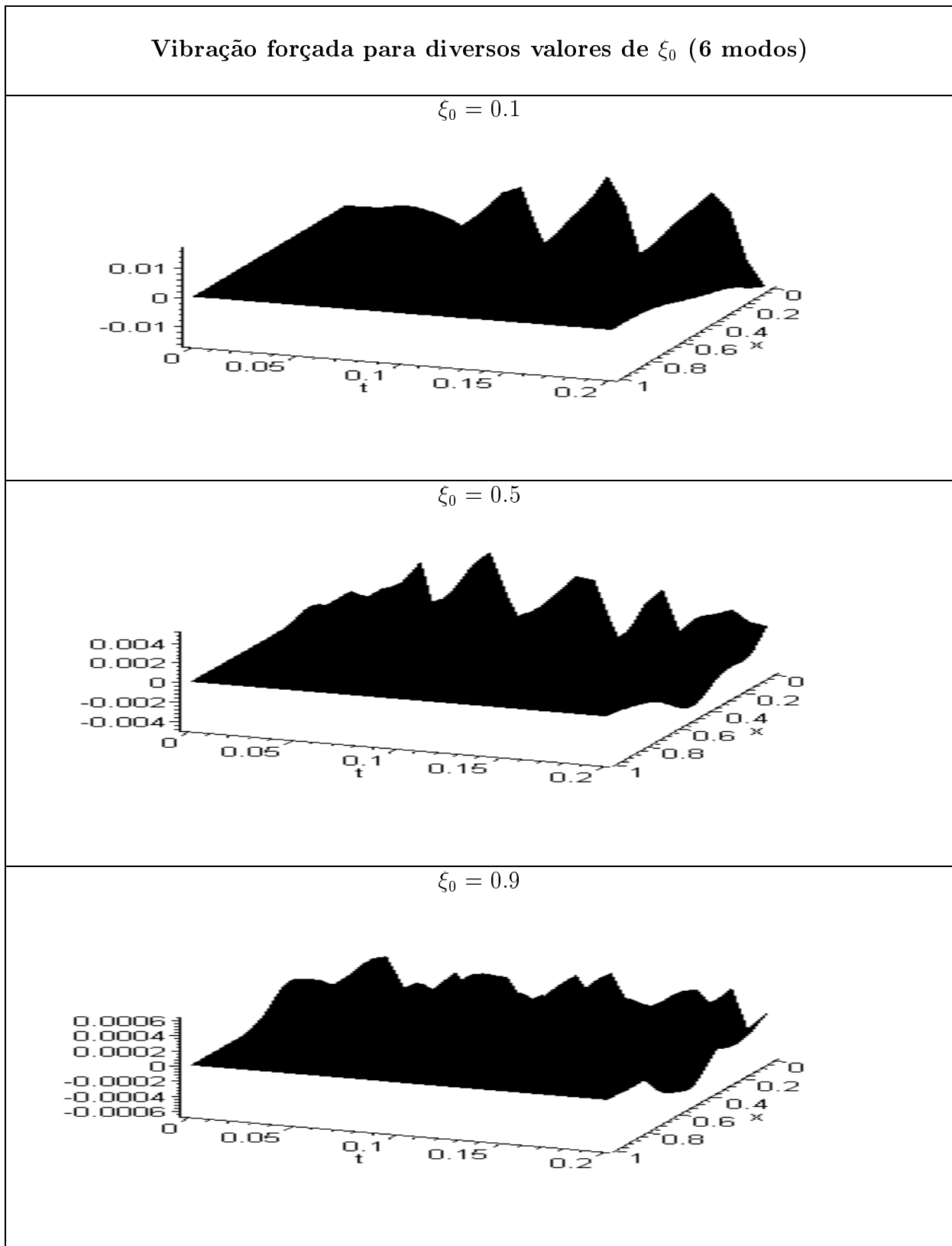


Figura 5.16 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos livre-fixo.

Figura 5.17 Modos normalizados $X(x)$ para a viga livre-fixa

Figura 5.18 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga livre-fixa*

6 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS COM VARIACÃO LINEAR NA SEÇÃO TRANSVERSAL COM MOLAS NUMA EXTREMIDADE

Neste capítulo, será considerado o caso de uma condição de contorno não-clássica. Este tipo de condição, em geral, introduz um acoplamento entre o deslocamento e suas derivadas. Assim, a abordagem matricial desenvolvida nos capítulos anteriores, relativa a obtenção das frequências e dos modos das vigas sob estudo, deverá incluir modificações na sua estrutura devido ao acoplamento existente nas condições de contorno não clássicas.

No caso de uma mola, colocada no extremo $0 < \xi_0 \leq x$, tem-se as condição de contorno

$$EIu_{xxx}(\xi_0, t) + k_m u(\xi_0, t) = 0, \quad u_{xx}(\xi_0, t) = 0.$$

Na procura de soluções oscilatórias

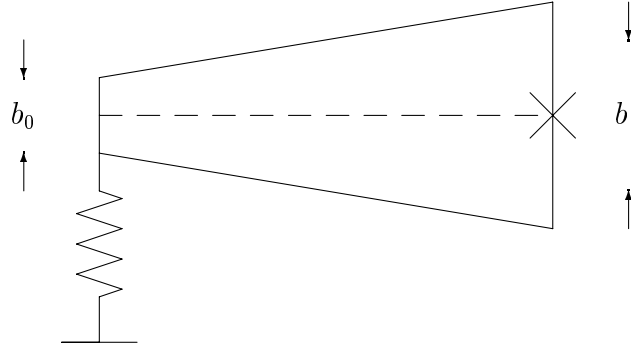
$$u = e^{i\omega t} X(x),$$

origina-se a condição espacial

$$EI \frac{d^3 X}{d\xi^3}(\xi_0) + k_m X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0.$$

A seguir, serão apresentados quatro casos de uma viga com variação linear na seção transversal, onde um extremo da viga está fixo a uma mola e o outro extremo fixo ou apoiado. Devido a não simetria da viga não se livre, A abordagem utiliza a equação governante e modal do capítulo anterior, alterando apenas as condições de contorno de acordo com cada caso. Os valores numéricos dos parâmetros permanecem os mesmos, uma vez que continuamos as simulações com vigas de aço resistentes.

6.1 Caso 7: Viga Mola-Apoiada



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$EI u_{xx}(\xi_0, t) = -k_m u(\xi_0, t), \quad u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$EI \frac{d^3 X}{d\xi^3}(\xi_0) + k_m X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0$$

Solução Geral da Equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Matriz do sistema linear, $z_0 = 2\beta \xi_0^{1/2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} J_3(z_0) + J_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} Y_3(z_0) + Y_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} I_3(z_0) + I_2(z_0) & -\frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} K_3(z_0) + K_2(z_0) \\ J_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix}$$

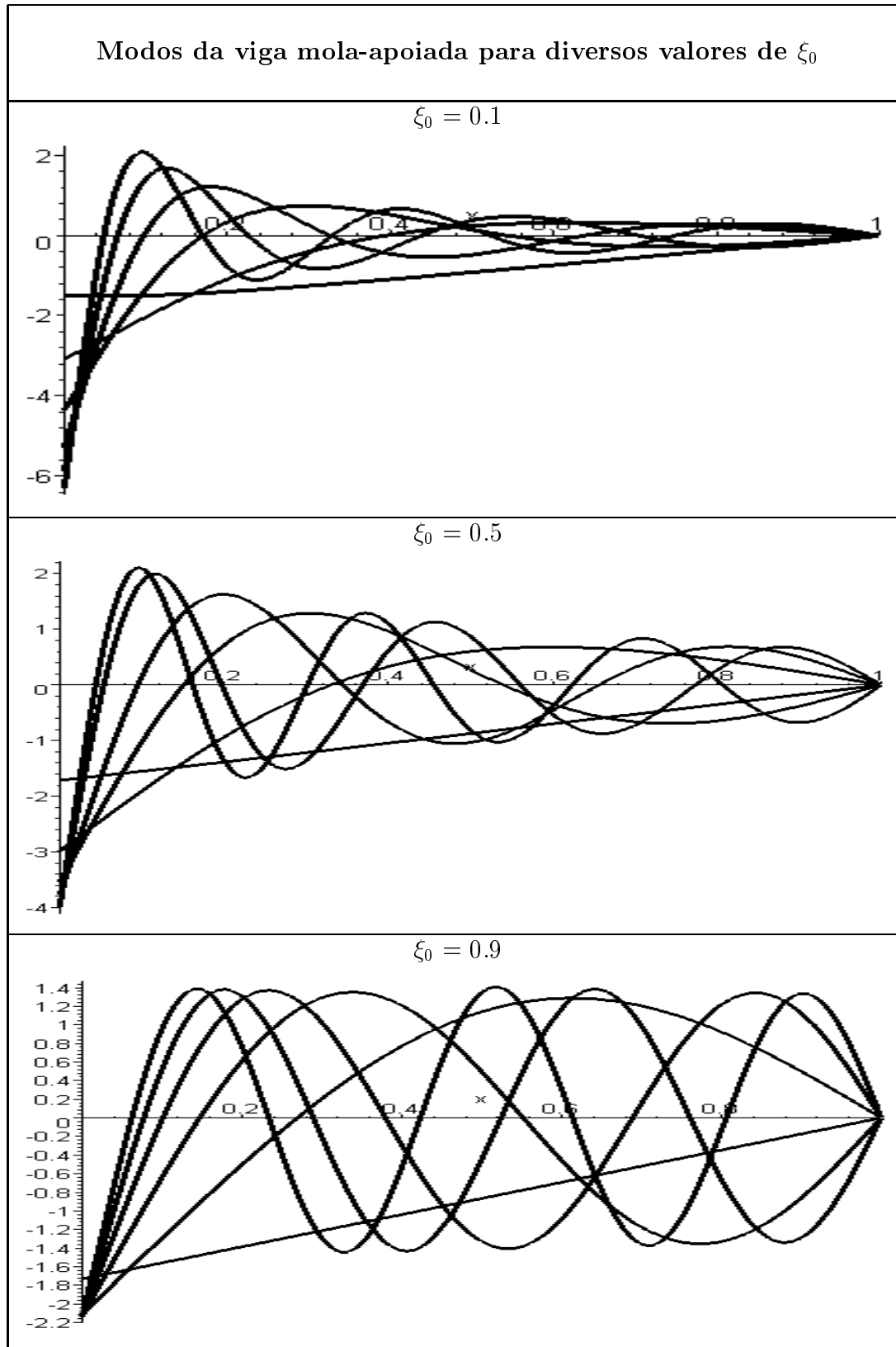


Figura 6.1 Modos da viga mola-apoiada $X(x)$ para diversos valores de ξ_0 (6 modos)

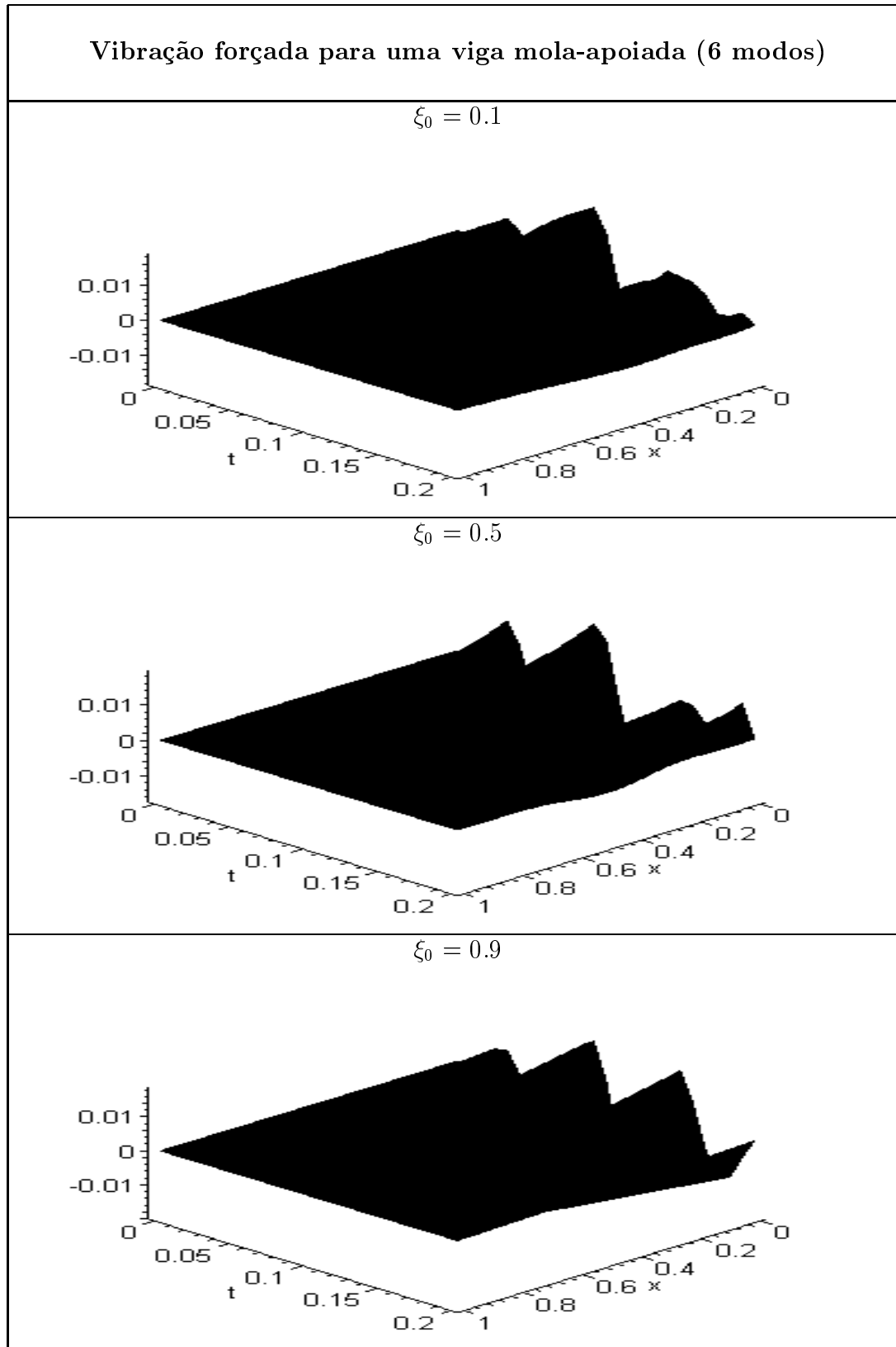
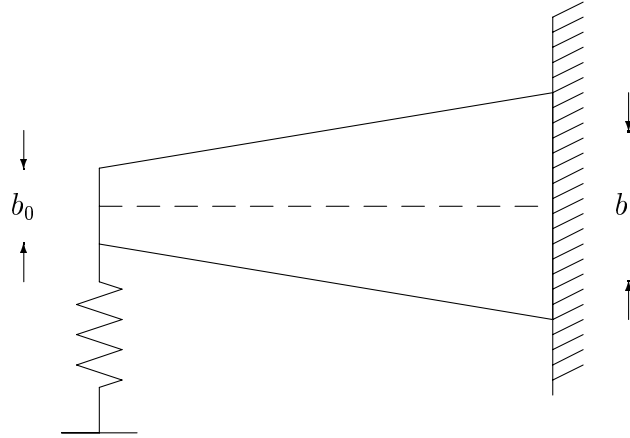


Figura 6.2 Vibração forçada $u(x,t)$ para uma viga mola-apoiada

6.2 Caso 8: Viga Mola-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$EIu_{xxx}(\xi_0, t) = -k_m u(\xi_0, t), \quad u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$EI \frac{d^3 X}{d\xi^3}(\xi_0) + k_m X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução Geral da Equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Matriz do sistema linear, $z_0 = 2\beta \xi_0^{1/2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} J_3(z_0) + J_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} Y_3(z_0) + Y_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} I_3(z_0) + I_2(z_0) & -\frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} K_3(z_0) + K_2(z_0) \\ J_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix}$$

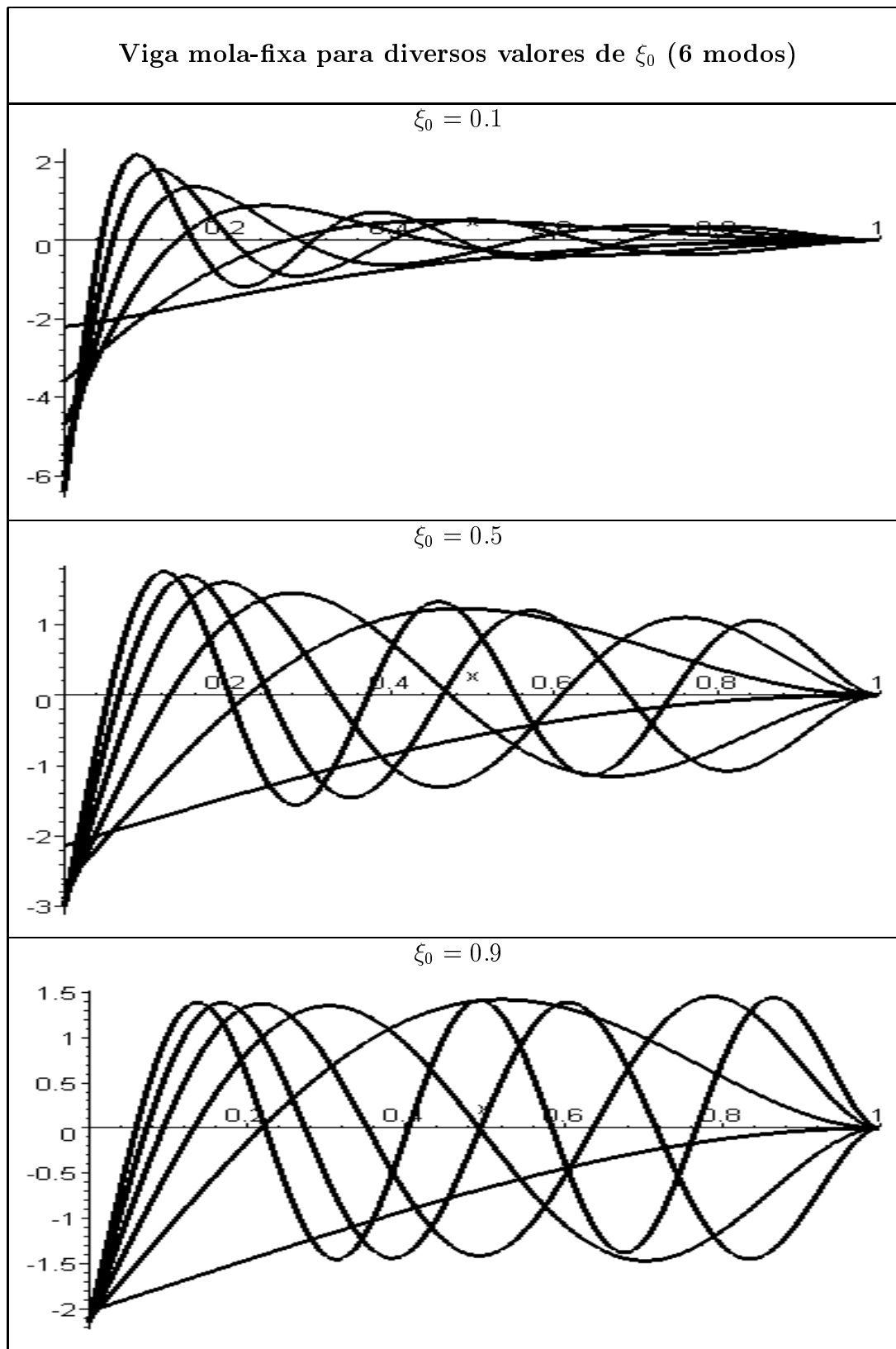
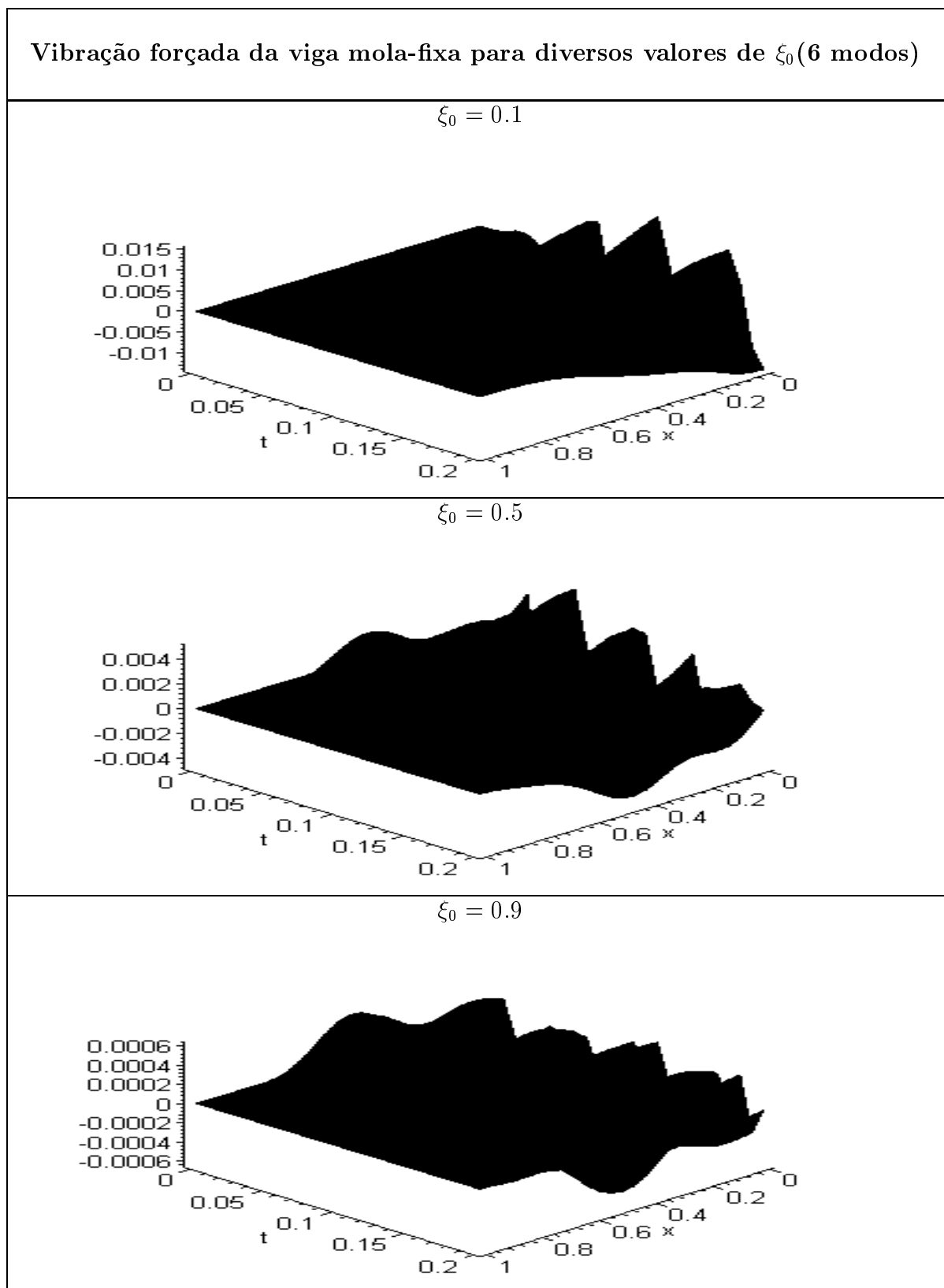
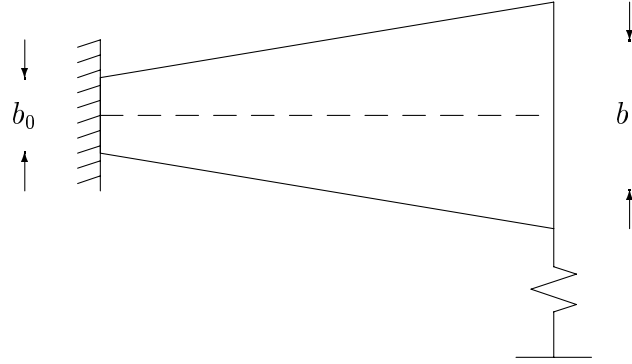


Figura 6.3 Modos $X(x)$ para a viga mola-fixa

Figura 6.4 Vibração forçada $u(x, t)$ para a viga mola-fixa

6.3 Caso 9: Viga Fixa-Mola



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0; \quad EIu_{xxx}(\xi_0, t) = -k_m u(\xi_0, t), \quad u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

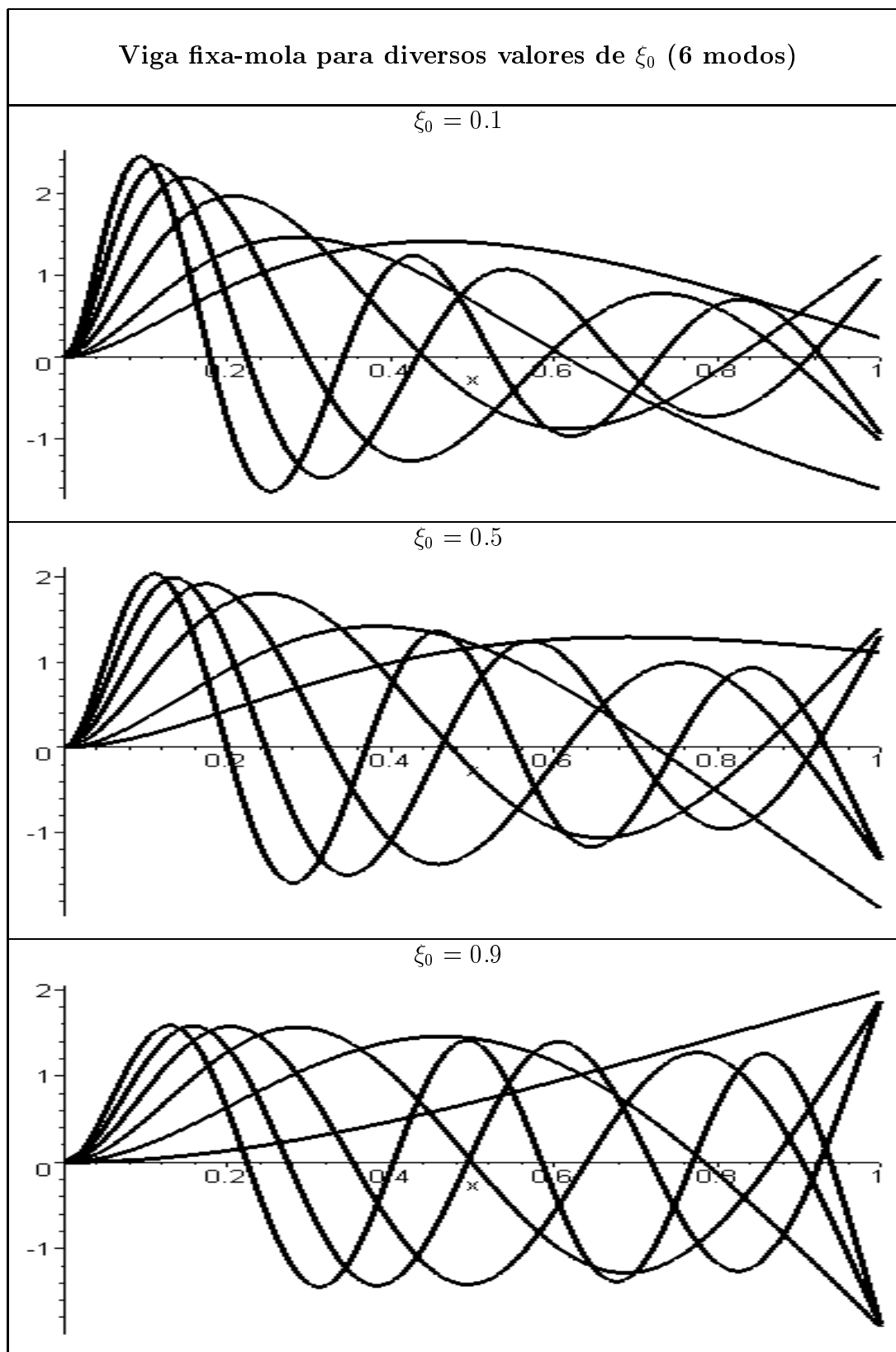
$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0; \quad EI \frac{d^3 X}{d\xi^3}(1) + k_m X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0,$$

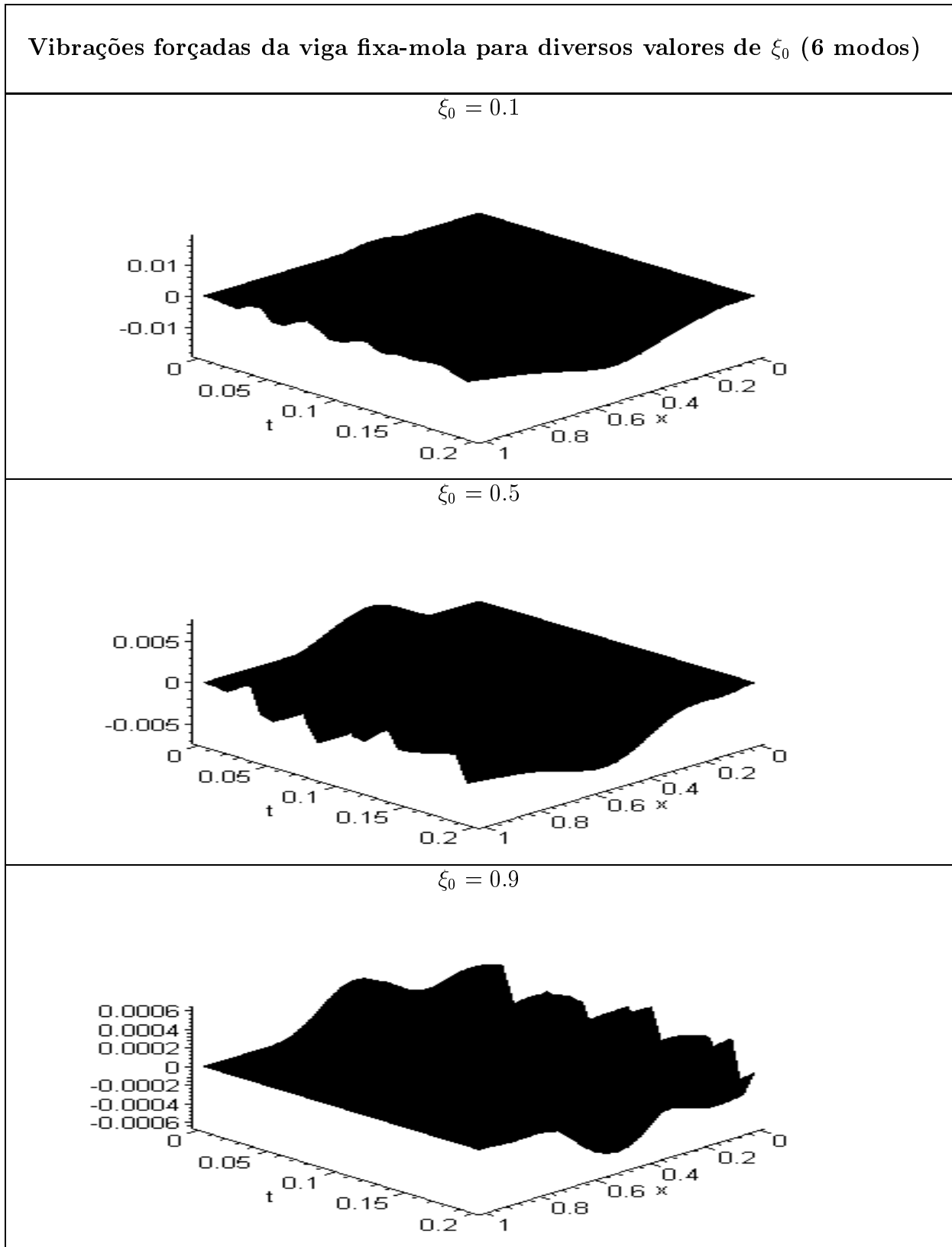
Solução Geral da Equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

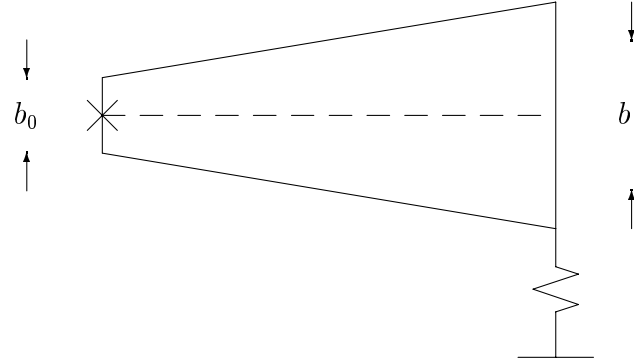
Matriz do sistema linear, $z_0 = 2\beta \xi_0^{1/2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} J_3(z_0) + J_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} Y_3(z_0) + Y_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} I_3(z_0) + I_2(z_0) & -\frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} K_3(z_0) + K_2(z_0) \\ J_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix}$$

Figura 6.5 Modos $X(x)$ para a viga fixa-mola

Figura 6.6 Vibração forçada $u(x,t)$ para a viga fixa-mola

6.4 Caso 10: Viga Apoiada-Mola



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0; \quad EI u_{xxx}(\xi_0, t) = -k_m u(\xi_0, t), \quad u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^4 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi^2 X(\xi)$$

Condições de contorno:

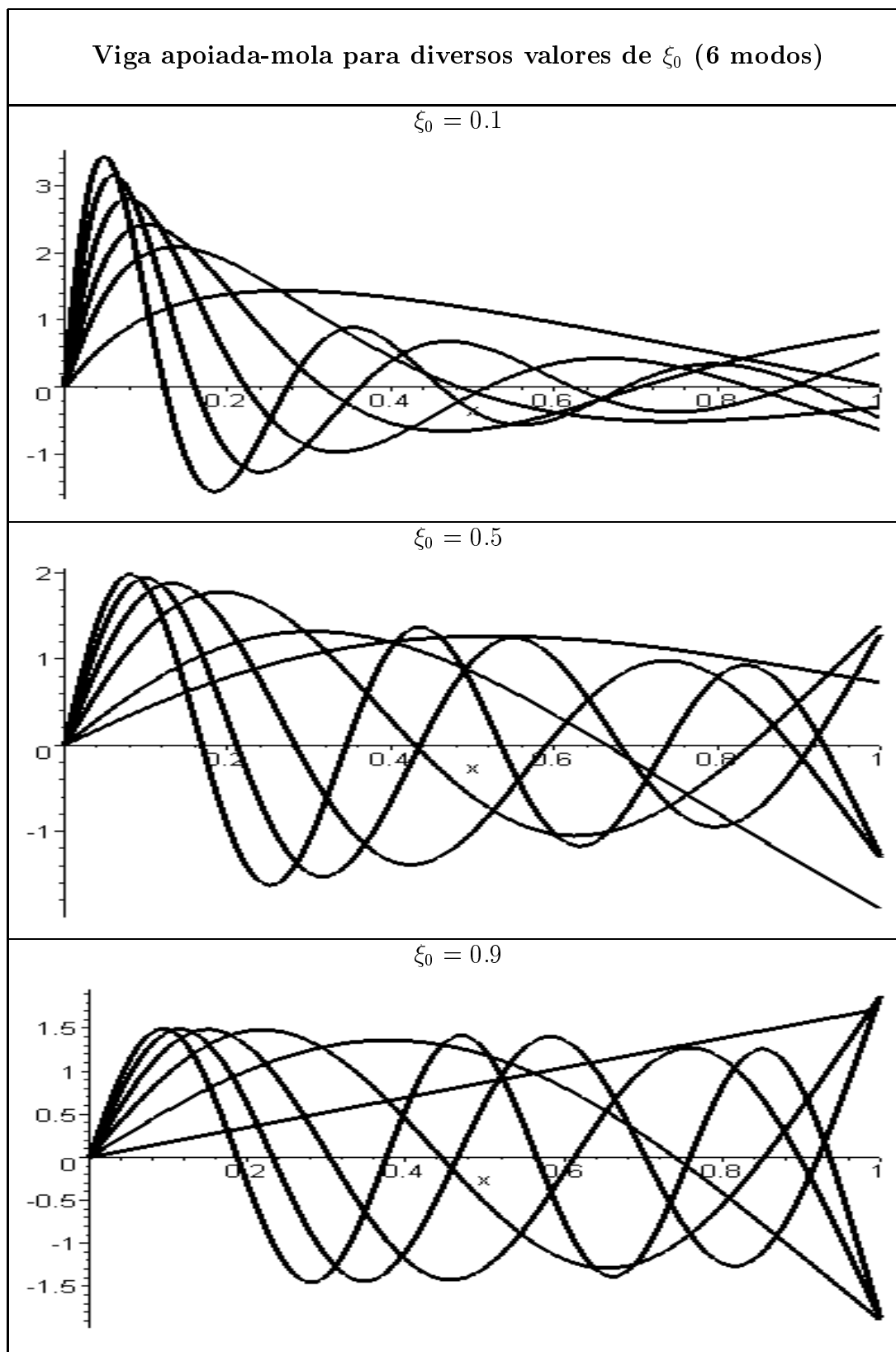
$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0; \quad EI \frac{d^3 X}{d\xi^3}(1) + k_m X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0,$$

Solução Geral da Equação modal:

$$X(\xi) = \xi^{-1} [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Matriz do sistema linear, $z_0 = 2\beta \xi_0^{1/2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} J_3(z_0) + J_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} Y_3(z_0) + Y_2(z_0) & \frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} I_3(z_0) + I_2(z_0) & -\frac{EI_1 \beta^3 \xi_0^{5/2}}{k_m} K_3(z_0) + K_2(z_0) \\ J_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_4(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_4(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix}$$

Figura 6.7 Modos $X(x)$ para a viga apoiada-mola

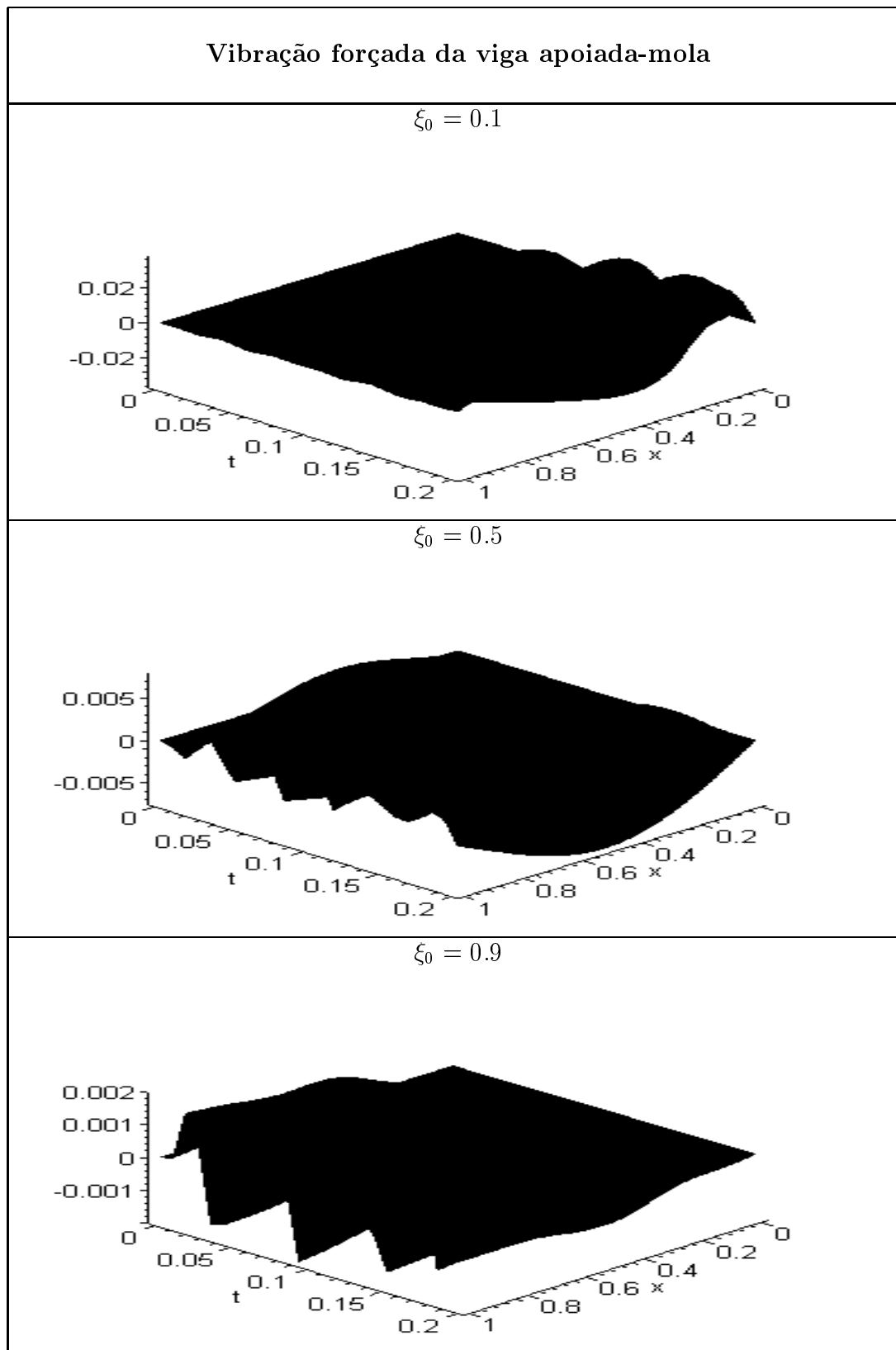


Figura 6.8 Vibração forçada $u(x,t)$ da viga apoiada-mola (6 modos)

7 CÁLCULO MATRICIAL DOS MODOS DAS VIGAS EM FORMA DE CUNHA

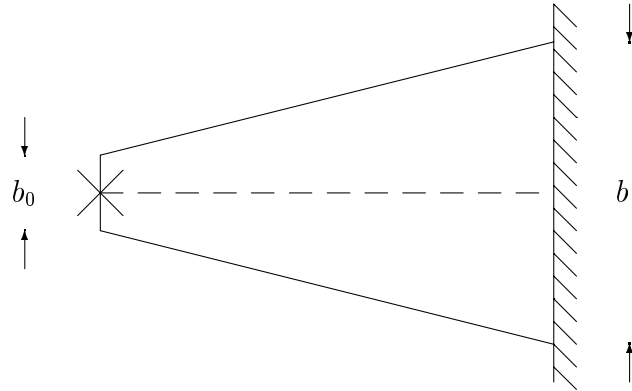
Neste capítulo está relacionada a uma família de vigas que se afilam de tal modo que atravessa todas as dimensões transversais da viga, atravessando o plano de vibração, é uma função linear de distância ao longo da viga. Dimensões que atravessam em direção normal o plano de vibração são constantes ao longo da viga. São ditas vigas em forma de cunha.

A abordagem utiliza a mesma equação governante das vigas com variação linear na seção transversal, enquanto que a equação modal é alterada para

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

e alteram as condições de contorno de acordo com cada caso.

7.1 Caso 1: Viga Apoiada-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

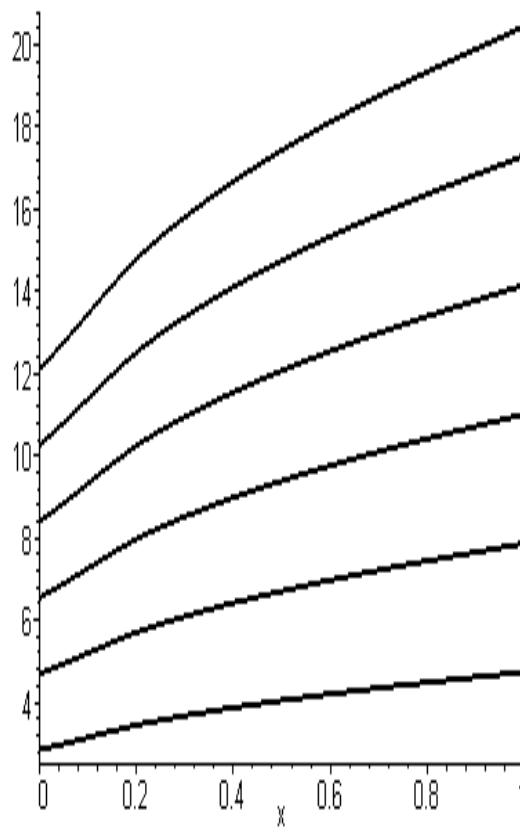
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

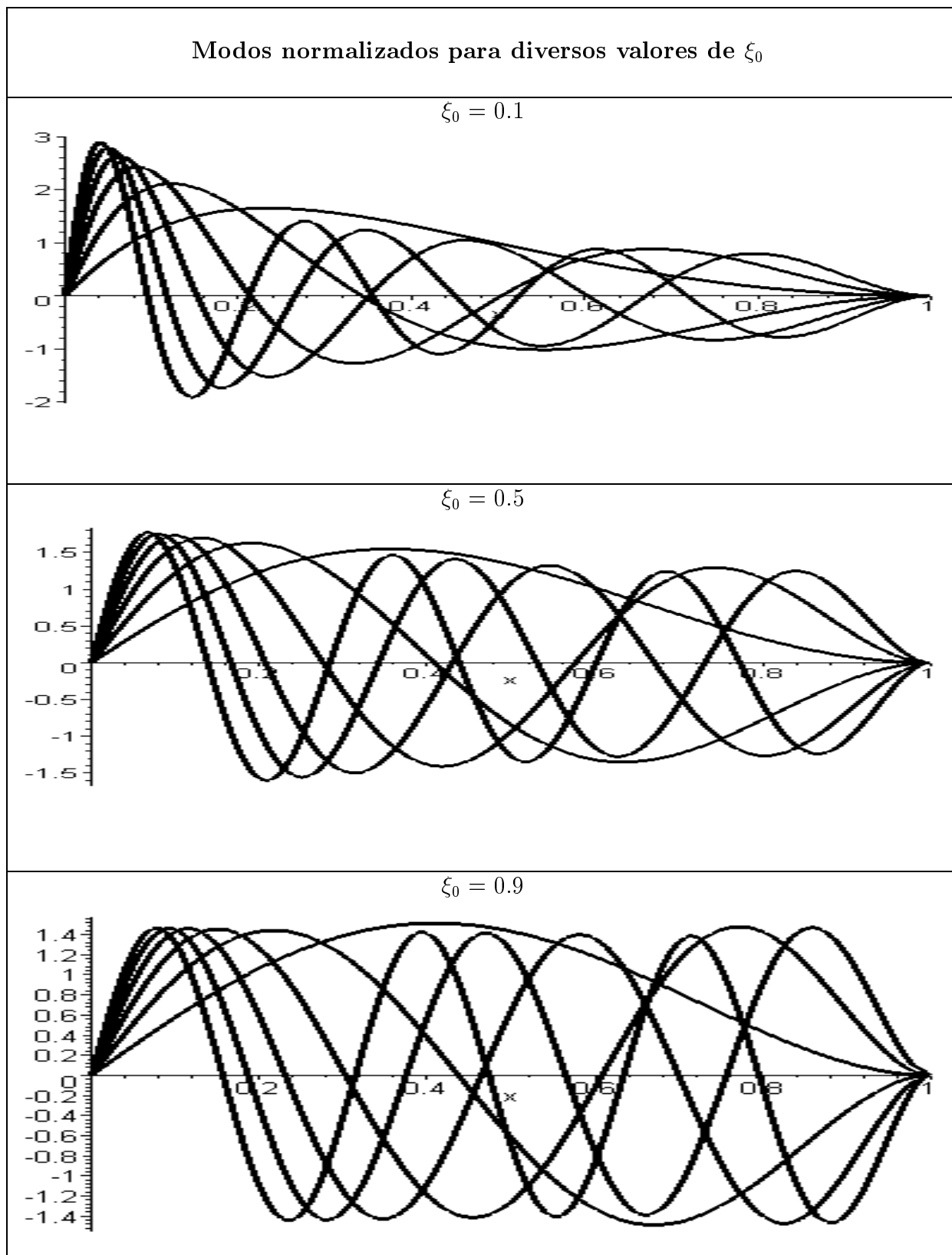
Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_1(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_1(2\beta) & Y_1(2\beta) & I_1(2\beta) & K_1(2\beta) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & -I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 2.9377 | 4.9198 | 6.9353 | 8.9667 | 11.0081 | 13.0560 |
| 0.2 | 3.1304 | 5.3141 | 7.5413 | 9.7852 | 12.0384 | 14.2971 |
| 0.3 | 3.2768 | 5.6243 | 8.0166 | 10.4242 | 12.8397 | 15.2597 |
| 0.4 | 3.3995 | 5.8897 | 8.4220 | 10.9675 | 13.5195 | 16.0752 |
| 0.5 | 3.5071 | 6.1260 | 8.7819 | 11.4488 | 14.1209 | 16.7958 |
| 0.6 | 3.6042 | 6.3411 | 9.1090 | 11.8855 | 14.6660 | 17.4486 |
| 0.7 | 3.6932 | 6.5402 | 9.4110 | 12.2881 | 15.1682 | 18.0498 |
| 0.8 | 3.7759 | 6.7264 | 9.6930 | 12.6637 | 15.6363 | 18.6100 |
| 0.9 | 3.8553 | 6.9020 | 9.9585 | 13.0171 | 16.0766 | 19.1365 |

Tabela 7.1 Autovalores corrigidos para a viga apoiada-fixa

Figura 7.1 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-fixo de b_0/b_1 vs. β^* .

Figura 7.2 Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-fixa

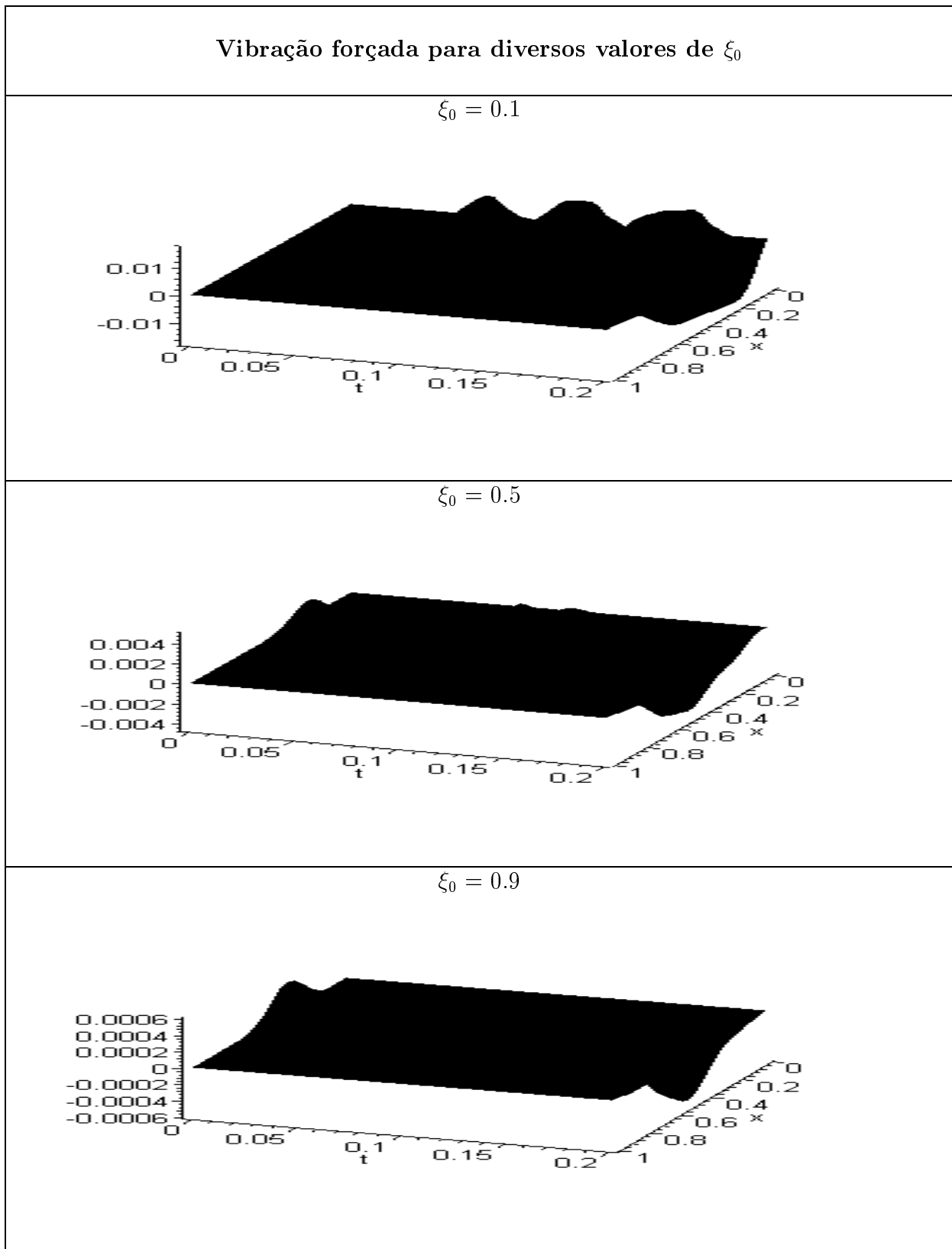
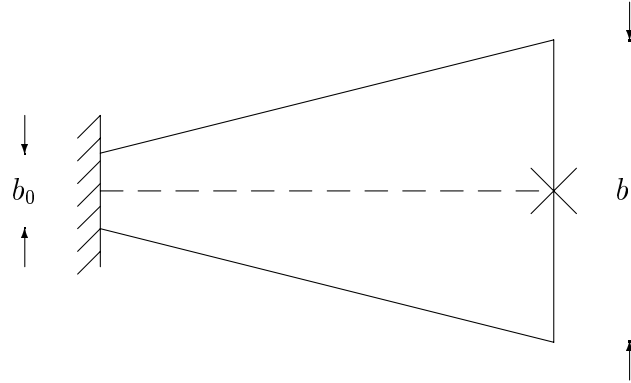


Figura 7.3 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-fixa*

7.2 Caso 2: Viga Fixa-Apoiada



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

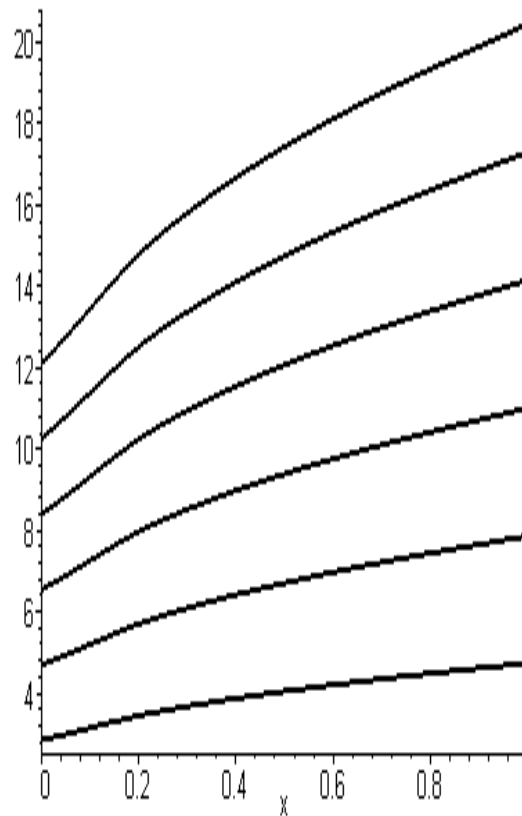
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_1(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & -I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_1(2\beta) & Y_1(2\beta) & I_1(2\beta) & K_1(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 2.1880 | 4.5257 | 6.6435 | 8.7333 | 10.8132 | 12.8886 |
| 0.2 | 2.5296 | 4.9983 | 7.3144 | 9.6077 | 11.8924 | 14.1732 |
| 0.3 | 2.7871 | 5.3672 | 7.8345 | 10.2831 | 12.7245 | 15.1623 |
| 0.4 | 3.0024 | 5.6814 | 8.2757 | 10.8547 | 13.4278 | 15.9979 |
| 0.5 | 3.1911 | 5.9602 | 8.6661 | 11.3598 | 14.0486 | 16.7351 |
| 0.6 | 3.3612 | 6.2137 | 9.0202 | 11.8174 | 14.6108 | 17.4022 |
| 0.7 | 3.5172 | 6.4479 | 9.3468 | 12.2390 | 15.1284 | 18.0163 |
| 0.8 | 3.6622 | 6.6668 | 9.6516 | 12.6320 | 15.6107 | 18.5884 |
| 0.9 | 3.7982 | 6.8730 | 9.9384 | 13.0017 | 16.0641 | 19.1261 |

Tabela 7.2 Autovalores corrigidos para a viga fixa-apoiada

Figura 7.4 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-apoiado de b_0/b_1 vs. β^* .

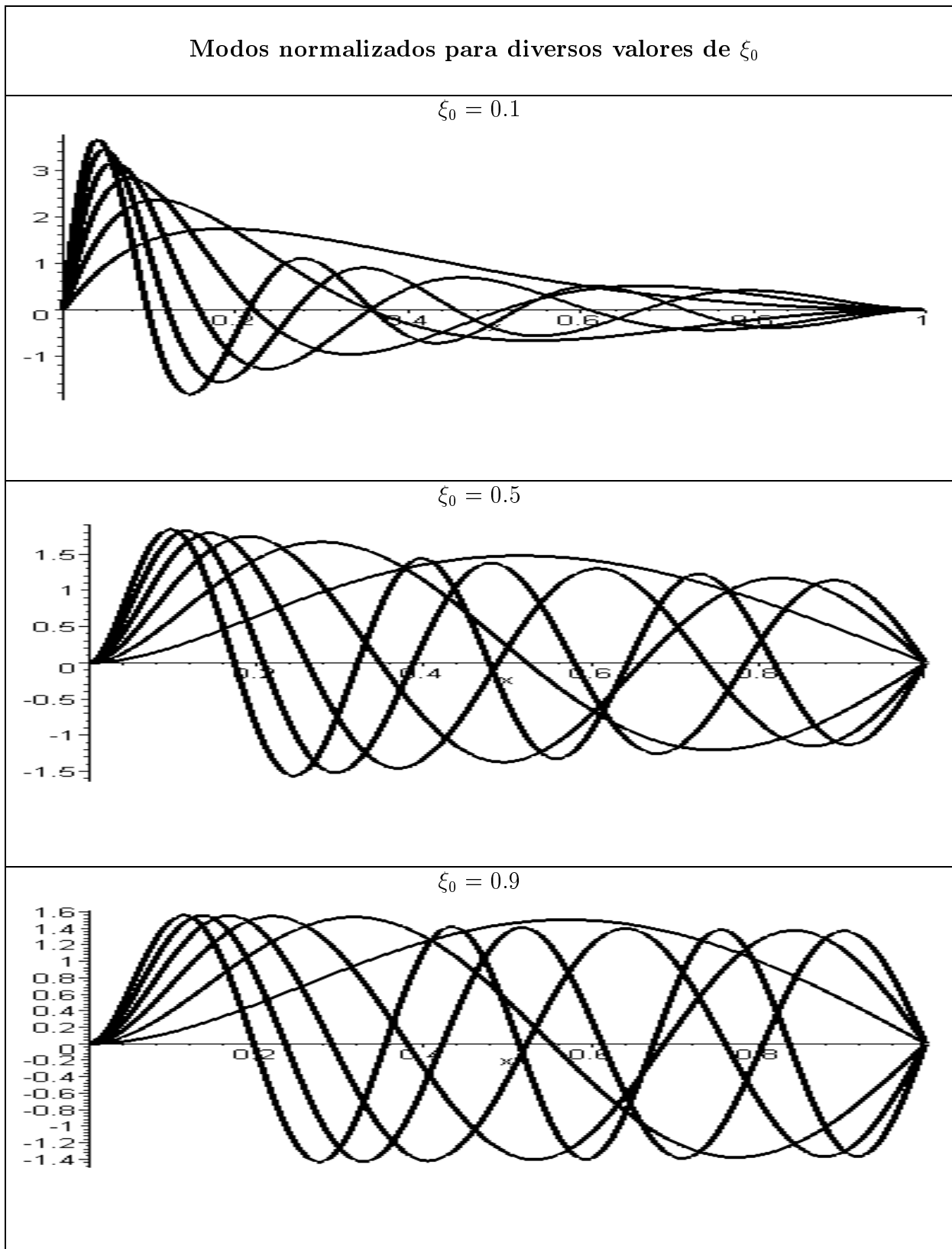


Figura 7.5 Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-apoiada

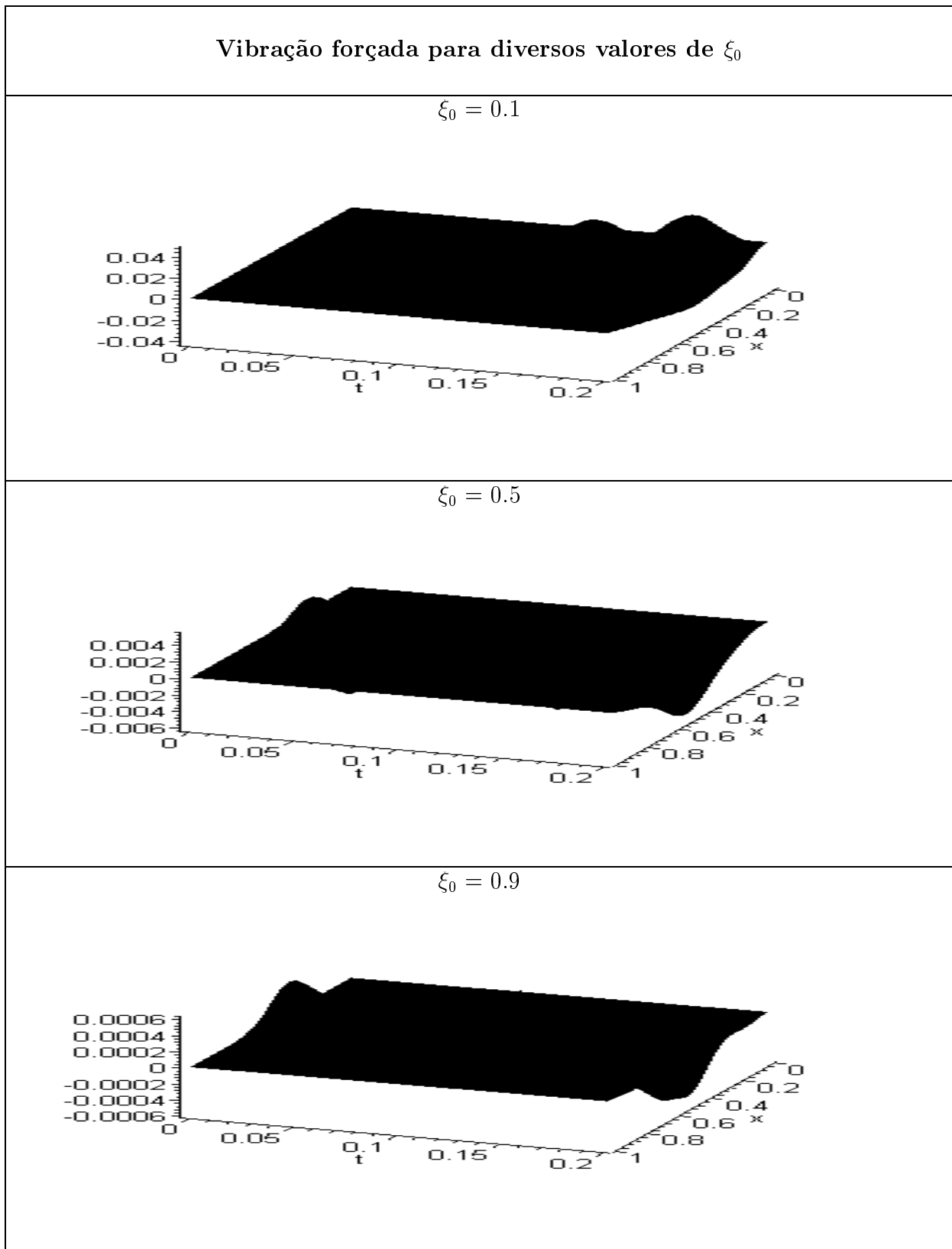
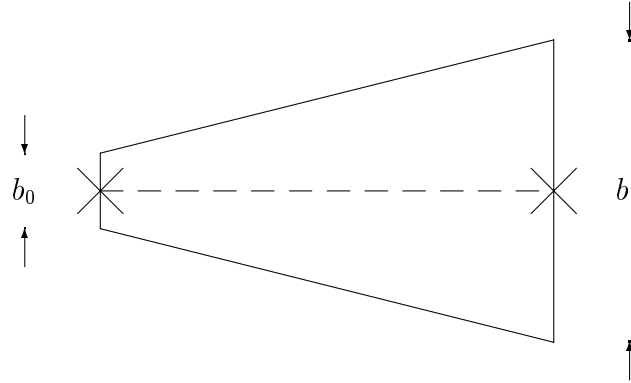


Figura 7.6 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-apoiada*

7.3 Caso 3: Viga Apoiada-Apoiada



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

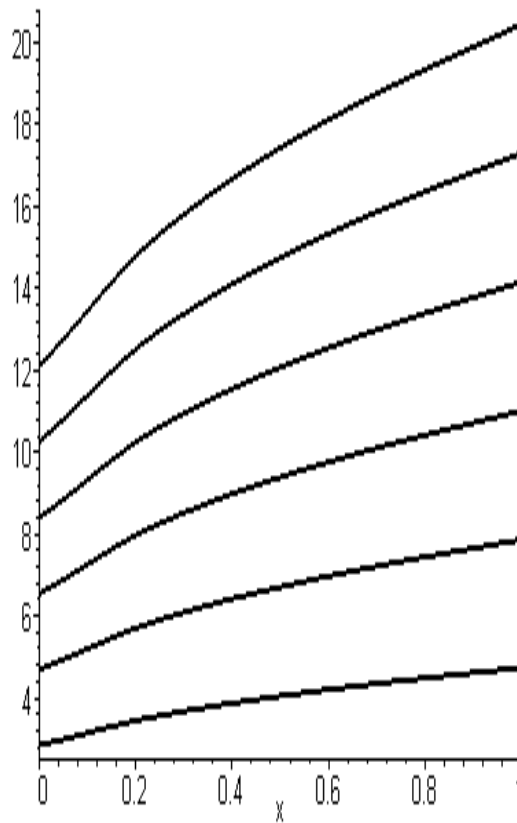
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_1(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_1(2\beta) & Y_1(2\beta) & I_1(2\beta) & K_1(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores Corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 1.9722 | 4.2572 | 6.3254 | 8.3810 | 10.4363 | 12.4933 |
| 0.2 | 2.2181 | 4.6200 | 6.8907 | 9.1554 | 11.4209 | 13.6877 |
| 0.3 | 2.3969 | 4.9085 | 7.3372 | 9.7626 | 12.1887 | 14.6158 |
| 0.4 | 2.5430 | 5.1575 | 7.7199 | 10.2804 | 12.8415 | 15.4032 |
| 0.5 | 2.6686 | 5.3807 | 8.0609 | 10.7402 | 13.4197 | 16.0997 |
| 0.6 | 2.7802 | 5.5851 | 8.3719 | 11.1581 | 13.9445 | 16.7312 |
| 0.7 | 2.8813 | 5.7752 | 8.6598 | 11.5441 | 14.4286 | 17.3131 |
| 0.8 | 2.9743 | 5.9536 | 8.9292 | 11.9047 | 14.8802 | 17.8558 |
| 0.9 | 3.0606 | 6.1224 | 9.1834 | 12.2443 | 15.3052 | 18.3662 |

Tabela 7.3 Autovalores corrigidos para a viga apoiada-apoiada

Figura 7.7 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos apoiado-apoiado de b_0/b_1 vs. β^* .

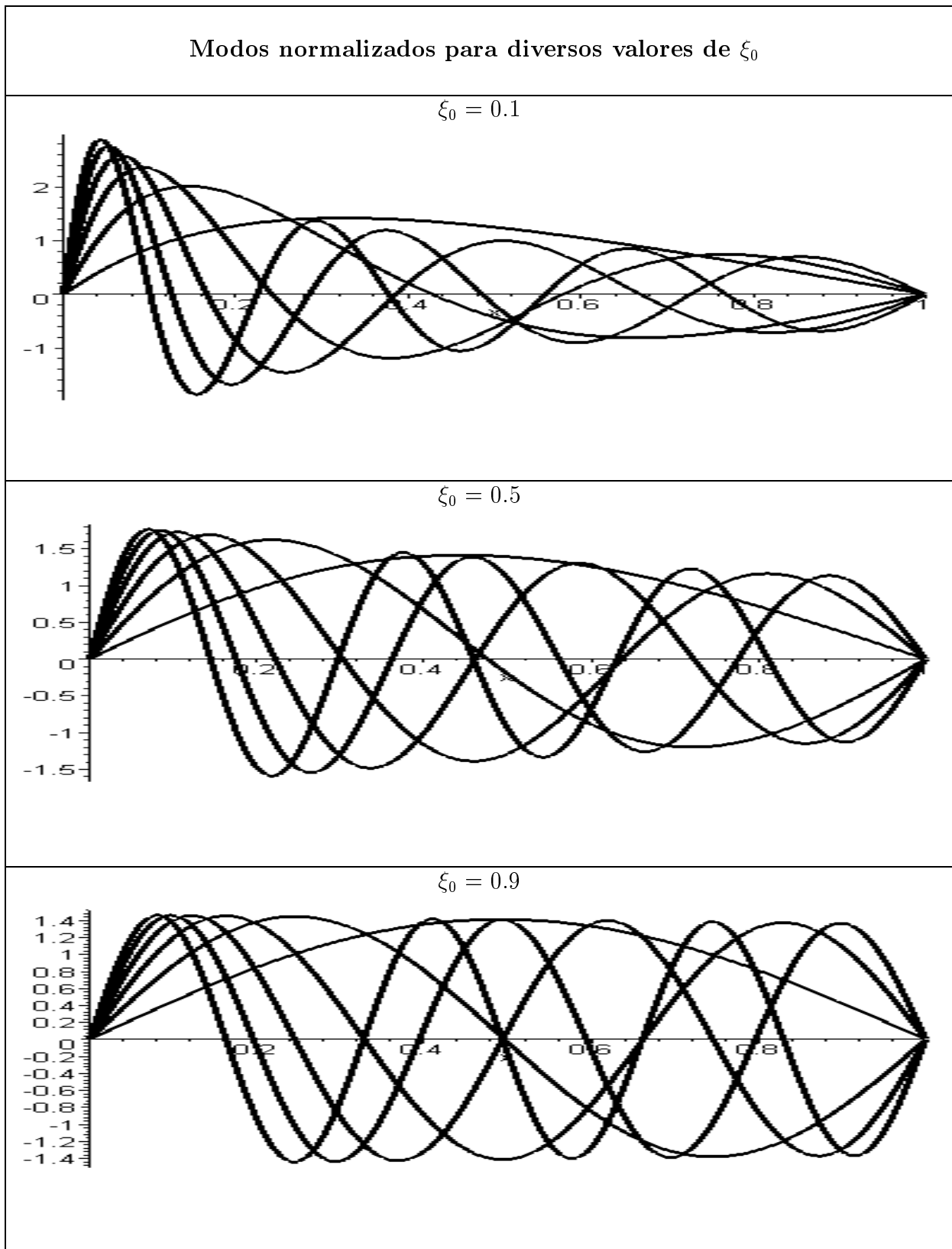


Figura 7.8 Modos normalizados $X(x)$ para a viga apoiada-apoiada

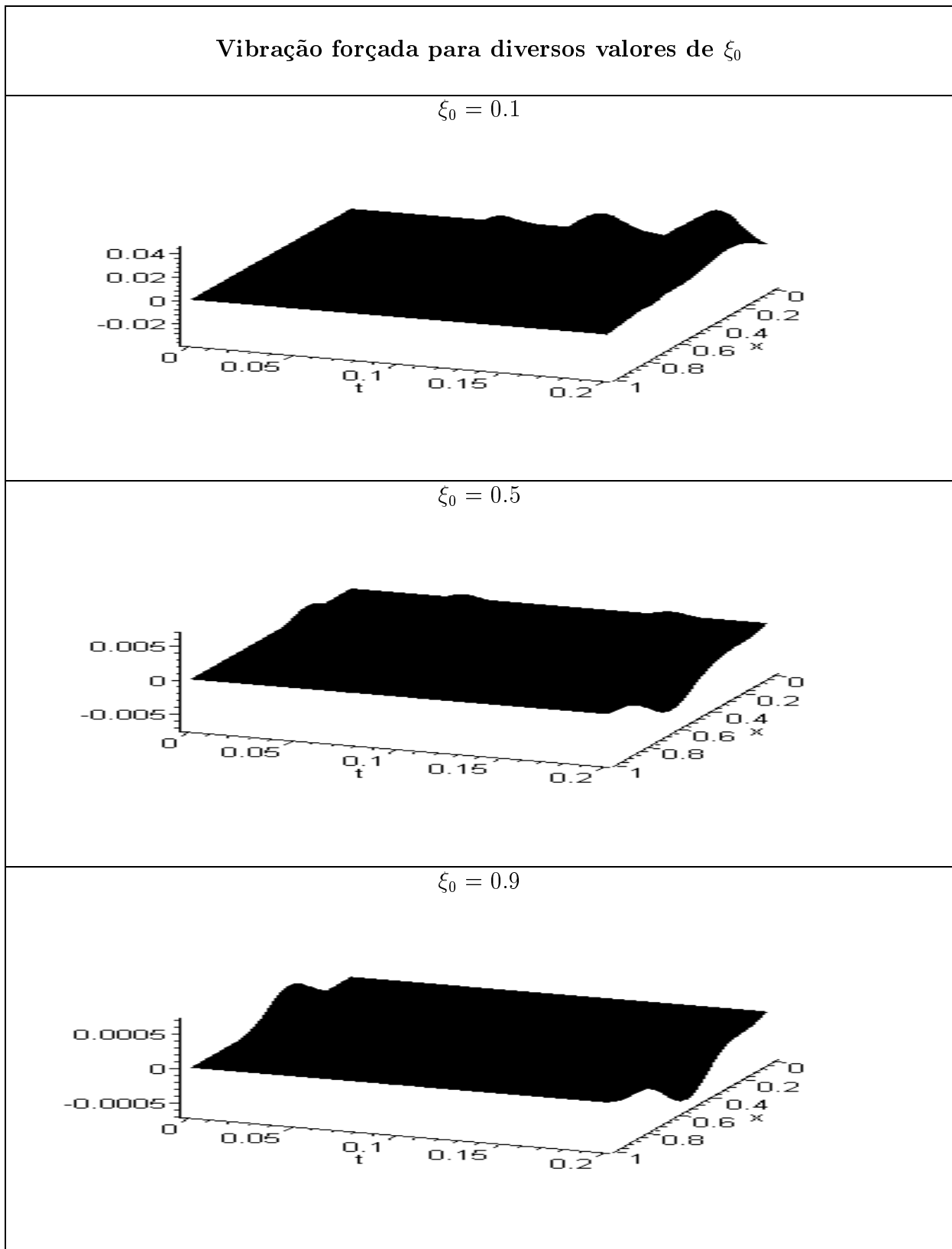
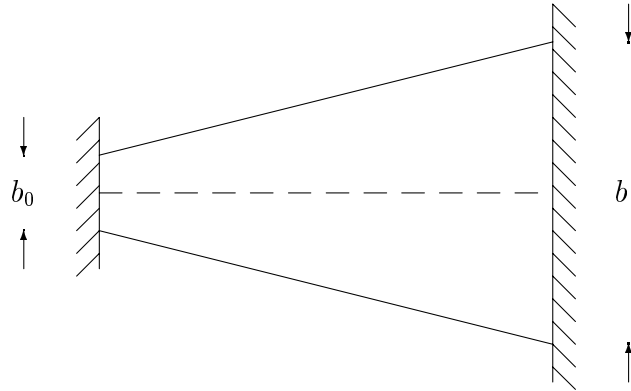


Figura 7.9 Vibração forçada $u(x, t)$ da viga apoiada-apoiada

7.4 Caso 4: Viga Fixa-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{dx}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{dx}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

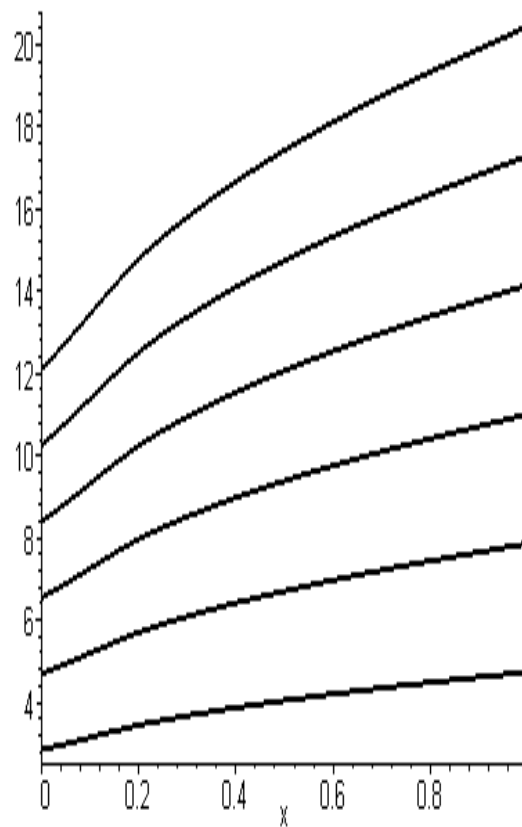
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_1(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & -I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_1(2\beta) & Y_1(2\beta) & I_1(2\beta) & K_1(2\beta) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & -I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 3.1440 | 5.1970 | 7.2600 | 9.3238 | 11.3885 | 13.4539 |
| 0.2 | 3.4412 | 5.6987 | 7.9694 | 10.2405 | 12.5121 | 14.7842 |
| 0.3 | 3.6720 | 6.0871 | 8.5169 | 10.9466 | 13.3768 | 15.8072 |
| 0.4 | 3.8680 | 6.4160 | 8.9797 | 11.5431 | 14.1067 | 16.6705 |
| 0.5 | 4.0417 | 6.7068 | 9.3882 | 12.0692 | 14.7503 | 17.4316 |
| 0.6 | 4.1995 | 6.9702 | 9.7580 | 12.5452 | 15.3325 | 18.1199 |
| 0.7 | 4.3450 | 7.2129 | 10.0984 | 12.9832 | 15.8682 | 18.7531 |
| 0.8 | 4.4809 | 7.4391 | 10.4155 | 13.3912 | 16.3669 | 19.3426 |
| 0.9 | 4.6088 | 7.6518 | 10.7136 | 13.7745 | 16.8355 | 19.8964 |

Tabela 7.4 Autovalores corrigidos para a viga fixa-fixa

Figura 7.10 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-fixo de b_0/b_1 vs. β^* .

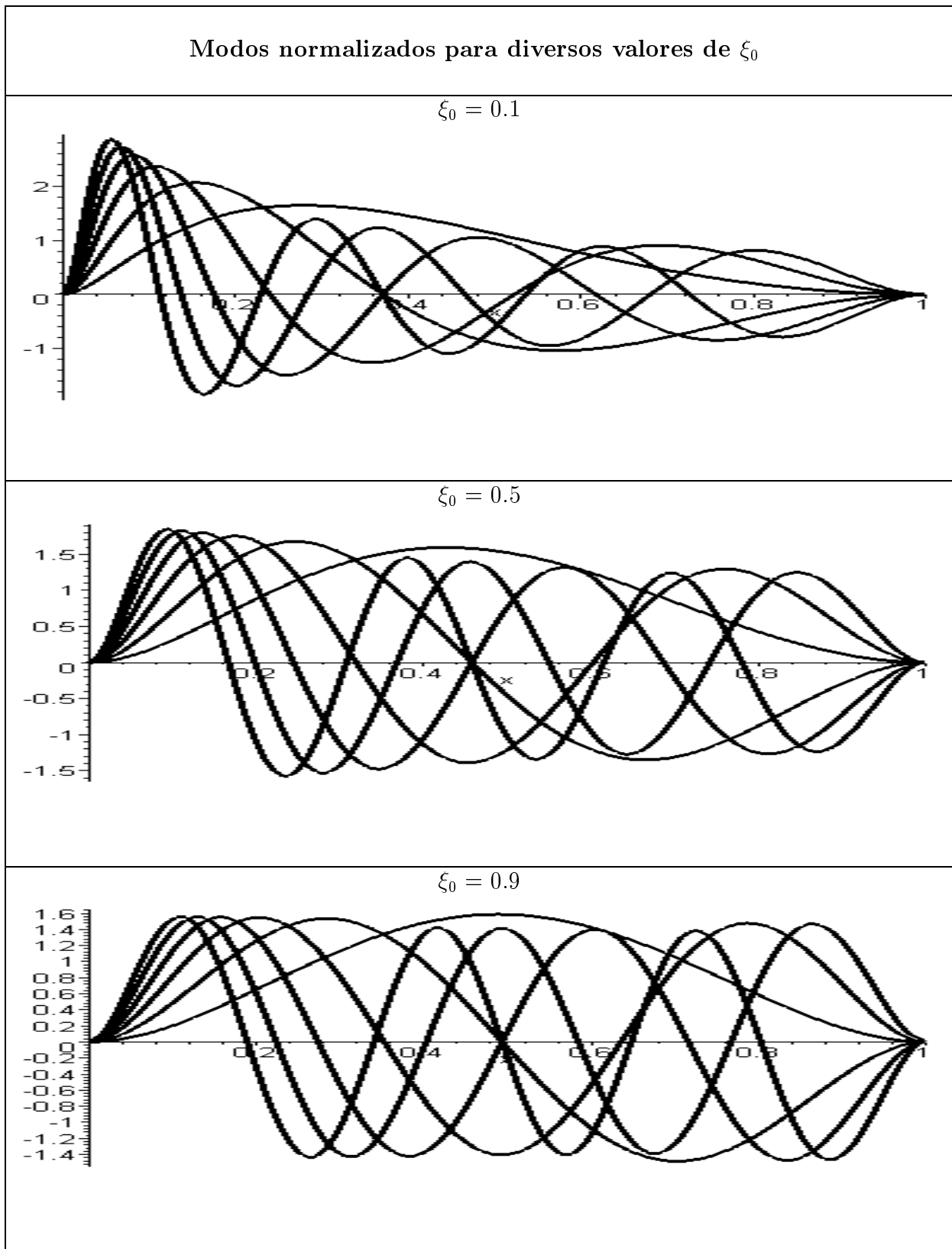


Figura 7.11 Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-fixa

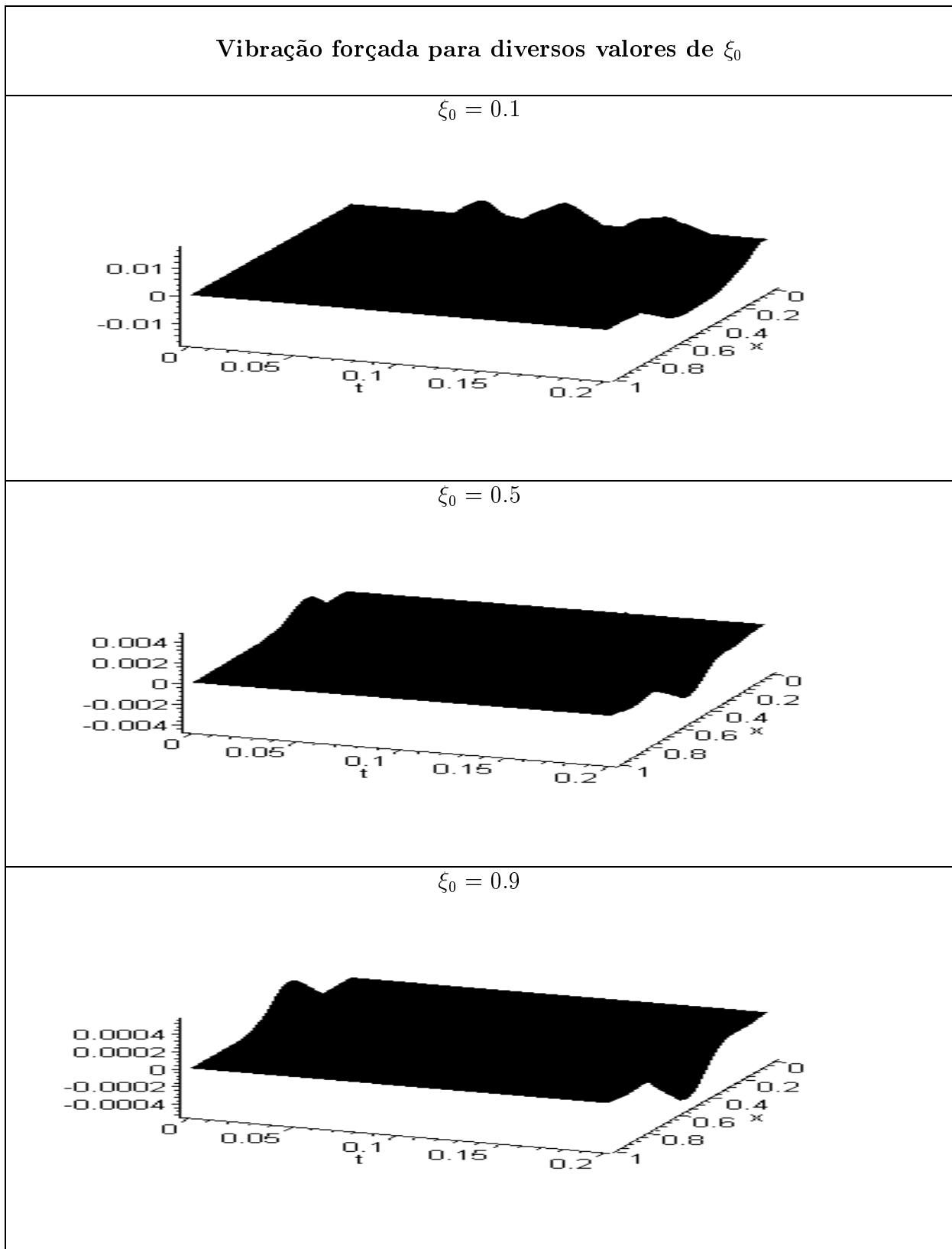
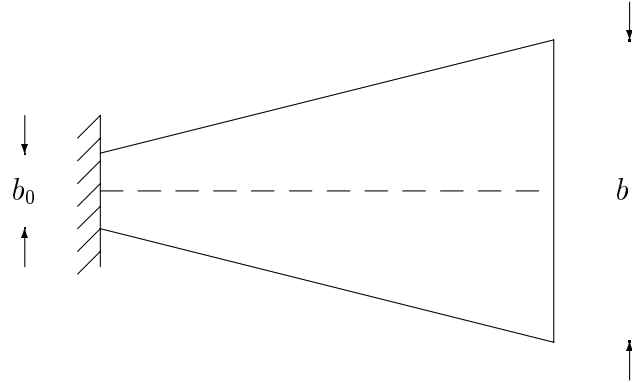


Figura 7.12 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-fixa*

7.5 Caso 5: Viga Fixa-Livre



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_x(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{dX}{d\xi}(\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(EI(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

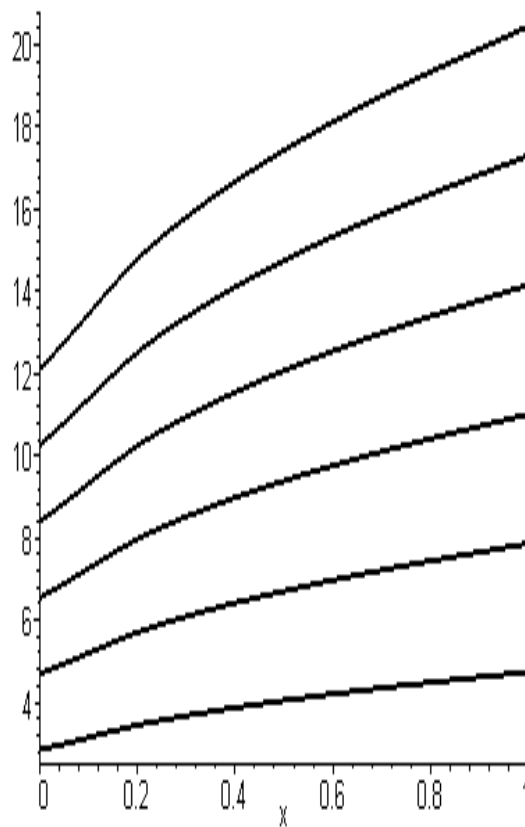
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_1(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_1(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & -I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & -K_2(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 0.5444 | 2.5147 | 4.9347 | 7.0816 | 9.1884 | 11.2792 |
| 0.2 | 0.7826 | 2.9329 | 5.4722 | 7.8133 | 10.1214 | 12.4158 |
| 0.3 | 0.9711 | 3.2512 | 5.8932 | 8.3819 | 10.8434 | 13.2931 |
| 0.4 | 1.1338 | 3.5195 | 6.2531 | 8.8653 | 11.4553 | 14.0354 |
| 0.5 | 1.2798 | 3.7563 | 6.5733 | 9.2938 | 11.9965 | 14.6912 |
| 0.6 | 1.0239 | 3.9711 | 6.8624 | 9.6831 | 12.4874 | 15.2855 |
| 0.7 | 1.5390 | 4.1692 | 7.1355 | 10.0426 | 12.9402 | 15.8330 |
| 0.8 | 1.6567 | 4.3542 | 7.3887 | 10.3786 | 13.3626 | 16.3436 |
| 0.9 | 1.7685 | 4.5286 | 7.6276 | 10.6952 | 13.7603 | 16.8238 |

Tabela 7.5 Autovalores corrigidos para a viga fixa-livre

Figura 7.13 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos fixo-livre de b_0/b_1 vs. β^* .

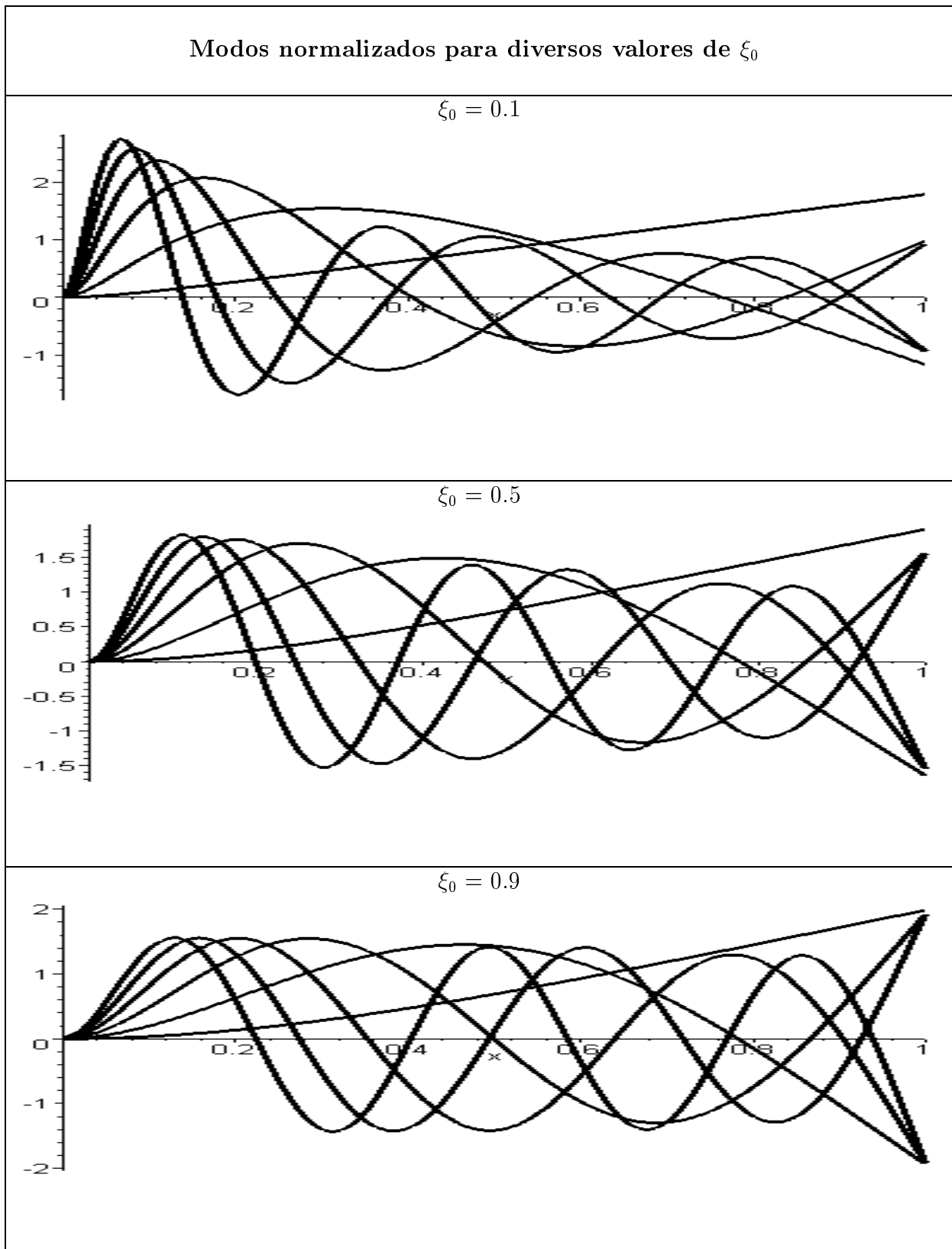


Figura 7.14 Modos normalizados $X(x)$ para a viga fixa-livre

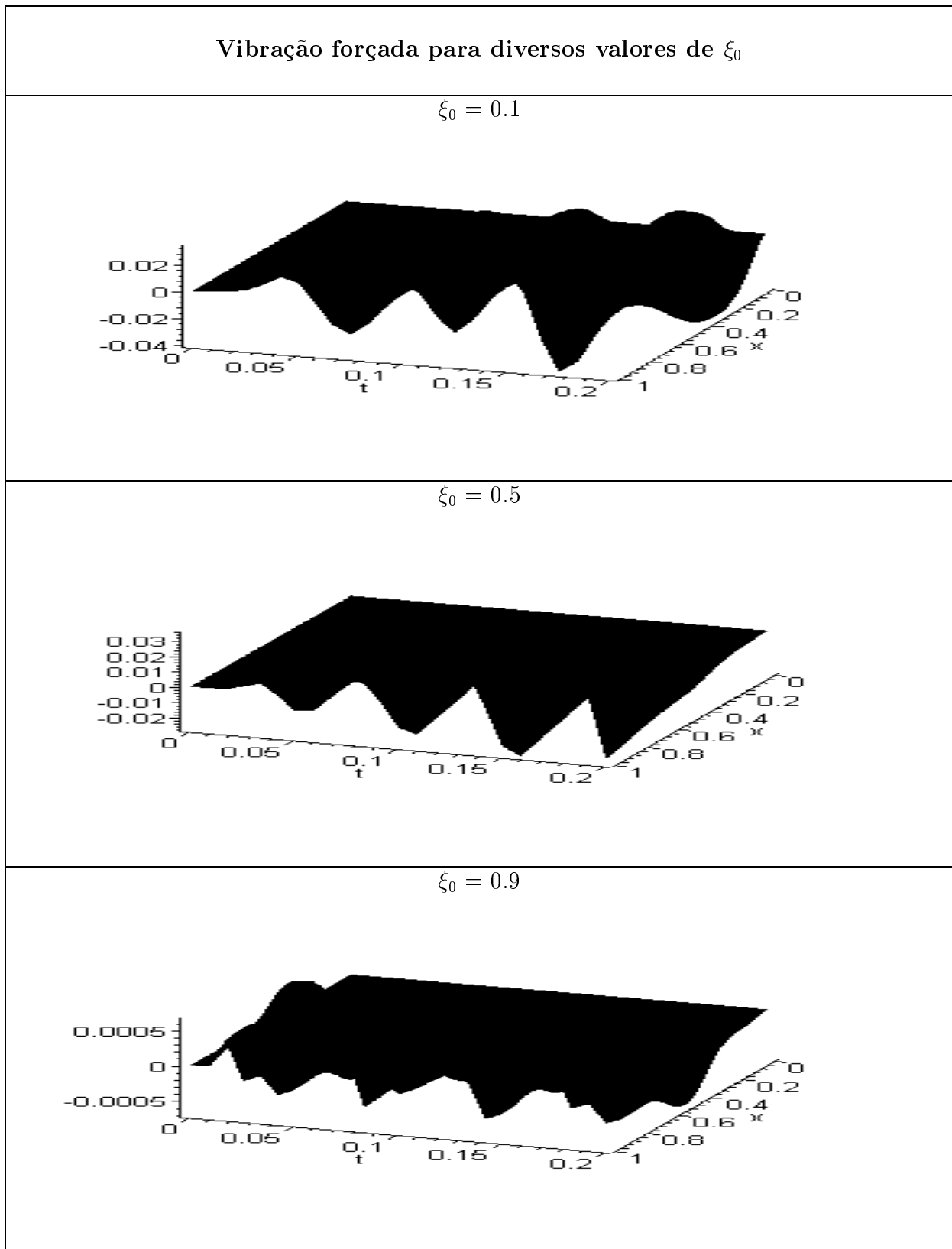
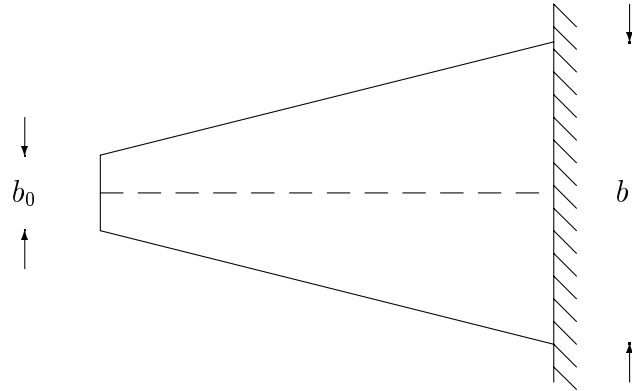


Figura 7.15 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga fixa-livre*

7.6 Caso 6: Viga Livre-Fixa



Equação governante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Condições de contorno:

$$u(\xi_0, t) = u_{xxx}(\xi_0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0$$

Equação modal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^3 \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right) = \beta^4 \xi X(\xi)$$

Condições de contorno:

$$X(\xi_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(EI(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (\xi_0) = 0,$$

$$X(1) = \frac{dX}{d\xi}(1) = 0$$

Solução geral da equação modal:

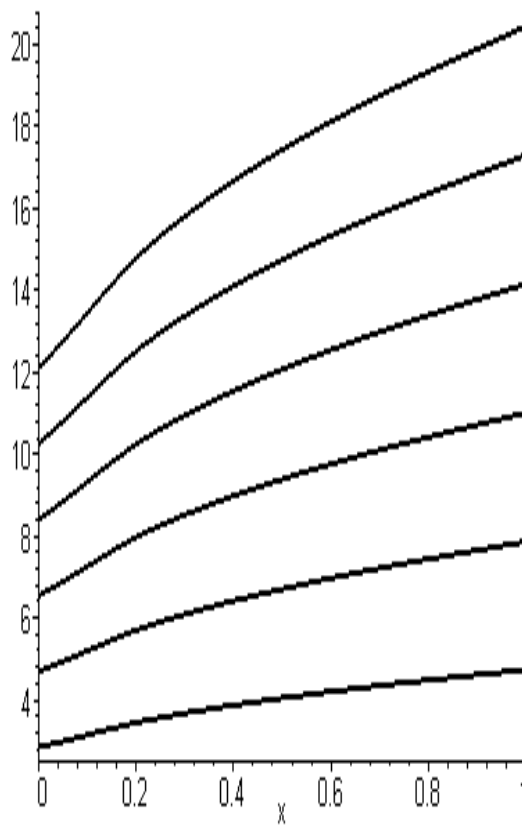
$$X(\xi) = \xi^2 [c_1 J_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_2 Y_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_3 I_2(2\beta \xi^{1/2}) + c_4 K_2(2\beta \xi^{1/2})]$$

Sistema linear da equação característica

$$\begin{bmatrix} J_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_3(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_3(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & Y_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & I_2(2\beta \xi_0^{1/2}) & K_2(2\beta \xi_0^{1/2}) \\ J_1(2\beta) & Y_1(2\beta) & I_1(2\beta) & K_1(2\beta) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & -I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Autovalores corrigidos $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | β_1^* | β_2^* | β_3^* | β_4^* | β_5^* | β_6^* |
| 0.1 | 2.1519 | 3.8640 | 5.7300 | 7.6757 | 9.6638 | 11.6757 |
| 0.2 | 2.0718 | 3.9677 | 6.0733 | 8.2533 | 10.4687 | 12.7027 |
| 0.3 | 2.0203 | 4.0774 | 6.3709 | 8.7282 | 11.1150 | 13.5166 |
| 0.4 | 1.9835 | 4.1818 | 6.6351 | 9.1408 | 11.6706 | 14.2122 |
| 0.5 | 1.9555 | 4.2799 | 6.8749 | 9.5105 | 12.1656 | 14.8298 |
| 0.6 | 1.9332 | 4.3719 | 7.0960 | 9.8486 | 12.6164 | 15.3911 |
| 0.7 | 1.9149 | 4.4588 | 7.3022 | 10.1620 | 13.0331 | 15.9091 |
| 0.8 | 1.8995 | 4.5410 | 7.4961 | 10.4555 | 13.4225 | 16.3926 |
| 0.9 | 1.8865 | 4.6193 | 7.6798 | 10.7325 | 13.7893 | 16.8476 |

Tabela 7.6 Autovalores corrigidos para a viga livre-fixa

Figura 7.16 Gráfico da variação dos autovalores com respeito ao quociente das áreas dos extremos livre-fixo de b_0/b_1 vs. β^* .

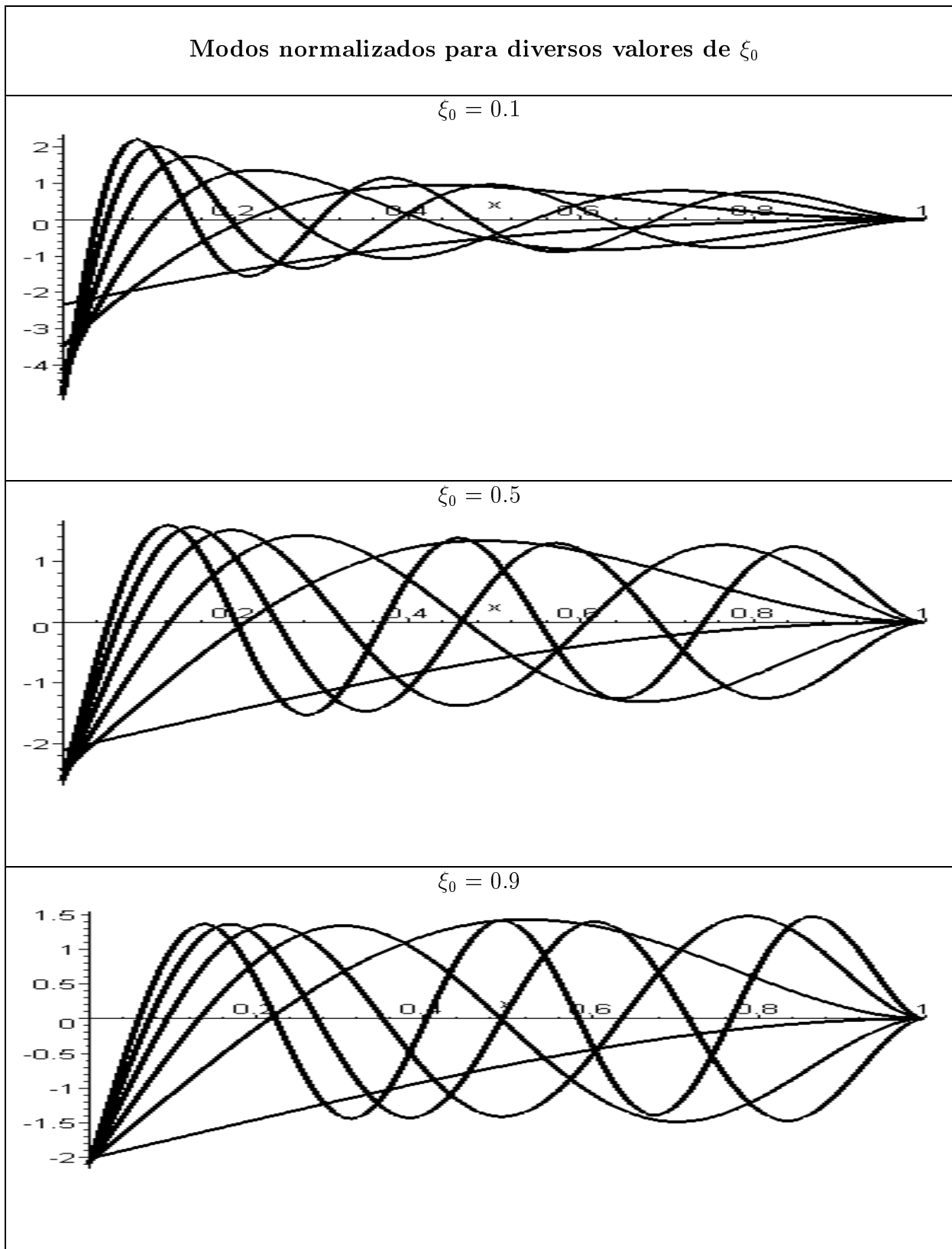


Figura 7.17 Modos normalizados $X(x)$ para a viga livre-fixa

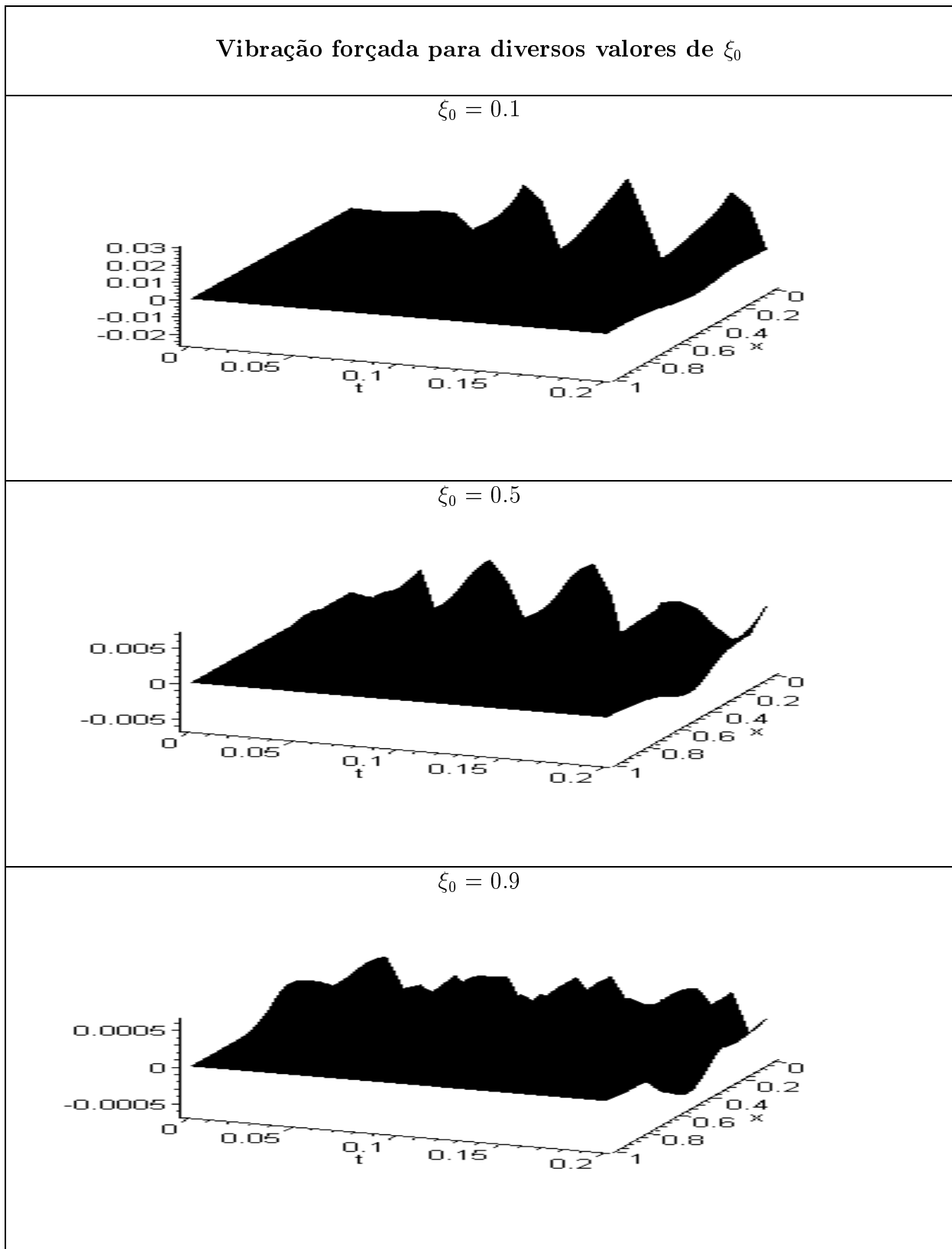


Figura 7.18 *Vibração forçada $u(x, t)$ da viga livre-fixa*

8 CONCLUSÕES

Foram determinados os modos de vibração de vigas com secção transversal linear e quadrática e vibrações forçadas devidas ao efeito de uma carga harmônica pontual, sob diferentes condições de contorno. Uma vez que o estudo de da equação modal de quarta ordem foi fatorizada em duas de segunda ordem, a forma dos modos foi determinada com auxílio de funções cilíndricas e o cálculo modal e das frequências foi realizado com o uso do software Maple.

Para (ξ_0) perto = 0.9, foi observado que os modos e as vibrações forçadas devido a cargas harmônicas pontuais são semelhantes aos modos obtidos nos casos de vigas uniformes [Moeschen, 1999], [Morelatto, 2000]. Devido á singularidade das fuções de Bessel de 2ª classe Y e K, e por não serem funções elementais , o cálculo aproximado dos autovalores levou em torno de 20 minutos com o uso de uma maquina Pentium III 800 Mhz.

Por não existir simetria das vigas em relação a uma seção variável, foi necessário realizar cálculos para vigas fixas-livres e para vigas livres-fixas, entre outras. Em vigas com seção transversal uniforme, este tipo de alteração de condições de contorno não ocasiona novos cálculos. Pois, é realizada uma simples inversão, por translação, dos extremos da viga.

Nas simulações computacionais com as vibrações forçadas, correspondentes a uma carga harmônica concentrada de 120 rad, foi considerado um intervalo de frequências que contém as correspondentes aos seis primeiros modos. Modelos mais complexos que consideram deformação por cisalhamento e inércia de rotação, poderão ser abordados, no futuro, com o uso da base dinâmica .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ASC 94] ASCE, I. S. S. N. Analysis of Free Vibrations of Tall Buildings. *Journal of Engineering Mechanics*, V. 120, n? 9, Set, 1994.
- [AUC 96] AUCIELLO, N. M. Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Totatory and Eccentricity. *Journal of Sound and Vibration*, V. 194, pp. 25-34, 1996.
- [AUC 98] AUCIELLO, N. M., NOLE, G. Vibrations of a Cantilever Tapered Beam with Varying Section Properties and Carrying a Mass at the Free End. *Journal of Sound and Vibration*, V. 214, pp. 105-119, 1998.
- [CON 64] CONWAY, H. D., BECKER, E. C. H., DUBIL, J. F. Vibration Frequencies of Tapered Bars and Circular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, V. 31, pp. 329-331, Jun, 1964.
- [CRA 56] CRANCH, E. T., ADLER, A. A. Bending Vibrations of Variable Section Beams. *Journal of Applied Mechanics*, V. 23, pp. 103-108, Mar, 1956.
- [GIA 00] GIARETA, M. K. Vibrações Forçadas com força axial num Modelo de Euler - Bernoulli para Vigas. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 2000.
- [MOR 00] MORELATTO, T. Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler Bernoulli com Condições de Contorno Não-Clássicas. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 2000.
- [MOS 99] MOSCHEN, I. D. Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1999.
- [NEW 89] NEWLAND, D. E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, New York, 1989.

- [PAS 01] PASIN, E. T. Cálculo dos Modos de Vibração no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli para Vigas Homogêneas Bisegmentadas Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [SOD 00] SODER, R. A. L. Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 2000.
- [YAN 94] YANG, B., Transactions of the ASME. *Journal of the Vibration and Acoustics*, V. 116, pp. 426-431, 1994.
- [WAT 58] WATSON, G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* 1958