

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

The role of emergent zealots on the voter model

Luís Carlos Fagundes Latoski

Porto Alegre, Brazil
August 19, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

O papel de zelotes emergentes no modelo do votante^{*}

Luís Carlos Fagundes Latoski

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Jeferson J. Arenzon e coorientação do Prof. Dr. Wellington G. Dantas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Porto Alegre, Brasil
19 de agosto de 2022

^{*}Projeto parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa e companheira Luana Lopes Latoski que me deu neste ano o melhor presente de todos, nossa filha Alice.

Agradeço também à minha mãe, que sozinha me criou e educou.

Agradeço também aos meus orientadores que se fizeram presentes, quase que religiosamente, durante a elaboração desta dissertação. Em especial ao Prof. Jeferson que tem sido nos últimos anos uma inspiração, não só como profissional, mas também como um pai e pessoa.

Finalmente, agradeço a CAPES pela bolsa de estudos e à universidade pública, que me proporcionou um ensino de qualidade e oportunidades de aprendizado nacionais e internacionais.

*“And what is the use of a book,” thought Alice,
“without pictures or conversations?”*

—Lewis Carroll, *Alice’s Adventures in Wonderland*

Resumo

O Modelo do Votante (VM) é um modelo puramente estocástico, baseado em agentes, utilizado como protótipo para dinâmica de opiniões em modelos sociofísicos. Propomos uma extensão do VM na qual cada agente, além de sua opinião σ_i , possui também uma segunda variável η_i que quantifica seu nível de confiança, ou convicção. Ambas as variáveis evoluem ao longo da dinâmica e interações entre opiniões similares reforçam a posição de um agente em $\Delta\eta$. Quando o nível de confiança encontra-se acima de um limiar ϕ a opinião de tal agente se torna temporariamente congelada, i.e., um zelote temporário, que demanda mais interações com opiniões distintas antes de mudar de estado. O principal objetivo deste trabalho é entender os efeitos do surgimento destes zelotes espontâneos na dinâmica do VM. Mostramos que o sistema possui dois regimes temporais distintos. Para tempos curtos, antes de zelotes serem formados no sistema, este se comporta identicamente ao VM. Por outro lado, para tempos longos, a formação de zelotes induz uma tensão superficial efetiva sobre os domínios do sistema. Agentes seguindo a dinâmica pura do VM ficam confinados entre núcleos de zelotes e a interface, em uma região cuja largura depende de $\Delta\eta$ e os observáveis do sistema passam a se comportar como em dinâmicas regidas por curvatura. Exploramos as similaridades deste segundo regime com o Modelo de Ising após uma redução instantânea de temperaturas altas para uma temperatura abaixo da temperatura de Curie.

Abstract

The Voter Model (VM) is an agent-based, purely dynamical stochastic model used as a prototype for opinion dynamics. We propose a variant of the VM in which each agent, in addition to its opinion σ_i , also has a second variable η_i quantifying its degree of certainty or confidence. Both variables evolve in time and interactions between similar opinions reinforce an agent confidence by $\Delta\eta$. When this degree of certainty is above a certain threshold ϕ , the opinion of that agent becomes temporarily frozen, i.e, it becomes a transient zealot, demanding more interactions with opposite opinions in order to change. The objective is to understand the effect of this emergent zealots in the dynamics of the VM. We show that the system has two temporal regimes. At short times, before zealots can be formed, the system dynamics is identical to the original VM. However, at longer times, the emergent zealots concentrate in the bulk of each domain, inducing an effective surface tension. VM agents become confined between the bulk and the interface in a region whose width is $\Delta\eta$ -dependent, and observables behave as in curvature driven dynamics. We explore the similarities of this second regime with the behavior of the Ising model after an instantaneous temperature quench from the disordered phase to a point below the Curie temperature.

Resumo simplificado (Press Release)

O papel de zelotes emergentes no modelo do votante

Luís Carlos F. Latoski

Orientador: Jeferson J. Arenzon

Coorientador: Wellington G. Dantas

A existência de zelotes, indivíduos irreduzíveis cujo posicionamento é tão forte que sua opinião não pode ser alterada, é algo perceptível na nossa sociedade. Entender os efeitos da presença destes agentes se faz, mais do que nunca, de interesse da ciência. Em particular, compreender o processo de formação de polarização e negacionismo em assuntos importantes como, por exemplo, mudanças climáticas e vacinas, onde as evidências científicas são abundantes, é de interesse prático na definição de políticas públicas. Estudar, como um primeiro passo, o comportamento de modelos simples nos permite desvendar os mecanismos responsáveis por esses processos em sistemas reais. Um modelo muito utilizado para tal, no qual zelotes podem ser também incluídos, é o Modelo do Votante. Neste trabalho, propomos uma extensão deste modelo onde cada agente, além de sua opinião, possui também uma segunda variável que quantifica seu nível de convicção. Ambas evoluem ao longo do tempo e podem ser estudadas através de simulações computacionais. Interações entre agentes de opiniões similares reforçam suas convicções. Quando o nível de confiança de um indivíduo encontra-se acima de um dado limiar a opinião deste se torna temporariamente congelada, i.e., torna-se um zelote. Desta forma, tornar-se irreduzível é uma consequência da dinâmica do próprio sistema. Por outro lado, ao interagir com uma opinião distinta, agentes têm sua convicção reduzida, processo que é controlado por um parâmetro ajustável. Quando este parâmetro é muito grande, um único confronto é suficiente para destruir a convicção do indivíduo, permitindo que, em seguida, ele possa mudar sua própria opinião. Uma consequência interessante do nosso modelo é que zelotes e não zelotes (ou seja, indivíduos normais) podem coexistir, os primeiros agrupando-se em núcleos e os segundos permanecendo confinados às regiões entre estes. Comparar, em particular, as propriedades geométricas desses distintos grupos, com outros modelos, nos permite entender se os mecanismos envolvidos são substancialmente diferentes ou não. Embora o consenso (estado em que todos os indivíduos compartilham a mesma opinião) seja sempre atingido no modelo proposto, o tempo médio necessário para alcançá-lo depende dos parâmetros do modelo. Ao contrário do que se espera, nossos resultados mostram que, em algumas situações, a presença de agentes irreduzíveis pode acelerar este processo. Do ponto de vista conceitual, nosso modelo também é interessante pois gera comportamentos dinâmicos e geométricos emergentes no Modelo do Votante.

Sumário

| | |
|--|------------|
| Resumo | i |
| Abstract | ii |
| Press Release | iii |
| 1 Introdução | 2 |
| 2 Consenso e crescimento de domínios | 6 |
| 2.1 Crescimento logarítmico de domínios | 7 |
| 2.1.1 Modelo do votante (VM) | 7 |
| 2.2 Crescimento de domínios por curvatura | 11 |
| 2.2.1 Modelo de Ising a temperatura nula (IM0) | 11 |
| 2.2.2 Variantes do VM com tensão superficial | 17 |
| 3 Desordem auto-induzida e a formação espontânea de zelotes | 22 |
| 3.1 Modelo | 23 |
| 4 Simulações numéricas | 26 |
| 4.1 Caso 1d | 26 |
| 4.2 Caso 2d | 29 |
| 5 Conclusões | 38 |
| A Artigo | 40 |
| B Caso 2d irreversível | 49 |
| Bibliografia | 56 |

Capítulo 1

Introdução

Modelos físicos que descrevem a dinâmica de opiniões têm sido propostos e estudados em diferentes contextos (ver Refs. [1–3] para uma revisão). Nesses modelos, consenso pode ser formado localmente, dentro de um dado subgrupo, ou globalmente, com todos os agentes do sistema compartilhando uma posição em comum. Entender o processo de formação, a probabilidade de atingir este estado, como garantir que um sistema o alcance e porque as vezes é evitado, é importante para desvendar os mecanismos universais por trás destes. Um exemplo é a convergência de resultados em alguma área científica (vacinas, clima, etc) que, apesar de serem amplamente aceitos dentro da comunidade científica [4, 5], nem sempre levam à políticas públicas baseadas em evidências. O caminho para o consenso em situações reais pode depender de diversos fatores externos e internos, como a intensidade do ruído, surgimento de novas evidências, propagandas, *fake news*, autoconfiança, entre outros mecanismos psicológicos. Entretanto, em modelos como o modelo do votante (VM), este é um processo de ordenamento simples que segue regras básicas, como por exemplo, com cada agente copiando a opinião de um de seus vizinhos (para maiores detalhes sobre o modelo ver Cap.2.1.1). Em uma rede regular de dimensão $d \leq 2$, consenso no VM é um estado absorvente e sempre é atingido embora em uma escala de tempo longa [6–9]. Em $2d$, o crescimento de domínios é dado simplesmente pelo ruído estatístico [10, 11].

O VM foi e continua sendo estendido de maneira a melhor descrever diversos fenômenos sociais [1–3]. Entre as diversas modificações, temos a possibilidade da existência de estados intermediários, com a mesma opinião correspondendo a diferentes níveis de confiança. Deste ponto de vista, o VM é um caso particular, no qual não há qualquer nível de confiança própria e opiniões podem trocar em uma única interação. Por outro lado, agentes com confiança absoluta, conhecidos como zelotes, são indiferentes à opinião de seus vizinhos, nunca trocando seu estado [12–16]. Estes agentes introduzem um tipo de desordem fixa no sistema que, além de alterar a lei de crescimento dos domínios, pode impedir o sistema de atingir o consenso. Quando níveis intermediários de confiança são permitidos [17–26], opiniões são mantidas enquanto o número necessário de contatos não

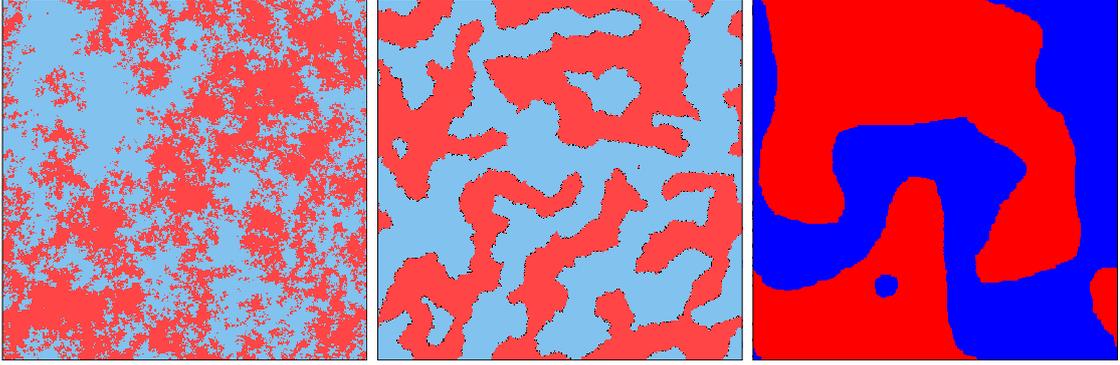


Figura 1.1: Instantâneos do VM, do VM com um estado intermediário e do modelo de Ising. Enquanto os domínios no VM são fragmentados (painel da esquerda), a inclusão de um estado intermediário (painel central) induz uma tensão superficial efetiva que torna o comportamento dos domínios similar aos do IMO (painel da direita).

for atingido. Este processo é conhecido como contágio complexo. O estado dos zelotes é então transiente. Neste sentido, o contágio complexo representa um nível de inércia relativa à troca de opiniões e está associado a um mecanismo de reforço que torna um posicionamento forte ou fraco. A necessidade de múltiplos contatos prévios à troca de estado de um agente focal funciona como uma amostragem do campo local das opiniões na vizinhança deste [17]. Este mecanismo gera uma redução de ruído no sistema que induz uma tensão superficial efetiva [17, 20, 22, 26–32]. Como a tensão superficial está associada a um custo energético devido às interfaces, estas tendem a se tornar lisas ou desaparecer. Neste caso, algumas propriedades do modelo se tornam análogas às do modelo de Ising a baixas temperaturas com parâmetro de ordem não conservado, na classe de universalidade de Allen-Cahn (Modelo A) [33]. Por exemplo, um estado inicial que consiste em um círculo de uma opinião imerso em um mar de outra opinião, leva a um decrescimento linear da área do círculo [17, 28]. Se iniciado em um estado aleatório, o estado assintótico [22, 32] é remanescente do modelo de Ising a $T = 0$, sendo, na maioria dos casos, o estado fundamental ou um conjunto de faixas paralelas [34–38]. Além de apresentar aparentemente a mesma proporção entre estas situações [27], a distribuição de tempos de saída, i.e., o tempo para atingir o consenso, tem uma estrutura de dois picos [22]. Embora nestas modificações do VM estas configurações também apareçam, são estados transientes uma vez que uma interface lisa continua evoluindo.

Outras modificações do VM também são caracterizadas pelo surgimento de tensão superficial, como por exemplo o modelo proposto por Stark et al [18]. Este consiste na dependência direta entre a taxa de transição entre opiniões σ e a variável de confiança do sítio focal η_i , i.e.,

$$\sigma_i \xrightarrow{\alpha(\eta_i)} \sigma_j, \quad (1.1)$$

onde $\alpha(\eta_i)$ é uma função arbitrária de η_i .

Para melhor entender o papel da formação espontânea de zelotes, neste trabalho es-

tudaremos o caso específico em que $\alpha(\eta_i)$ é descrito pela função degrau

$$\alpha(\eta_i) = \theta(\phi - \eta_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta_i < \phi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Neste caso, o sistema é sempre composto por duas espécies distintas de agentes: aqueles usuais, cuja convicção encontra-se abaixo de um limiar ϕ e, portanto, seguem a dinâmica usual do VM, e zelotes, cuja convicção é maior ou igual que o limiar e não modificam sua opinião. Assim, ao invés de ser uma característica herdada, cada agente deve decidir, dependendo de seu histórico de interações, quão facilmente trocará ou não sua opinião. Esta confiança auto-induzida, que pode levar à formação de zelotes, é uma consequência da dinâmica. Tornar-se um zelote corresponde à introdução de desordem no sistema e pode ser, portanto, um processo irreversível ou reversível. Um zelote transiente necessita de múltiplas interações com opiniões opostas para trocar sua própria opinião. Embora discutiremos brevemente o primeiro caso (Apêndice B), o enfoque deste trabalho é no caso reversível.

Este tipo de contágio é diferente do processo simples do VM original onde um único contato é sempre suficiente para a troca. Nosso modelo, portanto, combina os dois tipos de contágio, simples e complexo. O processo de reforço entre agentes de mesma opinião leva, após múltiplas interações, à formação de zelotes. Spins distintos se agrupam em domínios cujo núcleo é repleto de agentes zelotes enquanto agentes normais são confinados próximos à superfície, como mostra a Fig. 1.2. Devido à superfície ativa seguir a dinâmica pura do VM, ela é bastante rugosa. Apesar disto, a interface entre núcleo e região ativa, que separa

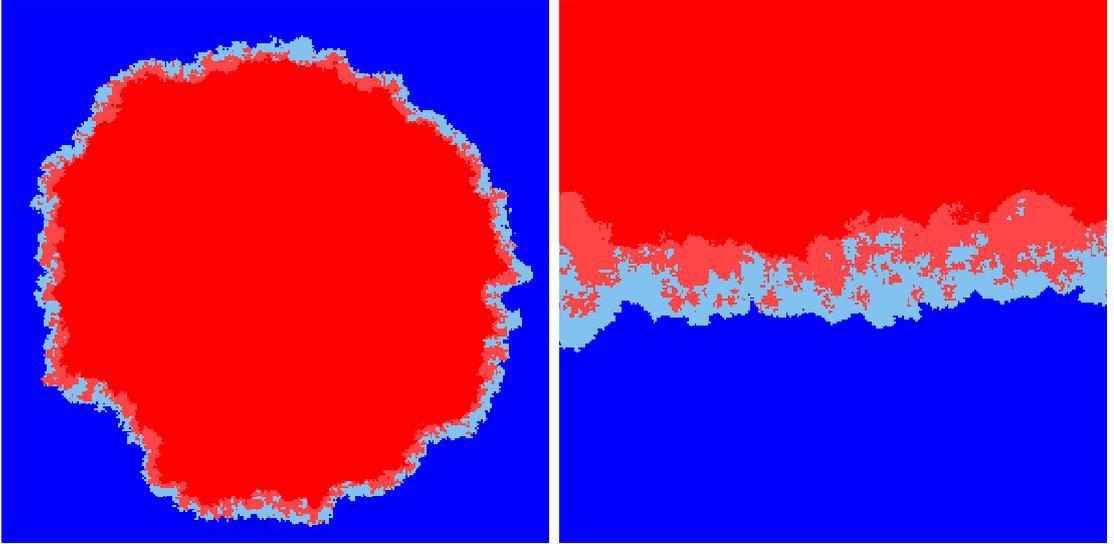


Figura 1.2: Instantâneos do modelo proposto. Note que a presença de agentes zelotes no centro dos domínios impede a fragmentação completa deste. Assim, apesar da dinâmica efetiva ainda ser a do VM puro, por estar restrita a região da interface entre domínios o crescimento destes é regido pela curvatura. Ambas as figuras mostram cortes da rede.

agentes zelotes de normais de mesma opinião, é mais suave devido à tensão superficial efetiva. Quando a interface secundária, ou interna, é rugosa, aqueles agentes que possuem muitos zelotes como vizinhos possuem maior probabilidade de reforçarem sua confiança. É esta amostragem sobre toda a vizinhança que é responsável pela tensão efetiva que torna a dinâmica de crescimento de domínios do núcleo regida por curvatura. Próximo à superfície, em contrapartida, diferentes opiniões coexistem e obedecem à regra dinâmica pura do VM. Entender o papel do surgimento destes novos agentes na formação do consenso e no desenvolvimento dos domínios deste sistema são os principais objetivos deste trabalho. Algumas das questões a serem respondidas são as seguintes: quais as consequências da existência destes agentes, em particular na redução da probabilidade de atingir um estado de consenso. Qual a probabilidade de um sistema aleatoriamente iniciado atingir uma configuração polarizada? Quão mais lento é o caminho para o estado estacionário e como os parâmetros do modelo interferem nas medidas? Como as propriedades geométricas dos domínios de opinião diferem do VM? Parte dos resultados apresentados foram submetidos ao *Physical Review E* [39], incluso no Apêndice A.

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: no próximo capítulo será feita uma breve introdução, apresentando conceitos e observáveis utilizados ao longo deste trabalho. No capítulo 3 introduzimos e detalhamos nossa extensão do VM. Em seguida, nas seções 4.1 e 4.2, apresentaremos os resultados obtidos em 1d e 2d, respectivamente. Finalmente, na seção 5 resumimos nossos resultados e discutimos as conclusões.

Capítulo 2

Consenso e crescimento de domínios

Para o desenvolvimento de uma sociedade como conhecemos é necessário o que chamamos de consenso social. Conceitos e normas usualmente demandam o compartilhamento de opiniões similares entre indivíduos para funcionarem de acordo com seu propósito. Do ponto de vista dos modelos simples que consideramos aqui, consenso é um estado absorvente onde todos os agentes de um sistema compartilham a mesma opinião. Uma vez atingido, supondo que não se verifica o surgimento espontâneo de uma nova ideia, a dinâmica relativa à opinião cessa. Ao contrário desse consenso, que é global, em sistemas reais normatizações podem ser adotadas por grupos menores. Como exemplo, temos os diferentes idiomas espalhados pelo mundo. Consenso, neste caso, é formado localmente por um grupo de indivíduos que compartilham uma linguagem específica, tais grupos serão denominados aqui de domínios. Assim, de modo geral, um domínio é um conjunto conectado de indivíduos que compartilham o mesmo estado. Nas interfaces entre domínios podemos esperar a presença de efeitos dinâmicos. Na ausência de inovação, em caso de consenso local, a dinâmica interna dos domínios é nula. Os processos de ordenamento que levam estes sistemas a atingirem o consenso são do ponto de vista dinâmico muito mais interessantes do que o estado de equilíbrio em si.

O crescimento induzido por flutuações superficiais e o regido pela curvatura, são dois mecanismos físicos muito estudados, que levam sistemas de um estado prévio, desordenado, a um estado totalmente ordenado, correspondente ao consenso. O primeiro ocorre em sistemas não hamiltonianos, puramente devido aos processos estocásticos responsáveis pela dinâmica destes. Um modelo bem conhecido que apresenta este mecanismo é o Modelo do votante (VM). O segundo ocorre devido à presença de uma tensão superficial efetiva e está atrelado, normalmente, a um princípio de minimização de energia, como é o caso, por exemplo, no Modelo de Ising a temperatura nula (IM0). Ainda assim, estudos recentes mostram que é possível, alterando as regras dinâmicas do modelo, gerar uma tensão superficial efetiva também no VM, de forma que seus domínios passam a evoluir através do segundo mecanismo. Cada um destes mecanismos será abordado nas próximas

seções onde discutiremos brevemente os observáveis a serem medidos e alguns resultados conhecidos da literatura.

2.1 Crescimento logarítmico de domínios

2.1.1 Modelo do votante (VM)

O VM é um modelo puramente estocástico baseado em agentes físicos. É comumente utilizado como protótipo para dinâmica de opiniões em modelos sociofísicos [3]. O modelo postula uma rede em que cada nodo $1 \leq i \leq N$ possui uma variável de estado σ_i , associada à opinião deste sítio. Em sua versão binária, o número de opiniões distintas inicialmente distribuídas na rede é $M = 2$, e portanto, $\sigma_i = \pm 1$. Embora o modelo possa ser estendido para $M > 2$, introduzido primeiramente por Moran [40] em um estudo sobre seleção genética em populações finitas, aqui discutiremos somente o caso binário.

A dinâmica do modelo se dá por um processo de cópia e eliminação simples em pares. A cada interação, um sítio focal e um de seus primeiros vizinhos são selecionados para troca. Como resultado, o sítio focal copia o estado de seu vizinho substituindo sua opinião prévia. Um passo de Monte Carlo aqui (1 MCS) é definido como N tentativas de atualizar sítios, aleatoriamente escolhidos, da rede.

Sendo um modelo puramente estocástico, o VM não possui um hamiltoniano. Sua dinâmica, portanto, não segue um princípio de minimização de energia, e todas as suas configurações possíveis são igualmente prováveis. Neste sistema, o estado absorvente é atingido simplesmente devido aos processos estocásticos que ocorrem durante a dinâmica. Isto é diferente no IM0, como discutiremos na seção seguinte, onde o consenso é o estado de menor energia do sistema.

A Fig. 2.1 nos dá uma ideia qualitativa da evolução do VM em uma rede quadrada 2d através de configurações em diferentes instantes de tempo. Partindo de um estado inicial aleatório, devido à dinâmica do sistema, pequenos domínios de opiniões são formados. Isto leva o sistema a um lento processo de ordenamento, já que depende de flutuações estatísticas. Conforme o sistema evolui, domínios menores desaparecem. Em contrapartida, grandes regiões onde o consenso local pode ser encontrado persistem. Trabalhando em um sistema finito, dado tempo suficiente, as flutuações estatísticas se tornam grandes o suficiente para levar este ao consenso.

Domínios de opinião no VM passam por um processo de dissipação por difusão, como podemos ver na Fig. 2.2 em um sistema inicialmente preparado com um domínio central circular. Devido à equiprobabilidade das direções com a qual cada sítio pode interagir, as opiniões da borda destes domínios descrevem uma caminhada aleatória movida apenas por ruído estatístico. Por este motivo, interfaces entre regiões de opiniões distintas tendem

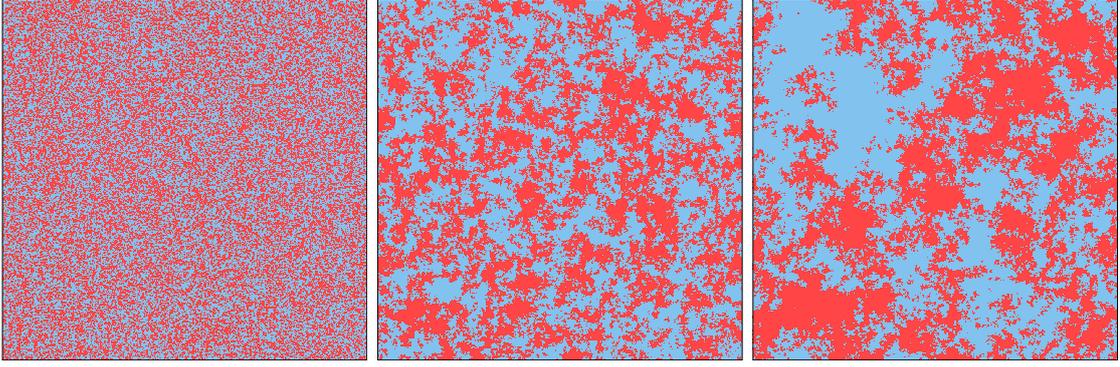


Figura 2.1: Instantâneos do VM em uma rede quadrada 2d em três momentos distintos da dinâmica (tempo cresce da esquerda para a direita). O sistema foi aleatoriamente inicializado em $t = 0$ (painel esquerdo). Podemos ver que o sistema passa, através de flutuações estatísticas, de um estado completamente desordenado para uma configuração mais ordenada em que domínios maiores de opinião começam a aparecer.

a ser rugosas e fragmentadas, ou seja, os domínios de opiniões no VM não possuem tensão superficial.

Para quantificar e caracterizar este processo utilizamos dois observáveis dinâmicos do sistema. O primeiro é a persistência, $P(t)$, dada pela fração de sítios que não trocaram de estado desde t_0 . E, além dela, a densidade de interfaces ativas, $\rho(t)$, i.e., a fração de pares, primeiros vizinhos, cujas opiniões são diferentes,

$$\rho(t) = \frac{1}{2N} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.1)$$

onde $\langle i,j \rangle$ significa que a soma é sobre os pares de sítios primeiros vizinhos. Para os modelos discutidos neste capítulo, estes observáveis são bem estudados e conhecidos. No caso do VM a persistência em 2d se comporta como [9, 41]

$$P(t) \sim \exp(-\text{const} \times \ln^2 t), \quad (2.2)$$

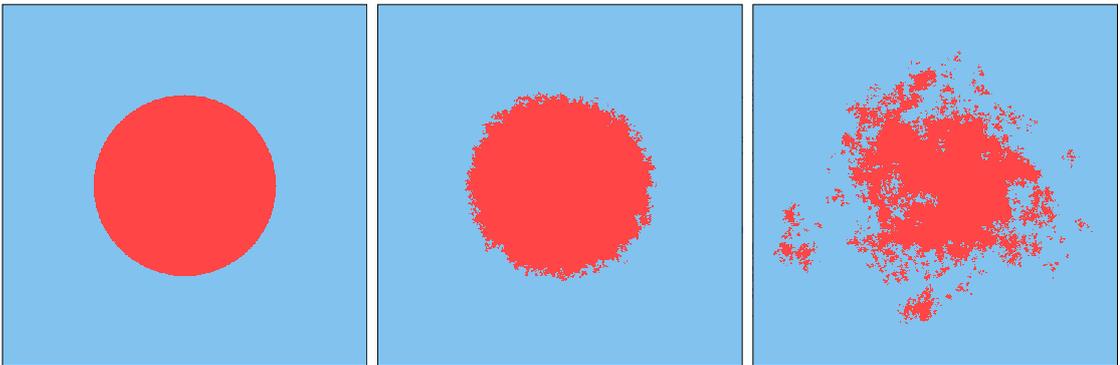


Figura 2.2: Instantâneos de um domínio circular evoluindo de acordo com o VM puro em uma rede quadrada 2d em três momentos diferentes da dinâmica. As opiniões da região externa do domínio circular realizam um movimento puramente difusivo [10].

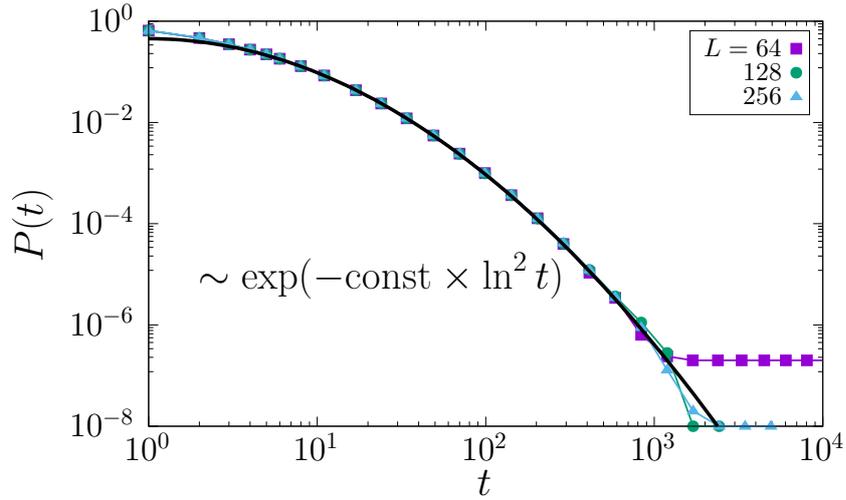


Figura 2.3: Persistência $P(t)$ no VM para diferentes tamanhos L . A curva sólida corresponde à $P(t) = a \exp(-b \ln^2 t)$ com $a = 0.400 \pm 0.001$ e $b = 0.290 \pm 0.001$. Os efeitos de tamanho aparecem como um desvio do comportamento analítico na forma de um patamar.

para concentrações iniciais iguais de agentes de ambas as opiniões.

No caso da densidade de interfaces em 2d, para tempos suficientemente longos [11],

$$\rho(t) = \frac{\pi}{2 \ln t + \ln 256} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln t}{t}\right). \quad (2.3)$$

As expressões (2.2) e (2.3) descrevem bem o comportamento observado nas simulações numéricas, como podemos ver nas figuras 2.3 e 2.4. Os efeitos de tamanho finito se apresentam na forma de um patamar nas curvas correspondentes a diferentes tamanhos. Para $P(t)$, conforme aumentamos o tamanho do sistema, o intervalo de tempo no

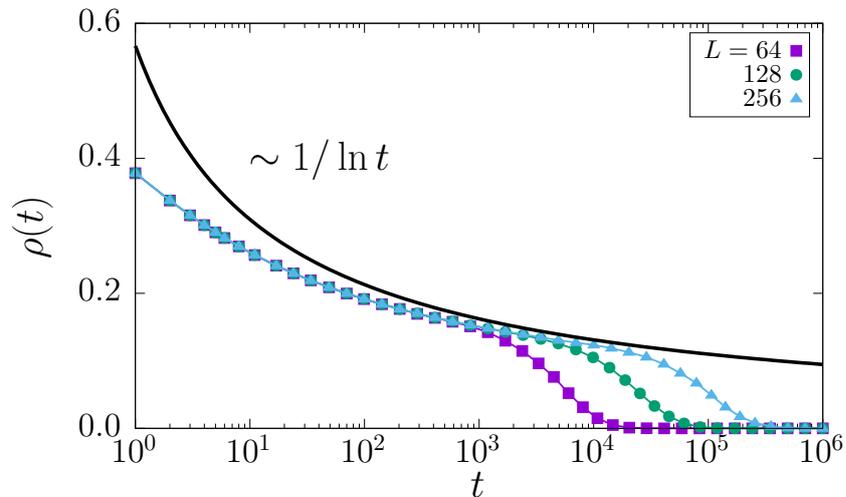


Figura 2.4: Densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ no VM para diferentes L . A curva sólida corresponde à Eq. (2.3). Podemos ver que para tempos longos o comportamento é coerente com o esperado, ficando mais evidente em redes maiores.

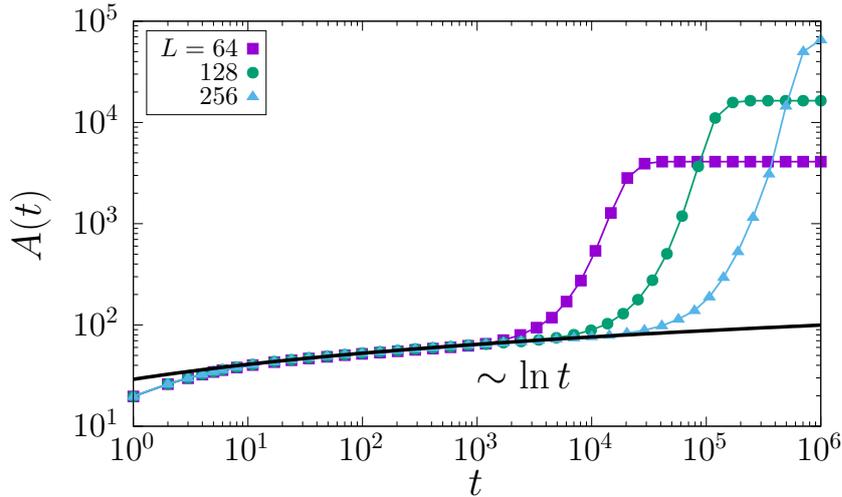


Figura 2.5: Tamanho médio dos domínios $A(t)$ no VM para diferentes tamanhos de rede L . O comportamento para tempos longos parece ser logarítmico.

qual o comportamento das medidas numéricas do sistema coincide com o resultado analítico aumenta. Para $\rho(t)$, embora o comportamento para tempos longos seja similar, a coincidência entre as medidas e a Eq. (2.3) só deve aparecer em sistemas maiores.

Para quantificar o crescimento dos domínios de opinião ao longo da dinâmica trabalharemos com as seguintes medidas geométricas do sistema. Em um determinado instante de tempo t , o tamanho médio dos domínios presentes no sistema, $A(t)$, é definido como

$$A(t) = \frac{N}{N_c(t)}, \quad (2.4)$$

onde $N_c(t)$ é o número total de domínios. Nas simulações, este observável parece se comportar como

$$A(t) \sim \ln t, \quad (2.5)$$

como podemos ver na Fig. 2.5, embora assim como nas outras medidas, existam grandes efeitos de tamanho finito.

Todas as características aqui discutidas descrevem um sistema que inicia completamente desordenado, e que ao longo de sua evolução sofre um processo de ordenamento até atingir um estado absorvente. Outra característica interessante é justamente o tempo necessário para o processo de ordenamento atingir o consenso e sua dependência com o tamanho do sistema.

A distribuição de tempos até o consenso, $h(\mathcal{T}, L)$, para diferentes tamanhos de sistemas está mostrada na Fig. 2.6. O destaque mostra que é possível colapsar todas as curvas após reescalar o tempo \mathcal{T} por $L^2 \ln L$ e multiplicar os valores de $h(\mathcal{T}, L)$ por $L^{2.22}$ [11]. Isto implica que a distribuição obedece $h(\mathcal{T}, L) = L^{-\alpha'} H(\mathcal{T}/L^2 \ln L)$ e a escala de tempo

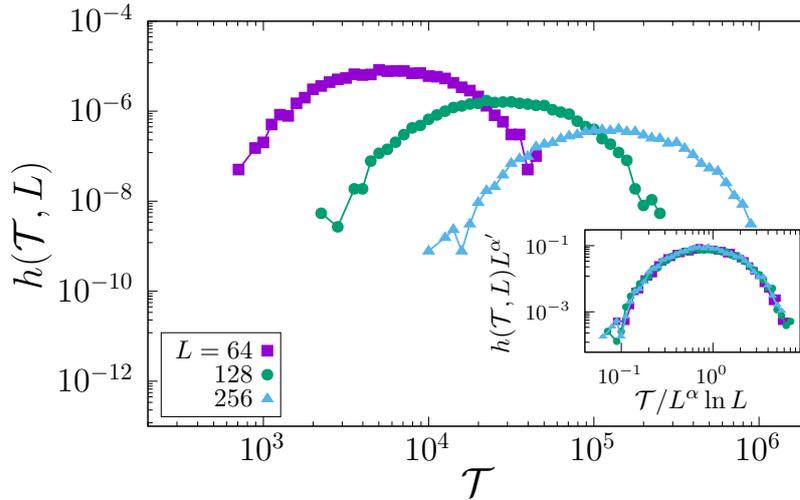


Figura 2.6: Distribuição de tempos para consenso no VM, $h(\mathcal{T}, L)$, para diferentes tamanhos L . O número de amostras é maior para redes menores. No destaque vemos o colapso das curvas, cuja forma sugere uma distribuição log-normal, onde o tempo \mathcal{T} é reescalado por $L^\alpha \ln L$ com $\alpha = 2$ e os valores de $h(\mathcal{T}, L)$ são multiplicados por $L^{\alpha'}$ com $\alpha' = 2.22$ [11].

média esperada para este sistema atingir o consenso deve ser

$$\langle \mathcal{T}_V \rangle \sim L^2 \ln L. \quad (2.6)$$

Como veremos na próxima seção, quando comparado ao tempo de consenso do IM0, o VM possui uma distribuição muito mais larga e cuja média, pelo menos para redes significativamente grandes, se encontra deslocada para tempos maiores. Além disso, diferente do que veremos no próximo modelo, a distribuição de tempos para consenso aqui pode ser perfeitamente colapsada utilizando uma única escala de tempo. Seguimos agora para o segundo modelo estatístico que, embora de forma distinta, também sofre um processo de ordenamento durante sua evolução até atingir um de seus estados absorventes.

2.2 Crescimento de domínios por curvatura

2.2.1 Modelo de Ising a temperatura nula (IM0)

O Modelo de Ising (IM) é um modelo estatístico para um ímã real, cuja premissa é de que o magnetismo de um material é formado pela combinação dos momentos de dipolo magnético dos *spins* atômicos que o compõem. O modelo considera uma rede com um *spin* por nodo, que representa uma média sobre os *spins* atômicos na região. Tais *spins* são associados a uma variável binária $s_i = \pm 1$. Embora a dinâmica deste sistema esteja, normalmente, atrelada à aplicação de um campo externo B , aqui tomaremos o caso específico onde $B = 0$. Supondo interações entre primeiros vizinhos, todas estas com

mesma intensidade J , o hamiltoniano que descreve o sistema é simplesmente,

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \quad (2.7)$$

onde $\langle i,j \rangle$ significa que a soma é sobre os pares de sítios primeiros vizinhos.

Seguindo a dinâmica de Glauber a $T = 0$, a cada passo de Monte Carlo (1 MCS) são realizadas N tentativas de atualização de *spins* da rede, selecionados aleatoriamente, de acordo com as probabilidades

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta E > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \Delta E = 0, \\ 1, & \text{se } \Delta E < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $A(\mu \rightarrow \nu)$ é a probabilidade de transição do estado μ para o estado ν , e ΔE a variação de energia associada à inversão de um único *spin* da rede. Note que $A(\mu \rightarrow \nu)$ é tal que a condição de balanço detalhado é satisfeita. Como a dinâmica é local, e considera apenas uma única troca de *spin* por vez (*single-spin flip*), ΔE é dado simplesmente pela diferença entre o número de vizinhos do sítio focal com *spin* distinto.

Quando este sistema é inicializado em um estado totalmente desordenado, equivalente à temperatura infinita, e instantaneamente posto em contato com um reservatório térmico à temperatura nula, agentes vizinhos têm seus *spins* alinhados, e o modelo passa por um processo de ordenamento [33]. O IM nessas condições de campo externo e temperatura será chamado neste trabalho de IM0. Este sistema, diferente do VM, é hamiltoniano, i.e., um sistema cuja dinâmica se dá de forma a minimizar sua energia interna. Deste modo, assim como no VM, o sistema busca alinhar *spins* vizinhos, já que isto reduz a energia do sistema conforme a equação (2.7). Como consequência, interfaces ativas, i.e., interfaces de contato entre *spins* desalinhados, possuem um custo energético para o sistema, elevando sua energia interna. Como a temperatura de banho térmico é nula, flutuações estatísticas da energia não são permitidas e, portanto, inversões de *spin* ocorrerão somente quando $\Delta E \leq 0$, como mostra a equação (2.8).

Consenso, no IM0, é um estado absorvente do sistema pois, pela equação (2.8), todas as trocas propostas devem aumentar a energia do sistema. Além do consenso, este sistema também possui estados absorventes correspondente a duas faixas, paralelas ao lado da rede, de *spins* opostos [34–38, 42, 43]. Na realidade, embora com uma probabilidade muito menor de serem encontradas, qualquer configuração com múltiplas faixas é um estado absorvente deste sistema. Nestas configurações, as interfaces entre domínios, que são os locais onde estão concentradas as trocas de *spins*, passam a ser totalmente lisas. Assim, para um *spin* da interface, o número de vizinhos com *spin* paralelo é sempre maior que o número de vizinhos com *spin* desalinhado, e, portanto, as trocas à temperatura nula

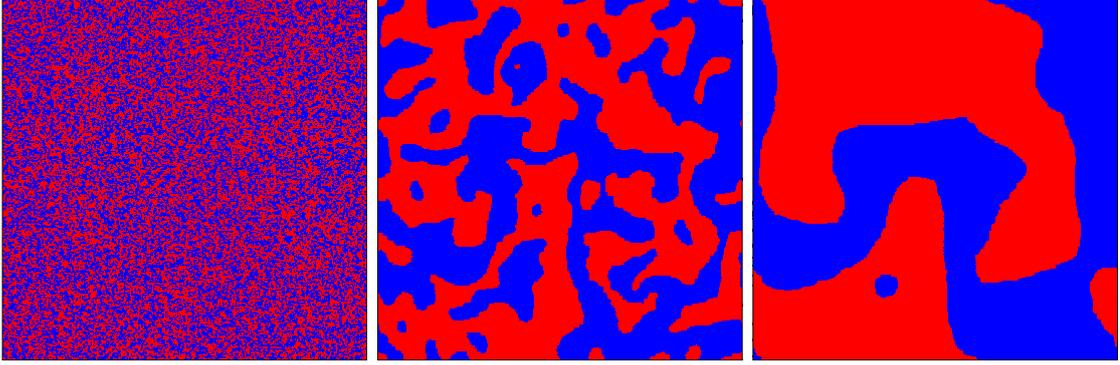


Figura 2.7: Instantâneos do IM0 em uma rede quadrada 2d em três momentos distintos da dinâmica. O sistema foi aleatoriamente inicializado em $t = 0$ (primeiro instantâneo). O processo de ordenamento aqui tende a manter as interfaces entre domínios o mais lisa possível gerando o que é chamado de tensão superficial efetiva.

cessam. Para as medidas obtidas nesta seção, amostras que atingem estas conformações, $\approx 1/3$ do total de amostras [36], são excluídas dos cálculos das médias dos observáveis pois, uma vez preso em uma destas configurações, o consenso jamais é atingido.

Uma ideia qualitativa da evolução deste sistema pode ser obtida através da Fig. 2.7, onde podemos ver instantâneos do modelo em diferentes estágios de sua evolução. De maneira análoga ao VM, o sistema é inicializado em uma configuração totalmente desordenada, e devido à sua dinâmica, gradualmente passa por um processo de ordenamento, formando domínios. Por outro lado, no IM0 os domínios formados são mais compactos, devido à tendência das interfaces de se tornarem lisas e dos pequenos domínios internos desaparecerem rapidamente. Assim, o mecanismo de minimização de energia deste sistema age como uma espécie de tensão superficial sobre os domínios de *spins*.

Fica claro que a presença desta tensão superficial é uma característica da evolução deste sistema principalmente quando olhamos para a evolução de um único domínio de *spins*, como mostra a Fig. 2.8. Diferente do VM, uma vez formado o domínio, não há fragmentação. A minimização de energia faz com que o domínio maior (azul) cresça, encolhendo a bolha (vermelho) lentamente, mantendo em média sua geometria original. Este processo é característico de sistemas como este, e é conhecido como crescimento de domínios regido por curvatura [44–47].

Este mecanismo foi amplamente estudado ao longo dos anos recentes [44–47], e a teoria de escala apresenta bons resultados quando comparada com as simulações numéricas, como veremos. A partir de agora passaremos a discutir como a persistência, $P(t)$, e densidade de interfaces ativas, $\rho(t)$, se comportam ao longo da dinâmica nestes sistemas. Em seguida discutiremos alguns resultados conhecidos para os observáveis geométricos relativos ao crescimento de domínios.

No regime de crescimento de domínios do IM0 diversos observáveis dinâmicos se com-

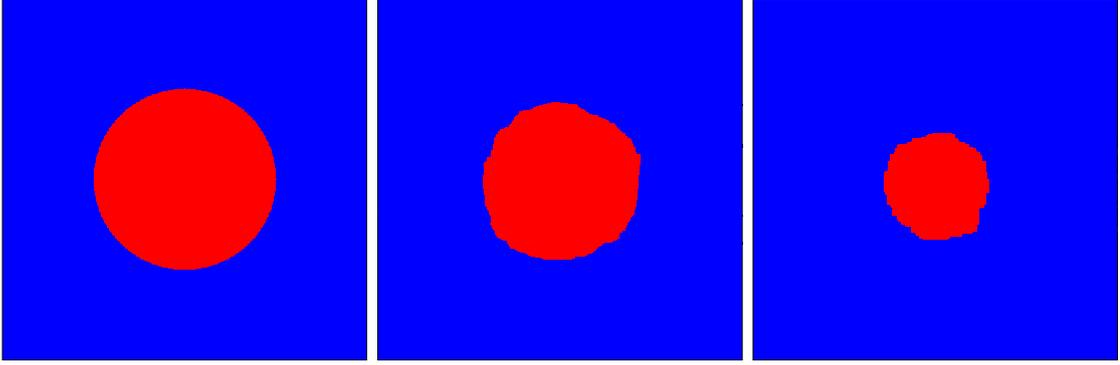


Figura 2.8: Instantâneos de um único domínio circular evoluindo de acordo com a dinâmica do IM0 em uma rede quadrada 2d em três etapas distintas de sua evolução. Ao contrário do VM, domínios aqui passam por um processo de encolhimento e não de difusão.

portam como leis de potência. Para $P(t)$, o comportamento é descrito por [48–50],

$$P(t) \sim t^{-\theta}, \quad (2.9)$$

onde $\theta \simeq 0.2$. Além disso, segundo a hipótese de escalonamento dinâmico, existe, para tempos longos, uma única escala de comprimento característico $\ell(t)$ que descreve a estrutura dos domínios deste sistema [33]. No caso do IM0 sem conservação da magnetização, e no regime de crescimento de domínios, $\ell(t)$ cresce como

$$\ell(t) \sim t^{1/2}. \quad (2.10)$$

Sendo assim, a densidade $\rho(t)$ é dada simplesmente por

$$\rho(t) \sim \frac{1}{\ell(t)} \sim t^{-1/2}, \quad (2.11)$$

em específico para o IM0.

Os dados numéricos para $P(t)$ e $\rho(t)$ assim como as expressões apresentadas podem ser vistos nas figuras 2.9 e 2.10. Quanto maior o sistema, maior a similaridade entre as medidas e o comportamento analítico em tempos longos. A diferença entre os comportamentos iniciais é esperada devido ao tempo necessário para os primeiros domínios se formarem e a dinâmica de crescimento iniciar.

Diferente do VM, sítios nas interfaces interagem através de princípios de minimização de energia. Isto faz com que o caminho para o estado absorvente seja completamente distinto em cada um destes sistemas. No IM0, o sistema possui duas formas de minimizar sua energia interna. Encolher domínios até desaparecerem, o que caracteriza o mínimo global de energia do sistema. Domínios maiores consomem domínios menores por um processo de encolhimento gradual, já que as fronteiras permanecem não fragmentadas. Outra forma de minimização é através do alisamento de superfícies até que se tornem

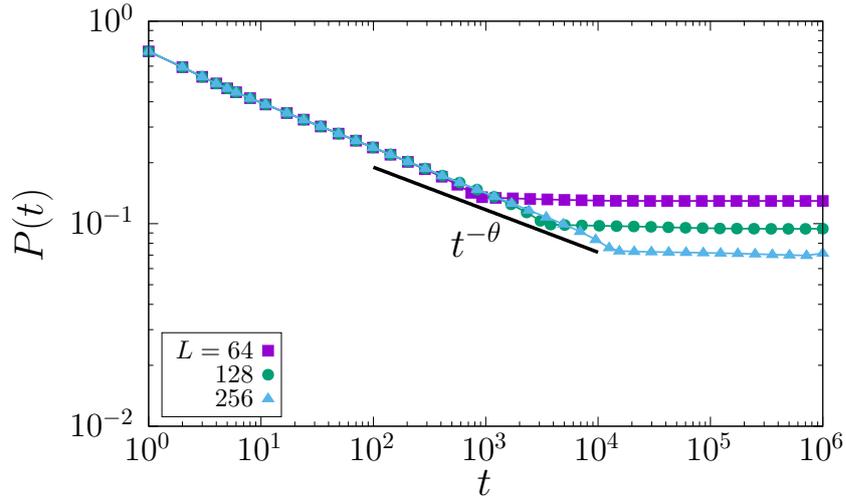


Figura 2.9: Persistência $P(t)$ no IM0 para redes de diferentes tamanhos lineares L . Após um regime inicial, a dinâmica deve estabilizar em um comportamento de lei de potência $P(t) \sim t^{-\theta}$ com $\theta \simeq 0.2$ (curva sólida), consistente com o resultado da literatura.

planas, caracterizando os mínimos locais. Daí a estabilidade da configuração de múltiplas faixas paralelas.

Em 2d o tamanho médio dos domínios deste sistema $A(t)$ de acordo com a hipótese de escalonamento dinâmico, é tal que

$$A(t) \sim \ell^2(t) \sim t. \quad (2.12)$$

Esta hipótese se verifica numericamente em muitos casos embora possa ser demonstrada em alguns poucos [51, 52].

As médias amostrais em função do tempo, obtidas através das simulações numéricas do

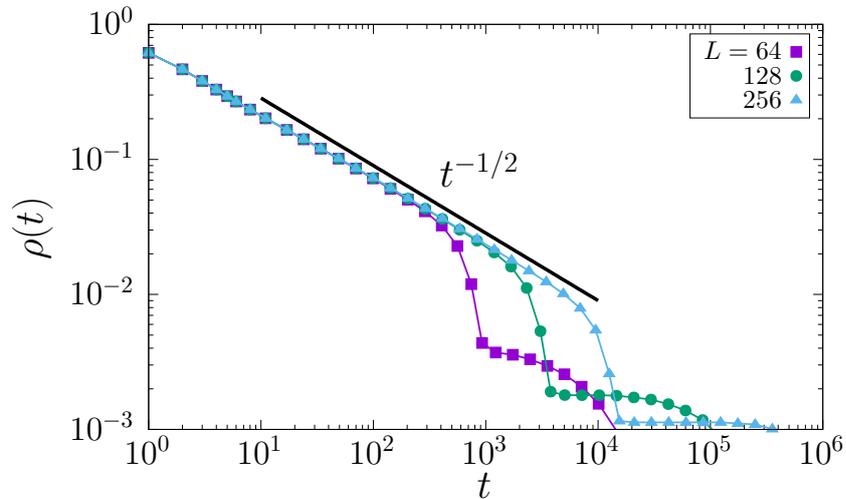


Figura 2.10: Densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ no IM0 para diferentes L . Aqui o regime de lei de potência parece iniciar relativamente mais cedo apresentando um comportamento do tipo $\rho(t) \sim t^{-\beta}$ com $\beta \simeq 1/2$ (curva sólida).

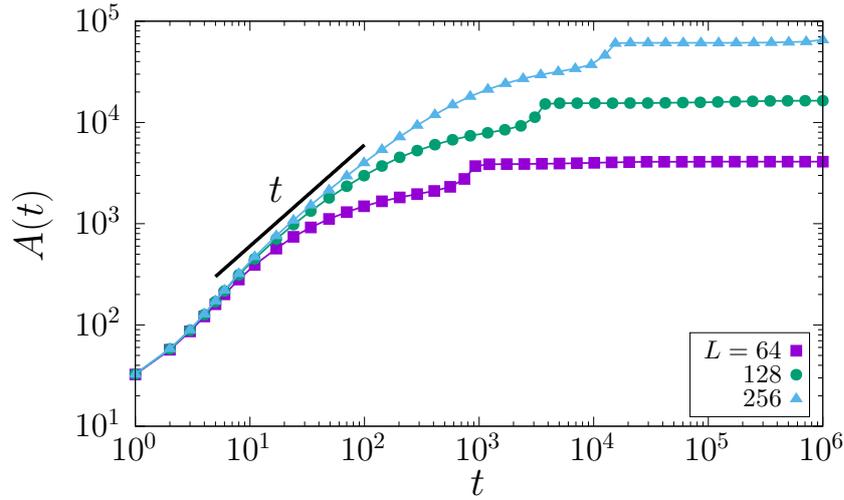


Figura 2.11: Tamanho médio dos domínios $A(t)$ no IM0 para diferentes tamanhos de rede L . A curva sólida corresponde ao comportamento esperado, Eq. (2.12).

IM0, estão dispostas na Fig. 2.11. A lei de potência (curva preta), esperada para o sistema, demora a se desenvolver. Em redes pequenas, a média amostral parece sequer desenvolver um regime linear. Já para redes de tamanhos maiores a lei de potência aparentemente se desenvolve partir de $t \approx 10$ MCS.

Domínios com perímetro extenso tomam um intervalo de tempo maior, em relação a domínios menores, para se dissolverem. Estruturas como, por exemplo, faixas diagonais, tendem a desacelerar de forma considerável a dinâmica. Estes estados característicos ficam perfeitamente visíveis quando analisamos a distribuição de tempos para consenso deste sistema. A Fig. 2.12 obtida através das simulações numéricas do IM0, excluindo apenas amostras que atingem o estado absorvente de faixas paralelas, nos dá uma boa ideia dos dois tipos de regimes evolutivos presentes nestes sistemas. Independente do tamanho do sistema, o que percebemos é que as amostras se distribuem claramente em dois grupos [35]. Este resultado se distingue do obtido no caso do VM, cuja distribuição apresenta um único pico, e portanto, uma única escala de tempo. As distribuições, neste caso, obedecem $h(\mathcal{T}, L) = L^{-\alpha} H(\mathcal{T}/L^\alpha)$. Há uma clara segregação de amostras em dois grupos distintos, um primeiro grupo cujo consenso é atingido em um tempo típico de [34]

$$\langle \mathcal{T}_{I_1} \rangle \sim L^{\alpha_1} = L^2, \quad (2.13)$$

composto por $\approx 95\%$ do total de amostras que atingem o consenso ($\approx 2/3$ do total de amostras geradas [36]). E um segundo grupo (faixas diagonais, duas ou mais faixas paralelas imperfeitas, etc), composto por uma minoria destas amostras $\approx 5\%$, cujo tempo para consenso é da ordem de [34, 35, 43]

$$\langle \mathcal{T}_{I_2} \rangle \sim L^{\alpha_2} = L^{3.5}. \quad (2.14)$$

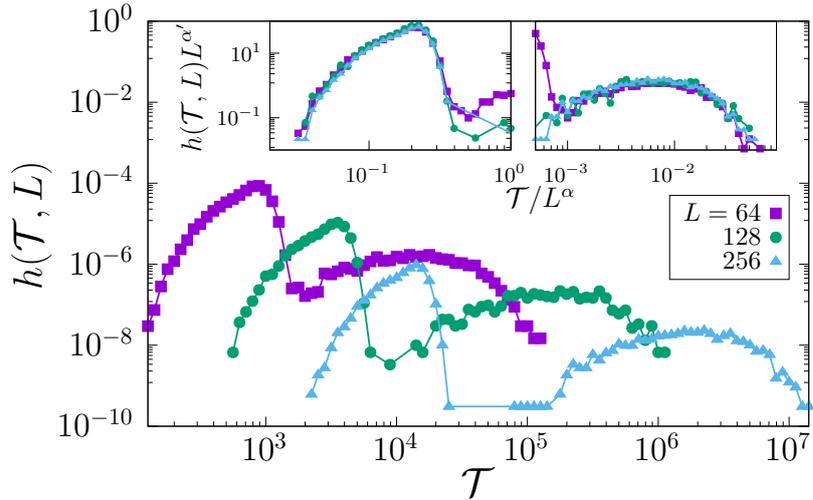


Figura 2.12: Distribuição de tempos para consenso no IM0 para sistemas com diferentes tamanhos L . Nos destaques vemos os colapsos onde o tempo \mathcal{T} é reescalado em L^α com $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3.5$ respectivamente, e a distribuição $h(\mathcal{T}, L)$ multiplicada por $L^{\alpha'}$ com $\alpha' = 3.25$ [35]. Aqui estão excluídas as amostras que atingem o estado absorvente de múltiplas faixas, já que a dinâmica nestes cessa e o consenso nunca é atingido.

As amostras pertencentes ao primeiro grupo são aquelas cuja dinâmica é caracterizadas por $\ell(t) \sim t^{1/2}$. Também são conhecidas por formarem, logo nos primeiros passos de sua evolução, um domínio que percola em ambas as direções da rede [51–55]. Por outro lado, amostras que atingem uma configuração em que dois ou mais domínios percolam em uma única direção pertencem ao segundo grupo. Para comparar com a escala de tempo média das amostras do VM, $\langle \mathcal{T}_V \rangle$, aqui tomaremos a escala de tempo para consenso das amostras correspondentes ao primeiro pico da distribuição, $\langle \mathcal{T}_{I_1} \rangle$.

2.2.2 Variantes do VM com tensão superficial

Como já discutido, o VM possui uma dinâmica puramente estocástica e, portanto, não apresenta naturalmente um crescimento de domínios regido por curvatura. Apesar disto, algumas modificações deste modelo, como a existência de estados intermediários, com a mesma opinião correspondendo a diferentes níveis de confiança, geram uma tensão superficial efetiva entre os domínios do sistema [17, 18, 20, 22, 26–28, 32, 56]. A necessidade de múltiplos contatos (contágio complexo) prévios à troca de estado de um agente é similar a amostrar o campo local levando em conta uma interação com todos os primeiros vizinhos.

Os observáveis apresentados aqui são referentes ao modelo de troca cinética de opiniões (em inglês *Kinetic Exchange Model*, ou KEM) [25, 56–62] embora outras variações, apesar de com expoentes ligeiramente distintos, possuam comportamento similar. A regra dinâmica do modelo proposto pelos autores é tal que o resultado de uma interação entre

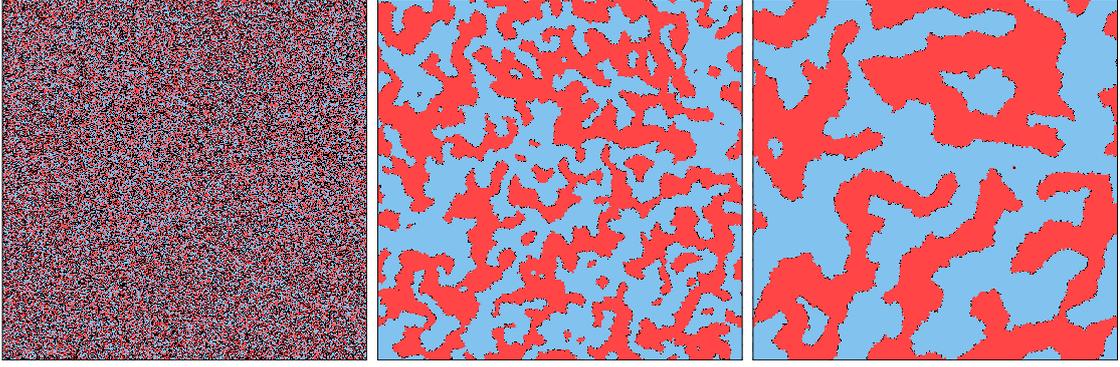


Figura 2.13: Instantâneos do VM com tensão superficial efetiva em uma rede quadrada 2d em três etapas distintas de sua evolução. O sistema foi aleatoriamente inicializado em $t = 0$ (primeiro instantâneo), i.e. cada sítio com $1/3$ de chance de ser -1 (vermelho), 0 (preto) ou 1 (azul). O mecanismo de redução de ruídos faz com que agentes intermediários, $\sigma_i = 0$ se acumulem nas interfaces entre domínios gerando uma tensão superficial sobre estes.

dois agentes, focal i e um primeiro vizinho j , é dado por

$$\sigma_i(t+1) = \text{sgn}[\sigma_i(t) + \sigma_j(t)]. \quad (2.15)$$

onde $\text{sgn}(x)$ é a função sinal:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Assim, um agente focal i cuja opinião é, por exemplo, $\sigma_i = +1$, deve interagir duas vezes com um vizinho com $\sigma_j = -1$ antes de trocar de estado, passando primeiro pelo estado nulo $\sigma_i = 0$. Note que interações com vizinhos de opinião nula $\sigma_j = 0$ não alteram o estado do sítio focal. Embora este sistema seja composto por três distintas opiniões, 1 , 0 , e -1 , apenas as configurações compostas por $\sigma_i = 1, \forall i$, ou $\sigma_i = -1, \forall i$, são pontos fixos da dinâmica, i.e. estados absorventes. Isto, pois a configuração $\sigma_i = 0, \forall i$, é instável, já que a inclusão de um único agente de opinião não nula, $\sigma_i = \pm 1$, leva o sistema a um dos estados absorventes.

A persistência $P(t)$ e a densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ para diferentes L , partindo de um estado inicial aleatório, i.e. $1/3$ de chance de ser $-1, 0, 1$, são apresentadas nas figuras 2.14 e 2.15. O mecanismo de redução de ruídos, gerado pelo contágio complexo, torna a dinâmica dos domínios regida por curvatura. Agentes intermediários, $\sigma_i = 0$ agrupam-se nas interfaces entre domínios. Desta forma, as interações ficam restritas a estas regiões e uma tensão superficial efetiva é produzida. Como no IM0, os observáveis desenvolvem leis de potência, embora aqui com expoentes distintos. A persistência possui,

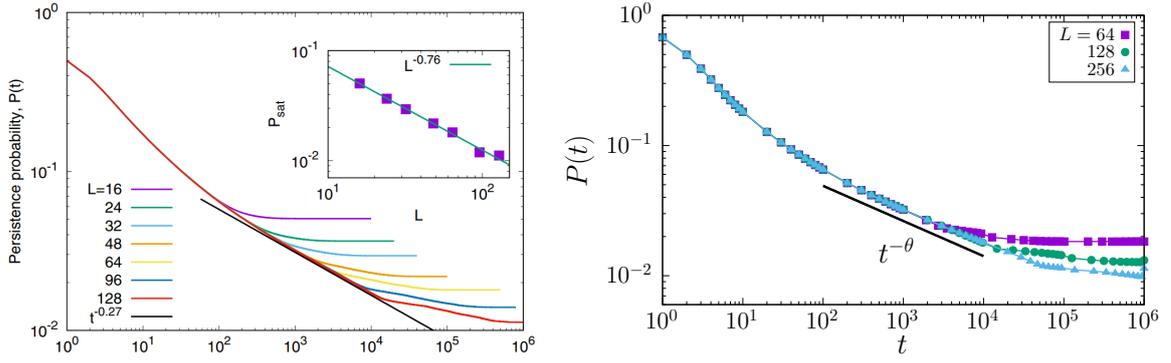


Figura 2.14: Persistência $P(t)$ no VM com tensão superficial [56] para redes de diferentes L . O gráfico da esquerda foi retirado do artigo [32]. Para comparação, a reta mostra o comportamento dado por $P(t) \sim t^{-\theta}$ com $\theta = 0.27$, consistente com $\theta = 0.2$ do IM0. Após um regime inicial, no painel da esquerda, a dinâmica estabiliza em um comportamento de lei de potência (curva sólida). Por outro lado, em redes maiores, como mostra o painel da direita, vemos que há um desvio da lei de potência para um expoente menor em módulo.

para tempos longos, um comportamento descrito por

$$P(t) \sim t^{-0.27}, \quad (2.17)$$

consistente com o expoente 0.2 do IM0. Por outro lado, a densidade de interfaces decresce como

$$\rho(t) \sim t^{-0.46}, \quad (2.18)$$

em comparação com $1/2$ do IM0.

A Fig. 2.16 apresenta as medidas do tamanho médio dos domínios $A(t)$ para distintos

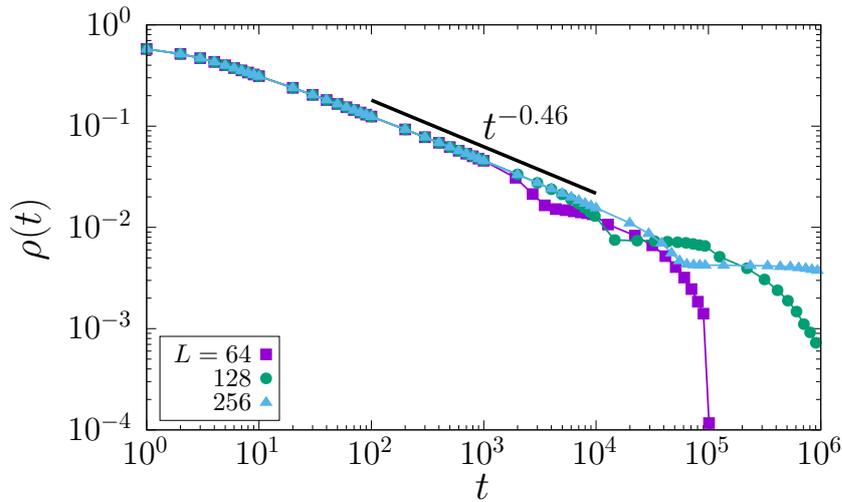


Figura 2.15: Densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ no VM com tensão superficial efetiva, para diferentes L . Aqui o regime de lei de potência parece seguir um comportamento do tipo $\rho(t) \sim t^{-\beta}$ com $\beta \simeq 0.46$ (curva sólida), consistente com $\beta = 1/2$ do IM0.

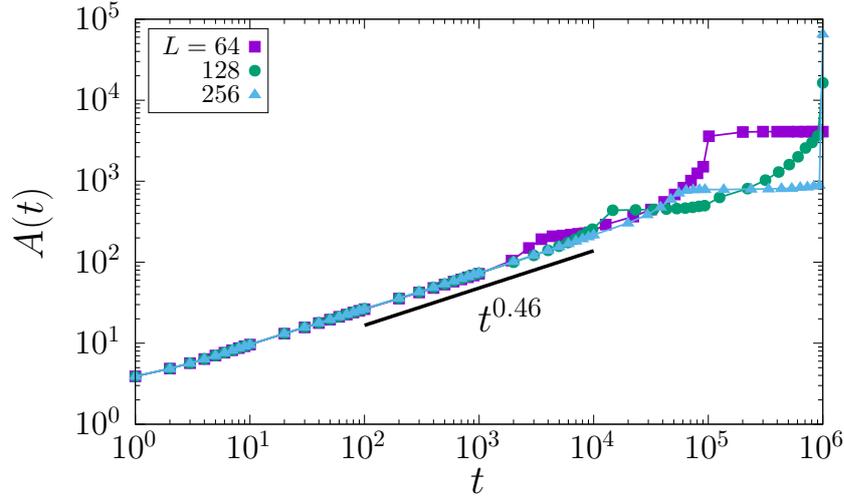


Figura 2.16: Tamanho médio dos domínios $A(t)$ no VM com tensão superficial efetiva, para diferentes L . A curva sólida corresponde ao comportamento de lei de potência $A(t) \sim t^{0.46}$. Diferente dos outros expoentes, que são consistentes com o esperado para o regime de crescimento por curvatura, aqui o expoente é obtido é cerca de metade do esperado para o IM0.

L . Novamente, o desenvolvimento de uma lei de potência fica aparente,

$$A(t) \sim t^{0.46}. \quad (2.19)$$

Neste caso, o expoente desenvolvido, 0.46, difere do expoente esperado para domínios que crescem por curvatura, que é 1.

As distribuições de tempo para consenso $h(\mathcal{T}, L)$ destes sistemas estão apresentadas

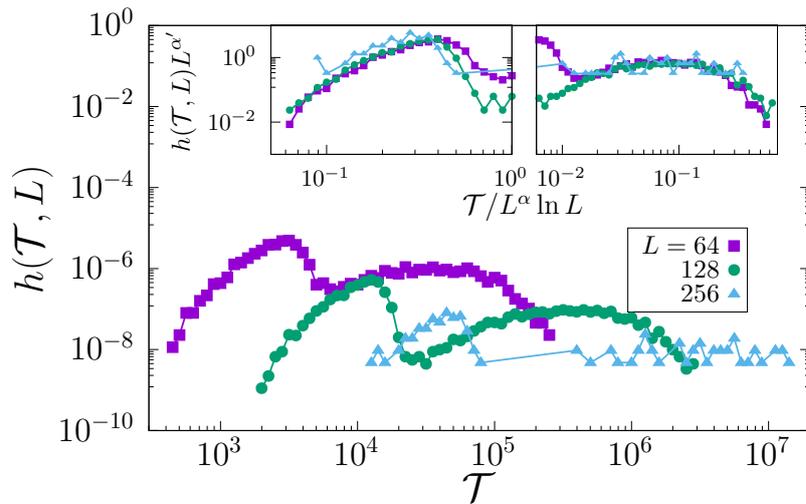


Figura 2.17: Distribuição de tempos para consenso no VM com tensão superficial efetiva, para diferentes L . Os destaques mostram o colapso com uma escala de tempo $L^\alpha \ln L$ com $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3.5$ respectivamente. Para o colapso as distribuições são também multiplicadas por um fator $L^{\alpha'}$ com $\alpha' = 3.25$.

na Fig. 2.17. Diferente do que ocorre no VM puro, as distribuições são descritas por duas escalas de tempo, como no IM0. Uma primeira escala aparentemente proporcional a $L^2 \ln L$, que é exatamente igual à escala de tempo das amostras do VM. E uma segunda escala, aparentemente dada por $L^{3.5} \ln L$. Note que ambas as escalas se relacionam às distribuições do IM0 por um fator $\ln L$, como também é o caso do VM.

Os resultados apresentados neste capítulo servirão como base para a compreensão dos mecanismos responsáveis pelo crescimento de domínios no modelo proposto nesta dissertação. Para verificar e aprimorar algumas das medidas apresentadas para estes modelos, trabalharemos com redes de tamanhos maiores.

Capítulo 3

Desordem auto-induzida e a formação espontânea de zelotes

O modelo aqui sugerido propõe a inclusão de um tipo de resposta dos agentes na forma de um congelamento local, temporário ou não, da variável de opinião σ_i . Agentes com confiança absoluta, i.e., zelotes, são indiferentes à opinião de seus vizinhos, nunca trocando seu estado [12–15]. Estes zelotes introduzem um tipo de desordem no sistema que, além de alterar a lei de crescimento dos domínios, pode impedir o sistema de atingir o consenso. Para introduzir e controlar este efeito propomos a introdução de uma variável η_i associada à convicção, ou certeza, de cada indivíduo. Deste modo, um agente cuja convicção excede um determinado limiar, ϕ , não poderá ter sua opinião trocada. Tais agentes são ditos zelotes pois, apesar de ainda participarem das interações, sua opinião não varia. Desta forma, uma espécie de inércia é introduzida no sistema como uma resistência a mudar de opinião. Assim, zelotes podem ser identificados como impurezas na rede. Os critérios e processos responsáveis pela formação destes agentes distintos serão discutidos ao longo deste capítulo.

A presença de zelotes, além de possivelmente impedir que o sistema alcance o consenso, também pode fazer com que domínios cresçam de maneira distinta da usual. Ao invés de ser uma característica inata dos agentes, propomos um modelo com desordem auto-induzida. No modelo, tornar-se um zelote é uma consequência direta da própria dinâmica do sistema e deve depender do histórico prévio de interações de cada agente. Além disto, tal desordem pode ser irreversível ou reversível. No primeiro caso, uma vez transformado em zelote, o agente permanece neste estado, enquanto que no segundo, é possível voltar a ser um agente normal, cuja opinião pode ser atualizada. Neste trabalho discutiremos brevemente o caso de desordem irreversível (Apêndice B) embora nosso enfoque seja no caso reversível por motivos que ficarão claros durante as discussões.

3.1 Modelo

Em uma rede, cada um dos N sítios possui um agente cuja opinião está associada a uma variável binária $\sigma_i = \pm 1$. Além da própria opinião, cada agente apresenta um grau de certeza dado por uma variável positiva e contínua $\eta_i \geq 0$. Esta variável deve depender do histórico de interações de cada agente e está portanto correlacionada com as diferentes disputas nas quais este se envolveu, evoluindo a cada interação. Quando η_i ultrapassa o limiar ϕ , o agente se torna imune a trocas de opinião, um zelote. Como já discutido, este processo pode ou não ser reversível.

Um passo de Monte Carlo (1 MCS) será considerado como N tentativas de atualização de sítios da rede de acordo com as seguintes regras: a cada interação, um agente focal, i , e um de seus sítios vizinhos, j , são aleatoriamente selecionados com (σ_i, η_i) e (σ_j, η_j) sendo, respectivamente, seus estados no instante de tempo t . Considerando apenas a variável de opinião temos dois possíveis cenários em uma interação: $\sigma_i \neq \sigma_j$ ou $\sigma_i = \sigma_j$.

Quando $\sigma_i \neq \sigma_j$ a opinião do agente focal tenta se alinhar a de seu vizinho. O resultado da interação depende apenas da convicção do sítio focal η_i , tal que

$$\sigma_i \xrightarrow{\alpha(\eta_i)} \sigma_j, \quad \text{com} \quad \alpha(\eta_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta_i < \phi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

A escolha de uma função degrau para a definição de $\alpha(\eta_i)$ está diretamente relacionada ao nosso interesse na formação espontânea de zelotes, já que estes por sua vez, exercem um papel de impureza na rede. Na literatura é possível encontrar outras abordagens similares a esta utilizando, porém, uma função $\alpha(\eta_i)$ contínua [18]. Como consequência desta definição, as interações entre agentes de opinião distintas só podem ser de dois tipos: ou $\eta_i < \phi$, e o sítio focal tem sua opinião alterada, ou $\eta_i \geq \phi$ e sua opinião persiste, i.e., agente focal zelote. Desta forma, apenas não-zelotes podem ter sua opinião trocada como podemos ver na Fig. 3.1. Em paralelo à variável de estado, as convicções de ambos os sítios também são atualizadas. Esta atualização acontece independentemente de η , de modo que quando um agente focal se depara com uma opinião distinta, o mesmo tem sua certeza reescalada por um fator γ , enquanto seu vizinho, que teve a possibilidade de influenciar outro agente, tem a sua aumentada em $\Delta\eta$,

$$\eta_i \longrightarrow \eta_i/\gamma \quad (3.2)$$

$$\eta_j \longrightarrow \eta_j + \Delta\eta. \quad (3.3)$$

As constantes $\gamma \geq 1$ e $\Delta\eta \geq 0$ são parâmetros do modelo. Enquanto γ controla a intensidade do mecanismo de diminuição da convicção, $\Delta\eta$ define o reforço positivo. Desta forma, γ define quantas interações são necessárias para um agente retornar à normalidade,

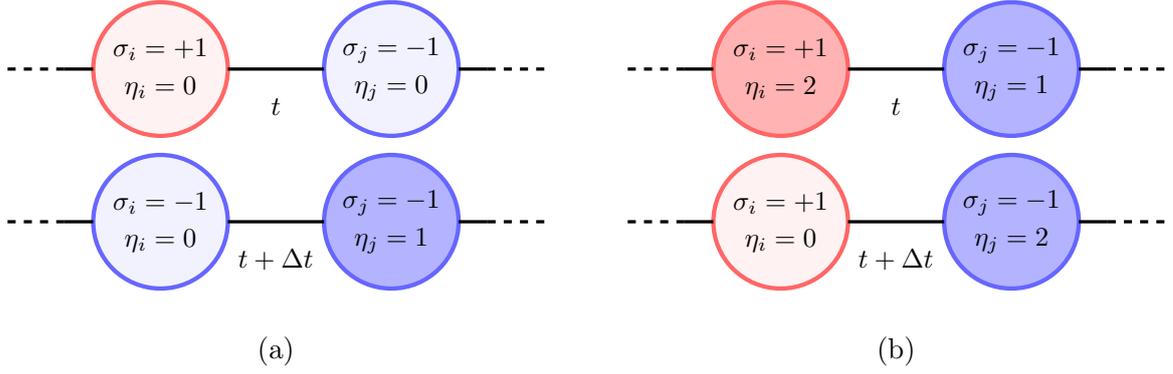


Figura 3.1: Representação da dinâmica quando o agente focal, i (sítio da esquerda), e um vizinho, j (sítio da direita), interagem. Consideramos aqui $\Delta\eta = 1$, $\phi = 1$ e $\gamma \rightarrow \infty$. No caso (a) o agente i é normal, $\eta_i < \phi$, ao passo que em (b) este é um zelote, $\eta_i > \phi$ (representado pelo círculo preenchido). Em (a) a opinião de i é substituída pela de j , enquanto em (b) esta se mantém. Em ambos os casos a convicção do agente focal é anulada, fazendo com que este deixe de ser um zelote em (b). Por outro lado, a convicção de j aumenta em $\Delta\eta$ por ter influenciado seu vizinho, $\eta_j \rightarrow \eta_j + \Delta\eta$, em ambos os painéis.

enquanto $\Delta\eta$ controla o número de interações necessárias para a formação de zelotes.

No caso em que $\sigma_i = \sigma_j$, apesar de não haver troca de opinião, o reforço positivo é mútuo. Neste caso η deve aumentar para ambos os agentes, como mostra a Fig. 3.2.

$$\eta_i \longrightarrow \eta_i + \Delta\eta \quad (3.4)$$

$$\eta_j \longrightarrow \eta_j + \Delta\eta. \quad (3.5)$$

Como a variável relevante é $\Delta\eta/\phi$, escolhamos o limiar como $\phi = 1$.

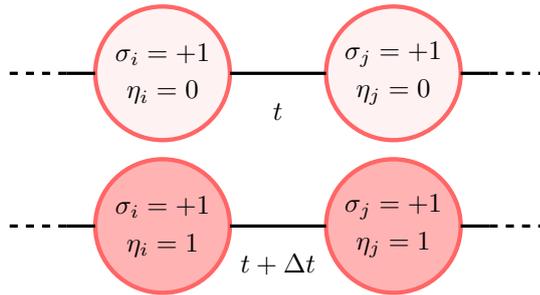


Figura 3.2: Dinâmica do modelo proposto no caso de dois sítios de opiniões idênticas interagindo. Foi tomado $\Delta\eta = 1$ considerando o agente focal como o sítio da esquerda. Como resultado, ambos os agentes tornam-se zelotes daquela determinada opinião já que um reforço positivo é suficiente para atingir o limiar ϕ .

Zelotes, no modelo proposto, são uma forma de desordem auto-induzida, e através do fator de reescala γ , este processo pode ser irreversível, $\gamma = 1$, ou reversível $\gamma > 1$. No caso irreversível, o mecanismo de reescala não altera o estado da variável de convicção.

Uma vez formado um zelote, este persiste indefinidamente ao longo da dinâmica. No caso em que $\gamma > 1$, como η segue evoluindo, ao ser confrontado por uma opinião distinta um agente zelote terá sua convicção reduzida pelo fator γ , podendo, eventualmente, deixar de ser um zelote. Neste caso, impurezas são formadas por um processo reversível.

No caso reversível nos interessa, em específico, o limite superior $\gamma \rightarrow \infty$ onde um sítio focal, quando confrontado por uma opinião distinta, tem sua convicção zerada, $\eta_i \rightarrow 0$. Isto faz com que o mecanismo de troca de opinião seja, para estes agentes, um processo de duas etapas. Em uma primeira etapa o agente focal tem sua convicção zerada, deixando assim de ser um zelote. Desta forma, em uma próxima seleção, o agente previamente confrontado pode ter sua opinião alterada.

Ao contrário do VM e do IM0, onde existem interações que não geram mudanças no estado físico do sistema, aqui, apesar de a opinião não ser necessariamente alterada, a variável de convicção sempre é atualizada durante a dinâmica. Por este motivo o custo computacional das simulações tende a ser consideravelmente maior.

No capítulo a seguir apresentaremos os resultados numéricos obtidos para os casos irreversível, $\gamma = 1$, e reversível, $\gamma \rightarrow \infty$. Estes limites serão analisados em 1d e 2d em redes regulares com condições de contorno periódicas. A menos que explicitamente mencionado, o estado inicial do sistema será totalmente aleatório, i.e., $\sigma_i = \pm 1$ com probabilidade $1/2$. Todas as variáveis de convicção são inicialmente nulas, $\eta_i = 0 \forall i$ e, portanto, a fração inicial de zelotes no sistema é nula, $z(t = 0) = 0$.

Capítulo 4

Simulações numéricas

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados obtidos para o modelo introduzido no Cap. 3 tanto para o caso 1d quanto para 2d.

4.1 Caso 1d

Embora tenham sido realizadas simulações para redes de diferentes tamanhos, os resultados apresentados aqui correspondem ao tamanho $N = 10^5$, suficiente para reduzir os efeitos de tamanho finito. Além disso, as médias correspondem a 100 amostras independentes. A Fig. 4.1 apresenta a evolução temporal da persistência $P(t)$ e da densidade de interfaces $\rho(t)$ para dois casos, $\gamma = 1$ e $\gamma \rightarrow \infty$. Como zelotes aparecem somente mais tarde na dinâmica (curva vermelha) o comportamento inicial é o mesmo do VM. Neste, a persistência e densidade de interfaces ativas possuem comportamento algébrico dado por

$$P(t) \sim t^{-3/8}, \quad (4.1)$$

e

$$\rho(t) \sim t^{-1/2}, \quad (4.2)$$

respectivamente [63,64]. Entretanto, com o rápido aumento da densidade de zelotes, $z(t)$, ocorre um desvio do comportamento puro. Em um extremo, $\gamma = 1$ e não há mecanismo de redução de convicção. A formação de zelotes é portanto irreversível. Neste caso, se a escala de tempo do sistema permitir a criação de zelotes, a dinâmica é interrompida em um estado congelado onde coexistem dois ou mais blocos compactos desses agentes, com opinião oposta, e o consenso nunca é atingido. No outro extremo, $\gamma \rightarrow \infty$, o mecanismo reinicia o nível de convicção em um contato. Aqui, ambas as variáveis $P(t)$ e $\rho(t)$ possuem uma região intermediária na qual o decrescimento é desacelerado para, em tempos maiores, retomar o comportamento típico do VM, i.e. o mesmo expoente embora com um coeficiente maior.

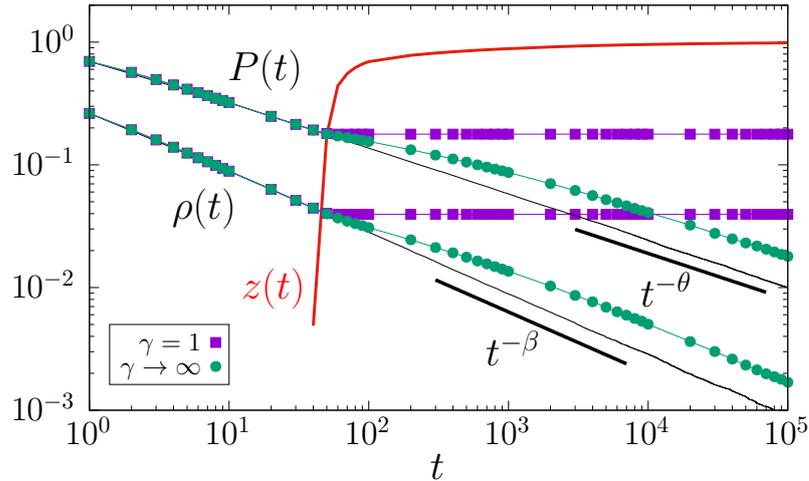


Figura 4.1: Persistência $P(t)$ e densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ no modelo proposto em 1d com $\Delta\eta = 10^{-2}$, $\gamma = 1$ (símbolos roxos) e $\gamma \rightarrow \infty$ (símbolos verdes). As curvas pretas sólidas correspondem à $P(t) \sim t^{-\theta}$ e $\rho(t) \sim t^{-\beta}$, com $\theta = 3/8$ [63, 64] e $\beta = 1/2$. A curva vermelha representa a fração de zelotes $z(t)$. Podemos observar três regimes distintos. Um inicial, onde o sistema se comporta como o VM original. Um regime intermediário onde o sistema começa a formar seus primeiros zelotes e a curva passa a desviar do VM até que, em um terceiro regime, o sistema parece se estabilizar novamente no comportamento do VM com mesmo expoente.

Uma ideia qualitativa da dinâmica do modelo proposto está ilustrada nos instantâneos da Fig. 4.2. No primeiro regime (painel da esquerda) zelotes ainda não foram formados e portanto a dinâmica é a mesma do VM. Devido a esta dinâmica, o sistema é então dividido em domínios de votantes que coalescem assim que duas paredes se encontram. O surgimento de zelotes (cores escuras), no núcleo destes domínios, faz com que o sistema se desvie do comportamento do VM (painel central), passando por uma região de transição. Com a evolução do sistema, agentes normais (cores claras) ficam então confinados em faixas entre blocos compactos de zelotes, caracterizando o estágio final da dinâmica (painel da direita). Vamos denominar cada uma dessas faixas como uma Região Ativa (AR). Dentro delas, agentes normais seguem a dinâmica do VM puro, e à medida que as interfaces dentro da AR (onde vermelho e azul claro são vizinhos) se aproximam das ilhas de zelotes internas, sua largura muda. Devido ao passo extra, introduzido pela dinâmica proposta, necessário para a troca de opinião de um agente zelote, o crescimento dos domínios é mais lento que no VM. Pequenos domínios persistem por mais tempo e portanto tanto a persistência $P(t)$ quanto a densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ encontradas são relativamente maiores.

O crescimento de domínios em 1d é regido puramente pelo comportamento difusivo das paredes destes. Para melhor entender como a presença de zelotes afeta tal comportamento, consideramos um estado inicial de apenas uma única parede, localizada em $x(0)$, que divide o sistema em dois blocos, um para cada opinião. São tomadas condições de contorno

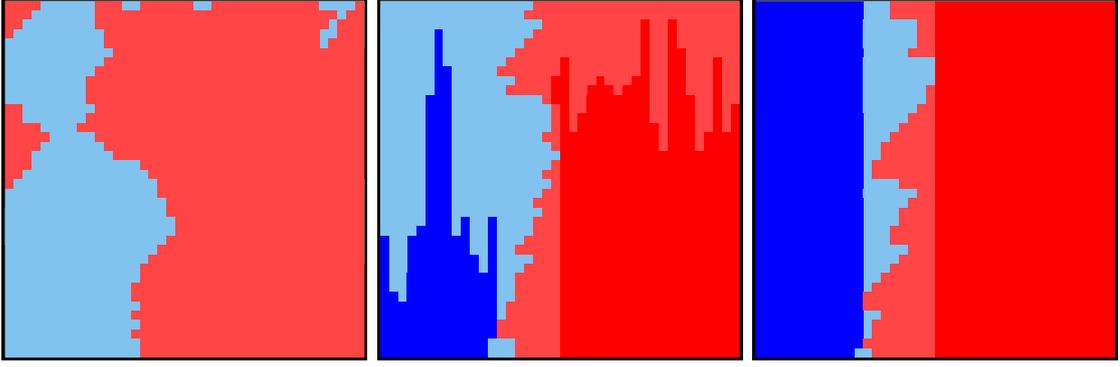


Figura 4.2: Instantâneos do modelo proposto em 1d no caso $\gamma \rightarrow \infty$ com $\Delta\eta = 10^{-2}$, mostrando a evolução temporal nos três distintos regimes (tempo avança de cima para baixo e apenas uma parte da rede pode ser vista). Cores distintas foram utilizadas para diferenciar agentes zelotes $\eta_i \geq \phi$ (cores escuras) dos agentes que ainda podem ter sua opinião trocada $\eta_i < \phi$ (cores claras). O painel da esquerda representa o regime inicial onde a dinâmica é puramente dada pelo VM. No painel central podemos ver o regime intermediário onde muitos dos domínios gerados pela dinâmica do VM puro já coalesceram e os primeiros zelotes começam a aparecer na região central destes domínios maiores. Finalmente, no painel da direita podemos ver que o regime de tempos longos, onde enxergamos a presença de domínios extensos de opiniões opostas intercaladas cujas interfaces são regiões povoadas por agentes cuja convicção encontra-se abaixo do limiar ϕ .

fixas. Além disso $\gamma \rightarrow \infty$ e todos os sítios possuem, inicialmente, convicção nula, $\eta_i = 0$. Medimos então o desvio quadrático médio da interface

$$R^2(t) = [x(t) - x(0)]^2, \quad (4.3)$$

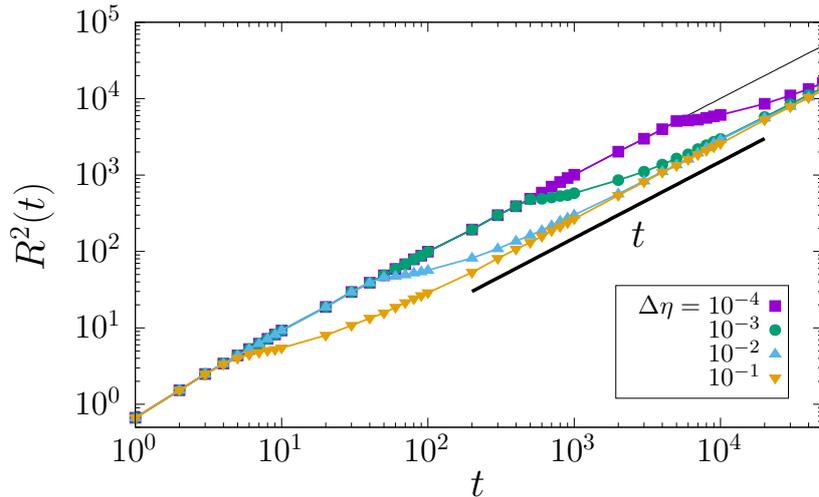


Figura 4.3: Desvio quadrático médio $R^2(t)$ no modelo proposto para diferentes valores de incremento $\Delta\eta$. A curva preta (fina) corresponde ao comportamento do VM. O comportamento assintótico é, para todos $\Delta\eta$, linear e difusivo (linha preta grossa). Existe, entretanto, um regime intermediário, sub-difusivo no qual as curvas se desviam e mais tarde retornam ao comportamento linear.

onde $x(t)$ é a posição da interface no instante de tempo t .

Quando o comportamento é puramente difusivo, como no VM, $R^2(t)$ é dado por,

$$R^2(t) = 2Dt, \quad (4.4)$$

onde D é o coeficiente de difusão. O comportamento para diferentes valores de $\Delta\eta$ está mostrado na Fig. 4.3. Quanto menor $\Delta\eta$, maior é o tempo que o sistema leva para desviar do comportamento original do VM. Em todos os casos, duas escalas de tempo estão presentes. Para tempos curtos, o comportamento difusivo coincide com o do VM. Quando o sistema forma zelotes, em tempos intermediários, a dinâmica se torna sub-difusiva. Posteriormente, com a formação de ilhas estáveis de zelotes, o comportamento difusivo é retomado. No estágio final da dinâmica, esta é confinada à faixa de agentes não-zelotes formada na interface entre dois blocos compactos de zelotes. A evolução da interface depende então do destravamento de agentes zelotes e portanto ocorre em tempos mais longos. O comportamento deste sistema é similar ao de vidros estruturais, com uma escala de tempo curta associada ao movimento browniano dentro das gaiolas delimitadas por partículas vizinhas, e uma escala de tempo mais longa relacionada com a lenta reestruturação das próprias gaiolas [65–67]

4.2 Caso 2d

A introdução de desordem irreversível, $\gamma = 1$, em 2d, assim como no caso unidimensional, faz o sistema congelar em uma configuração com múltiplos domínios de zelotes (ver Apêndice B para maiores detalhes). Estes começam a ser formados em pequenos domínios que se expandem até que todos os agentes já não sejam passíveis de troca de opiniões. A dinâmica então cessa em uma configuração com um número finito e fixo de domínios. Novamente a introdução de um mecanismo que diminua as convicções se mostra eficaz em enriquecer as propriedades do modelo, como evidenciam os resultados numéricos a seguir, referentes ao caso $\gamma \rightarrow \infty$.

As médias das variáveis dinâmicas que serão apresentadas aqui foram obtidas sobre 10^3 amostras para cada tamanho de rede. Na Fig. 4.4 vemos o comportamento da persistência $P(t)$ para um valor fixo de $\Delta\eta = 10^{-2}$ e distintos tamanhos de rede. Assim como em 1d, a variável segue o comportamento do VM até o súbito surgimento de zelotes no sistema (curva vermelha), quando passa a se desviar deste. Após um transiente intermediário, novamente o sistema se estabiliza em um terceiro regime. Este parece ser descrito pelo movimento dos domínios de zelotes (domínios de cores escuras) cuja dinâmica se assemelha àquela do IM0 e a persistência passa a evoluir como uma lei de potência do tipo

$$P(t) \sim t^{-\theta} \quad (4.5)$$

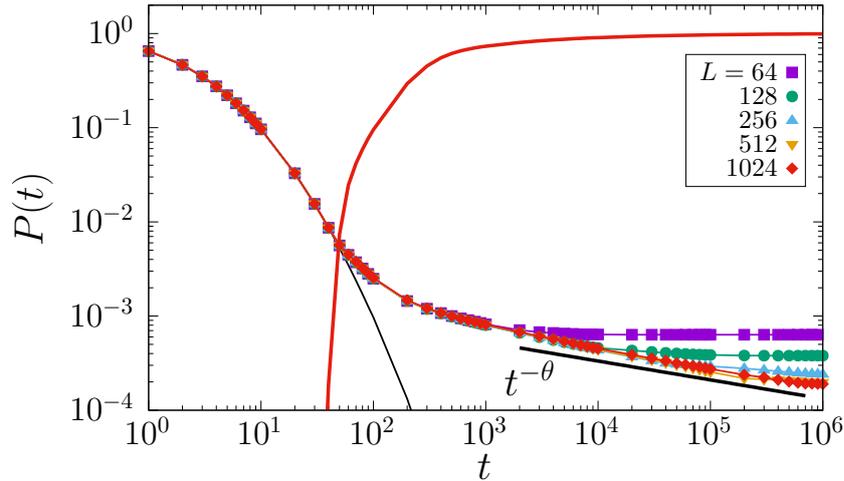


Figura 4.4: Persistência $P(t)$ para diferentes tamanhos lineares de rede L com $\Delta\eta = 10^{-2}$ e $\gamma \rightarrow \infty$, em comparação com o VM (curva preta fina). Novamente temos três regimes distintos, um comportamento inicial que segue o VM. Um regime intermediário que se inicia com o surgimento de zelotes no sistema (curva vermelha). E um terceiro regime no qual o comportamento da variável parece novamente se estabilizar, agora em uma lei de potência do tipo $P(t) \sim t^{-\theta}$ com expoente $\theta \simeq 0.2$ mostrado pela curva preta mais grossa (ver seção 2.2.1).

com expoente $\theta \simeq 0.2$ (curva preta sólida) consistente, como visto na seção 2.2, com o valor estimado para o IM0 e para outras variações do VM. Assim, quando a fração de zelotes se aproxima de 1, a dinâmica parece se assemelhar àquela do IM0 apresentada na seção 2.2.1. A variável dinâmica não só é regida por uma lei de potência, como adota um expoente muito próximo ao esperado para a classe de universalidade do IM0. Este comportamento fica mais evidente para sistemas maiores já que os efeitos de tamanho finito, para redes pequenas, começam a surgir antes do sistema sequer formar seus primeiros zelotes.

A densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ está apresentada na Fig. 4.5. Assim como as medidas de $P(t)$, aqui mais uma vez identificamos três distintos regimes. Inicialmente o sistema possui o mesmo comportamento do VM. Após um regime de transição, a variável estabiliza em uma lei de potência do tipo

$$\rho(t) \sim t^{-\beta}, \quad (4.6)$$

com $\beta \simeq 0.46$. Este expoente é consistente com o obtido para outras variações do VM como visto na seção 2.2.2. Na região entre domínios de opiniões distintas a dinâmica é a do VM puro, e portanto, as interfaces são rugosas, como mostra a Fig. 4.6. Flutuações estatísticas geram uma troca constante de opiniões que mantém a convicção dos agentes abaixo do limiar. É curioso então que $\rho(t)$, apesar de ser governado pela dinâmica do VM, apresente comportamento similar ao esperado do crescimento de domínios por curvatura.

Uma ideia qualitativa da dinâmica está exemplificada na Fig. 4.6 onde podemos ver os

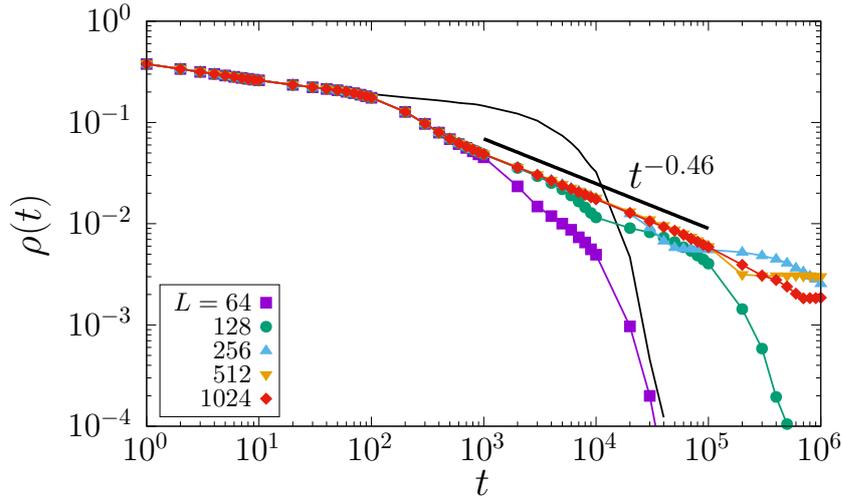


Figura 4.5: Densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ para diferentes tamanhos de rede L com $\Delta\eta = 10^{-2}$ e $\gamma \rightarrow \infty$, em comparação com o VM (curva preta fina). Novamente a dinâmica se apresenta em três regimes distinto estabilizando em tempos longos também em uma lei de potência $\rho(t) \sim t^{-\beta}$ agora com expoente $\beta \simeq 0.46$ (curva preta mais grossa).

três distintos regimes. No primeiro (painel da esquerda), zelotes ainda não foram formados e o comportamento é o mesmo do VM 2d. Em um regime intermediário (painel central), domínios gerados devido à dinâmica do VM começam a formar uma fração de zelotes em seu núcleo. Isto faz com que a evolução se torne cada vez mais lenta, como vimos no caso 1d. Agentes não-zelotes (cores claras) ficam então confinados entre domínios de zelotes (região ativa, AR), caracterizando o estágio final da dinâmica (painel da direita). Uma tensão superficial efetiva é gerada nas interfaces devido à presença das ilhas. Apontamos o fato de que interfaces entre zelotes e não-zelotes de mesma cor (vermelho claro e vermelho escuro, por exemplo) são mais lisas, assim como no IM0, enquanto as interfaces dentro da AR são rugosas como o esperado para a classe de modelos do VM. Esta tensão superficial pode levar o sistema a um estado transiente polarizado no qual uma ou mais estruturas semelhantes a faixas aparecem. Embora aqui faixas perfeitamente paralelas não sejam um estado absorvente do sistema, como é o caso no IM0, sua formação, como veremos, faz com que a dinâmica até o consenso seja dada em uma escala de tempo diferente.

Fica evidente que o modelo proposto parece transitar entre duas classes de universalidade distintas: para tempos curtos os observáveis se comportam identicamente ao VM enquanto que para tempos longos estas passam a ser descritas por leis de potências como no IM0. Para caracterizar de maneira adequada a dinâmica de crescimento de domínios do modelo proposto apresentaremos agora as medidas geométricas.

A Fig. 4.7 mostra o tamanho médio dos domínios $A(t)$ para diferentes tamanhos L . Similar às outras variáveis, é possível determinar um expoente aparente

$$A(t) \sim t^\delta \quad (4.7)$$

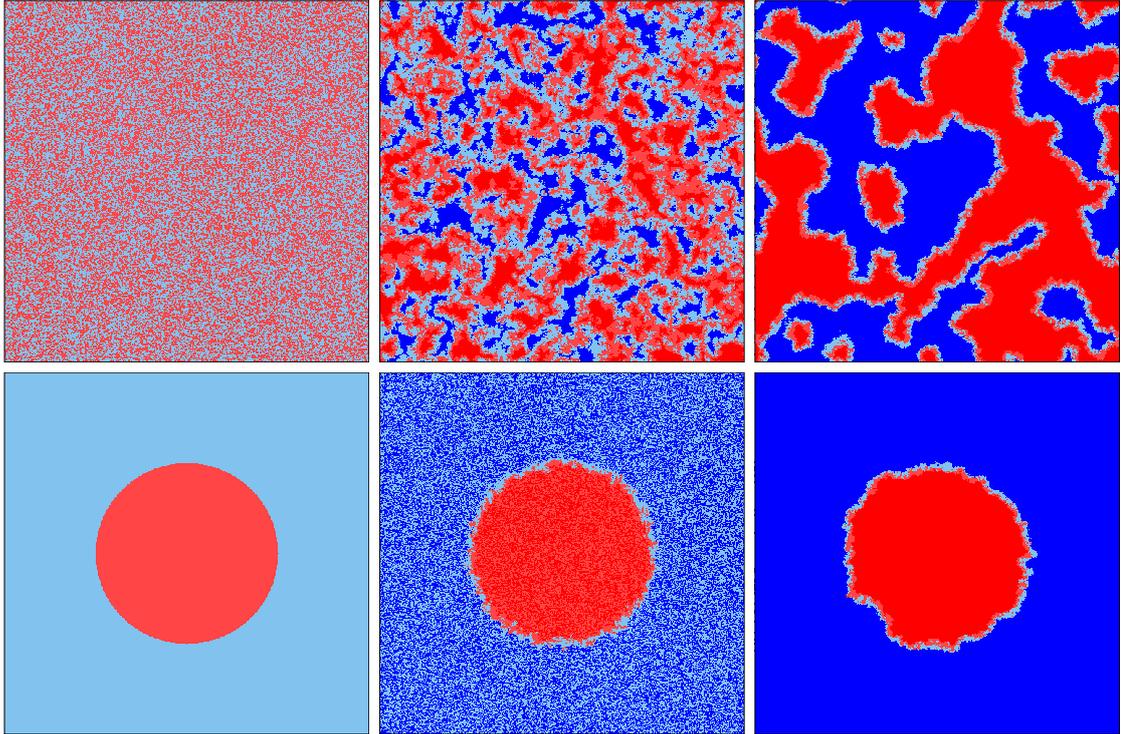


Figura 4.6: Instantâneos da evolução do modelo proposto em 2d com incremento fixo $\Delta\eta = 10^{-2}$ e $\gamma \rightarrow \infty$. Na linha superior, o estado inicial (painel esquerdo) é tal que cada agente tem mesma probabilidade de escolher uma das opiniões. Os outros tempos são $t = 400$ MCS (centro) e 2000 MCS (direita). Na linha inferior, o estado inicial concentra uma das opiniões em um círculo cercado pela outra opinião. Os outros tempos são $t = 50$ MCS (centro) e $t = 1000$ MCS (direita). Cores escuras representam zelotes.

com $\delta \simeq 0.46$. Assim como na dinâmica de modelos como o IM0, o modelo proposto parece de alguma forma favorecer a minimização de interfaces durante sua dinâmica. Como consequência, onde no VM havia uma população maior de domínios pequenos, criados pela fragmentação da interface, temos aqui um único domínio compacto e com interfaces internas lisas. Diferente de $P(t)$ e $\rho(t)$, que desenvolvem leis de potência cujos expoentes se assemelham aos do IM0, aqui isto não ocorre. O expoente obtido, $\delta \simeq 0.46$, é menor que o esperado para o IM0 que é 1, o que também ocorre em outras extensões do VM, como visto na seção 2.2.2. A presença de agentes que evoluem segundo a dinâmica do VM puro aumenta o número de domínios do sistema. Desta forma, é esperado que o comportamento não seja idêntico ao do IM0.

Para melhor entender o papel das estruturas distintas formadas durante a dinâmica, e seu impacto nas escalas de tempo do modelo proposto, na Fig. 4.8 apresentamos a distribuição de tempos para consenso $h(\mathcal{T}, L)$ para um incremento fixo $\Delta\eta = 10^{-2}$ e diferentes tamanhos de rede. Os destaques mostram que $h(\mathcal{T}, L)$ obedece $h(\mathcal{T}, L) = L^{-\alpha'} H(\mathcal{T}/L^\alpha \ln L)$. Diferente do VM, as distribuições aqui são compostas por dois picos distintos. Logo, as amostras deste sistema podem ser separadas em dois conjuntos. No primeiro conjunto, correspondente ao primeiro pico, o sistema não passa por estados de

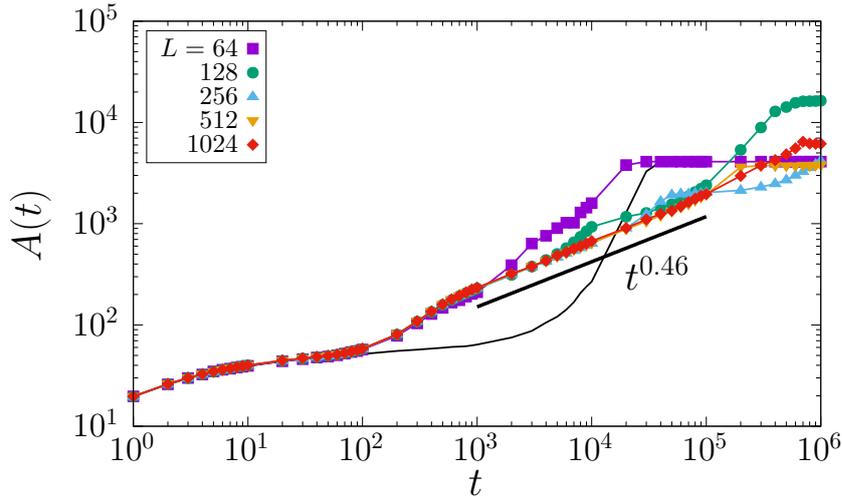


Figura 4.7: Tamanho médio dos domínios do sistema $A(t)$ definido como a área total da rede $N = L^2$ dividida pelo número de domínios existentes no sistema $c(t)$ para diferentes tamanhos de rede L com $\Delta\eta = 10^{-2}$ e $\gamma \rightarrow \infty$, em comparação com o VM (linha preta fina). Para tempos suficientemente longos, a área média é descrita por uma lei de potência, $A(t) \sim t^\delta$, cujo expoente, $\delta \simeq 0.46$ (linha preta mais grossa), é semelhante ao obtido para $\rho(t)$.

faixas e sua evolução até o estado absorvente se dá em uma escala de tempo menor que a do próprio VM. O colapso deste pico é realizado em uma escala de tempo similar a do VM,

$$\langle \mathcal{T}_1 \rangle \sim L^\alpha \ln L, \quad (4.8)$$

com $\alpha \simeq 2$. O segundo conjunto de amostras é caracterizado pelas amostras que, em algum momento de sua dinâmica, atingem uma das configurações de múltiplas faixas. Devido a estas formações geométricas, caracterizadas por pelo menos dois domínios que cruzam toda a rede em apenas uma direção, a dinâmica é fortemente desacelerada e a escala de tempo para a obtenção do consenso é maior

$$\langle \mathcal{T}_2 \rangle \sim L^\alpha \ln L \quad (4.9)$$

com $\alpha \simeq 3.5$. Note que esta escala de tempo é maior tanto em relação ao VM, $L^2 \ln L$, quanto em relação ao IM0, $L^{3.5}$.

É importante apontar aqui também que o resultado obtido é específico para o valor de $\Delta\eta$ utilizado. Em outras palavras $h(\mathcal{T}, L) = h(\mathcal{T}, L, \Delta\eta)$ é uma distribuição que depende de $\Delta\eta$ e, portanto, as escalas de tempo devem variar com os parâmetros do modelo.

Vimos que o modelo proposto, nas condições previamente definidas, possui uma distribuição de tempos para consenso com dois picos. Um pico referente a uma escala de tempo que, no caso estudado, encontra-se entre a do IM0 e a do VM, $\langle \mathcal{T}_{I_1} \rangle < \langle \mathcal{T}_1 \rangle < \langle \mathcal{T}_V \rangle$. E um segundo pico cuja escala de tempo é maior que ambos os modelos estudados, $\langle \mathcal{T}_{I_2} \rangle < \langle \mathcal{T}_V \rangle < \langle \mathcal{T}_2 \rangle$. Nos resta entender qual exatamente o papel do incremento $\Delta\eta$ na

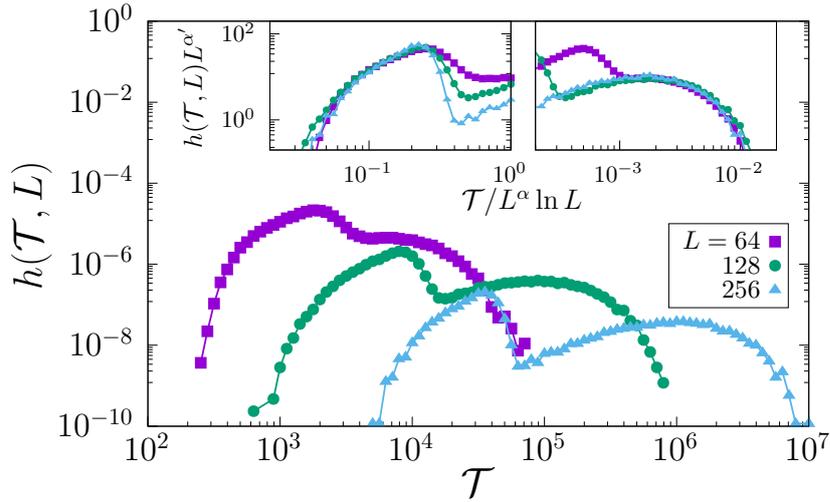


Figura 4.8: Distribuição de tempos para consenso $h(\mathcal{T}, L)$ para diferentes tamanhos de rede L com incremento $\Delta\eta = 10^{-2}$ (caso $\gamma \rightarrow \infty$). A distribuição passa a ser caracterizada por dois grupos amostrais distintos que atingem o consenso, assim como no IM0. Os destaques mostram os colapsos de cada pico das distribuições através de duas escalas de tempo distintas $L^\alpha \ln L$ com $\alpha_1 \simeq 2$ (esquerda) e $\alpha_2 \simeq 3.5$ (direita) com $\alpha' = 3.5$ em ambos.

dinâmica até o consenso. Isto é mostrado, qualitativamente, na Fig. 4.9, onde o sistema é inicialmente preparado com duas faixas idênticas que percolam em uma única direção. Para um dado $\Delta\eta$, a largura da AR se desenvolve, até atingir uma largura média que persiste durante a evolução do sistema enquanto houverem ilhas de zelotes. Esta largura depende dos parâmetros do modelo, $\Delta\eta$ e γ . Quanto maior $\Delta\eta$, menor a largura média da AR. Em um extremo, no limite $\Delta\eta = 0$, zelotes não são formados e o VM é recuperado. Por outro lado, quando $\Delta\eta = 1$ a AR é mínima, sendo, qualitativamente, o caso mais próximo do IM0, embora não seja óbvio o que esperar dos observáveis.

A Fig. 4.10 mostra a distribuição de tempos para consenso para distintos $\Delta\eta$. Para gerar cada uma das distribuições foram utilizados uma média de 10^4 amostras por curva.

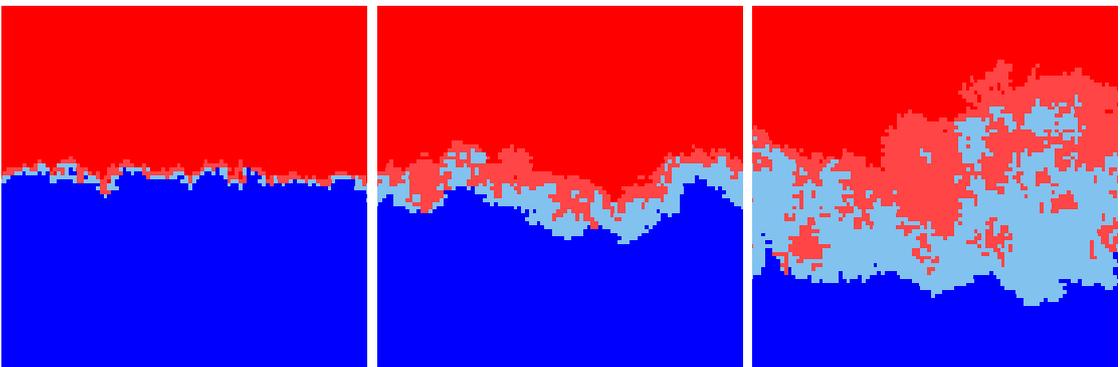


Figura 4.9: Dependência da região ativa em relação ao valor de $\Delta\eta$ no caso $\gamma \rightarrow \infty$. Os valores de incremento são $\Delta\eta = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$, respectivamente, no mesmo instante de tempo $t = 1000$ MCS. Apenas a parte central do sistema é mostrada.

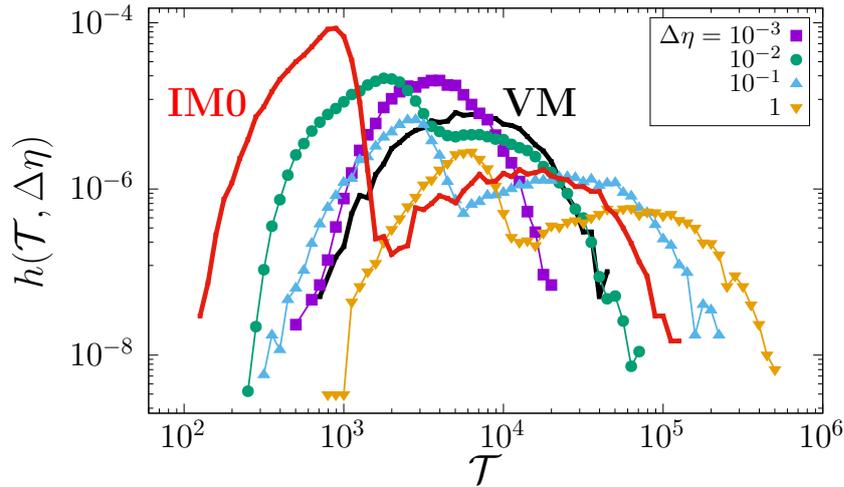


Figura 4.10: Distribuição de tempos para consenso $h(\mathcal{T}, L)$ no modelo proposto em 2d para diferentes incremento de memória $\Delta\eta$ e tamanho de rede fixo $L = 64$ em comparação com o VM (curva preta) e o IM0 (curva vermelha) no caso $\gamma \rightarrow \infty$. Podemos ver claramente uma transição de uma distribuição com um único máximo, para uma distribuição de dois picos similar a do IM0.

As curvas preta e vermelha correspondem, respectivamente, às distribuições do VM e do IM0. Fica evidente que, partindo de $\Delta\eta = 0$ até um dado valor que chamaremos aqui de $\Delta\eta_{\min}$, temos uma diminuição (deslocamento para a esquerda) do máximo global de cada uma das distribuições. Por outro lado, na região $(\Delta\eta_{\min} : 1]$ o máximo global das distribuições passa a se deslocar para a direita. Logo, nesta região as amostras levam, em média, um tempo maior para serem geradas. Existe, portanto, um valor de $\Delta\eta = \Delta\eta_{\min}$ que minimiza o tempo médio para o consenso no modelo proposto. Além disso, também fica evidente uma clara transição entre duas distribuições: uma mais larga de um só pico, similar a do VM, e outra com dois picos, similar a do IM0. Também é possível notar que a fração de amostras no segundo pico é consideravelmente maior para o modelo proposto quando comparado ao IM0. Isto é uma consequência direta das amostras do IM0 que são descartadas por jamais atingirem o consenso. No modelo proposto, estes estados não são absorventes e apenas desaceleram a dinâmica, sendo incluídos no segundo conjunto de amostras.

Para entender este comportamento, vamos considerar um estado inicial especialmente preparado onde uma das opiniões ocupa um disco enquanto a outra a circunda, como mostra a Fig. 4.6 (inferior). A velocidade com que a área do domínio circular evolui pode ser medida para diferentes valores de $\Delta\eta$. Através destas simulações, evitamos que o sistema atinja uma configuração de faixas, já que o sistema é inicializado com um domínio percolante nas duas direções. Todas as simulações foram realizadas para um tamanho de rede fixo $L = 256$, 10^3 amostras e com um domínio central também de tamanho fixo $A_0 = A(0)$.

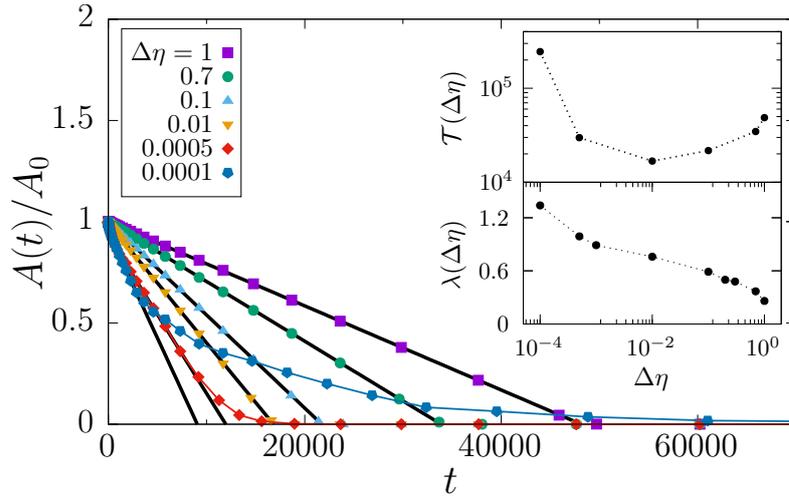


Figura 4.11: Tamanho do domínio circular central $A(t)$ no experimento da bolha. As linhas pretas mostram um ajuste linear do tipo $A(t) = A_0(1 - \lambda t)$ cujas respectivas inclinações estimadas λ encontram-se expostas no destaque inferior. Nota-se que para $\Delta\eta$ no intervalo $(\Delta\eta_{\min} : 1]$ as medidas acompanham o regime linear até o desaparecimento do domínio. Entretanto, no intervalo inferior, $[0 : \Delta\eta_{\min})$, o comportamento logarítmico se torna predominante e o tempo para dissipação do domínio volta a crescer.

A Fig. 4.11 mostra $A(t)$ para distintos $\Delta\eta$. Independente do incremento, a primeira parte do domínio a desaparecer é a região interna compostas por zelotes. Desta forma, ao final da dinâmica de todos os sistemas, o que persiste é a dinâmica do VM. Exatamente por isto, quanto maior a AR, mais cedo a dinâmica do VM passa a dominar. Como consequência, o mecanismo puramente estocástico faz com que o sistema desacelere novamente, demorando a atingir o consenso. Por isso, partindo de $\Delta\eta = 0$ até $\Delta\eta_{\min}$ vemos que, quanto maior $\Delta\eta$, menor é o tempo médio para consenso. Por outro lado, conforme aumentamos $\Delta\eta$ partindo de $\Delta\eta_{\min}$, quanto maior $\Delta\eta$, maior o tempo para obtenção do consenso. Aqui, a ilha de zelotes formada na região central do domínio é grande o suficiente para persistir durante a maior parte da dinâmica. Quando a ilha de zelotes finalmente é desfeita, a AR remanescente é tão pequena que o mecanismo do VM rapidamente termina de dissipar o restante do domínio. Como a dinâmica de opiniões é totalmente restrita a do VM, diminuir a AR implica em diminuir a frequência com que trocas efetivas são realizadas. Ou seja, minimizar a AR não é a forma mais efetiva que o sistema encontra para atingir o consenso. Diferente do IM0, cuja velocidade de dissipação de domínios, $\lambda = -dA/dt$, é conhecido e próximo a 2 [51,52], temos aqui uma gama de diferentes $\lambda(\Delta\eta)$ com a qual o sistema pode evoluir. O destaque inferior mostra como essa velocidade varia de acordo com $\Delta\eta$ se considerarmos o intervalo de tempo em que a dinâmica é puramente linear. Além disso também é possível obter um valor mínimo $\Delta\eta = \Delta\eta_{\min}$ tal que o tempo para consenso nos sistemas simulados seja mínimo $\mathcal{T}(\Delta\eta_{\min}) = \mathcal{T}_{\min}$, como mostra o destaque superior. Embora não seja o propósito neste trabalho determinar precisamente o valor de $\Delta\eta_{\min}$, podemos estimá-lo através da média dos tempos para consenso $\langle \mathcal{T}(\Delta\eta) \rangle$.

O destaque superior mostra os resultados obtidos onde vemos que a variável passa por uma inversão na taxa de crescimento na região $\Delta\eta \simeq 10^{-2}$ assumindo um valor mínimo.

Podemos ver que preservar uma parte das interações nas interfaces parece ser importante para acelerar a dinâmica. Uma AR não tão pequena, a ponto de não termos uma quantia relevante de trocas, e não tão grande a ponto de retornarmos ao regime puramente logarítmico parece ser essencial. No limite em que a largura da AR é pequena demais, as interações ocorrem em uma fração tão pequena da população que são necessários um número muito grande de passos na evolução do sistema até que os domínios tenham sofrido alterações consideráveis. Por outro lado, uma AR muito grande implica em uma dinâmica puramente estocástica, que tende a ser mais lenta. Desta forma, a existência de uma parcela segregada de indivíduos, que é responsável pela maior parte das interações, nas devidas condições pode acelerar a dinâmica global até o consenso.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho introduzimos um modelo de opiniões com formação espontânea de zelotes. Cada sítio possui, além de sua opinião, uma segunda variável, η , que quantifica o nível de confiança de cada agente. Enquanto este nível está abaixo de um dado limiar, o agente é livre para trocar de opinião seguindo a dinâmica do VM, caso contrário, o agente tem seu estado congelado. Interações entre agentes que partilham da mesma opinião reforça a confiança destes. Foram considerados dois casos limites dependentes do parâmetro γ que reescala a confiança após um confronto com uma opinião distinta. No caso $\gamma = 1$ a formação de zelotes é um processo irreversível, enquanto que no caso $\gamma \rightarrow \infty$, a dinâmica permite a reversibilidade destes agentes e sua coexistência com agentes normais. Opiniões similares são segregadas em domínios espaciais e, em seu núcleo, devido ao reforço positivo, zelotes começam a serem formados. Devido ao congelamento destes agentes, há um aumento na probabilidade de contatos com agentes vizinhos não-zelotes, aumentando também a confiança destes. Este mecanismo de redução de ruídos torna a interface entre zelotes e agentes normais, de mesma opinião, mais lisas. Esta superfície induz uma tensão superficial, agindo como uma barreira para o deslocamento de opiniões nas interfaces entre opiniões distintas. Nestas interfaces, longe dos núcleos, agentes normais se acumulam. Devido à alta probabilidade de interagir com uma opinião distinta, o nível de confiança é mantido baixo e zelotes nunca se formam. Zelotes e agentes seguindo a dinâmica do VM coexistem e os domínios do sistema passam a crescer por curvatura, na mesma classe de universalidade do Modelo A [33]. Embora o sistema evolua apenas através de trocas nas regiões do VM, a presença de agentes congelados impede a magnetização de ser restaurada. Embora crescimento por curvatura também tenha sido observado em outras variações do VM [17, 20, 22, 26–32], o modelo proposto neste trabalho permite controlar a parcela de agentes segregados, próximos à superfície através do parâmetro $\Delta\eta$. Além disso, embora a superfície interna seja responsável por induzir o crescimento por curvatura, a interface entre opiniões opostas é regida pela dinâmica usual do VM, sendo assim mais rugosa e fragmentada que em outros modelos.

A largura da região de votantes usuais próximos à interface, que depende de $\Delta\eta$ (ver Fig. 4.9), determina o quão rápido domínios encolhem e, conseqüentemente, o tempo de saída, i.e., quanto tempo o sistema leva para atingir o consenso. Enquanto grandes domínios encolhem, o núcleo de zelotes desaparece primeiro e a dinâmica deixa de ser regida pela curvatura da interface. Nesta etapa, a dinâmica é simplesmente a do votante e o domínio volta a se desfazer logaritmicamente. Assim, quanto mais estreita a região de votantes usuais em torno do núcleo, menos significativo se torna este regime. Quando $\Delta\eta$ é grande, a fração de não-zelotes sobreviventes após a dissipação do núcleo é tão pequena que rapidamente as flutuações estatísticas consomem o restante do domínio. Neste caso, a dinâmica é dominada pelo mecanismo de crescimento de domínios por curvatura. Apesar da dinâmica por curvatura ser usualmente mais rápida, neste caso ela se torna mais lenta, já que a fração de agentes passíveis de troca de estado também é pequena. Por outro lado, para $\Delta\eta$ pequeno, a faixa é tão larga que, com o desaparecimento do núcleo, o mecanismo logarítmico de crescimento domina o encolhimento do domínio, desacelerando novamente a dinâmica. A interpolação entre estes mecanismos é o que explica a existência de um tempo mínimo para consenso em função de $\Delta\eta$. Mostramos também que este mínimo ocorre na região $\Delta\eta \sim 10^{-2}$. Concluimos então que segregação de uma parcela da população pode, em alguns casos, diminuir o tempo necessário para o consenso.

Existem algumas possíveis generalizações do modelo interessantes de serem investigadas. Por exemplo, além de poder ser estudado no caso não binário, $M > 2$, podem ser consideradas heterogeneidades no sistema [68], por exemplo, nos valores de γ , $\{\gamma_i\}$. Caso valores de $\gamma_i \leq 1$ sejam permitidos, agentes podem se tornar zelotes permanentes, gerando um tipo de desordem fixa. Algumas das perguntas que podem ser feitas são, como a existência de zelotes permanentes altera o estado absorvente do sistema? Como este estado é influenciado por diferentes distribuições de γ ? Outra possibilidade é a reintrodução da conservação da magnetização, que está presente no VM mas é quebrada em nosso modelo, por uma regra local de conservação [69]. Esta dinâmica com parâmetros de ordem conservativos é conhecida por estar em uma classe de universalidade distinta do caso não conservativo [33, 70] e seus efeitos no presente modelo devem ser investigados.

Apêndice A

Artigo

O artigo incluso neste apêndice é o texto completo da Ref. [39], relacionado aos resultados apresentados no capítulo 4, publicado pela *Physical Review E*.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.106.014121>

Curvature-driven growth and interfacial noise in the voter model with self-induced zealotsLuís Carlos F. Latoski ^{1,*}, W. G. Dantas ^{2,†} and Jeferson J. Arenzon ^{1,3,‡}¹*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CEP 91501-970, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil*²*Departamento de Ciências Exatas, EEIMVR, Universidade Federal Fluminense, CEP 27255-125, Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brazil*³*Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia–Sistemas Complexos, Rio de Janeiro, 22290-180, Rio de Janeiro, Brazil*

(Received 7 April 2022; accepted 27 June 2022; published 18 July 2022)

We introduce a variant of the voter model in which agents may have different degrees of confidence in their opinions. Those with low confidence are normal voters whose state can change upon a single contact with a different neighboring opinion. However, confidence increases with opinion reinforcement, and above a certain threshold, these agents become zealots, irreducible agents who do not change their opinion. We show that both strategies, normal voters and zealots, may coexist (in the thermodynamical limit), leading to competition between two different kinetic mechanisms: curvature-driven growth and interfacial noise. The kinetically constrained zealots are formed well inside the clusters, away from the different opinions at the surfaces that help limit their confidence. Normal voters concentrate in a region around the interfaces, and their number, which is related to the distance between the surface and the zealotry bulk, depends on the rate at which the confidence changes. Despite this interface being rough and fragmented, typical of the voter model, the presence of zealots in the bulk of these domains induces a curvature-driven dynamics, similar to the low temperature coarsening behavior of the nonconserved Ising model after a temperature quench.

DOI: [10.1103/PhysRevE.106.014121](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.014121)**I. INTRODUCTION**

Consensus, in physical models of opinion dynamics [1–3], may be achieved locally, within a given subgroup, or globally, with all interacting agents agreeing on a common position. Understanding the process of the formation and the probability of attaining consensus, how to enforce it, and why it is sometimes prevented is important to uncover its underlying, universal mechanisms. An example is the convergence of results in some scientific fields (vaccines, climate, etc.) that, despite being widely accepted in the scientific community [4,5], do not always lead to evidence-based public policies. Indeed, in actual situations, agreement with other individuals may depend on several factors (e.g., the local network, the intensity of noise, new evidence, propaganda, fake news, self-confidence, and other psychological reinforcement mechanisms). However, in simple systems like the binary voter model (VM) and related models of language competition, the process is simplified and considered an ordering one, in which each agent aligns its opinion with one of its neighbors. In an infinite, regular lattice of dimension $d \leq 2$, the consensus in the VM is an absorbing state (bulk noise is absent) and is always attained, albeit with very different time dependences [6–9]. In two dimensions, the geometry we consider here, the growth of order by coarsening, in the absence of surface tension, is not driven by the curvature of the interfaces but by its noise [10,11].

In the original VM, agents have no confidence whatsoever, and opinions may change upon a single contact with a different position. The possibility of having strong confidence is among the many modifications introduced to better describe more complex social phenomena [1–3]. These confident agents, or zealots, may never change their opinion or may change it in spite of the opinions of their neighbors [12–16], introducing some disorder in the system that, besides interfering with how local consensus groups grow, may even prevent the system from attaining global consensus. When intermediate levels of confidence are allowed, the zealot state may be transient [17–26], and opinions are kept while the necessary number of contacts is not attained (complex contagion). This is akin to annealed disorder and represents the inertia in the process of changing an opinion, associated with a reinforcement mechanism that makes positions stronger or weaker. The necessity of multiple contacts prior to a change in state is similar to sampling the local field by interacting with a larger number of closest neighbors [17]. This noise reduction mechanism induces an effective surface tension [17,20,22,26–32], and some properties become analogous to those of the low temperature coarsening of the Ising model with nonconserved order parameters in the Allen-Cahn (model A) universality class [33] (hereafter IM0).

We propose an alternative model in which, instead of zealotry being an inherited characteristic, it may develop depending on the previous history of an individual. While its confidence is low, the agent behaves as a normal voter. However, above a given threshold its opinion freezes, and it becomes a kinetically constrained zealot. This self-induced disorder may be either irreversible (quenched) or, when the confidence keeps evolving, reversible (annealed). A

*luis.latoski@ufrgs.br

†wgdantas@id.uff.br

‡arenzon@if.ufrgs.br

reversible, or transient, zealot needs multiple interactions with the opposite opinion in order to reset its confidence and once again be able to change its opinion. This resetting corresponds to a complex contagion process, different from the simple, single contact process for normal agents. During the dynamics, clusters of agents with a common opinion form, grow, and compete for the consensus state. The reinforcement process between agents with the same opinion leads, after multiple interactions, to the formation of zealots in the bulk of these clusters. Because of the constant flipping that occurs close to the surface where both opinions coexist, the confidences are repeatedly reset, the agents tend to be normal voters, and consequently, the surface is very rough and fragmented. Below the actual interface there is another one that is internal, separating the bulk zealots from normal voters, all with the same opinion. Close to this secondary surface, normal voters who are close to zealots have a persistent neighborhood that induces an increase in their confidence, eventually increasing the probability of the normal voters becoming zealots themselves. This seems to be the mechanism responsible for the effective surface tension of the internal surface, which behaves as a frame structure for the external one. An important question is whether the internal surface is enough to turn the dynamics into a curvature-driven one, in spite of the interface still being rough as in the original VM. Moreover, what are the consequences for the probability of attaining a consensus? How does the approach to the stationary state change, depending on the parameters of the model? How do the geometric properties of the opinion clusters (neighboring agents with the same opinion) differ from those of the pure VM? These are some of the questions that we try to answer in the following sections.

II. THE MODEL

The state of each agent is characterized by two variables, (σ_i, η_i) . The binary opinion is represented by the discrete variable $\sigma_i = \pm 1$, where $i = 1, \dots, N$. The total number of agents N corresponds to the sites either in a one-dimensional (1D) ring or in a two-dimensional (2D) square lattice where $N = L^2$. Each opinion is associated with some individual degree of confidence, which is described by the continuous variable $\eta_i \geq 0$. It depends on the previous history of contacts and evolves after each interaction. When η_i attains the threshold ϕ (which is set to $\phi = 1$), the agent becomes refractory to the opinions of its neighbors, and σ_i is temporarily frozen, a form of self-induced disorder. However, η_i keeps evolving, and when it gets smaller than ϕ , that agent becomes, once again, susceptible to the opposite opinions of its nearest neighbors, and σ_i may change. We will refer to transient zealots simply as “zealots,” while the other agents will be called “normal.”

In a Monte Carlo step (MCS), N attempts to update randomly chosen agents are performed. Two agents are selected, i and one of its nearest neighbors, j , whose states are, respectively, (σ_i, η_i) and (σ_j, η_j) at time t . If their opinions differ, $\sigma_i \neq \sigma_j$, and $\eta_i < \phi$, the nonzealot focal site changes its opinion and aligns with j :

$$\sigma_i \longrightarrow \sigma_j \quad \text{if } \eta_i < \phi. \quad (1)$$

Although zealots, obviously, do not change their opinions, the confidences of both i and j are updated, in this case, accordingly, with

$$\eta_i \longrightarrow \eta_i/\gamma, \quad (2)$$

$$\eta_j \longrightarrow \eta_j + \Delta\eta, \quad (3)$$

where γ and $\Delta\eta$ are positive parameters. The fact that i is confronted with a different opinion is enough to change its confidence by the rescaling factor γ . For intermediate values, $1 < \gamma < \infty$, η_i continuously decreases, and zealots eventually may become normal once again. When $\gamma \leq 1$, η_i does not decrease, and becoming a zealot is an irreversible process that may prevent the system from attaining a consensus. This mimics the reinforcement observed among conspiracy theorists and among negationists. The confidence of the neighbor j , on the other hand, always increases by $\Delta\eta$ because j had the opportunity to express its opinion to a neighbor. Finally, when both agents have the same opinion, $\sigma_i = \sigma_j$, the mutual reinforcement is positive, and both confidences increase:

$$\eta_{i,j} \longrightarrow \eta_{i,j} + \Delta\eta. \quad (4)$$

We study the above competing mechanisms in the extreme cases $\gamma = 1$ and $\gamma \rightarrow \infty$. If $\gamma \rightarrow \infty$ and $\sigma_i \neq \sigma_j$, the confidence of the focal agent is always reset; that is, η_i instantly becomes zero. Thus, whatever the degree of zealotry, only two steps may be enough for any agent to change its opinion: in the first interaction the confidence is reset, and in the next step the opinion may be updated. In this way, the model combines simple and complex contagion, in which single or multiple exposures are necessary, respectively, to induce a change in opinion. The other case, $\gamma = 1$, corresponds to the irreversible limit where the confidence never decreases and the system becomes frozen once all η_i become larger than ϕ . Irrespective of the value of γ , in the initial steps of the dynamics, when zealots have not yet been created, the model is equivalent to the standard VM, but there is a γ -dependent timescale when it crosses over to a new behavior. The main objective of this paper is, indeed, to describe and understand how the behavior is affected by the presence of irreducible agents.

III. RESULTS

A. One dimension

Initially, the variables $\{\sigma_i\}$ characterizing the opinion of all N sites are randomly assigned, chosen with equal probability of being $\sigma_i = \pm 1$. The initial level of confidence, instead, is the same for all agents, $\eta_i = 0$. Although we have performed simulations with several different sizes of the 1D ring, we present only the results for $N = 10^5$, which is enough to reduce finite size effects. All results are averaged over 100 samples. An important observable is the fraction of links connecting neighboring agents with different opinions (defects) $\rho(t)$. In addition to it, we also consider the persistence $P(t)$, the fraction of sites that have not changed their initial state up to time t [34].

Figure 1 shows the temporal evolution of both $P(t)$ and $\rho(t)$. Since zealots appear only later in the dynamics (solid red line), the initial trend is the same as the VM: $P(t) \sim t^{-3/8}$ [35,36] and $\rho(t) \sim t^{-1/2}$ [8]. However, along with the

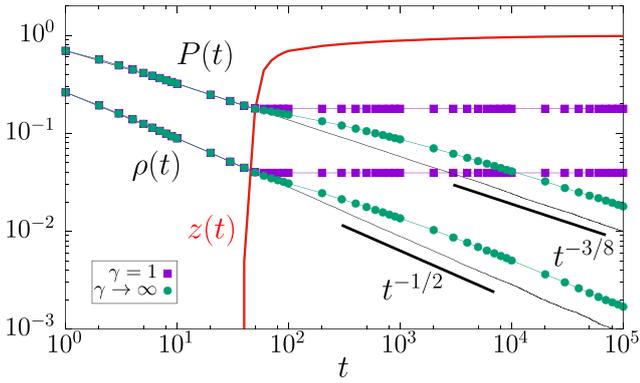


FIG. 1. Persistence $P(t)$ and density of defects $\rho(t)$ in one dimension for $\Delta\eta = 10^{-2}$ and $\gamma = 1$ (purple symbols) and $\gamma \rightarrow \infty$ (green symbols). The solid black curves correspond to the pure 1D VM where $P(t) \sim t^{-3/8}$ [35,36] and $\rho(t) \sim t^{-1/2}$. The red curve shows the very fast increase in the fraction of zealots $z(t)$. There are three different regimes. In the initial one, the system follows the VM behavior. It is followed by an intermediate regime that starts when zealots first appear, and the curves deviate from the VM behavior. Eventually, in the third regime, the system returns to the exponents characterizing the VM behavior.

fast increase in the density of zealots, we observe deviations from the VM behavior. For $\gamma = 1$, once zealots are created, the system ends in a frozen configuration with two or more compact blocks of opposite opinions, and consensus is never achieved. On the other hand, for $\gamma \rightarrow \infty$, both $P(t)$ and $\rho(t)$ show their decrease in a transient interval, soon returning to the VM exponent at longer times, albeit with a larger coefficient.

The different temporal regimes are illustrated in the snapshots in Fig. 2. In the initial regime in the left panel, zealots are absent, and the dynamics is the same as the VM. The system is divided into small domains that coalesce once two walls collide [37]. In the intermediate regime in the middle panel, zealots appear (dark colors) in the interiors of the domains. Normal agents with both opinions (light colors) become con-

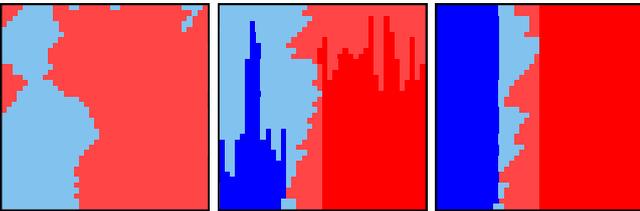


FIG. 2. Snapshots for the 1D case with $\gamma \rightarrow \infty$ and $\Delta\eta = 10^{-2}$, showing the temporal evolution in the three different regimes (time goes from top to bottom, and only part of the lattice is shown). Dark colors are used for zealots, while normal voters ($\eta_i < \phi$) are indicated by light colors. In the initial regime (left panel), the dynamics is indistinguishable from the original VM, and several small domains coexist. The middle panel shows the intermediate regime, where many of these domains have already coalesced and the first zealots appear away from the interfaces. Finally, the right panel illustrates the long time behavior, where there are two compact blocks of zealots with opposite opinions and, in the middle, a region with normal agents.

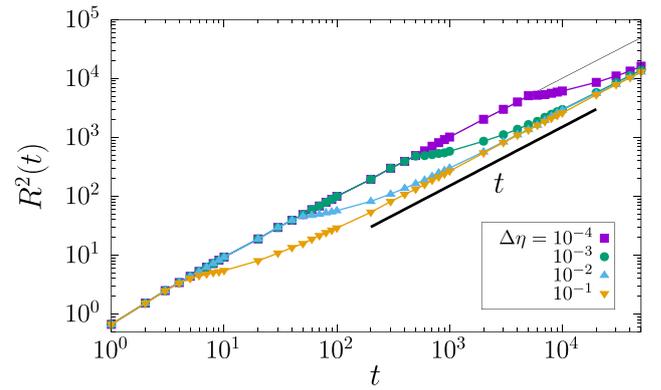


FIG. 3. Mean square displacement $R^2(t)$ of the single wall for different values of $\Delta\eta$. The thin black line is the linear, diffusive behavior of the VM. At both short and long times, the behavior is diffusive, $R^2(t) \sim t$, for all values of $\Delta\eta$. There is, however, an intermediate, subdiffusive regime in which the curves depart from and, later, return to the linear behavior.

ned between compact blocks of zealots, characterizing the late stage of the dynamics in the right panel. Inside these stripes, the normal agents follow the VM, and once the moving border (where light red and light blue are neighbors) gets closer to the zealots, decreasing their confidence, the width of the stripe may change. Because of this additional step necessary to unblock the zealots, the spreading is slower than in the VM. Small domains last longer, and both the persistence and the number of interfaces are relatively larger.

The coalescence of domains, in one dimension, is driven by the diffusive behavior of the domain walls [37]. In order to better understand how the presence of zealots affects such behavior, we consider an initial state in which there is a single domain wall, located at $x(0)$, dividing the system into two blocks, each with one of the $\sigma_i = \pm 1$ states. The boundary conditions are open, $\gamma \rightarrow \infty$, and all sites start with $\eta_i = 0$. The mean square displacement $R^2(t) = [x(t) - x(0)]^2$, where $x(t)$ is the location of the interface at time t , is shown in Fig. 3 for different values of $\Delta\eta$. In all cases, two timescales are present. The initial behavior is purely diffusive, as in the VM (thin black line), and $R^2(t) \sim t$. The smaller $\Delta\eta$ is, the longer it will take for the system to deviate from the original VM behavior, becoming subdiffusive. This deviation occurs at an intermediate time that behaves as $(\Delta\eta)^{-1}$ when zealots first appear. On a longer timescale, which also goes as $(\Delta\eta)^{-1}$, the diffusive behavior is resumed. At the late stage of the dynamics, all activity is confined to the stripe between the two blocks of zealots, and the interface evolution depends on unblocking the neighboring zealots, which occurs on a longer timescale. The overall behavior is reminiscent of glassy systems, with a fast timescale associated with the Brownian motion inside the cage formed by neighboring particles and a slower timescale related to the slow restructuring of the cages themselves.

B. Two dimensions

In the extreme case $\gamma = 1$, as mentioned above, the confidence η_i never decreases, and the creation of zealots is irreversible. The self-induced disorder is thus quenched. If $\Delta\eta$

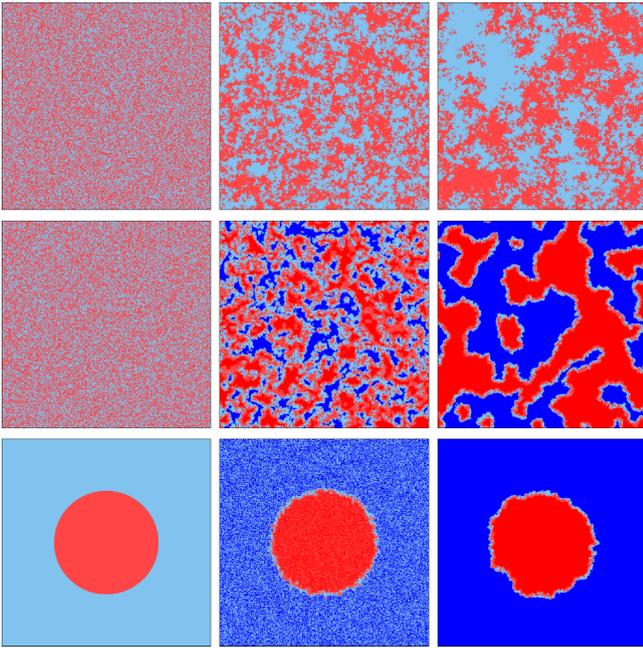


FIG. 4. Snapshots at different times for the 2D VM (top row) and our model (middle and bottom rows) with $\gamma \rightarrow \infty$ and $\Delta\eta = 10^{-2}$. Each color shows a different opinion, with the darker shades indicating zealots, while light colors represent normal agents. The onset of zealots induces an effective surface tension, and the bulk dynamics becomes curvature driven. Thus, while the interfaces between normal agents with opposite opinions (light red and light blue) are still rough as in the original VM, the internal walls between normal agents and zealots with the same opinion are smoother. Instead of a random initial state, in the bottom row we consider all agents with one opinion inside a circle, surrounded by the other opinion.

is large enough, the compact domains of zealots grow very quickly until they collide with the neighboring domains. Thus, as in one dimension, the two-dimensional system with $\gamma = 1$ reaches a frozen state without normal agents, and consensus is avoided. We focus here, instead, on the $\gamma \rightarrow \infty$ case, where the confidence is fully reset after a single contact with a different opinion. For intermediate values of γ the system behavior interpolates between these two extremes. The results discussed below were averaged over at least 1000 samples.

The behavior of the case $\gamma \rightarrow \infty$ is illustrated in Fig. 4 when starting from a random initial state (middle row). For comparison, the evolution of the original VM is shown in the top row. Deep inside the domains, certainty builds up, and the agents become zealots, creating an internal interface between bulk zealots and normal agents. The presence of zealots induces an effective surface tension, and this interior interface gets smoother. The dynamics become curvature driven, similar to those of the out-of-equilibrium 2D Ising model, as shown in the snapshots in the middle and bottom rows of Fig. 4. As will be shown below, the analogy with the model A dynamical universality class [33], to which the out-of-equilibrium Ising model belongs, goes beyond these visual similarities. Being curvature driven, the circular domain shrinks [38–41], with a much reduced fragmentation when compared with a similar condition for the VM [10] (see also

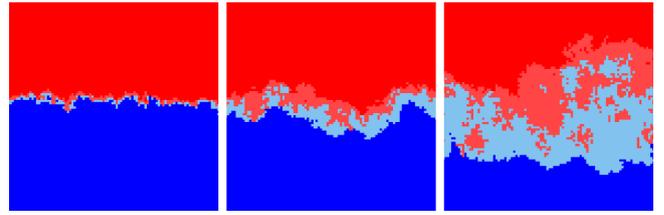


FIG. 5. Snapshots showing how the VM stripe develops, after 1000 MCSs, from a specially prepared initial state with two equal regions of opposite opinions in the $\gamma \rightarrow \infty$ case. Only the central part of the system is shown. From left to right the values of $\Delta\eta$ are, respectively, 1, 10^{-1} , and 10^{-2} . Notice that the active region gets wider as $\Delta\eta$ decreases with many small domains, without zealots, fully embedded in the opposite opinion.

Fig. 10 below). Whatever the initial condition, the external interfaces remain rough at all times because normal agents with both opinions get confined in the VM superficial stripe. The fluctuations of the main interface cause a constant flipping that keeps the certainties below the threshold in this region, setting the average distance between the external and internal interfaces. The width of the VM stripe depends on both $\Delta\eta$ and γ , as illustrated in Fig. 5 for an initial state with a flat interface within two equal sized domains. For large values of $\Delta\eta$ zealots form very quickly, and the dynamics get blocked close to the initial state (notice that the initial state is absorbing for the IM0; left panel). As $\Delta\eta$ decreases, the VM stripe becomes wider, and both the roughness of the interface and the number of fragmented clusters increase (middle and right panels). Of course, when $\Delta\eta \rightarrow 0$, no zealot is formed, and the VM stripe is the whole system.

Figure 6 presents the behavior of the persistence $P(t)$. Similar to the 1D case, the initial regime is equivalent to the VM [9,45] because zealots are still absent. However, upon the sudden rise in the number of zealots (red solid line), $P(t)$ slows down and deviates from the VM curve (thin black line). For increasing system sizes, $P(t)$ develops a power-law

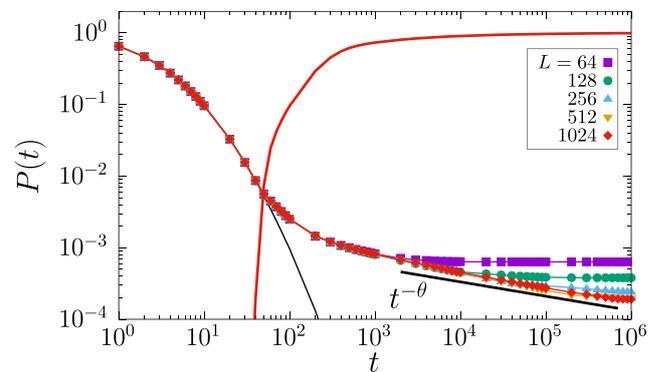


FIG. 6. Persistence $P(t)$ of increasing linear sizes L for $\Delta\eta = 10^{-2}$ and $\gamma \rightarrow \infty$. In the initial regime there are no zealots, and the behavior follows the VM ($L = 64$; thin black line). As the density of zealots increases (red thick line), $P(t)$ departs from this behavior and eventually develops a power law, $P(t) \sim t^{-\theta}$. The thick black line shows the 2D Ising behavior whose exponent, after a quench from high temperature, is $\theta \simeq 0.2$ [42–44].

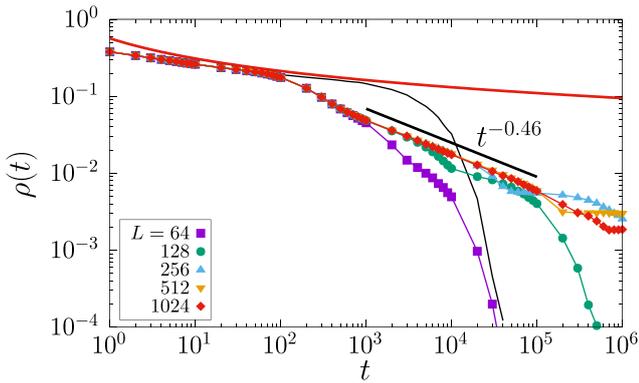


FIG. 7. Density of active interfaces $\rho(t)$, defined as the fraction of neighboring agents with different opinions, for $\Delta\eta = 10^{-2}$, $\gamma \rightarrow \infty$, and different sizes. The VM results for $L = 64$ are shown for comparison (thin black line) along with the expected, asymptotic behavior [8,11] (thick red line). Deviations from the VM behavior start again when zealots rapidly invade the lattice. Since domains become smoother, the total perimeter, measured by $\rho(t)$, presents a strong decrease relative to VM. For large enough systems, a power law with an exponent slightly below $1/2$, $\rho(t) \sim t^{-0.46}$, develops.

behavior (thick black line), $P(t) \sim t^{-\theta}$, whose exponent is consistent with the one for the 2D Ising model after a temperature quench from high temperature, $\theta \simeq 0.2$ [42–44]. Most of the persistent spins are in the zealot bulk region, and the fluctuating interface between different opinions must collide with the internal interface in order to destabilize the zealots, originating the slowdown.

Figure 7 shows the fraction $\rho(t)$ of links connecting neighboring agents with different opinions, i.e., located on the rough active interface that separates two domains. For $\gamma \rightarrow \infty$, sites belonging to a stripe whose width corresponds to the mean height of the surface will have a high probability of having small values of η_i , thus following the VM dynamics. After zealots are formed, $\rho(t)$ presents a strong decrease, deviating from the slow inverse logarithm behavior of the VM [8]. Moreover, for large enough systems, a power-law develops, $\rho(t) \sim t^{-0.46}$, whose exponent is consistent with the model A universality class, although it is slightly below $1/2$. This deviation from the characteristic $1/2$ exponent of the curvature-driven coarsening was observed in similar models [20,26,27,32]. Notice that although larger clusters have an underlying structural frame provided by the zealot bulk, smaller domains that are formed by fragmentation close to the surface are, in general, purely VM and contribute with a slower, logarithmic time dependence. This effect, along with those samples that have a longer lived metastable structure (see below), seems to be the main mechanism explaining this small exponent difference. Despite its short-range roughness that is analogous to the VM, the smaller value of $\rho(t)$ shown in Fig. 7 indicates that on a larger scale the clusters are more compact. This is a consequence of the bulk of sufficiently large domains, formed by zealots, whose growth is driven by curvature. The presence of these more compact regions has a strong influence on the long range properties of the VM region around the bulk, providing a rather smooth support that decreases the overall perimeter.

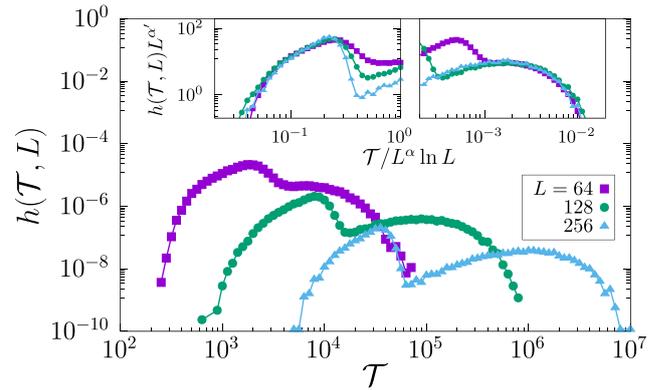


FIG. 8. Distribution $h(\mathcal{T}, L)$ of the consensus time \mathcal{T} with $\Delta\eta = 10^{-2}$ and $\gamma \rightarrow \infty$. Our model, different from the VM, which has a single timescale [11], also develops a longer timescale related to transient stripes, similar to the IM0. Good collapses are obtained by rescaling the horizontal axis with $L^\alpha \ln L$: $\alpha \simeq 2$ for the first peak (left inset), and $\alpha \simeq 3.5$ for the second one (right inset). In the vertical direction, $\alpha' = 3.5$ for both peaks.

In the IM0, the asymptotic state is either fully magnetized or divided into multiple (most often two) parallel stripes [46–52], and either of these possible fates is decided early in the dynamics, when it approaches the percolative critical point [53–57]. The time to attain the former grows as $\mathcal{T} \sim L^2$ for most of the initial states [47]. However, a small fraction of these initial states develops diagonal stripes that slow down the dynamics, with the characteristic time increasing as $\mathcal{T} \sim L^{3.5}$ [47,48,52]. For the VM, since it lacks surface tension and straight interfaces are unstable, no structures resembling stripes are formed. All initial states do converge to consensus in a time whose average scales as $\langle \mathcal{T} \rangle \sim L^2 \ln L$ [6,7,11]. As a consequence, the single-peaked consensus time distribution $h(\mathcal{T}, L)$ obeys the scaling relation $h(\mathcal{T}, L) = L^{-\alpha'} H(\mathcal{T}/L^\alpha \ln L)$ [11]. In our model, once zealots are formed and curvature-driven dynamics becomes important, some initial states, with clusters that wrap the system in a single direction, develop transient structures that are similar to stripes. Nonetheless, since the dynamics at the surface are driven by interfacial noise, these stripes remain unstable, and the system eventually converges to consensus. Nonetheless, the presence of such stripes introduces a new timescale to attain consensus. This is the origin of the second peak in Fig. 8 for the distribution $h(\mathcal{T}, L)$ and has been observed in similar models [22,26–28,32]. The main contribution, however, comes from those initial states that are not delayed, and consensus is attained faster because, early in the dynamics, a percolating cluster, wrapping the system in two directions [11], forms. Notice that although a double-peak structure was also observed for the IM0 [52], in our model the second peak also has a contribution from those states whose stripes are parallel to the lattice directions, while in the IM0 they lead to absorbing states and only diagonally striped configurations contribute. In the left inset in Fig. 8 an excellent collapse is obtained with $L^\alpha \ln L$ and $\alpha \simeq 2$. This is similar to the L^2 scaling of the corresponding first peak for the IM0 but also includes the logarithmic correction from the VM [11]. The

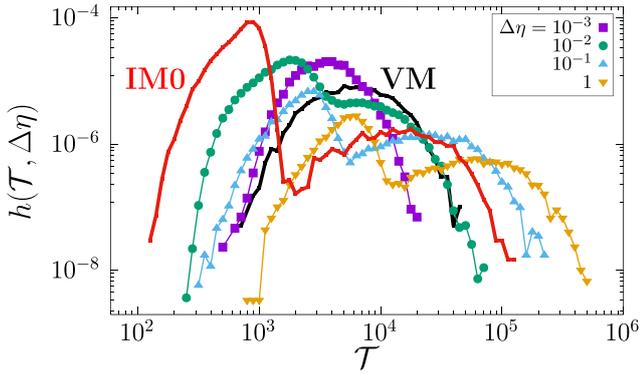


FIG. 9. Consensus time distribution $h(\mathcal{T}, L)$ for a single size, $L = 64$, and different values of $\Delta\eta$. For comparison, the VM (black line) and the IM0 (red line) are also shown. Averages over 10^4 samples were considered.

second peak collapse, with $\alpha \simeq 3.5$, is shown in the right inset.

Although one could expect a simple interpolation, by varying $\Delta\eta$ from the VM (when $\Delta\eta \rightarrow 0$) and the IM0 (for $\Delta\eta \rightarrow 1$), Fig. 9 shows that the dependence on $\Delta\eta$ is nontrivial. For $\Delta\eta = 10^{-3}$, there is a single, large peak in $h(\mathcal{T}, L)$. By slightly increasing $\Delta\eta$, a second peak appears, while the first one moves towards the position of the corresponding first peak of the IM0. After the location of this peak has attained its minimum value, this tendency is reversed for intermediate values of $\Delta\eta$ and starts approaching the position of the VM peak. Notice that, for all values of $\Delta\eta$, the first peak is within the first peak of the IM0 and the VM single peak. For $\Delta\eta = 1$, however, the whole distribution has the largest displacement away from the IM0 distribution. Thus, the active region on the surface of all clusters, whatever its width, always has a delaying effect. The second, smaller peak, once it forms, does not seem to present a minimum and always moves to larger times, becoming even larger (and wider) than the corresponding peak of the IM0.

In order to understand the origin of the above minimum, we consider a specially prepared initial state that prevents the formation of stripes. As illustrated in the bottom row of Fig. 4, one opinion is initially fully embedded in a circular domain while the other one surrounds it [17,20,30]. Figure 10 shows the time evolution of the relative area of the selected opinion $A(t)/A(0)$, regardless of the fragmentation that may occur on the surface. For very small values of $\Delta\eta$, the possible presence of zealots late in the dynamics has little impact, and the behavior is logarithmic, following the VM. As $\Delta\eta$ increases, the frozen bulk forms along with the VM region closer to the surface whose width depends on $\Delta\eta$. While the drop and its fragments decrease in size, the VM region roughly retains its width, forcing the internal border with the bulk (zealots) to recede and disappear. During the time interval when zealots are present, the behavior is linear, similar to that of the IM0, $A(t) \simeq A_0(1 - \lambda t)$. The parameter λ is a monotonically decreasing function of $\Delta\eta$ (bottom inset in Fig. 10). As $\Delta\eta$ increases from 10^{-4} to 1, λ decreases from, roughly, 1.4 to 0.2, while for the IM0, $\lambda \simeq 2$ [41] and the drop disappears faster than in all cases considered here. An interesting consequence

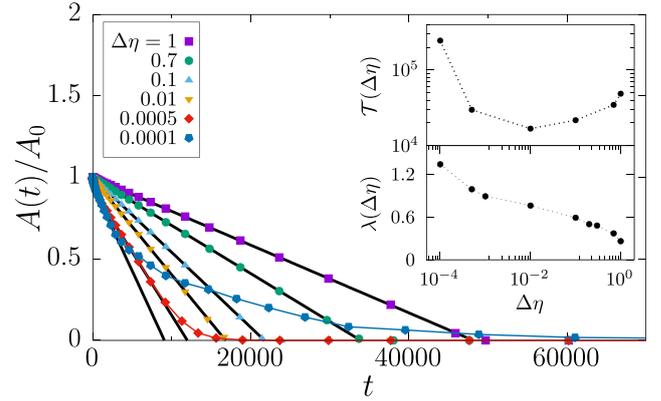


FIG. 10. Time evolution of the average area $A(t)/A_0$ of an initially circular domain containing a single opinion (Fig. 4, bottom row) for $L = 256$ and several values of $\Delta\eta$. Averages are over 1000 samples. The straight black lines are linear fits at short times, whose declivity λ is the rate at which the area shrinks (bottom inset). Notice that above the minimum for $\Delta\eta \gtrsim \Delta\eta_{\min} \approx 10^{-2}$, the linear behavior, characteristic of the Ising model [58,59], persists in the whole interval, while for smaller values, it crosses over to the logarithmic behavior. The average consensus time $\mathcal{T}(\Delta\eta)$ is shown in the top inset.

is that the faster the initial linear decrease is ($\Delta\eta \rightarrow 0$), the sooner the behavior of $A(t)$ deviates from it. Moreover, for small $\Delta\eta$, once $A(t)$ becomes logarithmic, the average consensus time increases. On the other hand, for $\Delta\eta \rightarrow 1$, the VM region is very small, and because most of the agents are zealots, the dynamics slow down, and λ is small. In this case, even if the deviations from the linear behavior cannot be seen in the linear scale of Fig. 10, the average consensus time is large once again. Thus, $\langle \mathcal{T} \rangle$ has a minimum [18,19,24] at an intermediate value, close to $\Delta\eta \simeq 10^{-2}$. Note that although the above behavior is rather clear for a single droplet, once a more general, random initial state is considered, the trend for the average area is not (not shown). The probable origin is the VM region that dresses each compact bulk. Because it is easily fragmented, there is a large contribution of small domains to the average from sizes that are much less frequent in the IM0.

IV. CONCLUSIONS

We introduced an opinion model whose agents have intermediate levels of confidence that may interfere in their process of changing opinion. When all agents have low confidence, in the beginning of the dynamics, the model is equivalent to the VM, where a single contact with a different opinion is enough for an agent to change its own. Opinion reinforcement builds up confidence, and above a certain threshold, the agent becomes a kinetically constrained zealot whose opinion is frozen. But regardless of the nature of the agents, the variables characterizing their confidence keep evolving as the agents interact with their neighborhood. We considered two limiting cases depending on the parameter γ , which rescales the confidence after an agent is confronted with a different opinion. For $\gamma = 1$, the zealot state is irreversible, while for $\gamma \rightarrow \infty$ the dynamics allows the zealot state to be reversed and coexistence with normal voters. Similar opin-

ions segregate in spatial domains, and in their bulk, because of the positive reinforcement, zealots first appear once the confidence threshold ϕ is attained. Because the zealots are frozen, there is an increased probability of repeated contacts with their nonzealot neighbors, increasing their confidence as well. This mechanism of noise reduction smooths the internal interface between zealots and normal voters with the same opinion. This smoother internal surface induces an effective surface tension, acting as a structural frame that turns the dynamics from interfacial noise to curvature driven. As a consequence, several properties become analogous to those of the low temperature Ising model with a nonconserved order parameter (IM0) in the Allen-Cahn (model A) universality class [33]. Close to a domain border, continued interaction with the opposite opinion keeps the confidence of these agents low. Normal agents are thus confined to this region, close to the surface, and their number depends on $\Delta\eta$, i.e., on how fast the zealot bulk grows. Although the curvature-driven growth was already observed in other variations of the VM [17,20,22,26–32], our model allows us to tune the number of normal voters close to the surface through $\Delta\eta$. Interestingly, the internal surface induces a curvature-driven growth, but the actual surface is driven by the interface noise typical of the VM, becoming rougher and more fragmented than in other models.

The width of the normal voter region close to the surface, which depends on $\Delta\eta$ (see Fig. 5), determines how fast the domains shrink and, consequently, the exit time, i.e., how long it takes to attain consensus. While a large domain shrinks, the zealot bulk disappears first, and that cluster dynamics is no longer driven by the curvature of the interface. This late

regime is dominated by the normal voters, and the dynamics becomes logarithmic. How important this final regime will be depends on the width of the stripe with normal voters around the bulk. When $\Delta\eta$ is large, it is thin, and most of the dynamics is dominated by the curvature-driven mechanism induced by the zealots. However, despite being curvature driven, the dynamics is still slower than in the IM0 because of the large number of zealots: since they are frozen, it is first necessary to turn them into normal agents. On the other hand, for small $\Delta\eta$, the stripe is thick, and once the bulk disappears, leaving only the normal voters, there is a crossover to a slower, logarithmic regime. It is the interplay between both mechanisms that explains the existence of a minimum consensus time as a function of $\Delta\eta$, directly related to the superficial normal voters.

There are some possible generalizations of the model that would be interesting to investigate. For example, individual heterogeneities [60] in the values of γ , $\{\gamma_i\}$, can be considered. If some of the agents have $\gamma_i \leq 1$, they may become permanent zealots. Another possible modification is to reintroduce the conservation of the magnetization, which is present in the pure VM but broken in our model, by a local conservation rule [61]. Such conserved order parameter dynamics are known to be in a different universality class from the nonconserved case [33,62], and their effect in the present model is worth investigating.

ACKNOWLEDGMENTS

Work partially supported by the Brazilian agencies Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) and CAPES.

-
- [1] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
 - [2] A. Baronchelli, *R. Soc. Open Sci.* **5**, 172189 (2018).
 - [3] S. Redner, *C. R. Phys.* **20**, 275 (2019).
 - [4] M. Lynas, B. Z. Houlton, and S. Perry, *Environ. Res. Lett.* **16**, 114005 (2021).
 - [5] P. Sturgis, I. Brunton-Smith, and J. Jackson, *Nat. Hum. Behav.* **5**, 1528 (2021).
 - [6] P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. A* **45**, 1067 (1992).
 - [7] T. M. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes* (Springer, Heidelberg, 1999).
 - [8] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E* **53**, R3009 (1996).
 - [9] E. Ben-Naim, L. Frachebourg, and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E* **53**, 3078 (1996).
 - [10] I. Dornic, H. Chaté, J. Chave, and H. Hinrichsen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 045701 (2001).
 - [11] A. Tartaglia, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, *Phys. Rev. E* **92**, 042109 (2015).
 - [12] M. Mobilia, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 028701 (2003).
 - [13] M. Mobilia and I. T. Georgiev, *Phys. Rev. E* **71**, 046102 (2005).
 - [14] M. Mobilia, A. Petersen, and S. Redner, *J. Stat. Mech.* (2007) P08029.
 - [15] S. Galam and F. Jacobs, *Phys. A (Amsterdam, Neth.)* **381**, 366 (2007).
 - [16] F. Colaiori and C. Castellano, *J. Stat. Mech.* (2016) 033401.
 - [17] L. Dall’Asta and C. Castellano, *Europhys. Lett.* **77**, 60005 (2007).
 - [18] H.-U. Stark, C. J. Tessone, and F. Schweitzer, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 018701 (2008).
 - [19] H.-U. Stark, C. J. Tessone, and F. Schweitzer, *Adv. Complex Syst.* **11**, 551 (2008).
 - [20] L. Dall’Asta and T. Galla, *J. Phys. A* **41**, 435003 (2008).
 - [21] R. Lambiotte, J. Saramäki, and V. D. Blondel, *Phys. Rev. E* **79**, 046107 (2009).
 - [22] D. Volovik and S. Redner, *J. Stat. Mech.* (2012) P04003.
 - [23] A. C. R. Martins and S. Galam, *Phys. Rev. E* **87**, 042807 (2013).
 - [24] Z. Wang, Y. Liu, L. Wang, Y. Zhang, and Z. Wang, *Sci. Rep.* **4**, 3597 (2014).
 - [25] C. Brugna and G. Toscani, *Phys. Rev. E* **92**, 052818 (2015).
 - [26] F. Velásquez-Rojas and F. Vazquez, *J. Stat. Mech.* (2018) 043403.
 - [27] X. Castelló, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel, *New J. Phys.* **8**, 308 (2006).
 - [28] X. Castelló, A. Baronchelli, and V. Loreto, *Eur. Phys. J. B* **71**, 557 (2009).
 - [29] W. Zhang, C. C. Lim, G. Korniss, and B. K. Szymanski, *Sci. Rep.* **4**, 5568 (2014).
 - [30] C. Doyle, S. Sreenivasan, B. K. Szymanski, and G. Korniss, *Phys. A (Amsterdam, Neth.)* **443**, 316 (2016).

- [31] P. Roy and P. Sen, *Phys. Rev. E* **95**, 020101(R) (2017).
- [32] S. Mukherjee, S. Biswas, and P. Sen, *Phys. Rev. E* **102**, 012316 (2020).
- [33] A. J. Bray, *Adv. Phys.* **43**, 357 (1994).
- [34] A. J. Bray, S. N. Majumdar, and G. Schehr, *Adv. Phys.* **62**, 225 (2013).
- [35] B. Derrida, *J. Phys. A* **28**, 1481 (1995).
- [36] B. Derrida, V. Hakim, and V. Pasquier, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 751 (1995).
- [37] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.* **49**, 815 (2000).
- [38] H. C. Kang, W. H. Weinberg, and M. W. Deem, *Phys. Rev. B* **43**, 11438 (1991).
- [39] A. Karma and A. E. Lobkovsky, *Phys. Rev. E* **71**, 036114 (2005).
- [40] R. Cerf and S. Louhichi, *Probab. Theory Relat. Fields* **137**, 379 (2007).
- [41] J. J. Arenzon, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, *Phys. Rev. E* **91**, 032142 (2015).
- [42] B. Derrida, A. J. Bray, and C. Godrèche, *J. Phys. A* **27**, L357 (1994).
- [43] D. Stauffer, *J. Phys. A* **27**, 5029 (1994).
- [44] T. Blanchard, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, *J. Stat. Mech.* (2014) P12021.
- [45] M. Howard and C. Godrèche, *J. Phys. A* **31**, L209 (1998).
- [46] B. Derrida, P. M. C. de Oliveira, and D. Stauffer, *Phys. A (Amsterdam, Neth.)* **224**, 604 (1996).
- [47] A. Lipowski, *Phys. A (Amsterdam, Neth.)* **268**, 6 (1999).
- [48] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **63**, 036118 (2001).
- [49] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **65**, 016119 (2001).
- [50] K. Barros, P. L. Krapivsky, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **80**, 040101(R) (2009).
- [51] J. Olejarz, P. L. Krapivsky, and S. Redner, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 195702 (2012).
- [52] C. Godrèche and M. Pleimling, *J. Stat. Mech.* (2018) 043209.
- [53] J. J. Arenzon, A. J. Bray, L. F. Cugliandolo, and A. Sicilia, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 145701 (2007).
- [54] A. Sicilia, J. J. Arenzon, A. J. Bray, and L. F. Cugliandolo, *Phys. Rev. E* **76**, 061116 (2007).
- [55] T. Blanchard, F. Corberi, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, *Europhys. Lett.* **106**, 66001 (2014).
- [56] T. Blanchard, L. F. Cugliandolo, M. Picco, and A. Tartaglia, *J. Stat. Mech.* (2017) 113201.
- [57] A. de Azevedo-Lopes, R. A. L. Almeida, P. M. C. de Oliveira, and J. J. Arenzon, [arXiv:2206.05808](https://arxiv.org/abs/2206.05808).
- [58] M. Grant and J. D. Gunton, *Phys. Rev. B* **28**, 5496 (1983).
- [59] P. S. Sahní, G. S. Grest, and S. A. Safran, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 60 (1983).
- [60] N. Masuda, N. Gibert, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **82**, 010103(R) (2010).
- [61] F. Caccioli, L. Dall'Asta, T. Galla, and T. Rogers, *Phys. Rev. E* **87**, 052114 (2013).
- [62] A. Sicilia, Y. Sarrazin, J. J. Arenzon, A. J. Bray, and L. F. Cugliandolo, *Phys. Rev. E* **80**, 031121 (2009).

Apêndice B

Caso 2d irreversível

Nesta seção, por completude, apresentamos um compilado dos resultados obtidos para o caso limite $\gamma = 1$. A figura B.1 mostra o comportamento da persistência $P(t)$ para uma rede de tamanho fixo e distintos valores de $\Delta\eta$. A variável segue o comportamento do VM até o súbito surgimento de zelotes no sistema. Similar ao caso reversível, a formação destes agentes ocorre inicialmente no núcleo dos domínios, embora aqui, uma vez zelote sempre zelote. Após um transiente intermediário, a variável atinge um patamar

$$P(t) = \text{const}, \quad (\text{B.1})$$

e assim permanece indefinidamente, já que a troca de opiniões cessa.

Da mesma forma, a densidade de interfaces ativas $\rho(t)$ está apresentada na figura B.2. O comportamento é similar ao das medidas de $P(t)$. Inicialmente o sistema possui o mesmo comportamento do VM. Após um regime de transição, a variável também estabiliza em

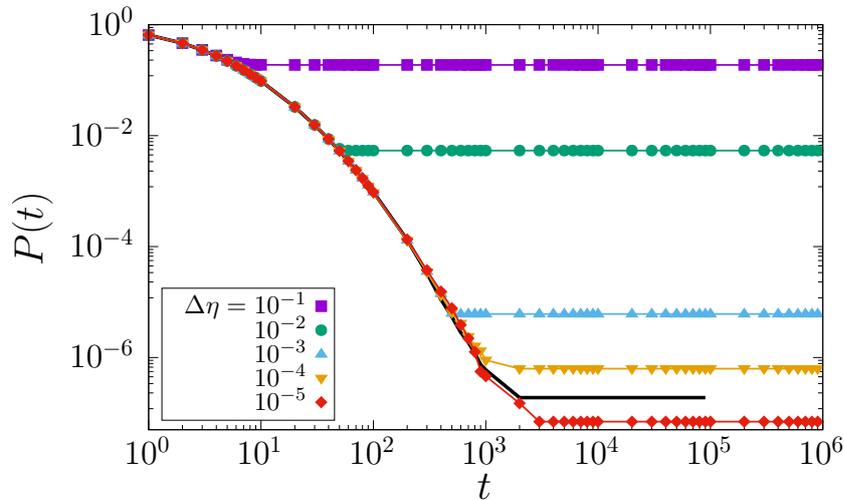


Figura B.1: Persistência do modelo proposto em seu caso irreversível, $\gamma = 1$, para $L = 64$ e distintos $\Delta\eta$. A curva preta representa o comportamento do VM puro.

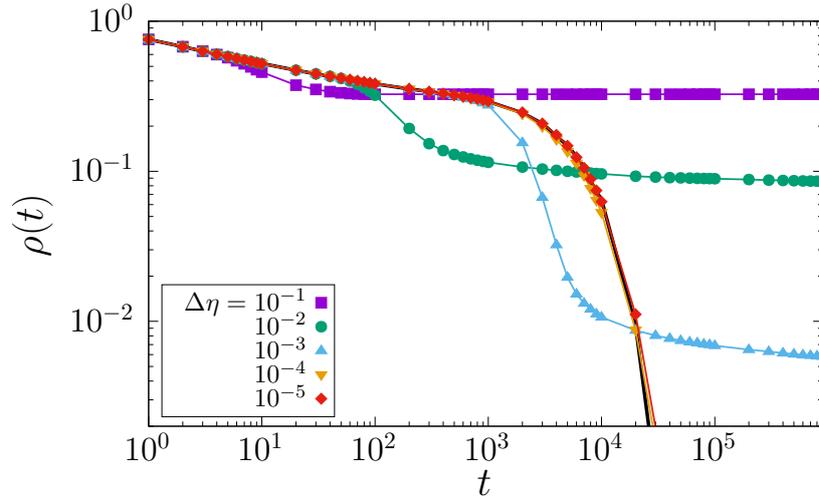


Figura B.2: Densidade de interfaces ativas do modelo proposto em seu caso irreversível, $\gamma = 1$, para $L = 64$ e distintos $\Delta\eta$. A curva preta representa o comportamento do VM puro.

um patamar,

$$\rho(t) = \text{const}, \quad (\text{B.2})$$

já que a configuração do sistema se mantém.

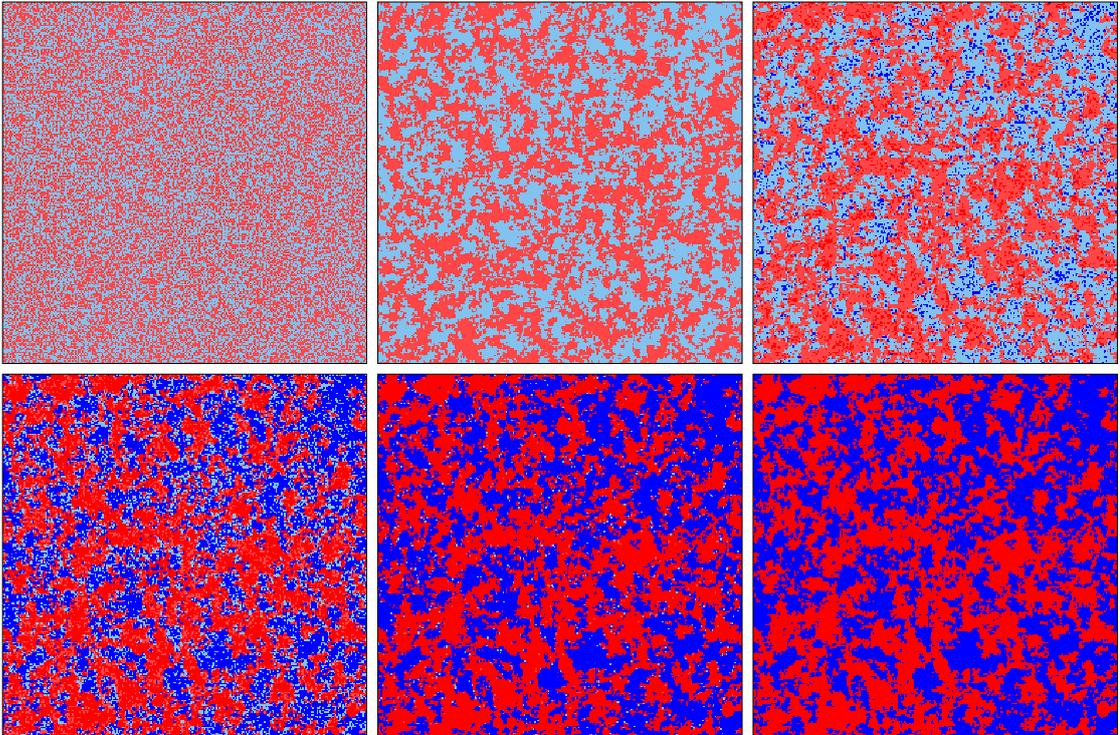


Figura B.3: Instantâneos do modelo proposto mostrando a evolução temporal do sistema no caso irreversível. Aqui $\gamma = 1$ e $\Delta\eta = 1$ em uma rede de tamanho $L = 128$. A formação de zelotes permanentes no interior de domínios impede que estes sejam consumidos por domínios maiores de sua vizinhança, congelando o sistema.

Embora flutuações estatísticas gerem uma troca constante de opiniões, como $\gamma = 1$, estas não são suficientes para evitar que o reforço positivo congele os agentes. Na figura B.3 vemos o modelo em uma rede quadrada de tamanho linear $L = 128$. Nos instantes prévios à formação dos primeiros zelotes (coluna superior, painel da esquerda e central), a formação e crescimento de domínios é simplesmente a do VM. Os domínios que sobreviveram à dinâmica, de forma independente, então iniciam em seu interior a formação de agentes com confiança infinita. Estes, por sua vez, impedem que os domínios dos quais fazem parte sejam consumidos, já que deixam de ser suscetíveis a trocas de opiniões. Desta forma, domínios passam a coexistir e a rede congela em uma configuração polarizada repleta de agentes zelotes.

Bibliografia

- [1] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, no. 2, p. 591, 2009.
- [2] P. L. Krapivsky, S. Redner, and E. Ben-Naim, *A Kinetic View of Statistical Physics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
- [3] A. Baronchelli, “The emergence of consensus: a primer,” *R. Soc. open sci.*, vol. 5, p. 172189, 2018.
- [4] M. Lynas, B. Z. Houlton, and S. Perry, “Greater than 99% consensus on human caused climate change in the peer-reviewed scientific literature,” *Environ. Res. Lett.*, vol. 16, p. 114005, 2021.
- [5] P. Sturgis, I. Brunton-Smith, and J. Jackson, “Trust in science, social consensus and vaccine confidence,” *Nat. Hum. Behav.*, vol. 5, pp. 1528–1534, 2021.
- [6] P. L. Krapivsky, “Kinetics of monomer-monomer surface catalytic reactions,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, pp. 1067–1072, 1992.
- [7] T. M. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer, 1999.
- [8] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky, “Exact results for kinetics of catalytic reactions,” *Phys. Rev. E*, vol. 53, pp. R3009–R3012, 1996.
- [9] E. Ben-Naim, L. Frachebourg, and P. L. Krapivsky, “Coarsening and persistence in the voter model,” *Phys. Rev. E*, vol. 53, pp. 3078–3087, 1996.
- [10] I. Dornic, H. Chaté, J. Chave, and H. Hinrichsen, “Critical Coarsening without Surface Tension: The Universality Class of the Voter Model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 045701, 2001.
- [11] A. Tartaglia, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, “Percolation and coarsening in the bidimensional voter model,” *Phys. Rev. E*, vol. 92, p. 042109, 2015.
- [12] M. Mobilia, “Does a single zealot affect an infinite group of voters?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 028701, 2003.
- [13] M. Mobilia and I. T. Georgiev, “Voting and catalytic processes with inhomogeneities,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 046102, 2005.
- [14] M. Mobilia, A. Petersen, and S. Redner, “On the role of zealotry in the voter model,” *J. Stat. Mech.*, p. P08029, 2007.

- [15] S. Galam and F. Jacobs, “The role of inflexible minorities in the breaking of democratic opinion dynamics,” *Physica A*, vol. 381, pp. 366–376, 2007.
- [16] F. Colaiori and C. Castellano, “Consensus versus persistence of disagreement in opinion formation: the role of zealots,” *J. Stat. Mech.*, p. 033401, 2016.
- [17] L. Dall’Asta and C. Castellano, “Effective surface-tension in the noise-reduced voter model,” *EPL*, vol. 77, p. 60005, 2007.
- [18] H.-U. Stark, C. J. Tessone, and F. Schweitzer, “Decelerating Microdynamics Can Accelerate Macrodynamics in the Voter Model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 018701, 2008.
- [19] H.-U. Stark, C. J. Tessone, and F. Schweitzer, “Slower Is Faster: Fostering Consensus Formation by Heterogeneous Inertia,” *Adv. Compl. Syst.*, vol. 11, pp. 551–563, 2008.
- [20] L. Dall’Asta and T. Galla, “Algebraic coarsening in voter models with intermediate states,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 41, p. 435003, 2008.
- [21] R. Lambiotte, J. Saramäki, and V. D. Blondel, “Dynamics of latent voters,” *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 046107, 2009.
- [22] D. Volovik and S. Redner, “Dynamics of confident voting,” *J. Stat. Mech.*, p. P04003, 2012.
- [23] A. C. R. Martins and S. Galam, “Building up of individual inflexibility in opinion dynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 042807, 2013.
- [24] Z. Wang, Y. Liu, L. Wang, Y. Zhang, and Z. Wang, “Freezing period strongly impacts the emergence of a global consensus in the voter model,” *Sci. Rep.*, vol. 4, p. 3597, 2014.
- [25] C. Brugna and G. Toscani, “Kinetic models of opinion formation in the presence of personal conviction,” *Phys. Rev. E*, vol. 92, p. 052818, 2015.
- [26] F. Velásquez-Rojas and F. Vazquez, “Opinion dynamics in two dimensions: domain coarsening leads to stable bi-polarization and anomalous scaling exponents,” *J. Stat. Mech.*, p. 043403, 2018.
- [27] X. Castelló, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel, “Ordering dynamics with two non-excluding options: bilingualism in language competition,” *New J. Phys.*, vol. 8, p. 308, 2006.
- [28] X. Castelló, A. Baronchelli, and V. Loreto, “Consensus and ordering in language dynamics,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 71, pp. 557–564, 2009.
- [29] W. Zhang, C. C. Lim, G. Korniss, and B. K. Szymanski, “Opinion Dynamics and Influencing on Random Geometric Graphs,” *Sci. Rep.*, vol. 4, p. 5568, 2014.
- [30] C. Doyle, S. Sreenivasan, B. K. Szymanski, and G. Korniss, “Social consensus and tipping points with opinion inertia,” *Physica A*, vol. 443, pp. 316–323, 2016.
- [31] P. Roy and P. Sen, “Interplay of interfacial noise and curvature-driven dynamics in two dimensions,” *Phys. Rev. E*, vol. 95, p. 020101(R), 2017.

- [32] S. Mukherjee, S. Biswas, and P. Sen, “Long route to consensus: Two-stage coarsening in a binary choice voting model,” *Phys. Rev. E*, vol. 102, p. 012316, 2020.
- [33] A. J. Bray, “Theory of phase-ordering kinetics,” *Adv. Phys.*, vol. 43, pp. 481–587, 1994.
- [34] A. Lipowski, “Anomalous phase-ordering kinetics in the Ising model,” *Physica A*, vol. 268, pp. 6–13, 1999.
- [35] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, “Fate of zero-temperature Ising ferromagnets,” *Phys. Rev. E*, vol. 63, p. 036118, 2001.
- [36] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, “Freezing in Ising ferromagnets,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 016119, 2001.
- [37] K. Barros, P. L. Krapivsky, and S. Redner, “Freezing into stripe states in two-dimensional ferromagnets and crossing probabilities in critical percolation,” *Phys. Rev. E*, vol. 80, p. 040101(R), 2009.
- [38] J. Olejarz, P. L. Krapivsky, and S. Redner, “Fate of 2D kinetic ferromagnets and critical percolation crossing probabilities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 195702, 2012.
- [39] L. C. F. Latoski, W. G. Dantas, and J. J. Arenzon, “Curvature-driven growth and interfacial noise in the voter model with self-induced zealots,” *Phys. Rev. E*, vol. 106, p. 014121, Jul 2022.
- [40] P. A. P. Moran, “Random processes in genetics,” in *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*, vol. 54, pp. 60–71, Cambridge University Press, 1958.
- [41] M. Howard and C. Godrèche, “Persistence in the Voter model: continuum reaction-diffusion approach ,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 31, p. L209, 1998.
- [42] B. Derrida, P. M. C. de Oliveira, and D. Stauffer, “Stable spins in the zero temperature spinodal decomposition of 2d Potts models,” *Physica A*, vol. 224, p. 604, 1996.
- [43] C. Godrèche and M. Pleimling, “Freezing in stripe states for kinetic Ising models: a comparative study of three dynamics,” *J. Stat. Mech.*, p. 043209, 2018.
- [44] H. C. Kang, W. H. Weinberg, and M. W. Deem, “Shrinking and freezing of embedded domains,” *Phys. Rev. B*, vol. 43, pp. 11438–11441, 1991.
- [45] A. Karma and A. E. Lobkovsky, “Low-temperature dynamics of kinks on Ising interfaces,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 036114, 2005.
- [46] R. Cerf and S. Louhichi, “The initial drift of a 2D droplet at zero temperature,” *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 137, pp. 379–428, 2007.
- [47] J. J. Arenzon, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, “Slicing the three-dimensional Ising model: Critical equilibrium and coarsening dynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, p. 032142, 2015.
- [48] B. Derrida, A. J. Bray, and C. Godrèche, “Non-trivial exponents in the zero temperature dynamics of the 1D Ising and Potts models,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 27, p. L357, 1994.

- [49] D. Stauffer, “Ising spinodal decomposition at $T = 0$ in one to five dimensions,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 27, p. 5029, 1994.
- [50] T. Blanchard, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, “Persistence in the two dimensional ferromagnetic Ising model,” *J. Stat. Mech.*, p. P12021, 2014.
- [51] J. J. Arenzon, A. J. Bray, L. F. Cugliandolo, and A. Sicilia, “Exact results for curvature-driven coarsening in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 145701, 2007.
- [52] A. Sicilia, J. J. Arenzon, A. J. Bray, and L. F. Cugliandolo, “Domain growth morphology in curvature driven two dimensional coarsening,” *Phys. Rev. E*, vol. 76, p. 61116, 2007.
- [53] T. Blanchard, F. Corberi, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, “How soon after a zero-temperature quench is the fate of the Ising model sealed?,” *Europhys. Lett.*, vol. 106, p. 66001, 2014.
- [54] T. Blanchard, L. F. Cugliandolo, M. Picco, and A. Tartaglia, “Critical percolation in the dynamics of the 2d ferromagnetic Ising model,” *J. Stat. Mech.*, p. 113201, 2017.
- [55] A. de Azevedo-Lopes, R. A. L. Almeida, P. M. C. de Oliveira, and J. J. Arenzon, “On the formation of the giant cluster in the Ising model after a temperature quench.” to be published, 2022.
- [56] S. Biswas, A. Chatterjee, and P. Sen, “Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics,” *Physica A*, vol. 391, pp. 3257–3265, 2012.
- [57] G. Toscani, “Kinetic models of opinion formation,” *Communications in mathematical sciences*, vol. 4, no. 3, pp. 481–496, 2006.
- [58] M. Lallouache, A. S. Chakrabarti, A. Chakraborti, and B. K. Chakrabarti, “Opinion formation in kinetic exchange models: Spontaneous symmetry-breaking transition,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 5, p. 056112, 2010.
- [59] P. Sen, “Noise-driven dynamic phase transition in a one-dimensional ising-like model,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 032103, 2010.
- [60] S. Biswas, “Mean-field solutions of kinetic-exchange opinion models,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 056106, 2011.
- [61] P. Sen, “Nonconservative kinetic exchange model of opinion dynamics with randomness and bounded confidence,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, p. 016115, 2012.
- [62] K. R. Chowdhury, A. Ghosh, S. Biswas, and B. K. Chakrabarti, “Kinetic exchange opinion model: Solution in the single parameter map limit,” in *Econophysics of Agent-Based Models*, pp. 131–143, Springer, 2014.
- [63] B. Derrida, “Exponents appearing in the zero-temperature dynamics of the 1D Potts model,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 28, pp. 1481–1491, 1995.
- [64] B. Derrida, V. Hakim, and V. Pasquier, “Exact first-passage exponents of 1D domain growth: relation to a reaction-diffusion model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 751–754, 1995.

- [65] L. Berthier and G. Biroli, “Glasses and aging, a statistical mechanics perspective on,” 2009.
- [66] L. Berthier and M. D. Ediger, “Facets of glass physics,” *arXiv preprint arXiv:1512.03540*, 2015.
- [67] M. P. Ciamarra, R. Pastore, and A. Coniglio, “Particle jumps in structural glasses,” *Soft matter*, vol. 12, no. 2, pp. 358–366, 2016.
- [68] N. Masuda, N. Gibert, and S. Redner, “Heterogeneous voter models,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 010103(R), 2010.
- [69] F. Caccioli, L. Dall’Asta, T. Galla, and T. Rogers, “Voter models with conserved dynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 052114, 2013.
- [70] A. Sicilia, Y. Sarrazin, J. J. Arenzon, A. J. Bray, and L. F. Cugliandolo, “Geometry of phase separation,” *Phys. Rev. E*, vol. 80, p. 031121, 2009.