

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

**Filtragem de Imagens com  
Preservação das Bordas Usando a  
Transformada Wavelet**

por

CLÁUDIO ROSITO JUNG

Tese submetida à avaliação,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor  
em Ciência da Computação

Prof. Jacob Scharcanski  
Orientador

Porto Alegre, fevereiro de 2002.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Jung, Cláudio Rosito

Filtragem de Imagens com Preservação das Bordas Usando a Transformada Wavelet / por Cláudio Rosito Jung. — Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2002.

120 f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2002. Orientador: Scharcanski, Jacob.

1. Processamento de Imagens. 2. Filtragem de Imagens. 3. Detecção de Bordas. 4. Transformada Wavelet I. Jacob Scharcanski. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitora: Profa. Wrana Panizzi

Pró-Reitor de Ensino: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Pró-Reitor Adjunto de Pós-Graduação: Prof. Jaime Evaldo Fernsterseifer

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Philippe Olivier Alexandre Navaux

Coordenador do PPGC: Prof. Carlos Alberto Heuser

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

# Agradecimentos

A todos que contribuíram de alguma maneira para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço a meu orientador, professor Jacob Scharcanski, pela convivência agradável, apoio, sugestões e críticas durante o meu doutorado.

Ao professor Robin Clarke, pela assessoria e conselhos sobre os métodos probabilísticos utilizados neste trabalho, e à professora Silvia Olabarriaga, pelas dicas sobre a validação dos resultados de filtragem com preservação das bordas.

Aos colegas e funcionários do PPGC, pelo suporte técnico e apoio prestados. Ao pessoal do grupo de usuários do L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, pela ajuda na formatação deste documento.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro no início do curso, e à UNISINOS, pelo suporte institucional e financeiro.

Finalmente, um agradecimento muito especial aos meus pais, José Hilário e Lígia, por todo amor, apoio, incentivo e compreensão não somente durante a realização do doutorado, mas também durante toda minha vida acadêmica.

# Sumário

<b>Lista de Abreviaturas</b> . . . . .	7
<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	8
<b>Lista de Tabelas</b> . . . . .	11
<b>Resumo</b> . . . . .	12
<b>Abstract</b> . . . . .	13
<b>1 Introdução</b> . . . . .	14
<b>1.1 Classes de Problemas em Processamento de Imagens</b>	15
1.1.1 Representação e Modelagem de Imagens . . . . .	15
1.1.2 Realce de Imagens . . . . .	16
1.1.3 Restauração de Imagens . . . . .	16
1.1.4 Análise de Imagens . . . . .	16
1.1.5 Reconstrução de Imagens . . . . .	16
1.1.6 Compressão de Imagens . . . . .	17
<b>1.2 Filtragem de Imagens com Preservação das Bordas</b>	17
1.2.1 Motivação . . . . .	17
1.2.2 Dificuldades na Filtragem de Imagens com Preservação de Bordas . . . . .	18
<b>1.3 Tipos de Ruído em Imagens</b> . . . . .	19
<b>1.4 Conclusão</b> . . . . .	21
<b>2 Filtragem e Detecção de Bordas: Métodos e Problemas Encontrados</b> . . . . .	22
<b>2.1 Introdução</b> . . . . .	22
<b>2.2 Métodos para Detecção de Bordas</b> . . . . .	22
<b>2.2.1 Métodos Baseados no Gradiente Digital</b> . . . . .	22
2.2.1.1 Operador de Prewitt . . . . .	23
2.2.1.2 Operador de Sobel . . . . .	23
<b>2.2.2 Operador de Marr-Hildreth</b> . . . . .	24
<b>2.2.3 Detector de Bordas de Canny</b> . . . . .	26
<b>2.2.4 Outros Detectores de Bordas</b> . . . . .	27
<b>2.3 Métodos para Filtragem de Imagens</b> . . . . .	28
<b>2.3.1 Supressão do Ruído Através de Filtros Espaciais</b> . . . . .	28
2.3.1.1 Filtro de Média . . . . .	29
2.3.1.2 Filtro Gaussiano . . . . .	29
2.3.1.3 Filtro de Mediana . . . . .	30
<b>2.3.2 Métodos de Filtragem com Preservação das Bordas Baseados em Minimização de Funcionais e Equações Diferenciais Parciais</b> . . . . .	33
2.3.2.1 Equação do Calor e Difusão Anisotrópica . . . . .	33

2.3.2.2	Difusão Ortogonal e Filtro de Choque Combinados . . . . .	34
2.3.2.3	Método de Variação Total Não Linear . . . . .	35
2.3.2.4	Minimização de Funcionais do Gradiente . . . . .	37
2.3.2.5	Filtragem e Detecção de Bordas Utilizando Sistemas de Equações Diferencias Parciais Acopladas . . . . .	38
2.3.3	Outras Técnicas de Filtragem . . . . .	40
2.4	Conclusão . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Filtragem com Preservação de Bordas Utilizando a Transformada Wavelet: Métodos e Problemas Encontrados . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1	Introdução . . . . .	44
3.2	Uma Visão Geral da Transformada Wavelet . . . . .	44
3.3	Técnicas de Filtragem com Preservação de Bordas Baseadas na Transformada Wavelet . . . . .	48
3.3.1	Redução do Ruído Usando a Representação em Múltiplas Resoluções . . . . .	50
3.3.2	Filtragem de Ruído Baseada na Correlação das Escalas . . . . .	51
3.3.3	Filtragem de Imagens Usando um Modelo <i>a Priori</i> baseado em Campos de Markov . . . . .	55
3.3.4	Filtragem de Ruído em Imagens Usando Consistência Geométrica . . . . .	57
3.3.5	Utilização de Limiares Adaptativos com Modelagem de Contexto para Filtragem de Imagens . . . . .	59
3.3.6	Filtragem de Imagens Através do Ajuste da Correlação das Magnitudes dos Coeficientes Wavelet . . . . .	60
3.4	Conclusão . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Consistência no Espaço-Escala para Filtragem com Preservação das Bordas Usando a Transformada Wavelet . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1	Introdução . . . . .	65
4.2	O Tipo de Transformada Wavelet Escolhida . . . . .	65
4.2.1	Wavelets Unidimensionais . . . . .	66
4.2.1.1	A Transformada Wavelet Discreta Unidimensional . . . . .	70
4.2.2	Wavelets Bidimensionais . . . . .	70
4.2.2.1	A Transformada Wavelet Discreta Bidimensional . . . . .	74
4.3	Propriedades da Transformada Wavelet a Serem Exploradas . . . . .	75
4.4	Abordagens Propostas neste Trabalho . . . . .	78
4.4.1	Filtragem Interativa de Imagens Usando Continuidade no Espaço-Escala . . . . .	78
4.4.1.1	Continuidade Geométrica . . . . .	78
4.4.1.2	Wavelet Shrinkage . . . . .	80
4.4.1.3	Consistência ao Longo de Escalas . . . . .	83
4.4.1.4	Resultados Experimentais . . . . .	84
4.4.1.5	Limitações do Método . . . . .	87

<b>4.4.2 Filtragem Adaptativa de Imagens Usando Consistência no Espaço-Escala</b> . . . . .	95
4.4.2.1 Wavelet Shrinkage . . . . .	95
4.4.2.2 Consistência ao Longo de Escalas . . . . .	99
4.4.2.3 Continuidade Geométrica . . . . .	99
4.4.2.4 Resultados Experimentais . . . . .	101
4.4.2.5 Limitações do Método . . . . .	103
<b>4.5 Conclusões</b> . . . . .	104
<b>5 Conclusões</b> . . . . .	108
5.1 Discussão . . . . .	108
5.2 Conclusões Gerais . . . . .	110
5.3 Extensões Futuras deste Trabalho . . . . .	111
<b>Bibliografia</b> . . . . .	112

# Lista de Abreviaturas

DFT	Transformada Discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> )
DWT	Transformada Wavelet Discreta ( <i>Discrete Wavelet Transform</i> )
EDP	Equação Diferencial Parcial
FBI	<i>Federal Bureau of Investigation</i>
FFT	Transformada Rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> )
FIR	Resposta ao Impulso Finita ( <i>Finite Impulsive Response</i> )
GSM	<i>Gaussian Scale Mixture</i>
LoG	Logaritmo da Gaussiana
MRF	Campos Aleatórios de Markov ( <i>Markov Random Fields</i> )
MRI	Imagem de Ressonância Magnética ( <i>Magnetic Resonance Image</i> )
MSE	Erro quadrático Médio ( <i>Mean Squared Error</i> )
PSNR	Razão Sinal-Ruído de Pico ( <i>Peak-to-Peak Signal-to-Noise Ratio</i> )
RAM	Memória de Acesso Aleatório ( <i>Random Access Memory</i> )
SAR	Radar de Satélite de Abertura ( <i>Satellite Aperture Radar</i> )
SNR	Razão Sinal-Ruído ( <i>Signal-to-Noise Ratio</i> )

## Lista de Figuras

FIGURA 1.1 -	Exemplos de imagens digitais . . . . .	14
FIGURA 1.2 -	Exemplo de detecção de bordas e filtragem . . . . .	19
FIGURA 1.3 -	Problema na validação da filtragem através da razão sinal-ruído de pico . . . . .	20
FIGURA 2.1 -	Exemplo do operador de Prewitt . . . . .	24
FIGURA 2.2 -	Exemplo do método de Marr-Hildreth . . . . .	25
FIGURA 2.3 -	Exemplo do método de Canny . . . . .	27
FIGURA 2.4 -	Imagem <i>blood</i> . . . . .	30
FIGURA 2.5 -	Filtragem da imagem <i>blood</i> pelo filtro da média . . . . .	31
FIGURA 2.6 -	Filtragem da imagem <i>blood</i> pelo filtro da mediana . . . . .	32
FIGURA 2.7 -	Exemplo de onda de choque . . . . .	34
FIGURA 2.8 -	Imagem <i>house</i> e sua versão ruidosa . . . . .	36
FIGURA 2.9 -	Método da variação total não linear aplicado à imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	37
FIGURA 2.10 -	Mapa de bordas da imagem <i>house</i> ruidosa, pelo método das equações diferenciais parciais acopladas . . . . .	40
FIGURA 2.11 -	Filtragem da imagem <i>house</i> ruidosa, pelo método das equações diferenciais parciais acopladas . . . . .	41
FIGURA 3.1 -	Exemplos de wavelets-mãe . . . . .	45
FIGURA 3.2 -	Diagrama da decomposição de um sinal unidimensional pelo algoritmo de Mallat . . . . .	46
FIGURA 3.3 -	Diagrama da reconstrução de um sinal unidimensional pelo algoritmo de Mallat . . . . .	47
FIGURA 3.4 -	Decomposição da imagem <i>house</i> através da transformada wavelet bidimensional . . . . .	48
FIGURA 3.5 -	Árvore das bordas no método de Lu e colaboradores . . . . .	52
FIGURA 3.6 -	Imagem de ressonância nuclear magnética filtrada pelo método de Lu e colaboradores . . . . .	52
FIGURA 3.7 -	Borda em degrau unidimensional . . . . .	53
FIGURA 3.8 -	Borda em degrau unidimensional com ruído . . . . .	54
FIGURA 3.9 -	Coefficientes passa-banda obtidos pelo método de Xu <i>et al.</i> . . . . .	54
FIGURA 3.10 -	Filtragem da borda em degrau ruidosa pelo método de Xu <i>et al.</i> . . . . .	55
FIGURA 3.11 -	Filtragem da imagem <i>house</i> ruidosa pelo método de Xu <i>et al.</i> . . . . .	55
FIGURA 3.12 -	Filtragem da imagem <i>Barbara</i> ruidosa pela técnica de Chang e colaboradores . . . . .	61
FIGURA 3.13 -	Filtragem da imagem <i>Einstein</i> ruidosa pela técnica de Portilla e Simoncelli . . . . .	62
FIGURA 4.1 -	Função geradora e wavelet-mãe para a detecção das bordas . . . . .	68
FIGURA 4.2 -	Coefficientes associados ao filtro passa-banda em para a borda em degrau unidimensional ruidosa . . . . .	71



FIGURA 4.3 - Coeficientes associados ao filtro passa-baixas para a borda em degrau unidimensional ruidosa . . . . .	71
FIGURA 4.4 - Máximos locais dos coeficientes passa-banda para a borda em degrau unidimensional ruidosa . . . . .	72
FIGURA 4.5 - Coeficientes associados ao filtro passa-banda para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	75
FIGURA 4.6 - Máximos locais dos coeficientes passa-banda para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	76
FIGURA 4.7 - Coeficientes associados ao filtro passa-baixa para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	77
FIGURA 4.8 - Aplicação da continuidade geométrica na imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	80
FIGURA 4.9 - Fatores de <i>shrinkage</i> para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	82
FIGURA 4.10 - Fatores de <i>shrinkage</i> atualizados para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	83
FIGURA 4.11 - Filtragem da imagem <i>house</i> ruidosa usando a técnica interativa . . . . .	85
FIGURA 4.12 - Filtragem da imagem <i>peppers</i> ruidosa usando a técnica interativa . . . . .	86
FIGURA 4.13 - Filtragem da imagem <i>chemical plant</i> usando a técnica interativa . . . . .	86
FIGURA 4.14 - Filtragem da imagem <i>aerial</i> usando a técnica interativa . . . . .	87
FIGURA 4.15 - Imagem SAR de uma plantação de arroz . . . . .	88
FIGURA 4.16 - Segmentação da imagem SAR . . . . .	88
FIGURA 4.17 - Imagem teste contendo quadrados com diferentes tamanhos e contrastes . . . . .	89
FIGURA 4.18 - Imagem teste contaminada com diferentes quantidades de ruído . . . . .	91
FIGURA 4.19 - Aplicação da técnica interativa à imagem teste ruidosa usando valores padrão . . . . .	92
FIGURA 4.20 - Aplicação da técnica interativa (com dois níveis na transformada) à imagem teste ruidosa . . . . .	93
FIGURA 4.21 - Aplicação da técnica interativa à imagem teste ruidosa variando o parâmetro $\alpha$ . . . . .	94
FIGURA 4.22 - Comparação dos histogramas das magnitudes dos gradientes com a distribuição normal. . . . .	97
FIGURA 4.23 - Histograma das magnitudes para a imagem <i>house</i> ruidosa . . . . .	98
FIGURA 4.24 - Fatores de <i>shrinkage</i> para a imagem <i>house</i> ruidosa, usando o método adaptativo . . . . .	99
FIGURA 4.25 - Fatores de <i>shrinkage</i> atualizados para a imagem <i>house</i> ruidosa, usando o método adaptativo . . . . .	100
FIGURA 4.26 - Fatores de <i>shrinkage</i> atualizados após a aplicação da continuidade geométrica para a imagem <i>house</i> ruidosa, usando o método adaptativo . . . . .	101
FIGURA 4.27 - Filtragem da imagem <i>house</i> ruidosa pela técnica adaptativa . . . . .	102
FIGURA 4.28 - Filtragem da imagem <i>peppers</i> ruidosa pela técnica adaptativa . . . . .	102
FIGURA 4.29 - Filtragem da imagem <i>aerial</i> pela técnica adaptativa . . . . .	102
FIGURA 4.30 - Filtragem de uma imagem MRI pela técnica adaptativa . . . . .	103

FIGURA 4.31 - Aplicação da técnica adaptativa à imagem teste ruidosa usando valores padrão . . . . .	106
FIGURA 4.32 - Aplicação da técnica adaptativa à imagem teste ruidosa usando duas escalas diádicas na decomposição . . . . .	107

## Lista de Tabelas

TABELA 5.1 - Resultados de vários métodos de filtragem (PSNR, em dB) para imagem <i>house</i> contaminada com diferentes quantidades de ruído. . . . .	109
TABELA 5.2 - Resultados de vários métodos de filtragem (PSNR, em dB) para imagem <i>peppers</i> contaminada com diferentes quantidades de ruído. . . . .	110

# Resumo

A filtragem de imagens visando a redução do ruído é uma tarefa muito importante em processamento de imagens, e encontra diversas aplicações. Para que a filtragem seja eficiente, ela deve atenuar apenas o ruído na imagem, sem afetar estruturas importantes, como as bordas. Há na literatura uma grande variedade de técnicas propostas para filtragem de imagens com preservação de bordas, com as mais variadas abordagens, dentre as quais podem ser citadas a convolução com máscaras, modelos probabilísticos, redes neurais, minimização de funcionais e equações diferenciais parciais. A *transformada wavelet* é uma ferramenta matemática que permite a decomposição de sinais e imagens em múltiplas resoluções. Essa decomposição é chamada de representação em wavelets, e pode ser calculada através de um algoritmo piramidal baseado em convoluções com filtros passa-bandas e passa-baixas. Com essa transformada, as bordas podem ser calculadas em múltiplas resoluções. Além disso, como filtros passa-baixas são utilizados na decomposição, a atenuação do ruído é um processo intrínseco à transformada. Várias técnicas baseadas na transformada wavelet têm sido propostas nos últimos anos, com resultados promissores. Essas técnicas exploram várias características da transformada wavelet, tais como a magnitude dos coeficientes e sua evolução ao longo das escalas. Neste trabalho, essas características da transformada wavelet são exploradas para a obtenção de novas técnicas de filtragem com preservação das bordas.

**Palavras-chave:** processamento de imagens, filtragem, detecção de bordas, multi-resolução, espaço-escala, transformada wavelet.

**TITLE:** “IMAGE FILTERING WITH EDGE PRESERVATION USING THE WAVELET TRANSFORM”

## Abstract

Image filtering for noise removal is a very important task in image processing, with many practical applications. An efficient filtering technique should reduce noise in the image, keeping intact other structures, such as edges. There are many methods for edge-preserving image filtering, with different approaches, such as convolution with digital masks, probabilistic models, neural networks, functional minimization and partial differential equations. The *wavelet transform* allows the decomposition of signals and images in multiple resolutions. This decomposition is called a wavelet representation, and can be achieved through a pyramidal algorithm based on convolutions with band-pass and low-pass filters. Using the wavelet transform, edges can be detected in multiple resolutions. Furthermore, noise reduction is intrinsic to this transform, since convolutions with low-pass filters are used in the decomposition. Several methods based on wavelets have been proposed over the last years, with promising results. These methods explore many properties of the wavelet transform, such as the analysis of the coefficient magnitudes and their evolution along the scales. In this work, these properties are explored in order to obtain new filtering techniques with edge preservation.

**Keywords:** image processing, filtering, edge detection, multiresolution, scale-space, wavelet transform.

# 1 Introdução

Na atualidade, há uma grande variedade de problemas que envolvem a utilização e interpretação de imagens, tais como o sensoriamento remoto através de satélites, transmissão de imagens em tempo real, imagens médicas, radar, sonar, robótica, e inspeção de peças industriais, dentre outros. Por exemplo, imagens adquiridas por satélite são úteis para a avaliação de recursos naturais, mapeamento geográfico, quantificação de áreas cultivadas e queimadas. Transmissão de imagens tem grande aplicação em televisão e teleconferência, especialmente com o crescente número de usuários da *internet*. Na área médica, o processamento de mamografias, cineangiografias e imagens de ultrassom, juntamente com a reconstrução de imagens de tomografia podem ser citados como áreas de aplicação de grande importância. Imagens de radar e sonar podem ser utilizadas para a detecção e reconhecimento de alvos na área militar. Enfim, o processamento de imagens se aplica a inúmeros problemas em que uma pessoa ou uma máquina recebem dados de duas dimensões.

Figura 1.1 mostra três imagens relativas a diferentes aplicações de processamento de imagens. Figura 1.1(a), 1.1(b) e 1.1(c) mostram, respectivamente, uma mamografia digitalizada de um tumor maligno, uma imagem de radar de abertura sintética (SAR) obtida por satélite representando uma plantação de arroz, e uma imagem aérea convencional.

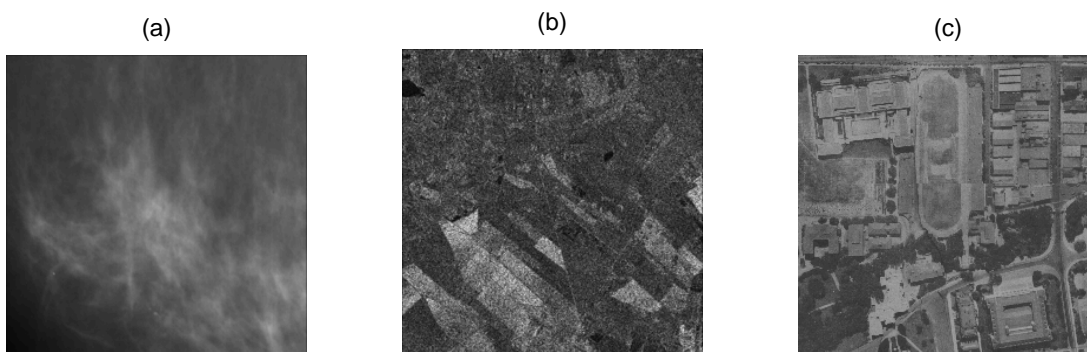


FIGURA 1.1 - (a) Mamografia. (b) Imagem SAR. (c) Imagem aérea.

Sistemas de processamento de imagens têm basicamente duas grandes áreas de aplicação: melhoramento da qualidade visual de imagens para interpretação humana, e processamento da imagem para percepção autônoma por máquinas. Normalmente, as técnicas de processamento de imagens são implementadas através de algoritmos matemáticos, e então é necessário que se defina matematicamente uma imagem. Usualmente, uma imagem colorida pode ser representada por uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que na posição  $(x, y)$  retorna três componentes, correspondendo às intensidades das cores azul, vermelha e verde (sistema RGB). Para imagens monocromáticas, a imagem pode ser representada por uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde o valor  $f(x, y)$  é um escalar e representa a intensidade luminosa do ponto  $(x, y)$  na cena

imageada. Em computadores, as imagens processadas são digitais, ou seja, podem ser representadas por funções de domínio discreto. Em geral, uma imagem monocromática digital pode ser representada através de uma matriz  $A$ , cujos elementos  $a_{ij}$  representam a intensidade luminosa na posição  $(i, j)$ . O termo *processamento digital de imagens* se refere ao processamento de imagens digitais (sinais discretos com duas ou mais dimensões).

Há uma gama praticamente ilimitada de aplicações para o processamento de imagens. Entretanto, seis grandes classes de problemas se destacam [JAI 89]:

1. Representação e modelagem de imagens;
2. Realce de imagens;
3. Restauração de imagens;
4. Análise de imagens;
5. Reconstrução de imagens;
6. Compressão de imagens.

Dentro de cada uma destas seis classes, uma variedade de processamentos são necessários, dentre as quais se destacam a filtragem de imagens e a detecção de bordas. Na Seção seguinte, são descritas brevemente estas seis grandes áreas do processamento de imagens. Na Seção 1.2, a importância do processo de filtragem com preservação de bordas dentro destas áreas é discutida. Na Seção 1.3 são abordados alguns tipos de ruído comuns em imagens digitais, e a última Seção do Capítulo apresenta as conclusões.

## 1.1 Classes de Problemas em Processamento de Imagens

### 1.1.1 Representação e Modelagem de Imagens

Representação de imagens depende da caracterização da quantidade que cada pixel representa. As intensidades em uma imagem podem representar quantidades físicas, tais como as luminâncias de um objeto na cena (em uma foto), as características de absorção de tecidos humanos (em um raio-X), ou a temperatura de uma dada região (em imagens infra-vermelho), dentre outras.

Para o processamento digital de imagens, é fundamental que a imagem possa ser amostrada e quantizada. Por exemplo, pixels de imagens monocromáticas são geralmente representados em máquinas digitais por valores inteiros, variando entre 0 e 255. Intensidade 0 representa a cor preta, enquanto que intensidade 255 representa a cor branca. Para seqüências de vídeo, o número de quadros que será armazenado por unidade de tempo é fundamental para a sua análise e visualização.

Na representação de uma imagem, transformações tais como a expansão em séries ortogonais (por exemplo, séries de Fourier) são bastante utilizadas. Várias características da imagem, como o conteúdo espectral, podem ser estudadas a partir dos coeficientes da expansão. Modelos estatísticos também são bastante utilizados

para descrever imagens: alguns parâmetros, como média e variância, podem ser utilizados para descrever estatisticamente o ruído (ou texturas) em imagens.

### 1.1.2 Realce de Imagens

Realce de imagens está relacionado com a tarefa de salientar certas características da imagem, para um futuro processamento ou visualização. Por exemplo, a equalização do histograma pode ser aplicada em imagens com baixo contraste, para aumentar o realce entre os objetos que compõem a cena.

Há um grande interesse prático no problema de realce de imagens. Na área médica, o realce de imagens pode facilitar o diagnóstico de doenças. Por exemplo, o realce de mamografias pode ressaltar detalhes (como tumores), tornando sua visualização mais evidente para o médico. Já na área militar, o realce de imagens de satélite (ou imagens aéreas) pode facilitar a detecção e o reconhecimento de alvos.

### 1.1.3 Restauração de Imagens

Restauração de imagens compreende a remoção ou atenuação de degradações conhecidas em uma imagem. Isto inclui a remoção do “borramento” de imagens devido ao foco incorreto de um sensor, ou correções de distorções geométricas provocadas por alguns instrumentos de aquisição de imagens.

Uma abordagem que se destaca em restauração de imagens é a filtragem de Wiener, que fornece a melhor estimativa (no sentido dos mínimos quadrados) de um sinal a partir de suas observações. Outras técnicas, como máxima verossimilhança e máxima entropia também encontram aplicação nesta área do processamento de imagens.

### 1.1.4 Análise de Imagens

Em análise de imagens, medidas quantitativas são tomadas a partir da imagem para obter uma descrição da mesma. Como exemplos simples desse processamento, pode-se citar a leitura de um rótulo em itens de supermercado, ou a contagem de células sanguíneas.

A análise de imagens requer a extração de características que auxiliem na identificação dos objetos presentes na cena. Técnicas de segmentação isolam os diferentes objetos que compõem uma cena, de modo que cada objeto possa ser tratado de maneira independente.

### 1.1.5 Reconstrução de Imagens

Na verdade, a reconstrução de imagens a partir de projeções é uma classe especial de problemas de restauração de imagens, na qual um objeto bidimensional (ou de mais dimensões) é reconstruído a partir de várias projeções unidimensionais. Geralmente, cada projeção é obtida através de raios-X (ou outro tipo de radiação) incidindo sobre um objeto, em ângulos diferentes.

Os algoritmos de reconstrução permitem a visualização interna de objetos a partir das projeções sem a necessidade de aplicar métodos “invasivos” sobre o ob-



jeto. A reconstrução de imagens encontra aplicações em processamento de imagens médicas (tomografias computadorizadas), astronomia, processamento de imagens de radar, e exploração geológica, dentre outras.

### 1.1.6 Compressão de Imagens

Em muitos casos, a quantidade de dados associada à informação visual é tão grande que sua armazenagem exige um espaço enorme. Além disso, para seqüências de vídeo, há a necessidade de transmissão de dados em tempo real. A compressão de imagens compreende a redução do número de bits necessários para armazenar ou transmitir dados minimizando a perda de qualidade visual.

A armazenagem de imagens é muito importante em áreas como medicina (banco de dados contendo exames de pacientes), ou o sensoriamento remoto (imagens de satélite são muito grandes, e geralmente contêm várias bandas espectrais). Aplicações de transmissão de imagens incluem televisão, teleconferência e comunicações em geral.

## 1.2 Filtragem de Imagens com Preservação das Bordas

### 1.2.1 Motivação

Na Seção anterior, foram brevemente discutidas seis grandes classes de problemas que compõem o processamento de imagens. Na prática, as imagens digitais são corrompidas por ruído durante sua aquisição ou transmissão, requerendo que essas imagens sejam filtradas antes de seu processamento. A definição do termo ruído não é precisa, mas geralmente ruído é considerado informação espúria (indesejada) na imagem. Em sentido amplo, o termo filtragem implica na manipulação do conteúdo de frequência da imagem, mas neste trabalho o termo filtragem será utilizado para denotar a remoção (ou atenuação) do ruído em uma imagem.

Por exemplo, imagens de radar são inerentemente ruidosas (como pode ser observado na Figura 1.1(b)), e sua filtragem facilitaria a segmentação da imagem, permitindo que se determine regiões desérticas, plantações, queimadas, etc. A filtragem consiste na remoção (ou atenuação) do ruído presente na imagem, e idealmente deve manter as estruturas da imagem inalteradas no processo de filtragem do ruído. Em particular, é de extrema importância que as bordas sejam preservadas durante a filtragem. As bordas da imagem delimitam as fronteiras entre dois objetos que compõem uma cena, e são fundamentais tanto na percepção do sistema visual humano [HUB 62], quanto na análise de imagens (por exemplo, para a segmentação da imagem em seus objetos componentes). Infelizmente, a grande maioria das técnicas de filtragem existentes na literatura não se mostram eficientes na preservação das bordas.

Também pode-se perceber a importância do processo de filtragem no realce de imagens ruidosas. A tendência da maioria das técnicas de realce de imagens (tais como a equalização do histograma) é salientar também o ruído na imagem. Essas

técnicas têm um desempenho muito melhor quando a imagem é filtrada, minimizando o indesejável realce do ruído.

Em problemas de compressão de imagens, a supressão do ruído ajuda a eliminar informações irrelevantes na imagem, diminuindo a quantidade de memória necessária para a armazenagem da mesma. Além disso, algumas técnicas de compressão de imagens se baseiam na redução da imagem em primitivas (por exemplo, suas bordas), e então é desejável que as bordas sejam facilmente detectadas.

## 1.2.2 Dificuldades na Filtragem de Imagens com Preservação de Bordas

O grande problema na filtragem de imagens com preservação das bordas é que, na grande maioria das imagens, a distinção entre ruído e bordas é muito difícil para um sistema de visão computacional, embora seja normalmente uma tarefa trivial para o sistema visual humano. Na verdade, os processos de filtragem e detecção de bordas são interdependentes, como será visto a seguir.

A caracterização matemática do ruído não é simples, pois existem diferentes tipos de ruído e com origens distintas (vide Seção 1.3). Entretanto, o ruído em uma imagem monocromática é caracterizado geralmente por variações de alta frequência espacial na intensidade dos tons de cinza. Por outro lado, as bordas da imagem representam as fronteiras entre os objetos que compõem uma cena, e são caracterizadas por variações bruscas nos tons de cinza (correspondentes às transições entre duas regiões aproximadamente homogêneas associadas a dois objetos distintos), que também correspondem a altas frequências espaciais.

Em geral, as variações de intensidade correspondentes às bordas têm amplitude maior do que as variações de intensidade associadas ao ruído. Contudo, essa hipótese não é válida para bordas de baixo contraste (i.e. fronteiras entre regiões que têm aproximadamente a mesma média nos tons de cinza), ou quando a quantidade de ruído presente na imagem é grande. Nesses casos, a distinção entre bordas e ruído pode ser bastante complexa, resultando em *falsas bordas* (ruído erroneamente detectado como borda) e/ou falhas na detecção das bordas de baixo contraste.

Para que a filtragem seja eficiente, o ruído deve ser atenuado nas regiões homogêneas da imagem, mas as bordas não devem ser suavizadas. Para tal, é importante que se conheça a localização das bordas. Por outro lado, a detecção das bordas requer uma imagem filtrada, pois a detecção de bordas em imagens ruidosas apresenta resultados errôneos. Como exemplo, Figura 1.2(a) mostra uma imagem contaminada por ruído Gaussiano aditivo<sup>1</sup>. Figura 1.2(b), mostra as bordas detectadas pelo método de Prewitt [PRA 91], enquanto que a Figura 1.2(c) mostra o resultado da filtragem pela convolução com o filtro Gaussiano [JAI 89]. Pode-se notar que as bordas da imagem filtrada estão borradas, e que a detecção das bordas não foi eficiente (contornos abertos e várias falsas bordas detectadas).

Um outro problema encontrado na filtragem com preservação das bordas se refere à validação quantitativa dos resultados. Há diversas métricas que se propõem a quantificar a qualidade de uma filtragem, dentre as quais se destacam a razão sinal-ruído (SNR), razão sinal-ruído de pico (PSNR) e o erro quadrático médio

<sup>1</sup>A função de densidade de probabilidade associada ao ruído Gaussiano é uma Normal [LAR 79].

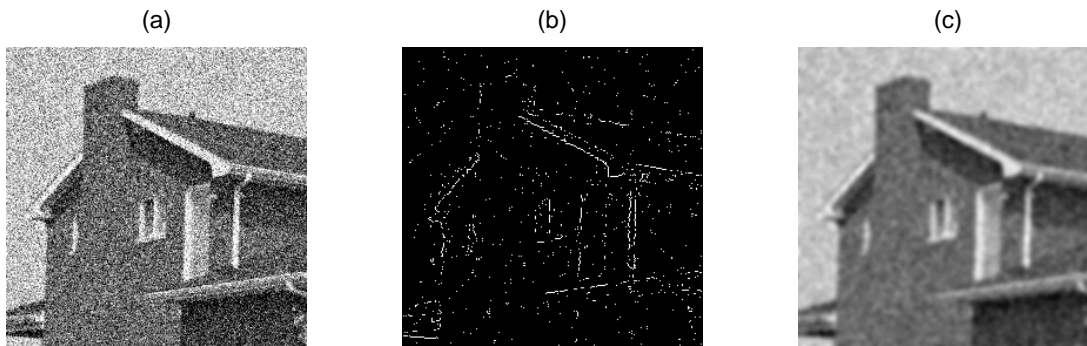


FIGURA 1.2 - (a) Imagem ruidosa. (b) Bordas detectadas pelo método de Prewitt. (c) Filtragem pela convolução com uma Gaussiana.

(MSE). Entretanto, essas métricas não refletem a maneira como o olho humano interpreta as imagens, pois não levam em consideração informações importantes da imagem filtrada, como a preservação das bordas. Por exemplo, considere-se a Figura 1.3(a), que mostra um quadrado claro sobreposto a fundo escuro. Na Figura 1.3(b) é mostrada sua versão ruidosa (PSNR = 18,66 dB), e nas Figuras 1.3(c) e 1.3(d) são mostrados os resultados de duas técnicas de filtragem. O julgamento visual sobre qual técnica produziu o melhor resultado de filtragem não é fácil, mas na Figura 1.3(c) as bordas aparecem mais borradas do que na Figura 1.3(d) (ou seja, a Figura 1.3(d) apresenta uma qualidade visual superior). Entretanto, a Figura 1.3(c) apresenta uma razão sinal-ruído de pico maior (PSNR = 30,49 dB) do que a Figura 1.3(d) (PSNR = 29,39 dB).

Na verdade, há vários pesquisadores investigando o problema de determinar métricas que quantifiquem a qualidade de imagens de acordo com a percepção do olho humano, e algumas alternativas têm sido propostas [HAL 81, RAN 95], mas sem resultados conclusivos. Por essa razão, as publicações recentes têm utilizado métricas convencionais (SNR, PSNR, MSE) para validar as técnicas de filtragem propostas, apesar de suas limitações. Neste trabalho, as imagens serão avaliadas quantitativamente através da SNR (ou PSNR) da imagem filtrada, e qualitativamente através do julgador humano.

### 1.3 Tipos de Ruído em Imagens

Há vários tipos de ruído que corrompem imagens analógicas e digitais durante os processos de aquisição e transmissão, alguns dos quais serão descritos a seguir. Nesta Seção,  $f(x, y)$  denota a imagem original analógica, e  $f[n, m]$  representa a imagem original digital. As imagens contaminadas por ruído são representadas, respectivamente, por  $g(x, y)$  e  $g[n, m]$ .

Durante a aquisição da imagem usando sensores ou filme, o tipo de ruído é fotoelétrico (em sensores fotoelétricos), ou ruído granular (em fotografias). Para o caso de ruído granular, o modelo matemático é dado por [PIT 90]

$$g(x, y) = c(f(x, y))^{-\gamma} \eta(x, y), \quad (1.1)$$

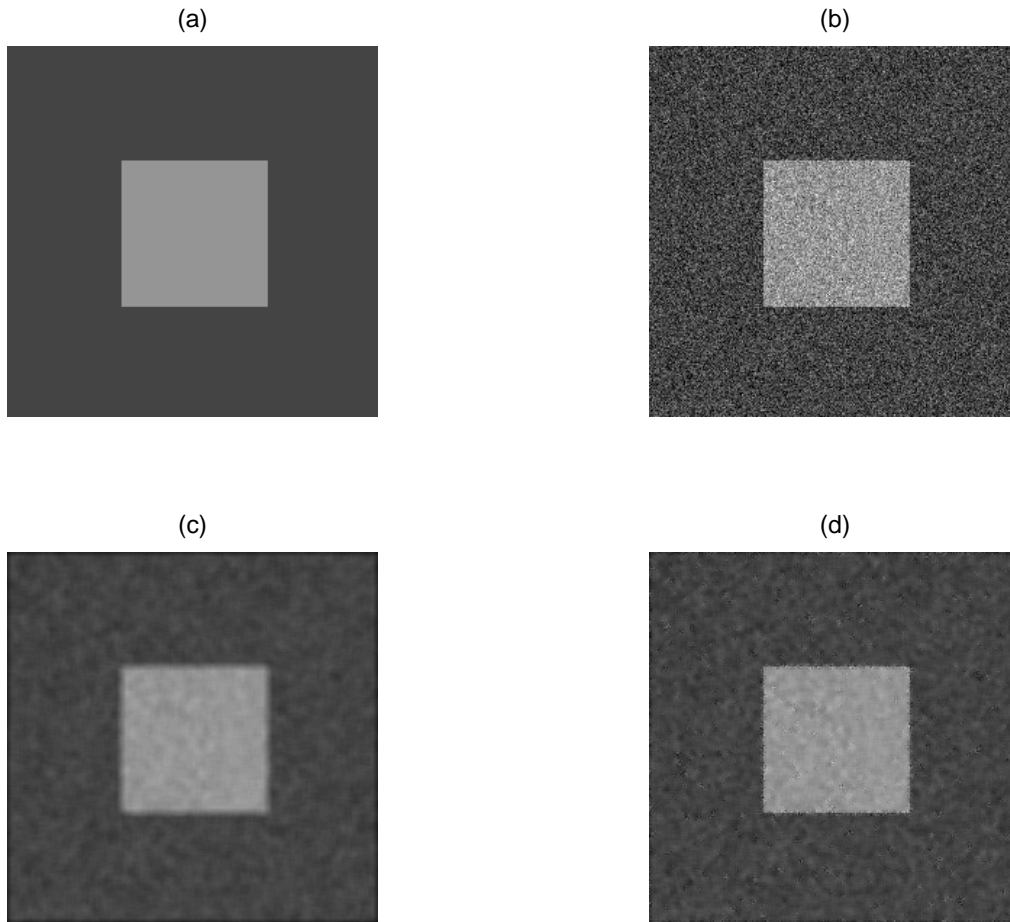


FIGURA 1.3 - (a) Imagem original. (b) Imagem ruidosa (PSNR = 18,66 dB). (c)-(d) Resultados de duas técnicas de filtragem (respectivamente, PSNR = 30,49 dB e PSNR = 29,39 dB).

onde o ruído  $\eta(x, y)$  apresenta uma distribuição log-normal [LAR 79] (e pode ser escrito como  $\eta(x, y) = e^{kn(x,y)}$ ), e  $c$  é uma constante (com  $c \in [0, 1]$ ). Para o caso de ruído fotoelétrico, o modelo é dado por [PIT 90]

$$g(x, y) = c_2 (h(x, y) * f(x, y))^\gamma + (c_2 (h(x, y) * f(x, y))^\gamma)^{1/2} \eta(x, y) + \eta_t(x, y), \quad (1.2)$$

onde  $h(x, y)$  é a função de transferência do subsistema ótico de aquisição,  $\eta_t(x, y)$  é o ruído termal (que é ruído branco Gaussiano aditivo), e '\*' representa a convolução em duas dimensões.

Um tipo diferente de ruído que ocorre na formação de alguns tipos de imagens é chamado de ruído *speckle*. Esse é um ruído multiplicativo, e aparece quando a irregularidade da superfície do objeto que está sendo imageado é da mesma ordem do comprimento de onda da radiação incidente. O ruído do tipo *speckle* é bastante comum em imagens de radar, laser e ultrassom. Imagens contaminadas por esse tipo de ruído seguem o seguinte modelo [JAI 89]:

$$g(x, y) = f(x, y)s(x, y) + \eta(x, y), \quad (1.3)$$

onde  $s(x, y)$  representa a intensidade do ruído *speckle*, e pode ser modelado por uma distribuição exponencial [LAR 79]. A parcela  $\eta(x, y)$  denota ruído branco Gaussiano aditivo.

Outro tipo de ruído, comum na transmissão de imagens, é o ruído impulsivo (*salt-and-pepper*). Ele aparece como impulsos pretos e/ou brancos em alguns pixels da imagem digital, e pode ser modelado por [PIT 90]

$$g[n, m] = \begin{cases} z[n, m], & \text{com probabilidade } p \\ f[n, m], & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}, \quad (1.4)$$

onde a função  $z[n, m]$  denota os impulsos de ruído, que aparecem com probabilidade  $p$ . Esses impulsos podem ter valores fixos (como 0 ou 255), ou ter uma outra distribuição de probabilidade, como a distribuição Laplaciana [PAP 65].

Cada tipo de ruído possui um modelo matemático diferente, requerendo uma abordagem específica para sua remoção. Por exemplo, um método projetado para atenuar ruído impulsivo pode não ser eficiente para a supressão de ruído tipo *speckle*.

## 1.4 Conclusão

Neste Capítulo, foi apresentado o problema genérico de processamento de imagens, abordando as seis grandes áreas que compõem esse problema. Foi apresentada a motivação para o estudo da filtragem de imagens com preservação de bordas, tanto para melhorar a qualidade visual de imagens quanto para simplificar a imagem para um futuro processamento. Também foram abordadas as dificuldades na resolução do problema de remoção do ruído com preservação de bordas, devido à relação entre filtragem e detecção de bordas. Finalmente, foram apresentados alguns modelos de ruído presentes em imagens analógicas e digitais.

## 2 Filtragem e Detecção de Bordas: Métodos e Problemas Encontrados

### 2.1 Introdução

Há uma série de métodos propostos na literatura para a filtragem de imagens com preservação das bordas. Tais métodos utilizam uma grande variedade de abordagens e ferramentas matemáticas, tais como convolução com máscaras digitais, modelos probabilísticos, métodos descritos pela minimização de funcionais ou por equações diferenciais parciais explícitas. Embora o presente trabalho não se concentre na detecção de bordas, tal problema será abordado neste Capítulo, pois conceitos das técnicas de detecção podem ser incorporados para a preservação das bordas durante a filtragem.

A formulação matemática de alguns destes métodos é voltada para funções de domínio contínuo (ou seja, imagens analógicas). Tais técnicas podem ser aplicadas a imagens digitais, mediante uma discretização adequada da técnica. Assim como no Capítulo anterior, imagens com domínio contínuo serão denotadas por  $f(x, y)$ , enquanto que imagens digitais serão denotadas por  $f[n, m]$ . Nas próximas Seções, são descritos alguns métodos voltados à filtragem e detecção de bordas. A Seção 2.4 apresenta as conclusões do Capítulo.

### 2.2 Métodos para Detecção de Bordas

#### 2.2.1 Métodos Baseados no Gradiente Digital

Os métodos clássicos para detecção de bordas em imagens digitais envolvem o cálculo de gradientes da imagem [GON 92]. O gradiente digital é obtido através da convolução da imagem com duas máscaras: a convolução com a primeira máscara  $M_x$  discretiza a derivada parcial na direção  $x$ , e a segunda máscara  $M_y$  tem função análoga na direção  $y$ . Os resultados dessas convoluções na posição  $[n, m]$  serão denotados, respectivamente, por  $g_x[n, m]$  e  $g_y[n, m]$ .

O módulo do gradiente de uma imagem digital  $f$  é dado por

$$|\nabla f[n, m]| = \sqrt{g_x^2[n, m] + g_y^2[n, m]}, \quad (2.1)$$

embora a aproximação

$$|\nabla f[n, m]| = |g_x[n, m]| + |g_y[n, m]| \quad (2.2)$$

também seja utilizada. A direção do vetor gradiente, que é ortogonal à direção local do contorno, pode ser estimada através de

$$\theta_f[n, m] = \tan^{-1} \left( \frac{g_y[n, m]}{g_x[n, m]} \right). \quad (2.3)$$

Em imagens contaminadas por ruído, as distorções provocadas pelo ruído afetam os gradientes  $|\nabla f|$ . Normalmente, gradientes associados ao ruído terão intensidade menor do que gradientes associados às bordas. Dessa forma, um pixel  $[n, m]$  é declarado como borda se o módulo do respectivo gradiente  $|\nabla f[n, m]|$  for maior do que um certo limiar  $T$ . Esse limiar pode ser selecionado a partir do histograma cumulativo de  $|\nabla f|$ , e 5% a 10% dos pixels com gradiente de maior magnitude são declarados bordas [JAI 89]. O conjunto dos pixels declarados como bordas formam o *mapa de bordas* da imagem.

Normalmente, os mapas de bordas são formados por contornos com espessura maior do que um pixel. Para obter contornos com espessura menor, pode-se considerar bordas apenas os máximos locais de  $|\nabla f|$  ao longo da direção do gradiente.

Variando o tamanho e o formato das máscaras  $M_x$  e  $M_y$ , são obtidas diferentes técnicas para a detecção de bordas. A seguir, algumas máscaras conhecidas na literatura são discutidas.

### 2.2.1.1 Operador de Prewitt

Para o operador de Prewitt [PRA 91], as máscaras  $M_x$  e  $M_y$  têm tamanho  $(2L + 1) \times (2L + 1)$ . Para  $L = 1$ , são obtidas máscaras  $3 \times 3$ , dadas por

$$M_x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } M_y = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

À medida que o tamanho  $2L + 1$  da máscara de Prewitt aumenta, a suavização introduzida pela máscara também aumenta. Como consequência, o número de falsas bordas diminui, porém algumas bordas de baixo contraste podem ser perdidas no processo de detecção, e também são introduzidas distorções nas formas dos objetos da imagem.

Para avaliar a detecção de bordas baseada no operador de Prewitt, considere a Figura 2.1. À esquerda, a imagem *peppers* com ruído, de tamanho  $256 \times 256$  pixels, é mostrada. No centro, o mapa de bordas obtido com a máscara de Prewitt de tamanho  $3 \times 3$  é mostrado, e à direita a máscara de Prewitt de tamanho  $5 \times 5$  é utilizada. Nota-se que, à medida que o tamanho da máscara aumenta, a quantidade de falsas bordas diminui, porém alguns detalhes são perdidos.

### 2.2.1.2 Operador de Sobel

O operador de Sobel [DAV 75] utiliza como máscaras as seguintes matrizes (caso  $3 \times 3$ ):

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } M_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

As máscaras digitais  $M_x$  e  $M_y$  podem ser rotacionadas para que sejam obtidos os detalhes nas direções  $45^\circ$  e  $135^\circ$  ao invés das tradicionais direções  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Por

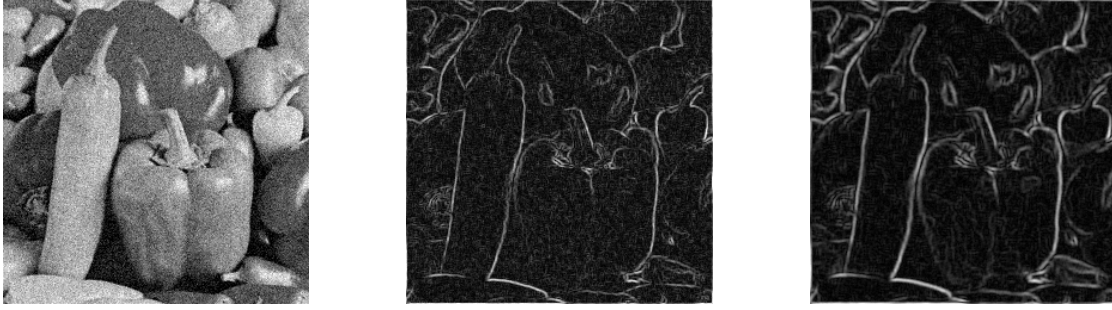


FIGURA 2.1 - Esquerda: imagem original. Centro: operador de Prewitt de tamanho  $3 \times 3$ . Direita: operador de Prewitt de tamanho  $5 \times 5$ .

exemplo, filtros de Sobel rotacionados de tamanho  $3 \times 3$  são dados por

$$M_{d_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

O operador de Sobel atribui pesos maiores no cálculo das diferenças horizontais e verticais (máscaras  $M_x$  e  $M_y$ ). Como consequência, as bordas são levemente realçadas com relação ao operador de Prewitt, embora a filtragem do ruído introduzida pela máscara não seja tão eficiente. A diferença visual entre os resultados produzidos pelas duas técnicas não é significativa.

## 2.2.2 Operador de Marr-Hildreth

Marr e Hildreth [MAR 79] propuseram um esquema para detecção de bordas baseado em variações da intensidade através da utilização de um filtro ótimo, segundo critérios específicos. Marr e Hildreth buscavam um filtro que satisfizesse basicamente duas condições: 1) ser aproximadamente banda-limitada no espectro de frequência; 2) ser suave, e ter boa localização no domínio espacial. Apesar de essas duas condições serem conflitantes (pelo princípio da incerteza), o formato da máscara (pesos) que otimiza essa relação é o da Gaussiana

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}. \quad (2.7)$$

Quando há uma variação brusca de intensidade, um pico respectivo na primeira derivada direcional pode ser observado. Equivalentemente, um cruzamento de zero ocorre na segunda derivada direcional da intensidade [MAR 76, MAR 79a]. Devido à associatividade da convolução, o problema acima se reduz a calcular os cruzamentos de zero de

$$h(x, y) = D^2 G(x, y) * f(x, y), \quad (2.8)$$

onde  $f(x, y)$  representa a imagem, ‘\*’ denota a convolução, e  $D^2$  denota a derivada segunda em uma certa direção.



A orientação da derivada direcional deve coincidir com a orientação local dos cruzamentos de zero. Assumindo o princípio das variações lineares<sup>2</sup>, Marr e Hildreth mostraram que um operador independente de orientação (o Laplaciano da Gaussiana, ou  $LoG$ ) pode ser utilizado ao invés da derivada direcional, diminuindo o custo computacional do método. Esse operador é dado por

$$\nabla^2 G(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}. \quad (2.9)$$

As bordas são então definidas como os cruzamentos de zero de

$$f(x, y) * \nabla^2 G(x, y). \quad (2.10)$$

O parâmetro  $\sigma$  da Gaussiana está relacionado com a escala em que as bordas serão detectadas. Aumentando o valor de  $\sigma$ , uma resolução menor é selecionada, e geralmente menos bordas são detectadas (pois as bordas associadas ao ruído e a pequenas estruturas tendem a desaparecer).

No caso de imagens digitais  $f[n, m]$ , o Laplaciano da Gaussiana (2.9) pode ser discretizado via [JAI 89]

$$\nabla^2 G[n, m] = c \left[ 1 - \frac{n^2 + m^2}{2\sigma^2} \right] e^{-(n^2+m^2)/2\sigma^2}, \quad (2.11)$$

onde  $c$  é uma constante que normaliza a soma dos elementos de  $\nabla^2 G[n, m]$  à unidade.

Figura 2.2 mostra o desempenho do método de Marr-Hildreth. À esquerda, é mostrada a imagem *peppers* com ruído, de tamanho  $256 \times 256$  pixels. As duas imagens seguintes mostram as bordas detectadas, utilizando respectivamente  $\sigma = 2$  e  $\sigma = 4$  pixels como desvio padrão da Gaussiana. Como a imagem original é ruidosa, muitas falsas bordas foram detectadas quando  $\sigma = 2$ . Para  $\sigma = 4$ , o número de falsas bordas diminuiu bastante, mas o resultado ainda é insatisfatório. Para valores maiores de  $\sigma$ , o grau de filtragem aumenta muito, e os contornos das bordas ficam bastante deformados.

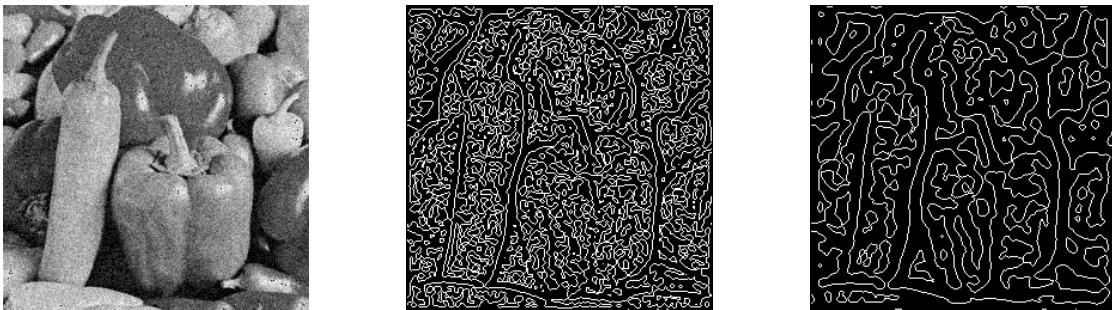


FIGURA 2.2 - Esquerda: imagem original. Centro: detector de Marr-Hildreth, usando  $\sigma = 2$ . Direita: detector de Marr-Hildreth, usando  $\sigma = 4$ .

<sup>2</sup>A variação das intensidades próximas e paralelas à linha dos cruzamentos de zero devem ser localmente lineares [MAR 79]

### 2.2.3 Detector de Bordas de Canny

Canny [CAN 86] propôs um método para detecção de bordas baseado na minimização de alguns critérios de erro. Em uma dimensão, considera-se um sinal  $f(x)$  formado por bordas em degrau e contaminado com ruído branco aditivo. O sinal  $f(x)$  é então convolvido com um filtro  $g(x)$ , de tal forma que os máximos locais da convolução correspondem às bordas do sinal  $f(x)$ . A escolha do filtro  $g(x)$  para a convolução deve obedecer três princípios básicos:

1. boa detecção: o detector de bordas deve ter baixa probabilidade de responder a falsas bordas e/ou falhar em detectar bordas verdadeiras;
2. boa localização: as bordas detectadas devem estar o mais próximo possível da localização real das bordas na imagem;
3. resposta única: o detector deve fornecer apenas uma resposta para cada borda.

Canny incorporou esses três princípios em um problema de minimização de funcionais, cuja solução é o filtro ótimo  $g(x)$ . A forma explícita do filtro  $g(x)$  é difícil de ser achada, mas para o caso de bordas em degrau, a função  $g(x)$  pode ser aproximada como a derivada primeira de uma Gaussiana  $G'(x)$ , onde

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (2.12)$$

e  $\sigma$  é o desvio padrão da Gaussiana.

Devido ao ruído, alguns máximos locais da convolução estão associados a falsas bordas. Segundo o modelo de Canny, as respostas ao ruído terão valores pequenos, e seguirão uma distribuição Gaussiana, enquanto que as respostas às bordas terão valores maiores, ocorrendo ocasionalmente. Dessa forma, pode-se estimar um limiar  $T$  através do histograma das respostas do detector de Canny, e respostas cujo valor é menor do que  $T$  são descartadas.

**Duas dimensões:** para sinais em duas dimensões (imagens), bordas são caracterizadas por sua posição e orientação. A orientação de uma borda é definida como a direção tangente ao contorno formado pelas bordas no plano. Para detectar bordas em uma direção particular, pode-se convolver a imagem com uma Gaussiana simétrica bidimensional (equação (2.7)), e depois diferenciar o resultado na direção normal à direção da borda. A derivada da Gaussiana na direção  $\eta$  é dada por

$$G_\eta = \frac{\partial G}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla G, \quad (2.13)$$

onde  $\nabla$  denota o operador gradiente e ' $\cdot$ ' denota o produto escalar de vetores. Com essa notação, uma borda é definida como o máximo local do operador  $G_\eta$  aplicado à imagem. Devido à associatividade da convolução, pode-se primeiramente aplicar a convolução com a Gaussiana  $G(x, y)$ , e após calcular a derivada na direção  $\eta$ . Assim como no caso unidimensional, um limiar  $T$  deve ser aplicado para minimizar falsas respostas. Na prática, Canny utilizou um processo de histerese, na qual dois limiares são utilizados para evitar contornos com lacunas. Na histerese, um segmento do contorno é mantido se as respostas a todos os pixels do contorno tem magnitude

maior do que um limiar  $T_1$ , e ao menos uma parte do segmento tem magnitude superior a um segundo limiar  $T_2$  (com  $T_1 \leq T_2$ ).

Deve-se notar que a escolha do parâmetro  $\sigma$  está associada à escala dos objetos cujas bordas serão detectadas. A utilização de valores pequenos para  $\sigma$  resulta na análise da imagem em resoluções finas, e então as bordas associadas a estruturas menores são detectadas, embora a sensibilidade ao ruído seja maior. Por outro lado, valores maiores de  $\sigma$  suavizam a imagem (pois a imagem é analisada em resoluções mais baixas), mas algumas bordas verdadeiras associadas a pequenos objetos podem ser perdidas no processo de detecção. Witkin [WIT 83] analisou o problema da detecção de bordas em múltiplas resoluções, criando uma estrutura de árvore que representa as bordas nas diferentes resoluções.

O resultado do detector de Canny pode ser avaliado na Figura 2.3. À esquerda, a imagem *peppers* contaminada por ruído é mostrada. No centro, o resultado do detector de Canny, usando  $\sigma = 1$  pixel. À direita,  $\sigma = 2$  pixels foi utilizado como parâmetro. Pode-se perceber que, à medida que  $\sigma$  aumenta, o número de falsas bordas diminui, mas algumas bordas verdadeiras também desaparecem e falhas nos contornos aparecem.

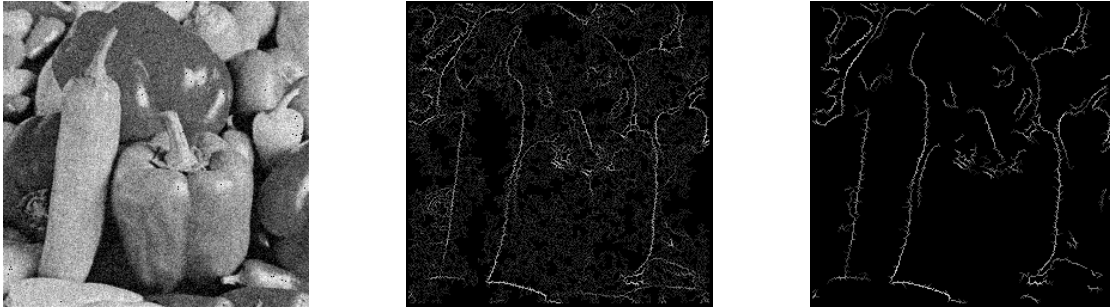


FIGURA 2.3 - Esquerda: imagem original. Centro: detector de Canny, usando  $\sigma = 1$ . Direita: detector de Canny, usando  $\sigma = 2$ .

## 2.2.4 Outros Detectores de Bordas

Os métodos descritos anteriormente estão dentre os mais utilizados para detecção de bordas em imagens. Entretanto, o problema de detecção de bordas não foi satisfatoriamente resolvido, e continua sendo tópico de pesquisa, como exemplificam as referências [SAI 90, HAR 90, PET 91, IVE 95, ELD 98, FU 2000, GER 2001].

Também há uma série de técnicas propostas na literatura para validar e/ou unir bordas em contornos. Por exemplo, Parent e Zucker [PAR 89] impuseram restrições geométricas (como comparação da tangente e da curvatura) para fortalecer bordas com continuidade geométrica.

## 2.3 Métodos para Filtragem de Imagens

### 2.3.1 Supressão do Ruído Através de Filtros Espaciais

Uma das abordagens mais comuns para supressão de ruído em imagens digitais é a realização de operações na vizinhança de cada pixel. Geralmente, a imagem é processada através de um filtro cuja resposta ao impulso é finita (filtro FIR), chamado de *máscara espacial*. Matematicamente, a filtragem linear (operação de convolução discreta em duas dimensões) é expressa como

$$g[n, m] = f[n, m] * h[n, m] = \sum_{(k,l) \in W} h[k, l] f[n - k, m - l], \quad (2.14)$$

onde  $f[n, m]$  e  $g[n, m]$  representam as imagens original e filtrada, respectivamente, e  $h[k, l]$  representa a resposta ao impulso do filtro digital com suporte  $W$ .

A *transformada discreta de Fourier* (DFT) mapeia um sinal discreto do domínio espacial para o espectral, e vice-versa (através da transformada inversa) [OPP 89]. A escolha dos coeficientes do filtro  $h[n, m]$  depende das frequências que se deseja atenuar na imagem original  $f[n, m]$ . Geralmente, o ruído está associado a altas frequências no domínio espectral, então o filtro  $h[k, l]$  deve ser do tipo passa-baixas. Como a convolução no domínio espacial corresponde a uma simples multiplicação no domínio da frequência, é mais vantajoso realizar a filtragem diretamente no domínio da frequência quando filtros digitais  $h[n, m]$  com suporte grande (i.e. com muitos coeficientes não nulos) são utilizados. Além disso, há uma implementação eficiente do ponto de vista computacional para a DFT, chamada de *transformada rápida de Fourier* (FFT). Também deve ser dito que a convolução com filtros espaciais também pode ser utilizada para o realce de bordas, com a escolha de um filtro passa-altas apropriado [JAI 89].

O tamanho do filtro e o valor de seus coeficientes têm influência direta no resultado da convolução. Filtros com comprimentos maiores (ou seja, máscaras espaciais com um número maior de coeficientes) podem melhor aproximar um filtro passa-baixas ideal (maior atenuação das altas frequências, e menor banda de transição), introduzindo uma maior atenuação do ruído na imagem. Entretanto, as bordas são mais borradas e pequenos detalhes na imagem tendem a desaparecer. De modo geral, as técnicas baseadas em convolução com filtros espaciais (equação (2.14)) acabam suavizando as bordas também, independente do tipo e tamanho do filtro. Isso pode ser explicado pelo fato que, por serem utilizados filtros passa-baixas, os componentes de alta frequência da imagem original serão removidos (ou atenuados). Como os componentes de alta frequência são responsáveis pela definição das bordas, esses serão certamente afetadas no processo de filtragem.

Outro ponto a ser notado sobre filtros espaciais se refere às condições de contorno. A máscara espacial requer uma vizinhança em torno do pixel em consideração, o que não é possível nas bordas laterais da imagem. Quanto maior o tamanho da máscara, maior será o problema com as bordas laterais da imagem. Na prática, a imagem original pode ser estendida (por exemplo, simetricamente), e os problemas nos extremos da imagem são atenuados.

A seguir, alguns filtros espaciais são apresentados [JAI 89]. Para uma discussão mais detalhada sobre essa classe de filtros, recomenda-se a leitura do texto de Levine [LEV 85].

### 2.3.1.1 Filtro de Média

Este filtro consiste em obter a média dos pixels em uma dada vizinhança em torno de cada pixel. Tipicamente, tal filtro pode ser representado pela máscara

$$H_1 = \frac{1}{N^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (2.15)$$

onde  $N$  representa o tamanho da região na qual a média é calculada, e geralmente é um número ímpar (para que haja simetria em torno do pixel em consideração, que está associado ao elemento central da máscara). Quanto maior o valor de  $N$ , maior a atenuação do ruído, e maior é o borramento das bordas.

### 2.3.1.2 Filtro Gaussiano

Um dos filtros mais utilizados para atenuação de ruído é o baseado na distribuição Gaussiana. Em duas dimensões, essa distribuição é dada pela equação (2.7). A transformada de Fourier de uma Gaussiana também é uma Gaussiana, indicando que essa distribuição pode ser utilizada como um filtro passa-baixas. Quanto maior o valor de  $\sigma$ , menor será a frequência de corte do filtro, e conseqüentemente maior será a filtragem introduzida.

Para imagens digitais, a função dada em (2.7) deve ser discretizada. As máscaras correspondentes a essa discretização (obtidas através da função `fspecial` do software matemático `MATLAB`) nos tamanhos  $3 \times 3$  e  $5 \times 5$  (correspondendo a  $\sigma = 1$  e  $\sigma = 2$ , respectivamente) são mostradas abaixo:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0113 & 0.0838 & 0.0113 \\ 0.0838 & 0.6193 & 0.0838 \\ 0.0113 & 0.0838 & 0.0113 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.0232 & 0.0338 & 0.0383 & 0.0338 & 0.0232 \\ 0.0338 & 0.0492 & 0.0558 & 0.0492 & 0.0338 \\ 0.0383 & 0.0558 & 0.0632 & 0.0558 & 0.0383 \\ 0.0338 & 0.0492 & 0.0558 & 0.0492 & 0.0338 \\ 0.0232 & 0.0338 & 0.0383 & 0.0338 & 0.0232 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Os filtros de média e Gaussiano são embasados no mesmo princípio (ambos são filtros passa-baixas). A diferença entre esses filtros está na frequência de corte, na forma da banda passante e no tamanho da banda de transição do filtro. Em geral, o filtro Gaussiano tende a introduzir menos distorções na imagem suavizada.

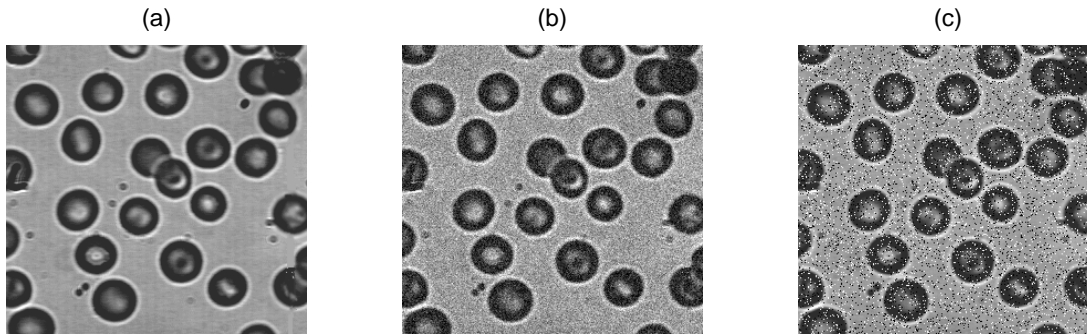


FIGURA 2.4 - (a) Imagem *blood* original. (b) Contaminação por ruído Gaussiano aditivo. (c) Contaminação por ruído impulsivo.

### 2.3.1.3 Filtro de Mediana

Ao contrário dos três filtros espaciais descritos acima, o filtro de mediana [AHO 74, PRA 91] é não-linear, e então não pode ser representado pela convolução (2.14). Nesse filtro, cada pixel da imagem ruidosa é substituído pela mediana dos pixels em uma dada vizinhança, ou seja:

$$g[n, m] = \text{mediana}\{f[n - k, m - l], (k, l) \in W\}, \quad (2.17)$$

onde  $W$  indica a região onde a mediana é calculada. Na prática, o algoritmo ordena os pixels dentro dessa região em ordem crescente (ou decrescente), e retorna o valor central da ordenação. Normalmente, a região  $W$  é quadrada, e contém um número ímpar de pixels, para que haja somente um valor central.

O filtro da mediana tende a preservar bordas, e tem um bom desempenho para remover segmentos ou pixels isolados, preservando a resolução espacial. Ruído do tipo impulsivo é bem tratado por esse filtro. Já quando o ruído é Gaussiano aditivo, seu desempenho não é satisfatório, pois o ruído é pouco atenuado.

Como exemplo, considere-se a Figura 2.4. Figura 2.4(a) mostra a imagem *blood* original, e nas Figuras 2.4(b) e 2.4(c) são mostradas, respectivamente, a contaminação por ruído Gaussiano aditivo e ruído impulsivo.

Figuras 2.5 e 2.6 mostram, respectivamente, os resultados da filtragem das imagens *blood* ruidosas pelos métodos da média e da mediana. Na primeira linha dessas Figuras, foi filtrada a imagem mostrada em 2.4 (b), e na segunda, a imagem mostrada em 2.4 (c). Da esquerda para a direita, são utilizadas máscaras de tamanho  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ . Percebe-se que o ruído impulsivo é menos atenuado com o filtro da média, e que as bordas são gradativamente borradas quando o tamanho da máscara aumenta. Para o filtro da mediana, o ruído impulsivo foi eficazmente atenuado, mas o ruído Gaussiano aditivo não foi eficazmente reduzido.

O filtro de mediana e outros filtros espaciais não-lineares são discutidos com maiores detalhes em [PIT 90].

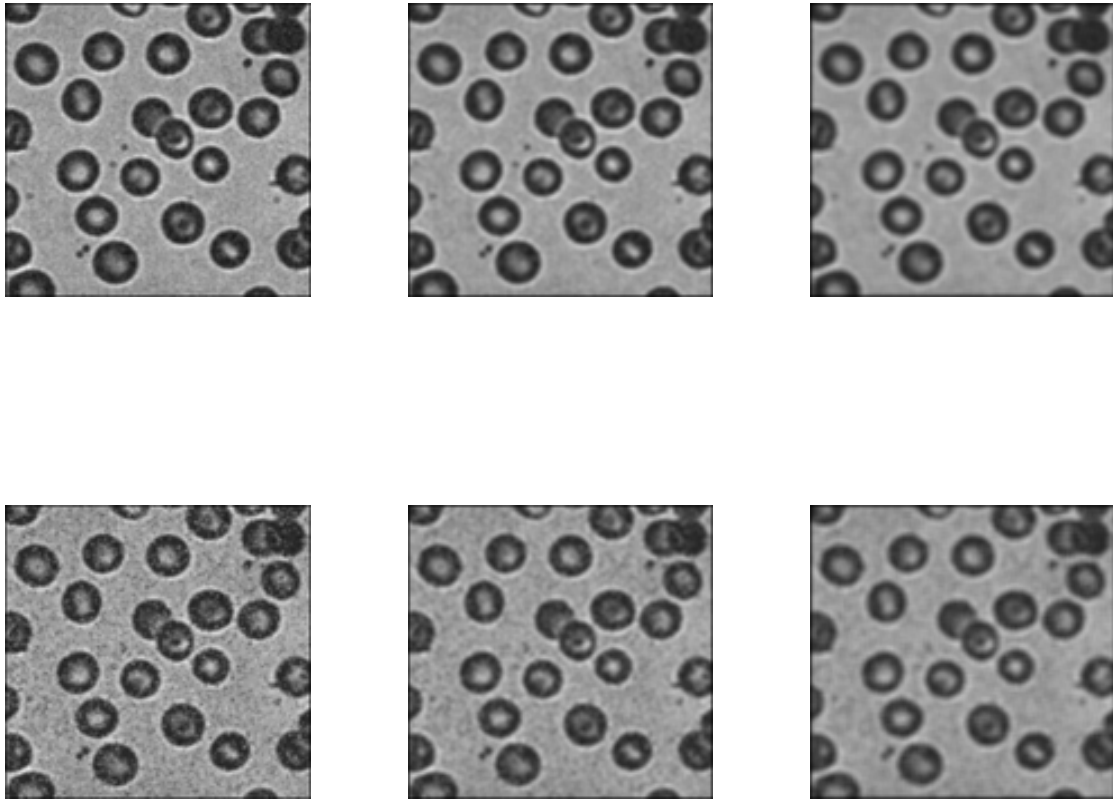


FIGURA 2.5 - Primeira linha: filtragem da imagem 2.4 (b) pelo método da média. Segunda linha: filtragem da imagem 2.4 (c) pelo método da média. Da esquerda para a direita, são utilizadas máscaras de tamanhos  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ .

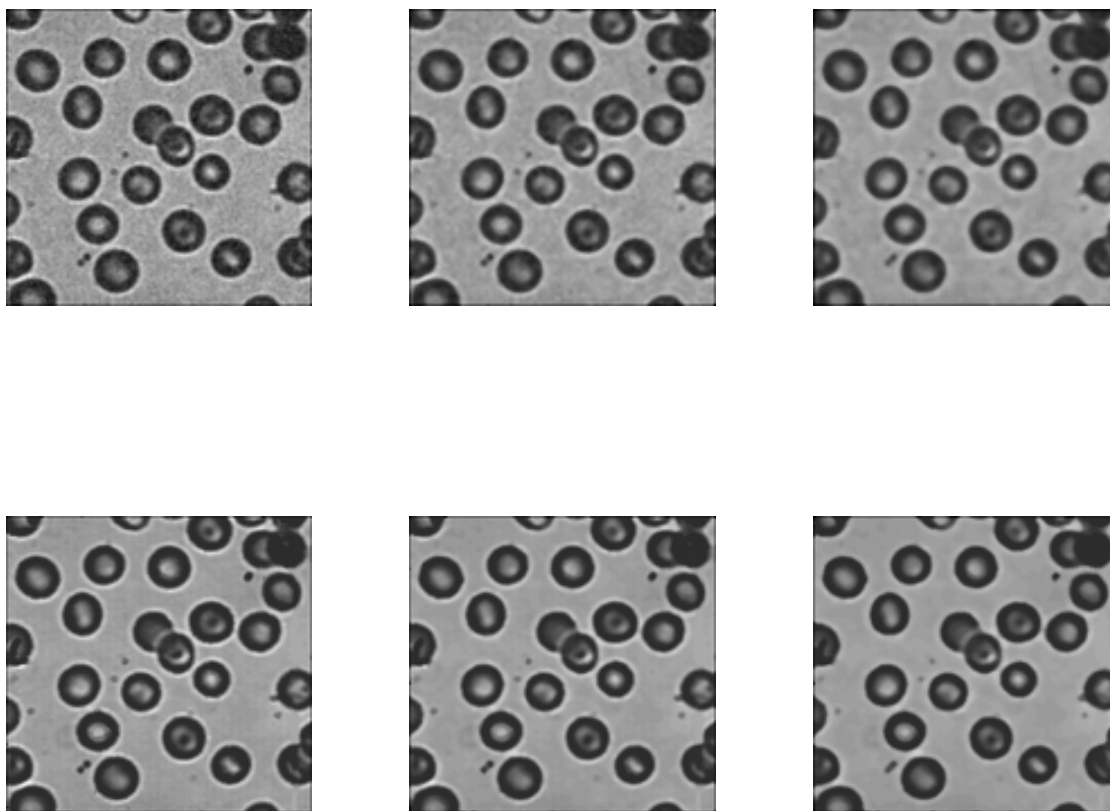


FIGURA 2.6 - Primeira linha: filtragem da imagem 2.4 (b) pelo método da mediana. Segunda linha: filtragem da imagem 2.4 (c) pelo método da mediana. Da esquerda para a direita, são utilizadas máscaras de tamanhos  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ .



## 2.3.2 Métodos de Filtragem com Preservação das Bordas Baseados em Minimização de Funcionais e Equações Diferenciais Parciais

Uma outra abordagem para atenuar ruídos em imagens preservando as bordas utiliza a minimização de funcionais e equações diferenciais parciais. Várias equações diferenciais têm propriedades que podem ser adaptadas para o processamento de imagens. Já problemas de minimização de funcionais podem incorporar otimalidades, e acabam sendo resolvidos através de equações diferenciais parciais. Algumas técnicas são apresentadas a seguir.

### 2.3.2.1 Equação do Calor e Difusão Anisotrópica

Considere-se a função  $u$ , que representa uma imagem analógica monocromática, onde o valor  $u(x, y)$  retorna a intensidade luminosa no ponto  $(x, y)$ . Sabe-se que, sendo  $G_\sigma(x, y)$  uma Gaussiana com desvio padrão  $\sigma$ , sua convolução com a imagem  $u$  resulta na filtragem de  $u$ . Quanto maior o valor de  $\sigma$ , maior a filtragem aplicada, e também maior será o borramento das bordas.

Koenderink [KOE 84] foi um dos primeiros pesquisadores a explorar a relação entre a equação do calor e a convolução com uma Gaussiana para filtragem de imagens. A equação do calor em duas dimensões é dada por

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} = \operatorname{div}(\nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde ‘div’ representa a divergência de um campo vetorial. A solução da equação (2.18) pode ser obtida analiticamente, sendo expressa através da convolução

$$u(x, y, t) = G(x, y, t) * u_0(x, y), \quad (2.19)$$

onde  $G(x, y, t)$  é dada por

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-(x^2+y^2)/4t}. \quad (2.20)$$

Pode-se notar que a função  $G(x, y, t)$  é uma Gaussiana, e seu desvio padrão  $\sigma$  está relacionado com o parâmetro  $t$  de evolução temporal da solução ( $\sigma = \sqrt{2t}$ ). Considerando a solução  $u(x, y, t)$  como uma seqüência de imagens dependentes do parâmetro  $t$ , percebe-se que o grau de filtragem aplicado à imagem inicial  $u_0(x, y)$  aumenta à medida que  $t$  cresce. Em outras palavras, resolver a equação diferencial (2.18) equivale à convolução com uma Gaussiana, cujo desvio padrão aumenta à medida que o tempo  $t$  aumenta. Na verdade, a equação do calor aplicada ao processamento de imagens foi uma das primeiras técnicas de filtragem hierárquica de imagens, ou seja, filtragem de imagens em múltiplas resoluções. Tais técnicas parecem adequadas a problemas de processamento de imagens, já que há experimentos mostrando que a informação visual em animais é processada em paralelo por canais sintonizados em diferentes orientações e frequências [CAM 68, MAR 82].

Como já mencionado, a simples convolução com uma Gaussiana acaba borrando as bordas, por se tratar de um filtro passa-baixas. Uma modificação da equação do calor, proposta por Perona e Malik [PER 90], é a difusão anisotrópica:

$$u_t = \operatorname{div} (c(|\nabla u|)\nabla u), \quad (2.21)$$

onde  $c(s)$  é uma função não-crescente com  $c(0) = 1$ ,  $c(s) \geq 0$ , e  $\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = 0$ . Um exemplo típico para  $c(s)$  é dado por

$$c(s) = \frac{1}{1 + (s/T)^2}, \quad (2.22)$$

onde  $T$  é um limiar. Pode-se notar que, em pontos onde o módulo do gradiente  $|\nabla u|$  é grande, o valor de  $\operatorname{div} (c(|\nabla u|)\nabla u)$  será pequeno. Dessa forma, nas proximidades das bordas (onde  $|\nabla u|$  é grande) a função  $u(x, y, t)$  será pouco modificada, acarretando menos borramento nas bordas. Para a aplicação da difusão anisotrópica em imagens digitais, a equação (2.21) deve ser discretizada, com a aproximação das derivadas parciais através de diferenças finitas. Tal equação discretizada deve então ser resolvida numericamente, pois não há uma solução analítica conhecida para a equação (2.21). Nitzberg e Shiota [NIT 92] propuseram uma técnica similar, utilizando equações difusivas não-lineares para realçar bordas e quinas em imagens. Mais recentemente, Fischl e Schwartz [FIS 99] propuseram uma alternativa para reduzir o custo computacional da difusão anisotrópica.

### 2.3.2.2 Difusão Ortogonal e Filtro de Choque Combinados

A idéia básica do método proposto por Alvarez e colaboradores [ALV 92] é combinar um termo difusivo (similar à equação do calor) na direção ortogonal à do gradiente (para a filtragem), e um termo que cria um choque na direção do gradiente (para salientar a borda).

Primeiramente, considere-se uma família de sinais unidimensionais  $u(x, t)$ , onde  $t$  representa a evolução do sinal ao longo do tempo. Equações hiperbólicas não-lineares podem ser aplicadas para criar ondas de choque nos cruzamentos de zero de  $u_{xx}$  (Figura 2.7), que correspondem a bordas em degrau. Um desses filtros que criam ondas de choque, introduzido por Osher e Rudin [OSH 90], é dado por

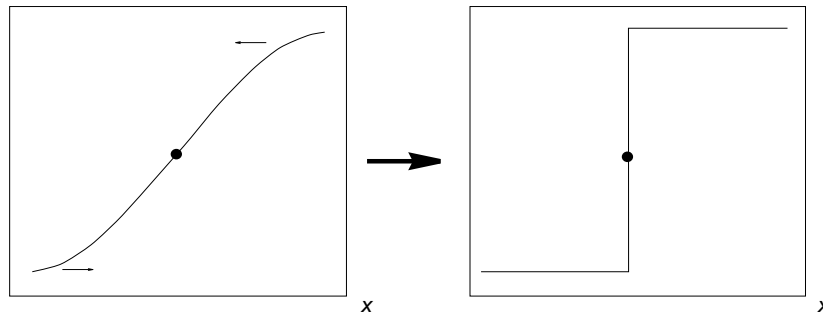


FIGURA 2.7 - Criação de uma onda de choque: à medida que o parâmetro temporal  $t$  evolui, pontos da onda  $u(x, t)$  se movem com velocidades diferentes (à esquerda). O resultado é a criação de uma onda de choque nos cruzamentos de zero de  $u_{xx}(x, t)$  (à direita).

$$u_t + F(u_{xx})|u_x| = 0, \quad (2.23)$$

onde a função  $F$  satisfaz  $vF(v) \geq 0$ . Tal modelo cria choques em todos os cruzamentos de zero de  $u_{xx}$ , produzindo vários choques devido ao ruído da imagem. Esse modelo pode ser modificado pela introdução de um filtro Gaussiano  $G_\sigma$ , para minimizar a ocorrência de choques espúrios. A equação correspondente fica

$$u_t + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x) = 0, \quad (2.24)$$

onde a nova função  $F$  satisfaz  $F(v, w)vw \geq 0$ .

Para o caso bidimensional, deseja-se filtrar as regiões contendo ruído na imagem e ao mesmo tempo ressaltar as bordas. O realce das bordas é obtido utilizando a equação (2.24) na direção do gradiente. A filtragem pode ser obtida através da equação do calor unidimensional na direção local do contorno (ou seja, perpendicular à direção do gradiente). Tal equação pode ser escrita como

$$u_t = u_{\xi\xi}, \quad (2.25)$$

onde  $\xi$  denota a direção perpendicular ao gradiente. A difusão anisotrópica, dada pela equação (2.21), aplicada na direção das bordas, também pode ser utilizada para redução do ruído. Entretanto, Alvarez *et al.* [ALV 92] perceberam que essa equação é instável na presença de ruído, e propuseram uma modificação, dada por

$$u_t = c(|\nabla(G_\sigma * u)|)u_{\xi\xi}, \quad (2.26)$$

onde  $\xi$  é a direção perpendicular ao gradiente.

Combinando o termo de choque unidimensional na direção do gradiente com o termo de filtragem na direção local do contorno, obtém-se

$$u_t = Cu_{\xi\xi} - u_\eta F(G_\sigma * u_{\eta\eta}, G_\sigma * u_\eta), \quad (2.27)$$

onde  $C$  é um parâmetro ajustável,  $\eta$  é a direção de  $\nabla u$ ,  $\xi$  é a direção ortogonal à  $\eta$ ,  $F(v, w)$  satisfaz  $F(v, w)vw \geq 0$ , e  $G_\sigma(x, y)$  é uma família de filtros Gaussianos bidimensionais com desvio padrão  $\sigma$ . O termo  $u_{\xi\xi}$ , que resulta em filtragem na direção ortogonal ao gradiente, pode ser trocado por outros filtros semelhantes. Por exemplo, a equação (2.26) representa um filtro com difusão anisotrópica incorporada. À medida que o parâmetro temporal  $t$  cresce, o ruído na imagem deve diminuir, enquanto que as bordas devem permanecer intactas (ou serem realçadas). Assim como para a difusão anisotrópica, um método numérico é necessário para resolver a equação (2.27).

### 2.3.2.3 Método de Variação Total Não Linear

Uma técnica variacional para redução do ruído foi proposta por Rudin *et al.* [RUD 92]. Considere-se que a função  $u_0(x, y)$  denota a intensidade do pixel  $(x, y)$  em uma imagem com ruído, para  $(x, y) \in \Omega$  ( $\Omega$  é usualmente uma região retangular do plano, representando o domínio de definição da imagem). Denota-se  $u(x, y)$  a imagem desejada sem ruído, e assume-se que o ruído é aditivo e Gaussiano. Então, pode-se escrever

$$u_0(x, y) = u(x, y) + n(x, y), \quad (2.28)$$

onde  $n(x, y)$  é ruído Gaussiano aditivo com média zero e variância  $\sigma^2$ .

O objetivo do método é reconstruir  $u$  a partir  $u_0$ . Para tal, é construído um funcional cuja minimização retorna uma estimativa para a imagem original  $u$ . Essa função deve ter a mesma média que  $u_0$ , e a imagem erro  $u - u_0$  deve ter variância  $\sigma^2$ . Rudin *et al.* [RUD 92] propuseram a seguinte minimização:

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \\ \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_0 \\ \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u - u_0)^2 = \sigma^2 \end{cases} . \quad (2.29)$$

Para resolver esse problema de minimização, é construída uma equação diferencial parcial parabólica com um parâmetro de evolução temporal  $t$ , dada por

$$\begin{cases} u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) - \lambda(u - u_0), \text{ se } (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, 0) \text{ é dada,} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ se } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.30)$$

onde  $\eta$  é a direção normal na fronteira da região  $\Omega$ , e  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = -\frac{1}{2\sigma^2} \int \left[ \sqrt{u_x^2 + u_y^2} - \left( \frac{(u_0)_x u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} + \frac{(u_0)_y u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) \right] dx dy . \quad (2.31)$$

Finalmente, a solução de (2.29), que corresponde à imagem filtrada, é obtida quando a função  $u(x, y, t)$  atinge seu estado estacionário, ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$ . Pode-se escolher a função  $u_0(x, y)$  como uma estimativa inicial para  $u(x, y, 0)$ , necessária na equação (2.30)

Figura 2.8(a) mostra a imagem *house* original, e Figura 2.8(b) mostra a mesma imagem contaminada por ruído Gaussiano aditivo (PSNR = 16,11 dB). Figura 2.9 mostra várias iterações do método acima para a filtragem da imagem *house* ruidosa. Nota-se que o ruído é gradativamente eliminado à medida que o tempo  $t$  aumenta, enquanto as bordas são pouco afetadas.



FIGURA 2.8 - (a) Imagem *house* original. (b) Imagem *house* contaminada por ruído (PSNR = 16,11 dB).

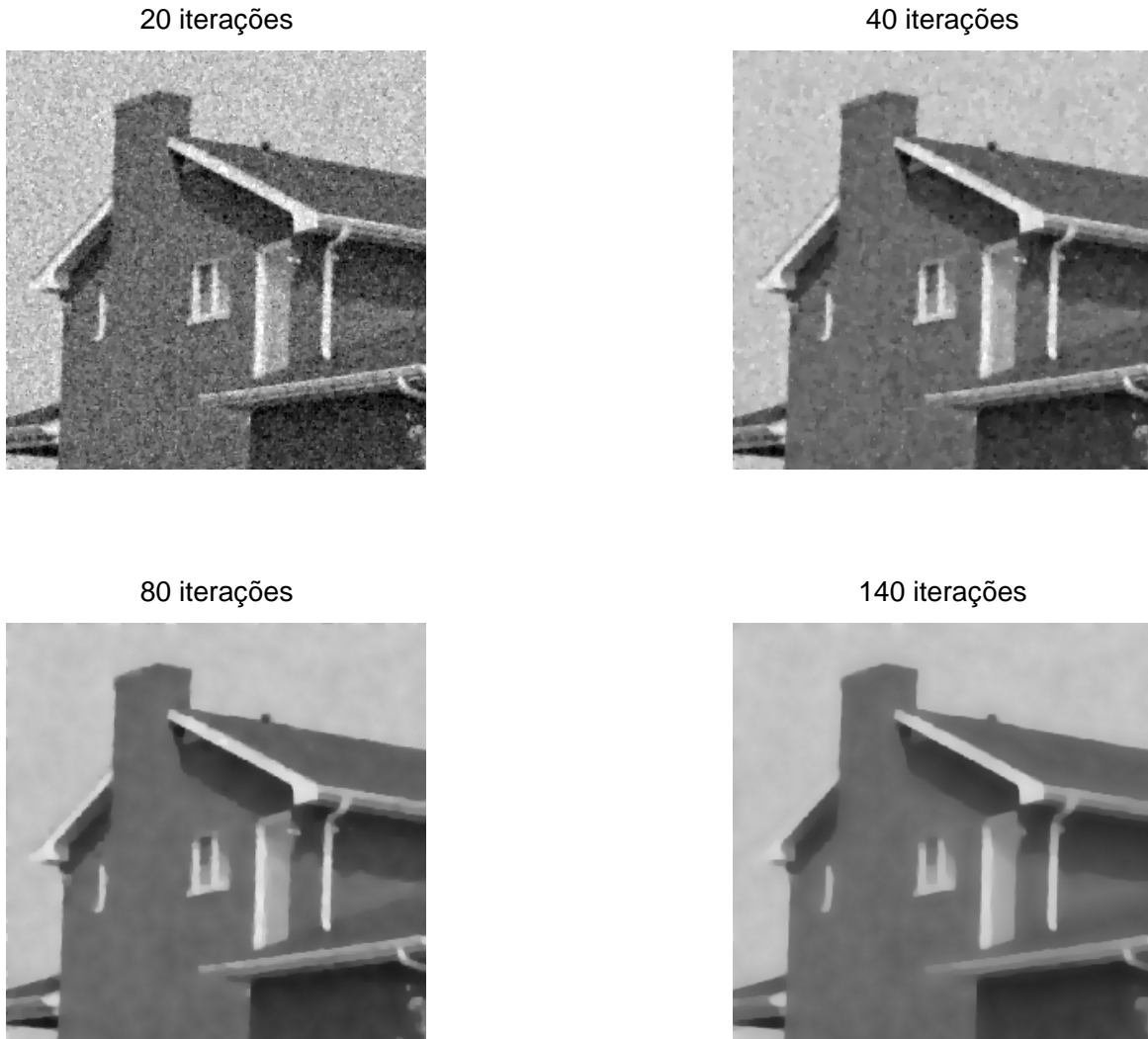


FIGURA 2.9 - Etapas da filtragem no método da variação total não linear para a imagem *house* ruidosa.

#### 2.3.2.4 Minimização de Funcionais do Gradiente

Tannenbaum *et al.* [TAN 96] propuseram a utilização de funcionais do gradiente da imagem para filtragem com preservação das bordas. Tal funcional é dado por

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|) d\Omega, \quad (2.32)$$

onde  $f(s) \geq 0$ ,  $f'(s) \geq 0$ ,  $f'(0) = 0$ , e  $u(x, y)$  representa a imagem a ser filtrada. Similar ao método da descida na direção do gradiente (*steepest direction descent*) [STR 86], o funcional  $E(u)$  será minimizado através de iterações que percorrem um caminho no sentido oposto ao do gradiente, através de uma equação diferencial parcial, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right). \quad (2.33)$$

Pode-se perceber que a equação (2.33) coincide com a difusão anisotrópica se a função  $c(s)$  dada na equação (2.22) satisfaz

$$c(s) = \frac{f'(s)}{s}. \quad (2.34)$$

Com a escolha de outras funções  $f(s)$ , novas técnicas de filtragem são obtidas. Uma alternativa à difusão anisotrópica, proposta por Tannenbaum e colaboradores, é utilizar uma função  $f$  que satisfaz [TAN 96]

$$f'(s) = \begin{cases} sp(T + \epsilon)^{p-1}/T, & \text{se } s < T \\ p(s + \epsilon)^{p-1}, & \text{se } s \geq T \end{cases}, \quad (2.35)$$

onde  $p$ ,  $T$  e  $\epsilon$  são parâmetros ajustáveis.

Para uma melhor compreensão da equação (2.33), pode-se expandir o membro da direita, obtendo-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 D_o + \lambda_2 D_g, \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{f'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}, \\ \lambda_2 &= f''(|\nabla u|), \\ D_o &= \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}, \\ D_g &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$D_o$  e  $D_g$  são, respectivamente, as derivadas de segunda ordem de  $u$  nas direções ortogonal e paralela ao gradiente. A equação (2.33) pode ser interpretada geometricamente, se a equação (2.36) for reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 \kappa |\nabla u| + \lambda_2 \kappa_{\perp} |\nabla u|, \quad (2.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}, \\ \kappa_{\perp} &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

e  $\kappa$  é a curvatura das curvas de nível de  $u$ .

Para a resolução numérica da equação (2.36), é necessária a discretização dessa equação. Tal discretização pode ser obtida aproximando a derivada temporal através de diferenças finitas ascendentes, e as derivadas espaciais através de diferenças centrais [STR 86].

### 2.3.2.5 Filtragem e Detecção de Bordas Utilizando Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Acopladas

Shah [SHA 91, SHA 92] e o grupo de Proesmans [PRO 93] propuseram a minimização simultânea de dois funcionais, resultando em filtragem e detecção de bordas. Nesses métodos, é dada uma imagem  $g$  contaminada com ruído, e se deseja obter a imagem filtrada  $f$  de tal maneira que um funcional de custo envolvendo  $g$  e  $f$  seja minimizado. A diferença básica entre o método em questão e os outros métodos

de minimização vistos neste trabalho é que uma segunda função  $v$  é utilizada. Tal função indica a probabilidade da existência de uma borda, e deve ser perto de 1 nas bordas e quase 0 nas regiões homogêneas da imagem. Na abordagem de Shah [SHA 91, SHA 92], se a imagem  $f$  é dada, o mapa de bordas  $v$  pode ser obtido pela minimização do seguinte funcional:

$$V_f(v) = \int_{\Omega} [\alpha(1-v)^2 |\nabla f| + \frac{\rho}{2} |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{2\rho}] dx dy, \quad (2.40)$$

onde  $\alpha$  e  $\rho$  são parâmetros ajustáveis. Por outro lado, quando  $v$  é dada, a imagem  $f$  pode ser obtida minimizando

$$F_v(f) = \int_{\Omega} [|\nabla f|^2 + \frac{1}{v^2 \sigma^2} (f-g)^2] dx dy, \quad (2.41)$$

onde  $\sigma$  é um parâmetro. Para resolver simultaneamente esses dois problemas de minimização, as equações de Euler-Lagrange associadas são calculadas, resultando no sistema de equações diferenciais parciais acopladas abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = v^2 \nabla^2 f - \frac{1}{\sigma^2} (f-g) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \nabla^2 v - \frac{v}{\rho} + 2\alpha(1-v) |\nabla f| \end{cases}, \quad (2.42)$$

onde  $\nabla^2$  representa o operador Laplaciano. Pode-se notar que, longe das bordas, o termo difusivo  $\nabla^2 f$  é atenuado por  $v \approx 0$  na primeira equação. Uma pequena modificação da equação (2.41) foi proposta pelo grupo de Proesmans [PRO 93]:

$$F_v(f) = \int_{\Omega} [|\nabla f|^2 + \frac{(1-v)^2}{\sigma^2} (f-g)^2] dx dy, \quad (2.43)$$

e o correspondente sistema de equações diferenciais parciais é então escrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla^2 f - \frac{(1-v)^2}{\sigma^2} (f-g) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \nabla^2 v - \frac{v}{\rho} + 2\alpha(1-v) |\nabla f| \end{cases}. \quad (2.44)$$

Uma variação da equação (2.44) pode ser obtida se a idéia da difusão anisotrópica for incorporada nos termos  $\nabla^2 f$  e  $\nabla^2 v$ , usando funções  $c_1(s)$  e  $c_2(s)$  similares à equação (2.22). O sistema resultante modificado é descrito por [PRO 93]

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \text{div}(c_1(|\nabla f|) \nabla f) - \frac{(1-v)^2}{\sigma^2} (f-g) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \text{div}(c_2(|\nabla v|) \nabla v) + \frac{1}{\rho} v + 2\alpha(1-v) |\nabla f| \end{cases}. \quad (2.45)$$

Um esquema numérico para a resolução da equação (2.45) pode utilizar diferenças finitas para discretizar as derivadas da equação, com diferenças ascendentes na derivada temporal e diferenças centrais para as derivadas espaciais [STR 86].

Figura 2.11 mostra algumas iterações desse método para a filtragem da imagem *house* ruidosa (Figura 2.8(b)). Nota-se que, à medida que o número de iterações aumenta, o ruído é gradativamente atenuado. Na Figura 2.10 é mostrado o mapa de bordas correspondente à função  $v$ , para algumas iterações. Pixels claros representam valores próximos de 1, e pixels escuros representam valores próximos de 0. Pode-se perceber que a função  $v$  realmente representa um mapa de bordas, cuja exatidão melhora quando o número de iterações aumenta. Para exemplificar o método, foram escolhidos como parâmetros  $\alpha = 0,125$ ,  $\rho = 0,2$  e  $\sigma = 2$ .

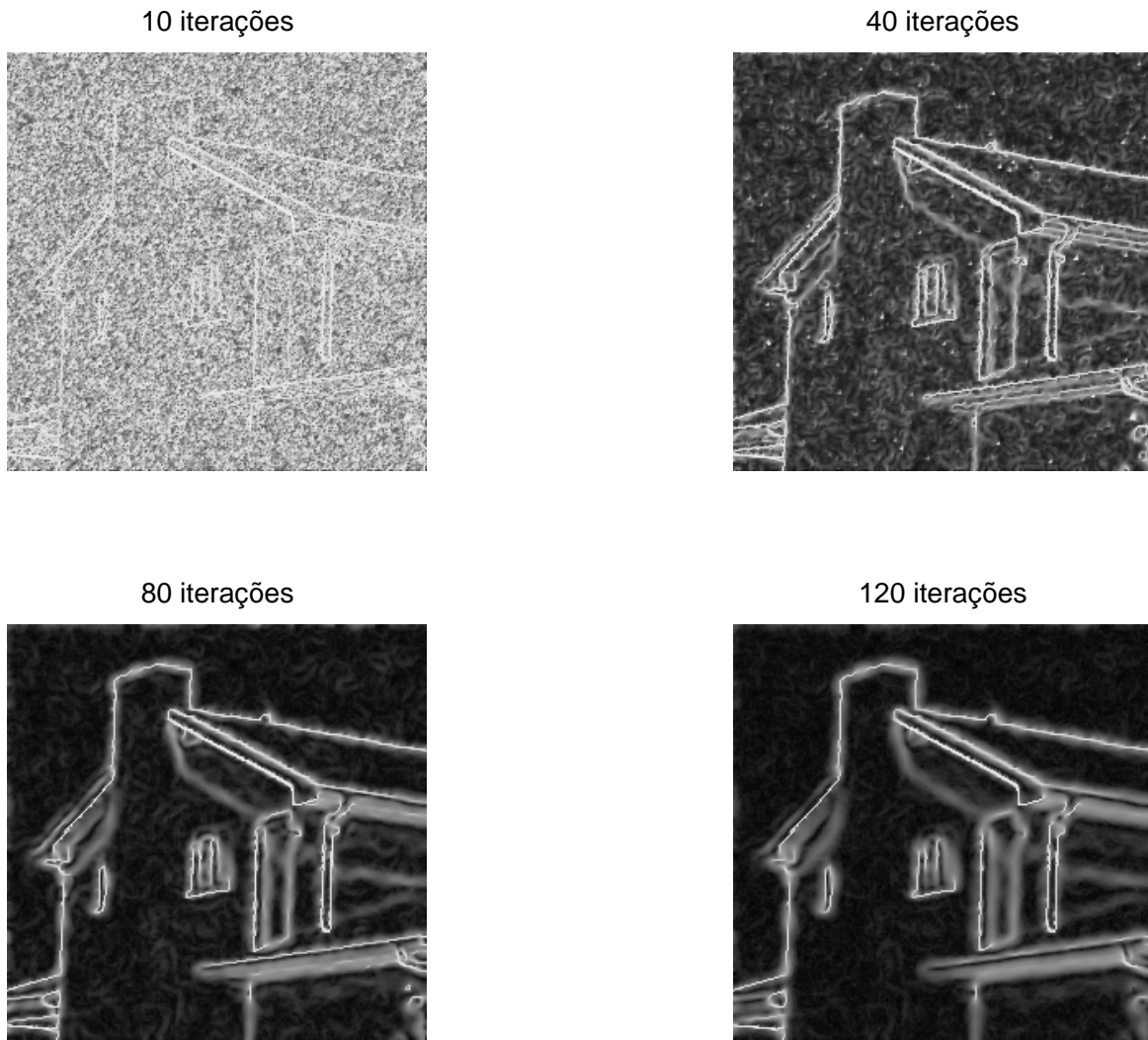


FIGURA 2.10 - Mapa de bordas da imagem *house* ruidosa, em várias etapas, utilizando o método de Proesmans *et al.* [PRO 93].

### 2.3.3 Outras Técnicas de Filtragem

Assim como o problema da detecção de bordas, o problema da supressão de ruído em imagens com preservação das bordas ainda não foi satisfatoriamente resolvido. As referências [BEG 97, ZHU 97, KAD 98, LIN 99, YOU 2000, ENG 2001] são artigos recentes que abordam o problema da supressão de ruído em imagens, e demonstram o interesse da comunidade científica de processamento de imagens envolvida com o problema de filtragem de imagens.

## 2.4 Conclusão

Neste Capítulo, foram apresentadas algumas abordagens para os problemas de filtragem e detecção de bordas em imagens. Como foi citado anteriormente, as



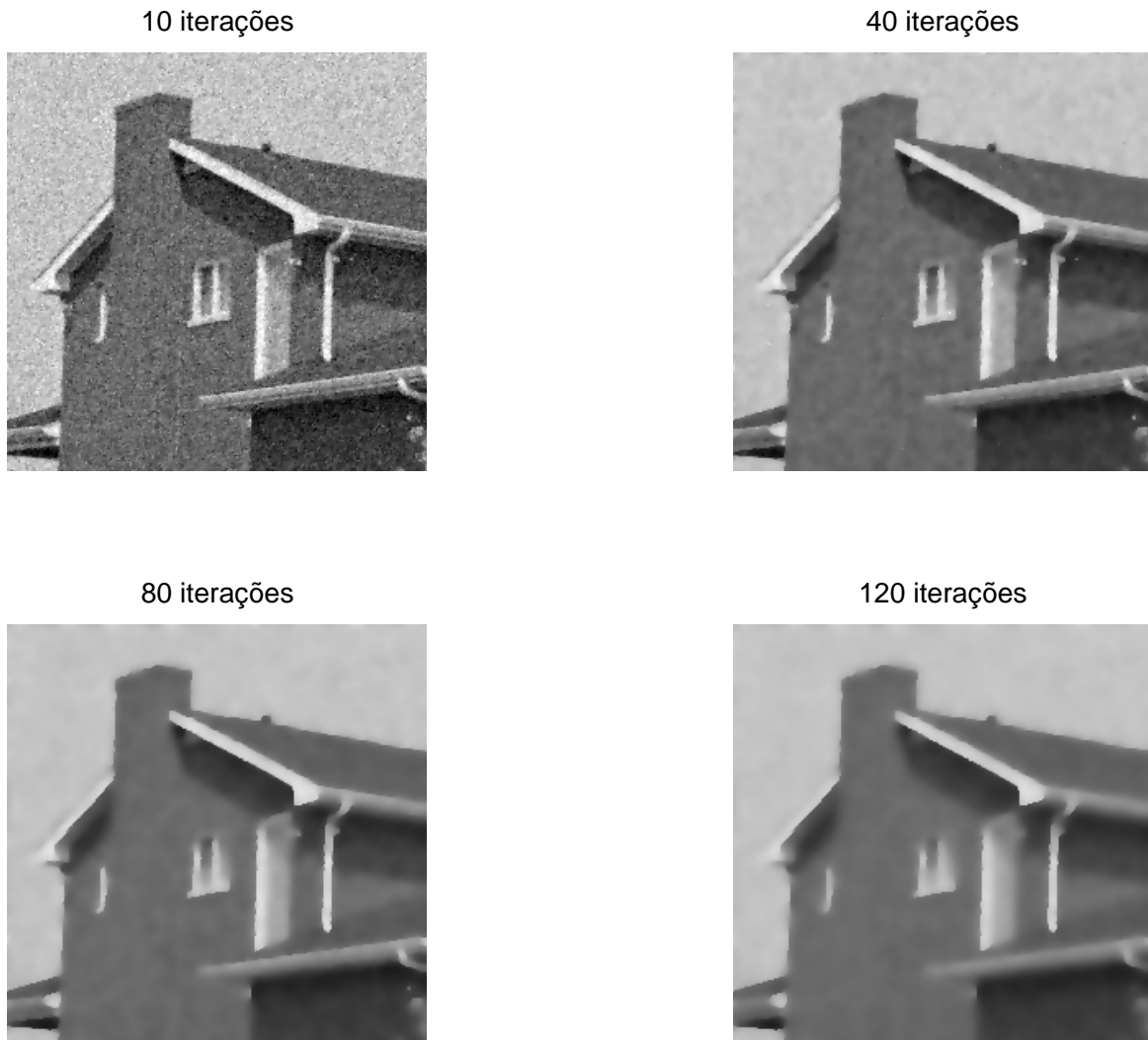


FIGURA 2.11 - Filtragem imagem do *house* ruidosa, em várias etapas, utilizando o método de Proesmans *et al.* [PRO 93].

soluções propostas apresentam aspectos positivos e negativos, e nenhuma dessas abordagens resolve completamente os problemas apresentados.

Dentre os métodos de detecção de bordas analisados, os que utilizam convolução com máscaras para obtenção dos gradientes numéricos apresentam muitas limitações. Tais técnicas são bastante sensíveis ao ruído, e o limiar ótimo utilizado para a remoção das falsas bordas pode ser difícil de ser encontrado. Se o limiar for muito baixo, falsas bordas serão mantidas; se o limiar for alto demais, algumas bordas verdadeiras serão perdidas na detecção. A escolha do tamanho das máscaras também é problemático. Máscaras pequenas introduzem pouca filtragem, aumentando a possibilidade de ocorrência de falsas bordas. Por outro lado, máscaras grandes (mais eficientes na atenuação do ruído) tendem a deformar a localização das bordas, além de remover algumas bordas verdadeiras de baixo contraste. Essas observações são exemplificadas na Figura 2.1, onde o operador de Prewitt de tamanhos  $3 \times 3$  e  $5 \times 5$  foi utilizado para a detecção de bordas de uma imagem ruidosa.

O detector de bordas de Marr-Hildreth utiliza a convolução da imagem com o Laplaciano da Gaussiana (LoG), e define bordas como os cruzamentos de zero dessa operação de convolução. Apesar da convolução com uma Gaussiana (que suaviza a imagem), essa técnica é extremamente sensível ao ruído, pois vários cruzamentos de zero estão associados ao ruído (gerando falsas bordas na detecção). Aumentando o parâmetro  $\sigma$  da Gaussiana (equação (2.7)), o número de falsas bordas é reduzido, mas os contornos caracterizados pelas bordas são deformados, como é exemplificado na Figura 2.2. Outra desvantagem dessa abordagem é que não há magnitude nem orientação associadas às bordas, pois não são utilizados gradientes. Por outro lado, tal técnica não exige limiares, e os contornos são geralmente formados por linhas com espessura de 1 pixel.

Um dos métodos mais utilizados para detecção de bordas é o método de Canny. Em sua formulação, o método inclui critérios ótimos de localização das bordas. A escolha do desvio padrão na Gaussiana permite selecionar a escala em que as bordas são detectadas. Entretanto, o problema da escolha do limiar permanece na técnica de Canny, e imagens com razão sinal-ruído baixa apresentam uma detecção das bordas deficiente.

Em geral, as técnicas acima são baseadas em operadores lineares, obtidos através da convolução da imagem original com máscaras. Junções em “T” e em “Y”, comuns em imagens onde há oclusão de objetos, não são eficientemente detectadas com tal abordagem. Algumas técnicas não-lineares, como os operadores *lógico/lineares* de Iverson e Zucker [IVE 95], incluem lógica booleana para melhorar o processo de detecção de bordas. Ainda assim, novas técnicas para detecção de bordas continuam aparecendo, demonstrando que o problema não foi eficientemente resolvido.

A supressão do ruído em imagens com a preservação das bordas também é um problema importante, que ainda não foi esgotado. Uma das principais técnicas para redução do ruído em imagens digitais é baseada na convolução com filtros espaciais passa-baixas. O formato e o tamanho das máscaras influenciam o resultado da filtragem, mas o conceito básico de filtragem passa-baixas impede a preservação das bordas. Isso acontece porque a definição das bordas é devida às altas frequências na imagem, que são removidas na filtragem. O filtro da mediana, que é não-linear, pode ser eficiente para a supressão de ruído impulsivo com preservação das bordas, mas seu desempenho para imagens contaminadas com ruído Gaussiano não é satisfatório, como mostra a Figura 2.6.

Abordagens mais sofisticadas, como a utilização de minimização de funcionais e equações diferenciais parciais para a atenuação de ruído em imagens, apresentam resultados melhores. Os métodos abordados neste trabalho se baseiam no fato que a solução da equação do calor (equação (2.18)) equivale à convolução com uma Gaussiana, cujo desvio padrão aumenta à medida que o parâmetro temporal  $t$  da equação evolui. Modificações foram introduzidas na equação de calor para impedir o borramento das bordas. Por exemplo, a difusão anisotrópica [PER 90] introduz uma função que atenua a filtragem onde o gradiente é maior do que um certo limiar, diminuindo o borramento das bordas. Entretanto, a escolha do limiar depende da imagem analisada, e bordas com baixo contraste acabam sendo alteradas. Uma melhoria em relação à difusão anisotrópica foi obtida pela utilização de equação diferenciais que geram ondas de choque (para salientação de bordas) juntamente

com difusão na direção ortogonal às bordas (para atenuação do ruído) [ALV 92], mas o custo computacional para a resolução numérica dessas equações é grande. Além disso, questões de estabilidade numérica para as equações diferenciais parciais devem ser levadas em consideração.

A minimização de funcionais para remoção de ruído Gaussiano aditivo em imagens proposta por Rudin *et al.* [RUD 92] também apresenta um bom desempenho, como mostra a Figura 2.9. Entretanto, uma estimativa da variância do ruído é necessária, e o custo computacional é considerável.

A maior contribuição do método proposto por Tannenbaum e colaboradores [TAN 96] foi desenvolver uma classe de funcionais para filtragem de imagens, na qual a difusão anisotrópica passa a ser um caso particular. Já a técnica proposta pelo grupo de Proesmans [PRO 93] utiliza a minimização simultânea de funcionais para remoção do ruído e detecção de bordas. Tal técnica é implementada através de um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, que retorna duas imagens. A primeira é uma versão filtrada da imagem original, e a segunda é o mapa de bordas da imagem. Os resultados obtidos por essa técnica foram muito bons (Figuras 2.11 e 2.10), indicando que filtragem e detecção de bordas simultâneas pode ser eficiente. Entretanto, tal método exige uma grande quantidade de parâmetros ( $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $\rho$ , além dos limiares nos termos anisotrópicos  $c_1(x)$  e  $c_2(x)$  necessários na equação (2.45)). Em geral, as técnicas baseadas em soluções numéricas de equações diferenciais parciais apresentam um problema adicional, que é o critério de parada das iterações temporais. Tal critério é subjetivo, e conduz a resultados sub-ótimos.

Assim como a detecção de bordas, o problema de supressão de ruído também requer mais investigação. A análise realizada neste Capítulo indica que as técnicas de filtragem hierárquica [PER 90, RUD 92, NIT 92, ALV 92, PRO 93, TAN 96] apresentam resultados superiores, pois permitem o tratamento de detalhes da imagem que aparecem em diferentes escalas. Além disso, pôde-se perceber que a realização simultânea dos processos de filtragem e detecção de bordas [PRO 93] podem produzir resultados promissores. A transformada wavelet, que é apresentada no Capítulo seguinte, parece ser a ferramenta poderosa para abordar o problema de filtragem de imagens com preservação das bordas, pois essa transformada oferece a possibilidade de análise de imagens em múltiplas resoluções, além de permitir que a filtragem e a detecção de bordas sejam realizadas simultaneamente em diferentes escalas. De fato, a transformada wavelet já vem sendo utilizada no problema de atenuação do ruído com preservação das bordas por vários pesquisadores, com resultados satisfatórios.

# 3 Filtragem com Preservação de Bordas Utilizando a Transformada Wavelet: Métodos e Problemas Encontrados

## 3.1 Introdução

Wavelets são funções matemáticas utilizadas na decomposição de sinais em diferentes bandas de frequência. Elas apresentam vantagens com relação aos métodos tradicionais de análise de Fourier em situações que envolvem sinais com descontinuidades, pois oferecem boa localização nos domínios espacial e espectral. Isso significa que pode-se determinar quais componentes de frequência aparecem em um dado sinal, e principalmente a localização espacial onde tais componentes de frequência aparecem.

Na próxima Seção, é apresentada a terminologia e os conceitos gerais que norteiam a transformada wavelet. Há diversas abordagens e vários desenvolvimentos teóricos envolvendo essa transformada e, portanto, seria inviável cobrir toda a teoria referente à transformada wavelet neste documento. Há uma série de livros e artigos sobre o assunto, dentre os quais se destacam [MAL 89, MAL 92, DAU 92, MEY 93, VID 94, STR 96]. Na Seção seguinte, são apresentadas algumas técnicas propostas na literatura para abordar o problema de filtragem de imagens com preservação de bordas baseadas na transformada wavelet. Uma análise crítica dessas técnicas é apresentada na conclusão do Capítulo.

## 3.2 Uma Visão Geral da Transformada Wavelet

Apesar de sua aplicação em processamento de sinais ser relativamente recente (cerca de 10 anos), o trabalho que gerou a teoria de wavelets começou a se desenvolver na década de 30. O desenvolvimento e a formalização dessa teoria foi realizado independentemente por pesquisadores nas áreas de matemática, física quântica, engenharia elétrica e geologia sísmica, demonstrando o interesse de várias áreas científicas no desenvolvimento dessa ferramenta.

O conceito fundamental na análise através de wavelets é o conceito de escala. Wavelets permitem o processamento de dados em diferentes escalas (ou diferentes resoluções)<sup>3</sup>. Essa idéia de escala pode ser interpretada como a distância do observador até o sinal/imagem em questão. A uma distância grande (ou escala grande), se veria apenas um esboço do sinal, enquanto que a uma distância pequena (ou escala pequena) se poderiam perceber os detalhes do sinal. A transformada wavelet permite que se enxergue um mesmo sinal a grandes e pequenas distâncias ao mesmo tempo.

---

<sup>3</sup>A noção de escala é inversamente proporcional à noção de resolução, ou seja, quando a escala aumenta, a resolução diminui.

O procedimento na análise via wavelets é adotar uma função wavelet protótipo, chamada *wavelet analisadora* ou *wavelet-mãe*, normalmente denotada por  $\psi(x)$ . As altas frequências do sinal podem ser analisadas através de uma versão contraída da wavelet-mãe ( $\psi(sx)$ , para  $s > 1$ ), enquanto que as baixas frequências podem ser analisados através de uma versão dilatada da mesma wavelet-mãe ( $\psi(sx)$ , para  $0 < s < 1$ ). Considerando-se translações espaciais das contrações e dilatações da wavelet-mãe, um sinal  $f(x)$  pode ser representado através de uma expansão em wavelets, ou seja, uma combinação linear das dilatações e contrações da wavelet-mãe.

Há diversas escolhas para a wavelet-mãe  $\psi(x)$ , que se diferenciam pelo tamanho do suporte, regularidade, formato, etc. A primeira wavelet foi desenvolvida por Haar em 1909, e consiste de um degrau unitário definido no intervalo  $[0,1)$ . Há também wavelets com comportamento fractal (como as wavelets de Daubechies), e outras mais suaves (como a família Coiflet) [MEY 93]. Algumas dessas wavelets podem ser vistas na Figura 3.1.

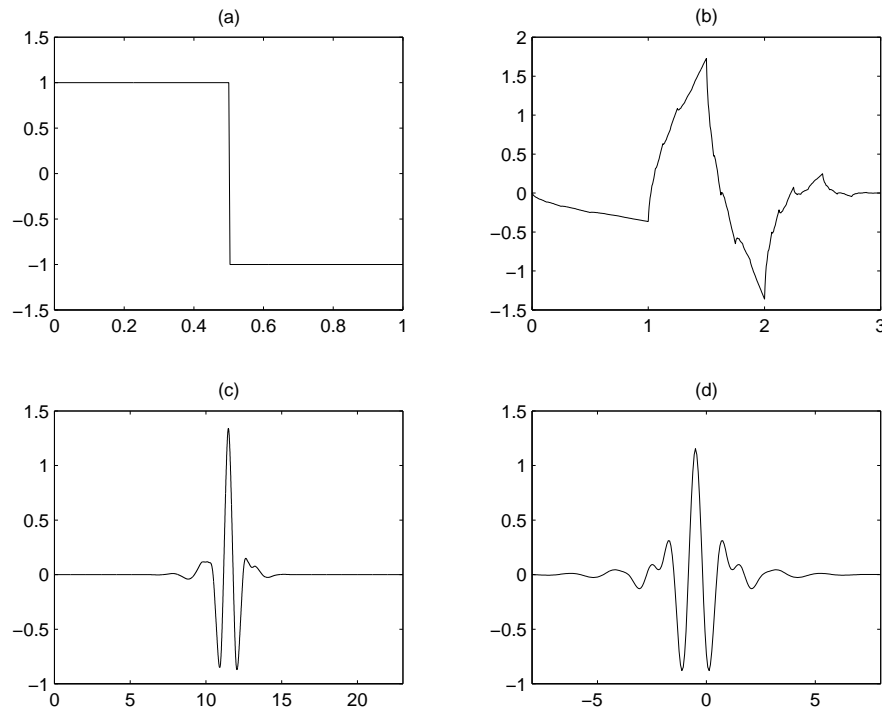


FIGURA 3.1 - Representantes de algumas famílias de wavelets, construídas usando a função `wavefun`, contida no pacote de wavelets do software `MATLAB`. (a) Haar. (b) Daubechies. (c) Coiflet. (d) Meyer.

A definição formal de wavelet não é muito precisa, pois a teoria de wavelets foi desenvolvida paralelamente por diversos pesquisadores. A primeira definição de wavelet [MEY 93], atribuída a Grossmann e Morlet, é bem abrangente. Essa definição afirma que wavelet é uma função  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , cuja transformada de Fourier  $\hat{\psi}(\xi)$  satisfaz a condição

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad (3.1)$$

para quase todo valor de  $\xi$ . Uma segunda definição de wavelet está relacionada com a teoria de Littlewood-Paley-Stein [MEY 93], e afirma que uma wavelet é uma função  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  cuja transformada de Fourier  $\widehat{\psi}(\xi)$  satisfaz a condição

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 1 \quad (3.2)$$

para quase todo valor de  $\xi$ . Se  $\psi$  é uma wavelet segundo essa definição, então  $\sqrt{\log 2}\psi$  satisfaz a condição de Grossmann-Morlet (3.1). A terceira definição se refere ao trabalho de Franklin e Strömberg [MEY 93], e afirma que uma wavelet é uma função  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  tal que

$$2^{j/2}\psi(2^jx - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

é uma base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Tal wavelet satisfaz necessariamente a segunda definição (3.2).

Assim como há diferentes definições de wavelet, há diferentes maneiras de denotar a transformada wavelet. Provavelmente a abordagem mais utilizada em processamento de sinais seja a proposta de Mallat [MAL 89], na qual um algoritmo piramidal baseado em filtros passa-baixas e passa-bandas é utilizado para a decomposição de sinais de domínio discreto em múltiplas resoluções. Os filtros passa-baixas (associados a uma função de escala) aproximam um sinal  $f[n]$  (no caso unidimensional) nas escalas diádicas  $2^j$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, J$ , e os filtros passa-bandas (associados a uma wavelet) produzem os detalhes perdidos quando a escala passa de  $2^j$  para  $2^{j+1}$ . Os coeficientes associados ao filtro passa-baixas são denotados por  $S_{2^j}f[n]$ , e os coeficientes de detalhe (associados ao filtro passa-bandas) são denotados por  $W_{2^j}f[n]$ . A decomposição de um sinal  $f[n]$  através do algoritmo piramidal de Mallat é ilustrado na Figura 3.2. Nesse diagrama, os filtros  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  são os filtros passa-baixas e passa-bandas, respectivamente. O operador  $\downarrow 2$  denota dizimação, ou seja, uma reamostragem do sinal em que uma amostra de cada duas é mantida (resultando em um sinal com a metade do tamanho).

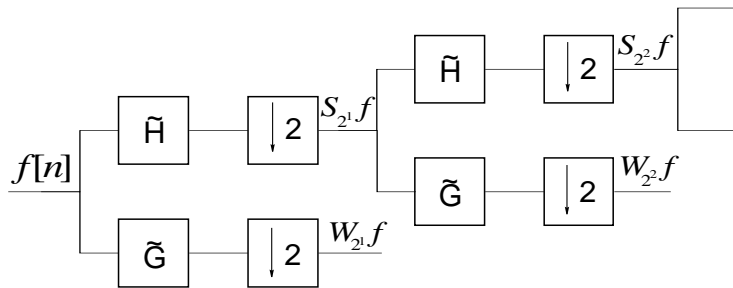


FIGURA 3.2 - Diagrama da decomposição de um sinal  $f[n]$  pelo algoritmo de Mallat [MAL 89].

O sinal  $f[n]$  pode ser reconstruído a partir de  $S_{2^j}f[n]$  e  $W_{2^j}f[n]$ , para  $j = 1, 2, \dots, J$ . No algoritmo de reconstrução, os coeficientes de detalhe  $W_{2^j}f[n]$  são adicionados à aproximação  $S_{2^j}f[n]$ , partindo da escala mais alta  $2^J$  até a escala mais baixa  $2^0$ . O algoritmo de reconstrução é ilustrado na Figura 3.3. Nesse diagrama,

os filtros  $H$  e  $G$  são os filtros passa-baixas e passa-bandas de reconstrução, respectivamente. O operador  $\uparrow 2$  representa uma reamostragem do sinal colocando-se um zero entre cada amostra do sinal (ou seja, o sinal dobra de tamanho).

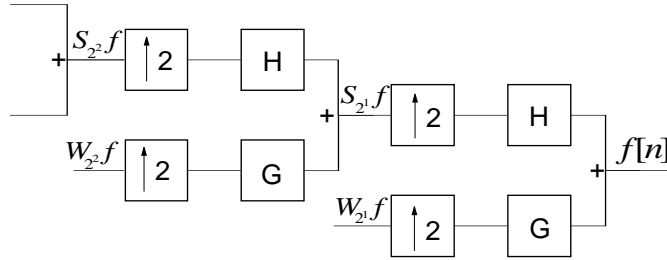


FIGURA 3.3 - Diagrama da reconstrução de um sinal  $f[n]$  pelo algoritmo de Mallat [MAL 89].

Também pode-se utilizar uma transformada wavelet não-dizimada [DAU 92], na qual os operadores  $\downarrow 2$  e  $\uparrow 2$  não são utilizados. Com essa abordagem, os coeficientes da transformada têm o mesmo comprimento do sinal original em todas as escalas  $2^j$ . Na versão não-dizimada da transformada wavelet, o suporte dos filtros de decomposição  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  aumenta à medida que a escala  $2^j$  aumenta, para compensar o efeito da não-dizimação.

O modelo proposto por Mallat pode ser estendido para duas dimensões, podendo então ser aplicado na análise de imagens digitais. Na abordagem bidimensional, uma função de escala  $\phi(x, y)$  é escrita como o produto separável de funções de escala unidimensionais, ou seja,

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y). \quad (3.4)$$

Também são necessárias três wavelets  $\psi^1(x, y)$ ,  $\psi^2(x, y)$  e  $\psi^3(x, y)$ , que detectam os detalhes da imagem nas direções horizontal, vertical e diagonal, respectivamente. Tais wavelets podem ser escritas como

$$\psi^1(x, y) = \psi(x)\phi(y), \quad \psi^2(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad \text{e} \quad \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (3.5)$$

Através de um algoritmo piramidal análogo ao caso unidimensional, pode-se calcular a transformada wavelet de imagens digitais efetuando o processamento através de filtros passa-baixas e passa-bandas. Mais especificamente, uma imagem digital  $f[n, m]$  pode ser representada na escala  $2^j$  através de quatro imagens: uma imagem passa-baixas  $S_{2^j} f[n, m]$  (associada à função de escala  $\phi(x, y)$ ), e três imagens de detalhe  $W_{2^j}^1 f[n, m]$ ,  $W_{2^j}^2 f[n, m]$  e  $W_{2^j}^3 f[n, m]$  (associadas às wavelets  $\psi^1(x, y)$ ,  $\psi^2(x, y)$  e  $\psi^3(x, y)$ ). A representação completa de uma imagem utilizando-se  $J$  níveis na decomposição via wavelets é dada pela imagem suavizada  $S_{2^J} f[n, m]$  na escala  $2^J$  e pelas imagens de detalhe  $W_{2^j}^1 f[n, m]$ ,  $W_{2^j}^2 f[n, m]$  e  $W_{2^j}^3 f[n, m]$ , para  $j = 1, 2, \dots, J$ .

Figura 3.4(a) mostra a decomposição da imagem *house* (Figura 2.8(a)) em dois níveis da transformada wavelet. A disposição dos coeficientes  $S_{2^j} f[n, m]$  e  $W_{2^j}^i f[n, m]$  é mostrada na Figura 3.4(b).

Analogamente ao caso unidimensional, há uma versão bidimensional para a transformada wavelet não-dizimada, na qual os coeficientes da transformada têm o mesmo tamanho da imagem original em todas as escalas. Além disso, há uma

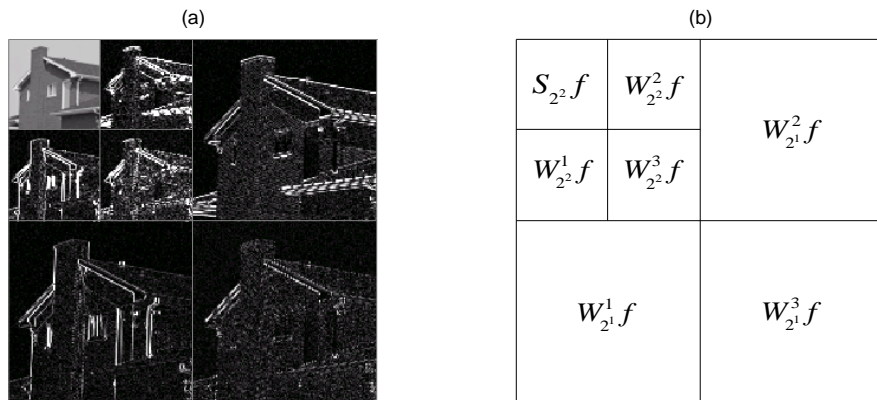


FIGURA 3.4 - (a) Decomposição da imagem *house* até a escala  $2^2$ . (b) Disposição dos coeficientes  $S_{2^j}$  e  $W_{2^j}^i$ .

outra abordagem para computar a transformada wavelet em duas dimensões usando apenas duas imagens de detalhe (horizontal e vertical) [MAL 92] ao invés das tradicionais três imagens de detalhe (horizontal, vertical e diagonal).

As técnicas para filtragem de imagens usando wavelets existentes na literatura utilizam diferentes versões da transformada wavelet para a remoção do ruído, explorando as características de cada versão. Na Seção 4.2 discute-se o tipo de transformada mais adequada para abordar o problema de filtragem de imagens com preservação das bordas.

### 3.3 Técnicas de Filtragem com Preservação de Bordas Baseadas na Transformada Wavelet

Os métodos para filtragem de imagens baseados na análise de Fourier tendem a remover os componentes de alta frequência da imagem (em geral, associados ao ruído), mas com isso acabam borrando as bordas, que também contêm componentes de alta frequência. Outros métodos propostos na literatura tentam obter uma estimativa *a priori* das bordas para atenuar a filtragem ao longo das mesmas. No entanto, o processo de detecção de bordas muitas vezes requer que a imagem seja primeiramente filtrada. Uma solução eficiente para os problemas de filtragem e detecção de bordas parece ser a realização de ambas simultaneamente, o que pode ser implementado usando a transformada wavelet. De fato, há vários pesquisadores trabalhando com essa transformada, com resultados animadores. Praticamente todos os métodos baseados na transformada wavelet são baseados no mesmo princípio: 1) calcular a transformada wavelet; 2) remover (ou atenuar) os coeficientes de detalhe associados ao ruído, e manter os coeficientes de detalhes associados às bordas; 3) aplicar a transformada wavelet inversa. Nesse caso, a principal tarefa a ser realizada é distinguir coeficientes associados a bordas de coeficientes associados ao ruído, e existem diversas maneiras para abordar tal problema.

Mallat [MAL 89] foi um dos pesquisadores pioneiros na aplicação da transformada wavelet para a análise de sinais em várias escalas. Ele desenvolveu uma teoria para decompor sinais em múltiplas resoluções, utilizando como base uma família de



funções obtidas através de dilatações e translações de uma única função, chamada de “wavelet”. A decomposição do sinal nessa base é chamada de representação em wavelets, e pode ser calculada através de um algoritmo piramidal baseado em filtragens do tipo passa-bandas e passa-baixas.

Posteriormente, Mallat e Zhong [MAL 92] propuseram a representação de sinais baseada nas suas bordas em múltiplas resoluções. Um algoritmo de reconstrução permite obter uma aproximação do sinal original através dos máximos locais (que correspondem às bordas), o que também permite a compactação do sinal. Por exemplo, o banco de impressões digitais do FBI foi compactado através de um método similar a esse.

Donoho [DON 93, DON 95] abordou algumas técnicas de filtragem de sinais no domínio de wavelets com a utilização de limiares “suaves”. Nos limiares “duros”, os valores menores do que um certo valor  $T$  são zerados, enquanto que os valores maiores do que  $T$  são mantidos. Já com limiares “suaves”, a modificação dos coeficientes é realizada de maneira contínua, “encolhendo” a magnitude dos coeficientes até zero.

O método proposto por Mallat e Hwang [MAL 92a] se baseia no cálculo do expoente de Lipschitz para discriminar estruturas em uma imagem (ou seja, diferenciar bordas de ruído). O expoente de Lipschitz é estimado através da evolução dos coeficientes da transformada wavelet ao longo das escalas (na prática, apenas os máximos locais são analisados, e aqueles associados ao ruído são excluídos). Uma implementação desse método está disponível via ftp anônimo [MAL 92b].

Lu *et al.* [LU 92] propuseram a utilização de wavelets para a detecção de bordas como também para redução do ruído, encontrando os máximos locais da transformada em múltiplas escalas, e representando-os em uma estrutura de árvore. Através de uma métrica, um algoritmo para descartar as falsas bordas foi desenvolvido, resultando em uma imagem filtrada na reconstrução com bordas pouco afetadas.

Outros pesquisadores [XU 94] propuseram usar a decomposição em wavelets para a filtragem de imagens, preservando as bordas sem detectá-las explicitamente. A correlação das respostas das bordas em resoluções consecutivas é utilizada para realçar as bordas verdadeiras com relação às falsas, e assim filtrar a imagem.

A utilização de medidas de regularidade da imagem e de continuidade geométrica para filtragem de ruído em imagens digitais foi proposta por Malfait e Rose [MAL 97]. As duas medidas são combinadas de maneira probabilística, através de um modelo de campos de Markov. Jansen e Bulthel [JAN 2001] e o grupo de Romberg [ROM 2001] também propuseram métodos baseados em campos de Markov para filtragem de imagens no domínio da transformada wavelet.

Abordagens probabilísticas no domínio da transformada também estão sendo utilizadas. Simoncelli e Adelson [SIM 96] usaram uma distribuição Laplaciana Generalizada para modelar os coeficientes de wavelets da imagem original, cujos parâmetros podem ser estimados através de observações da imagem com ruído. Chang e colaboradores [CHA 97, CHA 98, CHA 2000] propuseram técnicas para redução de ruído em imagens utilizando limiares baseados em modelos probabilísticos para os coeficientes da transformada. Em [CHA 97], um limiar é utilizado para todos os coeficientes de uma mesma sub-banda da transformada. Já em [CHA 98, CHA 2000], é utilizada a modelagem de contexto no domínio da trans-

formada wavelet. Nessa abordagem, cada coeficiente da transformada é modelado individualmente como uma variável aleatória pertencendo a uma distribuição Gaussiana Generalizada, com base em informações espaciais (o contexto). Essa modelagem é utilizada para determinar adaptativamente um limiar para cada coeficiente da transformada. Mihçak *et al.* [MIH 99] abordaram o problema da filtragem de uma maneira semelhante, na qual os coeficientes da transformada são modelados através de variáveis aleatórias Gaussianas com alta correlação local. Simoncelli [SIM 99] propôs a utilização de estatísticas não-Gaussianas para modelar os coeficientes da transformada wavelet. Strela *et al.* [STR 2000] descreveram as densidades conjuntas dos coeficientes de wavelets através de uma *Gaussian Scale Mixture* (GSM), e desenvolveram uma solução por máxima verossimilhança para estimar os coeficientes relevantes (i.e. associados às bordas verdadeiras) a partir da imagem ruidosa. A análise da função de autocorrelação dos coeficientes da transformada wavelet complexa foi proposta para filtragem de imagens por Portilla e Simoncelli [POR 2000]. A função de autocorrelação dos coeficientes da transformada da imagem ruidosa são modificados de acordo com um modelo probabilístico teórico, proposto para imagens sem ruído, e então a transformada wavelet inversa é aplicada. Figueiredo e Nowak [FIG 2001] propuseram um método probabilístico que não envolve parâmetros a serem ajustados ou estimados, resultando em um baixo custo computacional (mas com resultados abaixo de outras técnicas do estado-da-arte). De modo geral, esses métodos probabilísticos requerem uma estimativa da quantidade de ruído presente na imagem, o que pode ser difícil de obter em situações práticas.

Em [PIZ 99], os autores propuseram a filtragem de uma imagem usando *wavelet shrinkage*, na qual cada coeficiente da transformada wavelet é multiplicado por uma função que assume valores entre 0 e 1. Essa função, chamada de função de *shrinkage*, depende da medida do ruído na imagem e da consistência geométrica das bordas em uma dada vizinhança.

A gama de aplicações da transformada wavelet em processamento de imagens não se limita a problemas de filtragem e detecção de bordas. Por exemplo, wavelets vêm sendo utilizadas em problemas de realce de imagens [LU 94, LAI 95, RIC 95], com aplicação em realce de mamografias e imagens de ressonância magnética; na indústria, técnicas de controle de qualidade para a manufatura do papel foram propostas em [BOU 99]; análise de texturas através de wavelets complexas [POR 99, HAT 99]; compressão de imagens mamográficas digitais [YAN 95]; recuperação e restauração de imagens [BRU 90, SAH 93]; ou ainda, em interpolação de imagens [PEN 2000].

Nas Seções seguintes, são apresentadas algumas técnicas que utilizam a transformada wavelet para filtragem com preservação de bordas. Na maioria dos métodos, as bordas são detectadas implicitamente, e essa informação é utilizada para evitar o borramento das bordas durante a filtragem.

### 3.3.1 Redução do Ruído Usando a Representação em Múltiplas Resoluções

Lu *et al.* [LU 92] propuseram uma técnica para discriminar bordas verdadeiras de falsas, com o objetivo de filtrar a imagem. Utilizando as wavelets propostas em

[MAL 92], os autores constroem uma estrutura em árvore, contendo os máximos locais da transformada wavelet em várias resoluções.

Em uma dimensão, cada nível  $j$  da árvore contém as bordas detectadas na escala correspondente  $2^j$ . Cada elemento da árvore (chamado pelos autores de *edgel*), tem dois atributos: a magnitude e a posição no espaço-escala. A árvore é construída percorrendo o espaço-escala da menor para a maior resolução [WIT 83], conectando os máximos locais que tenham as seguintes características em comum: sinais aritméticos idênticos, proximidade espacial e amplitudes compatíveis. Os autores afirmam que essa técnica produz bons resultados em geral, mas pode haver conexões errôneas em regiões onde os máximos locais são densos, muito comuns em imagens com razão sinal-ruído (SNR) pequena.

A extensão para a árvore em duas dimensões é feita da seguinte maneira. Em cada nível, os máximos locais são organizados em contornos, o que torna a representação mais robusta do que para máximos locais isolados [MAL 92]. Para preencher possíveis lacunas nos contornos, é utilizada a informação da escala imediatamente mais alta (menor resolução), seguindo a idéia de Rosenfeld [ROS 84].

Construída a árvore, três métricas são utilizadas para determinar a relevância de cada ramo: o comprimento do ramo, média das amplitudes ao longo do ramo, e taxa de variação dos máximos locais do ramo ao longo das escalas. Essas três métricas relacionam máximos locais em diferentes escalas, e são suficientes para o caso unidimensional. Para o caso bidimensional, são utilizadas ainda outras três métricas: o comprimento do contorno, a média da amplitude ao longo do contorno, e proximidade dos máximos no contorno.

Usando estes dois conjuntos de métricas, é calculada a relevância  $P$  de cada ramo da árvore, e os ramos cujo valor é menor do que um determinado limiar  $T$  são podados da árvore. A escolha de  $T$  proposta pelos autores depende do histograma dos valores de  $P$ . Tipicamente, os ramos associados ao ruído terão valores baixos de  $P$ , formando um pico na região onde  $P$  é pequeno no histograma. Como se deseja eliminar esses valores, o limiar é escolhido na depressão que sucede esse pico.

A construção da árvore é mostrada na Figura 3.5. À esquerda, são mostrados um sinal unidimensional ruidoso e a respectiva árvore. À direita, é mostrada a árvore após a aplicação do limiar  $T$ .

Figura 3.6 mostra a imagem de uma ressonância magnética ruidosa (à esquerda), e o resultado da aplicação deste método (à direita). Pode-se perceber que o ruído foi atenuado, e as estruturas com baixo contraste foram preservadas.

### 3.3.2 Filtragem de Ruído Baseada na Correlação das Escalas

Uma maneira de filtrar a imagem sem detectar explicitamente os máximos locais foi proposta por Xu *et al.* [XU 94]. Em uma dimensão, essa técnica consiste na multiplicação direta dos coeficientes da transformada wavelet em níveis consecutivos. A justificativa para isso é que uma borda verdadeira implicará coeficientes  $W_{2^j} f[n]$  com magnitudes maiores em várias escalas, enquanto que as respostas devidas ao ruído tenderão a diminuir à medida que  $j$  aumenta. Assim sendo, o produto direto dos coeficientes  $W_{2^j} f[n]$  em níveis adjacentes salientará as bordas, e atenuará o ruído. Embora  $K$  níveis consecutivos possam ser utilizados na correlação, os autores

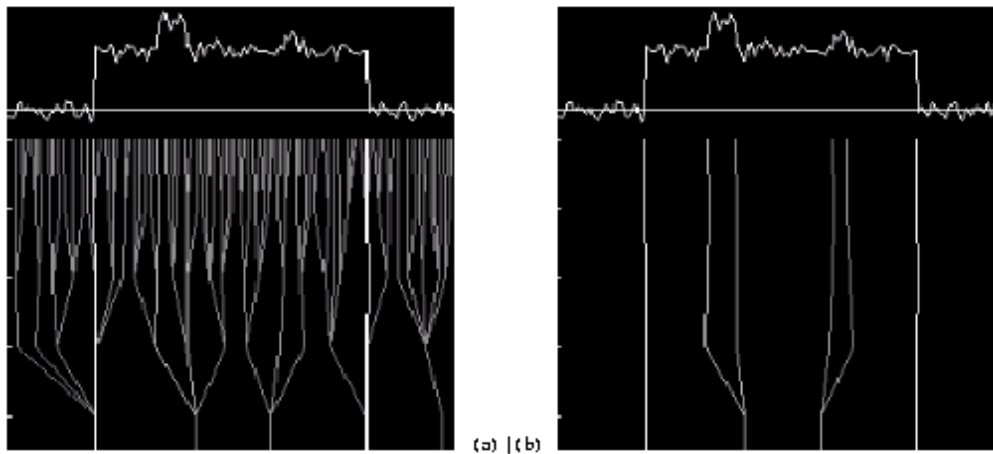


FIGURA 3.5 - Esquerda: Sinal ruidoso unidimensional e árvore com os máximos locais. Direita: Árvore com os ramos podados, após a aplicação do limiar.

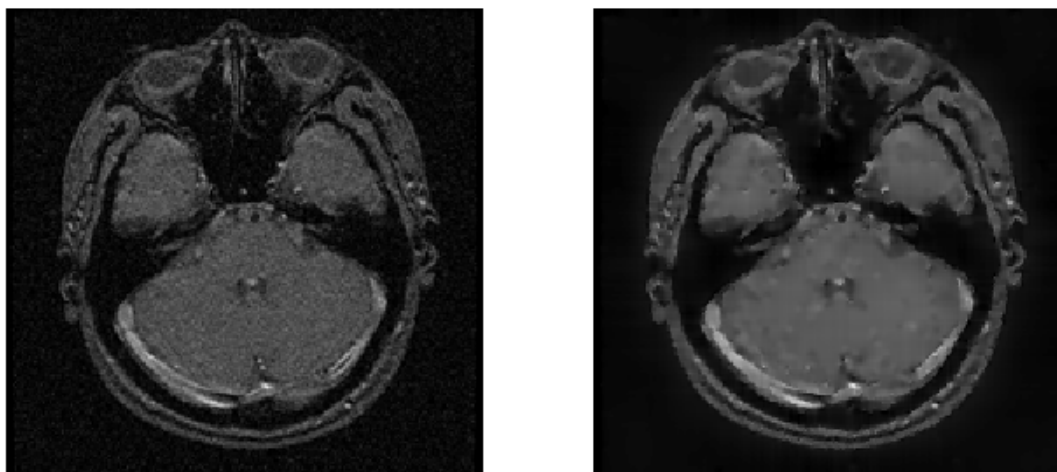


FIGURA 3.6 - Esquerda: MRI ruidosa. Direita: imagem filtrada pela técnica de Lu *et al.* [LU 92].

afirmam que a utilização de dois ou três níveis produz os melhores resultados, já que os extremos locais da transformada tendem a mudar de posição quando a escala aumenta. Para o caso de dois níveis consecutivos, a correlação entre os coeficientes  $W_{2^j} f[n]$  e  $W_{2^{j+1}} f[n]$  é dada por

$$\text{Corr}_2^j[n] = W_{2^j} f[n] W_{2^{j+1}} f[n]. \quad (3.6)$$

Para cada nível  $j$ , alguns valores de  $W_{2^j} f[n]$  serão mantidos, e outros serão descartados. Para decidir quais valores serão mantidos, um processo iterativo envolvendo  $W_{2^j} f[n]$  e  $\text{Corr}_2^j[n]$  é aplicado. Primeiramente,  $\text{Corr}_2^j[n]$  é normalizado para a mesma potência<sup>4</sup> de  $W_{2^j} f[n]$ , e os coeficientes  $\text{Corr}_2^j[n]$  e  $W_{2^j} f[n]$  são compara-

<sup>4</sup>a potência dos coeficientes  $W_{2^j} f[n]$  é dada por  $\sum_n (W_{2^j} f[n])^2$ .

dos para cada valor de  $n$ . Nas posições em que  $|\text{Corr}_2^j[n]| > |W_{2^j} f[n]|$ , o algoritmo identifica uma borda. As posições dessas bordas e os respectivos valores de  $W_{2^j} f[n]$  são armazenados em uma variável  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$  (inicializada com zeros), e os valores  $\text{Corr}_2^j[n]$  e  $W_{2^j} f[n]$  nessas posições são iguados a zero. Dessa forma, as bordas são “transferidas” de  $W_{2^j} f[n]$  para  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$ .

Com os coeficientes atualizados de  $\text{Corr}_2^j[n]$  e  $W_{2^j} f[n]$ , é repetido o processo da normalização da potência de  $\text{Corr}_2^j[n]$ , e da comparação de  $|\text{Corr}_2^j[n]|$  com  $|W_{2^j} f[n]|$ . Novas bordas são extraídas se  $|\text{Corr}_2^j[n]| > |W_{2^j} f[n]|$ , e seus valores transferidos de  $W_{2^j} f[n]$  para  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$ . Esse processo iterativo é repetido até que a potência de  $\text{Corr}_2^j[n]$  seja menor do que um determinado limiar  $T(j)$ , que é uma estimativa da potência do ruído em cada escala  $2^j$ . Esse critério de parada indica que todos os coeficientes associados a bordas foram transferidos de  $W_{2^j} f[n]$  para  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$ , restando apenas coeficientes associados ao ruído em  $W_{2^j} f[n]$ .

Ao final desse processo iterativo, a variável  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$  é composta apenas por coeficientes associados a bordas relevantes, em cada nível  $j$ . A transformada wavelet é então invertida com  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$  ao invés de  $W_{2^j} f[n]$ . Dessa forma, as bordas do sinal original são mantidas, enquanto que o ruído é eliminado. A extensão desse método para duas dimensões (imagens) é imediata: O processo iterativo descrito acima é aplicado a cada sub-banda e escala da transformada bidimensional.

Figuras 3.7 e 3.8 mostram, respectivamente, um sinal unidimensional (representando uma borda em degrau) e sua versão ruidosa. Na Figura 3.9 são mostrados os coeficientes atualizados  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$  para o sinal mostrado na Figura 3.8, para a decomposição em 4 níveis. Pode-se notar que apenas os coeficientes correspondentes à única borda do sinal são preservados. O resultado da reconstrução pode ser visto na Figura 3.10. O ruído é filtrado, enquanto que a definição da borda é bem preservada (pequenos artefatos nas proximidades da borda são introduzidos pelo método, como pode ser observado na Figura 3.10).

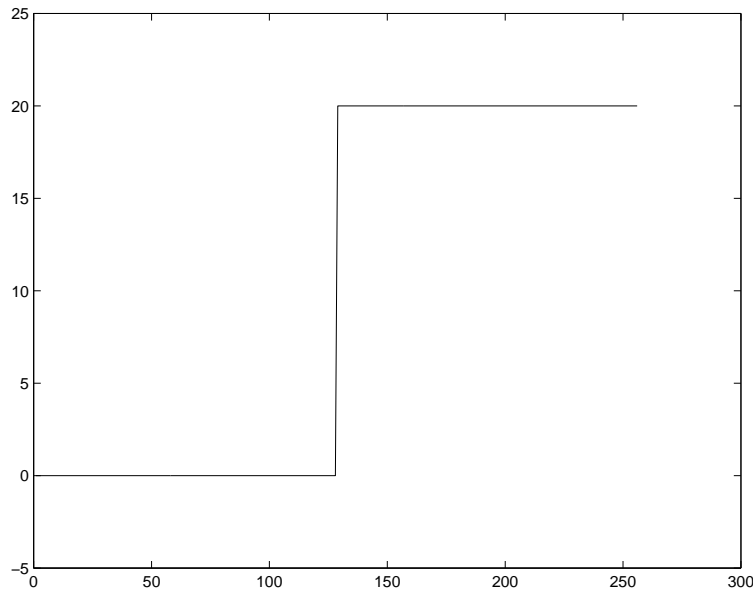


FIGURA 3.7 - Borda em degrau unidimensional.

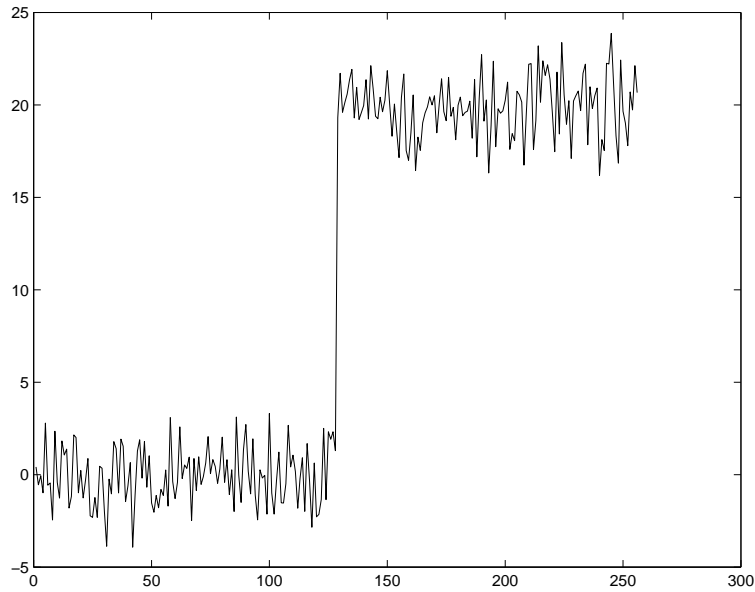


FIGURA 3.8 - Borda em degrau unidimensional com ruído.

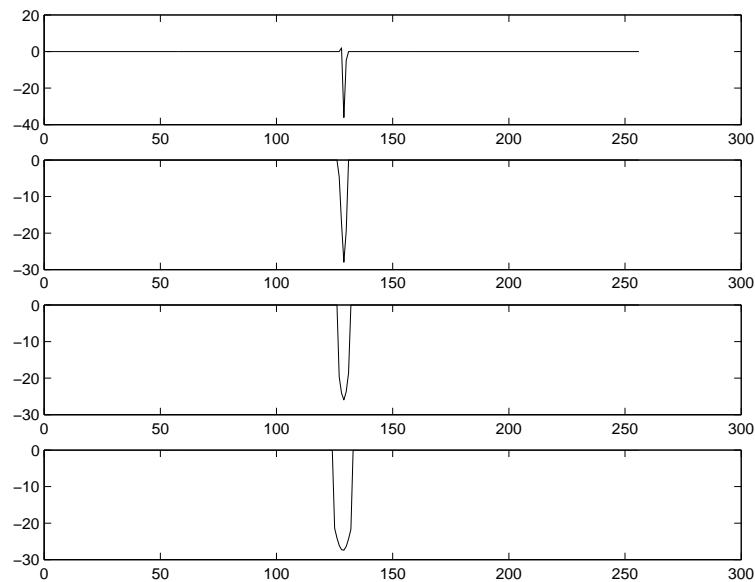


FIGURA 3.9 - Coeficientes  $W_{2^j}^{\text{new}} f[n]$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$  após a aplicação do método de Xu *et al.* [XU 94].

Figura 3.11 mostra filtragem da imagem *house* com ruído pelo método de Xu *et al.* As bordas foram bem preservadas, mas pode-se perceber ainda há um ruído residual nas regiões homogêneas da imagem (a imagem filtrada atingiu uma PSNR = 25,68 dB).

O método proposto em [XU 94] é rápido e de fácil implementação, mas apresenta limitações. A escolha dos limiares  $T(j)$  não é comentada no artigo, e pode resultar em pouca eficiência no processo de filtragem, ou na indesejada eliminação de bordas com baixo contraste.

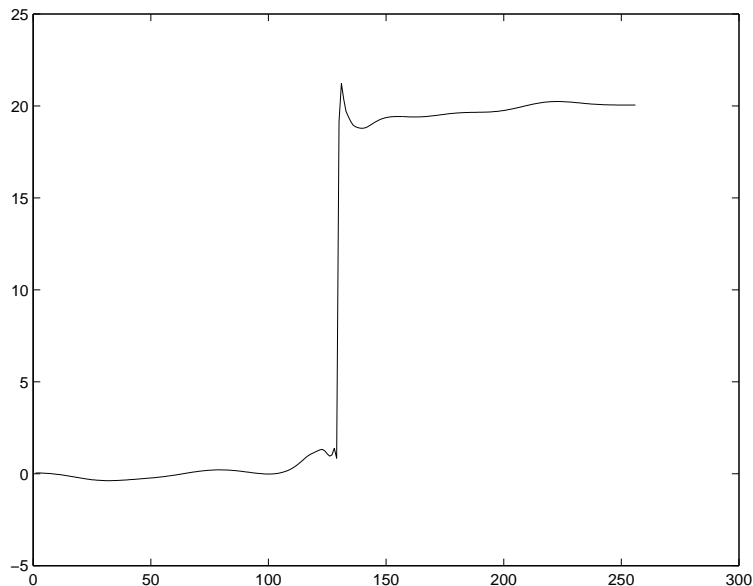


FIGURA 3.10 - Reconstrução da borda em degrau ruidosa, usando os coeficientes  $W_{2^i}^{\text{new}} f[n]$ .



FIGURA 3.11 - Filtragem da imagem *house* com ruído pelo método de Xu *et al.* [XU 94] (PSNR = 25,68 dB).

### 3.3.3 Filtragem de Imagens Usando um Modelo *a Priori* baseado em Campos de Markov

Malfait e Roose [MAL 97] propuseram um novo método para supressão de ruído em imagens digitais baseados em duas medidas no domínio da transformada wavelet. A primeira medida leva em consideração a evolução dos coeficientes ao longo das escalas, e a segunda medida envolve restrições geométricas. As duas medidas são combinadas probabilisticamente, e são implementadas através de um modelo de campos de Markov (MRF).

O método se baseia em uma transformada wavelet bidimensional que utiliza três imagens de detalhe (que se referem a três wavelets  $\psi^1(x, y)$ ,  $\psi^2(x, y)$  e  $\psi^3(x, y)$ , como descrito na Seção 3.2). A wavelet  $\psi^1(x, y)$  captura altas frequências no eixo

$x$  e baixas frequências no eixo  $y$ , enquanto que a wavelet  $\psi^2(x, y)$  captura altas frequências no eixo  $y$  e baixas frequências no eixo  $x$ . Já a wavelet  $\psi^3(x, y)$  captura altas frequências simultaneamente nos eixos  $x$  e  $y$ . Também há uma função de escala  $\phi(x, y)$  que captura apenas as baixas frequências.

Após calculada a transformada com respeito às três wavelets, são obtidos os respectivos coeficientes  $W_{2^j} f^1[n, m]$ ,  $W_{2^j} f^2[n, m]$  e  $W_{2^j} f^3[n, m]$  na escala  $2^j$ . Para cada um desses três componentes, uma estimativa da energia do ruído  $\sigma_W^2$  é necessária. Tal estimativa pode ser obtida calculando a decomposição em wavelets de uma parte do fundo da imagem, onde a variação dos tons de cinza deve-se apenas ao ruído. Na análise que será feita a seguir, o nível da transformada e o tipo do componente (ou seja, a sub-banda) não terão influência (a mesma regra de modificação será aplicada aos coeficientes  $W_{2^j} f^1[n, m]$ ,  $W_{2^j} f^2[n, m]$  e  $W_{2^j} f^3[n, m]$ ), e então a notação  $Wf[n, m]$  será utilizada para denotar o coeficiente da transformada.

Para medir o quanto um certo coeficiente de wavelet está contaminado por ruído, o expoente de Hölder é utilizado. O expoente de Hölder é uma medida de regularidade da imagem. Partes da imagem com pouco ruído corresponderão a expoentes de Hölder altos, enquanto que partes ruidosas da imagem terão expoentes de Hölder baixos. O expoente de Hölder pode ser estimado avaliando a evolução dos coeficientes de wavelet ao longo das escalas, através de

$$h[n, m] = \frac{1}{\text{depth}} \sum_{j=1}^{\text{depth}} \left| \frac{W_{2^j} f[n, m]}{W_{2^{j+1}} f[n, m]} \right| \simeq 2^\alpha, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha$  é o expoente de Hölder e “depth” é o número de escalas diádicas utilizadas na aproximação. É definida a função

$$E(t) = \sum_{h[n, m] \leq t} |Wf[n, m]|^2, \quad (3.8)$$

que retorna a potência dos coeficientes  $Wf[n, m]$  cujos expoentes de Hölder  $h[n, m]$  são menores ou iguais ao valor  $t$ . Um limiar  $T$  é escolhido de tal forma que  $E(T) \simeq \sigma_W^2$ , e então a potência dos coeficientes cujos expoentes de Hölder  $h[n, m]$  são menores do que  $T$  é menor ou igual do que a estimativa da potência do ruído.

Tal limiar  $T$  é utilizado para obter um rótulo  $x[n, m]$  indicando se o coeficiente  $Wf[n, m]$  está associado ao ruído ou a estruturas importantes. Se  $h[n, m] > T$ , então  $x[n, m] = 1$  (indicando que o coeficiente  $Wf[n, m]$  está associado a estruturas da imagem); caso contrário,  $x[n, m] = 0$  (indicando que o coeficiente  $Wf[n, m]$  está associado ao ruído). As probabilidades condicionais  $P(H|X)$  (que representam as distribuições dos valores  $h[n, m]$  dado que  $x[n, m] = 1$  ou  $x[n, m] = 0$ ) são calculadas assumindo uma função de Gibbs, e finalmente a probabilidade *a posteriori* de um coeficiente  $Wf[n, m]$  estar associada ao sinal é dada por

$$P(X|H) = \frac{P(H|X)P(X)}{P(H)}, \quad (3.9)$$

onde a distribuição *a priori*  $P(H)$  dos valores  $h[n, m]$  é assumida uniforme. A distribuição *a priori*  $P(X)$  expressa a probabilidade de um rótulo  $x[n, m]$  valer 0 ou 1, sem levar em consideração a informação contida em  $h[n, m]$ . Os autores



afirmam que os coeficientes significativos (aqueles relacionados com sinal) aparecem em blocos, em volta de informações importantes sobre a imagem, como bordas, picos e quinas, devido à continuidade geométrica existente em imagens naturais. A função  $P(X)$  é então modelada por uma distribuição de Gibbs (assim como a função  $P(H|X)$ ).

Dessa forma, a equação (3.9) combina informações sobre a regularidade da imagem, descritas pela função  $P(H|X)$ , e também informações sobre continuidade geométrica dos coeficientes da transformada, descritas pela função  $P(X)$ . Os coeficientes de wavelet  $Wf[n, m]$  são atualizados através de

$$Wf^{\text{new}}[n, m] = Wf[n, m]P(x[n, m] = 1|H), \quad (3.10)$$

ou seja, coeficientes cuja probabilidade de serem significativos é alta serão pouco alterados, enquanto que coeficientes com probabilidade baixa serão “encolhidos” até 0. Para obter a imagem filtrada com preservação das bordas, a transformada wavelet é invertida utilizando os coeficientes atualizados  $Wf^{\text{new}}[n, m]$ .

Esse método apresenta resultados interessante, mas a estimativa do ruído  $\sigma_W^2$  para cada sub-banda da transformada pode ser difícil de encontrar. Além disso, o custo computacional do método é elevado.

### 3.3.4 Filtragem de Ruído em Imagens Usando Consistência Geométrica

Pizurica *et al.* [PIZ 99] usaram a filtragem de imagens levando em consideração não apenas a medida do ruído, mas também consistência geométrica das bordas. Com base nesses dois fatores, os coeficientes  $W_{2^j}^i f[n, m]$  são modificados. Deseja-se manter os coeficientes associados a bordas, e diminuir a influência dos coeficientes que originam do ruído. A regra de modificação é a mesma para todos os níveis  $j$ , e aplicada independentemente nos coeficientes  $W_{2^j}^1 f[n, m]$  e  $W_{2^j}^2 f[n, m]$  (a transformada com duas imagens de detalhe é utilizada nesse método). Dessa forma, o índice  $i$  (que representa a sub-banda da transformada) será utilizado apenas quando necessário.

A medida do ruído é caracterizada pela magnitude dos coeficientes  $W_{2^j} f[n, m]$ , e a cada coeficiente é associado um rótulo binário  $x[n, m]$ . Deve-se ter  $x[n, m] = 0$ , se o coeficiente  $W_{2^j} f[n, m]$  provém do ruído, e  $x[n, m] = 1$ , se  $W_{2^j} f[n, m]$  tem origem no sinal (ou seja, é uma borda). A consistência geométrica é medida em uma vizinhança centrada no pixel em estudo.

As medidas de ruído e continuidade geométrica são utilizadas para modificar os coeficientes  $W_{2^j} f[n, m]$ . Coeficientes nos quais a medida do ruído é pequena e há continuidade geométrica devem ser preservados, enquanto que os coeficientes contaminados com ruído e sem continuidade geométrica devem ser reduzidos (em módulo). A seguir, é descrito como essas duas medidas são combinadas.

A parcela devida ao ruído é denotada por  $\xi = \xi[n, m]$ . Deseja-se preservar os coeficientes com magnitude  $|W_{2^j} f[n, m]|$  maior, pois magnitudes pequenas geralmente estão associadas ao ruído. Os autores propõem a utilização de um limiar “suave”, através de um parâmetro (tolerância)  $0 < \alpha < 1$ . Nesse caso, há uma região de transição  $(1 - \alpha)T < |W_{2^j} f[n, m]| < (1 + \alpha)T$ , onde os coeficientes são

“encolhidos” até 0. O limiar universal de Donoho [DON 95] é calculado para determinar o valor do limiar  $T$ . A função  $\xi$  proposta pelos autores é dada por

$$\xi[n, m] = \frac{|W_{2j}f[n, m]| - (1 - \alpha)T}{(1 + \alpha)T - |W_{2j}f[n, m]|}, \text{ se } (1 - \alpha)T < |W_{2j}f[n, m]| < (1 + \alpha)T \quad (3.11)$$

A parcela relacionada à consistência geométrica é denotada por  $\eta = \eta[n, m]$ . É desejável que a função  $\eta$  assuma valores maiores do que 1 se a medida de continuidade geométrica em uma vizinhança do pixel  $[n, m]$  for grande. Primeiramente, é definida uma medida de continuidade geométrica  $t[n, m]$ , dada por

$$t[n, m] = \sum_{(k,l) \in N} (2x[k, l] - 1), \quad (3.12)$$

onde  $N$  é uma vizinhança do pixel  $[n, m]$ . A parcela da consistência geométrica  $\eta$  é então dada por

$$\eta[n, m] = e^{t[n, m]}. \quad (3.13)$$

Se na vizinhança  $N$  a maioria dos pixels tiver um rótulo  $x[n, m] = 1$ , o valor de  $t[n, m]$  será positivo, e então  $\eta[n, m] > 1$ . A vizinhança  $N$  sugerida é uma região de  $5 \times 3$  pixels para os coeficientes  $W_{2j}^1 f[n, m]$  e de  $3 \times 5$  pixels para os coeficientes  $W_{2j}^2 f[n, m]$ .

As funções  $\xi$  e  $\eta$  são combinadas em uma função  $q = q[n, m]$ , através de

$$q[n, m] = \begin{cases} 0, & \text{se } |W_{2j}f[n, m]| \leq (1 - \alpha)T \\ \frac{\xi^\beta \eta^\gamma}{1 + \xi^\beta \eta^\gamma}, & \text{se } (1 - \alpha)T < |W_{2j}f[n, m]| < (1 + \alpha)T \\ 1, & \text{se } |W_{2j}f[n, m]| \geq (1 + \alpha)T \end{cases} \quad (3.14)$$

Aqui,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes ajustáveis, que permitem controlar a influência de cada uma das funções  $\xi$  e  $\eta$ .

Finalmente, os coeficientes  $W_{2j}f[n, m]$  são modificados através da função  $q$ :

$$W_{2j}^{\text{new}} f[n, m] = W_{2j}f[n, m] \cdot q[n, m], \quad (3.15)$$

e a transformada inversa é calculada com os coeficientes atualizados  $W_{2j}^{\text{new}} f[n, m]$ . A análise da equação (3.14) mostra que:

- para valores  $|W_{2j}f[n, m]| \leq (1 - \alpha)T$ , os coeficientes  $W_{2j}f[n, m]$  são zerados, pois em princípio estão associados ao ruído;
- para valores  $|W_{2j}f[n, m]| \geq (1 + \alpha)T$ , os coeficientes  $W_{2j}f[n, m]$  são mantidos, pois em princípio estão associados a bordas;
- para valores  $(1 - \alpha)T < |W_{2j}f[n, m]| < (1 + \alpha)T$ , são modificados de acordo com as funções  $\xi$  e  $\eta$ . Quando essas funções assumirem valores altos, a função  $q[n, m]$  é próxima de 1, e o coeficiente  $W_{2j}f[n, m]$  é pouco alterado. Se assumirem valores baixos, a função  $q[n, m]$  será próxima de 0, e o coeficiente  $W_{2j}f[n, m]$  será “encolhido” até 0.

Esse método tem um custo computacional baixo, e apresenta resultados satisfatórios. Entretanto, a alteração dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  é pouco intuitiva, e pode influenciar consideravelmente o desempenho do método. Além disso, como a consistência ao longo das escalas não é explorada, a filtragem de imagens com baixa razão sinal-ruído não é muito eficiente.

### 3.3.5 Utilização de Limiares Adaptativos com Modelagem de Contexto para Filtragem de Imagens

A técnica proposta por Chang *et al.* [CHA 98, CHA 2000] utiliza limiares “suaves” no domínio da transformada wavelet para atenuar o ruído em imagens. Através da modelagem de contexto, os limiares são escolhidos adaptativamente para cada coeficiente da transformada.

Assim como o método de Malfait e Roose [MAL 97], a transformada wavelet redundante com três imagens de detalhe é utilizada, sendo obtidos os coeficientes  $W_{2j}f^1[n, m]$ ,  $W_{2j}f^2[n, m]$  e  $W_{2j}f^3[n, m]$ . A filosofia básica da técnica de Chang e colaboradores é aplicar um limiar “suave” aos coeficientes  $Wf[n, m]$  (os índices relativos à sub-banda e à resolução serão omitidos, para simplificar a notação) e inverter a transformada com os coeficientes atualizados, obtendo a imagem filtrada. Os coeficientes atualizados  $Wf^{\text{new}}[n, m]$  são modificados conforme a seguinte regra:

$$Wf^{\text{new}}[n, m] = g(Wf[n, m]), \quad (3.16)$$

onde  $g(v)$  é a função de *shrinkage* (que realiza a limiarização “suave”), dada por

$$g(v) = \text{sgn}(v) \max(|v| - T, 0), \quad (3.17)$$

onde  $T$  é um limiar. A idéia do método proposto por Chang e colaboradores é escolher o parâmetro  $T = T_{nm}$  adaptativamente para cada coeficiente  $Wf[n, m]$  da transformada.

Primeiramente, considere-se uma imagem contaminada por ruído Gaussiano aditivo

$$f[n, m] = f_0[n, m] + \eta[n, m], \quad (3.18)$$

onde  $f$  é a imagem ruidosa (observada),  $f_0$  é a imagem original, e  $\eta$  é o ruído Gaussiano aditivo. Os coeficientes de detalhe relativos à imagem original  $f_0$  formam uma distribuição com um pico agudo na origem, que pode ser modelada por uma distribuição Gaussiana Generalizada [WES 87], dada por

$$p_0(x) = C(\beta, \sigma_0) e^{-(\alpha(\beta, \sigma_0)|x|)^\beta}, \quad (3.19)$$

onde

$$\alpha(\beta, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \right]^{1/2}, \quad C(\beta, \sigma_0) = \frac{\beta \alpha(\beta, \sigma_0)}{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}, \quad (3.20)$$

e  $\Gamma(x)$  é a função Gama. O parâmetro  $\sigma_0$  é o desvio padrão, e o parâmetro  $\beta$  está associado ao formato da distribuição.

Já os coeficientes de cada sub-banda de detalhe associados ao ruído  $\eta$  são modelados através de uma distribuição Gaussiana com média nula

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.21)$$

Assumindo a mesma distribuição Gaussiana Generalizada para todos os coeficientes de uma mesma sub-banda da transformada, os autores têm mostrado

[CHA 97] que para  $\beta \in [0, 5; 4]$ , uma boa aproximação para o parâmetro  $T$  (equação (3.17)) é dada por

$$T = \frac{\sigma^2}{\sigma_0}, \quad (3.22)$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão dos coeficientes associados ao ruído e  $\sigma_0$  é o desvio padrão dos coeficientes da imagem original  $f_0$ . Pode-se perceber que o limiar  $T$  não depende do parâmetro  $\beta$  (desde que  $\beta \in [0, 5; 4]$ , o que ocorre para a maior parte das imagens naturais, como afirmam os autores). Em [CHA 97], o mesmo parâmetro  $T$  é utilizado para todos os coeficientes dentro da mesma sub-banda (horizontal, vertical ou diagonal). Em [CHA 98, CHA 2000], a idéia de modelagem por contexto foi incorporada, e então cada coeficiente  $Wf[n, m]$  de uma mesma sub-banda é atualizado por um parâmetro  $T = T_{nm}$  diferente. Para tal, cada coeficiente  $Wf[n, m]$  de uma sub-banda é modelado como uma variável aleatória Gaussiana Generalizada, cujo desvio padrão  $\sigma_0[n, m]$  é estimado em uma vizinhança do coeficiente em consideração, através de

$$\sigma_0^2[n, m] = \max \left( \frac{1}{2L + 1} \sum_{Wf[k, l] \in \mathcal{B}_{nm}} (Wf[k, l]^2 - \sigma^2), 0 \right), \quad (3.23)$$

onde  $\mathcal{B}_{nm}$  é uma vizinhança do coeficiente  $Wf[n, m]$  em consideração, compreendendo os  $L$  coeficientes mais próximos com valores maiores do que  $Wf[n, m]$  e os  $L$  coeficientes mais próximos com valores menores do que  $Wf[n, m]$  (totalizando  $2L + 1$  coeficientes envolvidos). Os limiares adaptativos  $T_{nm}$  são então dados por

$$T_{nm} = \frac{\sigma^2}{\sigma_0[n, m]}. \quad (3.24)$$

Finalmente, em cada sub-banda da transformada, cada coeficiente  $Wf[n, m]$  é atualizado conforme a equação (3.16), e a transformada inversa é calculada.

O desempenho dessa técnica pode ser avaliado na Figura 3.12. A imagem *Barbara* e sua versão ruidosa (PSNR = 20,17 dB) são mostradas, respectivamente, nas Figuras 3.12(a) e 3.12(b). A imagem processada pela técnica de Chang e colaboradores é mostrada na Figura 3.12(c) (PSNR = 30,61 dB). Percebe-se que o ruído é atenuado, e as bordas e os detalhes de textura (especialmente no manto) são mantidos. Entretanto, não é claro como a estimativa do ruído  $\sigma$  é obtida, e os autores não mencionaram o custo computacional do método.

### 3.3.6 Filtragem de Imagens Através do Ajuste da Correlação das Magnitudes dos Coeficientes Wavelet

Portilla e Simoncelli [POR 2000] propuseram uma técnica para remoção de ruído Gaussiano aditivo com variância conhecida. O método é baseado na caracterização de propriedades estatísticas de imagens naturais representadas através de wavelets complexas. Em cada sub-banda da transformada, são estimadas a autocorrelação dos coeficientes “limpos” (ou seja, sem ruído) e de suas magnitudes. Essas autocorrelações são projetadas no espaço das imagens tendo as autocorrelações desejadas (obtidas pela modelagem estatística das imagens naturais), e então a trans-

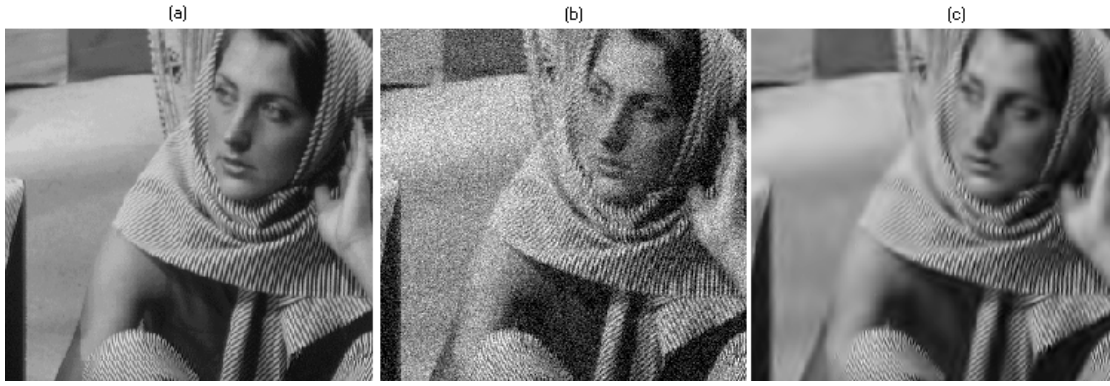


FIGURA 3.12 - (a) Imagem *Barbara* original. (b) Imagem *Barbara* ruidosa (PSNR = 20,17 dB). (c) Filtragem pela técnica de Chang e colaboradores [CHA 2000] (PSNR = 30,61 dB).

formada inversa é aplicada utilizando os coeficientes modificados. Tal processo é aplicado repetidamente, e bons resultados são obtidos após algumas iterações.

Uma variação da transformada wavelet utilizando bases complexas e com quatro imagens de detalhe (correspondendo a quatro orientações) é utilizada para decompor imagens ruidosas (cuja variância do ruído é conhecida). A estimativa da autocorrelação dos coeficientes “limpos” em cada sub-banda complexa é obtida pela diferença entre a autocorrelação da imagem observada e a autocorrelação do ruído na respectiva sub-banda. Já a estimativa da autocorrelação das magnitudes não é trivial, pois o cálculo da magnitude é uma operação não-linear. Para tal estimativa, os autores propuseram um modelo para a autocorrelação das magnitudes, baseado em:

- a autocorrelação normalizada da imagem observada na  $i$ -ésima sub-banda  $a_O^i$ ;
- a autocorrelação correspondente ao ruído Gaussiano aditivo  $a_N^i$ ;
- um modelo genérico  $a_P^i$  para a autocorrelação, obtido pela média das autocorrelações de 53 imagens de referência.

Supondo que a contribuição das duas últimas medidas é aproximadamente proporcional à quantidade de ruído, o seguinte estimador foi sugerido pelos autores:

$$a_E^i = a_O^i + r^i \lambda_P a_P^i - \lambda_N a_N^i, \quad (3.25)$$

onde  $r^i = \sigma_{N^i}^2 / \sigma_{O^i}^2$ , e  $\lambda_P$  e  $\lambda_N$  são escolhidos de tal forma que a SNR seja maximizada no conjunto de treinamento.

O método proposto é baseado na projeção da imagem ruidosa observada no espaço de todas as imagens satisfazendo as mesmas restrições, estimadas para a imagem original. Para tal, as autocorrelações estimadas devem ser impostas aos coeficientes de cada sub-banda e suas respectivas magnitudes. Isso é feito determinando a máscara  $h[\alpha, \beta]$  que satisfaz a relação

$$a_E^i[n, m] = \sum_{\alpha, \beta} h[\alpha, \beta] a_O^i[n - \alpha, m - \beta], \quad (3.26)$$

para os pares  $[n, m]$  dentro de uma vizinhança local com tamanho  $17 \times 17$ . A respectiva sub-banda é então filtrada no domínio da frequência através da multiplicação pelo valor absoluto da raiz quadrada da transformada de Fourier da máscara  $h[\alpha, \beta]$  [POR 2000].

O ajuste das correlações é aplicado paralelamente aos coeficientes das sub-bandas e às suas magnitudes, e os coeficientes estimados são formados pela combinação das magnitudes atualizadas com a fase dos coeficientes complexos modificados. A transformada wavelet inversa é calculada, e o processo acima é repetido iterativamente. Os autores afirmam que resultados ótimos são obtidos após duas ou três iterações da técnica.

Figuras 3.13(a)-(c) mostram, respectivamente, a imagem *Einstein*, sua versão ruidosa (PSNR = 20,5 dB) e a filtragem pela técnica de Portilla e Simoncelli (PSNR = 28,46 dB). A imagem filtrada apresenta uma boa atenuação do ruído e manutenção dos detalhes da imagem original. Entretanto, é necessária uma estimativa *a priori* do ruído. Além disso, como a consistência ao longo das escalas não é utilizada, espera-se que a filtragem de imagens com SNR mais baixas não seja muito eficiente.

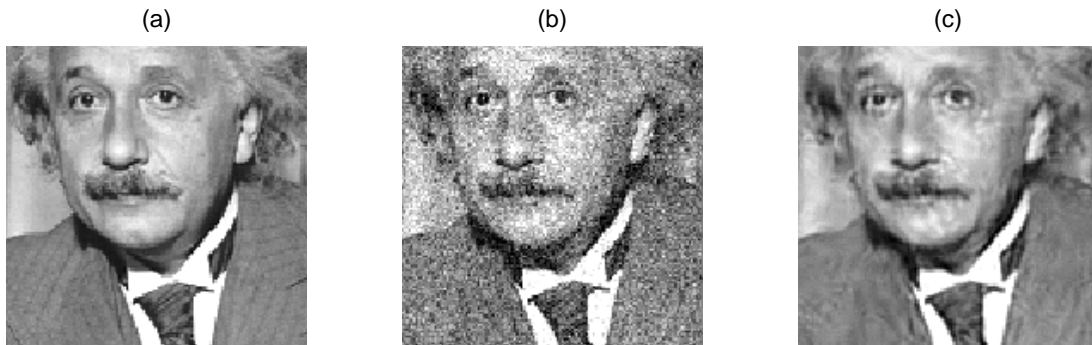


FIGURA 3.13 - (a) Imagem *Einstein* original. (b) Imagem *Einstein* ruidosa (PSNR = 20,50 dB). (c) Filtragem pela técnica de Portilla e Simoncelli (PSNR = 28,46 dB).

### 3.4 Conclusão

Neste Capítulo, foram discutidos alguns métodos baseados na transformada wavelet para filtragem com preservação das bordas. Como foi visto, essa transformada permite a decomposição da imagem em múltiplas resoluções, e a validação das bordas usando o espaço-escala. A transformada wavelet fornece boa localização nos domínios espectral e espacial, permitindo a filtragem seletiva de frequências em regiões específicas da imagem, o que não é possível com outras transformadas (por exemplo, a transformada de Fourier). Essa boa localização nos domínios espacial e da frequência permite que os componentes de altas frequências sejam mantidos nas bordas (mantendo sua definição), e atenuados em regiões homogêneas contaminadas por ruído.

Há vários fatores que influenciam o desempenho dos métodos propostos na literatura para a filtragem de imagens. Em [MAL 92, LU 92] são propostos métodos

que detectam explicitamente as bordas através dos extremos locais da transformada. Tais métodos são exigentes do ponto de vista computacional, pois é necessário um processo iterativo no cálculo da transformada inversa (embora Carmona [CAR 95] tenha desenvolvido um algoritmo não iterativo equivalente mais rápido). O método de Mallat e Zhong [MAL 92] utiliza um limiar baseado apenas na magnitude dos coeficientes para discriminar bordas verdadeiras das falsas. No entanto, esse tipo de limiar tem limitações para imagens nas quais a razão sinal-ruído é pequena, pois os coeficientes relacionados ao ruído podem ter a mesma ordem de magnitude (ou até maior) do que os coeficientes provenientes do sinal (que correspondem às bordas). Lu *et al.* [LU 92] relacionam as bordas nas diferentes resoluções através de uma estrutura de árvore, e para cada ramo da árvore uma métrica é calculada. Essa métrica depende não apenas da média das magnitudes ao longo do ramo, mas também do comprimento do ramo (o que privilegia a continuidade de uma borda em várias resoluções), e do comprimento do contorno (privilegiando estruturas com continuidade geométrica). Ramos cujas métricas são menores do que um certo limiar são então descartados. Essa abordagem parece mais interessante do que o limiar utilizado por Mallat e Zhong, pois leva em consideração a interação entre bordas em várias resoluções, e também a continuidade geométrica dessas bordas. Entretanto, a construção da árvore tem um custo computacional elevado, além de possibilitar conexões errôneas quando imagens têm muito ruído (pois as respectivas árvores são densas em extremos - máximos ou mínimos - locais dos coeficientes).

Em outra classe de métodos [DON 93, XU 94, MAL 97, CHI 97, CHA 98, PIZ 99, SIM 99, MIH 99, CHA 2000, POR 2000, STR 2000, JAN 2001, FIG 2001] as bordas não são calculadas explicitamente no processo de filtragem, o que geralmente resulta em um menor custo computacional. Em [XU 94] a correlação direta entre níveis adjacentes da transformada wavelet é utilizada para a discriminação entre bordas falsas e verdadeiras. Quando a correlação é alta, o respectivo coeficiente é mantido. Um limiar baseado na potência do ruído em cada nível é utilizado para manter ou remover coeficientes. Em muitos casos, não se tem uma estimativa do ruído, dificultando a escolha do limiar. Se um limiar pequeno for usado, o ruído não será filtrado adequadamente. Por outro lado, se o limiar for grande, estruturas pequenas desaparecerão na reconstrução. Em [DON 93], são apresentadas técnicas de filtragem utilizando o limiars “suaves”, ao invés de limiars “duros”. Com o limiar “suave”, os coeficientes são modificados de maneira contínua, ao contrário do corte abrupto que ocorre com limiars “duros”. Esse limiar “suave” é obtido a partir de uma estimativa da variância do ruído na imagem (sinal). Entretanto, as técnicas propostas em [DON 93] foram desenvolvidas para o tratamento de sinais unidimensionais, e não para a filtragem de imagens. Pizurica *et al.* [PIZ 99] também utilizam a idéia do limiar “suave” de Donoho [DON 93], além de privilegiar bordas com continuidade geométrica. Coeficientes cujos vizinhos possuem magnitude grande têm maior probabilidade *a priori* de estarem relacionados a bordas. A incorporação da consistência geométrica facilita a distinção entre sinal e ruído, pois normalmente bordas não aparecem isoladas. Por outro lado, a regra de atualização dos coeficientes é a mesma para todos os níveis. Dessa forma, a evolução dos coeficientes da transformada ao longo dos níveis não é suficientemente explorada. Espera-se que imagens ruidosas contendo estruturas pequenas não sejam filtradas eficientemente por essa técnica. A técnica proposta por Malfait e Roose [MAL 97]

envolve consistência geométrica e evolução dos coeficientes ao longo das escalas, com resultados interessantes. Entretanto, tal método necessita da estimativa da energia do ruído, e nem sempre é fácil isolar uma parte do fundo da imagem (cena) para obter tal estimativa, como sugerem os autores. Além disso, o custo computacional para o cálculo das função de probabilidade envolvidas no método é relativamente alto. No trabalho de Chang *et al.* [CHA 98, CHA 2000], o limiar “suave” é calculado adaptativamente para cada coeficiente da transformada wavelet, baseado em estatísticas locais da imagem. Os resultados exibidos pelos autores são interessantes, mas a consistência ao longo das escalas parece não ser eficientemente explorada. Além disso, há o problema de estimar a variância do ruído na imagem. Outras abordagens probabilísticas similares [SIM 99, MIH 99, STR 2000] também produzem bons resultados, mas assim como a técnica de Chang e colaboradores, a estimativa da variância do ruído é necessária. Além disso, a distribuição espacial dos coeficientes não é levada em consideração. A utilização da autocorrelação dos coeficientes de uma transformada wavelet complexa proposta por Portilla e Simoncelli [POR 2000] para discriminação entre bordas e ruído produz resultados significativos (em termos da PSNR da imagem processada), mas uma estimativa da variância do ruído também é necessária.

O problema de discriminar coeficientes associados a bordas de coeficientes associados ao ruído é comum a todas as técnicas analisadas. Há vários fatores que devem ser discutidos para esclarecer essa questão, como o tipo de transformada utilizada (duas ou três imagens de detalhe, com ou sem dizimação), e qual a wavelet-mãe deve ser utilizada. Foi constatado que basicamente três metodologias são utilizadas para essa discriminação: análise da magnitude dos coeficientes, evolução dos coeficientes ao longo das escalas e distribuição espacial dos coeficientes (embora poucas técnicas explorem essas três propriedades simultaneamente). Uma análise mais detalhada sobre essas questões é realizada no Capítulo 4 deste trabalho.

Com base nos métodos estudados, pode-se concluir que realmente há um grande potencial na utilização de wavelets em problemas de filtragem com preservação de bordas. Vários pesquisadores estão trabalhando com essa ferramenta com resultados experimentais promissores, mas os métodos propostos na literatura não parecem explorar todo o potencial da transformada wavelet. De maneira geral, esses métodos encontram dificuldades quando a quantidade de ruído presente na imagem é grande (pois nesses casos há grande confusão entre coeficientes associados ao ruído e às bordas). Outro problema comum a grande parte das técnicas analisadas se refere à necessidade de estimar *a priori* o ruído presente na imagem.

Também deve-se salientar que métodos específicos para a detecção de bordas utilizando a transformada wavelet não foram abordados neste Capítulo. Entretanto, as técnicas de filtragem analisadas utilizam informações relativas às bordas para evitar seu borramento. Além disso, se o processo de filtragem preservar de fato as bordas, detectores de bordas tradicionais (como o detector de Canny [CAN 86]) podem ser utilizados com sucesso na imagem filtrada.



# 4 Consistência no Espaço-Escala para Filtragem com Preservação das Bordas Usando a Transformada Wavelet

## 4.1 Introdução

Neste Capítulo, será definido com detalhes o tipo de transformada que será utilizada para realizar a filtragem com preservação de bordas. Também serão analisadas as características da transformada wavelet que são relevantes para realizar o processo de filtragem com preservação das bordas, e as técnicas propostas para a realização dessa tarefa serão descritas. No final do Capítulo, são apresentadas as conclusões, incluindo uma comparação das técnicas propostas com o estado-da-arte.

## 4.2 O Tipo de Transformada Wavelet Escolhida

A primeira questão a ser analisada refere-se ao tipo de transformada wavelet bidimensional a ser empregado com respeito ao número de imagens de detalhe utilizado: três imagens de detalhe (horizontal, vertical e diagonal), conforme proposto em [MAL 89] ou duas imagens de detalhe (horizontal e vertical), conforme sugerido em [MAL 92]. A abordagem utilizando apenas duas imagens de detalhe parece mais adequada para a detecção de bordas, pois o gradiente da imagem pode ser estimado diretamente em várias escalas usando essas duas imagens de detalhe (como será visto nas Seções seguintes), e as idéias de Marr-Hildreth ou Canny [MAR 79, CAN 86] para detecção de bordas podem ser aproveitadas.

Outro aspecto a discutir refere-se à utilização da versão dizimada da transformada diádica (na qual em cada nível da transformada se mantém apenas a metade das amostras do nível anterior), ou da versão não-dizimada (na qual mantém-se o mesmo número de amostras em todos os níveis da transformada). A transformada não-dizimada, apesar de utilizar uma quantidade maior de memória, parece mais adequada para determinar a localização exata das bordas em diferentes resoluções (pois todas imagens têm o mesmo tamanho, e a correspondência espacial entre escalas diferentes é imediata). Além disso, a aplicação de limiars para a filtragem de imagens utilizando uma transformada dizimada origina artefatos nas proximidades das bordas, problema esse que pode ser atenuado através da filtragem invariante a translações de Coifman e Donoho [COI 95]. A transformada wavelet não-dizimada mantém as propriedades introduzidas por Coifman e Donoho [CHA 2000], produzindo imagens filtradas com menor quantidade de artefatos.

Finalmente, a última questão a discutir refere-se à wavelet-mãe mais adequada para o problema de filtragem com preservação das bordas. A wavelet-mãe deve ter um suporte pequeno (compacto - para apresentar boa localização espacial), e ter um formato adequado para a detecção das bordas. A spline quadrática proposta por Mallat e Zhong [MAL 92] parece uma boa escolha, pois apresenta um suporte

pequeno e seu formato é aproximadamente igual a da derivada de uma Gaussiana, que é um detector de bordas ótimo para bordas em degrau [CAN 86].

A transformada wavelet que será utilizada nos métodos propostos é apresentada em detalhes a seguir, primeiramente em uma dimensão, e após em duas dimensões. Deve-se ressaltar que o objetivo deste trabalho não é propor uma nova wavelet-mãe, ou um novo tipo de transformada wavelet, mas sim propor novas maneiras de explorar as características da transformada para produzir técnicas eficientes de filtragem com preservação das bordas.

### 4.2.1 Wavelets Unidimensionais

Primeiramente, considere-se uma função  $\psi(x)$  satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (4.1)$$

cuja transformada de Fourier  $\widehat{\psi}(w)$  é dada por

$$\widehat{\psi}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{iw x} dx. \quad (4.2)$$

Se  $\widehat{\psi}(w)$  satisfizer certas condições de admissibilidade, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{w} dw < \infty, \quad (4.3)$$

então  $\psi(x)$  será uma wavelet. Definindo

$$\psi_s(x) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x}{s}\right), \quad (4.4)$$

a transformada wavelet da função  $f(x)$  na escala  $s$  é dada por

$$W_s f(x) = (f * \psi_s)(x), \quad (4.5)$$

onde o sinal ‘\*’ denota a convolução:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x - u) du. \quad (4.6)$$

Avaliando a transformada wavelet em escalas diádicas (potências de 2), obtém-se a transformada wavelet diádica

$$W_{2^j} f(x) = (f * \psi_{2^j})(x), \text{ para } j \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Se existirem duas constantes estritamente positivas  $A_1$  e  $A_2$  tais que

$$A_1 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^j w)|^2 \leq A_2, \quad (4.8)$$

existirá uma wavelet dual  $\xi(x)$  que permite a reconstrução do sinal original  $f(x)$ , através de

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (W_{2^j} f * \xi_{2^j})(x). \quad (4.9)$$

Pode-se calcular  $\xi(x)$  através da relação

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j w) \widehat{\xi}(2^j w) = 1. \quad (4.10)$$

Associada à wavelet  $\psi(x)$  também há uma função de escala  $\phi(x)$ , que satisfaz

$$|\widehat{\phi}(w)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j w) \widehat{\xi}(2^j w). \quad (4.11)$$

Assumindo que a wavelet dual  $\xi(x)$  é tal que  $\widehat{\psi}(w)\widehat{\xi}(w)$  é uma função real, par e positiva, pode-se demonstrar que a condição (4.10) implica em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0, \quad (4.12)$$

portanto  $\phi(x)$  é uma função suavizadora. Assim sendo, a convolução de  $f(x)$  com a função  $\phi_s(x)$  resultará em uma versão suavizada do sinal  $f(x)$  na escala  $s$ . Será usada a notação

$$S_s f(x) = (f * \phi_s)(x), \quad (4.13)$$

onde  $\phi_s(x)$  é definida como em (4.4).

Quando escalas diádicas  $s = 2^j$  são utilizadas, pode-se mostrar que  $S_{2^j} f(x)$  é uma combinação linear de  $S_{2^{j+1}} f(x)$  e  $W_{2^{j+1}} f(x)$ . Assim, considerando-se que o nível  $j = 0$  corresponde à maior resolução do sinal (ou seja,  $f(x) = S_{2^0} f(x)$ ), então  $f(x)$  pode ser calculada a partir de  $S_{2^j} f(x)$  e  $\{W_{2^j} f(x)\}_{j=1,2,\dots,J}$ .

Também, pode-se perceber que  $\phi(x)$  representa um filtro passa-baixas, enquanto que  $\psi(x)$ , um filtro passa-bandas. Dessa maneira,  $S_{2^j} f(x)$  representa os coeficientes associados ao filtro passa-baixas caracterizado por  $\phi(x)$ , e  $W_{2^j} f(x)$  representa os coeficientes associados ao filtro passa-bandas caracterizado por  $\psi(x)$ , ambos na escala  $s = 2^j$ . Assim, uma decomposição do sinal  $f(x)$  em múltiplas resoluções é obtida, como proposto por Mallat [MAL 89].

A representação em wavelets pode ser utilizada para a detecção de bordas, se wavelets apropriadas forem escolhidas. Segundo a proposta de Mallat e Zhong [MAL 92], a partir de uma função suavizante geradora  $\varphi(x)$ , pode-se construir uma wavelet  $\psi(x)$  via

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x). \quad (4.14)$$

A transformada wavelet de  $f(x)$  na escala  $s$  será

$$W_s f(x) = (f * \psi_s)(x) = \left( f * \left( s \frac{d}{dx} \varphi_s \right) \right) (x) = s \frac{d}{dx} (f * \varphi_s)(x). \quad (4.15)$$

Pode-se notar que  $W_s f(x)$  é a derivada da convolução de  $f$  com uma função suavizante. Segundo Canny [CAN 86], os máximos locais de  $|W_s f(x)|$  são as bordas de  $f(x)$  na escala  $s$ . Uma maneira alternativa para a detecção de bordas é usar a proposta de Marr e Hildreth [MAR 79], na qual as bordas de um sinal  $f(x)$  são detectadas a partir dos cruzamentos de zeros da derivada segunda de  $f(x)$ . Para tal, uma outra wavelet  $\psi^a(x)$  pode ser definida via

$$\psi^a(x) = \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}, \quad (4.16)$$

e a transformada com respeito à wavelet  $\psi^a(x)$  será

$$W_s^a f(x) = (f * \psi_s^a)(x) = \left( f * \left( s^2 \frac{d^2}{dx^2} \varphi_s \right) \right)(x) = s^2 \frac{d^2}{dx^2} (f * \varphi_s)(x). \quad (4.17)$$

Segundo Marr e Hildreth, as bordas do sinal  $f$  na escala  $s$  serão dadas pelo cruzamento de zero de  $W_s^a f(x)$ .

Em imagens ruidosas existirão vários máximos locais relacionados com o ruído, e não com as bordas. Tais máximos são chamados de *falsas bordas*. É preciso um outro processamento que permita discriminar as falsas bordas das verdadeiras. Uma informação importante para auxiliar na determinação se um máximo local realmente corresponde a uma borda é a amplitude de  $|W_s f(x)|$ , pois geralmente falsas bordas têm um valor  $|W_s f(x)|$  relativamente menor. Como a detecção de bordas segundo Marr e Hildreth fornece apenas indiretamente uma indicação do valor de  $|W_s f(x)|$ , a idéia de Canny parece mais adequada.

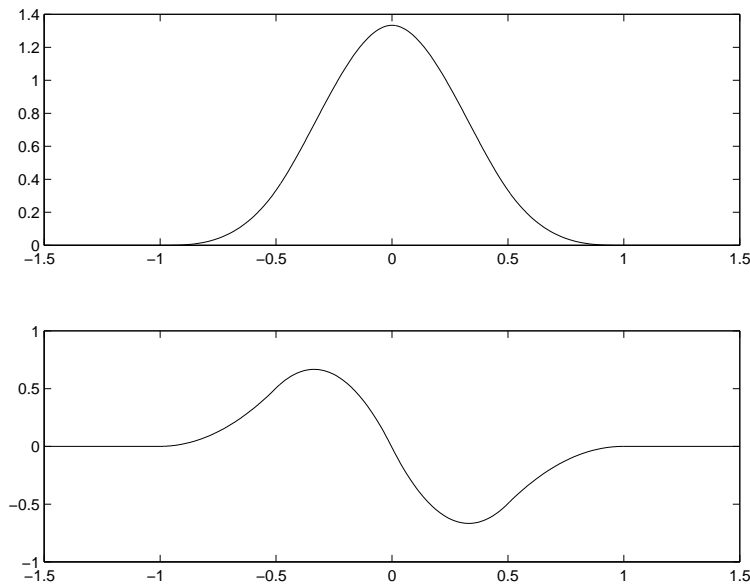


FIGURA 4.1 - Em cima: função geradora  $\varphi(x)$ . Em baixo: wavelet  $\psi(x)$ .

Uma boa escolha para a função geradora  $\varphi(x)$  é uma spline cúbica de suporte compacto, e a wavelet  $\psi(x)$  será sua derivada [MAL 92]. A escolha dessa base de wavelet parece adequada para a detecção de bordas em uma dimensão, pois a forma de  $\psi(x)$  é muito parecida com a derivada de uma Gaussiana, que reconhecidamente caracteriza um detector de bordas ótimo para bordas em degrau [CAN 86]. As

formas das funções  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  são mostradas na Figura 4.1. Para definir essas funções, suponha-se que a transformada de Fourier de  $\phi(x)$  seja escrita como o produto infinito

$$\widehat{\phi}(w) = e^{-i\beta w} \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}w), \quad (4.18)$$

onde  $\beta$  é uma constante de fase, e  $H(w)$  é uma função  $2\pi$ -periódica que satisfaz

$$|H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 \leq 1 \text{ e } |H(0)| = 1. \quad (4.19)$$

A condição (4.19) garante que  $\phi(x)$  é uma função suavizadora. Através da equação (4.18), pode-se mostrar que

$$\widehat{\phi}(2w) = e^{-i\beta w} H(w) \widehat{\phi}(w). \quad (4.20)$$

A wavelet  $\psi(x)$  é definida de modo que

$$\widehat{\psi}(2w) = e^{-i\beta w} G(w) \widehat{\phi}(w). \quad (4.21)$$

A partir da equação (4.11), pode-se mostrar que a wavelet dual  $\xi(x)$  deve satisfazer

$$\widehat{\psi}(2w) \widehat{\xi}(2w) = |\widehat{\phi}(w)|^2 - |\widehat{\phi}(2w)|^2. \quad (4.22)$$

Se  $\widehat{\xi}(w)$  for escrito da forma

$$\widehat{\xi}(2w) = e^{i\beta w} K(w) \widehat{\phi}(w), \quad (4.23)$$

pode-se substituir as equações (4.20) e (4.23) na equação (4.22), obtendo-se a relação

$$|H(w)|^2 + G(w)K(w) = 1. \quad (4.24)$$

Uma família de funções  $H(w)$ ,  $G(w)$  e  $K(w)$  que satisfaz tal condição é dada por

$$H(w) = e^{iw/2} [\cos(w/2)]^{2n+1}, \quad (4.25)$$

$$G(w) = 4ie^{iw/2} \text{sen}(w/2), \quad (4.26)$$

$$K(w) = \frac{1 - |H(w)|^2}{G(w)}. \quad (4.27)$$

Para que  $\phi(x)$  seja simétrica com respeito à origem, e que  $\psi(x)$  seja anti-simétrica com respeito à origem, define-se  $\beta = 1/2$ . Através das equações (4.18) e (4.21), pode-se obter

$$\widehat{\phi}(w) = \left( \frac{\text{sen}(w/2)}{w/2} \right)^{2n+1}, \quad (4.28)$$

$$\widehat{\psi}(w) = iw \left( \frac{\text{sen}(w/4)}{w/4} \right)^{2n+2}, \quad (4.29)$$

e a função suavizante  $\varphi(x)$  satisfará a relação

$$\widehat{\varphi}(w) = \left( \frac{\text{sen}(w/4)}{w/4} \right)^{2n+2}. \quad (4.30)$$

Escolhendo  $2n+1 = 3$ , a função geradora  $\varphi(x)$  e a wavelet  $\psi(x)$  mostradas na Figura 4.1 são obtidas. Deve-se ressaltar que a função geradora  $\varphi(x)$  não é igual à função de escala  $\phi(x)$ , como as equações (4.28) e (4.30) mostram.

### 4.2.1.1 A Transformada Wavelet Discreta Unidimensional

Na prática, são utilizados sinais discretos, representados por sinais digitais  $f[n]$ , ao invés de sinais analógicos  $f(x)$ . Isso requer a discretização da transformada wavelet, resultando na *transformada wavelet discreta* (DWT). Nesse caso, o processo de decomposição estará associado a dois filtros digitais  $H$  e  $G$  (cujas respostas em frequência são dadas pelas equações (4.25) e (4.26)), e o processo de reconstrução envolverá outros dois filtros  $\tilde{H}$  e  $K$  (cujas respostas em frequência são, respectivamente, o conjugado do filtro  $H$  e a expressão dada na equação (4.27)). A resposta ao impulso desses quatro filtros é denotada, respectivamente, por  $h[n]$ ,  $g[n]$ ,  $\tilde{h}[n]$  e  $k[n]$ . Pode-se notar que o filtro  $H$  realiza, no domínio discreto, a mesma função que o filtro caracterizado por  $\phi(x)$  realiza no domínio contínuo. Raciocínio análogo relaciona o filtro  $G$  à wavelet  $\psi(x)$ .

Considere-se  $g_j[n]$  um filtro obtido colocando  $2^j - 1$  zeros entre os coeficientes de  $g[n]$ , e  $h_j[n]$  o filtro definido de maneira análoga com relação a  $h[n]$ . Com isso,  $S_{2^j} f[n]$  e  $W_{2^j} f[n]$  podem ser calculados recursivamente no processo de decomposição, através da expressão abaixo:

$$\begin{cases} S_{2^{j+1}} f[n] = S_{2^j} f[n] * h_j[n] \\ W_{2^{j+1}} f[n] = S_{2^j} f[n] * g_j[n] \end{cases}, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (4.31)$$

Também pode-se reconstruir o sinal  $f[n]$  recursivamente através de

$$S_{2^{j-1}} f[n] = W_{2^j} f[n] * k_{j-1}[n] + S_{2^j} f[n] * \tilde{h}_{j-1}[n], \quad j = J, J-1, \dots, 1 \quad (4.32)$$

Para as funções  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  ilustradas pela Figura 4.1, os filtros  $h[n]$  e  $g[n]$  são, respectivamente,  $h = (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)$  e  $g = (-2, 2)$ . Para mais detalhes sobre a implementação da transformada wavelet discreta, aconselha-se a leitura do artigo de Mallat e Zhong [MAL 92].

Como exemplo da transformada wavelet discreta em uma dimensão, considere-se a borda em degrau ruidosa  $f[n]$  mostrada na Figura 3.8. Na Figura 4.2, são mostrados os coeficientes  $W_{2^j} f[n]$ , usando 4 níveis na decomposição. Já os coeficientes  $S_{2^j} f[n]$ , que são as versões filtradas do sinal  $f[n]$  nas resoluções  $2^j$ , são mostrados na Figura 4.3. Os máximos locais de  $W_{2^j} f[n]$  (correspondendo às bordas detectadas em cada resolução) são mostrados na Figura 4.4. Pode-se notar que, à medida que a resolução diminui ( $j$  aumenta), o número de falsas bordas associadas ao ruído diminuem, e o máximo local correspondente à única borda verdadeira na imagem se sobressai.

## 4.2.2 Wavelets Bidimensionais

Os conceitos de decomposição em wavelets discutidos na seção anterior podem ser estendidos para funções bidimensionais. Neste trabalho, será utilizada a transformada wavelet não-dizimada com duas imagens de detalhe [MAL 92]. A abordagem com duas imagens de detalhe pode ser utilizada para aproximar diretamente o gradiente da imagem em múltiplas resoluções, sendo portanto indicada para detecção de bordas.

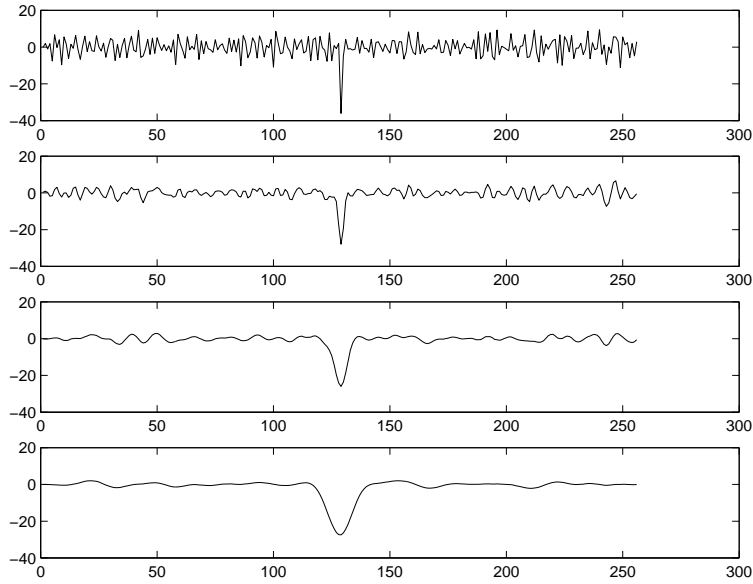


FIGURA 4.2 - Coeficientes  $W_{2^j} f[n]$  relativos à borda em degrau unidimensional ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$  (níveis aumentam de cima para baixo).

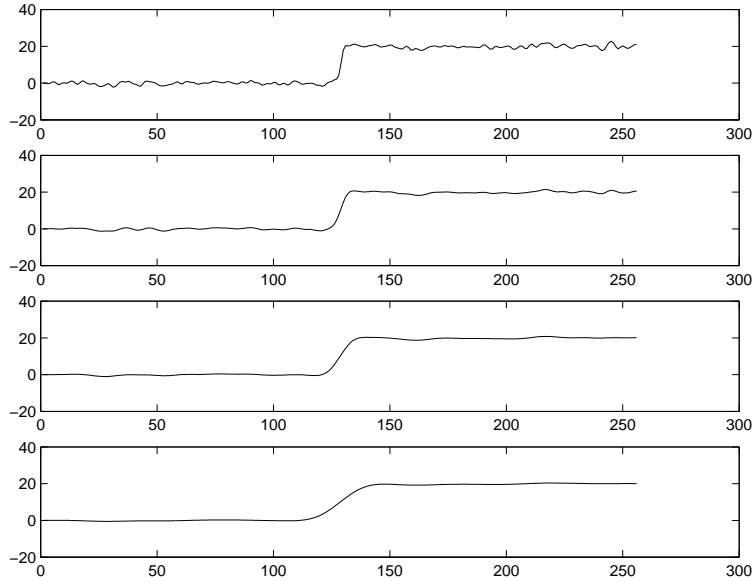


FIGURA 4.3 - Coeficientes  $S_{2^j} f[n]$  relativos à borda em degrau unidimensional ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$  (níveis aumentam de cima para baixo).

Para definir a transformada wavelet em duas dimensões, duas wavelets  $\psi^1(x, y)$  e  $\psi^2(x, y)$  são necessárias. Essas wavelets são definidas como

$$\psi_s^i(x, y) = \frac{1}{s^2} \psi^i\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right), \quad i = 1, 2, \quad (4.33)$$

e a transformada wavelet diádica da função  $f(x, y)$  na escala  $s = 2^j$  tem dois componentes, dados por

$$W_{2^j}^i f(x, y) = (f * \psi_{2^j}^i)(x, y), \quad i = 1, 2. \quad (4.34)$$

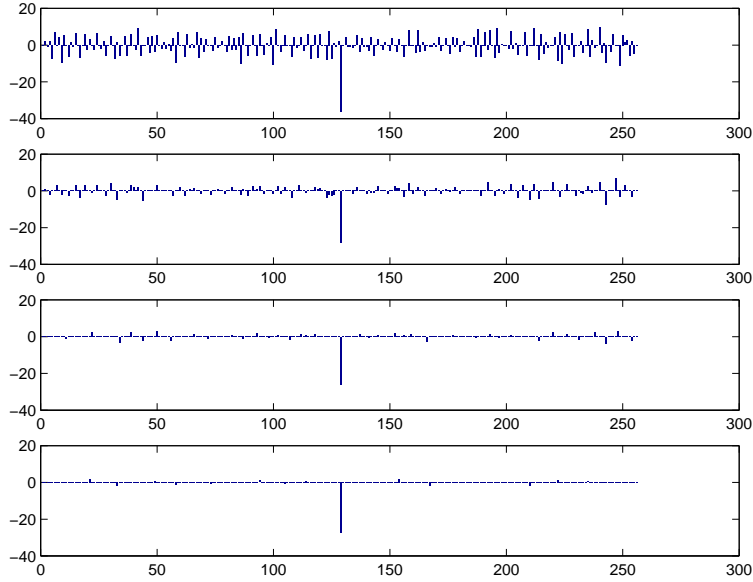


FIGURA 4.4 - Máximos locais de  $|W_{2^j} f[n]|$  relativos à borda em degrau unidimensional ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$  (níveis aumentam de cima para baixo).

Usando notação vetorial, pode-se escrever

$$\mathbf{W}_{2^j} f(x, y) = (W_{2^j}^1 f(x, y), W_{2^j}^2 f(x, y)). \quad (4.35)$$

Se  $\widehat{\psi}^1(w_x, w_y)$  e  $\widehat{\psi}^2(w_x, w_y)$  denotam as transformadas de Fourier bidimensionais de  $\psi^1(x, y)$  e  $\psi^2(x, y)$ , assume-se que existem duas constantes estritamente positivas  $B_1$  e  $B_2$  tais que

$$B_1 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( |\widehat{\psi}^1(2^j w_x, 2^j w_y)|^2 + |\widehat{\psi}^2(2^j w_x, 2^j w_y)|^2 \right) \leq B_2. \quad (4.36)$$

Esta restrição garante que o plano de Fourier bidimensional é coberto por dilatações diádicas de  $\widehat{\psi}^1(w_x, w_y)$  e  $\widehat{\psi}^2(w_x, w_y)$ , permitindo uma representação completa e estável da função  $f(x, y)$  através da transformada wavelet. Conseqüentemente, existirão duas wavelets duais  $\xi^1(x, y)$  e  $\xi^2(x, y)$ , satisfazendo

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \widehat{\psi}^1(2^j w_x, 2^j w_y) \widehat{\xi}^1(2^j w_x, 2^j w_y) + \widehat{\psi}^2(2^j w_x, 2^j w_y) \widehat{\xi}^2(2^j w_x, 2^j w_y) \right) = 1. \quad (4.37)$$

Neste caso, a função original  $f(x, y)$  pode ser reconstruída via

$$f(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( (W_{2^j}^1 f * \xi_{2^j}^1)(x, y) + (W_{2^j}^2 f * \xi_{2^j}^2)(x, y) \right). \quad (4.38)$$

Também existirá uma função de escala associada  $\phi(x, y)$ , cuja integral no plano é igual a 1 e que converge para 0 no infinito. Como conseqüência, tal função  $\phi(x, y)$



será uma função suavizante. Pode-se obter uma versão filtrada de  $f(x, y)$  na escala  $2^j$  via

$$S_{2^j} f(x, y) = (f * \phi_{2^j})(x, y). \quad (4.39)$$

Sendo  $\phi(x, y)$  um filtro passa-baixas, e  $\psi^i(x, y)$  filtros passa-banda, os coeficientes  $S_{2^j} f(x, y)$  e  $\mathbf{W}_{2^j} f(x, y)$  são os coeficientes associados aos filtros passa-baixas e passa-banda, respectivamente. Mais do que isso, os componentes  $\mathbf{W}_{2^j} f(x, y)$ , para  $j = 1, \dots, J$  são os detalhes perdidos na suavização, quando se passa de  $S_{2^0} f(x, y)$  para  $S_{2^J} f(x, y)$ .

Conforme foi discutido na Seção anterior, é desejável uma base de wavelet que possibilite a detecção das bordas da imagem  $f(x, y)$  na escala  $2^j$ . Como no caso unidimensional, é escolhida uma função suavizante geradora  $\varphi(x, y)$ , que tenha integral igual a 1 e que tenda a 0 no infinito. Assim, são construídas as wavelets  $\psi^1(x, y)$  e  $\psi^2(x, y)$  através de

$$\psi^1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) \text{ e } \psi^2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \quad (4.40)$$

Pode-se observar que

$$\mathbf{W}_s f(x, y) = \begin{pmatrix} W_s^1 f(x, y) \\ W_s^2 f(x, y) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (f * \varphi_s)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (f * \varphi_s)(x, y) \end{pmatrix} = s \nabla (f * \varphi_s)(x, y). \quad (4.41)$$

Segundo a equação (4.41), o coeficiente  $\mathbf{W}_s f(x, y)$  é o gradiente da versão filtrada de  $f$  na escala  $s$ . De acordo com Canny [CAN 86], uma borda pode ser definida como o máximo local do módulo do gradiente na direção apontada pelo gradiente, o que possibilita detectar as bordas de  $f(x, y)$  na escala  $s$  a partir dos coeficientes  $\mathbf{W}_s f(x, y)$ .

Nas aplicações práticas utilizam-se imagens digitais  $f[n, m]$ , então é preciso discretizar a transformada bidimensional. Para tal, são utilizadas wavelets  $\psi^1(x, y)$  e  $\psi^2(x, y)$  que são um produto separável de funções de  $x$  e de  $y$ . Inicialmente, considere-se a mesma wavelet  $\psi(x)$  e função de escala  $\phi_0(x)$  que foram definidas no caso unidimensional, mostradas na Figura 4.1. Pode-se escrever a transformada de Fourier da wavelet  $\psi(x)$  como

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(2w) &= e^{-i\beta w} G(w) \widehat{\phi}_0(w), \text{ onde} \\ \widehat{\phi}_0(w) &= e^{-i\beta w} \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}w), \end{aligned} \quad (4.42)$$

Define-se

$$\psi^1(x, y) = 2\psi(x)\phi_0(2y) \text{ e } \psi^2(x, y) = 2\phi_0(2x)\psi(y). \quad (4.43)$$

Calculando as transformadas de Fourier de  $\phi$  e  $\psi$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^1(2w_x, 2w_y) &= e^{i\beta w_x} G(w_x) \widehat{\phi}_0(w_x) \widehat{\phi}_0(w_y), \\ \widehat{\psi}^2(2w_x, 2w_y) &= e^{i\beta w_y} G(w_y) \widehat{\phi}_0(w_x) \widehat{\phi}_0(w_y). \end{aligned} \quad (4.44)$$

As wavelets duais  $\xi^1(x, y)$  e  $\xi^2(x, y)$  devem satisfazer as relações

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}^1(w_x, w_y) &= e^{i\beta w_x} K(w_x) L(w_y) \widehat{\phi}_0(w_x) \widehat{\phi}_0(w_y), \\ \widehat{\xi}^2(w_x, w_y) &= e^{i\beta w_y} K(w_y) L(w_x) \widehat{\phi}_0(w_x) \widehat{\phi}_0(w_y), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde as funções  $K(w)$  e  $L(w)$  são  $2\pi$ -periódicas, e satisfazem

$$G(w)K(w) + |H(w)|^2 = 1 \text{ e } L(w) = \frac{1 + |H(w)|^2}{2}. \quad (4.46)$$

#### 4.2.2.1 A Transformada Wavelet Discreta Bidimensional

A separabilidade das wavelets  $\psi^1$  e  $\psi^2$  é utilizada para calcular a transformada wavelet discreta em duas dimensões. Para tal, define-se  $f[n, m] * (h[n], g[n])$  como a convolução separável das linhas de  $f[n, m]$  com o filtro  $h[n]$ , e das colunas de  $f[n, m]$  com o filtro  $g[n]$ , onde  $h[n]$  e  $g[n]$  são filtros unidimensionais. A transformada wavelet discreta pode ser calculada recursivamente através de

$$\begin{aligned} S_{2^{j+1}} f[n, m] &= S_{2^j} f[n, m] * (h_j[n], h_j[n]) \\ W_{2^{j+1}}^1 f[n, m] &= S_{2^j} f[n, m] * (g_j[n], \delta[n]) \quad , \\ W_{2^{j+1}}^2 f[n, m] &= S_{2^j} f[n, m] * (\delta[n], g_j[n]) \end{aligned} \quad (4.47)$$

e  $\delta[n]$  é a função impulso unitário discreta, tal que  $f[n] * \delta[n] = f[n]$  para qualquer sinal  $f[n]$ . A imagem original  $f[n, m]$  pode ser reconstruída a partir de  $S_{2^j} f[n, m]$  e  $\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]$ , para  $j = 1, \dots, J$ . O processo de reconstrução é dado por

$$\begin{aligned} S_{2^{j-1}} f[n, m] &= W_{2^j}^1 f[n, m] * (k[j-1], l[j-1]) + \\ &W_{2^j}^2 f[n, m] * (l[j-1], k[j-1]) + \\ &S_{2^j} f[n, m] * (\tilde{h}[j-1], \tilde{h}[j-1]), \text{ para } j = J, J-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para detectar as bordas da imagem digital  $f[n, m]$  na escala  $2^{j-1}$ , são calculados os máximos locais de

$$\|\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]\| = \sqrt{W_{2^j}^1 f[n, m]^2 + W_{2^j}^2 f[n, m]^2} \quad (4.49)$$

ao longo da direção do gradiente  $\theta_{2^j}[n, m]$ , que é dada por

$$\theta_{2^j}[n, m] = \tan^{-1} \left( \frac{W_{2^j}^2 f[n, m]}{W_{2^j}^1 f[n, m]} \right). \quad (4.50)$$

A seguir será exemplificada a decomposição de imagens digitais via wavelets, considerando-se a imagem *house* ruidosa (Figura 2.8(b)). Inicialmente, são calculados os coeficientes  $W_{2^j}^1 f[n, m]$  e  $W_{2^j}^2 f[n, m]$ , e após é computado o módulo do gradiente  $\|\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]\|$ , que está mostrado na Figura 4.5. Os máximos locais de  $\|\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]\|$  ao longo da direção do gradiente podem ser vistos na Figura 4.6. Pode-se notar que na escala  $2^1$ , há uma grande quantidade de falsas bordas, pois a quantidade de ruído na imagem é grande. À medida que a escala aumenta, a filtragem passa-baixas é introduzida pela transformada wavelet, e as bordas verdadeiras aparecem mais claramente. Por outro lado, o formato dos contornos das bordas vão sendo modificados quando a escala aumenta. Os coeficientes  $S_{2^j} f[n, m]$ , que representam versões suavizadas de  $f[n, m]$  em diferentes escalas, estão mostrados na Figura 4.7. Percebe-se que as imagens  $S_{2^j} f[n, m]$  vão ficando mais borradas (e com menos ruído) quando  $j$  aumenta.

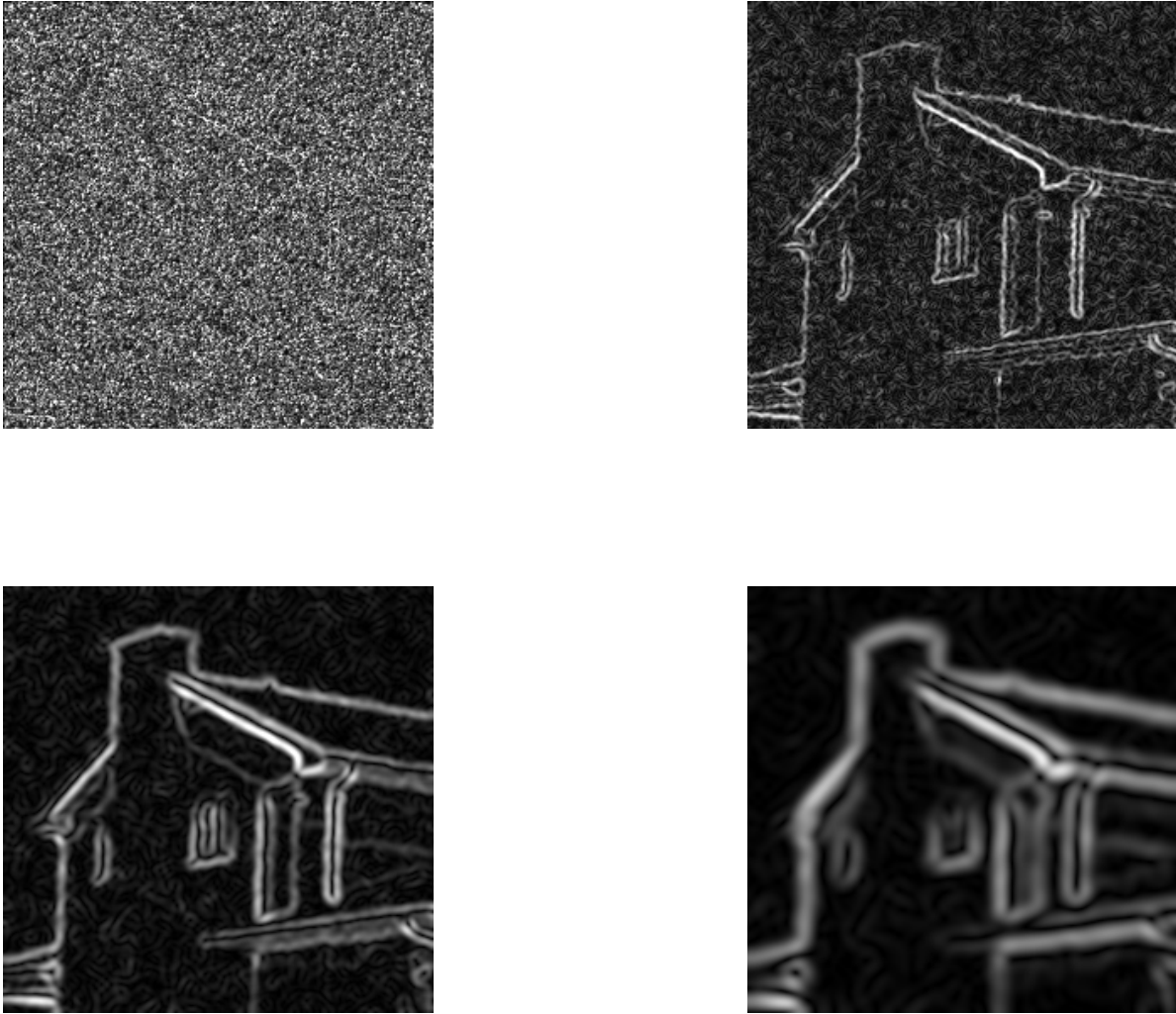


FIGURA 4.5 - Módulos dos gradientes  $\|\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]\|$  referentes à imagem *house* ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$ . Níveis aumentam da esquerda para direita, de cima para baixo.

### 4.3 Propriedades da Transformada Wavelet a Serem Exploradas

Como foi comentado no Capítulo 3, a tarefa principal a ser resolvida para realizar a remoção de ruído em imagens preservando as bordas é distinguir entre coeficientes associados às bordas e coeficientes associados ao ruído.

A análise das técnicas existentes na literatura, assim como a análise teórica das propriedades da transformada wavelet, indicam que três características parecem fundamentais para discriminar coeficientes associados às bordas de coeficientes associados ao ruído. São elas:

1. Magnitude dos coeficientes da transformada: a análise da magnitude dos coeficientes em cada nível da transformada é fundamental, pois fornece informação sobre variações locais dos tons de cinza da imagem (em geral, as bordas são

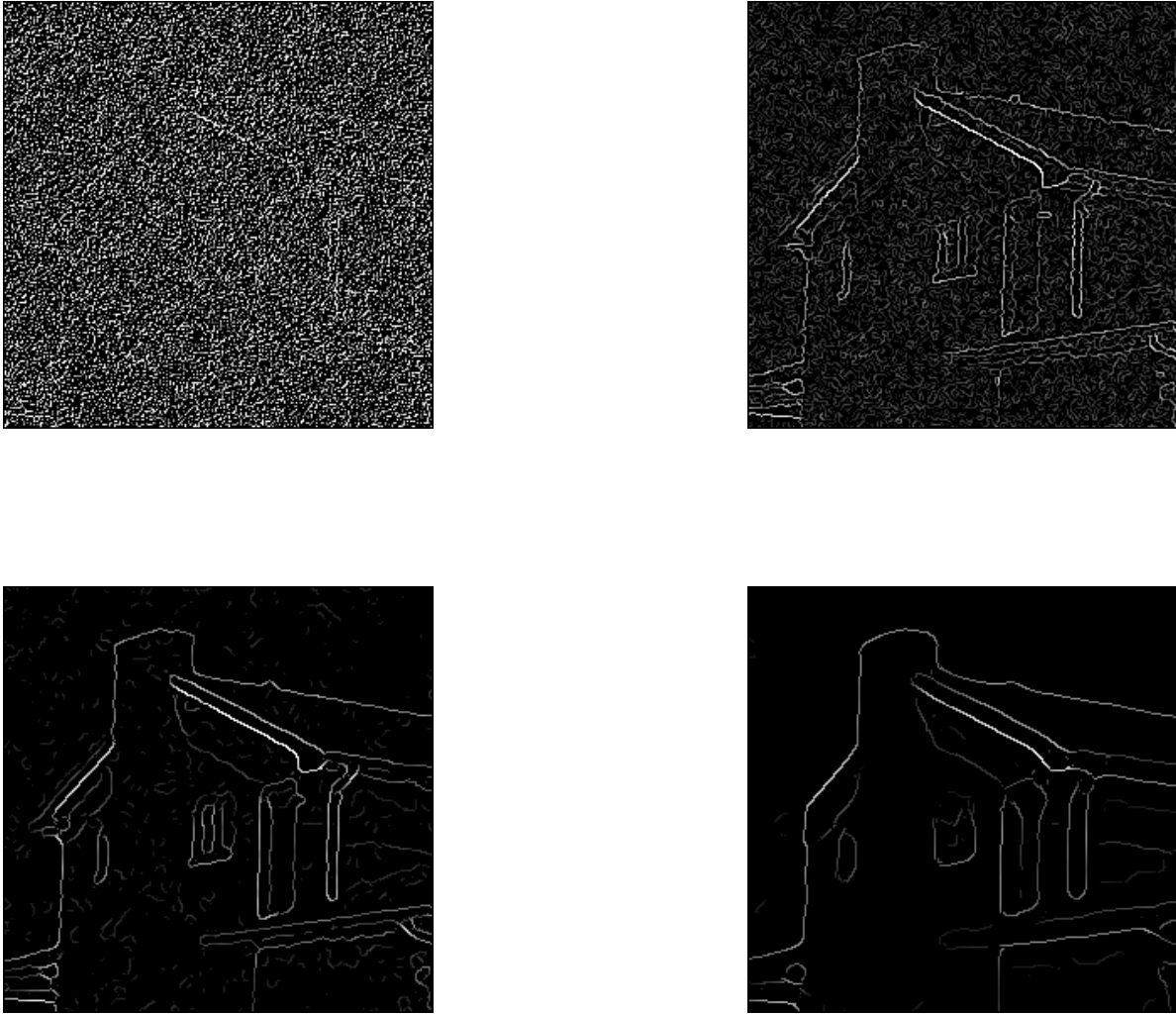


FIGURA 4.6 - Máximos locais de  $\|\mathbf{W}_{2^j} f[n, m]\|$  referentes à imagem *house* ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$ . Níveis aumentam da esquerda para direita, de cima para baixo.

caracterizadas por variações maiores nos tons de cinza da imagem, ou seja, os coeficientes da transformada wavelet associados às bordas são tipicamente maiores do que os coeficientes associados ao ruído). Essa discriminação entre bordas e ruído baseada na magnitude dos coeficientes vêm sendo realizada de diferentes maneiras, por exemplo, através da aplicação de limiares “duros” e “suaves” [DON 93, DON 95, COI 95, PIZ 99], e da modelagem probabilística da distribuição dos coeficientes [SIM 96, CHA 98, STR 2000, CHA 2000, POR 2000, JAN 2001, FIG 2001].

2. Evolução dos coeficientes ao longo das escalas: as magnitudes dos coeficientes associados às bordas tendem a apresentar um decaimento muito menor ao longo das escalas do que as magnitudes associadas ao ruído. Essa característica da transformada wavelet é fundamental em imagens contaminadas por grandes quantidades de ruído, pois nessas imagens pode-se ter magnitudes de coefici-

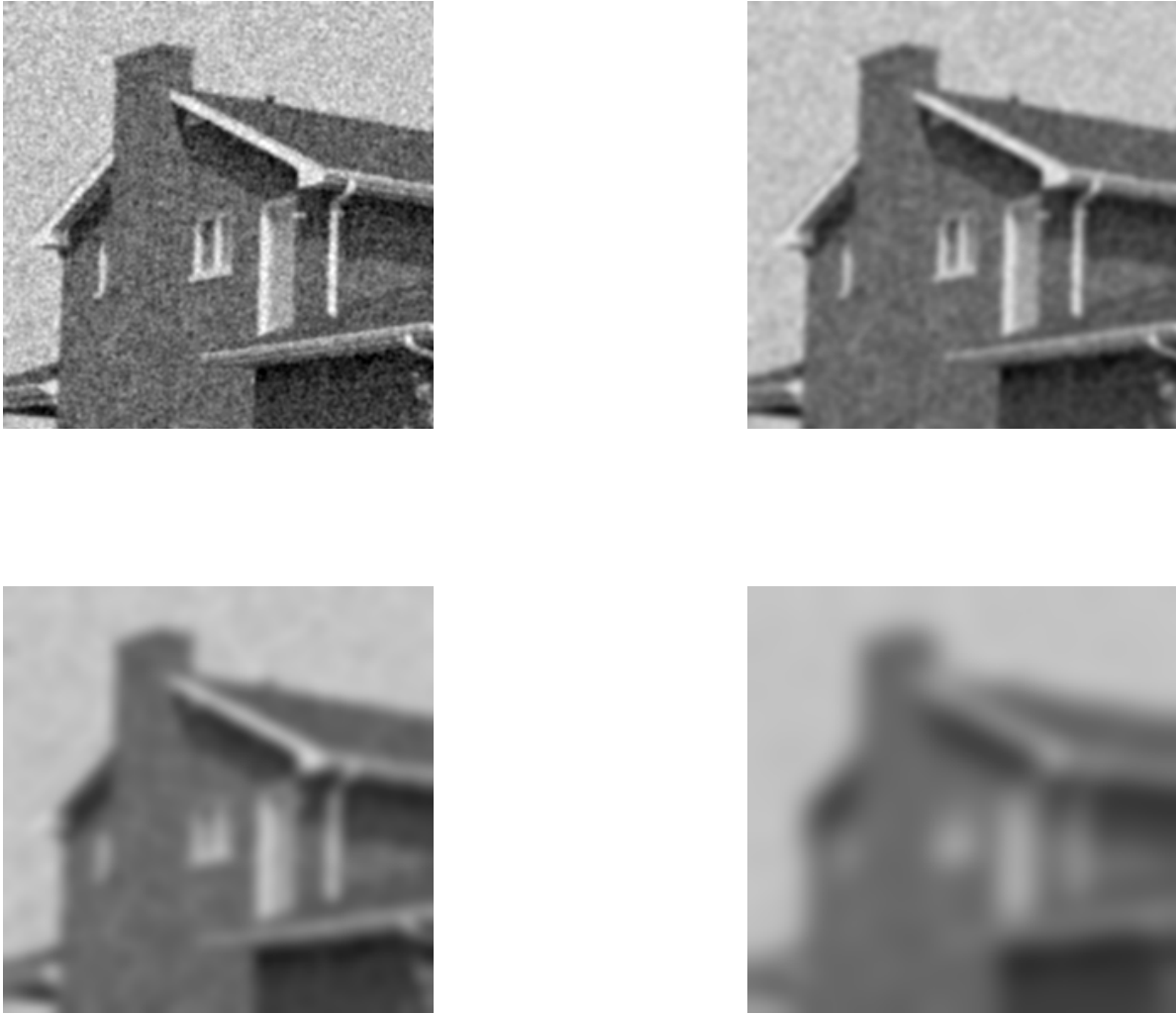


FIGURA 4.7 - Coeficientes  $S_{2^j} f[n, m]$  referentes à imagem *house* ruidosa, para  $j = 1, 2, 3, 4$ . Níveis aumentam da esquerda para direita, de cima para baixo.

entes associados ao ruído maiores do que magnitudes associadas a algumas bordas. Uma técnica bastante utilizada para explorar a consistência ao longo das escalas é o cálculo do expoente de Lipschitz [MAL 92a, MAL 97], já que coeficientes relacionados com bordas em degrau possuem expoentes de Lipschitz próximos de zero [MAL 92]. Outra abordagem utilizada é a correlação direta dos coeficientes em escalas consecutivas [XU 94], pois a correlação tende a salientar coeficientes associados às bordas, cujas magnitudes são grandes em escalas consecutivas.

3. Consistência geométrica dos coeficientes: em imagens naturais, as bordas tipicamente aparecem formando contornos, e não isoladas. Essa relação espacial entre os coeficientes vem sendo explorada através da convolução dos coeficientes com máscaras espaciais [PIZ 99], através de modelos de campos de Markov [MAL 97], ou pela medição da função de autocorrelação das magnitudes [POR 2000].

Uma análise mais detalhada sobre as técnicas baseadas na transformada wavelet indica que, em geral, as três características citadas anteriormente não são exploradas simultaneamente nos métodos propostos na literatura [JUN 2000]. Há diversas maneiras de explorar cada uma dessas características de maneira eficiente, e também várias possibilidades para combiná-las. A seguir, são propostas algumas abordagens que utilizam e incorporam de maneira original essas três características. Atenção especial será dada ao tratamento de imagens muito ruidosas (ou seja, com SNR pequena), pois a distinção entre bordas e ruído nessas imagens ainda é difícil nos métodos apresentados na literatura. Além disso, é desejável que as técnicas desenvolvidas sejam adaptativas (ou seja, mantenham o padrão de desempenho para imagens contaminadas com diferentes quantidade de ruído, sem a necessidades de estimativas *a priori* do ruído).

## 4.4 Abordagens Propostas neste Trabalho

### 4.4.1 Filtragem Interativa de Imagens Usando Continuidade no Espaço-Escala

Esta técnica utiliza a continuidade no espaço-escala obtido com a transformada wavelet, e reduz o ruído em imagens digitais preservando as bordas [JUN 2001]. Em cada nível da transformada, um limiar adaptativo é escolhido, e uma função de *shrinkage* que assume valores entre 0 e 1 é construída. As funções de *shrinkage* são combinadas em níveis consecutivos para preservar bordas cujas respostas são persistentes ao longo das escalas. Finalmente, restrições geométricas são aplicadas para remover bordas que aparecem isoladas, já que as bordas verdadeiras em imagens aparecem formando contornos.

Dada uma imagem digital  $f[n, m]$ , a transformada wavelet não-dizimada usando apenas duas imagens de detalhe é aplicada [MAL 92], resultando nas imagens de detalhe  $W_{2^j}^1 f$ ,  $W_{2^j}^2 f$  e a imagem suavizada  $S_{2^j} f$  a cada escala  $2^j$ . A magnitude das bordas pode então ser aproximada por

$$M_{2^j} f = \sqrt{(W_{2^j}^1 f)^2 + (W_{2^j}^2 f)^2}, \quad (4.51)$$

e sua orientação é dada pela direção do gradiente, expressa por

$$\theta_{2^j} f = \tan^{-1} \left( \frac{W_{2^j}^2 f}{W_{2^j}^1 f} \right). \quad (4.52)$$

Para realizar a discriminação entre as respostas associadas ao ruído e respostas associadas a bordas verdadeiras, os coeficientes  $M_{2^j} f$  são classificados com respeito a sua magnitude, continuidade geométrica, e consistência em múltiplas resoluções, como será descrito a seguir.

#### 4.4.1.1 Continuidade Geométrica

Geralmente, as bordas de uma imagem não aparecem isoladas. Elas formam contornos, que serão considerados lineares por partes neste trabalho. Na abordagem proposta, um coeficiente  $M_{2^j} f[n, m]$  tem uma probabilidade maior de ser uma borda

se os seus vizinhos ao longo da direção do contorno local também possuem magnitude grande. Para detectar esse comportamento, as direções dos gradientes  $\theta_{2j} f$  são quantizadas em  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ , aproveitando o reticulado retangular que define o domínio da grande maioria das imagens digitais. A direção do contorno é ortogonal à direção do gradiente em cada borda, podendo então ser estimada através de  $\theta_{2j} f$ . As magnitudes  $M_{2j} f[n, m]$  são somadas na direção do contorno, de acordo com a seguinte regra de atualização:

$$M_{2j}^{(1)} f[n, m] = \begin{cases} \sum_{i=-N}^N w[i] M_{2j} f[n+i, m], & \text{se a direção local do contorno é } 0^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N w[i] M_{2j} f[n+i, m+i], & \text{se a direção local do contorno é } 45^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N w[i] M_{2j} f[n, m+i], & \text{se a direção local do contorno é } 90^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N w[i] M_{2j} f[n+i, m-i], & \text{se a direção local do contorno é } 135^\circ, \end{cases} \quad (4.53)$$

onde  $2N+1$  é o número de pixels adjacentes que devem estar alinhados no cálculo da continuidade geométrica, e  $w[i]$  é uma janela que permite que pixels vizinhos tenham pesos diferentes, de acordo com sua distância ao pixel  $[n, m]$  em consideração (e tais que  $\sum_{i=-N}^N w[i] = 1$ ).

Após a aplicação dessa regra de atualização, as magnitudes dos coeficientes cujos vizinhos têm magnitudes altas serão fortalecidas, enquanto as magnitudes dos coeficientes cujos vizinhos têm magnitudes baixas serão enfraquecidas. Entretanto, essa abordagem tem limitações nas proximidades de quinas e junções, onde duas ou mais direções locais de contorno ocorrem.

Na presença do ruído, alguns coeficientes podem estar aleatoriamente alinhados, e conseqüentemente poderiam ser realçados. Para atenuar esse problema, as direções do contorno em escalas consecutivas da transformada são comparadas. Espera-se que os contornos tenham aproximadamente a mesma orientação em níveis consecutivos, mas as respostas associadas ao ruído não devem obedecer a essa regra (pois gradientes associados ao ruído são assumidos como tendo orientações aleatórias em resoluções diferentes). Dessa forma, uma segunda regra de atualização é aplicada aos coeficientes  $M_{2j}^{(1)} f$ .

Em cada resolução, os gradientes podem ser interpretados como vetores com magnitude  $M_{2j}^{(1)} f$  e argumento  $\theta_{2j} f$ . A segunda regra de atualização leva em consideração o produto interno de vetores, que é maximizado quando os dois vetores têm a mesma orientação:

$$M_{2j}^{(2)} f[n, m] = M_{2j}^{(1)} f[n, m] |\cos(\theta_{2j} f[n, m] - \theta_{2j+1} f[n, m])|. \quad (4.54)$$

Pode-se notar que o fator  $|\cos(\theta_{2j} f[n, m] - \theta_{2j+1} f[n, m])|$  realmente fornece uma medida de continuidade direcional. Esse fator vale 1 se a mesma direção ocorre em níveis adjacentes, e vale 0 se as orientações diferem em  $90^\circ$  (i.e., são ortogonais). Figura 4.8, mostra as imagens de magnitude da imagem *house* ruidosa (Figura 2.8(b)) antes e depois da aplicação das duas regras de atualização (é mostrada

a escala  $2^1$  da transformada, que é a mais ruidosa). Percebe-se que as bordas verdadeiras estão bem mais claras na imagem atualizada.

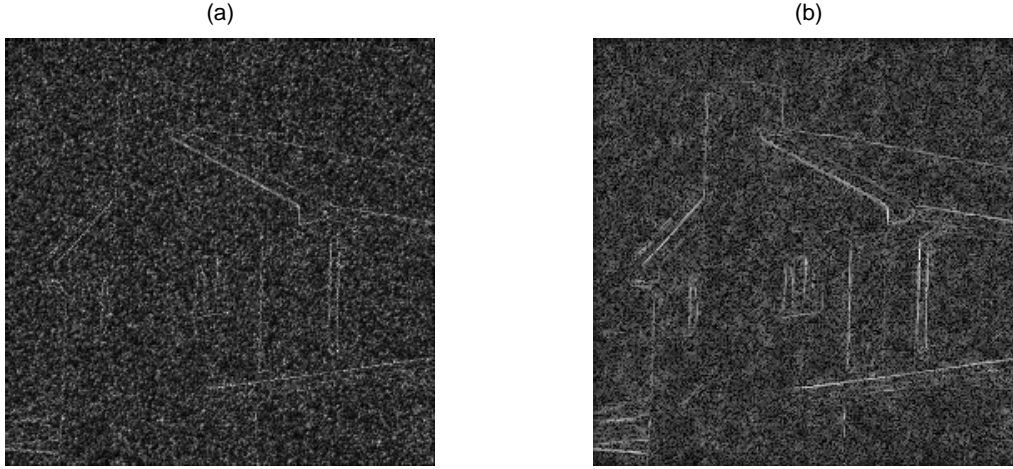


FIGURA 4.8 - (a) Coeficientes  $M_{2^1} f[n, m]$ . (b) Coeficientes  $M_{2^1}^{(2)} f[n, m]$ , após a aplicação da continuidade geométrica das bordas.

#### 4.4.1.2 Wavelet Shrinkage

Após a aplicação da continuidade espacial, coeficientes geometricamente consistentes são realçados, mas alguns coeficientes associados ao ruído com magnitudes não desprezíveis ainda permanecem. Tipicamente, as magnitudes desses coeficientes são menores do que as magnitudes associadas às bordas. Para eliminar (ou ao menos reduzir) as magnitudes dos coeficientes ruidosos, *wavelet shrinkage* é aplicada aos coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$ , e os coeficientes atualizados  $NW_{2^j}^1 f$  e  $NW_{2^j}^2 f$  são obtidos através de:

$$NW_{2^j}^i[n, m] = W_{2^j}^i[n, m]g_j(M_{2^j}[n, m]), \text{ para } i = 1, 2, \quad (4.55)$$

onde a função de *shrinkage*  $g_j(x)$  é não-negativa e não-decrescente, tal que  $g_j(x) = 0$  se  $x < T_1^j$  e  $g_j(x) = 1$  se  $x > T_2^j$ , e  $T_1^j, T_2^j$  são limiares. Os valores  $g_j[n, m] = g_j(M_{2^j}[n, m])$  são chamados de fatores de *shrinkage*. Uma possível escolha para  $g_j(x)$  é uma função linear por partes, dada por

$$g_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < T_1^j \\ \frac{x-T_1^j}{T_2^j-T_1^j}, & \text{se } T_1^j \leq x \leq T_2^j \\ 1, & \text{se } x > T_2^j \end{cases} . \quad (4.56)$$

Os limiares  $T_1^j$  e  $T_2^j$  devem ser escolhidos de tal forma que magnitudes menores que  $T_1^j$  estejam mais provavelmente associadas ao ruído (e os respectivos coeficientes são eliminados), e magnitudes maiores que  $T_2^j$  estejam mais provavelmente relacionados às bordas (e os respectivos coeficientes são mantidos). O intervalo  $[T_1^j, T_2^j]$  é considerado uma “banda de transição”, onde um coeficiente pode estar associado ao ruído ou a estruturas importantes da imagem. Dentro dessa “banda de transição”,



as magnitudes podem ser “encolhidas” para 0 ou mantidas praticamente intactas, já que a função  $g_j(x)$  assume valores entre 0 e 1 nesse intervalo. Para determinar os valores de  $T_1^j$  e  $T_2^j$ , é necessário estimar a quantidade de ruído na imagem na resolução  $2^j$ . Para imagens contaminadas com uma quantidade maior de ruído, os coeficientes associados ao ruído terão magnitudes maiores, e então os valores  $T_1^j$  e  $T_2^j$  também deverão ser maiores. O histograma das magnitudes  $M_{2^j} f[n, m]$  será utilizado para determinar os limiares  $T_1^j$  e  $T_2^j$ , como será explicado a seguir.

Se a imagem original é contaminada por ruído Gaussiano aditivo, os respectivos coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$  podem ser considerados Gaussianos [DON 93], com desvio padrão  $\sigma_j$ . Como consequência, as magnitudes  $M_{2^j} f = \sqrt{(W_{2^j}^1 f)^2 + (W_{2^j}^2 f)^2}$  seguirão uma distribuição Rayleigh [LAR 79], cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$p_j(r) = \frac{r}{\sigma_j^2} e^{-r^2/2\sigma_j^2}. \quad (4.57)$$

Sabe-se que a moda de uma distribuição Rayleigh ocorre em  $r = \sigma_j$ . Conclui-se que, para imagens formadas somente por ruído Gaussiano aditivo, os coeficientes  $M_{2^j} f$  são modelados através de uma função Rayleigh, e que a quantidade de ruído pode ser estimada através da moda da distribuição de  $M_{2^j} f$  (imagens mais ruidosas terão uma moda maior).

Em imagens reais, alguns coeficientes de  $M_{2^j} f$  representam bordas, e os outros estão associados ao ruído. Se a razão sinal-ruído é pequena, os coeficientes ruidosos predominarão com respeito aos coeficientes associados a bordas, e então o histograma de  $M_{2^j} f$  estará mais próximo da uma distribuição Rayleigh. Por outro lado, se a SNR da imagem for grande, o histograma de  $M_{2^j} f$  irá variar de acordo com o conteúdo da imagem (e consequentemente pode apresentar variações de imagem para imagem em termos de suas bordas). Entretanto, um histograma típico de  $M_{2^j} f$  para imagens “limpas” terá um pico alto perto da origem, associado às regiões homogêneas da imagem (cujos respectivos coeficientes  $M_{2^j} f$  são pequenos), e consequentemente o valor da moda será baixo. Dessa forma, a análise da moda do histograma de  $M_{2^j} f$  (sua proximidade da origem) pode ser utilizada para estimar a quantidade de ruído na imagem.

O desvio padrão  $T^j$  dos coeficientes  $M_{2^j} f$  também é importante para a determinação do intervalo  $[T_1^j, T_2^j]$ , pois fornece informação sobre o “espalhamento” da distribuição em torno da moda. À medida que a escala  $2^j$  aumenta (ou seja, a resolução diminui), o ruído é atenuado pelo filtro passa-baixas da transformada wavelet. Na verdade, o desvio padrão dos coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$  associados ao ruído é aproximadamente reduzido pela metade quando a escala da transformada passa de  $2^j$  para  $2^{j+1}$ , como foi observado por Donoho [DON 93] (consequentemente, o desvio padrão dos coeficientes de  $M_{2^j} f$  associados ao ruído também é aproximadamente reduzido pela metade). Dessa forma, a melhor estimativa para o desvio padrão do ruído é obtido na resolução mais fina  $2^1$ . Neste trabalho, assume-se que as considerações de Donoho também sejam válidas para os coeficientes atualizados  $M_{2^j}^{(2)} f$ . Assim sendo, o desvio padrão dos coeficientes  $M_{2^1}^{(2)} f$  na resolução mais alta é chamado de  $T^1$ . Para as escalas  $2^2, 2^3, \dots, 2^J$ , os valores respectivos de  $T^j$  são dados por  $T^j = \frac{T^1}{2^{j-1}}$ , já que o desvio padrão é reduzido pela metade quando a escala  $2^j$  aumenta.

Finalmente, o intervalo  $[T_1^j, T_2^j]$  é calculado a partir das modas  $m_j$  e dos desvios padrões  $T^j$ . O valor  $m_j$  é a magnitude mais freqüente da imagem na escala  $2^j$ . Geralmente, em imagens ruidosas esse pico está associado aos coeficientes ruidosos, que estão próximos do valor  $m_j$ . O desvio padrão  $T^j$  representa a variabilidade das magnitudes. Se  $T^j$  é pequeno, a variação das magnitudes associadas ao ruído também será pequena, indicando que as magnitudes associadas ao ruído e às bordas estão bem separadas. Por outro lado, quando  $T^j$  é grande, há uma maior confusão entre coeficientes associados às bordas e ao ruído, requerendo uma maior banda de transição. Dessa forma, os extremos da banda de transição  $T_1^j$  e  $T_2^j$  são dados por

$$\begin{aligned} T_1^j &= m_j + \alpha_1 T^j, \\ T_2^j &= m_j + \alpha_2 T^j, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são parâmetros dependentes da imagem, tais que  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , e são fornecidos pelo usuário. A seleção dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  permite ao usuário um maior controle sobre a banda de transição. Se valores grandes forem escolhidos para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , a redução do ruído será aumentada, mas algumas bordas com contraste mais baixo podem ser perdidas. Se valores menores forem utilizados, a filtragem é reduzida, mas a preservação das bordas é priorizada. Apesar dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  serem dependentes da imagem a ser filtrada, testes realizados em diversas imagens indicaram que os valores  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 1,2$  produzem bons resultados para a maioria das imagens testadas. Deve ser notado que quando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , a função  $g_j(x)$  é equivalente a um limiar duro  $T = m_j + \alpha T^j$ .

Figura 4.9 mostra os fatores de *shrinkage*  $g_1[n, m]$ ,  $g_2[n, m]$  e  $g_3[n, m]$  (correspondendo às escalas  $2^1$ ,  $2^2$  e  $2^3$ , respectivamente). Pixels mais claros correspondem a valores próximos de 1, enquanto que pixels escuros correspondem a valores próximos de 0. Pode-se notar que na resolução mais fina (escala  $2^1$ ), bordas e ruído confundem-se. Para melhorar a discriminação entre bordas e ruído, a consistência dos fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$  em escalas consecutivas é analisada, como será descrito a seguir.

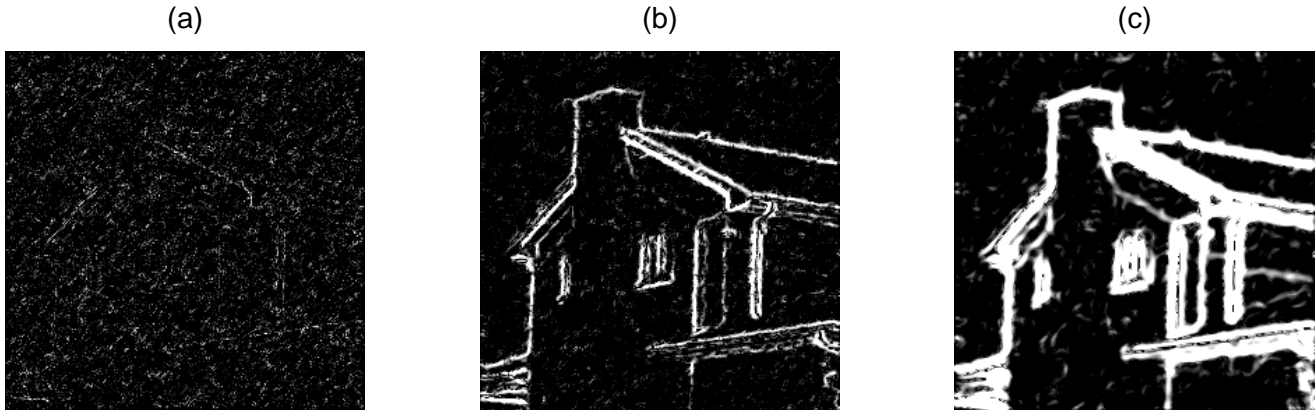


FIGURA 4.9 - (a)-(c) Fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$ , para  $j = 1, 2, 3$ .

#### 4.4.1.3 Consistência ao Longo de Escalas

Sabe-se que coeficientes associados ao ruído diminuem em magnitude quando aumentamos a escala  $2^j$ , enquanto que os coeficientes associados às bordas se mantêm [MAL 92, MAL 89]. Dessa forma, é esperado que os fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$  apresentem um comportamento similar. Se  $g_j[n, m]$  é próximo de 1 para várias escalas consecutivas, é provável que o coeficiente  $M_{2^j}^{(2)}[n, m]$  realmente esteja associado a uma borda. Por outro lado, se  $g_j[n, m]$  diminui à medida que a escala  $2^j$  aumenta, é mais provável que  $M_{2^j}^{(2)}[n, m]$  esteja associado ao ruído.

Para levar em consideração esse comportamento, a cada escala  $2^j$  os fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$  são combinados com os fatores  $g_{j+1}[n, m], g_{j+2}[n, m], \dots, g_\kappa[n, m]$ , onde  $\kappa - j + 1$  é o número de escalas que serão levadas em consideração. Os fatores de *shrinkage* são então atualizados conforme a seguinte regra:

$$g_j^{\text{scale}}[n, m] = \frac{\kappa - j + 1}{\frac{1}{g_j[n, m]} + \frac{1}{g_{j+1}[n, m]} + \dots + \frac{1}{g_\kappa[n, m]}}. \quad (4.59)$$

Tipicamente, os melhores resultados são obtidos quando 2 ou 3 níveis consecutivos são utilizados, pois coeficientes associados a pequenas estruturas da imagem tendem a desaparecer em baixas resoluções (ou seja, quando  $2^j$  é grande). Além disso, a forma dos contornos vai sendo modificada quando a escala aumenta (por exemplo, quinas se tornam arredondadas).

Essa regra de atualização é aplicada da resolução mais baixa para a mais alta. O *shrinkage factor*  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$ , correspondente à resolução mais baixa  $2^J$ , é igual a  $g_J[n, m]$ . Entretanto, para as outras resoluções  $2^j$ ,  $j = 1, \dots, J - 1$ , os *shrinkage factors*  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$  dependem das escalas  $2^j, 2^{j+1}, \dots, 2^\kappa$ , onde  $\kappa = \min\{J, j + K\}$ , e  $K + 1$  é o número máximo de escalas consecutivas que serão analisadas.

Figura 4.10 mostra os fatores de *shrinkage* atualizados  $g_1^{\text{scale}}[n, m]$ ,  $g_2^{\text{scale}}[n, m]$  e  $g_3^{\text{scale}}[n, m]$  (correspondendo às escalas  $2^1$ ,  $2^2$  e  $2^3$ , respectivamente). Pode-se perceber a melhora da distinção entre bordas e ruído com relação aos fatores de *shrinkage* mostrados na Figura 4.9, especialmente na escala  $2^1$ .

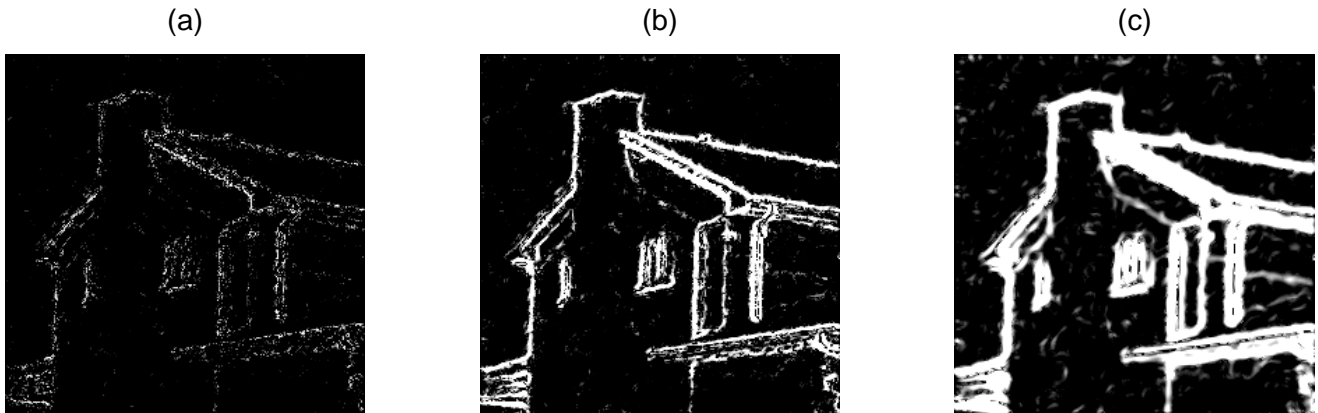


FIGURA 4.10 - (a)-(c) Fatores de *shrinkage* atualizados  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$ , para  $j = 1, 2, 3$ .

Finalmente, os coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$  são modificados de acordo com

$$NW_{2^j}^i[n, m] = W_{2^j}^i[n, m]g_j^{\text{scale}}[n, m], \text{ para } i = 1, 2. \quad (4.60)$$

A transformada wavelet inversa é aplicada sobre os coeficientes atualizados  $NW_{2^j}^1 f$  e  $NW_{2^j}^2 f$ , e a imagem filtrada é obtida.

#### 4.4.1.4 Resultados Experimentais

A técnica proposta foi testada em imagens contaminadas com ruído natural e artificial, e os resultados foram comparados com os resultados obtidos pelo software `wave2©`, que é uma implementação do método descrito por Mallat e Hwang [MAL 92a], com a função `wiener2` do software matemático `MATLAB`, que é uma implementação do filtro de Wiener usando estatísticas locais [LEE 80], e com o limiar duro de Coifman e Donoho utilizando uma versão invariante a translações da transformada wavelet [COI 95], cuja implementação está disponível no pacote `wavelab` [BUC 96], desenvolvido para o software `MATLAB`.

Em todos experimentos,  $N = 4$  foi usado para a continuidade geométrica na equação (4.53), e a janela  $w[n]$  utilizada foi uma Gaussiana (para que pesos maiores fossem atribuídos aos vizinhos mais próximos). Três escalas diádicas foram utilizadas nos experimentos. Os valores padrão para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  foram, respectivamente, 0, 2 e 1, 2. Deve-se enfatizar que para a obtenção de resultados ótimos, os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  devem ser ajustados para cada imagem.

Figuras 4.11(a)-(d) mostram o resultado da técnica interativa em questão (PSNR = 28,11 dB), do software `wave2©` (PSNR = 26,06 dB), da função `wiener2` (PSNR = 25,79 dB), e do limiar duro com a transformada invariante a translações (PSNR = 25,48 dB), respectivamente, aplicados à imagem *house* ruidosa (PSNR = 16,11 dB). Uma imagem similar (i.e. imagem *house* ruidosa com PSNR = 16,23 dB) foi usada em [MAL 97], e a imagem filtrada resultante atingiu uma razão sinal-ruído de pico de de 28,09 dB. Qualitativamente, é possível perceber que as bordas relevantes foram mantidas pela técnica interativa, enquanto que o ruído foi eficientemente atenuado.

A imagem *peppers* também foi utilizada para testar o desempenho da técnica proposta. Na Figura 4.12, à esquerda, é mostrada a imagem *peppers* original (256 × 256 pixels). No centro é mostrada a imagem contaminada com ruído (PSNR = 16,23 dB), e à direita o resultado da técnica interativa (PSNR = 26,78 dB). A imagem processada apresenta uma qualidade visual boa, e o ganho obtido é considerável. Em [MAL 97], a imagem *peppers* com ruído também foi analisada, e a imagem filtrada resultante atingiu PSNR = 25,96 dB. Já a aplicação do limiar duro, do software `wave2©` e da função `wiener2` resultaram em imagens filtradas com PSNR = 24,66 dB, PSNR = 27,03 dB e PSNR = 25,56 dB, respectivamente.

Cenas naturais também foram utilizadas nos experimentos. Figura 4.13(a) mostra a imagem *chemical plant* original. Figuras 4.13(b) e 4.13(c) mostram, respectivamente, as imagens processadas pelo método proposto usando  $(\alpha_1 = 0, 2, \alpha_2 = 1, 2)$ , e  $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, 5)$ . Percebe-se que na Figura 4.13(b) alguns detalhes (como a plantação no topo e algumas bordas de baixo contraste entre as construções e o fundo da cena) são perdidos. Diminuindo os valores dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , esses detalhes são melhor preservados, como pode ser visto na Figura 4.13(c). Outra ima-

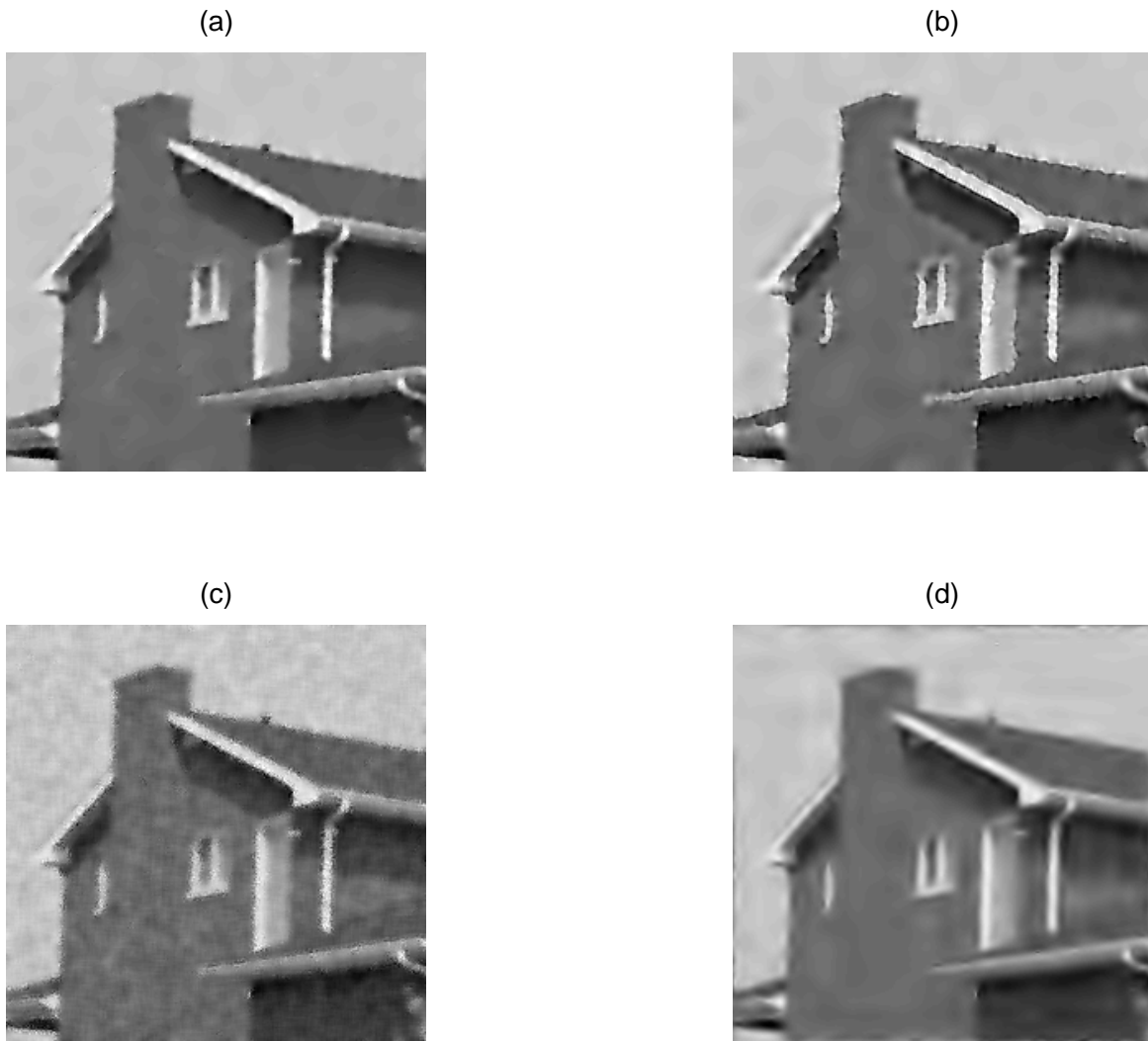


FIGURA 4.11 - Filtragem da imagem *house* ruidosa usando diferentes abordagens. (a) Técnica interativa (PSNR = 28,11 dB). (b) Software *wave2*© (PSNR = 26,06 dB). (c) Função *wiener2* (PSNR = 25,79 dB). (d) Limiar duro com a transformada invariante a translações (PSNR = 25,48 dB).

gem natural (imagem *aerial*) é mostrada na Figura 4.14(a). Nas Figuras 4.14(b) e 4.14(c) são mostradas, respectivamente, as imagens processadas pelo método proposto usando  $(\alpha_1 = 0, 2, \alpha_2 = 1, 2)$ , e  $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, 5)$ . Pode-se notar que muitos detalhes são perdidos na Figura 4.14(b), embora o ruído de fundo tenha sido eficientemente eliminado. Já na Figura 4.14(c) as bordas e os pequenos detalhes são melhor preservados, mas ainda há a destruição de algumas texturas finas (principalmente na parte superior da imagem). De fato, o método proposto perde um pouco de eficiência em imagens com grande densidade de bordas (imagens onde há uma grande quantidade de bordas, com diferentes contrastes), pois nessas imagens o limiar adaptativo proposto na Seção 4.4.1.2 não consegue discriminar eficientemente ruído de bordas.

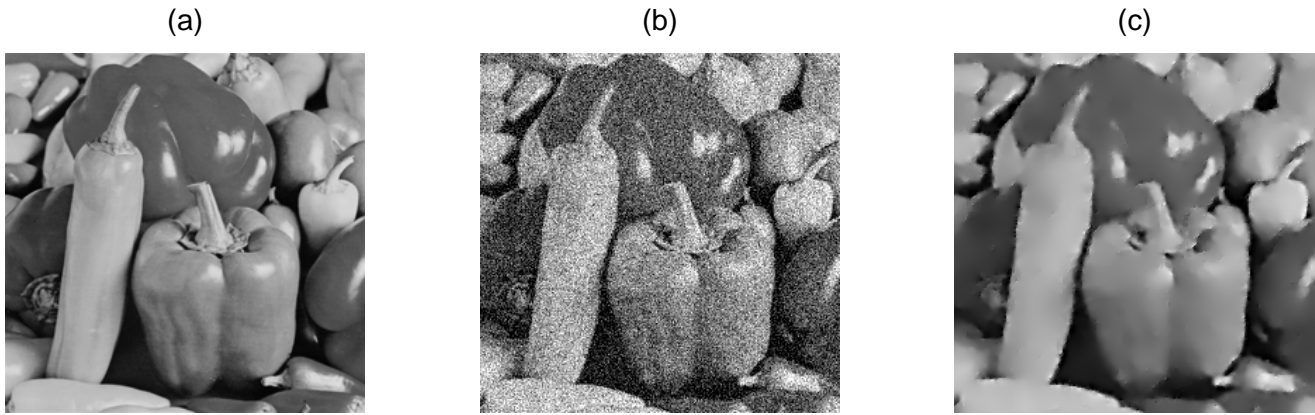


FIGURA 4.12 - (a) Imagem *peppers* original. (b) Imagem *peppers* ruidosa (PSNR = 16,23 dB). (c) Resultado obtido com a aplicação da técnica interativa (PSNR = 26,78 dB).



FIGURA 4.13 - (a) Imagem *chemical plant* original. (b) Imagem filtrada pela técnica interativa, usando  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 1,2$ . (c) Imagem filtrada pela técnica interativa, usando  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 0,5$ .

A abordagem proposta foi formulada supondo contaminação por ruído aditivo, mas também foi testada em imagem com outros tipos de ruído. Por exemplo, Figura 4.15(a) mostra uma imagem de satélite (SAR) representando um plantação de arroz no estado do Rio Grande do Sul. Como é reportado na literatura, imagens SAR são contaminada por ruído *speckle*. Na Figura 4.15(b), é mostrada a imagem filtrada utilizando a técnica proposta, e pode-se perceber que o ruído de fundo foi bastante atenuado, facilitando a visualização das regiões com plantação. Os histogramas da imagem original e da imagem filtrada podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 4.15(c) e 4.15(d). O histograma da imagem original é aparentemente unimodal, não indicando a ocorrência de regiões distintas da imagem (com relação à distribuição das intensidades luminosas). Já o histograma da imagem filtrada é claramente bimodal, indicando duas regiões com intensidades luminosas distintas na imagem (plantação e não-plantação), que podem ser facilmente segmentadas através da aplicação de

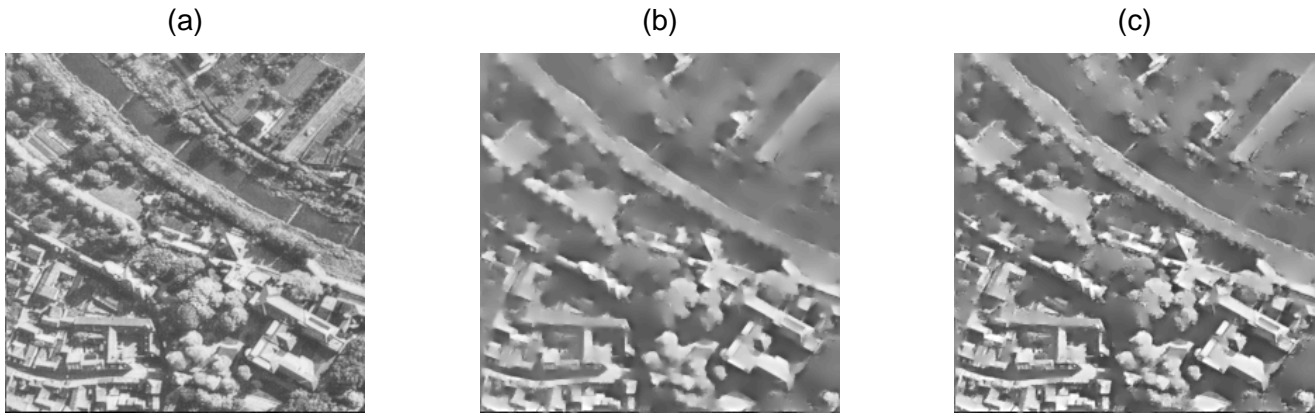


FIGURA 4.14 - (a) Imagem *aerial* original. (b) Imagem filtrada pela técnica iterativa, usando  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 1,2$ . (c) Imagem filtrada pela técnica iterativa, usando  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 0,5$ .

um limiar “duro” (escolhido no vale entre os dois picos do histograma). Figura 4.16 mostra o resultado dessa segmentação usando  $T = 95$  (abertura morfológica foi aplicada à imagem segmentada para remover pequenos artefatos). Pode-se perceber que o resultado da segmentação é bastante satisfatório, mesmo com a utilização de uma técnica de segmentação rudimentar.

O algoritmo proposto foi implementado no software **MATLAB**, e os experimentos realizados em um computador Pentium II 300MHz com 64 MB de memória RAM. O tempo de execução para uma imagem com  $256 \times 256$  pixels utilizando 3 escalas diádicas no cálculo da transformada wavelet é de aproximadamente 8 segundos.

#### 4.4.1.5 Limitações do Método

A formulação matemática da técnica proposta, e a análise dos resultados experimentais, indicam que seu desempenho deve ser menos eficiente quando a imagem possui: a) objetos pequenos, pois esses tendem a desaparecer quando a resolução diminui; b) baixo contraste, pois as magnitudes das bordas dos objetos são pequenas e podem ser confundidas com o ruído; c) grande contaminação com ruído, pois a distinção entre coeficientes associados a bordas e ao ruído se torna mais difícil. Para melhor visualizar as limitações da técnica proposta com relação a esses três parâmetros, foi construída a imagem teste mostrada na Figura 4.17. Tal imagem consiste de 20 quadrados, com tamanhos e contrastes diferentes. De cima para baixo, os quadrados têm lados de 81, 41, 21, 11 e 5 pixels, respectivamente. Da esquerda para direita, o contraste dos quadrados com o fundo da imagem é de 175, 130, 70 e 20 pixels. Para futura referência, esses quadrados serão chamados de Q1, Q2,..., Q20 (de cima para baixo, da esquerda para a direita). Na imagem 4.18 são mostradas versões ruidosas dessa imagem teste, através da adição de ruído Gaussiano com diferentes variâncias. A técnica proposta foi aplicada a essas imagens ruidosas, utilizando-se diferentes níveis na decomposição e diferentes parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Primeiramente, a técnica foi aplicada com os valores padrão (ou seja,  $J = 3$  níveis na decomposição,  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 1,2$ ). Os resultados da técnica aplicada

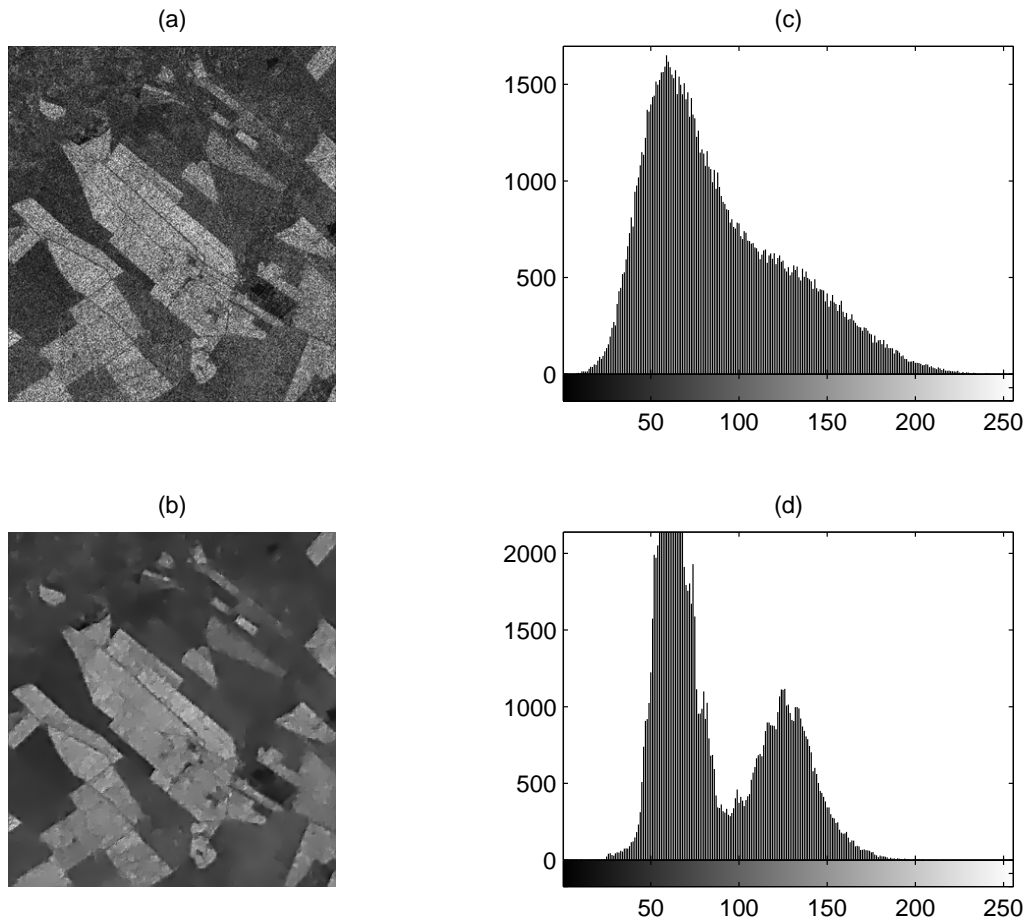


FIGURA 4.15 - (a) Imagem SAR original. (b) Imagem SAR filtrada pela técnica interativa. (c) Histograma da imagem (a). (d) Histograma da imagem (b).



FIGURA 4.16 - Segmentação da imagem SAR filtrada.

às imagens da Figura 4.18 são mostrados na Figura 4.19. Pode-se notar que os quadrados Q1-Q5 apresentam uma boa qualidade visual após a filtragem, mesmo quando a quantidade de ruído é intensa. Os quadrados Q6-Q10 também apresentam





FIGURA 4.17 - Imagem teste.

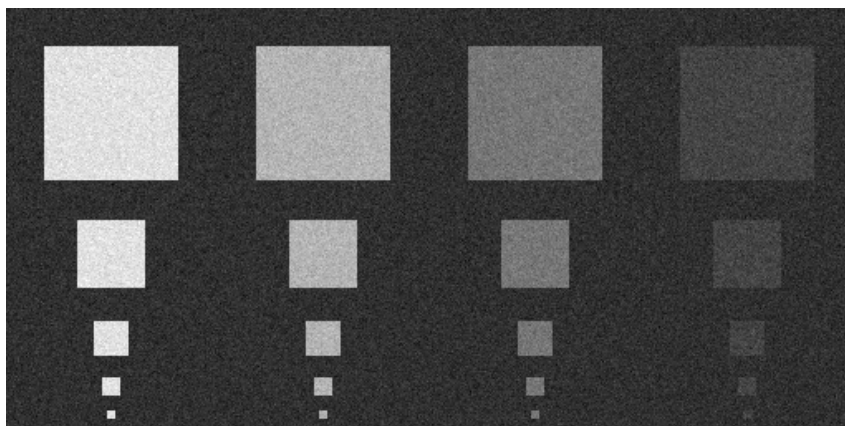
uma qualidade visual boa, embora as bordas dos quadrados Q9-10 na imagem mais ruidosa já não estejam tão claras. Na Figura 4.19(a), percebe-se que os quadrados Q11-Q15 estão “limpos” e com as bordas bem definidas (com exceção do Q15, cujas bordas já não aparecem tão claras). Já nas Figuras 4.19(b) e 4.19(c) as bordas começam a perder a definição, e o quadrado Q15 aparece distorcido na Figura 4.19(c). Como era esperado, os quadrados Q16-Q20 apresentam a pior qualidade visual (por possuir contraste bastante baixo). Percebe-se que os três maiores desses quadrados (Q16-Q18) estão razoavelmente bem definidos (com exceção da Figura 4.19(c), que corresponde à maior intensidade de ruído). Já os quadrados Q19 e Q20 mal podem ser distinguidos, especialmente a partir do ruído com  $\sigma = 25$ , como pode ser observado nas Figuras 4.19(b) e 4.19(c) (na verdade, o quadrado Q20 foi completamente destruído pelo ruído na Figura 4.18(c), e então é muito difícil a sua preservação na filtragem). Com relação à remoção do ruído, a técnica apresentou ótimos resultados, independente da quantidade de ruído presente na imagem. Esse resultado pode ser quantificado pela PSNR das imagens filtradas. Na Figuras 4.19(a), 4.19(b) e 4.19(c) a PSNR obtida foi de 35,72 dB, 33,71 dB e 31,69 dB, respectivamente.

Figura 4.20 mostra a aplicação da técnica utilizando apenas dois níveis na transformada wavelet (ou seja,  $J = 2$ ), mantendo os valores padrão para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Visualmente, as imagens da Figura 4.20 aparentam conter mais ruído do que as da Figura 4.19, pois as regiões homogêneas apresentam mais “manchas”. Entretanto, a análise quantitativa (através do PSNR) indica que a Figura 4.20(a) é menos ruidosa do que a Figura 4.19(a) (pois apresenta uma PSNR maior). Já as Figuras 4.20(b) e 4.19(b) apresentam aproximadamente a mesma quantidade de ruído (as PSNR são equivalentes), enquanto que a Figura 4.20(c) é mais ruidosa do que a Figura 4.19(c) (pois apresenta uma PSNR menor). Na verdade, esse comportamento já era esperado: para imagens contendo pouco ruído (Figura 4.18(a)), apenas dois níveis são suficientes para atenuar o ruído. À medida que a quantidade de ruído aumenta (Figuras 4.18(b) e 4.18(c)), é necessário que se utilize mais níveis da transformada para obter uma atenuação de ruído compatível com a quantidade de ruído presente na imagem. Com relação à preservação das bordas e de estruturas menores, percebe-

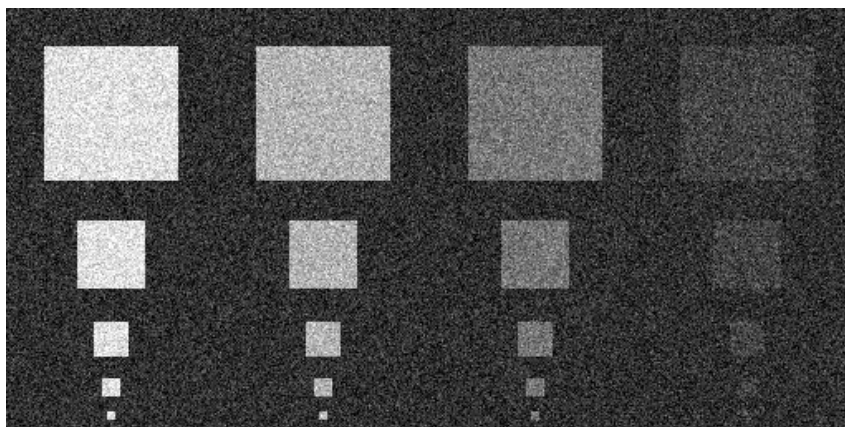
se que a Figura 4.20 é visualmente superior. Por exemplo, os quadrados Q16-Q20 aparecem mais claramente na Figura 4.20(c) que na Figura 4.19(c).

Figura 4.21 mostra a aplicação da técnica utilizando três níveis na decomposição (valor padrão), mas alterando a banda de transição  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (foi utilizado  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 0,5$ , ou seja, os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  foram diminuídos). Observa-se que na Figura 4.21(a) o ruído parece ter sido eficientemente suprimido, enquanto que todos os quadrados (de Q1 até Q20) aparecem claramente e com as bordas bem definidas. Já na Figura 4.21(b), a quantidade de ruído residual é maior, mas todos

(a)



(b)



(c)

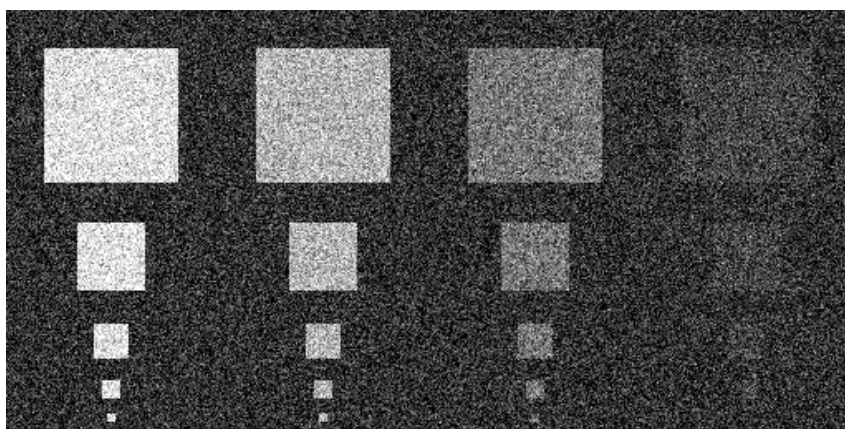
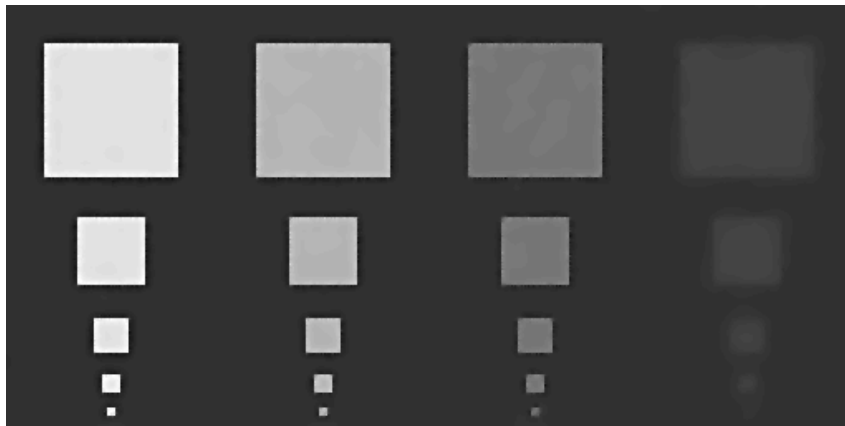


FIGURA 4.18 - Imagem teste contaminada com ruído Gaussiano aditivo com desvio padrão  $\sigma$ . (a)  $\sigma = 10$  (PSNR = 28,11 dB). (b)  $\sigma = 25$  (PSNR = 20,16 dB). (c)  $\sigma = 40$  (PSNR = 16,10 dB).

(a)



(b)

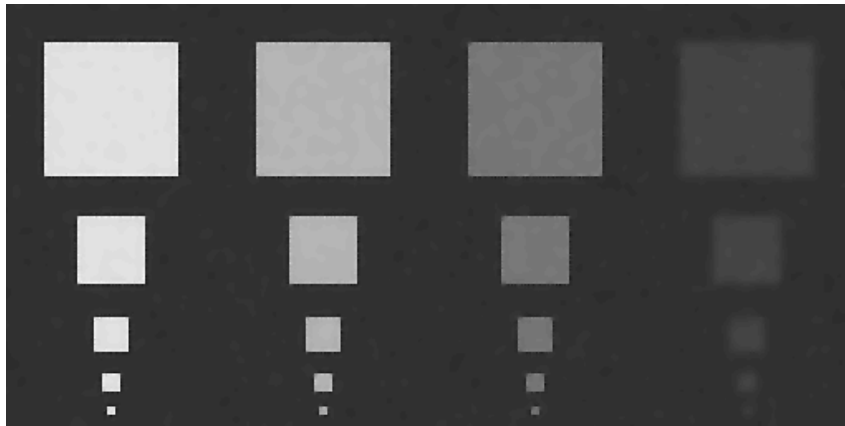


(c)

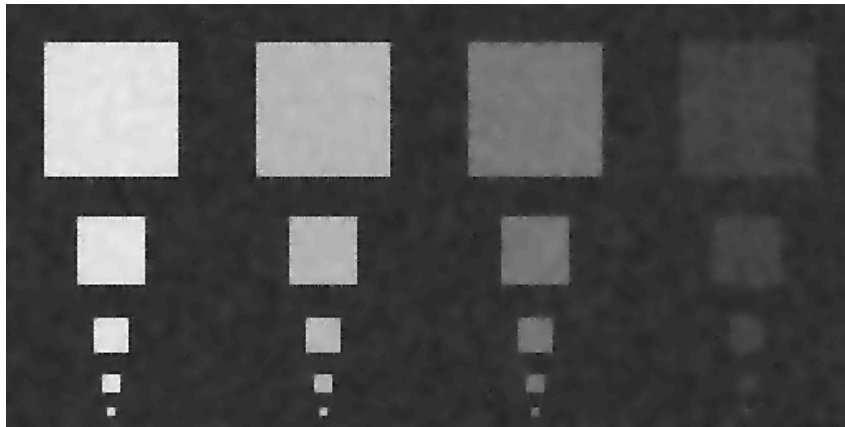


FIGURA 4.19 - Aplicação da técnica interativa à imagem teste ruidosa, usando valores padrão. (a) PSNR = 35,72 dB. (b) PSNR = 33,91 dB. (c) PSNR = 31,69 dB.

(a)



(b)



(c)

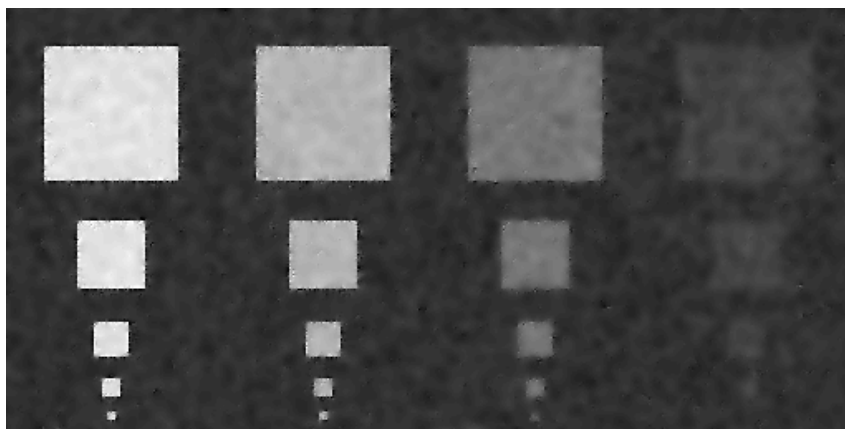
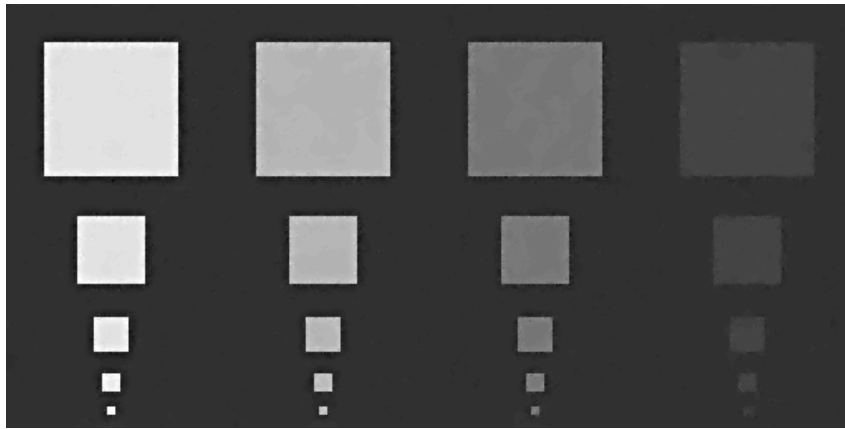
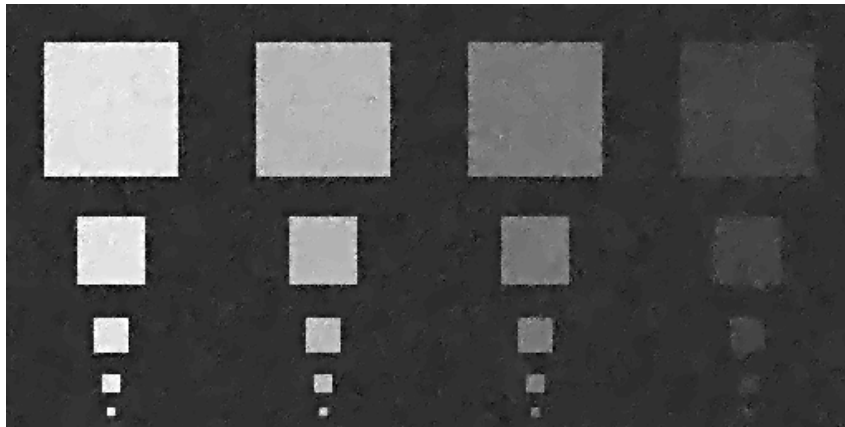


FIGURA 4.20 - Aplicação da técnica iterativa à imagem teste ruidosa, usando dois níveis na transformada. (a) PSNR = 38,72 dB. (b) PSNR = 34,02 dB. (c) PSNR = 30,82 dB.

(a)



(b)



(c)

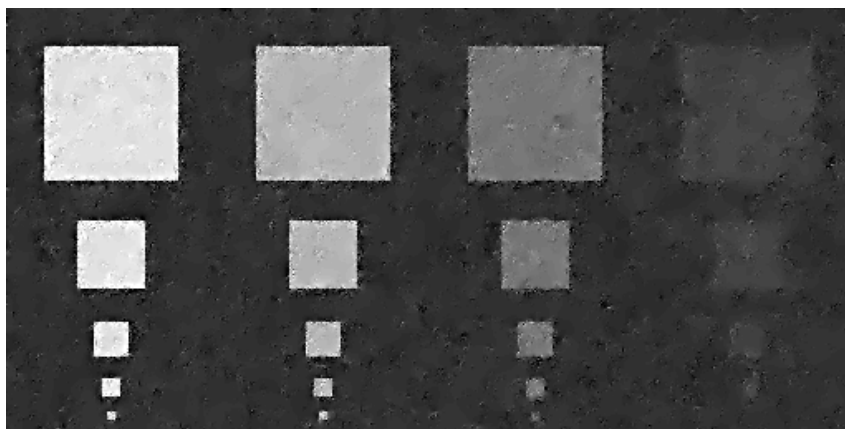


FIGURA 4.21 - Aplicação da técnica iterativa à imagem teste ruidosa, usando  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 0,5$ . (a) PSNR = 35,40 dB. (b) PSNR = 31,33 dB. (c) PSNR = 28,00 dB.

os quadrados ainda continuam visíveis (embora as bordas apareçam ruidosas). O resultado mostrado na Figura 4.21(c) não é tão bom como os anteriores com relação à remoção do ruído (percebe-se que grande parte do ruído ainda contamina a imagem filtrada), e as bordas dos objetos estão muito irregulares devido à presença do ruído. Quantitativamente, as Figuras 4.21(a), 4.21(b) e 4.21(c) apresentam, respectivamente, razões sinal-ruído de pico de 35,40 dB, 31,33 dB e 28,00 dB, comprovando a baixa remoção do ruído em relação às Figuras 4.19 e 4.20.

Também se poderia realizar um outro experimento aumentando os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , mas isso acarretaria em mais filtragem e menos preservação das bordas. Como as Figuras 4.19 e 4.20 já apresentam um bom desempenho com relação à atenuação do ruído, não haveria a necessidade de aumentar o poder de filtragem da técnica.

## 4.4.2 Filtragem Adaptativa de Imagens Usando Consistência no Espaço-Escala

A técnica apresentada anteriormente apresenta bons resultados quantitativos (em termos de PSNR da imagem filtrada) e qualitativos (em termos de qualidade visual das imagens filtradas). Entretanto, como foi mencionado, o desempenho dessa técnica não é muito eficiente para imagens densas em bordas, pois pode haver confusão entre coeficientes associados a bordas e coeficientes associados ao ruído. Para melhorar o desempenho da filtragem nesses tipos de imagens, modelos probabilísticos para coeficientes associados ao ruído e para coeficientes associados a bordas foram incorporados ao método [SCH 2001].

### 4.4.2.1 Wavelet Shrinkage

Analogamente ao que foi apresentado na Seção 4.4.1.2, o objetivo é determinar, para cada escala  $2^j$ , uma função não-decrescente  $g_j(x)$  de tal maneira que os coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$  sejam atualizado conforme

$$NW_{2^j}^i [n, m] = W_{2^j}^i [n, m] g_j(M_{2^j} [n, m]), \text{ para } i = 1, 2, \quad (4.61)$$

onde  $g_j[n, m] = g_j(M_{2^j}[n, m])$  é dito fator de *shrinkage*. Os fatores  $g_j[n, m]$  são determinados com base em uma análise probabilística das magnitudes  $M_{2^j} f [n, m]$ . Algumas dessas magnitudes são associadas ao ruído, enquanto que outras são associadas às bordas. Se uma imagem for contaminada por ruído Gaussiano aditivo, então os respectivos coeficientes  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$  apresentam uma distribuição Gaussiana [DON 93], com desvio padrão  $\sigma_{\text{noise}}^j$ . Como consequência, as respectivas magnitudes  $M_{2^j} f = \sqrt{(W_{2^j}^1 f)^2 + (W_{2^j}^2 f)^2}$ , em cada escala  $2^j$ , podem ser caracterizadas através de uma função densidade de probabilidade Rayleigh [LAR 79]:

$$p_j(r|\text{noise}) = \frac{r}{[\sigma_{\text{noise}}^j]^2} e^{-r^2/[2\sigma_{\text{noise}}^j]^2}. \quad (4.62)$$

Por outro lado, observa-se que imagens naturais não contaminadas por ruído consistem de regiões homogêneas delimitadas por bordas. Em geral, as regiões homogêneas contribuem com um pico agudo perto da origem dos histogramas de  $W_{2^j}^1 f$  e  $W_{2^j}^2 f$ ,

enquanto que as bordas contribuem para a cauda desses histogramas. A distribuição que representa essas magnitudes apresenta um pico mais agudo do que uma distribuição Gaussiana [WES 87, SIM 96], e conseqüentemente o modelo Gaussiano não é o mais adequado. De fato, vários modelos não-Gaussianos vêm sendo utilizados para representar os coeficientes de imagens naturais, como as distribuições Laplacianas Generalizadas [SIM 96], distribuições Gaussianas com alta correlação local [MIH 99], distribuição Gaussianas Generalizadas [CHA 2000], e misturas de Gaussianas [CHI 97, STR 2000]. Entretanto, a hipótese adotada neste trabalho é que a distribuição dos coeficientes  $W_{2j}^1$  e  $W_{2j}^2$  associados exclusivamente às bordas (e não associados às regiões homogêneas da imagem) pode de fato ser aproximada por uma função densidade de probabilidade Gaussiana (i.e. quando os picos agudos dos histogramas de  $W_{2j}^1$  e  $W_{2j}^2$  associados às regiões homogêneas da imagem não são levados em consideração, os coeficientes restantes são bem aproximados por uma Gaussiana). O modelo Gaussiano para coeficientes associados às bordas é assumido porque um modelo simples (Rayleigh) pode então ser utilizado para aproximar as respectivas magnitudes dos gradientes  $M_{2j}f$ .

Por exemplo, considere a Figura 4.22, que mostra os *Normal Plots* para os coeficientes  $W_{21}^1 f$  da imagem *house* (correspondendo à resolução mais fina da sub-banda horizontal da transformada). Na Figura 4.22(a), todos os coeficientes  $W_{21}^1 f$  para a imagem *house* original foram utilizados. Como era esperado, essa distribuição está distante da distribuição Normal. Na Figura 4.22(b), os coeficientes associados exclusivamente às bordas para a imagem *house* original foram utilizados, e pode-se notar uma similaridade bem maior com a distribuição Normal, sugerindo que o modelo Gaussiano pode ser utilizado para aproximar os coeficientes associados exclusivamente às bordas. Finalmente, a Figura 4.22(c) corresponde à imagem *house* ruidosa (PSNR = 16,03 dB), e percebe-se uma similaridade ainda maior com a curva Normal. Isso ocorre porque tipicamente o ruído afeta todos os coeficientes wavelet, enquanto que as bordas estão associadas a apenas alguns coeficientes, e então a distribuição do ruído predomina sobre a distribuição das bordas.

Dessa forma, as magnitudes  $M_{2j}f$  associadas às bordas podem ser aproximadas por

$$p_j(r|\text{edge}) = \frac{r}{[\sigma_{\text{edge}}^j]^2} e^{-r^2/2[\sigma_{\text{edge}}^j]^2}. \quad (4.63)$$

Considerando-se que geralmente as imagens são efetivamente contaminadas por ruído (como indicado na Figura 4.22(c)), pode-se supor que a distribuição das magnitudes  $M_{2j}f$  de uma imagem (incluindo coeficientes associados ao ruído e às bordas) é modelada por uma combinação de duas funções Rayleigh, ou seja:

$$p_j(r) = w_{\text{noise}}^j p_j(r|\text{noise}) + (1 - w_{\text{noise}}^j) p_j(r|\text{edge}), \quad (4.64)$$

onde  $w_{\text{noise}}^j$  é a probabilidade *a priori* da distribuição do ruído, e conseqüentemente  $1 - w_{\text{noise}}^j$  é a probabilidade *a priori* da distribuição das bordas. Por simplicidade de notação, o índice  $j$  que denota a escala será utilizado apenas quando necessário. Dessa forma, a equação (4.64) pode ser escrita como

$$p(r) = w_{\text{noise}} p(r|\text{noise}) + (1 - w_{\text{noise}}) p(r|\text{edge}). \quad (4.65)$$



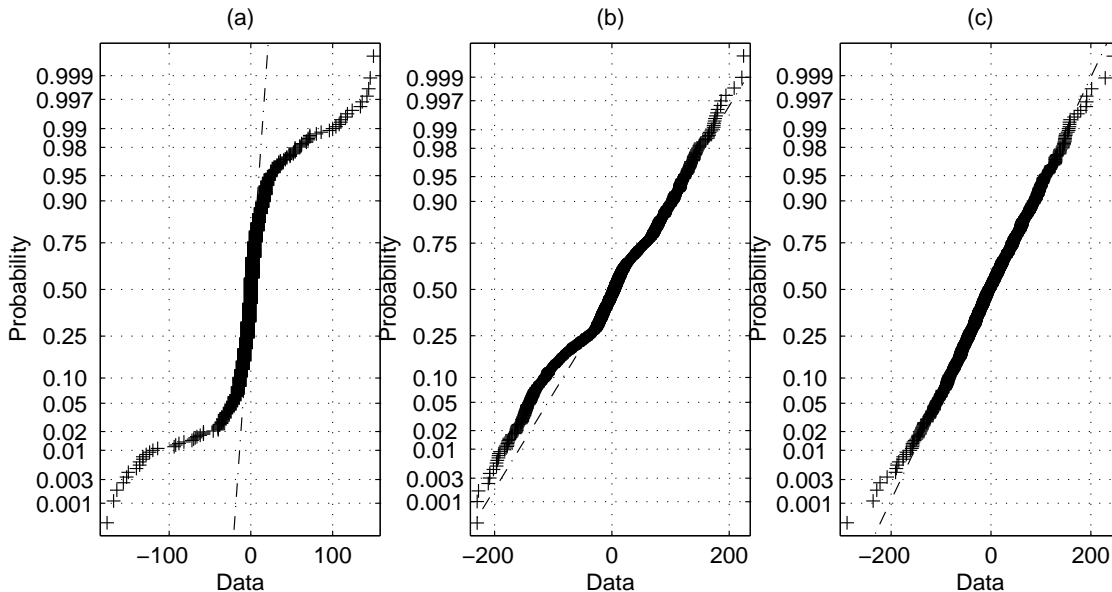


FIGURA 4.22 - *Normal Plots* para os coeficientes  $W_{2j}^1 f[n, m]$ . (a) Utilizando todos os coeficientes para a imagem *house* original. (b) Utilizando apenas os coeficientes associados às bordas para a imagem *house* original. (c) Utilizando todos os coeficientes para a imagem *house* ruidosa.

Os parâmetros  $\sigma_{\text{noise}}$ ,  $\sigma_{\text{edge}}$  e  $w_{\text{noise}}$  podem ser estimados através da maximização da função de verossimelhança

$$\ln L = \sum_{m,n} \ln(p(M_{2j} f[m, n])), \quad (4.66)$$

com a restrição  $0 \leq w_{\text{noise}} \leq 1$ .

Tipicamente, o número de coeficientes associados ao ruído é bem maior do que o número de coeficientes associados às bordas. Como consequência, o pico no histograma das magnitudes é devido principalmente aos coeficientes associados ao ruído, e tem aproximadamente a mesma localização da distribuição das magnitudes ruidosas  $p(r|\text{noise})$ . Sabendo que a moda da distribuição Rayleigh  $p(r|\text{noise})$  é dada exatamente por  $\sigma_{\text{noise}}$  [LAR 79], pode-se estimar o parâmetro  $\sigma_{\text{noise}}$  como sendo a localização do pico do histograma das magnitudes. Com essa escolha para  $\sigma_{\text{noise}}$ , o custo computacional na maximização da função dada em (4.66) é reduzido, pois apenas dois parâmetros ( $w_{\text{noise}}$  e  $\sigma_{\text{edge}}$ ) são utilizados. Além disso, o fato de que as magnitudes associadas ao ruído são tipicamente menores do que as magnitudes associadas às bordas implica na restrição  $\sigma_{\text{noise}} < \sigma_{\text{edge}}$ , que é imposta no processo de maximização.

Para imagens muito grandes, o custo computacional necessário na maximização pode ser alto, pois a equação (4.66) envolve o somatório de todos os coeficientes da imagem. Na verdade, pode-se utilizar um subconjunto menor de coeficientes (escolhidos aleatoriamente na imagem), e então realizar o somatório utilizando apenas esses coeficientes. Resultados experimentais mostraram que  $2 \times 10^4$  coeficientes (que correspondem aproximadamente a uma sub-imagem com resolução de  $140 \times 140$  pixels) são suficientes para realizar o processo de maximização.

A Figura 4.23 mostra os histogramas das magnitudes para a imagem *house* ruidosa (Figura 2.8(b)), juntamente com os respectivos modelos probabilísticos  $p(r)$ , nas escalas  $2^1$ ,  $2^2$  e  $2^3$ . Pode-se notar que o modelo se ajusta muito bem aos dados experimentais, e que a moda do histograma (ou seja,  $\sigma_{\text{noise}}$ ) diminui à medida que a escala  $2^j$  aumenta (pois o ruído na imagem vai sendo suprimido quando  $j$  aumenta). Além disso, deve-se salientar que nenhuma estimativa *a priori* do ruído (nem da distribuição das bordas) é necessária.

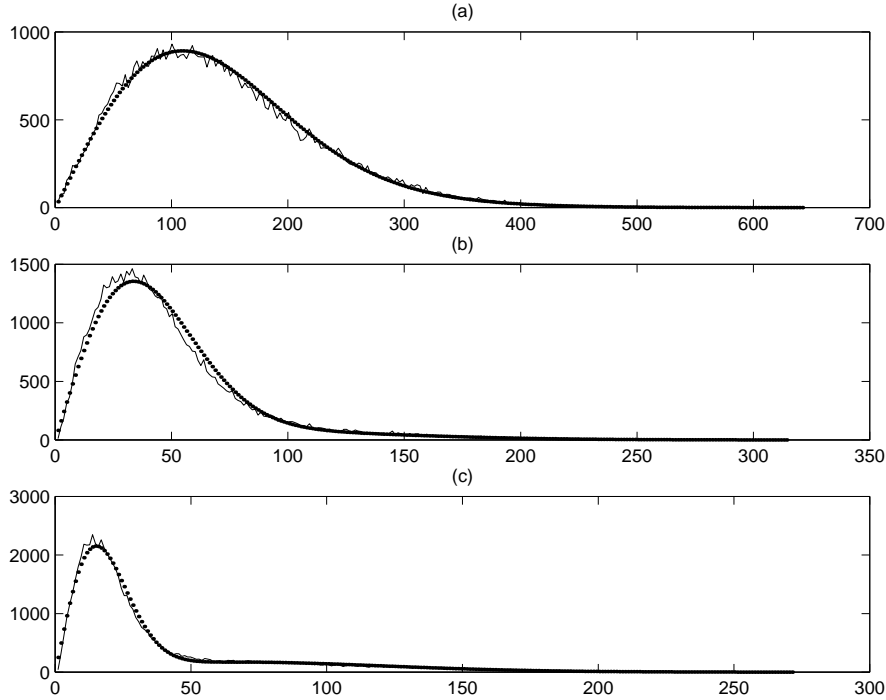


FIGURA 4.23 - (a)-(c) Histograma das magnitudes  $M_{2^j} f$  (linha contínua) e o modelo probabilístico estimado (linha pontilhada), para as escalas  $2^1$ ,  $2^2$  e  $2^3$ , relativas à imagem *house* ruidosa

Após a determinação dos parâmetros  $\sigma_{\text{noise}}$ ,  $\sigma_{\text{edge}}$  e  $w_{\text{noise}}$ , as funções densidade de probabilidade condicional das magnitudes associadas ao ruído e às bordas são dadas por  $p(r|\text{noise})$  e  $p(r|\text{edge})$ , respectivamente. Dessa forma, pode-se calcular a probabilidade *a posteriori*  $p(\text{edge}|r)$  de que uma certa magnitude  $M_{2^j} f[n, m]$  esteja associada a uma borda, considerando que  $M_{2^j} f[n, m] = r$ . Essa probabilidade pode ser calculada através do teorema de Bayes:

$$p(\text{edge}|r) = \frac{(1 - w_{\text{noise}})p(r|\text{edge})}{(1 - w_{\text{noise}})p(r|\text{edge}) + w_{\text{noise}}p(r|\text{noise})} \quad (4.67)$$

Pode-se perceber que a função  $p(\text{edge}|r)$  acima tem o comportamento desejado para a função de *shrinkage*, pois fornece valores perto de 1 se  $M_{2^j} f[n, m]$  estiver muito provavelmente associado a uma borda, e fornece valores próximos de 0 se  $M_{2^j} f[n, m]$  estiver muito provavelmente associado ao ruído. Dessa forma, define-se

$$g(r) = p(\text{edge}|r). \quad (4.68)$$

Para a imagem *house* ruidosa, a ocorrência espacial dos fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m] = g_j(M_{2^j} f[n, m])$  é mostrada na Figura 4.24, nas escalas  $2^1$ ,  $2^2$  e  $2^3$ . Como era esperado, a discriminação entre bordas e ruído aumenta quando a resolução diminui (i.e. quando  $j$  aumenta). A próxima etapa do método é combinar as funções  $g_j[n, m]$  em escalas consecutivas.

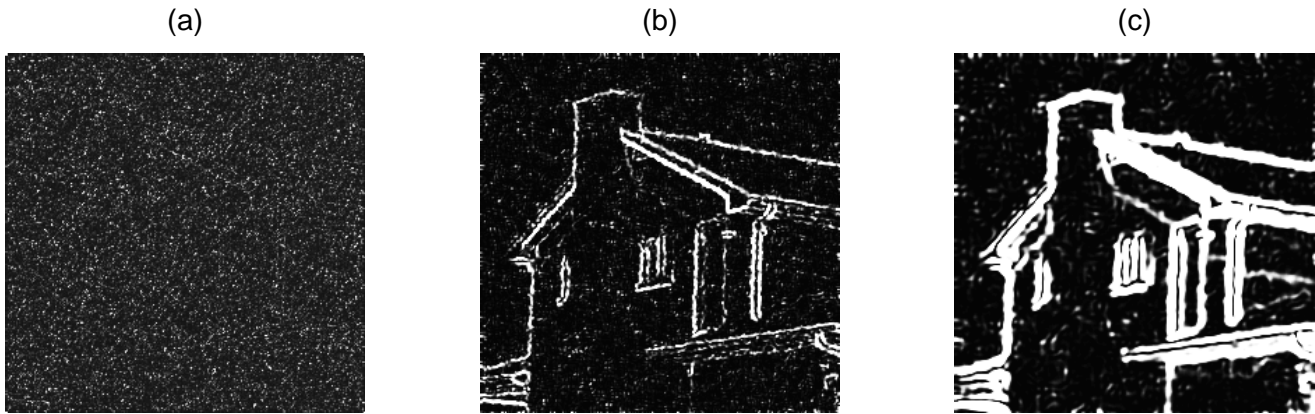


FIGURA 4.24 - (a)-(c) Fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$ , para  $j = 1, 2, 3$ , relativos à imagem *house* ruidosa.

#### 4.4.2.2 Consistência ao Longo de Escalas

Os fatores de *shrinkage*  $g_j[n, m]$  são combinados em escalas consecutivas exatamente da maneira descrita na Seção 4.4.1.3, ou seja, a média harmônica dos valores  $g_j[n, m]$  é utilizada. Dessa forma, os fatores de *shrinkage* atualizados  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$  são obtidos, através da equação (4.59).

Figura 4.25 mostra os fatores de *shrinkage* atualizados  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$ , para  $j = 1, 2, 3$ , referentes à imagem *house* ruidosa. Pode-se perceber a melhora da distinção entre bordas e ruído com relação aos fatores de *shrinkage* mostrados na Figura 4.24, especialmente na escala  $2^1$ . A última etapa do método é analisar a consistência geométrica dos fatores de *shrinkage*  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$ .

#### 4.4.2.3 Continuidade Geométrica

A aplicação da consistência geométrica deve levar em consideração o fato de que as bordas aparecem em contornos (cuja direção local pode ser estimada como sendo a direção ortogonal à direção do gradiente em cada pixel  $[n, m]$ ), e não ocorrem isoladas. Na verdade, um algoritmo muito semelhante ao proposto na Seção 4.4.1.1 é utilizado. A grande diferença é que na Seção 4.4.1.1 a consistência geométrica era aplicada diretamente sobre as magnitudes  $M_{2^j} f[n, m]$ , enquanto que na técnica adaptativa essa consistência é aplicada sobre os fatores de *shrinkage*  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$ . Mais especificamente, é calculada uma média das funções  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$  ao longo da

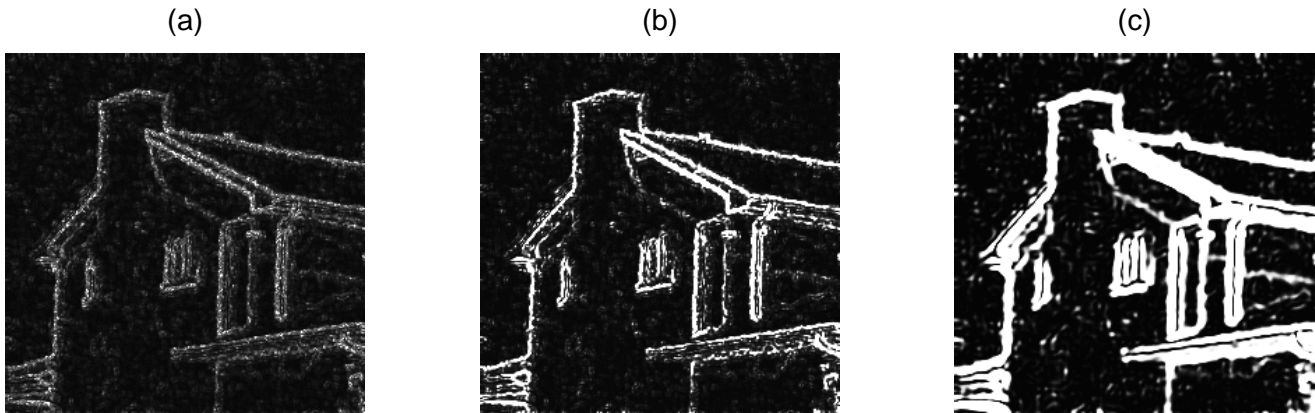


FIGURA 4.25 - (a)-(c) Fatores de *shrinkage* atualizados  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$  relativos à imagem *house* ruidosa, para  $j = 1, 2, 3$ .

direção do contorno, ou seja,

$$g_j^{\text{geom}'}[n, m] = \begin{cases} \sum_{i=-N}^N \alpha[i] g_j^{\text{scale}}[n+i, m], & \text{se } C_{2^j}[n, m] = 0^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N \alpha[i] g_j^{\text{scale}}[n+i, m+i], & \text{se } C_{2^j}[n, m] = 45^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N \alpha[i] g_j^{\text{scale}}[n, m+i], & \text{se } C_{2^j}[n, m] = 90^\circ, \\ \sum_{i=-N}^N \alpha[i] g_j^{\text{scale}}[n+i, m-i], & \text{se } C_{2^j}[n, m] = 135^\circ, \end{cases} \quad (4.69)$$

onde  $C_{2^j}[n, m]$  é a direção local do contorno na posição  $[n, m]$  (quantizadas para os ângulos  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ),  $2N+1$  é o número de coeficientes que serão somados na direção do contorno, e  $\alpha[i]$  é uma janela que permite que coeficientes tenham pesos diferentes, de acordo com sua distância ao coeficiente em consideração  $g_j^{\text{scale}}[n, m]$  (e tais que  $\sum_{i=-N}^N \alpha[i] = 1$ ).

Analogamente ao procedimento adotado na Seção 4.4.1.1, uma segunda regra de atualização é aplicada, levando em consideração a direção local do contorno em duas escalas consecutivas:

$$g_j^{\text{geom}}[n, m] = g_j^{\text{geom}'}[n, m] \cdot |\cos(\theta_{2^j} f[n, m] - \theta_{2^{j+1}} f[n, m])|, \quad (4.70)$$

onde  $\theta_{2^j}[n, m]$  é a direção do gradiente na escala  $2^j$ , calculado através da equação (4.52).

Figura 4.26 mostra os fatores de *shrinkage*  $g_j^{\text{geom}}[n, m]$  para a imagem *house* ruidosa, após a aplicação da continuidade geométrica. Pode-se notar que a separação entre bordas e ruído realmente fica mais clara após o modelo geométrico.

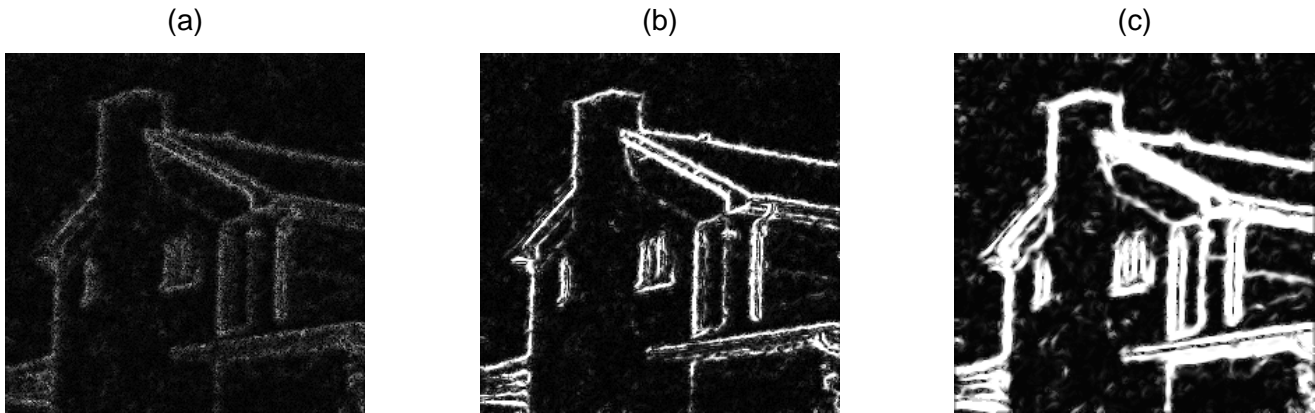


FIGURA 4.26 - (a)-(c) Fatores de *shrinkage*  $g_j^{\text{geom}}[n, m]$  relativos à imagem *house* ruidosa, para  $j = 1, 2, 3$ , após a aplicação da continuidade geométrica.

#### 4.4.2.4 Resultados Experimentais

A técnica adaptativa descrita acima foi aplicada a imagens contaminadas com ruídos natural e artificial. Os resultados são analisados dos pontos de vista quantitativo (através da PSNR da imagem filtrada) e qualitativo (através da qualidade visual da imagem processada).

Em todos os experimentos, foi utilizado  $N = 3$  para o tamanho da vizinhança para a qual foi analisada a continuidade geométrica (equação (4.69)), e a janela  $\alpha[i]$  é uma Gaussiana (para que pesos maiores sejam atribuídos aos vizinhos mais próximos). Para obter uma estimativa mais confiável para o parâmetro  $\sigma_{\text{noise}}$ , o histograma de  $M_{2j}f$  é primeiramente convolvido com uma Gaussiana (para eliminar pequenas flutuações no histograma), e então a localização de seu pico é determinada. Três escalas diádicas foram utilizadas na decomposição por wavelets.

A Figura 4.27 mostra a filtragem da imagem *house* ruidosa, para a qual foi obtido PSNR = 28,23 dB. Em comparação com as técnicas aplicadas para filtrar a mesma imagens mencionadas nas Seção 4.4.1.4, pode-se perceber um ganho maior em termos de PSNR.

A imagem *peppers* também foi utilizada para testar o desempenho da técnica proposta. Figura 4.28 mostra a filtragem da imagem *peppers* ruidosa pela técnica proposta, resultando em PSNR = 27,41 dB. A análise visual da imagem filtrada revela que o ruído foi eficientemente atenuado, enquanto que as bordas foram preservadas.

Também foram utilizadas imagens contendo ruído inerente, como a imagem *aerial* mostrada na Figura 4.14(a). Sua versão filtrada é mostrada na Figura 4.29. Percebe-se que o ruído de fundo foi atenuado, e que as bordas e os pequenos detalhes (por exemplo, o carro na parte superior direita da imagem) foram mantidos após a filtragem.



FIGURA 4.27 - Filtragem da imagem *house* ruidosa pela técnica adaptativa (PSNR = 28,23 dB).



FIGURA 4.28 - Filtragem da imagem *peppers* ruidosa pela técnica adaptativa (PSNR = 27,41 dB).



FIGURA 4.29 - Filtragem da imagem *aerial* pela técnica adaptativa

Já a Figura 4.30(a) mostra uma imagem de ressonância magnética de um cérebro humano. A filtragem pela técnica proposta é mostrada na Figura 4.30(b). Pode-se perceber que o ruído de fundo foi bastante atenuado, enquanto que as pequenas estruturas do cérebro foram mantidas.

A implementação do método proposto no software **MATLAB**, rodando em um computador pessoal Pentium II 300MHz com 64 MB de memória RAM leva cerca de 56 segundos para processar uma imagem com  $256 \times 256$  pixels, usando 3 níveis na decomposição. A maior parte do tempo de processamento é devida ao processo de maximização da equação (4.66).

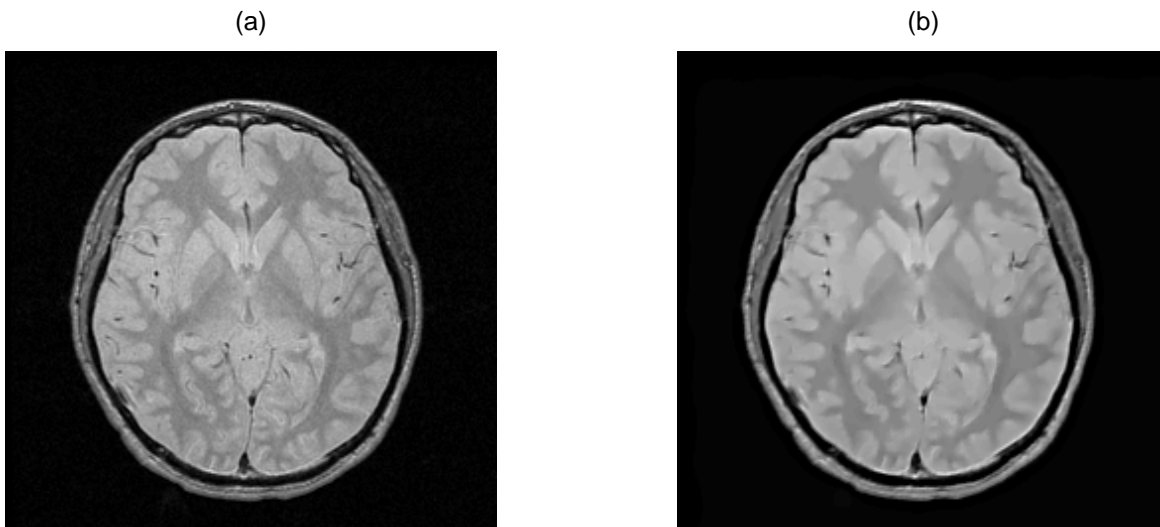


FIGURA 4.30 - (a) MRI do cérebro. (b) Imagem filtrada pela técnica adaptativa.

#### 4.4.2.5 Limitações do Método

Assim como na Seção 4.4.1.5, a imagem teste ruidosa (mostrada na Figura 4.18) é utilizada para testar o desempenho da técnica com relação a estruturas de diferentes tamanhos, contrastes e quantidades de ruído.

Figura 4.31 mostra a aplicação da técnica adaptativa usando o valor padrão de três níveis na decomposição por wavelets. Pode-se perceber que os quadrados Q1-Q5 apresentam uma boa qualidade visual após a filtragem, mesmo quando a quantidade de ruído é intensa. Os quadrados Q6-Q10 também apresentam uma qualidade visual boa, embora suas bordas contenham ruído residual (Figura 4.31(c)). Na Figura 4.31(a), percebe-se que as bordas dos quadrados Q11-Q15 estão bem definidas (com exceção do quadrado Q15, cujas bordas já não aparecem tão claras). Na Figura 4.31(b), os quadrados Q13-Q15 apresentam bordas um pouco menos claras, e na Figura 4.31(c) a definição das bordas dos quadrados Q11-Q15 é ainda menos clara (principalmente de Q15). Os quadrados de menor contraste Q16-Q19 aparecem com uma definição de bordas razoável na Figura 4.31(a). Nas Figuras 4.31(b) e principalmente 4.31(c), os contornos dos quadrados não aparecem com clareza (em particular, as quinas são arredondadas). O quadrado Q20 foi praticamente destruído nas Figuras 4.31(a)-(c). Com relação à remoção do ruído, a técnica apresentou ótimos resultados visuais, independente da quantidade de ruído presente na imagem. Quantitativamente, as PSNR obtidas para as Figuras 4.31(a)-(c) foram, respectivamente, 33,98 dB, 33,33 dB e 31,90 dB.

Figura 4.32 mostra a aplicação da técnica adaptativa usando apenas duas escalas diádicas na decomposição por wavelets. Nesse caso, a preservação das bordas é aumentada em detrimento da menor remoção de ruído. Visualmente, as imagens da Figura 4.32 aparentam conter mais ruído do que as imagens da Figura 4.31, pois as regiões no interior dos quadrados e no fundo da cena parecem estar menos homogêneas. Entretanto, a análise quantitativa (através da PSNR) indica que a Figura 4.32(a) é menos ruidosa do que a Figura 4.31(a) (pois apresenta uma PSNR

maior). Já as Figuras 4.32(b) e 4.31(b) apresentam aproximadamente a mesma quantidade de ruído (as PSNR são equivalentes), enquanto que a Figura 4.32(c) é mais ruidosa do que a Figura 4.31(c) (pois apresenta uma PSNR menor). Também pode-se notar que há uma maior preservação das bordas na Figura 4.32 com relação à Figura 4.31, principalmente nos quadrados menores e com baixo contraste (como Q19 e Q20).

## 4.5 Conclusões

Neste Capítulo, foi descrito o tipo de transformada wavelet considerada adequada para realizar a filtragem de imagens com preservação das bordas. Foram analisadas as características da transformada wavelet apontadas como importantes para abordar esse problema, e foram propostas duas técnicas baseadas nessas características, uma interativa, e outra adaptativa.

As técnicas propostas neste Capítulo utilizam três princípios básicos para preservar as bordas durante a filtragem: a) a continuidade geométrica é aplicada para realçar bordas que aparecem em contornos (e descartar bordas isoladas); b) fatores de *shrinkage* são calculados para cada escala  $2^j$ , com base na distribuição das magnitudes dos gradientes; c) os fatores de *shrinkage* são combinados em escalas adjacentes, para preservar bordas que aparecem em várias resoluções.

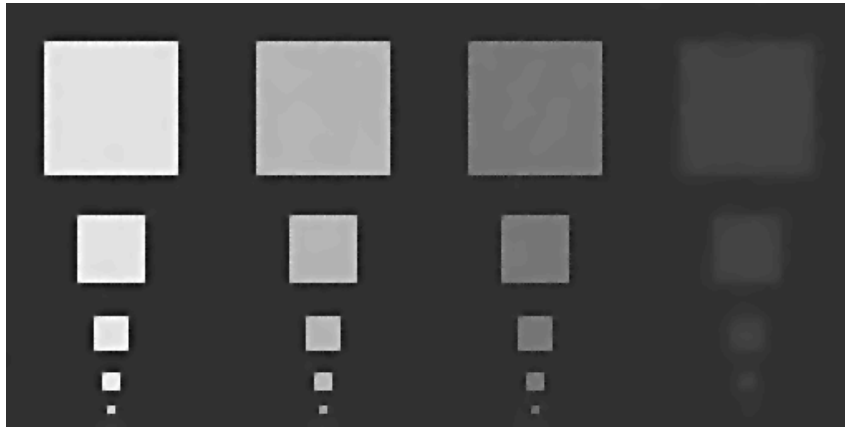
Na técnica interativa descrita na Seção 4.4.1, são utilizados dois parâmetros ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) para controlar o compromisso entre a filtragem e a preservação das bordas, permitindo que o usuário interfira no resultado da filtragem. Já o método abordado na Seção 4.4.2 é adaptativo, e o único parâmetro de controle é o número de escalas utilizadas na decomposição. Os experimentos utilizando imagens com ruído artificial e com ruído inerente evidenciaram os bons resultados das técnicas propostas com relação a outras técnicas existentes na literatura, tanto do ponto de vista qualitativo quanto quantitativo. A inclusão da adaptatividade (Seção 4.4.2) permite uma melhor discriminação entre bordas e ruído para uma classe maior de imagens, principalmente em imagens densas em termos de bordas (como as Figuras 4.14 e 4.29 mostram). A imagem *aerial* mostrada nas Figuras 4.14 e 4.29 contém uma grande quantidade de bordas (e com diferentes contrastes), exigindo uma manipulação mais apurada dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para se obter resultados visualmente aceitáveis com a técnica não-adaptativa. O método adaptativo apresenta resultados superiores, pois consegue discriminar mais eficientemente os coeficientes associados às bordas daqueles associados ao ruído. Por outro lado, o método adaptativo é mais custoso do ponto de vista computacional, principalmente por causa da maximização da equação (4.66).

Assim como praticamente todas as técnicas de filtragem discutidas na literatura, os métodos propostos apresentam problemas em imagens contendo objetos pequenos, ou com baixo contraste com relação ao fundo da imagem. A análise realizada nas Seções 4.4.1.5 e 4.4.2.5 mostra o comportamento dos métodos propostos aplicados a uma imagem teste contendo vários quadrados com diferentes tamanhos e contrastes, e contaminada por diferentes quantidades de ruído Gaussiano aditivo. Para que objetos pequenos e com baixo contraste sejam bem preservados, é conveniente utilizar menos escalas na decomposição por wavelets (i.e.  $J$  menor), pois existe



uma tendência de objetos pequenos desaparecerem quando a resolução é muito reduzida (ou seja, quando a escala aumenta). Por outro lado, para que haja uma maior atenuação do ruído (principalmente quando a quantidade de ruído na imagem é grande), é mais conveniente utilizar mais escalas na filtragem ( $J$  maior). Na técnica interativa, o compromisso entre filtragem e preservação das estruturas também é influenciado pela escolha dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Quando valores menores forem escolhidos para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , a banda de transição se torna menos seletiva, aumentando a preservação das bordas, e diminuindo a remoção do ruído. A escolha dos valores ótimos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para cada imagem deve ser baseada no que o usuário considera mais relevante, ou seja, se o mais importante é remover o ruído ou preservar melhor as bordas e estruturas. Também deve-se notar que o número de bordas na imagem teste (Figuras 4.17 e 4.18) é muito pequeno com relação ao número total de pixels na imagem, o que poderia causar alguma confusão na maximização de equação (4.66) (por amostragem insuficiente). Entretanto, os resultados experimentais mostrados nas Figuras 4.32 e 4.31 indicam o bom desempenho da técnica adaptativa também nesse caso.

(a)



(b)



(c)

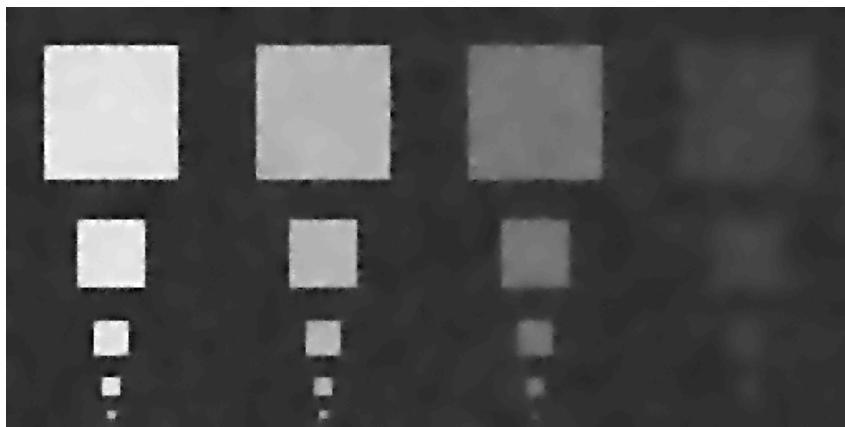
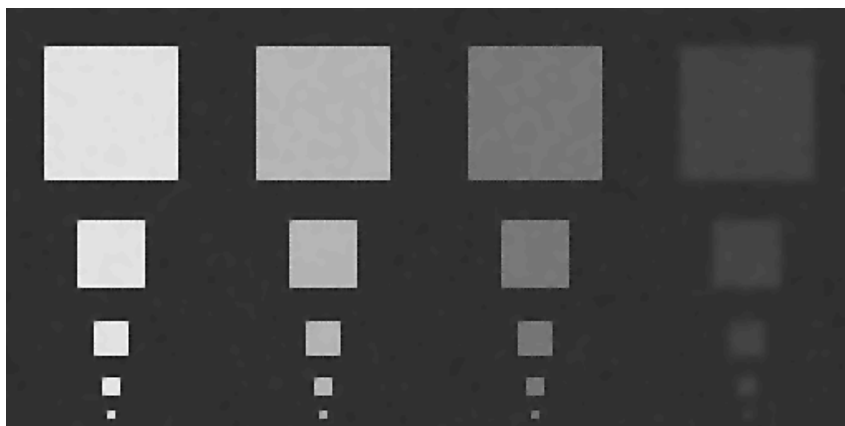
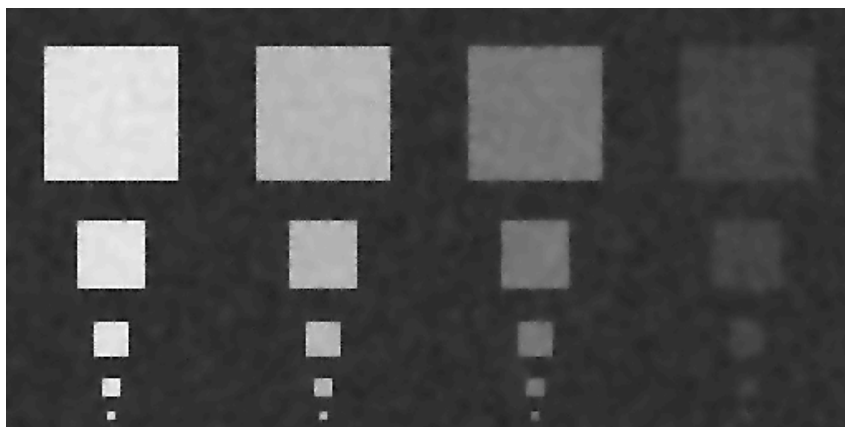


FIGURA 4.31 - Aplicação da técnica adaptativa à imagem teste ruidosa, usando valores padrão. (a) PSNR = 33,98 dB. (b) PSNR = 33,33 dB. (c) PSNR = 31,90 dB.

(a)



(b)



(c)

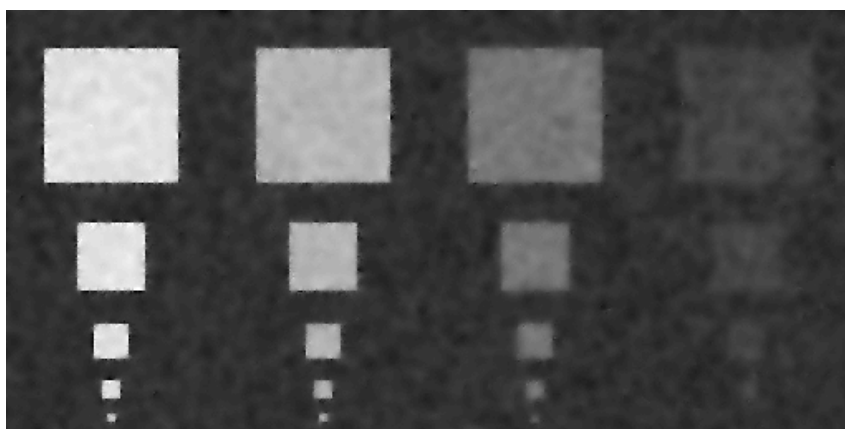


FIGURA 4.32 - Aplicação da técnica adaptativa à imagem teste ruidosa, usando duas escalas diádicas na decomposição. (a) PSNR = 35,56 dB. (b) PSNR = 33,41 dB. (c) PSNR = 30,60 dB.

## 5 Conclusões

Esta tese aborda a aplicação da transformada wavelet ao problema de filtragem de imagens com preservação das bordas. No Capítulo 1 foi apresentada uma visão geral da área de processamento de imagens, assim como a importância do problema de filtragem com preservação das bordas. O problema propriamente dito foi descrito, e as dificuldades para sua resolução foram enumeradas. Um levantamento bibliográfico sobre técnicas tradicionais para filtragem de imagens foi apresentado no Capítulo 2, com uma análise dos aspectos positivos e negativos de cada abordagem. Pôde-se concluir que técnicas de filtragem hierárquica apresentam atrativos, pois permitem a análise de imagens em múltiplas resoluções, facilitando o tratamento diferenciado de ruído e de bordas. O Capítulo 3 abordou conceitos gerais da transformada wavelet em uma e duas dimensões, e seu potencial para o desenvolvimento de técnicas de filtragem com preservação das bordas. Também foram analisados vários métodos baseados em wavelets, com uma descrição das características de cada técnica. No Capítulo 4, foi apresentado o tipo de transformada wavelet considerado apropriado para abordar o problema da filtragem com preservação das bordas. Também foram analisadas quais as características da wavelet que devem ser exploradas para a resolução desse problema, e duas abordagens alternativas que incorporam essas características foram propostas.

### 5.1 Discussão

A remoção (ou atenuação) do ruído em imagens é uma tarefa essencial em processamento de imagens, visando basicamente dois objetivos: melhorar a qualidade visual para interpretação humana, e/ou pré-processar a imagem para análise autônoma por máquinas. É desejável que as bordas dos objetos que compõem a imagem sejam mantidas durante o processo de filtragem, pois elas são fundamentais na percepção de cenas pelo sistema visual humano, e auxiliam a interpretação de imagens por máquinas.

A maior dificuldade encontrada na filtragem de imagens com preservação das bordas é a distinção entre o ruído e as bordas, pois ambos são geralmente caracterizados por altas frequências espaciais. A transformada wavelet permite a decomposição de imagens em sub-bandas do espectro de frequência, oferecendo boa localização tanto no domínio espacial quanto no domínio espectral (não obtido pela transformada de Fourier). Essa característica da transformada wavelet pode ser explorada para discriminar o ruído das bordas, permitindo a atenuação do ruído enquanto que as bordas são preservadas durante a filtragem.

Neste trabalho, foram propostos dois métodos para filtragem de imagens com preservação das bordas utilizando a transformada wavelet. Ambos exploram três características da transformada wavelet apontadas como importantes: análise das magnitudes dos coeficientes em cada escala; consistência das magnitudes dos coefi-

cientes ao longo das escalas; e continuidade geométrica no domínio da transformada wavelet.

O primeiro método proposto (Seção 4.4.1) é mais interativo, pois permite que o usuário interfira no resultado da filtragem através da manipulação dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Apesar da obtenção de bons resultados com a utilização dos valores padrão de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = 0, 2$ ,  $\alpha_2 = 1, 2$ ), tais parâmetros podem ser ajustados individualmente para cada imagem para a obtenção de resultados ainda melhores. Além disso, é necessário um certo cuidado na seleção de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para imagens densas em bordas, como foi mostrado na Figura 4.14.

A segunda técnica proposta (Seção 4.4.2) é adaptativa, e elimina a necessidade de interação com o usuário. Essa técnica se adapta à distribuição das bordas e à quantidade de ruído presente em cada imagem, tendo um bom desempenho para imagens com diferentes distribuições de bordas.

De modo geral, as duas técnicas propostas neste trabalho apresentam bons resultados quantitativos e qualitativos, se comparadas a outras técnicas de filtragem existentes na literatura. As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram os resultados das técnicas propostas em comparação com a função `wiener2` e o limiar duro de Coifman e Donoho para as imagens *house* e *peppers*, respectivamente, contaminadas com diferentes quantidades de ruído Gaussiano aditivo. Pode-se notar que as técnicas propostas são inferiores em desempenho apenas quando a quantidade de ruído é muito pequena (pois a consistência ao longo das escalas tende não preservar texturas finas da imagem, acarretando em perda de PSNR). Já quando a quantidade de ruído aumenta, as técnicas propostas apresentam resultados bem superiores, especialmente para imagens muito ruidosas.

TABELA 5.1 - Resultados de vários métodos de filtragem (PSNR, em dB) para imagem *house* contaminada com diferentes quantidades de ruído.

<b>Imagem <i>house</i></b>						
Ruidosa	28,14	22,12	18,56	16,09	14,14	12,57
<code>wiener2</code>	32,66	29,02	27,12	25,50	24,43	23,54
Limiar duro	32,30	28,88	27,20	25,31	24,75	23,67
Técnica interativa	30,34	29,57	28,76	27,91	27,11	26,18
Técnica adaptativa	31,05	30,03	29,06	28,12	26,81	25,94

TABELA 5.2 - Resultados de vários métodos de filtragem (PSNR, em dB) para imagem *peppers* contaminada com diferentes quantidades de ruído.

<b>Imagem <i>peppers</i></b>						
Ruidosa	28,10	22,11	18,55	16,10	14,16	12,58
wiener2	33,51	29,21	27,20	25,52	24,20	23,24
Limiar duro	32,14	29,02	26,01	24,64	23,38	22,23
Técnica interativa	29,81	28,64	27,73	26,53	25,87	24,89
Técnica adaptativa	31,08	29,25	28,07	27,30	25,92	25,02

Como foi discutido nas seções 4.4.1.5 e 4.4.2.5, as técnicas propostas têm dificuldades na preservação de pequenos objetos. De fato, pequenos objetos tendem a desaparecer quando a resolução é diminuída (ou seja, quando a escala  $2^j$  aumenta). Aplicando a consistência ao longo das escalas, tais objetos perdem a definição de suas bordas (pois não são persistentes em várias escalas). O problema é agravado quando o contraste de tais objetos com o fundo da cena é baixo, pois a magnitude das bordas associados a esses objetos pode ser menor do que a magnitude de falsas bordas associadas ao ruído, dificultando a preservação das bordas. Contaminação por ruído intenso também causa perda de desempenho das técnicas propostas (embora essa perda não seja tão grande em comparação com outras técnicas de filtragem, conforme mostrado nas Tabelas 5.1 e 5.2).

Testes realizados em imagens contaminadas com ruído não-Gaussiano indicaram que o desempenho da técnica interativa é superior ao da técnica adaptativa para tais imagens. Isto se deve ao fato que o modelo Gaussiano do ruído é mais fortemente utilizado na técnica adaptativa do que na técnica interativa.

A técnica adaptativa proposta neste trabalho poderia ser modificada para o tratamento de imagens contaminadas por ruído não-Gaussiano, desde que se consiga determinar um modelo teórico para os coeficientes  $M_{2^j} f$  associados a esse tipo de ruído. Neste caso, bastaria substituir a equação (4.62) por tal modelo.

## 5.2 Conclusões Gerais

Neste trabalho, foram discutidas várias técnicas para filtragem com preservação das bordas, baseadas em diversas abordagens. Pôde-se constatar que técnicas de filtragem hierárquica apresentam vantagens, pois diferentes resoluções são analisadas nessa classe de técnicas. A possibilidade de decomposição em múltiplas resoluções, aliada à boa localização nos domínios espacial e espectral, fizeram da transformada wavelet uma ferramenta largamente utilizada para atenuar o ruído em imagens preservando as bordas (de fato, vários artigos vêm sendo publicados nos últimos anos a respeito desse assunto).

Entretanto, as técnicas propostas na literatura não parecem explorar todo o potencial da transformada wavelet. Neste trabalho, foi mostrado que três características da transformada são fundamentais para filtragem com preservação de bordas: análise da magnitude dos coeficientes em cada escala; consistência dos coefi-

cientes ao longo das escalas; e continuidade geométrica no domínio da transformada wavelet.

A combinação destas características resultou na proposição de novas técnicas de filtragem que oferecem atrativos com relação aos métodos existentes na literatura, tais como a pouca quantidade de parâmetros ajustáveis e a adaptatividade à quantidade de ruído presente na imagem (sem a necessidade de estimativas *a priori* do ruído). Os resultados obtidos pelas técnicas desenvolvidas foram comparáveis, ou melhores do que os resultados produzidos por outras técnicas de filtragem consideradas estado-da-arte.

### 5.3 Extensões Futuras deste Trabalho

Nas técnicas propostas neste trabalho, os coeficientes  $W_{2j}^1$  e  $W_{2j}^2$  são atualizados pelo mesmo fator de *shrinkage*, como se pode constatar através da equação (4.55). Uma possível extensão deste trabalho é utilizar fatores de *shrinkage* diferentes para cada sub-banda da transformada. Na verdade, uma técnica implementando essa idéia já foi desenvolvida [JUN 2001a], com resultados preliminares promissores.

A incorporação de medidas de qualidade visual de imagens também é uma possibilidade de extensão deste trabalho. Com a incorporação de tais medidas (por exemplo, a medida descrita na referência [DAM 2000]), espera-se que o resultado da filtragem seja superior em termos de qualidade visual (o que não pode ser quantificado por medidas tradicionais como SNR, PSNR ou MSE).

Outra idéia para estender o presente trabalho é combinar probabilisticamente os fatores de *shrinkage* em escalas consecutivas, como alternativa à equação (4.59). Acredita-se que a análise probabilística da evolução dos fatores de *shrinkage* ao longo das escalas tornaria o método de filtragem ainda mais robusto.

Como alternativa à continuidade geométrica proposta neste trabalho, pretende-se futuramente avaliar a aplicação de equações diferenciais parciais difusivas direcionais (como a difusão anisotrópica aplicada na direção dos contornos) diretamente no domínio da transformada. Com isso, espera-se fortalecer coeficientes que estão alinhados em detrimento de coeficientes que aparecem isolados.

Também espera-se que as técnicas desenvolvidas neste trabalho possam ser estendidas para realçar imagens ruidosas. O problema de realce é de extrema importância em aplicações tais como o realce de mamografias (que pode levar à detecção precoce de tumores, aumentando a chance de sobrevivência do paciente), e de imagens de câmera de vigilância (para facilitar o reconhecimento de faces). Deve-se ressaltar que grande parte das técnicas atualmente utilizadas para o realce de imagens (por exemplo, equalização de histograma) são bastante sensíveis ao ruído, levando à amplificação de artefatos durante o realce.

Finalmente, as estimativas da magnitude e orientação das bordas que foram utilizadas neste trabalho (equações (4.49) e (4.50)) podem ser utilizadas em diversas outras aplicações, dentre as quais pode ser citada a obtenção de medidas de anisotropia para texturas estocásticas em múltiplas resoluções. Tais medidas são importantes em várias aplicações industriais, tais como o controle de qualidade em fábricas de papel e celulose [JUN 2000a].

## Bibliografia

- [AHO 74] AHO, A. V. **The design and analysis of computer algorithms**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1974.
- [ALV 92] ALVAREZ, L.; LIONS, P.-L.; MOREL, J.-M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion: II. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, Philadelphia, v.29, n.3, p.845–866, June 1992.
- [BEG 97] BEGHDADI, A.; KHELAF, A. A noise-filtering method using a local information measure. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.6, n.6, p.879–882, June 1997.
- [BOU 99] BOUYDAIN, M.; COLOM, J. F.; PLADELLORENS, J. Using wavelets do determine paper formation by light transmission image analysis. **TAPPI Journal**, Norcross, v.82, n.7, p.153–158, July 1999.
- [BRU 90] BRUNEAU, J. M.; BARLAUD, M.; MATHIEU, P. Image restoration using biorthogonal wavelet transform. In: SPIE CONFERENCE ON VISUAL COMMUNICATION AND IMAGE PROCESSING, 1990. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1990. p.1404–1415.
- [BUC 96] BUCKHEIT, J. et al. **Wavelab v.701**. Public domain MATLAB toolbox. 1996. Disponível em: <playfair.stanford.edu/pub/wavelab>. Acesso em: mar.2001.
- [CAM 68] CAMPBELL, F. W.; ROBSON, J. G. Applications of fourier analysis to the visibility of gratings. **Journal of Physiology**, London, v.197, p.551–556, 1968.
- [CAN 86] CANNY, J. A computational approach to edge detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.8, p.679–698, 1986.
- [CAR 95] CARMONA, R. A. Extrema reconstructions and spline smoothing: variations on an algorithm of mallat and zhong. In: ANTONIADIS, A.; OPPENHEIM, G. (Ed.). **Wavelets and Statistics**. Berlin:Springer-Verlag, 1995. p.83-94. (Lecture Notes in Statistics, v.103).
- [CHA 97] CHANG, S. G.; VETTERLI, M. Spatial adaptive wavelet thresholding for image denoising. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, ICIP, 1997. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1997. p.374–377.



- [CHA 98] CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, ICIP, 1998. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1998. p.535–539.
- [CHA 2000] CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.9, n.9, p.1522–1531, Sept. 2000.
- [CHI 97] CHIPMAN, H. A.; KOLACZYK, E. D.; MCCULLOCH, R. E. Adaptive bayesian wavelet shrinkage. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.92, n.440, p.1413–1421, Dec. 1997.
- [COI 95] COIFMAN, R. R.; DONOHO, D. L. Translation-invariant denoising. In: ANTONIADIS, A.; OPPENHEIM, G. (Ed.). **Wavelets and Statistics**. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995. (Lecture Notes in Statistics, v.103).
- [DAM 2000] DAMERA-VENKATA, N. et al. Image Quality Assessment Based on a Degradation Model. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.9, n.4, p.636–650, Apr. 2000.
- [DAU 92] DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [DAV 75] DAVIS, L. S. A survey of edge detection techniques. **Computer Graphics and Image Processing**, San Diego, v.4, p.248–270, 1975.
- [DON 93] DONOHO, D. L. **Wavelet shrinkage and w.v.d.: a 10-minute tour**. Stanford: Stanford Press, 1993. (Technical Report n.416).
- [DON 95] DONOHO, D. L. De-noising by soft thresholding. **IEEE Transactions on Information Theory**, New York, n.41, p.613–627, 1995.
- [ELD 98] ELDER, J. H.; ZUCKER, S. W. Local scale control for edge detection and blurr estimation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.20, n.7, p.699–716, July 1998.
- [ENG 2001] ENG, H.-L.; MA, K.-K. Noise adaptive soft-switching median filter. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.10, n.2, p.242–251, Feb. 2001.
- [FIG 2001] FIGUEIREDO, M. A. T.; NOWAK, R. D. Wavelet-based image estimation: an empirical bayes approach using jeffrey’s noninformative prior. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.10, n.9, p.1322–1331, Sept. 2001.

- [FIS 99] FISCHL, B.; SCHWARTZ, E. L. Adaptive nonlocal filtering: a fast alternative to anisotropic diffusion for image enhancement. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.21, n.1, p.42–48, Jan. 1999.
- [FU 2000] FU, Y.; ERDEM, A. T.; TEKAL, A. M. Tracking visible boundary objects using occlusion adaptive motion snakes. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.9, n.12, p.2051–2060, Dec. 2000.
- [GER 2001] GERMAIN, O.; RÉFRÉGIER, P. Edge location in SAR images: performance of the likelihood ratio filter and accuracy improvement with an active contour approach. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.10, n.1, p.72–78, Jan. 2001.
- [GON 92] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital image processing**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [HAL 81] HALL, C. F. Subjective evaluation of a perceptual quality metric. In: CHEATHAM, P. S. (Ed.). **Image Quality**, [S.l.:s.n.], 1981. P. 200-204. (Proc. SPIE, v.310).
- [HAR 90] HARALICK, R. M.; LEE, J. S. J. Context dependent edge detection and evaluation. **Pattern Recognition**, Oxford, v.23, n.1-2, p.1–20, 1990.
- [HAT 99] HATIPOGLU, S.; MITRA, S. K.; KINGSBURY, N. Texture classification using dual-tree complex wavelet transform. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING AND ITS APPLICATIONS, 7., 1999. [**Image Processing and its Applications**]. London: Institution of Electrical Engineers, 1999. p. 344-347.
- [HUB 62] HUBEL, D. H.; WIESEL, T. N. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. **Journal of Physiology**, London, v.160, p.106–154, 1962.
- [IVE 95] IVERSON, L. A.; ZUCKER, S. W. Logical/Linear operators for image curves. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.17, n.10, p.982–996, Oct. 1995.
- [JAI 89] JAIN, A. K. **Fundamentals of digital image processing**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [JAN 2001] JANSEN, M.; BULTHEL, A. Empirical bayes approach to improve wavelet thresholding for image noise reduction. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.96, n.454, p.629–639, June 2001.

- [JUN 2000a] JUNG, C. R.; SCHARCANSKI, J. Stochastic texture image retrieval and similarity matching. In: SIBGRAPI, 13., 2000, Gramado, RS. **Proceedings...** Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2000. p.178–184.
- [JUN 2001] JUNG, C. R.; SCHARCANSKI, J. Wavelet-based method for image filtering using scale-space continuity. **Journal of Electronic Imaging**, Bellingham, v.10, n.2, p.511–520, Apr. 2001.
- [JUN 2001a] JUNG, C. R.; SCHARCANSKI, J. Adaptive image denoising in scale-space using the wavelet transform. In: SIBGRAPI, 14., 2001, Florianópolis, SC. **Proceedings...** Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2001. p.172–178.
- [JUN 2000] JUNG, C. R. **Filtragem de imagens com preservação das arestas usando a transformada de wavelets**. 2000. 78f. Exame de Qualificação (Doutorado em Ciência da Computação) - Instituto de Informatica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [KAD 98] KADABA, S. R.; GELFAND, S.; KASHYAP, R. L. Recursive estimation of images using non-gaussian autoregressive models. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.7, n.10, p.1439–1452, Oct. 1998.
- [KOE 84] KOENDERINK, J. The structures of images. **Biological Cybernetics**, Berlin, v.50, p.363–370, 1984.
- [LAI 95] LAINE, A.; FAN, J.; YANG, W. Wavelets for contrast enhancement of digital mammography. **IEEE Engineering in Medicine and Biology**, New York, v.14, n.5, p.536–550, Sept. / Oct. 1995.
- [LAR 79] LARSON, H. J.; SHUBERT, B. O. **Probabilistic models in engineering sciences**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1979. v.1.
- [LEE 80] LEE, J. S. Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v. 2, p.165–168, Mar. 1980.
- [LEV 85] LEVINE, M. D. **Vision in man and machine**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1985.
- [LIN 99] LIN, J. H.; ANSARI, N.; LI, J. Nonlinear filtering by threshold decomposition. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.8, n.7, p.925–933, July 1999.
- [LU 92] LU, J. et al. Noise reduction with multiscale edge representation and perceptual criteria. In: IEEE-SP INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON TIME-FREQUENCY AND TIME-SCALE ANALYSIS, 1992, Victoria, BC. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1992. p.555–558.

- [LU 94] LU, J.; HEALY, D. M.; WEAVER, J. B. Contrast enhancement of medical images using multiscale edge representation. **Optical Engineering**, Orlando, FL, v.33, n.7, p.2151–2161, July 1994.
- [MAL 97] MALFAIT, M.; ROOSE, D. Wavelet based image denoising using a Markov Random Field a priori model. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.6, n.4, p.549–565, 1997.
- [MAL 92b] MALLAT, S. G.; HWANG, W. L.; ZHONG, S. “**wave2©**” software package. 1992. Disponível em: <ftp://cs.nyu.edu/pub/wave/wave2.tar.Z>. Acesso em: fev.2000.
- [MAL 92a] MALLAT, S. G.; HWANG, W. L. Singularity detection and processing with wavelets. **IEEE Transactions on Information Theory**, New York, v.38, n.2, p.617–643, 1992.
- [MAL 92] MALLAT, S. G.; ZHONG, S. Characterization of signals from multiscale edges. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.14, n.7, p.710–732, 1992.
- [MAL 89] MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.11, n.7, p.674–693, 1989.
- [MAR 79] MARR, D.; HILDRETH, E. C. **Theory of edge detection**. Cambridge: M.I.T. Press, 1979. (M.I.T. Artificial Intelligence Memo, n.518).
- [MAR 79a] MARR, D.; POGGIO, T. A computational theory of human stereo vision. **Proceedings of the Royal Society of London**, London, v.204, p.301–328, 1979.
- [MAR 76] MARR, D. Early processing of visual information. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, London, v.275, p.483–519, 1976.
- [MAR 82] MARR, D. **Vision, a computational investigation into the human representation and processing of visual information**. New York: W. H. Freeman, 1982.
- [MEY 93] MEYER, Y. **Wavelets: algorithms and applications**. Philadelphia: SIAM, 1993. Translated and Revised by R. D. Ryan.
- [MIH 99] MIHÇAK, M. K. et al. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients. **IEEE Signal Processing Letters**, New York, v.6, n.12, p.300–303, Dec. 1999.

- [NIT 92] NITZBERG, M.; SHIOTA, T. Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.14, n.8, p.826–833, Aug. 1992.
- [OPP 89] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time signal processing**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [OSH 90] OSHER, S.; RUDIN, L. I. Feature-oriented image enhancement using shock filters. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, Philadelphia, v.27, n.4, p.919–940, Aug. 1990.
- [PAP 65] PAPOULIS, A. **Probability, random variables and stochastic processes**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.
- [PAR 89] PARENT, P.; ZUCKER, S. W. Trace inference, curvature consistency, and curve detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.11, n.8, p.823–839, Aug. 1989.
- [PEN 2000] PENEDO, S. M.; SEARA, R. Interpolação de imagens através da propriedade de regularidade e correção de bordas em multi-escala. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICACÕES, SBrT, 18., 2000, Gramado, RS, Brasil. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2000. p.606–611.
- [PER 90] PERONA, P.; MALIK, J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.12, n.7, p.629–639, July 1990.
- [PET 91] PETROU, M.; KITTLER, J. Optimal edge detector for ramp edges. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.13, n.5, p.483–491, 1991.
- [PIT 90] PITAS, I.; VENETSAPPOULUS, A. N. **Nonlinear digital filters: principles and applications**. Boston, MA: Kluger, 1990.
- [PIZ 99] PIZURICA, A. et al. Image de-noising in the wavelet domain using prior spatial constraints. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING AND ITS APPLICATIONS, 7., 1999, Manchester, England. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.216–219.
- [POR 99] PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P. **Texture representation and synthesis using correlation of complex wavelet coefficient magnitudes**. 1999. Disponível em: <ftp://ftp.cns.nyu.edu/pub/eero/portillaTR54.ps.gz>. Acesso em: dez.2000.

- [POR 2000] PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P. Image denoising via adjustment of wavelet coefficient magnitude correlation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, 7., 2000, Vancouver, BC, Canada. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2000.
- [PRA 91] PRATT, W. K. **Digital image processing**. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- [PRO 93] PROESMANS, M. et al. Applying geometry-driven diffusion to image enhancement. **Pattern recognition and image analysis, special issue** : advances in mathematical theory and applications, [S.l.], v.3, n.3, p.333–337, July/Sept. 1993. Trabalho apresentado no German-Russian Workshop on Image Interpretation and Pattern Recognition.
- [RAN 95] RANGAYYAN, R. M.; ELKADIKI, S. G. Algorithm for the computation of region-based image edge profile acutance. **Journal of Electronic Imaging**, Bellingham, v.4, n.1, p.62–70, Jan. 1995.
- [RIC 95] RICHARDSON, W. B. Applying wavelets to mammograms. **IEEE Engineering in Medicine and Biology**, New York, v.14, n.5, p.551–560, Sept. / Oct. 1995.
- [ROM 2001] ROMBERG, J. K.; CHOI, H.; BARANIUK, R. G. Baesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden markov models. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.10, n.7, p.1056–1068, July 2001.
- [ROS 84] ROSENFELD, A. **Multiresolution Image Processing and Analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [RUD 92] RUDIN, L.; OSHER, S.; FATEMI, C. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. **Physica D**, Amsterdam, v.60, p.259–268, 1992.
- [SAH 93] SAHINER, B.; YAGLE, A. E. Image reconstruction from projections under wavelet constraints. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.41, p.3579–3584, Dec. 1993.
- [SAI 90] SAITO, N.; CUNNINGHAM, M. A. Generalized e-filter and its application to edge detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.12, n.8, p.814–817, 1990.
- [SCH 2001] SCHARCANSKI, J.; JUNG, C. R.; CLARKE, R. T. Adaptive image denoising using scale and space consistency. Submetido e aceito para publicação na **IEEE Transactions on Image Processing**, 2001. Ainda não publicado.

- [SHA 91] SHAH, J. Segmentation by nonlinear diffusion. In: CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, 1991. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1991.
- [SHA 92] SHAH, J. Segmentation by nonlinear diffusion II. In: CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, 1992. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1992.
- [SIM 96] SIMONCELLI, E. P.; ADELSON, E. Noise removal via bayesian wavelet coring. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, 1996, Lausanne, Switzerland. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1996. p.279–382.
- [SIM 99] SIMONCELLI, E. P. Bayesian denoising of visual images in the wavelet domain. In: MÜLLER, P.; VIDAKOVIC, B. (Ed.). **Bayesian inference in wavelet based models**. New York: Springer-Verlag, 1999. p.291–308. (Lecture Notes in Statistics, v. 141).
- [STR 96] STRANG, G.; NGUYEN, T. **Wavelets and filter banks**. [S.l.]: Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [STR 86] STRANG, G. **Introduction to applied mathematics**. Cambridge, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [STR 2000] STRELA, V.; PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P. Image denoising via a local gaussian scale mixture model in the wavelet domain. In: SPIE ANNUAL MEETING, 45., 2000, San Diego, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2000.
- [TAN 96] TANNENBAUM, A. R. et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.5, p.1539–1553, 1996.
- [VID 94] VIDAKOVIC, B.; MÜLLER, P. **Wavelets for kids: a tutorial introduction**. [S.l.: s.n.], 1994.
- [WES 87] WESTERLINK, P. H.; BIEMOND, J.; BOEKEE, D. E. An optimal bit allocation algorithm for sub-band coding. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTIC, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, 1987, Dallas, Texas. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1987. p.1378–1381.
- [WIT 83] WITKIN, A. Scale space filtering. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 8., 1983. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1983. p.1019–1021.
- [XU 94] XU, Y. et al. Wavelet transform domain filters: a spatially selective noise filtration technique. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.3, n.6, p.747–758, 1994.

- [YAN 95] YANG, Z. et al. Effect of wavelet bases on compressing digital mammograms. **IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine**, New York, v.14, n.5, p.570–578, Sept. / Oct. 1995.
- [YOU 2000] YOU, Y. L.; KAVEH, M. Fourth-order partial differential equations for noise removal. **IEEE Transactions on Image Processing**, New York, v.9, n.10, p.1723–1730, Oct. 2000.
- [ZHU 97] ZHU, S. C.; MUMFORD, D. Prior learning and gibbs reaction-diffusion. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, New York, v.19, n.11, p.1236–1250, Nov. 1997.