

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**André Reinert Brüch**

**ANÁLISE DE LAJES EM BALANÇO EM FORMA DE L**

Porto Alegre  
dezembro 2009

**ANDRÉ REINERT BRÜCH**

**ANÁLISE DE LAJES EM BALANÇO EM FORMA DE L**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

**Orientador: Inácio Benvegnu Morsch**

Porto Alegre  
dezembro 2009

**ANDRÉ REINERT BRÜCH**

**ANÁLISE DE LAJES EM BALANÇO EM FORMA DE L**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2009

Prof. Inácio Benvegnu Morsch  
Doutor pela UFRGS  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela UFRGS

**Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)**  
Dr. pela UFRGS

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila (UFRGS)**  
Dra. pela UFRGS

**Prof. Rubem Clécio Schwingel**  
Mestre pela UFRGS

Dedico este trabalho aos meus avós,  
Neu Reinert e Osmar Brüch.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Inácio Benvegnu Morsch, orientador deste trabalho, pela ajuda e orientação prestadas ao longo de todo ano.

Agradeço a Profa. Carin Maria Schmitt, Coordenadora das disciplinas Trabalho de Diplomação Engenharia Civil I e II, por toda atenção dada.

Agradeço a engenheira Cláudia Mesquita da Rosa por todo material didático e apoio prestado.

Agradeço ao engenheiro Reiner Lang pela ajuda nas soluções realizadas com o software TQS.

Agradeço aos colegas e grandes amigos que fiz na longa caminhada deste curso, em especial aos engenheiros Bernardo Etges, Rafael Sacchi e Rodrigo Nascimento.

Agradeço aos meus pais, Ana Reinert e Ricardo Santalucia Bruch, por estarem sempre ao meu lado em todas as decisões tomadas.

Agradeço aos meus avós, Neu Reinert e Osmar Bruch, dois grandes exemplos na minha vida.

Somos o que repetidamente fazemos.  
A excelência portanto não é um feito, mas um hábito.

*Aristóteles*

## RESUMO

BRÜCH, A. R. **Análise de lajes em balanço em forma de L**. 2009. 93 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Nos escritórios de projeto de Engenharia, diferentes métodos são empregados para a solução de problemas estruturais. Dentre os mais utilizados nos programas de computador para análise de placas, destacam-se o Método dos Elementos Finitos e a Analogia de Grelha. O primeiro analisa a placa de forma bidimensional, dividindo-a em elementos discretos onde a sua continuidade é mantida. O segundo, representa a placa através de uma grelha composta por elementos unidirecionais de barras, os quais precisam ser calibrados para que forneçam bons resultados. Muito apreciadas pelos arquitetos e cada vez mais freqüente em edificações residenciais, as sacadas formadas por lajes em balanço em forma de L necessitam de uma análise bem realizada de seus esforços e deslocamentos, pois sua configuração não é simples como a de uma laje com um balanço unidirecional. Este trabalho tem como objetivo a análise e comparação de resultados obtidos para lajes que apresentam esta configuração quando calculadas segundo os diferentes métodos. O autor visa também a calibração dos elementos de barra utilizados na Analogia de Grelha para a obtenção de resultados satisfatórios quando comparados aos obtidos através do Método dos Elementos Finitos, testando estas calibrações obtidas em problemas com outras características para avaliar a sua validade conforme a geometria e a vinculação das placas.

Palavras-chave: placa; elementos finitos; analogia de grelha; calibração; balanço em L.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: representação esquemática do delineamento da pesquisa.....	17
Figura 2: raio R da maior circunferência que pode ser inscrita no plano da placa.....	18
Figura 3: placa delgada retangular e sua deflexão devido à ação de forças transversais..	21
Figura 4: diminuição do valor do giro na direção positiva dos eixos x e y.....	22
Figura 5: a geometria do giro de torção.....	22
Figura 6: deslocamento de um ponto A situado a uma distância z do plano médio da placa.....	23
Figura 7: momentos e esforços cortantes na placa plana.....	26
Figura 8: configuração das charneiras plásticas.....	30
Figura 9: diagrama real e diagrama rígido-plástico.....	31
Figura 10: malha de elementos finitos interligados em seus nós.....	36
Figura 11: elemento SHELL 63.....	38
Figura 12: dados de saída do elemento SHELL 63.....	39
Figura 13: barras representando faixas de uma placa em uma direção.....	40
Figura 14: seção retangular e seus pontos de tensão máxima devido a um esforço de torção.....	41
Figura 15: elemento de barra BEAM 4.....	43
Figura 16: ilustração de um prédio com sacadas em balanço em L.....	44
Figura 17: problema proposto no trabalho.....	45
Figura 18: círculos inscritos no plano da placa.....	46
Figura 19: desmembramento da laje em L.....	47
Figura 20: laje com duas bordas adjacentes engastadas e as outras duas livres.....	47
Figura 21: identificação de elementos da placa.....	50
Figura 22: modelo com elementos de 50x50 cm e de 6,25x6,25 cm.....	50
Figura 23: estimativa de erro na malha menos e mais refinada.....	51
Figura 24: variação dos momentos no ponto 4 com o tamanho dos elementos.....	52
Figura 25: deslocamentos obtidos na malha mais refinada.....	53
Figura 26: momentos $M_x$ e $M_y$ da placa com elementos de 25 cm.....	55
Figura 27: momentos $M_{xy}$ da placa com elementos de 25 cm.....	55
Figura 28: modelo com barras de 50 cm de largura.....	56
Figura 29: distribuição de momentos fletores no modelo com barras de 50 cm.....	57
Figura 30: deslocamentos obtidos no modelo com barras de 25 cm.....	59
Figura 31: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras.....	59

Figura 32: linha de ruptura r.....	60
Figura 33: geometria do triângulo e momento distribuído ao longo da linha de ruptura..	61
Figura 34: variação dos momentos $M_1$ com o tamanho dos elementos.....	62
Figura 35: momentos $M_1$ obtidos para a malha de 25x25 cm.....	63
Figura 36: identificação de elementos da placa na solução por desmembramento.....	64
Figura 37: deslocamentos obtidos na malha mais refinada para a placa 1.....	64
Figura 38: momentos $M_x$ e $M_{xy}$ para placa 1 com elementos de 25 cm.....	65
Figura 39: deslocamentos obtidos na malha mais refinada para a placa 2.....	66
Figura 40: momentos $M_x$ para a placa 2 com elementos de 25 cm.....	67
Figura 41: momentos $M_y$ para a placa 2 com elementos de 25 cm.....	67
Figura 42: momentos fletores no modelo com barras de 25 cm da placa 1.....	68
Figura 43: deslocamentos obtidos para a placa 1 com barras de 25 cm.....	69
Figura 44: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras da placa 1.....	70
Figura 45: momentos fletores no modelo com barras de 25 cm da placa 2.....	71
Figura 46: deslocamentos obtidos para placa 2 com barras de 25 cm.....	71
Figura 47: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras da placa 2.....	72
Figura 48: momentos fletores obtidos no TQS no modelo com barras de 25 cm.....	73

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: momentos e tensões obtidos no ponto 4 da placa.....	52
Quadro 2: média, desvio padrão e coeficiente de variação dos momentos obtidos no ponto 4.....	53
Quadro 3: deslocamentos no ponto 1.....	54
Quadro 4: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (modelo de placa).....	54
Quadro 5: momentos fletores nos pontos 5 e 6 (modelo de placa).....	54
Quadro 6: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada.....	55
Quadro 7: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (modelo de barras).....	57
Quadro 8: momentos fletores nos pontos 5 e 6 (modelo de barras).....	57
Quadro 9: deslocamentos obtidos para diferentes calibrações das barras.....	58
Quadro 10: momentos $M_1$ obtidos nos modelos de placa.....	62
Quadro 11: média, desvio padrão e coeficiente de variação para os momentos $M_1$ .....	62
Quadro 12: deslocamentos no ponto 1 da placa 1.....	65
Quadro 13: momentos fletores ao longo da borda 2 e do ponto 2 da placa 1 (modelo de placa).....	65
Quadro 14: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada da placa 1.....	66
Quadro 15: deslocamentos no ponto 3 da placa 2.....	66
Quadro 16: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2 (modelo de placa).....	67
Quadro 17: momentos fletores nos pontos 5 e 6 da placa 2 (modelo de placa).....	67
Quadro 18: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada da placa 2.....	67
Quadro 19: momentos fletores ao longo da borda 2 e do ponto 2 da placa 1 (modelo de barra).....	68
Quadro 20: deslocamentos da placa 1 obtidos para diferentes calibrações das barras.....	69
Quadro 21: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2 (modelo de barras).....	70
Quadro 22: momentos fletores nos pontos 5 e 6 da placa 2 (modelo de barras).....	70
Quadro 23: deslocamentos da placa 2 obtidos para diferentes calibrações das barras.....	71
Quadro 24: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (TQS).....	73
Quadro 25: momentos fletores nos pontos 5 e 6 (TQS).....	73
Quadro 26: deslocamentos obtidos no TQS.....	73
Quadro 27: deslocamentos na placa em L para o caso a.....	74
Quadro 28: deslocamentos na placa em L para o caso b.....	74
Quadro 29: deslocamentos na placa em L para o caso c.....	74
Quadro 30: deslocamentos na placa retangular para o caso a.....	75
Quadro 31: deslocamentos na placa retangular para o caso b.....	75

Quadro 32: deslocamentos na placa retangular para o caso c.....	75
Quadro 33: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo das bordas 5 e 6.....	76
Quadro 34: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra nos pontos 4 e 5.....	76
Quadro 35: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra para o deslocamento no ponto 1.....	76
Quadro 36: comparação dos resultados obtidos entre a analogia do balanço unidirecional e modelo de placa.....	77
Quadro 37: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa ao longo das bordas 5 e 6.....	77
Quadro 38: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa nos pontos 5 e 6.....	77
Quadro 39: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa no ponto 1.....	78
Quadro 40: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo da borda 2 da placa 1.....	78
Quadro 41: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra no ponto 2 da placa 1.....	78
Quadro 42: comparação dos resultados obtidos para o deslocamento da placa 1.....	78
Quadro 43: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2.....	79
Quadro 44: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra nos pontos 5 e 6 da placa 2.....	79
Quadro 45: comparação dos resultados obtidos para o deslocamento da placa 2.....	79
Quadro 46: comparação dos resultados obtidos ao longo das bordas 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 50 cm.....	80
Quadro 47: comparação dos resultados obtidos nos pontos 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 50 cm.....	80
Quadro 48: comparação dos resultados obtidos ao longo das bordas 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 25 cm.....	80
Quadro 49: comparação dos resultados obtidos nos pontos 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 25 cm.....	80

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2 MÉTODO DE PESQUISA</b> .....	15
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA.....	15
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	15
<b>2.2.1 Objetivo principal</b> .....	15
<b>2.2.2 Objetivos secundários</b> .....	15
2.3 PRESSUPOSTOS.....	16
2.4 DELIMITAÇÕES.....	16
2.5 LIMITAÇÕES.....	16
2.6 DELINEAMENTO.....	16
<b>3 PLACAS</b> .....	18
3.1 CLASSIFICAÇÃO.....	18
3.2 TEORIAS DE CÁLCULO.....	19
3.3 TEORIA DE KIRCHOFF.....	20
3.4 TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS.....	30
<b>4 SOLUÇÕES DE PLACAS</b> .....	33
4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	34
4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	35
<b>4.2.1 Descrição do método</b> .....	35
<b>4.2.2 Elemento SHELL 63</b> .....	37
4.3 ANALOGIA DE GRELHA.....	39
<b>4.3.1 Descrição do método</b> .....	39
<b>4.3.2 Elemento BEAM 4</b> .....	42
<b>5 ANÁLISE DO PROBLEMA PROPOSTO</b> .....	44
5.1 DESCRIÇÃO DO CASO ESTUDADO.....	45
5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	46
5.3 SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	49
5.4 SOLUÇÃO PELA ANALOGIA DE GRELHA.....	56
5.5 SOLUÇÃO CONSIDERANDO UM BALANÇO UNIDIRECIONAL.....	60
5.6 SOLUÇÕES COM DESMEMBRAMENTO DA PLACA.....	63
<b>5.6.1 Elementos Finitos</b> .....	64
<b>5.6.2 Analogia de Grelha</b> .....	68
5.7 SOLUÇÃO COM TQS.....	72

5.8 ESTUDOS COMPLEMENTARES.....	73
5.9 COMPARAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	76
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>82</b>
REFERÊNCIAS.....	83
APÊNDICE A.....	85



## 1 INTRODUÇÃO

Em um mercado cada vez mais disputado, o engenheiro depara-se quotidianamente com novas exigências estéticas e econômicas impostas por seus clientes. Assim, desafios cada vez maiores têm aparecido na vida do projetista estrutural. Com o grande avanço tecnológico das últimas décadas, novos métodos vêm sendo desenvolvidos para ajudar na solução destes problemas. No entanto, mesmo com a grande disponibilidade de ferramentas existentes, ainda não há um consenso entre os profissionais sobre qual é mais adequada para resolver cada tipo de problema, e nem sempre o profissional dispõe de tempo para analisar o caso através de diversas formas diferentes, que permitam uma comparação entre os resultados obtidos.

Dentro deste contexto, diferentes modelos têm sido aplicados no dimensionamento de lajes planas. Entre eles, os modelos de grelha e de placa são os mais utilizados pelos softwares disponíveis no mercado. Por ser mais fácil a interpretação dos resultados obtidos, em casos mais simples, onde já se tem uma boa noção de como a estrutura vai se comportar, costuma-se optar por softwares que realizam a análise através da Analogia de Grelha. Neste, a laje é representada nas suas duas direções principais através de barras, formando uma estrutura reticulada tipo grelha, simulando o comportamento da laje, suas solicitações e deslocamentos.

Porém, sabe-se que os modelos de placa representam melhor o comportamento de lajes do que os modelos de barra, já que para estes é necessária a calibração das propriedades das barras, como a sua rigidez à torção. Esta calibração necessária na Analogia de Grelha nem sempre é evidente e torna-se indispensável, em certos casos, a realização de uma análise através de modelos de placa.

No caso de lajes em balanço formando um L, não é simples a configuração de um modelo de barra que simule de forma fiel o comportamento da estrutura. Mesmo para alguns programas comerciais, se não houver uma boa análise crítica sobre os resultados obtidos, patologias sérias podem vir a acontecer.

Frente a isto, o trabalho tem por proposta a comparação dos resultados do dimensionamento de uma placa com essas características pelo Método dos Elementos Finitos e pela Analogia de

Grelha. Neste último caso, sendo necessário encontrar um coeficiente de calibração que permita uma análise confiável deste tipo de problema.

O trabalho é dividido em seis capítulos. Cabe a este primeiro, introduzir o tema do trabalho, e ao segundo capítulo, apresentar seu método de pesquisa, tratando de questão de pesquisa, objetivos primários e secundários, pressupostos, delimitações, limitações e delineamento.

O terceiro capítulo é sobre as placas. Descreve sua classificação e as diferentes teorias de análise, das quais a Teoria de Kirchoff, para placas finas no domínio elástico, e a Teoria das Charneiras Plásticas, no domínio plástico, serão abordadas. O quarto capítulo trata de soluções de placas. Comenta sobre soluções analíticas de placas através de séries de Fourier, do Método dos Elementos Finitos e da Analogia de Grelha. São apresentados também neste capítulo, os elementos utilizados nos modelos de placa e de barra realizados neste trabalho.

O quinto capítulo apresenta o problema proposto e algumas formas de tratá-lo: a idéia da solução analítica através do desmembramento do problema, a solução do balanço unidirecional, as soluções através do Método dos Elementos Finitos e da Analogia de Grelha, solução com o software do mercado TQS, além de estudos complementares sobre os coeficientes de calibração obtidos para os deslocamentos da placa, comparações e análise dos resultados obtidos.

O sexto capítulo, considerações finais, expõe as conclusões que englobam todas as análises realizadas no trabalho, assim como dos resultados obtidos a partir dos distintos métodos utilizados e as calibrações encontradas para o modelo de grelha.

## **2 MÉTODO DE PESQUISA**

### **2.1 QUESTÃO DE PESQUISA**

A questão de pesquisa deste trabalho é: pode-se encontrar soluções com modelos de barra que forneçam bons resultados na análise de lajes em balanço em forma de L quando comparados com resultados obtidos com modelos de placa?

### **2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO**

Os objetivos do trabalho estão classificados em principal e secundários e são apresentados nos próximos itens.

#### **2.2.1 Objetivo principal**

O objetivo principal deste trabalho é o encontro da calibração de modelos de grelha que forneça uma boa aproximação do comportamento de estruturas de lajes em balanço em forma de L quando comparado com resultados obtidos com modelos de placa.

#### **2.2.2 Objetivos secundários**

Os objetivos secundários deste trabalho são:

- a) análise de placas através de soluções analíticas;
- b) solução de problemas de placas através da analogia de grelha;
- c) solução de problemas de placas através do método dos elementos finitos.

## 2.3 PRESSUPOSTOS

É pressuposto no trabalho que o Método dos Elementos Finitos, quando devidamente utilizado, fornece bons resultados na análise de placas finas.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se ao estudo de lajes em balanço em forma de L que serão calculadas pelo método da Analogia de Grelha e comparadas com resultados obtidos em análises realizadas através do Método dos Elementos Finitos.

## 2.5 LIMITAÇÕES

A pesquisa será realizada apenas com resultados obtidos através de análise computacional, utilizando o programa ANSYS para ambos os métodos de análise.

## 2.6 DELINEAMENTO

As etapas definidas no trabalho de pesquisa estão descritas abaixo:

- a) pesquisa bibliográfica: leitura e coleta de material utilizado na pesquisa;
- b) treinamento do programa de elementos finitos realizado junto ao professor orientador;
- c) definição das estruturas estudadas;
- d) solução de problemas utilizando elementos de grelha e elementos de placa, com o software escolhido;
- e) análise dos resultados obtidos;
- f) estudo comparativo dos resultados encontrados através dos dois métodos de análise propostos;
- g) conclusões e considerações finais.

Uma representação esquemática do delineamento em diagrama que relaciona as etapas do trabalho é apresentada na figura 1.

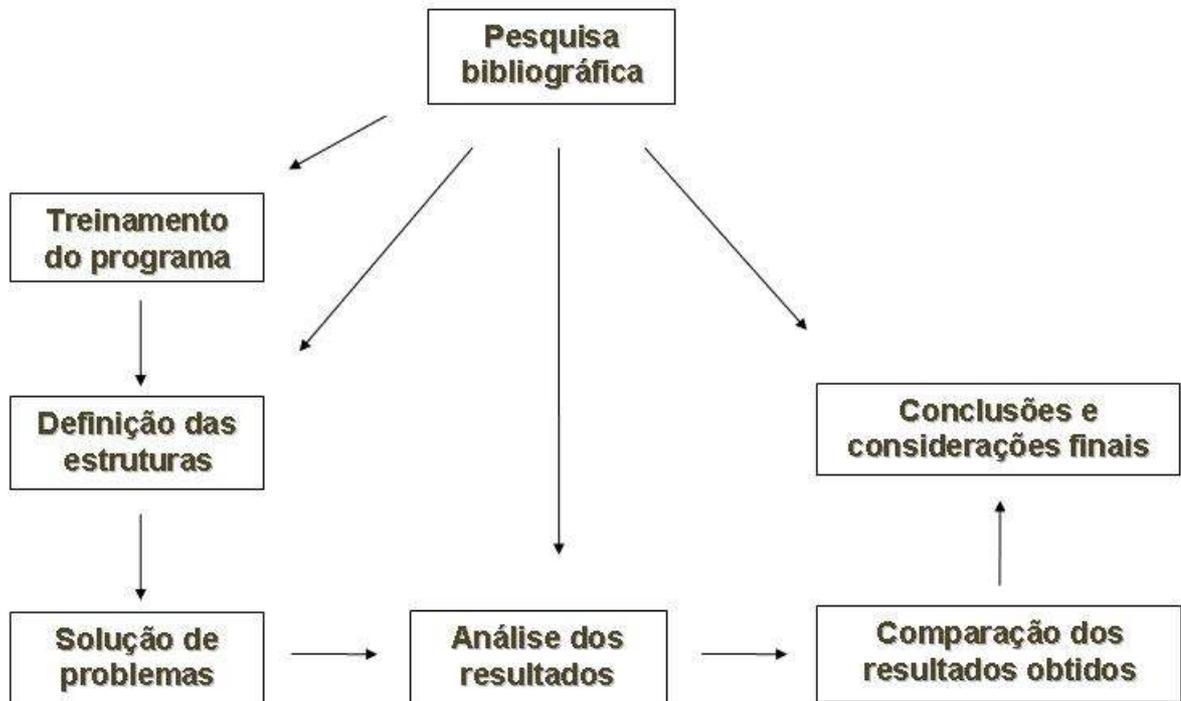


Figura 1: representação esquemática do delineamento da pesquisa

### 3 PLACAS

Placas são elementos tridimensionais sendo que uma de suas dimensões, a espessura, é pequena em relação às outras duas e as cargas são todas perpendiculares ao seu plano médio (AZEVEDO, 2003). No caso de carregamentos constituídos por momentos fletores, o vetor representativo do momento aplicado estará contido no plano médio da placa (GROEHS, 2002). As placas podem ter diversas formas: retangulares, circulares, elípticas, triangulares. São muito utilizadas na prática da Engenharia Civil como pavimentos de edifícios e paredes de reservatórios (OLIVEIRA NETO, 1998).

As placas podem diferenciar-se pela sua geometria, pelo tipo de apoio (pontual ou linear), pela sua vinculação (engaste, apoio simples, borda livre), e podem estar submetidas a diferentes tipos de carregamentos (carga pontual, uniformemente distribuída, hidrostática).

#### 3.1 CLASSIFICAÇÃO

Pode-se classificar uma placa em dois diferentes tipos: finas e espessas. Esta classificação pode ser feita a partir da relação entre a sua espessura e suas demais dimensões. Segundo Groehs (2002), esta classificação é dada através do raio  $R$  da maior circunferência que pode ser inscrita no plano da placa e a sua espessura  $t$ , conforme é apresentado na figura 2.

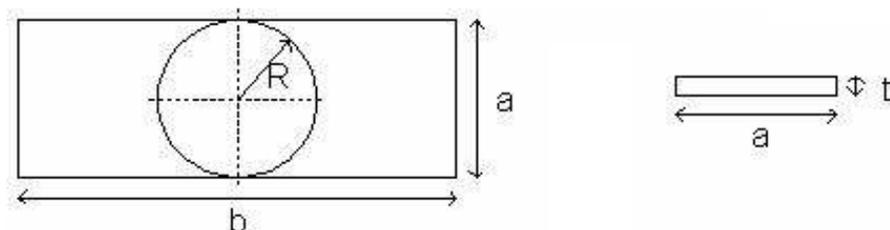


Figura 2: raio  $R$  da maior circunferência que pode ser inscrita no plano da placa (GROEHS, 2002)

A relação  $R/t$  classifica a placa da seguinte forma (GROEHS, 2002):

a)  $\frac{R}{t} \geq 10$  - placa fina ou média;

b)  $\frac{R}{t} < 10$  - placa espessa.

A principal diferença entre os dois tipos é a consideração da influência das tensões transversais devido ao esforço cortante das cargas atuantes na placa. Na análise de placas finas, esta influência costuma ser negligenciada, a partir de hipóteses simplificadoras.

De acordo com o material do qual a placa é constituída, ela pode ser classificada como anisotrópica, com propriedades diferentes em qualquer direção, ortótropa, com propriedades diferentes em duas direções perpendiculares, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções (OLIVEIRA NETO, 1998).

### 3.2 TEORIAS DE CÁLCULO

Para o cálculo dos esforços nas placas existem dois grupos de métodos: clássicos e de ruptura. Os métodos clássicos são fundamentados na Teoria da Elasticidade. Estes supõem que o material é homogêneo, isotrópico e se comporta elasticamente. Os métodos de ruptura, fundamentados na Teoria da Plasticidade, supõem o material comportando-se como um corpo rígido-plástico (HENNRICHS, 2003).

Dentre os métodos clássicos, duas teorias principais foram desenvolvidas para a análise do comportamento das placas: a teoria de Kirchhoff e a teoria de Reissner e Mindlin. A primeira, com suas hipóteses simplificadoras, analisa apenas placas finas, admitindo quatro variáveis de contorno do problema, resultando numa equação diferencial de 4ª ordem. A teoria de Reissner e Mindlin, considerando as deformações por cisalhamento, leva a uma equação diferencial de 6ª ordem, podendo ser utilizada também para placas espessas (OLIVEIRA NETO, 1998).

Para os métodos de ruptura, destaca-se a teoria das Charneiras Plásticas. Esta consiste na admissão de que uma laje, sob ação da sua carga de ruptura, se divide em painéis que giram em torno de linhas ao longo das quais atua um momento igual ao que a laje resiste na ruptura, segundo a direção normal a estas linhas (MÜLLER, 2000).

### 3.3 TEORIA DE KIRCHOFF

A teoria de Kirchoff para flexão de placas é baseada nas seguintes hipóteses (AWRUCH; MORSCH, 2009):

- a) a espessura da placa é constante e pequena em relação às outras duas dimensões;
- b) o material da placa é elástico, obedece a lei de Hooke e é homogêneo e contínuo, podendo ser isotrópico ou ortótropo;
- c) as deflexões da placa são pequenas, não causando alteração na geometria da mesma;
- d) a superfície média da placa é inicialmente plana e não sofre deformações específicas na flexão;
- e) planos normais à superfície média antes da flexão, permanecem planos após a flexão;
- f) as componentes de tensão transversais à superfície média da placa são pequenas e podem ser negligenciadas;
- g) somente são consideradas cargas transversais à placa.

Considerando-se uma placa fina retangular que sofre uma deformação devida à ação de forças transversais e um ponto qualquer desta placa com coordenadas iniciais  $(x, y, z)$  e finais  $(x + u_x, y + u_y, z + u_z)$  como mostra a figura 3. Os giros da superfície média nas direções  $x$  e  $y$  são respectivamente  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$  (AWRUCH; MORSCH, 2009).

Estes giros são positivos, e como diminuem ao longo do sentido positivo dos eixos, suas derivadas segundas são negativas. Estas derivadas segundas representam as curvaturas da linha elástica da placa. Como os deslocamentos são considerados infinitesimais, as inversas dos raios de curvatura  $r_x$  e  $r_y$  da superfície da placa em planos normais aos eixos  $x$  e  $y$  podem ser aproximados como mostram as equações 1:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{equação 1.a})$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{equação 1.b})$$

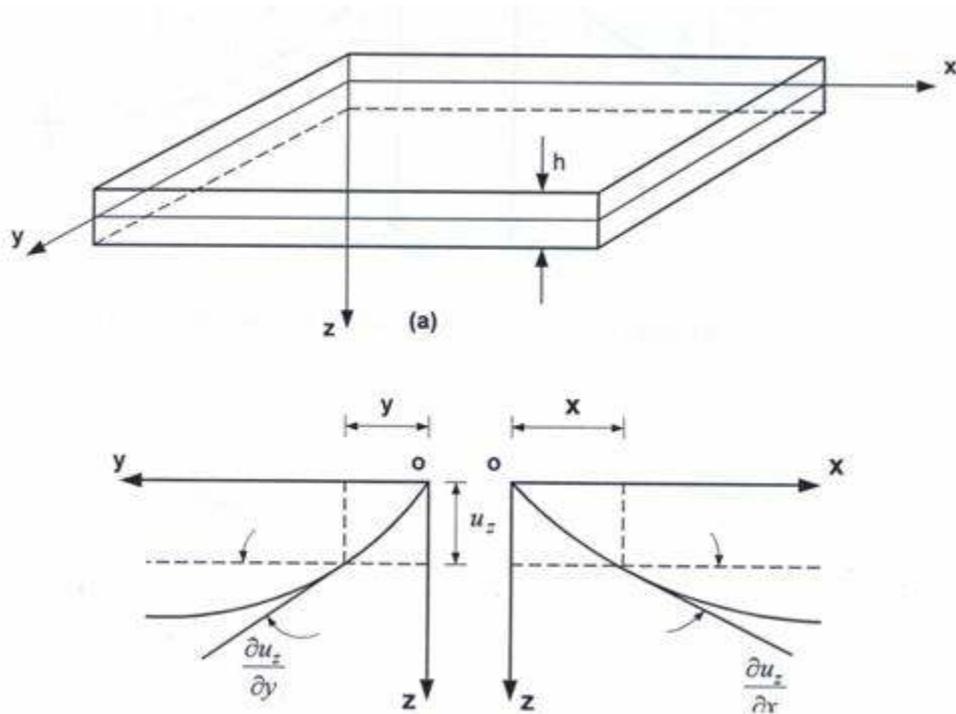


Figura 3: placa delgada retangular e sua deflexão devido à ação de forças transversais (AWRUCH; MORSCH, 2009)

Na equação 1,  $w$  equivale ao deslocamento na direção  $z$  normal ao plano da placa. A figura 4 representa os sinais de curvaturas indicados nesta equação.

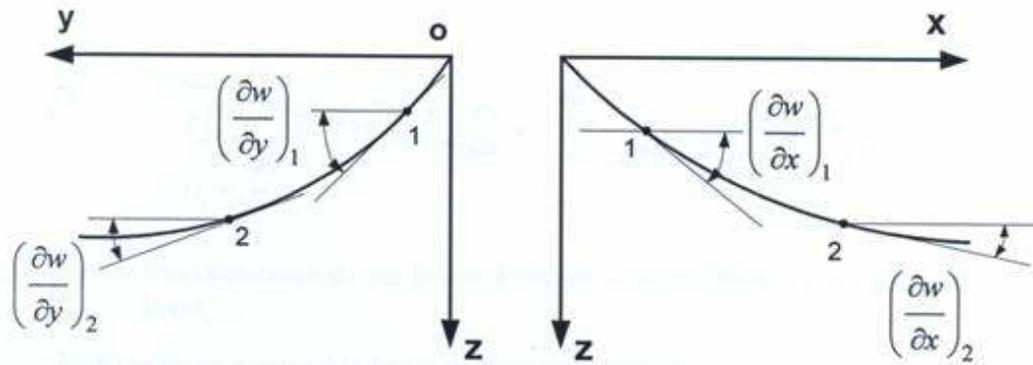


Figura 4: diminuição do valor do giro na direção positiva dos eixos x e y (AWRUCH; MORSCH, 2009)

Uma característica importante da placa é o efeito de torção, que representa a variação do giro em uma direção em relação a uma direção ortogonal a esta. Deste efeito de torção obtém-se a equação 2 e a sua interpretação é mostrada na figura 5 (AWRUCH; MORSCH, 2009):

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 2})$$

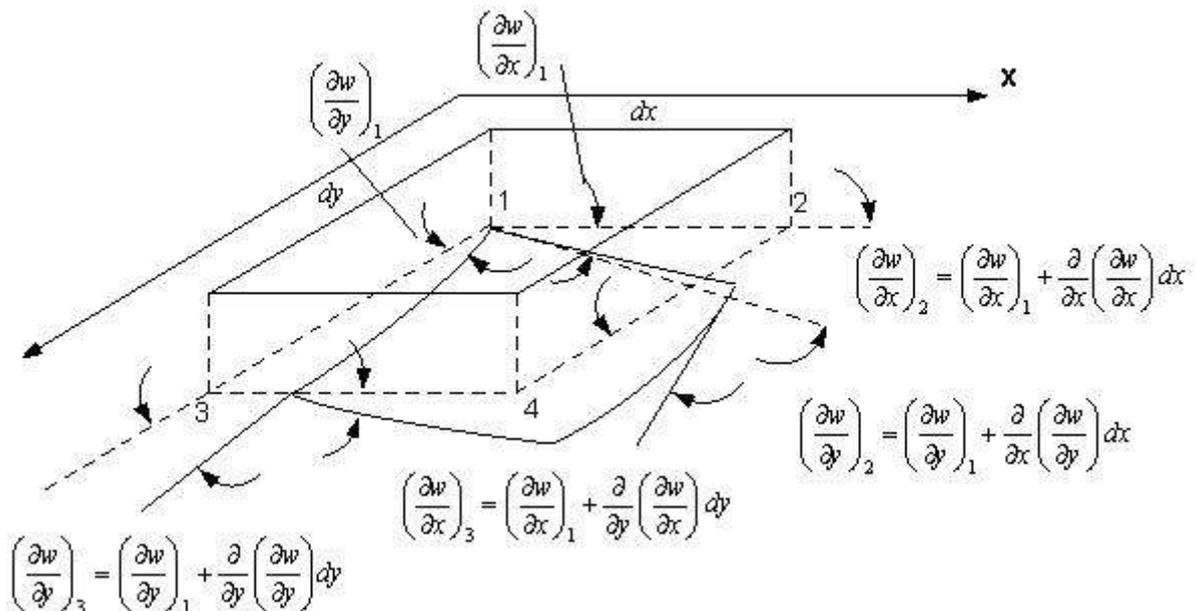


Figura 5: a geometria do giro de torção (AWRUCH; MORSCH, 2009)

Considerando-se o deslocamento de um ponto A qualquer, situado a uma distância  $z$  do plano médio da placa, tem-se a representação da figura 6.

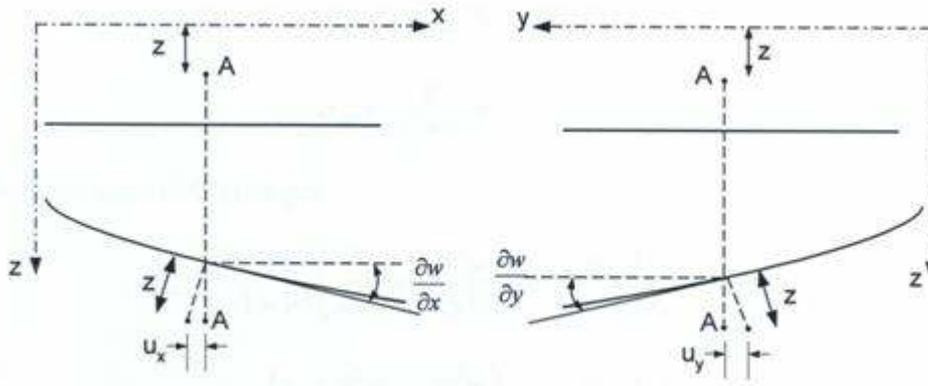


Figura 6: deslocamento de um ponto A situado a uma distância  $z$  do plano médio da placa (AWRUCH; MORSCH, 2009)

Levando em conta apenas o efeito de flexão, estes deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  se devem apenas à rotação da normal ao plano médio e suas componentes são representadas pelas equações 3 (AWRUCH; MORSCH, 2009):

$$u_x(x, y, z) = -z \frac{\partial u_z(x, y)}{\partial x} = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (\text{equação 3.a})$$

$$u_y(x, y, z) = -z \frac{\partial u_z(x, y)}{\partial y} = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (\text{equação 3.b})$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y, z) \quad (\text{equação 3.c})$$

Utilizando as equações 1, 2 e 3 obtém-se as componentes das deformações específicas expressas nas equações 4:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{z}{r_x} \quad (\text{equação 4.a})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{z}{r_y} \quad (\text{equação 4.b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2 \frac{z}{r_{xy}} \quad (\text{equação 4.c})$$

Considerando que o material é homogêneo, isótropo e cumpre a lei de Hooke (AWRUCH; MORSE, 2009), as componentes das tensões são dadas pelas equações 5:

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \quad (\text{equação 5.a})$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \quad (\text{equação 5.b})$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{1}{r_{xy}} \quad (\text{equação 5.c})$$

Utilizando as equações 5 para as tensões, pode-se então calcular os momentos fletores e torçores por unidade de largura (AWRUCH; MORSE, 2009), como demonstram as equações 6:

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} Z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{equação 6.a})$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} Z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{equação 6.b})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} Z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 6.c})$$

Em forma matricial, a relação constitutiva para placas finas, escritas em termos de resultantes de momentos e deformações específicas, é dada pela equação 7 e os momentos  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  e  $M_{xy}$ , assim como os esforços cortantes  $Q_{xx}$  e  $Q_{yy}$  estão representados na figura 7:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 7})$$

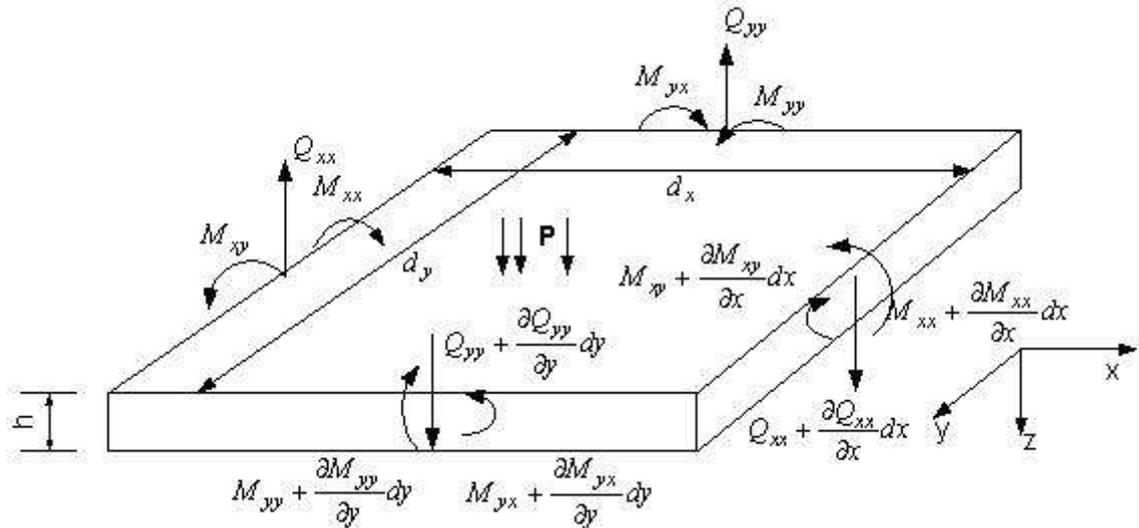


Figura 7: momentos e esforços cortantes na placa plana  
(AWRUCH; MORSCH, 2009)

Aplicando uma carga distribuída  $p(x, y)$ , normal ao plano da placa, e escrevendo as equações de equilíbrio para as forças na direção vertical  $z$  e momentos em torno de  $x$  e  $y$ , obtêm-se as equações 8 e 9:

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} - p = 0 \quad (\text{equação 8})$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{yy} = 0 \quad (\text{equação 9.a})$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xx} = 0 \quad (\text{equação 9.b})$$

Utilizando as equações 6 em 9, obtém-se:

$$Q_{xx} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (\text{equação 10.a})$$

$$Q_{yy} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (\text{equação 10.b})$$

Derivando as equações 9 em relação a x e a y, substituindo os termos correspondentes obtidos na derivação pela equação 8, e somando ambas expressões, obtém-se a equação 11:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2} + p = 0 \quad (\text{equação 11})$$

Inserindo as equações 6 na equação 11, tem-se a equação que governa o problema de flexão de placas finas (AWRUCH; MORSCH, 2009):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} p \quad (\text{equação 12})$$

Esta equação foi obtida por Lagrange e define a relação fundamental da teoria das placas finas, válida para materiais em regime elástico-linear (HENNRICHS, 2003).

Segundo Groehs (2002), a equação 12 possui duas incoerências produzidas pelo objetivo de transformar um problema tridimensional em um problema bidimensional de estado plano de tensões:

- a) com a consideração  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ , implica-se, devido a lei de Hooke,  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . Apesar disso, essas tensões citadas foram utilizadas ao longo do processo dedutivo apresentado;
- b) foi adotado que  $\sigma_{zz} = 0$ , assim como  $\varepsilon_{zz} = 0$ , mas pela lei de Hooke resulta para  $\sigma_{zz} = 0$ , na equação 13:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [0 - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{equação 13})$$

No caso mais geral  $\sigma_{xx} \neq 0$  e  $\sigma_{yy} \neq 0$  com mesmo sinal, resultando em  $\varepsilon_{zz} \neq 0$ , sendo incoerente com a hipótese adotada (GROEHS, 2002).

Essas incoerências são toleradas porque estes valores não nulos, resultado de uma análise tridimensional do problema, são pequenos quando comparados aos valores correspondentes as demais tensões e deformações específicas, o que é observado em placas finas com valores de deslocamentos  $w$  máximos menores que a metade da sua espessura  $t$  (ROSA, 2008).

A equação 12 pode ser escrita também na forma Laplaciana (TIMOSHENKO; WOINOWSKY, 1959):

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (\text{equação 14})$$

Onde:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{equação 15})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{equação 16})$$

Para a solução do problema, é necessário estabelecer as condições de contorno. Segundo Timoshenko e Woinowsky (1959), as seguintes condições devem ser verificadas para uma borda de comprimento  $a$  paralela ao eixo  $x$ , segundo os diferentes tipos de apoio em  $x=a$ :

Para um engaste:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$$

Para um apoio simples:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

Para a primeira condição de contorno de uma borda livre ser respeitada, a soma das forças reativas de cisalhamento devido ao esforço cortante e ao momento torsor da placa deve ser nula. A segunda condição de contorno para uma borda livre é que, assim como para o caso de um apoio simples, o momento  $M_{xx}$  deve ser nulo ao longo da borda  $x=a$ , resultando:

$$\left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

### 3.4 TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

A finalidade da Teoria das Charneiras Plásticas é a determinação dos momentos de plastificação que se devem atribuir à laje em estudo para que sua ruína não se dê sob a ação de cargas inferiores às impostas pelo projetista, já multiplicadas pelos respectivos coeficientes de segurança (LANGENDONCK, 1970).

Admitindo-se que a ruptura em um sólido tensionado ocorra quando uma certa função das tensões aproximar-se de um valor limite, deduz-se que a ruptura deverá iniciar-se em pontos isolados do sólido. No caso dos materiais plásticos, que carecem de capacidade de absorver tensões acima de um certo limite, a plastificação propaga-se às regiões vizinhas tão logo esta carga externa seja aumentada (JOHANSEN, 1962).

No regime de ruptura, o aço entra em escoamento ao longo de linhas de ruptura denominadas charneiras plásticas, enquanto as partes intermediárias da placa, compreendidas entre estas linhas, mantêm-se ainda no regime elástico. Pode-se então desprezar as deformações das partes em fase elástica, em presença às deformações plásticas das linhas de ruptura. Nestas condições, a configuração da superfície média da placa rompida será poliédrica e as linhas de ruptura serão retas. As únicas deformações existentes serão, portanto, rotações relativas de partes adjacentes a uma linha de ruptura em torno desta. As partes não rompidas executam giros em torno de certos eixos, cuja posição depende das condições de apoio da placa (JOHANSEN, 1962). A figura 8 apresenta a configuração das charneiras plásticas em uma placa retangular com bordas simplesmente apoiadas sob a ação de um carregamento uniforme.

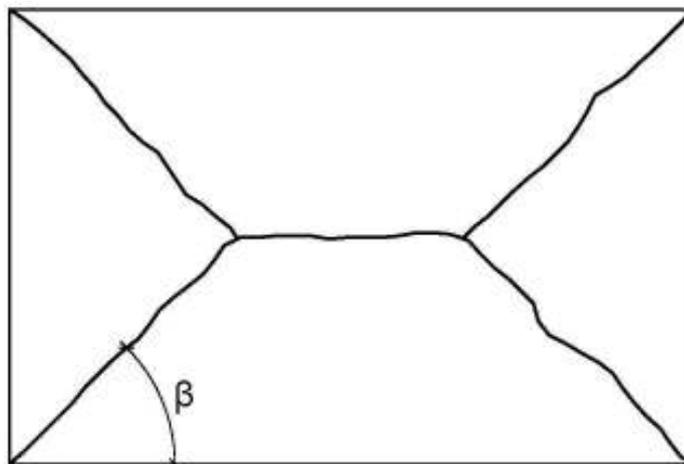


Figura 8: configuração das charneiras plásticas

As lajes de concreto armado, quando submetidas à flexão, podem atingir a ruína de duas maneiras: por ruptura do concreto à compressão ou por escoamento da armadura de flexão. No primeiro caso, as lajes são chamadas super-armadas. Tais peças devem ser evitadas pois, além da sua característica anti-econômica, há a possibilidade da ruína ocorrer sem que sejam visíveis os sintomas da sua iminência. No segundo caso, as lajes são chamadas sub-armadas. Nestas, a presença de fissuração excessiva do concreto e as grandes deflexões são indicativos visíveis da possibilidade de ruína (PINHEIRO, 1983 apud MÜLLER, 2000). A Teoria das Charneiras Plásticas aplica-se apenas às lajes de concreto armado ditas sub-armadas.

Sabe-se que as peças de concreto sub-armadas submetidas a esforços de flexão simples apresentam deformações angulares que obedecem a lei semelhante à apresentada na figura 9a. O diagrama que a representa tem dois trechos iniciais praticamente retilíneos correspondentes às deformações no estágio I e no estágio II, e um terceiro trecho quase paralelo ao eixo das deformações, que vai do início do escoamento da armadura de tração até a ruptura por compressão do concreto, com conseqüente ruína da peça. O momento fletor  $M_p$  correspondente ao início deste trecho é o que se considera como momento de plastificação, admitindo-se que ele se mantenha constante durante a deformação plástica da peça. Por serem pequenas as deformações elásticas em face às plásticas, estas são desprezadas. Desta forma, o diagrama ideal a ser usado nesta teoria é o de material rígido-plástico, como apresentado na figura 9b (LANGENDONCK, 1970).

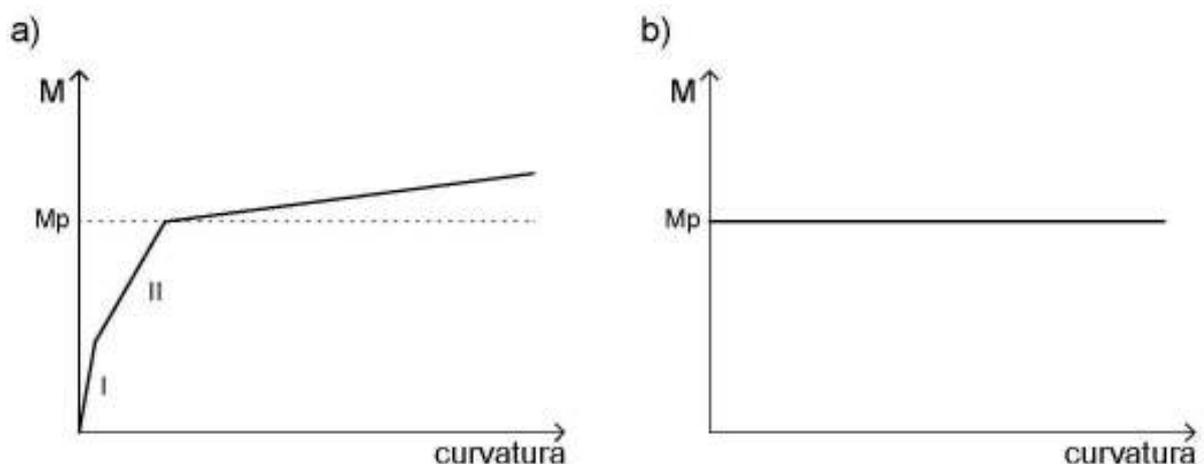


Figura 9: diagrama real e diagrama rígido-plástico

Nas aplicações da Teoria das Charneiras Plásticas são consideradas apenas as chamadas cargas proporcionais. Elas são as que se mantêm proporcionais entre si, variando de zero até os seus valores máximos. Admite-se sempre como satisfatória a capacidade de rotação das charneiras plásticas até o colapso final da laje. Além disso, para a determinação da carga de ruína ao longo das charneiras, são considerados apenas os momentos fletores de plastificação, desprezando-se qualquer eventual influência de forças normais e cortantes (FUSCO, 1995).

O cálculo da carga última da laje correspondente a determinados momentos de plastificação é feito pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, imaginando que as rotações estejam concentradas nas charneiras plásticas. Das diferentes possíveis configurações de equilíbrio plástico, a que fornecer o valor mínimo da carga é a solução verdadeira (FUSCO, 1995).

## 4 SOLUÇÕES DE PLACAS

A análise de placas pode ser feita de diversas formas, cada uma com suas limitações em termos de resultado, velocidade de resolução e facilidade na interpretação dos dados obtidos. Nos casos de configuração em que se dispõe de várias possibilidades de análise, cabe ao projetista escolher a forma que ele domine e lhe agrade mais trabalhar.

O problema descrito pela equação bi-harmônica não homogênea de Lagrange apresenta poucas soluções, se restringindo somente a casos simples de geometria da placa e seu carregamento. Alguns exemplos em que se pode obter estas soluções são placas circulares e retangulares simplesmente apoiadas ao longo de suas bordas, com carregamento uniformemente distribuído (HENNRICHS, 2003). Porém, com a utilização de técnicas numéricas de solução de sistemas de equações diferenciais, pode-se ampliar os casos de análise e estudar placas com geometria, carregamento e vinculações mais complexas (OLIVEIRA NETO, 1998). Apesar das vantagens apresentadas pelos métodos numéricos, é preciso saber as limitações dos mesmos para que seja possível empregá-los de forma segura e responsável. Isto implica no perfeito conhecimento da formulação empregada e das simplificações existentes (MASUERO; GONZÁLEZ, 2001).

Atualmente dispõem-se de três métodos numéricos. Dois são denominados métodos de domínio, o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), os quais associam pontos no domínio e no contorno do problema em suas formulações. O mais recente, Método dos Elementos de Contorno (MEC), é formulado com equacionamento integral ao longo do contorno do problema, em contraposição aos anteriores (OLIVEIRA NETO, 1998).

Além disso, costuma-se realizar a análise de placas através de analogias com sistemas de barras dispostas em uma ou duas direções no plano da placa. Este é chamado de Analogia de Grelha. Hennrichs afirma que, embora o MDF facilite o cálculo das placas, outros métodos, como o MEF e a Analogia de Grelha, costumam ser mais utilizados na formulação de programas de análise e projeto estrutural.

## 4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Em muitos problemas físicos importantes, existem duas ou mais variáveis independentes, de modo que o modelo matemático correspondente envolve equações diferenciais parciais, em vez de ordinárias. Além disso, as aplicações físicas levam, muitas vezes, a um outro tipo de problema, no qual o valor de uma variável dependente  $y$  ou de sua derivada é especificado em pontos diferentes. Tais condições são chamadas condições de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

Um método importante para se resolver equações diferenciais parciais é o método de separação de variáveis. Sua característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que devem ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

A solução desejada da equação diferencial parcial é expressa, então, como uma soma, uma série infinita, em geral, formada por soluções das equações diferenciais ordinárias. Em muitos casos, lida-se com séries em senos e/ou co-senos. Essas séries trigonométricas são chamadas séries de Fourier. As séries de Fourier são análogas às séries de Taylor, uma vez que ambos os tipos de séries fornecem um modo de se expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares familiares (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

Para determinados tipos de configuração de placas, em termos de forma, carregamento e condições de contorno, existem soluções por séries que descrevem o comportamento da mesma, seus esforços e deslocamentos. Quando é possível esta forma de abordagem, diz-se que o problema tem solução fechada, ou seja, existe solução analítica.

Esta abordagem analítica do problema de placas finas é apresentada no apêndice A para uma laje retangular com duas bordas opostas simplesmente apoiadas, a terceira borda engastada e a quarta livre, com um carregamento uniformemente distribuído transversal ao plano da placa. A solução da equação diferencial, frente as suas condições de contorno para este problema, é obtida através de séries desenvolvidas por Timoshenko e Woinowsky (1959).

No entanto, para muitos tipos de problemas, como o balanço em forma de L, não existem soluções fechadas e a análise deve ser realizada através de outros métodos.

## 4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 4.2.1 Descrição do método

Em muitas áreas da Engenharia, a solução de tensões e deformações no domínio da elasticidade é necessária. Os diferentes casos podem variar de problemas planos de tensões ou deformações, sólidos axissimétricos, flexão de uma placa ou uma casca, sólidos tridimensionais (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1989).

A modelagem destes sistemas físicos frequentemente resulta em equações diferenciais parciais que não podem ser resolvidas analiticamente ou são desprovidas de uma solução exata devido à complexidade das condições de contorno ou do domínio do problema. Nestes casos, um método numérico deve ser usado para resolver o problema. O Método dos Elementos Finitos costuma ser julgado o método mais adequado pela facilidade de introdução das condições de contorno (FARIA, 2006).

Apesar de muitas técnicas utilizadas no Método dos Elementos Finitos serem conhecidas a bastante tempo, é referido por vários autores que a publicação mais antiga sobre este método data de 1960 e tem como autor Ray Clough (AZEVEDO, 2003). Portanto, este método é relativamente recente quando comparado à outros métodos de análise estrutural. O Método dos Elementos Finitos surgiu como uma nova possibilidade para resolver problemas da Teoria da Elasticidade, superando as dificuldades e problemas inerentes aos métodos de Rayleigh-Ritz, Galerkin, Diferenças Finitas, Resíduos Ponderados e outros (ASSAN, 1999).

Este consiste não apenas em transformar o contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e, a partir daí, obter o estado de deformações correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento. A essa divisão do domínio dá-se o nome de malha de elementos finitos. A malha desse reticulado pode ser aumentada ou diminuída variando o tamanho dos elementos. Os pontos de intersecção das linhas são chamados nós (ASSAN, 1999). A figura 10 ilustra uma malha de elementos finitos em uma placa retangular.

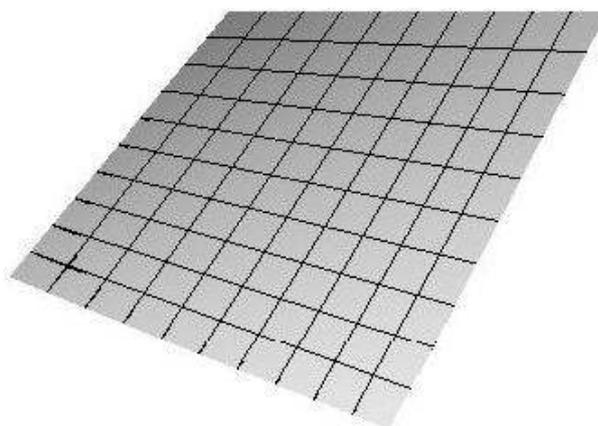


Figura 10: malha de elementos finitos interligados em seus nós

Ao invés de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, no Método dos Elementos Finitos as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento. Assim, para cada elemento é montado um Funcional, que somado aos dos demais elementos, formam o Funcional para todo o domínio do problema (ASSAN, 1999). A Formulação Variacional consiste na localização de um conjunto de valores, as Variáveis de Estado, de sorte que para esse conjunto de valores um dado Funcional é mínimo, ou de forma mais geral, estacionário. O Funcional é uma função integral, que é uma função de funções desconhecidas. No âmbito da análise estrutural linear, as Variáveis de Estado são os deslocamentos, e o Funcional é a Energia Potencial Total da Estrutura, que é dada pela diferença entre a Energia de Deformação e o Potencial das Cargas Aplicadas. O Potencial das Cargas Aplicadas é calculado pelo Trabalho das Forças Aplicadas, considerando-as constantes durante o deslocamento da estrutura, desde a condição inicial até a condição final de equilíbrio (ALVES FILHO, 2000).

Através da compatibilidade de equilíbrio entre os nós dos elementos, a Formulação Variacional permitirá localizar o conjunto dos deslocamentos nodais, de sorte que para este conjunto de valores a estrutura encontra-se em equilíbrio. Assim, a partir do conhecimento dos deslocamentos dos nós, pode-se calcular o comportamento interno de cada elemento e da estrutura como um todo (ALVES FILHO, 2000).

O uso consciente de programas de análise e projeto estrutural tem possibilitado a obtenção de soluções extremamente criativas, inovadoras e otimizadas, que dificilmente poderiam ser concretizadas de outra forma (MASUERO; GONZÁLEZ, 2001). Nas últimas décadas, o desenvolvimento dos modernos computadores tornou o Método dos Elementos Finitos uma

das ferramentas de análise mais importantes na Engenharia, o qual tem sido utilizado com sucesso em muitas aplicações, tais como transfêrencia de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, acústica e mecânica da fratura (FARIA, 2006).

#### 4.2.2 Elemento SHELL 63

As condições de convergência e a precisão do Método dos Elementos Finitos dependem não apenas da formulação, mas também da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização do problema. Não basta apenas utilizar programas bem desenvolvidos, com bons algoritmos numéricos. É necessário também que a modelagem do problema seja adequada. Estas afirmações são válidas também para outros métodos de solução de problemas, como a Analogia de Grelha (HENNRICHS, 2003).

O elemento escolhido para a análise deve representar bem a estrutura e simular de forma fiel suas tensões e deformações. Os elementos que serão utilizados neste trabalho são os mesmos utilizados por Rosa (2008) para a análise de lajes quadradas e retangulares simplesmente apoiadas nas quatro bordas através de modelos de placa e de barra no software ANSYS, já que estes trouxeram resultados satisfatórios em sua pesquisa.

Para a solução com modelo de placa, será utilizado o elemento SHELL 63. Este é um elemento de casca, uma combinação de uma placa de Kirchoff com um elemento de Estado Plano de Tensões. Pode absorver esforços de flexão (Kirchoff) e de membrana (EPT) (NELSON; WANG, 2009). É definido por quatro nós, cada um com uma possibilidade de espessura diferente, e seis graus de liberdade: três rotações e três translações, segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Sua geometria, nós e sistema de coordenadas estão representadas na figura 11 (ANSYS, 2000 apud ROSA, 2008). Neste trabalho, a rigidez de membrana do elemento não será considerada, comportando-se assim, como uma placa de Kirchoff.

Por padrão, a orientação dos eixos locais deste elemento é definida da seguinte forma: o eixo  $x$  local do elemento é paralelo ao seu lado I-J. O eixo  $z$  ortogonal à superfície do elemento, sendo seu sentido determinado pela regra da mão direita em torno do elemento de nó I para J, para K. Este sistema de eixos locais do elemento pode ser rotacionado por um ângulo  $\theta$  (ANSYS INCORPORATION, 2007).

Os números circulados na figura 11 definem a face em que o carregamento será aplicado. Pressões positivas atuam diretamente no elemento: as pressões nas bordas são aplicadas como uma força por unidade de comprimento e o carregamento lateral pode ser uma carga equivalente do elemento considerado aplicada nos nós ou distribuída sobre a face deste elemento (ANSYS, 2000 apud ROSA, 2008).

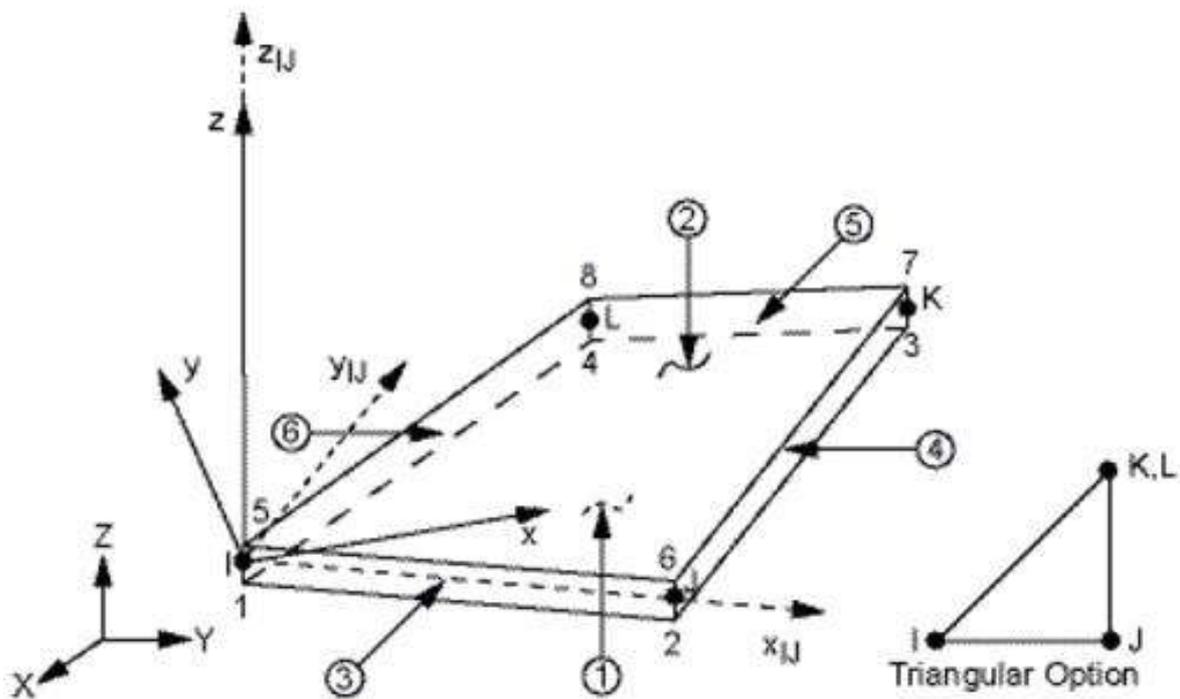


Figura 11: elemento SHELL 63 (ANSYS, 2000 apud ROSA, 2008)

Os dados de saída do elemento são fornecidos de acordo com seus eixos locais. A figura 12 apresenta suas tensões normais e tangenciais, momentos fletores e torsores. A convenção de momento é dada da seguinte forma: o momento  $M_x$  é o momento que causa tensões na direção do eixo  $x$  local do elemento (ANSYS INCORPORATION, 2007). É importante chamar a atenção desta convenção para que não haja erros de interpretação na leitura dos resultados.

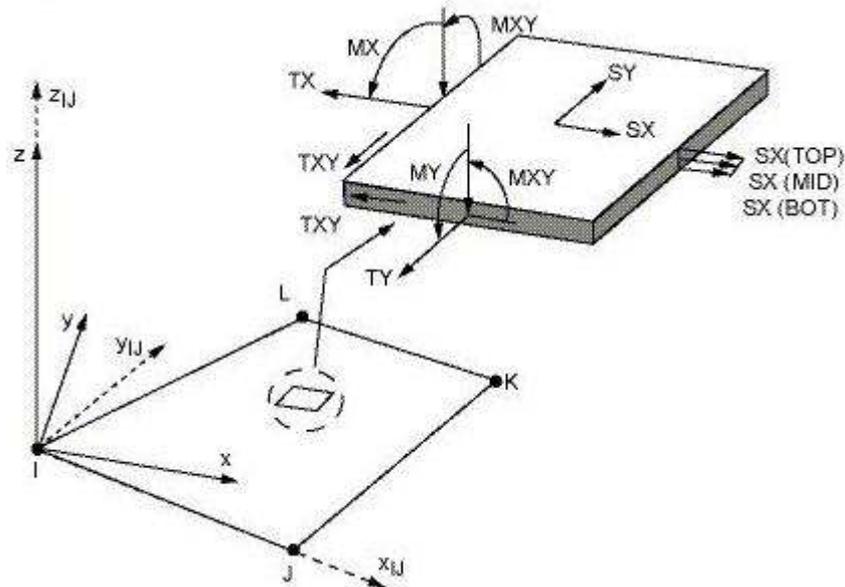


Figura 12: dados de saída do elemento SHELL 63 (ANSYS INCORPORATION, 2007)

## 4.3 ANALOGIA DE GRELHA

### 4.3.1 Descrição do método

A Analogia de Grelha para placas é um método muito utilizado por engenheiros, não apenas para problemas onde não há solução fechada, mas para todos os tipos de problemas onde o seu uso é possível, já que é um procedimento rápido quando comparado a outros métodos, e os resultados são mais simples de compreender pelo usuário devido à divisão da laje em vigas (HAMBLY, 1976 apud ALTO QI, 2009a). Representando a laje através de faixas, o lançamento das armaduras torna-se muito mais fácil para o projetista estrutural. Além disso, este método tem apresentado resultados satisfatórios em se tratando de edificações de muitos pavimentos (STRAMANDINOLI, 2003).

Este método consiste em simular uma placa através de elementos de barras formando uma grelha. Este procedimento é utilizado desde os primórdios da Engenharia Estrutural, tendo sido utilizado por muitos pesquisadores como Euler, em 1766, para a solução de problemas de membranas elásticas, e Hrennikoff, em 1941, para a análise de placas (ALTO QI, 2009a).

Para a análise de uma placa através da Analogia de Grelha, deve-se discretizá-la em uma série de faixas com determinada largura. Estas faixas devem ser representadas em seus eixos por elementos de barras com comprimento e seção transversal iguais aos da faixa (ALTO QI, 2009a).

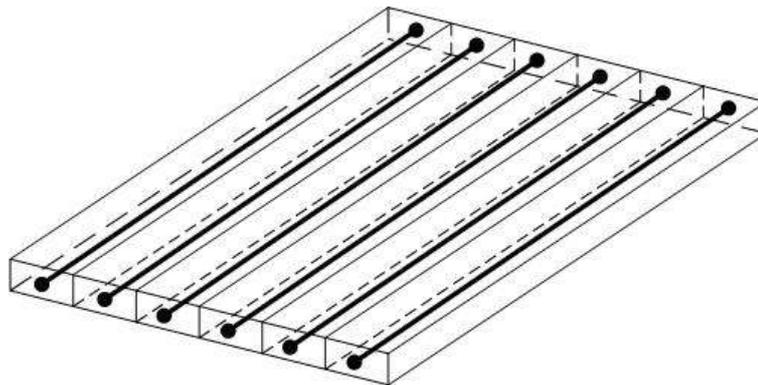


Figura 13: barras representando faixas de uma placa em uma direção (ROSA, 2008)

A estrutura formada pelo conjunto de barras, interconectadas em seus nós ou pontos nodais, pode ser resolvida através dos métodos clássicos de análise estrutural como o método das forças ou dos deslocamentos (ALTO QI, 2009a). As propriedades das barras, como as rigidezes à flexão e à torção devem ser determinadas de forma que, quando a estrutura for analisada através da Analogia de Grelha, os resultados obtidos sejam satisfatórios ao serem comparados com resultados obtidos através do modelo de placa para o mesmo problema.

A rigidez da placa, como apresentada na equação 16, depende do coeficiente de Poisson  $\nu$ , o que não acontece para a rigidez à flexão de barras, como se observa na equação 17 (HAMBLY, 1976 apud STRAMANDINOLI, 2003). Portanto, segundo estas expressões, a priori, a placa é mais rígida do que a barra (ROSA, 2008).

$$D = E \frac{bh^3}{12} \quad (\text{equação 17})$$

Ao substituir uma placa por uma série de barras ortogonais que se cruzam, os resultados obtidos podem diferir-se consideravelmente da distribuição verdadeira devido à influência da rigidez à torção utilizada para as barras (PARK; GAMBLE, 1980 apud ALTO QI, 2009a).

Para peças retangulares submetidas à torção, como as barras que representam as faixas da placa, o fenômeno de empenamento, no qual seções transversais originalmente planas deixam de ser planas, é significativo. É aconselhado então, como propriedade da seção transversal, uma substituição do momento de inércia polar por um momento de inércia torcional, o qual não é um momento de inércia segundo a geometria das massas, mas uma relação entre as dimensões da seção (MASUERO; CREUS, 1997). Seu dimensionamento é apresentado na equação 18:

$$J_T = \frac{ab^3}{\alpha} \quad (\text{equação 18})$$

Onde:

$J_T$  é o momento de inércia torcional;

$$\alpha = 3 + \frac{1,8}{n} \quad n = \frac{a}{b}$$

Sendo **a** e **b** as dimensões da seção retangular, **a** deve ser maior que **b** para qualquer elemento, ou seja, quando a largura da faixa for menor que a altura, a largura passa a ser **b** na equação 18. Isto devido ao fato de as tensões máximas dadas por um esforço de torção em uma seção retangular ocorrerem nos pontos médios dos lados maiores (MASUERO; CREUS, 1997), pontos P e P' na figura 14.

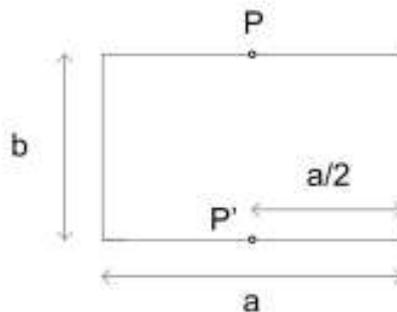


Figura 14: seção retangular e seus pontos de tensão máxima devido a um esforço de torção (MASUERO; CREUS, 1997)

Outros autores sugerem diferentes calibrações para as barras. Para Montoya (1973 apud ALTO QI, 2009b), ao modelar uma placa como uma estrutura de grelha, substituindo-a por vigas nas suas duas direções principais, deve-se adotar para cada barra um momento de inércia à flexão como descrito na equação 19 e uma inércia à torção correspondente ao dobro do valor obtido para a inércia à flexão da viga.

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{equação 19})$$

### 4.3.2 Elemento BEAM 4

Para o modelo de barra, será utilizado o elemento BEAM 4, apresentado na figura 15. Este corresponde à uma viga de Bernoulli, que assim como a placa de Kirchhoff, não considera as tensões tangenciais devidas ao esforço cortante (NELSON; WANG, 2009). Trata-se de um elemento uniaxial que pode ser representado através de dois ou três nós, com capacidade de absorver esforços de tração, compressão, flexão e torção. Seus nós possuem os mesmos graus de liberdade que o elemento de placa SHELL 63. Devem ser definidas sua espessura, área da seção transversal, inércias à flexão  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$ , inércia à torção  $I_{xx}$ , e ângulo de orientação  $\theta$ . Seu eixo é orientado do nó  $i$  para o nó  $j$  (ANSYS, 2000 apud ROSA, 2008). Como pode-se observar na figura 15, o eixo  $x$  local do elemento é sempre o seu eixo longitudinal, não importando a sua orientação em relação ao eixo global do sistema (ANSYS INCORPORATION, 2007).

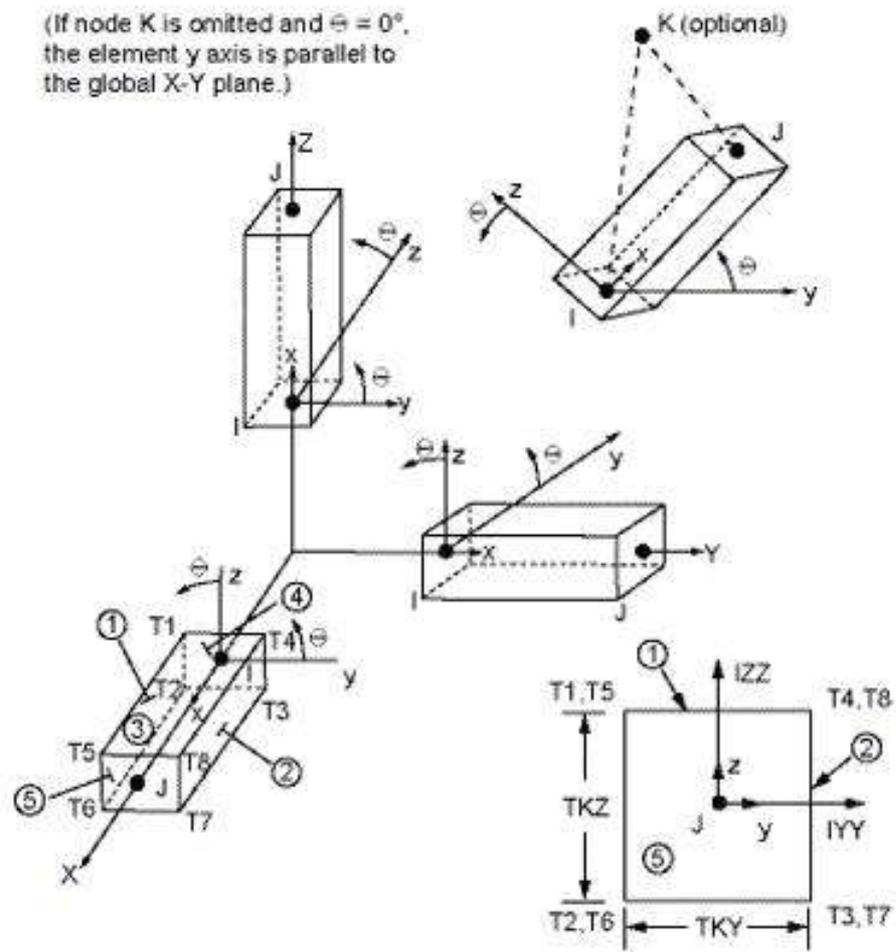


Figura 15: elemento de barra BEAM 4 (ANSYS, 2000 apud ROSA, 2008)

## 5 ANÁLISE DO PROBLEMA PROPOSTO

O problema de uma placa em balanço em forma de L pode aparecer nas mais diversas áreas da Engenharia. Na Engenharia Civil, por exemplo, encontra-se frequentemente em edificações residenciais, sacadas em balanço em forma de L. Desta forma, a ausência de um pilar na ponta do balanço proporciona uma vista mais clara do exterior através das janelas, e por isso é uma configuração muito apreciada pelos arquitetos. Esta situação é ilustrada na figura 16.

Não havendo solução fechada para o problema de uma placa com um balanço em forma de L, cabe ao engenheiro projetista a escolha do método a ser utilizado na análise deste problema, de forma que se obtenha resultados satisfatórios de tensões e deformações da estrutura.

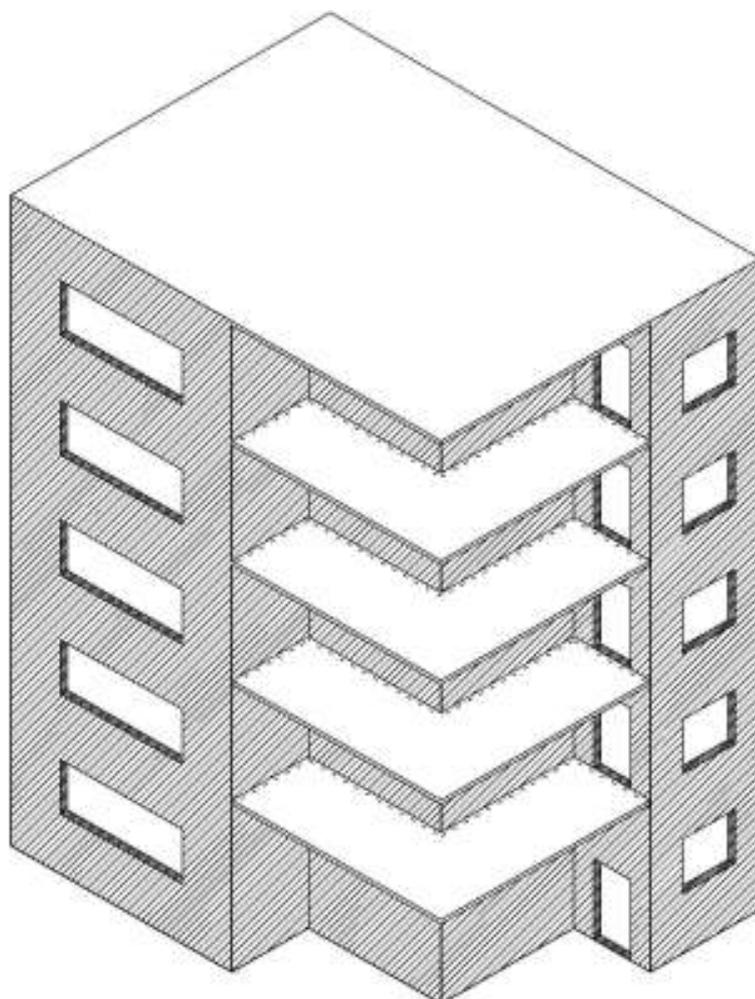


Figura 16: ilustração de um prédio com sacadas em balanço em L

## 5.1 DESCRIÇÃO DO CASO ESTUDADO

O problema de placa utilizado neste trabalho, suas dimensões e vinculações estão ilustrados na figura 17 e tem a seguinte configuração de propriedades e carregamento:

- carga superficial  $q$ , perpendicular ao plano médio da placa, uniformemente distribuída de  $7000 \text{ N/m}^2$ ;
- módulo de elasticidade  $E = 28 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;
- coeficiente de Poisson =  $0,3$ ;
- espessura  $t = 0,10 \text{ m}$ .

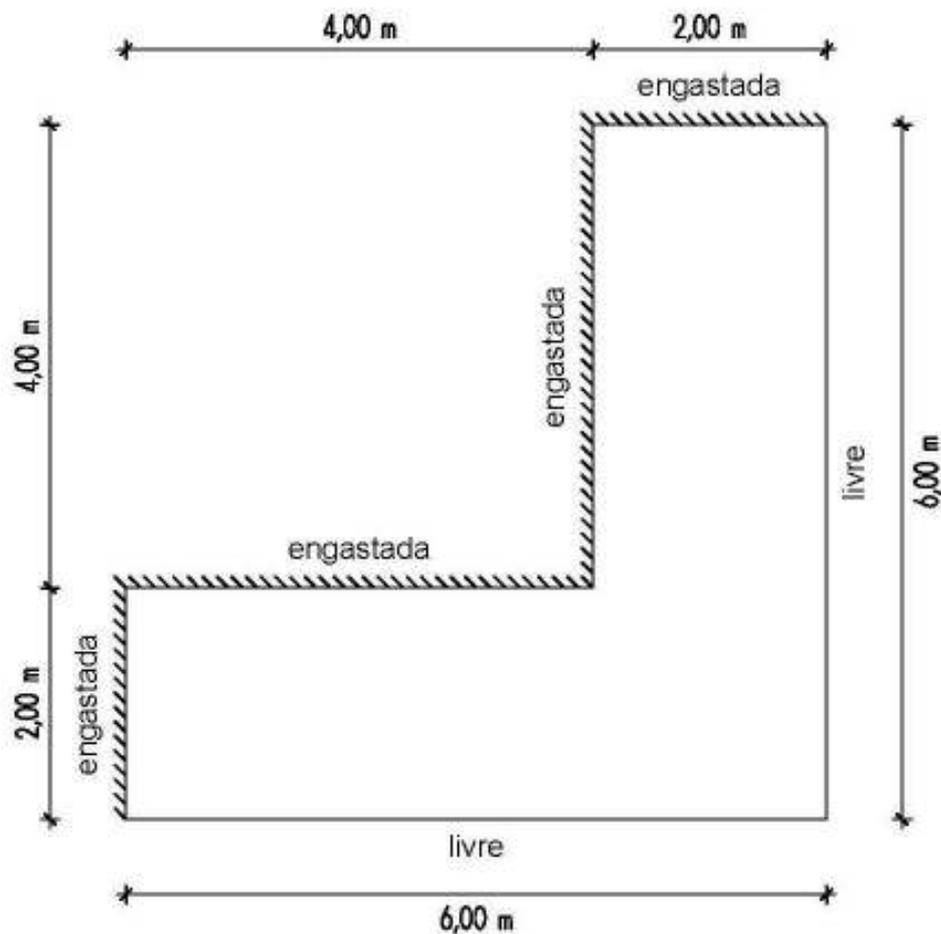


Figura 17: problema proposto no trabalho

Pode-se classificar a placa a partir da figura 18. Verifica-se que a razão entre o raio dos círculos inscritos no seu plano médio e sua espessura é 10. Portanto, trata-se de uma placa fina e a Teoria de Kirchoff a princípio é válida e apresenta bons resultados, desde que a flecha máxima da estrutura não ultrapasse  $5 \text{ cm}$  (metade da espessura da placa).

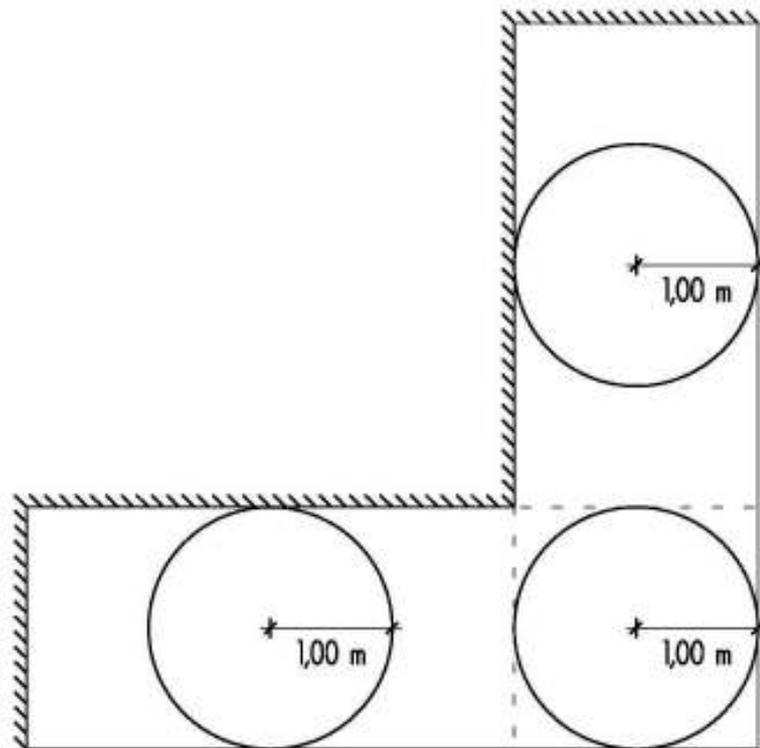


Figura 18: círculos inscritos no plano da placa

## 5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Não havendo solução analítica para um problema com a complexidade da laje em balanço em forma de L, pensou-se em desmembrar o problema em outros menores e mais simples, para, após a sua solução, reagrupar os resultados obtidos de forma que se tenha uma solução satisfatória para todo o problema em questão. Esta simplificação de análise na qual uma laje de formato irregular é separada em lajes retangulares componentes, algumas se engastando em outras, é bastante utilizada em projeto, em especial em escadas, visto permitir o emprego de soluções analíticas para lajes retangulares, as quais são facilmente encontradas para as mais variadas situações de vinculação e carregamento (MASUERO; GONZÁLEZ, 2001).

Neste caso, pensou-se em desmembrar o problema como está representado na figura 19. Assim, poderia se resolver a laje 1, com uma configuração mais simples de geometria, e então partir para a solução das lajes 2 e 3, aplicando em suas bordas livres, aonde o desmembramento ocorreu, as reações de força e momento que foram obtidas nos engastes da laje 1, com o sinal contrário, garantindo então, a continuidade de esforços entre as três lajes.

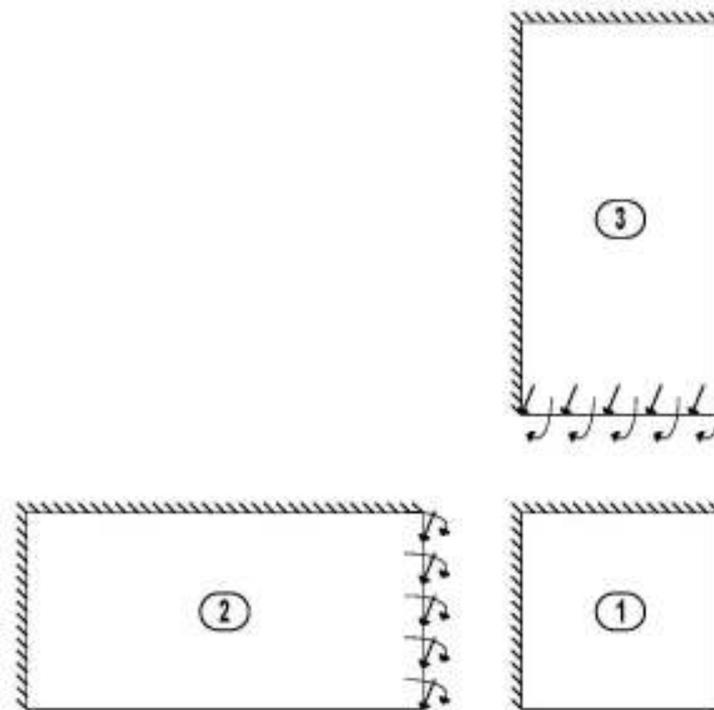


Figura 19: desmembramento da laje em L

No entanto, foi verificado que para o problema de uma laje com duas bordas adjacentes engastadas, e as outras duas livres, como mostra a figura 20, a solução também não é possível. A tentativa de solução através de séries de Fourier utilizando as condições de contorno descritas por Timoshenko e Woinowsky (1959), é apresentada a seguir:

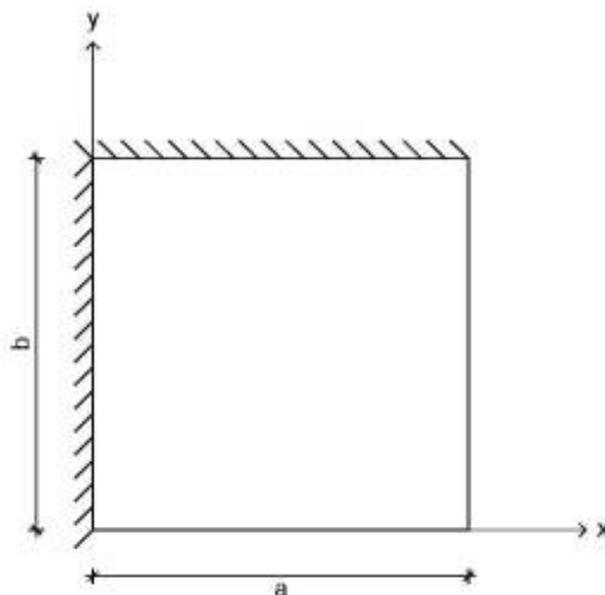


Figura 20: laje com duas bordas adjacentes engastadas e as outras duas livres

Como já foi apresentado no final do item 3.3, as duas condições de contorno necessárias para uma borda engastada são as seguintes:

$$(w)_{x=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

A solução deste problema para o deslocamento  $w$  através de séries de Fourier pode ser dada pelas seguintes combinações trigonométricas:

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \qquad \text{(equação 20.a)}$$

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \qquad \text{(equação 20.b)}$$

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \qquad \text{(equação 20.c)}$$

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \qquad \text{(equação 20.d)}$$

Aplicando a primeira condição de contorno em que, ao longo do eixo  $y$  ( $x=0$ ), o deslocamento deve ser nulo, as equações 20.c e 20.d são descartadas. Derivando as equações 20.a e 20.b em relação a  $x$ , para a aplicação da segunda condição de contorno obtém-se:

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad (\text{equação 21.a})$$

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} K \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (\text{equação 21.b})$$

Analisando as equações 21.a e 21.b observa-se que nenhuma das duas satisfazem a segunda condição de contorno para uma borda engastada. Portanto, verificou-se que não há solução no domínio elástico para este problema através de séries de Fourier. No entanto, a idéia de desmembramento do problema é válida. Se o projetista dispor de um software que limita-se apenas a resolver lajes retangulares, ou seja, incapaz de resolver a laje em L de uma só vez, este processo é uma forma possível e eficiente de solução do problema, desde que devidamente empregado. Esta abordagem é apresentada no item 5.6.

### 5.3 SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A identificação dos pontos e das bordas que serão analisados neste trabalho está representada na figura 21. Como o problema proposto apresenta um eixo de simetria, a análise será realizada apenas sobre os pontos 1, 5 e 6, e sobre as bordas 5 e 6, tanto para o Método dos Elementos Finitos quanto para a Analogia de Grelha.

Para a solução do problema através do MEF, foram utilizadas quatro malhas diferentes: 50x50 cm, 25x25 cm, 12,5x12,5 cm e 6,25x6,25 cm. A figura 22.a apresenta a estrutura definida pela malha mais grosseira, composta de elementos de 50x50 cm e a figura 22.b mostra sua malha mais refinada, formada por elementos de 6,25x6,25 cm.

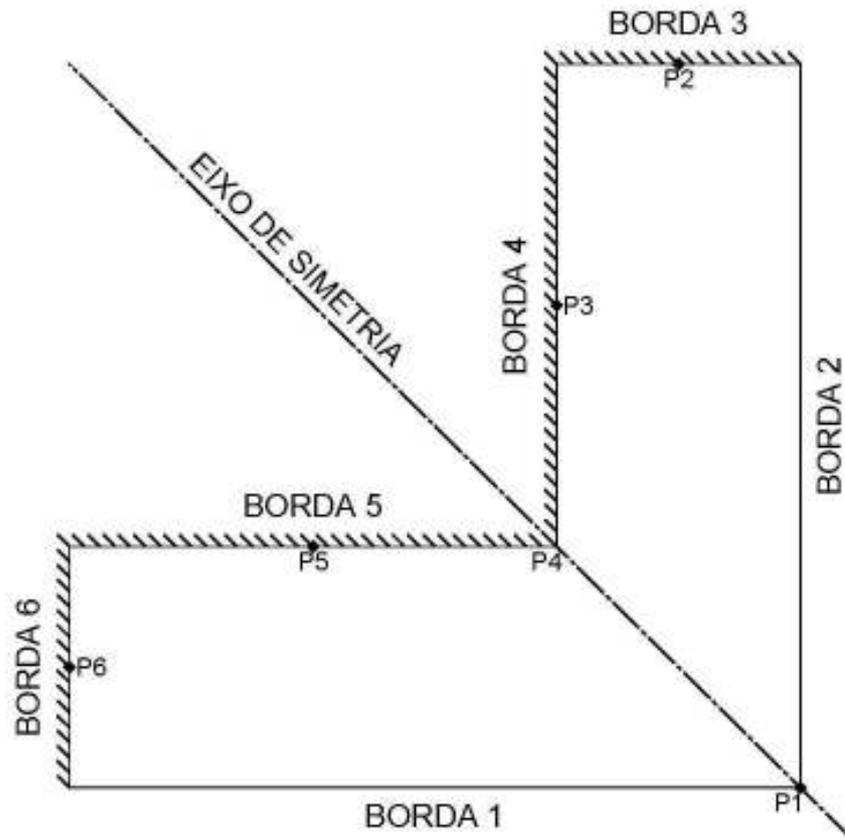


Figura 21: identificação de elementos da placa

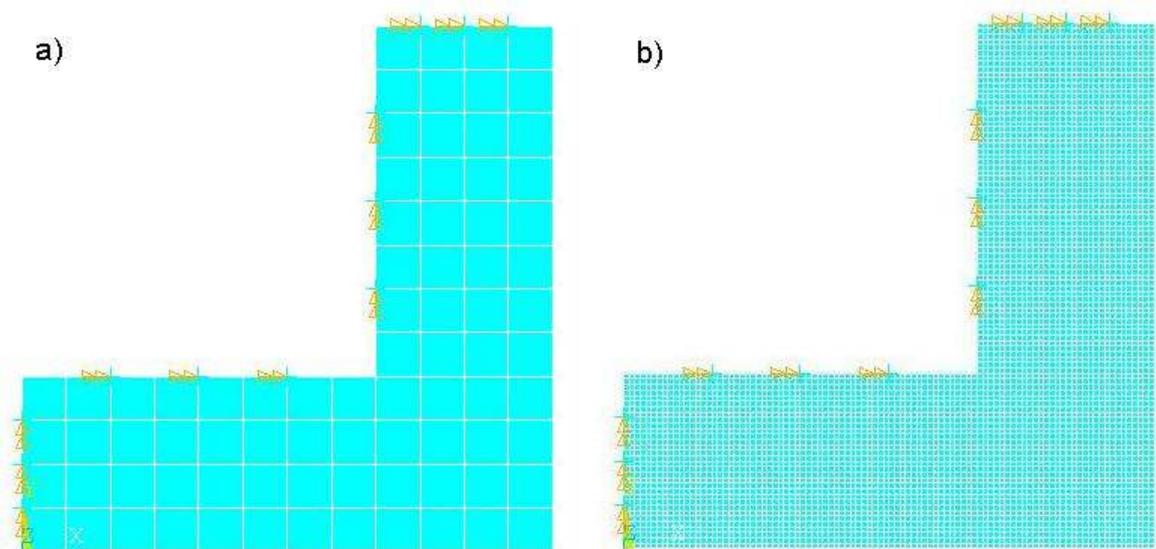


Figura 22: modelo com elementos de 50x50 cm e de 6,25x6,25 cm

O Método dos Elementos Finitos baseado em deslocamentos garante a continuidade dos deslocamentos nos nós da malha, mas não há garantia da continuidade das tensões, o que pode resultar numa distribuição de tensões não uniforme de acordo com a qualidade da malha. Portanto, a análise de erro de malha sempre se faz necessária. O MEF apresenta problemas em casos de cargas concentradas, em vinculações pontuais e em descontinuidades geométricas. Como o problema proposto apresenta descontinuidade geométrica algumas vezes ao longo de seu contorno, há chances de se obter erros significativos nestes pontos. A figura 23 demonstra a localidade onde os erros de cálculo ocorreram nas análises menos e mais refinadas (figuras 23a e 23b, respectivamente).

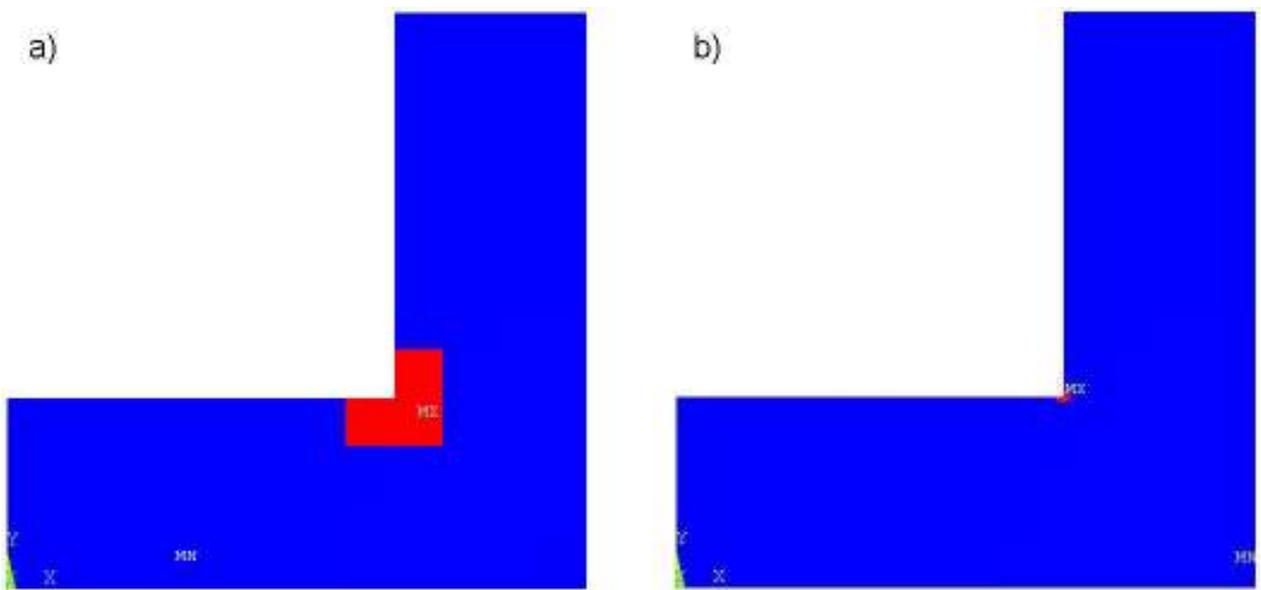


Figura 23: estimativa de erro na malha menos e mais refinada

Observa-se que foram encontrados erros significativos nos elementos conectados no ponto 4 da placa, ponto de encontro das bordas 4 e 5 da laje. Para a avaliação das tensões obtidas neste ponto, realizou-se mais um modelo, formado com elementos de 3,125x3,125 cm. As tensões neste ponto da placa podem ser obtidas através da equação 22:

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{t^2} \quad (\text{equação 22})$$

O quadro 1 apresenta os valores obtidos para os momentos e tensões do elemento cujo vértice superior esquerdo está conectado ao ponto 4 da placa. Observa-se que o erro relativo permaneceu muito alto ao longo do refinamento da malha. O gráfico da figura 24 apresenta como este momento aumenta conforme são utilizados elementos menores no modelo. Nota-se que conforme a malha vai sendo refinada, as tensões neste ponto da placa crescem exponencialmente. Outra forma eficiente de analisar a distribuição de valores obtida é através do coeficiente de variação da amostra. Este permite avaliar o peso do desvio padrão sobre a distribuição de resultados obtida. O quadro 2 apresenta os valores obtidos para a média, desvio padrão e coeficiente de variação destes resultados. Com base neste conjunto de informações, nas análises comparativas apresentadas ao longo deste trabalho, os valores obtidos neste ponto foram descartados, tanto para a solução através do MEF quanto da Analogia de Grelha, pois estes apresentam erros significativos, não condizendo com a realidade do problema.

Malha (cm)	Mx=My (Nm/m)	Tensão (Mpa)	erro relativo (%)
50x50	17408	10,44	34,27%
25x25	26485	15,89	30,25%
12,5x12,5	37971	22,78	28,36%
6,25x6,25	53005	31,80	27,56%
3,125x3,125	73167	43,90	-

Quadro 1: momentos e tensões obtidos no ponto 4 da placa

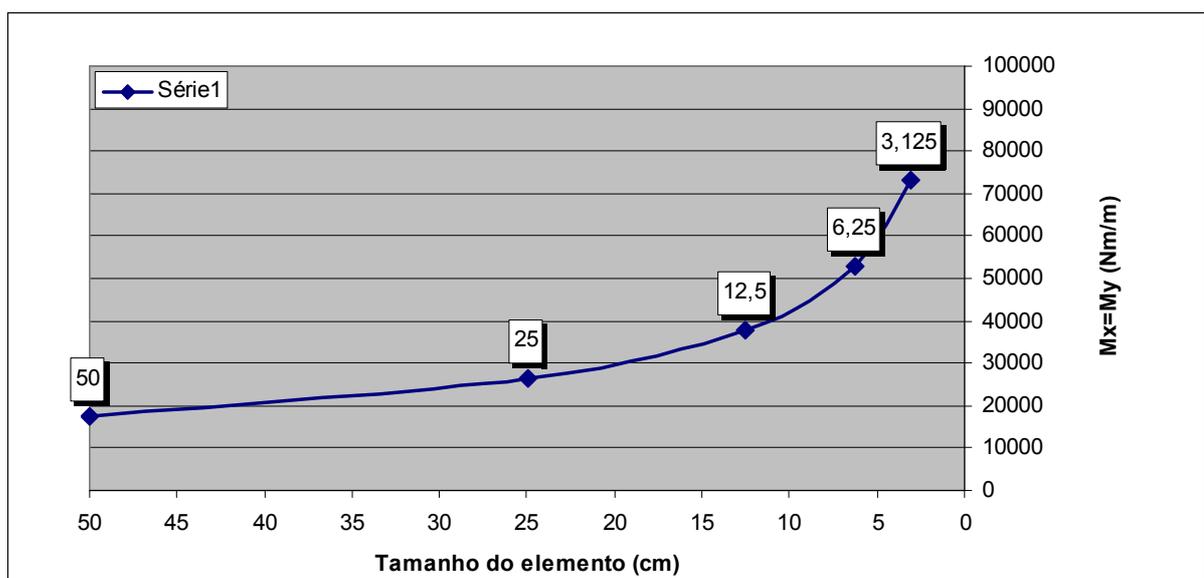


Figura 24: variação dos momentos do ponto 4 com o tamanho dos elementos

Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
41607,20	22098,84	53,11%

Quadro 2: média, desvio padrão e coeficiente de variação dos momentos obtidos no ponto 4

A figura 25 apresenta os deslocamentos obtidos para a malha mais refinada, com elementos de 6,25x6,25 cm. Nota-se que o ponto 1 é onde ocorre o maior deslocamento. Observa-se que o valor obtido para o deslocamento máximo da placa é inferior a 5 cm, portanto ela se encontra dentro do domínio para o qual a Teoria de Kirchoff fornece bons resultados. Nota-se também, a simetria dos deslocamentos obtidos segundo o eixo representado na figura 21. O Quadro 3 apresenta os deslocamentos do ponto 1 para as quatro malhas utilizadas. Observa-se, segundo os valores obtidos e seus erros relativos, a rápida convergência dos deslocamentos para este problema, o que demonstra que mesmo a malha mais grosseira não é ruim.

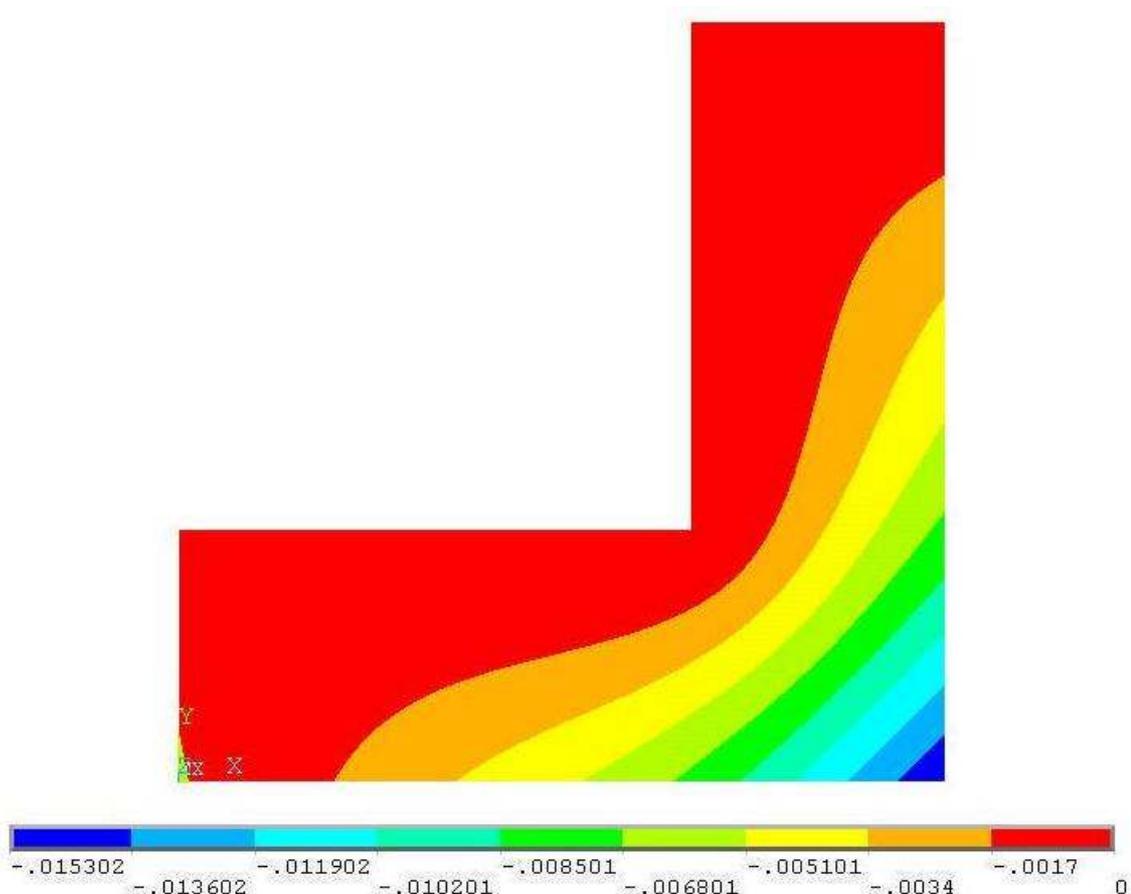


Figura 25: deslocamentos obtidos na malha mais refinada

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	erro relativo (%)
50x50	1,51	0,00%
25x25	1,51	0,66%
12,5x12,5	1,52	0,65%
6,25x6,25	1,53	-

Quadro 3: deslocamentos no ponto 1

Nas figuras 26a e 26b estão representadas as distribuições dos momentos  $M_x$  e  $M_y$  respectivamente, para a placa modelada com elementos de 25x25 cm. A figura 27 apresenta seus momentos torsores  $M_{xy}$ . Observa-se que as figuras 26a e 26b são rebatidas em relação ao eixo de simetria do problema e que a distribuição dos momentos torsores também é simétrica, como era esperado.

Para a análise da convergência dos momentos, e para a posterior comparação com a Analogia de Grelha, foi feita uma média aritmética simples dos momentos  $M_y$  ao longo da linha 5 e dos momentos  $M_x$  ao longo da linha 6. Foi verificado também o momento por metro nos pontos 5 e 6, que representam os pontos médios das linhas 5 e 6, respectivamente. Os quadros 4 e 5 ilustram estes valores. Observa-se que os momentos obtidos nos pontos médios 5 e 6 são muito próximos das médias obtidas ao longo das suas bordas. Este estudo de análise e convergência dos momentos fletores foi realizado ao longo das bordas engastadas pois são estes os momentos utilizados para projetar as armaduras superiores necessárias para o dimensionamento das lajes de concreto armado em balanço, já que é na borda engastada onde se obtém o maior momento negativo.

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	erro relativo (%)	BORDA 6 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	-6854,66	14,23%	-3165,11	17,59%
25x25	-7992,33	7,37%	-3840,70	9,70%
12,5x12,5	-8628,09	3,63%	-4253,10	5,01%
6,25x6,25	-8953,06	-	-4477,57	-

Quadro 4: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (modelo de placa)

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)	erro relativo (%)	PONTO 6 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	-6290,10	14,62%	-2985,30	16,39%
25x25	-7367,33	7,54%	-3570,68	8,68%
12,5x12,5	-7968,29	3,83%	-3910,23	4,37%
6,25x6,25	-8285,21	-	-4088,84	-

Quadro 5: momentos fletores nos pontos 5 e 6 (modelo de placa)

Nota-se que os resultados para a malha de 6,25x6,25 cm correspondem a resultados em momento com erro inferior a 5%, o que já é adequado para fins práticos. O quadro 6 apresenta o resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada. Estes dados serão utilizados como referência para a análise dos resultados obtidos através da Analogia de Grelha.

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	PONTO 5 (Nm/m)	BORDA 6 (Nm/m)	PONTO 6 (Nm/m)
6,25x6,25	1,53	-8953,06	-8285,21	-4477,57	-4088,84

Quadro 6: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada

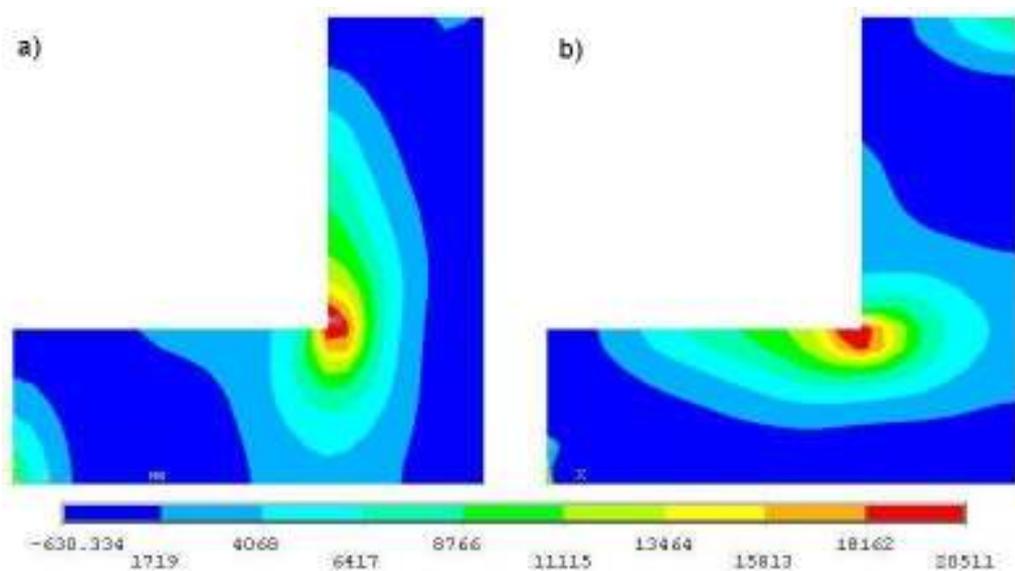


Figura 26: momentos  $M_x$  e  $M_y$  da placa com elementos de 25 cm

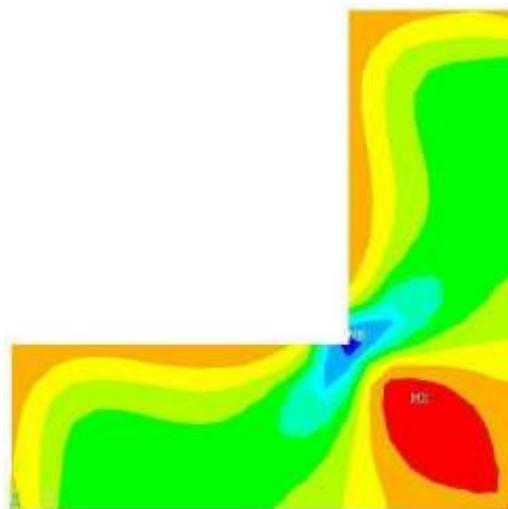


Figura 27: momentos  $M_{xy}$  da placa com elementos de 25 cm

## 5.4 SOLUÇÃO PELA ANALOGIA DE GRELHA

Sabe-se que nos escritórios de cálculo estrutural é usual utilizar barras de 50 e 25 cm de largura para representar a placa. Na solução do problema através da Analogia de Grelha, além destas duas dimensões, foi utilizado também um modelo com barras de 12,5 cm de largura para fins comparativos. A figura 28 apresenta o modelo com barras de 50 cm.

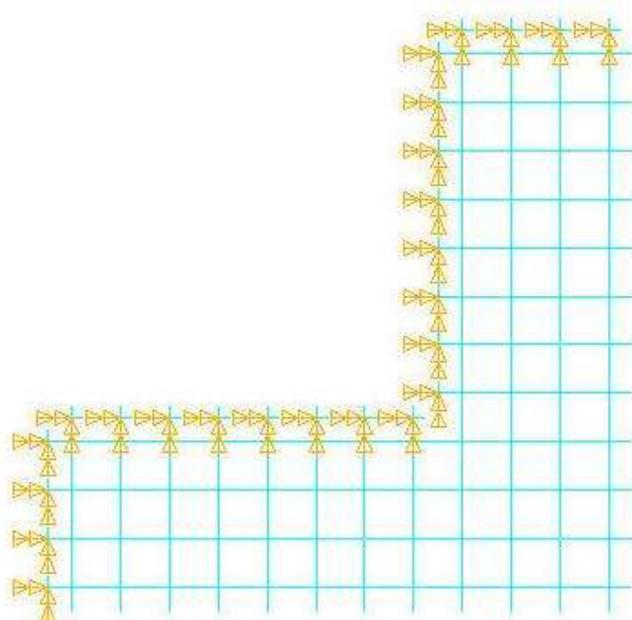


Figura 28: modelo com barras de 50 cm de largura

Na Analogia de Grelha, como o contínuo passa a ser representado por barras que se cruzam, sabe-se que a calibração da inércia à torção destas barras merece um cuidado especial. É usual então, para a obtenção dos momentos fletores máximos, os quais serão utilizados para o dimensionamento da laje, utilizar valores muito pequenos para a inércia a torção destas barras, de forma que os momentos fletores dos elementos em uma direção não sejam absorvidos pelos esforços de torção dos elementos perpendiculares a estes. Os quadros 7 e 8 apresentam os valores obtidos com a calibração  $I_{xx} = 1 \times 10^{-20} \text{ m}^4$ , para os momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 e dos pontos 5 e 6, respectivamente. A figura 29 apresenta o gráfico de momentos obtido para o modelo com barras de 50 cm. Observa-se que a distribuição destes esforços se dá em relação aos eixos locais das barras. Por isso a disposição do gráfico difere-se das apresentadas para os momentos  $M_x$  e  $M_y$  através do modelo de placa, já que as barras estão dispostas nas duas direções do plano  $xy$  e seus eixos locais são ortogonais.

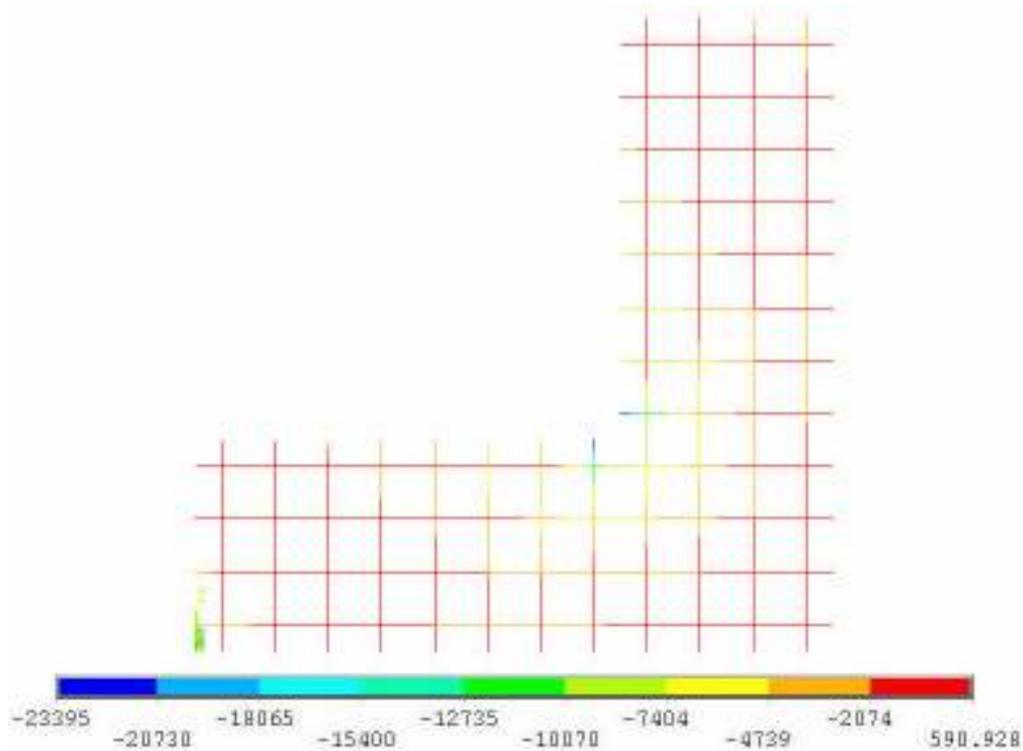


Figura 29: distribuição de momentos fletores no modelo com barras de 50 cm

L Barra (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	BORDA 6 (Nm/m)
50	-7558,26	-3911,97
25	-8589,95	-4013,04
12,5	-9167,62	-4046,81

Quadro 7: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (modelo de barras)

L Barra (cm)	PONTO 5 (Nm/m)	PONTO 6 (Nm/m)
50	-9031,00	-3950,40
25	-8684,90	-4002,46
12,5	-8761,18	-4025,90

Quadro 8: momentos fletores nos pontos 5 e 6 (modelo de barras)

Nota-se que os momentos obtidos nos pontos 5 e 6 ficaram muito perto dos valores médios obtidos para as bordas 5 e 6, como já visto e esperado nos modelos de placa. Observa-se que as médias dos momentos fletores ao longo das bordas foi aumentando conforme que a largura das barras foi diminuída nos modelos. Observa-se também que estes valores ficaram próximos dos obtidos através da análise realizada pelo Método dos Elementos Finitos. Esta comparação será apresentada no fim deste capítulo.

Para a obtenção dos momentos fletores máximos, como já foi dito, utiliza-se uma rigidez a torção das barras muito pequena. Já para a obtenção dos deslocamentos através da Analogia de Grelha, é necessária uma calibração diferenciada desta propriedade. Diferentes estudos demonstram que essa calibração varia de acordo com a geometria e vinculação do problema, não havendo uma referência fixa a qual utilizar. O quadro 9 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento máximo no ponto 1 para diferentes calibrações da inércia a torção das barras da grelha para os três diferentes modelos, utilizando como referência o deslocamento obtido no modelo mais refinado de placa com elementos de 6,25x6,25 cm.

deslocamento máximo de referência $w = 1,53$ cm								
L barras = 50 cm			L barras = 25 cm			L barras = 12,5 cm		
lxx	w máx (cm)	erro (%)	lxx	w máx (cm)	erro (%)	lxx	w máx (cm)	erro (%)
$1 \times 10^{-20}$	2,84	85,62%	$1 \times 10^{-20}$	2,74	79,08%	$1 \times 10^{-20}$	2,70	76,27%
1lyy	2,26	47,71%	1lyy	2,20	43,79%	1lyy	2,18	42,22%
2lyy	1,93	26,14%	2lyy	1,88	22,88%	2lyy	1,86	21,57%
3lyy	1,71	11,76%	3lyy	1,66	8,50%	3lyy	1,64	7,32%
4lyy	1,54	0,65%	4lyy	1,50	1,96%	4lyy	1,48	3,27%
5lyy	1,41	7,84%	5lyy	1,37	10,46%	5lyy	1,35	11,65%
Jt	1,61	5,23%	Jt	1,62	5,88%	Jt	1,70	11,11%

Quadro 9: deslocamentos obtidos para diferentes calibrações das barras

Com a inércia a torção igual a  $1 \times 10^{-20}$ , os deslocamentos foram muito superiores aos obtidos no modelo de placa. Isto reafirma que a calibração utilizada para a obtenção dos esforços das barras não deve ser a mesma para a verificação dos deslocamentos. A calibração sugerida por Montoya (1973 apud ALTO QI, 2009b), utilizando a inércia a torção igual a duas vezes a inércia a flexão também não trouxe resultados satisfatórios para este problema, com erros em torno de 23%. Utilizando como calibração o momento de inércia torcional  $J_t$ , obteve-se um erro em torno de 6% para os resultados obtidos. No entanto, a calibração que trouxe os melhores resultados foi utilizando uma inércia a torção para as barras quatro vezes maiores que a sua inércia a flexão. Nota-se que para esta calibração, os melhores resultados foram obtidos no modelo com barras de 50 cm. A figura 30 ilustra os deslocamentos obtidos com esta calibração no modelo de barras com 25 cm de largura. Observa-se que a distribuição dos deslocamentos na figura assemelha-se muito a apresentada para o modelo de placa. A figura 31 apresenta as curvas para os deslocamentos obtidos conforme as diferentes calibrações nos três modelos utilizados. Nota-se que quanto menor o valor utilizado como calibração, menos rígida é a barra, e portanto, maiores são os deslocamentos obtidos.

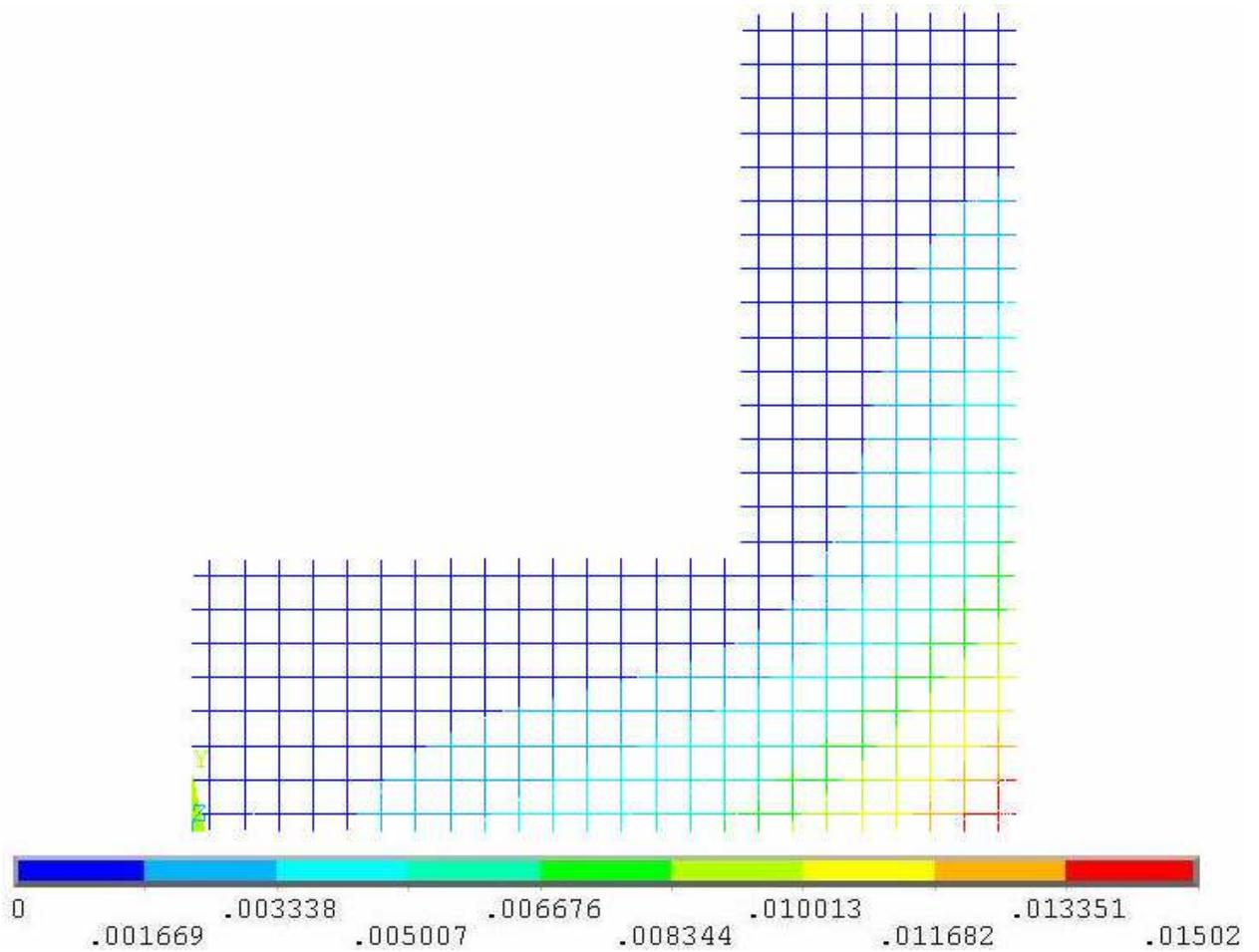


Figura 30: deslocamentos obtidos no modelo com barras de 25 cm

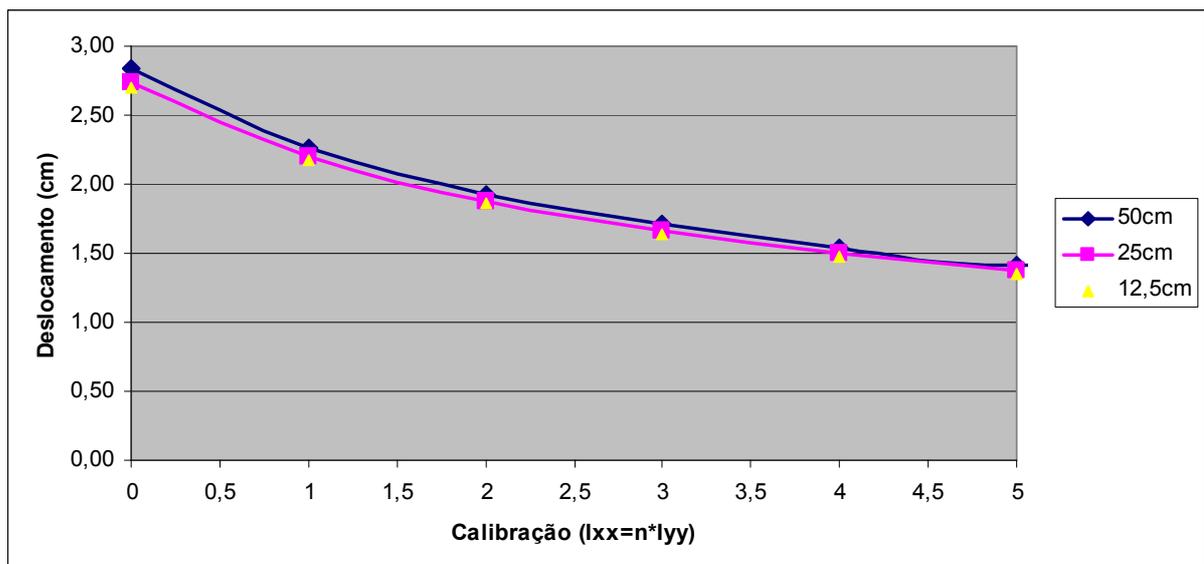


Figura 31: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras

## 5.5 SOLUÇÃO CONSIDERANDO UM BALANÇO UNIDIRECIONAL

Sabe-se que a principal dificuldade na análise do problema do balanço em L é o canto onde as lajes se encontram (laje 1 da figura 19). Outra possível abordagem para a solução deste problema é, ainda no domínio elástico, mas fazendo uma analogia às linhas de ruptura da Teoria das Charneiras Plásticas, tratar o problema como um balanço unidirecional. Para isso, ao estudar esta área, considera-se uma linha de ruptura como indicada na figura 32. Esta configuração é bastante intuitiva para este problema e pode-se confirmar este comportamento da laje observando as figuras 25 e 30, que representam a deformada da placa obtida na solução do problema pelo Método dos Elementos Finitos e Analogia de Grelha.

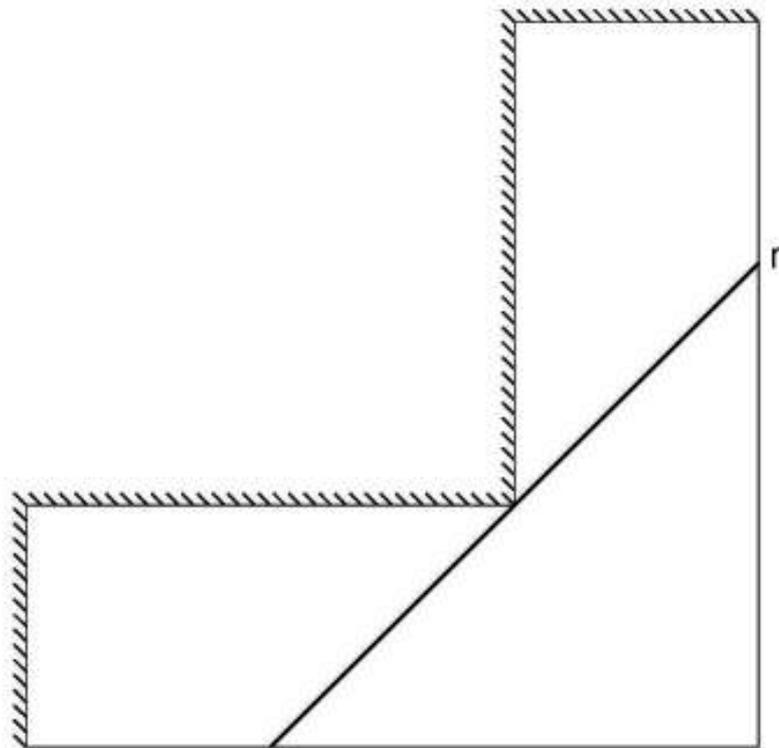


Figura 32: linha de ruptura r

Para determinar o momento que atua em torno do eixo representado pela linha de ruptura r, multiplica-se a resultante da carga de superfície aplicada sobre o triângulo formado pelo braço de alavanca d. Este braço de alavanca é a distância perpendicular à linha de ruptura tomada entre ela e o centro geométrico do triângulo. A figura 33.a ilustra a geometria do problema através desta configuração que considera um balanço unidirecional para o vértice da laje.

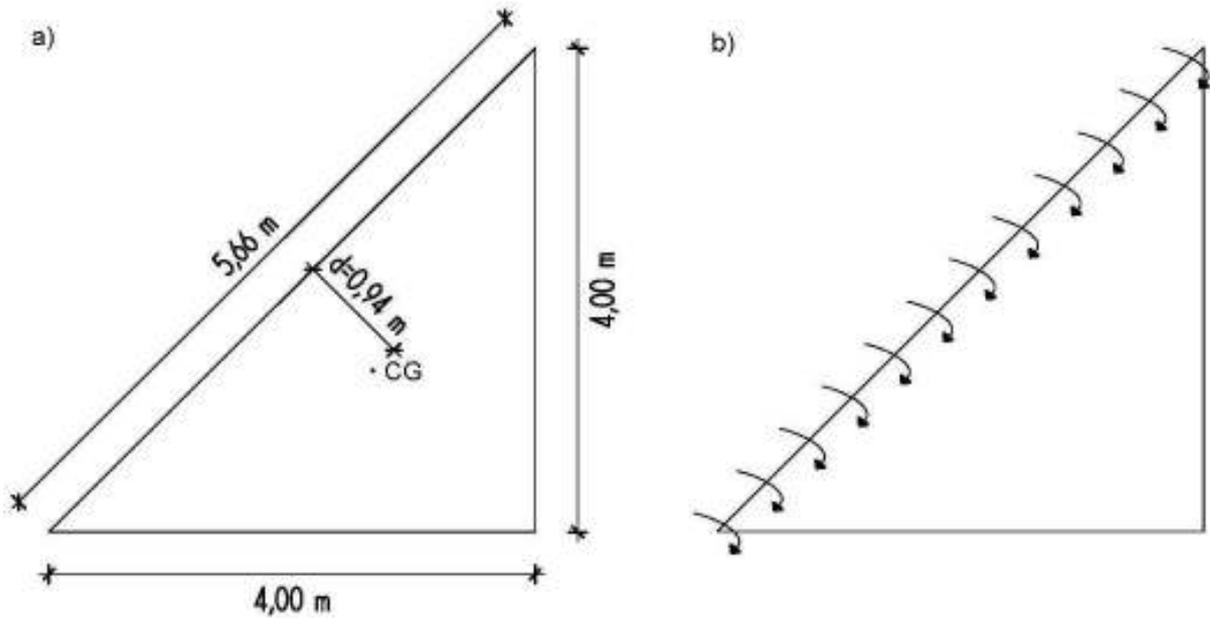
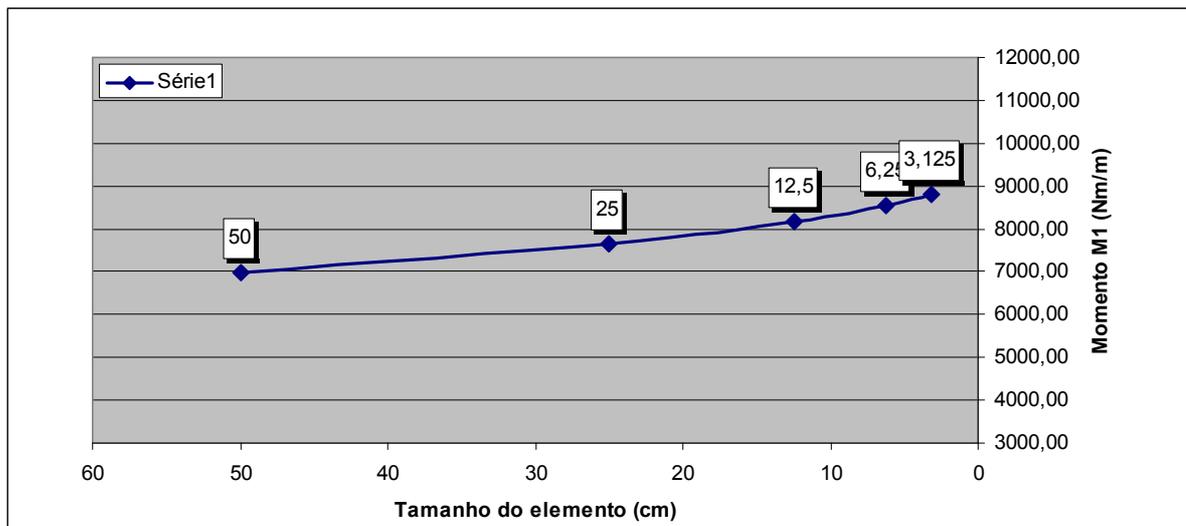


Figura 33: geometria do triângulo e momento distribuído ao longo da linha de ruptura

Multiplicando a carga de  $7000 \text{ N/m}^2$  pela área de  $8 \text{ m}^2$  do triângulo, obtém-se uma carga resultante de  $56000 \text{ N}$ . Multiplicando esta carga pelo braço de alavanca  $d$ , tem-se um momento de  $52600 \text{ Nm}$ . Dividindo então este momento pela hipotenusa do triângulo, chega-se a um momento de  $9300 \text{ Nm/m}$  uniformemente distribuído ao longo da linha de ruptura considerada. Embora seja claro deduzir que neste problema o momento não é constante ao longo da linha  $r$ , é bem usual os projetistas fazerem esta simplificação nos escritórios de cálculo. Este momento negativo ilustrado na figura 33.b é o momento de serviço que deverá ser utilizado para o dimensionamento da armadura da laje de concreto armado.

Girando os eixos locais dos elementos em  $45$  graus, é possível obter os momentos  $M_1$  da placa para comparar com os momentos obtidos através da análise simplificada proposta. Da mesma forma que anteriormente, foi feita uma média aritmética simples dos valores obtidos dos elementos ao longo da linha  $r$ , afim de se obter uma distribuição uniforme de momentos em torno desta. Para esta análise, também foi utilizado um modelo de placa com elementos de  $3,125 \times 3,125 \text{ cm}$ . Os momentos para as diferentes malhas estão apresentados no quadro 10. A figura 34 ilustra a curva obtida para os momentos ao longo em que a malha é refinada. O quadro 11 apresenta a média, desvio padrão e o coeficiente de variação dos resultados.

Malha (cm)	Momento M1 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	6970,30	9,00%
25x25	7659,98	6,28%
12,5x12,5	8173,21	4,24%
6,25x6,25	8534,91	2,85%
3,125x3,125	8785,21	-

Quadro 10: momentos  $M_1$  obtidos nos modelos de placaFigura 34: variação dos momentos  $M_1$  com o tamanho dos elementos

Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
8024,72	725,52	9,04%

Quadro 11: média, desvio padrão e coeficiente de variação para os momentos  $M_1$ 

Observando estes resultados, nota-se que a média dos momentos ao longo do eixo  $r$  para a malha com elementos de 3,125x3,125 cm corresponde a 94% do valor obtido na abordagem proposta, ou seja, a solução do balanço unidirecional forneceu um valor muito próximo do obtido para a malha mais refinada. O quadro 10 e a figura 34 demonstram que os valores obtidos para esta média dos momentos está convergindo. Além disso, nota-se o pequeno erro para o valor obtido nesta malha, além de um pequeno coeficiente de variação para estes valores. Assim, pode-se concluir que esta abordagem é válida para o dimensionamento da estrutura, chegando a ótimos resultados através de um procedimento simples. A distribuição dos momentos  $M_1$  na malha de 25x25 está representada na figura 35. Nota-se que os resultados são simétricos, como esperado.

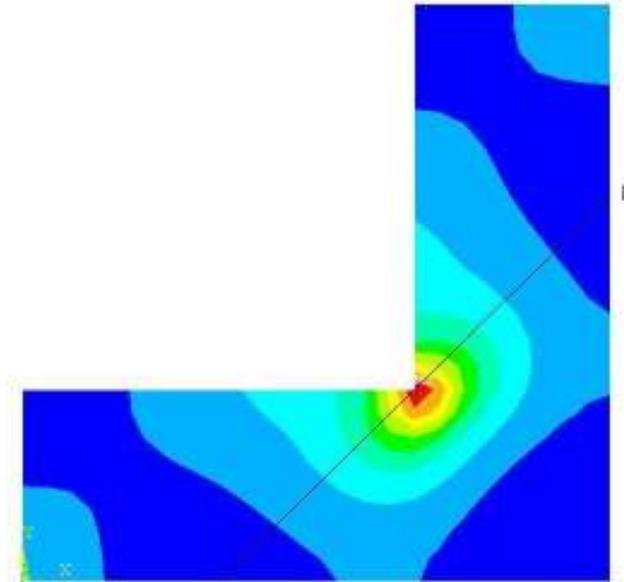


Figura 35: momentos  $M_1$  obtidos para a malha de 25x25

## 5.6 SOLUÇÕES COM DESMEMBRAMENTO DA PLACA

Como comentado no item 5.2, uma possibilidade de abordagem do problema do balanço em forma de L é o desmembramento da placa em uma placa quadrada e duas retangulares. Embora hoje em dia a maioria dos softwares utilizados no mercado sejam capazes de resolver placas com as mais diversas geometrias, alguns softwares mais simples limitam-se apenas a resolver lajes retangulares.

Assim, este estudo será realizado da seguinte forma, baseado na figura 36: primeiro, a placa 1 será calculada como engastada-engastada livre-livre, e em seguida, as reações de momento e esforço cortante obtidas ao longo dos nós da borda 2 serão aplicadas como carregamento nos respectivos nós da borda 4 da placa 2. Como o problema inicial apresenta simetria, é suficiente a análise apenas nas placas 1 e 2, não necessitando realizá-la na terceira. As soluções através do Método dos Elementos Finitos e da Analogia de Grelha estão apresentadas a seguir.

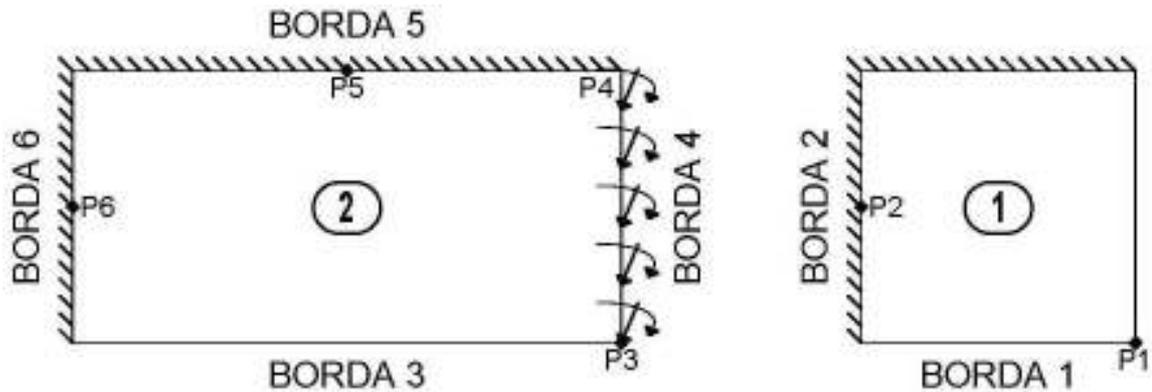


Figura 36: identificação de elementos da placa na solução por desmembramento

### 5.6.1 Elementos Finitos

Da mesma forma que anteriormente, foram geradas quatro malhas para este problema, com as dimensões dos elementos variando de 50 a 6,25 cm. A figura 37 apresenta os deslocamentos para a malha de elementos de 6,25 cm e o quadro 12 apresenta os resultados obtidos para os deslocamentos do ponto 1 nas diversas malhas utilizadas da placa 1.

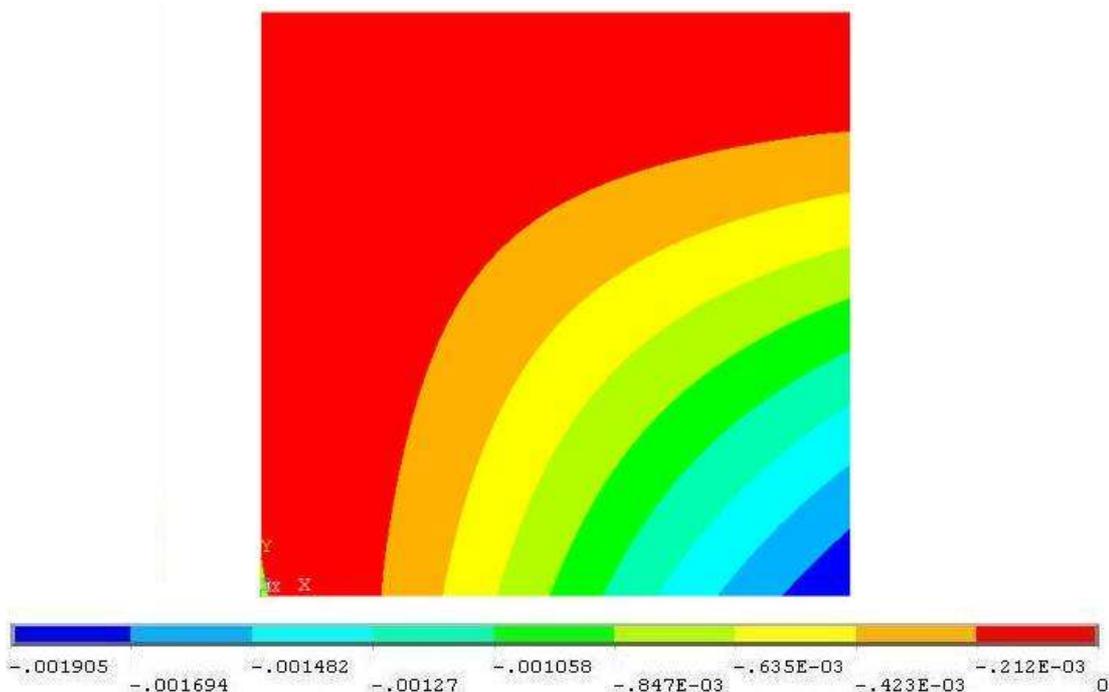


Figura 37: deslocamentos obtidos na malha mais refinada para a placa 1

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	erro relativo (%)
50x50	0,194	1,25%
25x25	0,192	0,42%
12,5x12,5	0,191	0,16%
6,25x6,25	0,191	-

Quadro 12: deslocamentos no ponto 1 da placa 1

As distribuições dos momentos  $M_x$  e  $M_{xy}$  para a placa 1 com elementos de 25 cm estão apresentadas nas figuras 38a e 38b. O quadro 13 apresenta os resultados obtidos para a média dos momentos ao longo da borda 2 e os momentos por metro no ponto 2 para as diferentes soluções do problema.

Malha (cm)	BORDA 2 (Nm/m)	erro relativo (%)	PONTO 2 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	-2361,17	20,44%	-2295,65	20,75%
25x25	-2967,60	11,10%	-2896,68	11,01%
12,5x12,5	-3338,14	5,72%	-3254,88	5,58%
6,25x6,25	-3540,50	-	-3447,25	-

Quadro 13: momentos fletores ao longo da borda 2 e do ponto 2 da placa 1 (modelo de placa)

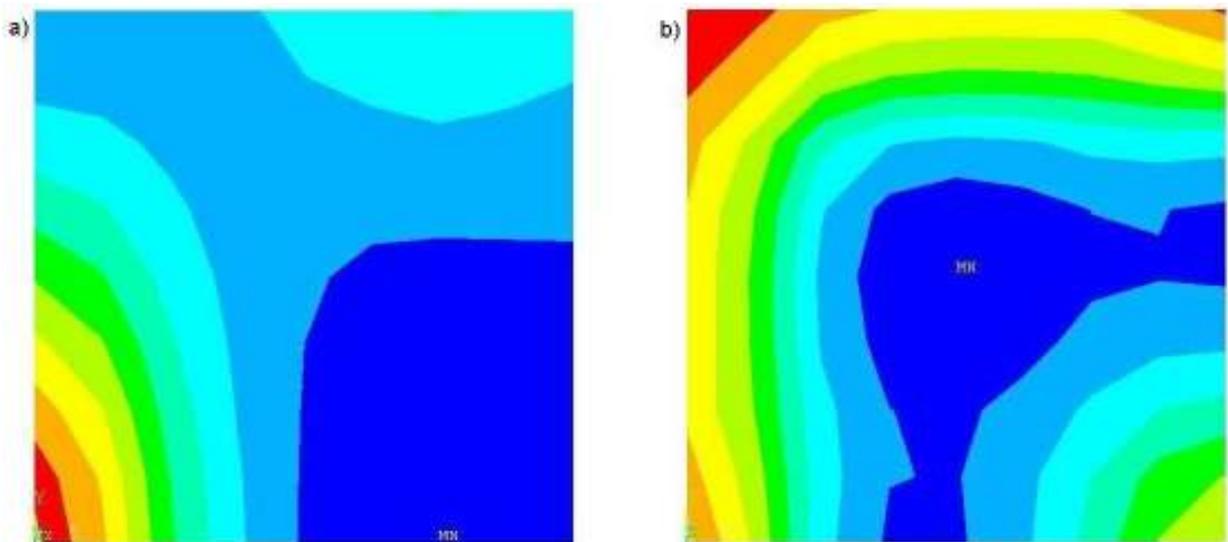


Figura 38: momentos  $M_x$  e  $M_{xy}$  para placa 1 com elementos de 25 cm

O quadro 14 apresenta o resumo dos resultados obtidos para a solução com a malha mais refinada da placa 1. Estes dados serão utilizados como referência para posterior comparação.

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	BORDA 2 (Nm/m)	PONTO 2 (Nm/m)
6,25x6,25	0,19	-3540,50	-3447,25

Quadro 14: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada da placa 1

A distribuição dos deslocamentos do ponto 3 da malha mais refinada da placa 2 está apresentada na figura 39. O quadro 15 apresenta os resultados obtidos para as demais malhas.

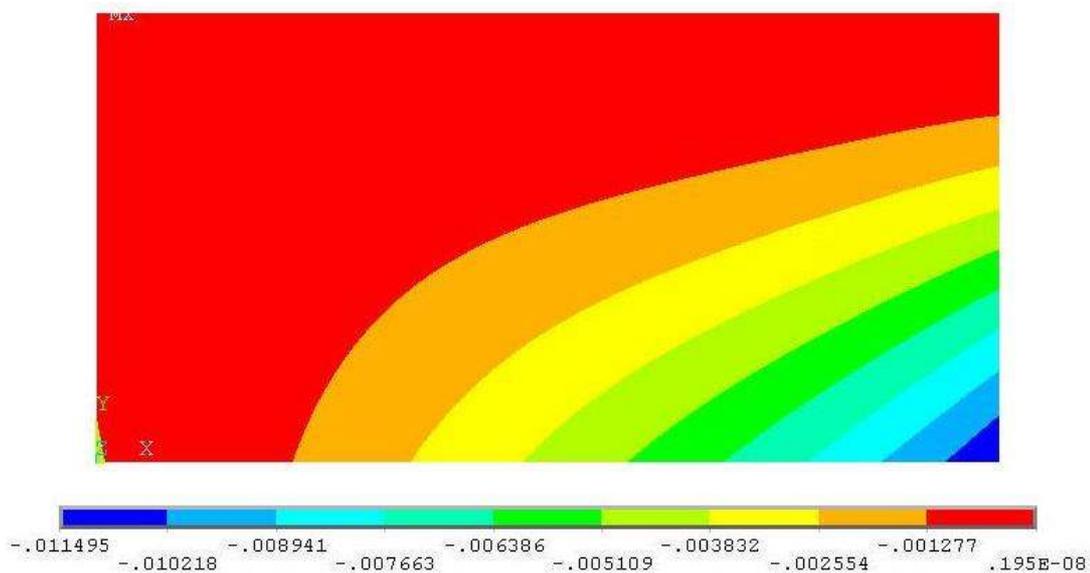


Figura 39: deslocamentos obtidos na malha mais refinada para a placa 2

Malha (cm)	PONTO 3 (cm)	erro relativo (%)
50x50	1,16	0,69%
25x25	1,15	0,17%
12,5x12,5	1,15	0,09%
6,25x6,25	1,15	-

Quadro 15: deslocamentos no ponto 3 da placa 2

As figuras 40 e 41 ilustram os momentos  $M_x$  e  $M_y$  da placa 2 para a solução com elementos de 25 cm, respectivamente. O quadro 16 apresenta a média dos resultados obtidos para os momentos fletores nas demais soluções da placa retangular ao longo das bordas 5 e 6 e o quadro 17, o momento fletor nos pontos 5 e 6. O resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada da placa 2 está apresentado no quadro 18.

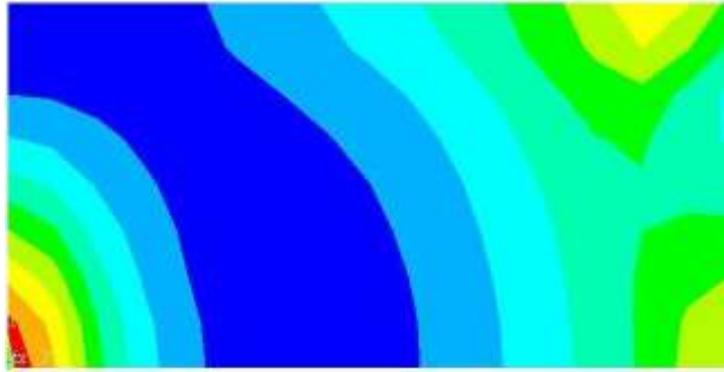


Figura 40: momentos  $M_x$  para placa 2 com elementos de 25 cm



Figura 41: momentos  $M_y$  para placa 2 com elementos de 25 cm

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	erro relativo (%)	BORDA 6 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	-9722,35	12,58%	-3769,16	14,77%
25x25	-11121,64	6,52%	-4422,43	8,50%
12,5x12,5	-11897,23	3,30%	-4833,01	4,47%
6,25x6,25	-12303,14	-	-5059,28	-

Quadro 16: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2 (modelo de placa)

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)	erro relativo (%)	PONTO 6 (Nm/m)	erro relativo (%)
50x50	-8457,25	10,85%	-3520,80	12,67%
25x25	-9486,85	5,71%	-4031,75	6,97%
12,5x12,5	-10060,90	2,93%	-4334,00	3,55%
6,25x6,25	-10364,79	-	-4493,53	-

Quadro 17: momentos fletores nos pontos 5 e 6 da placa 2 (modelo de placa)

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	PONTO 5 (Nm/m)	BORDA 6 (Nm/m)	PONTO 6 (Nm/m)
6,25x6,25	1,15	-12303,14	-10364,79	-5059,28	-4493,53

Quadro 18: resumo dos resultados obtidos para a malha mais refinada da placa 2

### 5.6.2 Analogia de Grelha

Para a abordagem do problema através do desmembramento da placa foram feitos dois modelos de barras, com elementos de 50 e de 25 cm de largura. Da mesma forma, para a obtenção dos momentos fletores máximos nas barras, sua inércia a torção foi entrada como  $I_{xx} = 1 \times 10^{-20}$  no programa. O quadro 19 apresenta os valores obtidos para estes momentos ao longo da borda 2 e do ponto 2 da placa 1. A figura 42 apresenta o gráfico de momentos fletores obtido para o modelo com barras de 25 cm.

L Barra (cm)	BORDA 2 (Nm/m)	PONTO 2 (Nm/m)
50	-5049,52	-4941,70
25	-5033,23	-4890,98

Quadro 19: momentos fletores ao longo da borda 2 e do ponto 2 da placa 1 (modelo de barra)

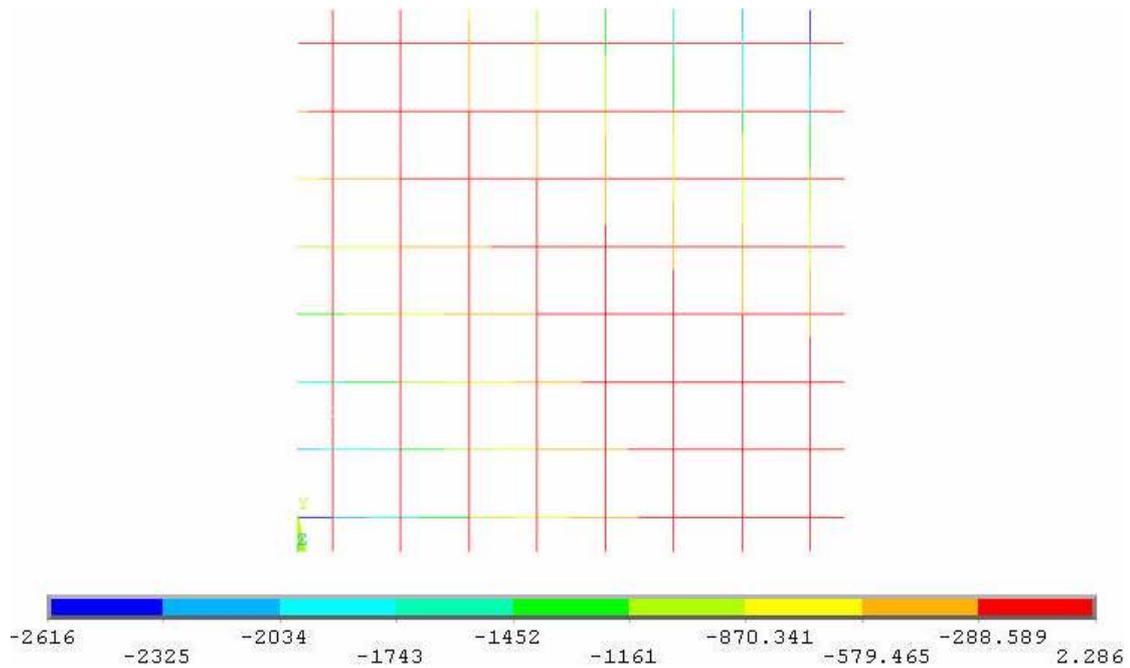


Figura 42: momentos fletores no modelo com barras de 25 cm da placa 1

Para o estudo dos deslocamentos da placa 1, diferentes calibrações da inércia a torção foram testadas. O quadro 20 apresenta os valores obtidos para o deslocamento máximo no ponto 1 segundo as diferentes calibrações para ambos os modelos de barra utilizados, tendo como referência o valor encontrado no modelo de placa mais refinado.

deslocamento máximo de referência $w = 0,19$ cm					
L barras = 50 cm			L barras = 25 cm		
$I_{xx}$	w máx (cm)	erro (%)	$I_{xx}$	w máx (cm)	erro (%)
$1 \times 10^{-20}$	0,38	99,48%	$1 \times 10^{-20}$	0,42	121,05%
1Iyy	0,25	31,23%	1Iyy	0,26	36,84%
2Iyy	0,19	1,47%	2Iyy	0,20	2,89%
3Iyy	0,16	16,01%	3Iyy	0,16	15,79%
4Iyy	0,14	26,51%	4Iyy	0,14	26,32%
5Iyy	0,12	37,01%	5Iyy	0,12	36,84%
Jt	0,14	26,51%	Jt	0,15	21,05%

Quadro 20: deslocamentos da placa 1 obtidos para diferentes calibrações das barras

Diferentemente do problema anterior, a calibração que trouxe os melhores resultados para os deslocamentos da estrutura foi utilizando para a inércia a torção das barras o dobro de sua inércia a flexão. Desta vez, utilizando o momento de inércia torcional  $J_t$ , os erros ficaram em torno de 23%. A figura 43 ilustra os deslocamentos obtidos para o modelo de barras com 25 cm de largura com a calibração que trouxe os melhores resultados,  $I_{xx} = 2I_{yy}$ . A figura 44 apresenta as curvas para os deslocamentos obtidos conforme as diferentes calibrações nos dois modelos.

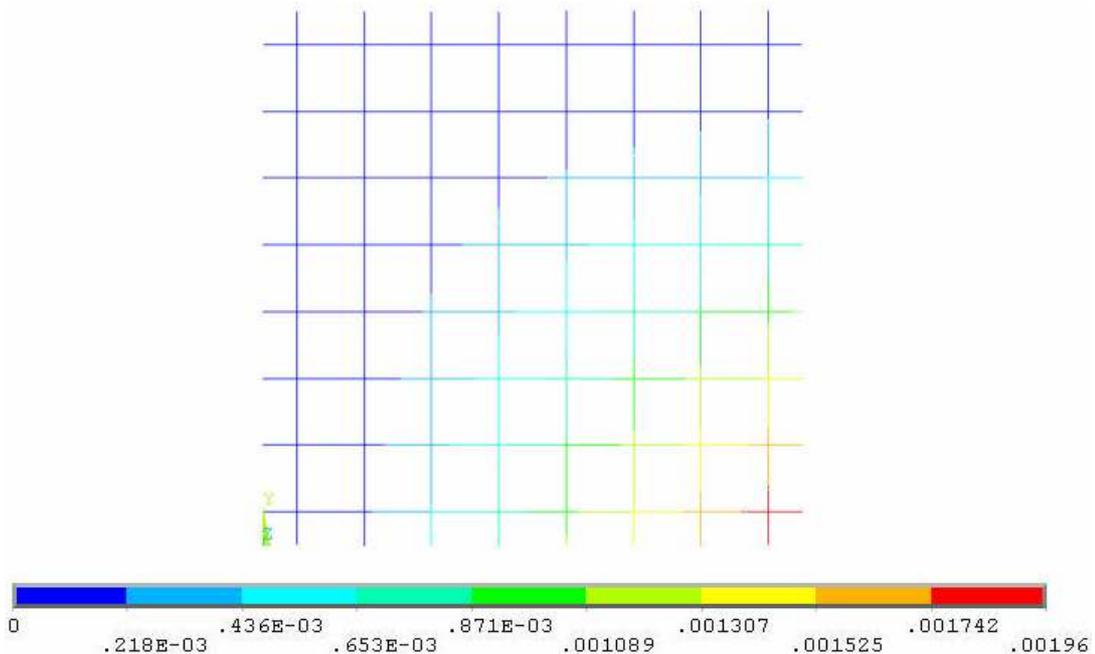


Figura 43: deslocamentos obtidos para placa 1 com barras de 25 cm

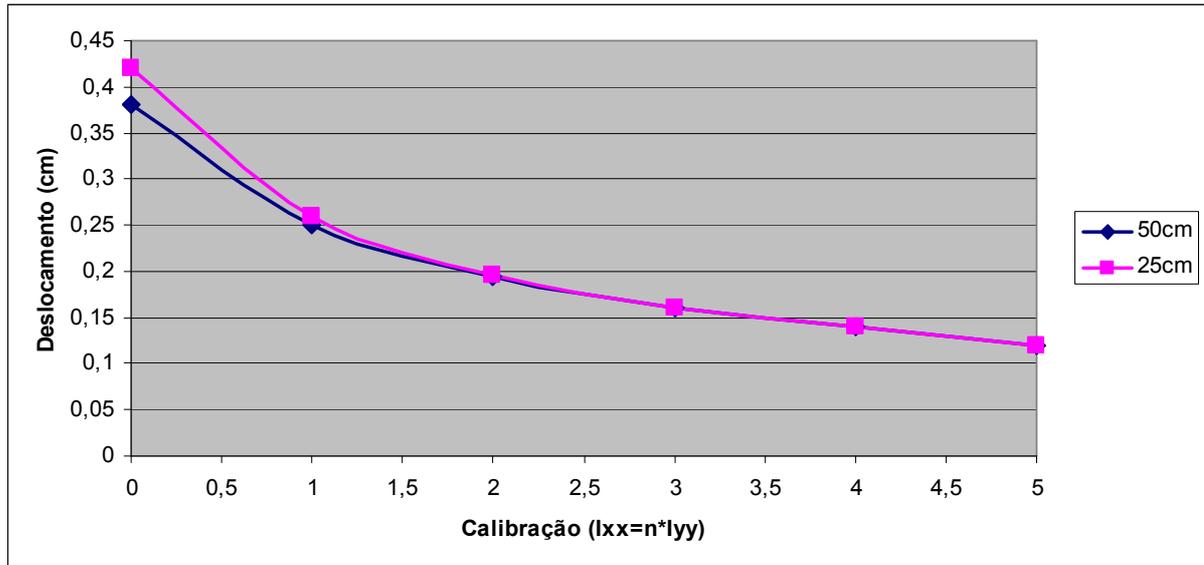


Figura 44: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras da placa 1

Aplicando as reações de momento e esforço cortante obtidas ao longo dos nós da borda 2 da placa 1 como carregamento ao longo dos respectivos nós da borda 4 da placa 2, obteve-se a solução com os modelos de barras de 50 e 25 cm. Os quadros 21 e 22 apresentam os valores obtidos para a média dos momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6, e para o momento por metro nos pontos 5 e 6 da placa 2, respectivamente. Na figura 45 pode-se verificar a distribuição dos momentos fletores para o modelo com barras de 25 cm. O quadro 23 apresenta o estudo dos deslocamentos realizado com as diferentes calibrações utilizadas. Assim como na solução da placa 1, a calibração que trouxe melhores resultados foi utilizando a inércia a torção equivalente a duas vezes a inércia a flexão das barras. A figura 46 apresenta o resultado dos deslocamentos obtidos para o modelo de barras com 25 cm de largura utilizando  $I_{xx}=2I_{yy}$  na placa 2. A figura 47 apresenta as curvas para os deslocamentos obtidos.

L Barra (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	BORDA 6 (Nm/m)
50	-14666,28	-3282,80
25	-15055,69	-3348,54

Quadro 21: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2 (modelo de barras)

L Barra (cm)	PONTO 5 (Nm/m)	PONTO 6 (Nm/m)
50	-10030,70	-3358,00
25	-10204,40	-3384,10

Quadro 22: momentos fletores nos pontos 5 e 6 da placa 2 (modelo de barras)

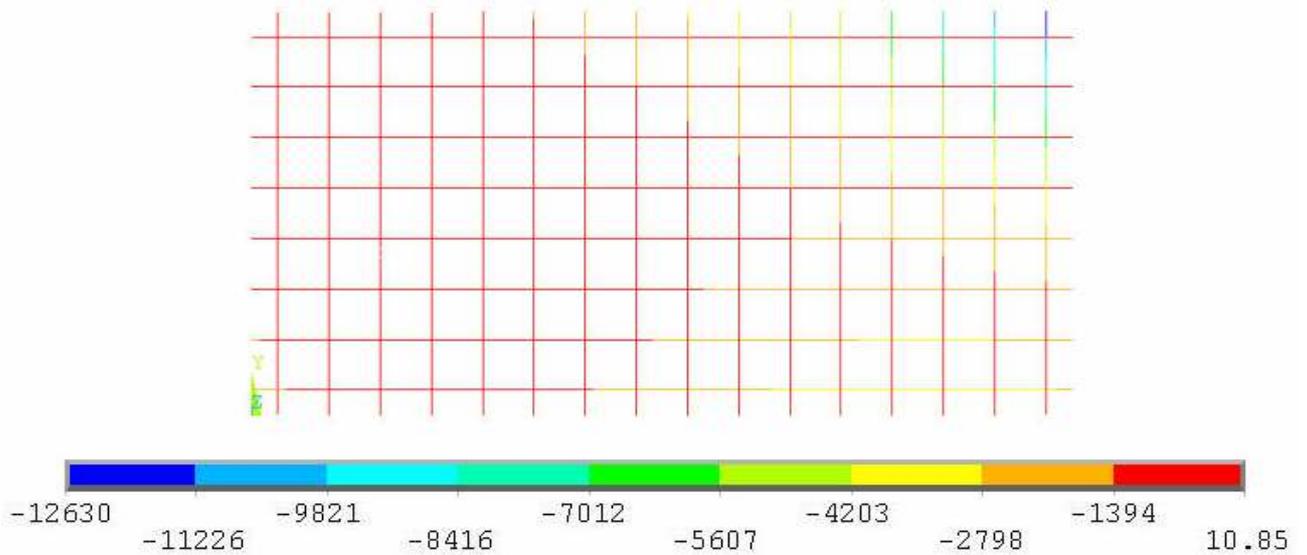


Figura 45: momentos fletores no modelo com barras de 25 cm da placa 2

deslocamento máximo de referência $w = 1,15$ cm					
L barras = 50 cm			L barras = 25 cm		
lxx	w máx (cm)	erro (%)	lxx	w máx (cm)	erro (%)
0	2,00	73,91%	0	2,20	91,30%
1lyy	1,41	22,61%	1lyy	1,47	27,83%
2lyy	1,14	0,87%	2lyy	1,17	1,74%
3lyy	0,97	15,65%	3lyy	0,99	13,91%
4lyy	0,85	26,09%	4lyy	0,86	25,22%
5lyy	0,77	33,04%	5lyy	0,77	33,04%
Jt	0,90	21,74%	Jt	0,95	17,39%

Quadro 23: deslocamentos da placa 2 obtidos para diferentes calibrações das barras

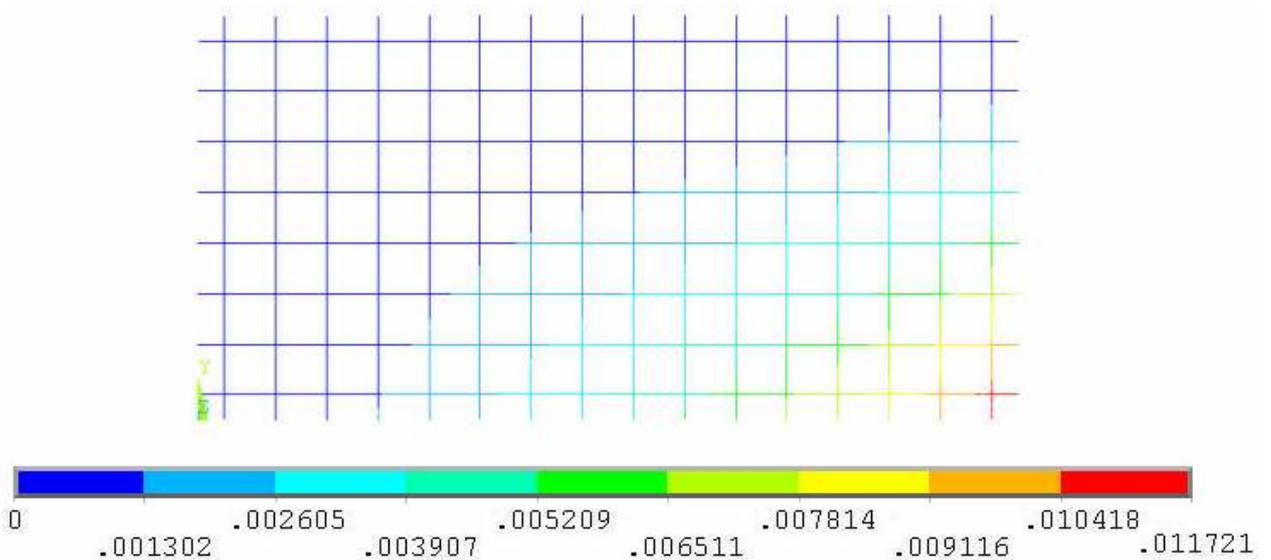


Figura 46: deslocamentos obtidos para placa 2 com barras de 25 cm

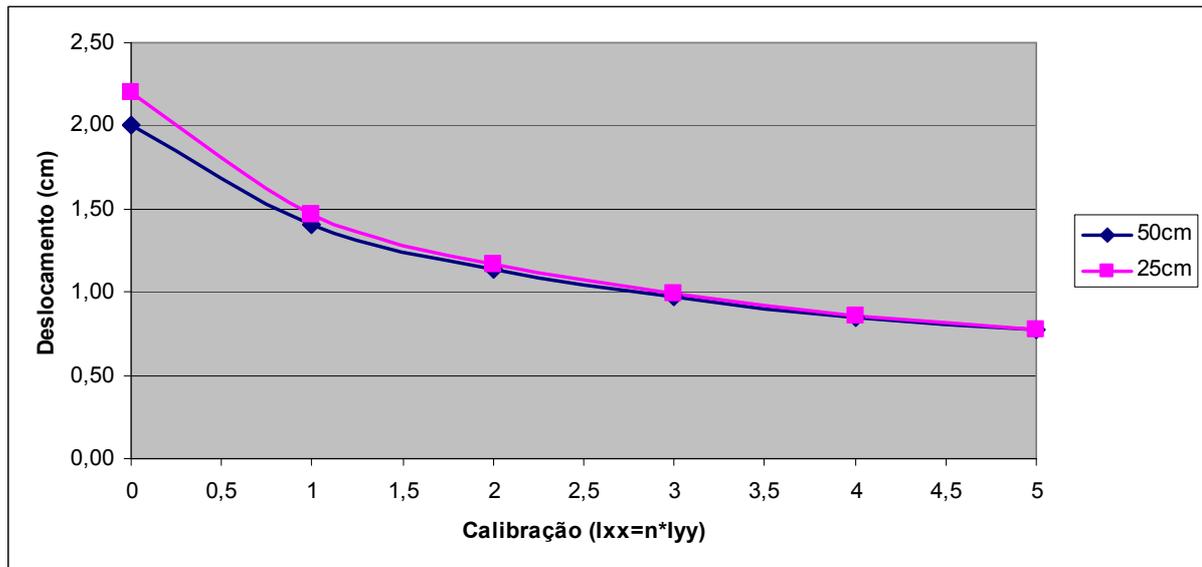


Figura 47: curva dos deslocamentos obtidos para diversas calibrações das barras da placa 2

## 5.7 SOLUÇÃO COM TQS

Na análise de edificações de múltiplos pavimentos, o TQS é um dos softwares mais utilizados nos escritórios de cálculo estrutural do Brasil. Neste, o cálculo das lajes é feito através da Analogia de Grelha. Para uma comparação dos resultados obtidos através dos modelos de placa e barra realizados no ANSYS, com os resultados do TQS, foram feitos dois modelos, com barras de 50 e 25 cm de largura.

Para a calibração da inércia a torção neste programa, pode-se entrar com um fator de divisão do momento de inércia torcional das barras. É sugerido a entrada de valores entre 2 a 4 para a obtenção de resultados próximos aos obtidos através do MEF, sendo 4 o valor utilizado em alguns escritórios de projeto. Para a análise dos momentos, foi utilizado 4 como fator de divisão da inércia a torção. A figura 48 apresenta um gráfico de distribuição de momentos fletores ao longo das barras obtido para o modelo com barras de 25 cm. Os quadros 24 e 25 apresentam os valores obtidos para os momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 e dos pontos 5 e 6, respectivamente. Para o estudo dos deslocamentos, foram testados como divisores de inércia, os valores 2 e 4. O quadro 26 apresenta os valores obtidos. Observa-se que para ambas as calibrações, os valores ficaram muito longe do valor de referência para o deslocamento máximo da placa no ponto 1.

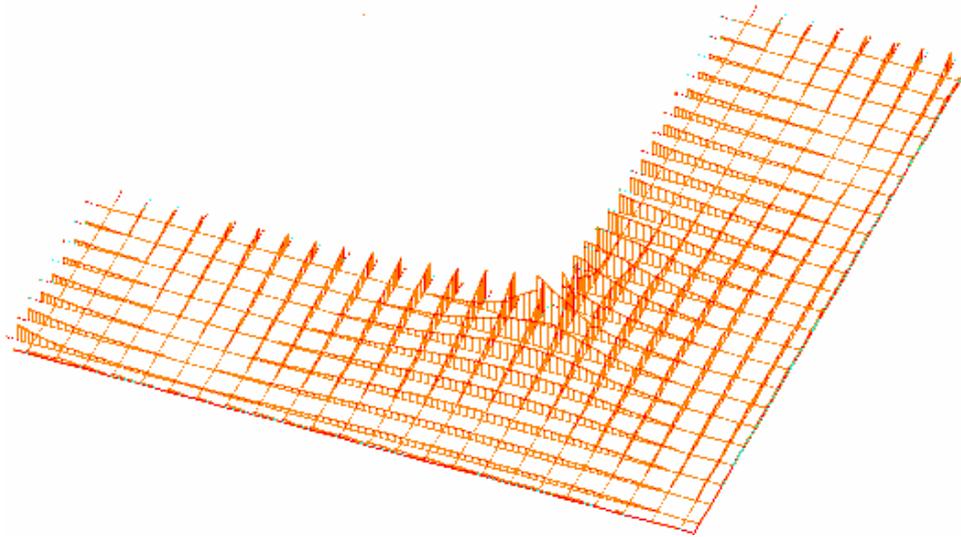


Figura 48: momentos fletores obtidos no TQS no modelo com barras de 25 cm

L Barra (cm)	BORDA 5 (Nm/m)	BORDA 6 (Nm/m)
50	-8346,94	-4750,00
25	-9238,10	-4714,29

Quadro 24: momentos fletores ao longo das bordas 5 e 6 (TQS)

L Barra (cm)	PONTO 5 (Nm/m)	PONTO 6 (Nm/m)
50	-9071,43	-4500,00
25	-8857,14	-4500,00

Quadro 25: momentos fletores nos pontos 4 e 5 (TQS)

deslocamento máximo de referência $w = 1,53$ cm					
L barras = 50 cm			L barras = 25 cm		
Fator de divisão	w máx (cm)	erro (%)	Fator de divisão	w máx (cm)	erro (%)
2	2,21	44,44%	2	2,35	53,59%
4	2,61	70,59%	4	2,70	76,47%

Quadro 26: deslocamentos obtidos no TQS

## 5.8 ESTUDOS COMPLEMENTARES

Para testar a validade dos coeficientes de calibração encontrados na análise da placa em balanço em forma de L e nas análises das placas do tipo engastada-engastada livre-livre, foram testados outros problemas, variando sua geometria e carregamento.

Para a laje em balanço em forma de L foram realizadas três análises com as seguintes características cada:

- a) mesma geometria, mesma espessura, carregamento 1,5 vezes maior
- b) mesma geometria, 8 cm de espessura, mesmo carregamento
- c) bordas 1 e 2 com 9 m, 3 e 6 com 3 m e 4 e 5 com 6 m, mesma espessura, metade do carregamento

Os quadros 27 a 29 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo no ponto 1 da placa para os três problemas propostos.

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	2,30	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	2,32	1,18%
25	2,25	1,83%

Quadro 27: deslocamentos obtidos na placa em L para o caso a

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	2,99	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	3,02	1,17%
25	2,94	1,61%

Quadro 28: deslocamentos obtidos na placa em L para o caso b

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	3,88	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	3,79	2,37%
25	3,71	4,31%

Quadro 29: deslocamentos obtidos na placa em L para o caso c

Observa-se que a mesma calibração encontrada para o problema inicial da placa em L  $I_{xx}=4I_{yy}$ , apresentou bons resultados quando testada com outras configurações de geometria e carregamento, apresentando erros em torno de 2% quando comparados aos valores obtidos no modelo de placa com elementos de 6,25x6,25 cm.

Para a laje retangular engastada-engastada livre-livre também foram realizadas três análises com as seguintes características cada:

- a) mesma geometria, mesma espessura, carregamento 1,5 vezes maior
- b) mesma geometria, 8 cm de espessura, mesmo carregamento
- c) bordas 3 e 5 com 6 m e 4 e 6 com 3 m, mesma espessura, mesmo carregamento

Os quadros 30 a 32 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo no ponto 3 da placa para os três problemas propostos.

Malha (cm)	PONTO 3 (cm)	
6,25x6,25	0,69	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	0,74	7,99%
25	0,74	7,27%

Quadro 30: deslocamentos obtidos na placa retangular para o caso a

Malha (cm)	PONTO 3 (cm)	
6,25x6,25	0,90	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	0,97	7,86%
25	0,96	7,19%

Quadro 31: deslocamentos obtidos na placa retangular para o caso b

Malha (cm)	PONTO 3 (cm)	
6,25x6,25	2,32	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	2,50	7,49%
25	2,48	6,93%

Quadro 32: deslocamentos obtidos na placa retangular para o caso c

Nota-se que a mesma calibração encontrada para o problema inicial da placa retangular  $I_{xx}=2I_{yy}$ , apresentou resultados satisfatórios, com erro em torno de 7%, quando testada com outras configurações de geometria e carregamento. Observa-se que todas as seis placas analisadas neste item classificam-se como placas finas e seus deslocamentos foram todos inferiores as metades de suas espessuras.

## 5.9 COMPARAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Para a solução do problema do balanço em forma de L formulado como um todo, obteve-se valores para os momentos ao longo das bordas engastadas muito próximos entre as soluções realizadas através de modelos de barra e placa, como pode ser visto nos quadros comparativos 33 e 34. O erro dos momentos obtidos na solução de barras ao longo das bordas 5 e 6 ficou em torno de 10%, e ao longo dos pontos 5 e 6 em torno de 4%. Estes erros seriam tranquilamente superados pelos coeficientes de segurança impostos à estrutura. Já para a verificação dos deslocamentos da estrutura, a busca da calibração ideal teve que ser realizada através de diversas iterações, mas uma vez que se encontrou o coeficiente adequado  $I_{xx}=4I_{yy}$ , a resposta da estrutura foi semelhante para ambos os modelos de barras utilizados, onde o erro encontrado foi em média 2%, como apresentado no quadro 35. A partir destes dados, pode-se concluir que a solução deste problema através da Analogia de Grelha é válida, desde que o usuário tenha controle dos fatores de calibração.

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)		BORDA 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-8953,06		-4477,57	
L Barra (cm)	valor obtido	erro	valor obtido	erro
50	-7558,26	15,58%	-3911,97	12,63%
25	-8589,95	4,06%	-4013,04	10,37%
12,5	-9167,62	2,40%	-4046,81	9,62%

Quadro 33: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo das bordas 5 e 6

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)		PONTO 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-8285,21		-4088,84	
L Barra (cm)	valor obtido	erro	valor obtido	erro
50	-9031,00	9,00%	-3950,40	3,39%
25	-8684,90	4,82%	-4002,46	2,11%
12,5	-8761,18	5,74%	-4025,90	1,54%

Quadro 34: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra nos pontos 5 e 6

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	1,53	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	1,54	0,65%
25	1,50	1,96%
12,5	1,48	3,27%

Quadro 35: comparação dos deslocamentos obtidos entre modelos de placa e barra

Uma análise bem refinada dos problemas é sempre o ideal, mas com a realidade em que os escritórios de cálculo estrutural se encontram hoje, com muita pressão para cumprir os prazos, e nem sempre com muito tempo disponível para uma análise crítica dos resultados apresentados pelos programas do mercado, a analogia do balanço unidirecional apresentada no item 5.5 provou ser uma forma rápida e eficiente para o projetista obter os esforços atuantes na estrutura. Como é visto no quadro 36, o valor obtido para esta solução apresentou um erro de 5% em relação ao valor da malha mais refinada obtida na solução através do Método dos Elementos Finitos.

Malha (cm)	Momento M1 (Nm/m)	
3,125x3,125	8785,21	
balanço unidirecional	valor obtido	erro
	9300,00	5,86%

Quadro 36: comparação dos resultados obtidos entre a analogia do balanço unidirecional e modelo de placa

Na solução realizada por etapas, utilizando a idéia do desmembramento da placa, os resultados obtidos através dos modelos de placa ao longo dos engastes nas bordas 5 e 6 e dos pontos 5 e 6 foram muito superiores aos obtidos quando o problema foi resolvido como um todo, como mostram os quadros 37 e 38. Analisando os resultados obtidos, conclui-se que a idéia é válida, porém ela se mostrou anti-econômica. Já na análise dos deslocamentos no ponto 1 da estrutura, os resultados obtidos foram inferiores aos obtidos anteriormente, com um erro de 12%, como mostra o quadro 39. Para chegar no resultado do deslocamento do ponto 1, somou-se o valor encontrado no ponto 3 da placa 2 ao obtido no ponto 1 da placa 1.

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)		BORDA 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-8953,06		-4477,57	
placa 2 6,25x6,25	valor obtido	erro	valor obtido	erro
	-12303,14	37,42%	-5059,28	12,99%

Quadro 37: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa ao longo das bordas 5 e 6

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)		PONTO 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-8285,21		-4088,84	
placa 2 6,25x6,25	valor obtido	erro	valor obtido	erro
	-10364,79	25,10%	-4493,53	9,90%

Quadro 38: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa nos pontos 5 e 6

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	1,53	
placa 1 6,25x6,25	valor obtido	erro
	1,34	12,42%

Quadro 39: comparação dos resultados obtidos para a solução através do desmembramento da placa no ponto 1

Para a solução através do desmembramento da placa segundo a Analogia de Grelha, verificou-se que já na placa 1 os resultados foram muito diferentes dos obtidos para a mesma placa utilizando o Método dos Elementos Finitos. Os momentos obtidos ao longo dos engastes foram muito superiores aqueles obtidos segundo o modelo de placa. Para a verificação dos deslocamentos, as diversas iterações demonstraram que a boa calibração para este tipo de geometria e vinculação é utilizando  $I_{xx}=2I_{yy}$ . Desta forma, os resultados obtidos para os deslocamentos no ponto 1 apresentaram um erro de 2% quando comparados aos valores obtidos na solução de placa. Os quadros 40 a 42 permitem a comparação dos momentos e deslocamentos encontrados na solução da placa 1 entre os modelos de placa e barra.

Malha (cm)	BORDA 2 (Nm/m)	
6,25x6,25	-3540,50	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
	50	42,62%
	25	42,16%

Quadro 40: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo da borda 2 da placa 1

Malha (cm)	PONTO 2 (Nm/m)	
6,25x6,25	-3447,25	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
	50	43,35%
	25	41,88%

Quadro 41: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra no ponto 2 da placa 1

Malha (cm)	PONTO 1 (cm)	
6,25x6,25	0,19	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
	50	1,47%
	25	2,89%

Quadro 42: comparação dos resultados obtidos para o deslocamento da placa 1

Analisando a placa 2 através da Analogia de Grelha, os valores encontrados ao longo do engaste da borda 5 foram superiores aos encontrados para a mesma placa através do Método dos Elementos Finitos, ou seja, muito superiores aos valores originais encontrados na borda 5 quando a estrutura foi calculada como um todo. Já para a borda 6, os valores obtidos foram inferiores, tanto aos encontrados na placa 2 pela solução de desmembramento, quanto aos encontrados na solução original, como pode ser verificado nos quadros 43 e 44. A partir destes resultados, conclui-se que a idéia do desmembramento através de modelos de barra também funciona, mas se mostrou muito mais anti-econômica para a borda 5 e perigosa para a borda 6. Já para a verificação dos deslocamentos, a calibração encontrada para os modelos de barra da placa 2 foi a mesma que para placa 1, com  $I_{xx}=2I_{yy}$ . A comparação entre os valores obtidos para esta calibração com os obtidos no modelo de placa pode ser vista no quadro 45.

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)		BORDA 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-12303,14		-5059,28	
L Barra (cm)	valor obtido	erro	valor obtido	erro
50	-14666,28	19,21%	-3282,80	35,11%
25	-15055,69	22,37%	-3348,54	33,81%

Quadro 43: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra ao longo das bordas 5 e 6 da placa 2

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)		PONTO 6 (Nm/m)	
6,25x6,25	-10364,79		-4493,53	
L Barra (cm)	valor obtido	erro	valor obtido	erro
50	-10030,70	3,22%	-3358,00	25,27%
25	-10204,40	1,55%	-3384,10	24,69%

Quadro 44: comparação dos resultados obtidos entre modelos de placa e barra nos pontos 5 e 6 da placa 2

Malha (cm)	PONTO 3 (cm)	
6,25x6,25	1,15	
L Barra (cm)	valor obtido	erro
50	1,14	0,87%
25	1,17	1,74%

Quadro 45: comparação dos resultados obtidos para o deslocamento da placa 2

No estudo do problema no TQS utilizando o fator de divisão de inércia a torção igual a 4, verificou-se que os valores encontrados para os momentos ficaram dentro da margem esperada, apresentando uma pequena diferença quando comparado aos modelos de placa e barra realizados no ANSYS. Os quadros 46 e 47 apresentam uma comparação dos resultados obtidos no ANSYS com os obtidos no TQS para o modelo com barras de 50 cm, e os quadros 48 e 49, a comparação para o modelo com barras de 25 cm.

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)		BORDA 6 (Nm/m)	
TQS L=50cm	-8346,94		-4750,00	
ANSYS	valor obtido	erro	valor obtido	erro
6,25x6,25	-8953,06	7,26%	-4477,57	5,74%
Barra 50cm	-7558,26	9,45%	-3911,97	17,64%

Quadro 46: comparação dos resultados obtidos ao longo das bordas 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 50 cm

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)		PONTO 6 (Nm/m)	
TQS L=50cm	-9071,43		-4500,00	
ANSYS	valor obtido	erro	valor obtido	erro
6,25x6,25	-8285,21	8,67%	-4088,84	9,14%
Barra 50cm	-9031,00	0,45%	-3950,40	12,21%

Quadro 47: comparação dos resultados obtidos nos pontos 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 50 cm

Malha (cm)	BORDA 5 (Nm/m)		BORDA 6 (Nm/m)	
TQS L=25cm	-9238,10		-4714,29	
ANSYS	valor obtido	erro	valor obtido	erro
6,25x6,25	-8953,06	3,09%	-4477,57	5,02%
Barra 25cm	-8589,95	7,02%	-4013,04	14,87%

Quadro 48: comparação dos resultados obtidos ao longo das bordas 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 25 cm

Malha (cm)	PONTO 5 (Nm/m)		PONTO 6 (Nm/m)	
TQS L=25cm	-8857,14		-4500,00	
ANSYS	valor obtido	erro	valor obtido	erro
6,25x6,25	-8285,21	6,46%	-4088,84	9,14%
Barra 25cm	-8684,90	1,94%	-4002,46	11,06%

Quadro 49: comparação dos resultados obtidos nos pontos 5 e 6 no modelo do TQS com barras de 25 cm

Com relação aos deslocamentos, os valores obtidos tanto com o fator de divisão de inércia a torção igual a 2 quanto igual a 4 foram bem superiores aos obtidos através do MEF e Analogia de Grelha, como apresentado no quadro 26. Sendo o TQS um pacote fechado, fica difícil a análise dos possíveis motivos destas divergências, já que não se sabe ao certo todos os parâmetros e procedimentos realizados no programa.

Com base nos testes realizados sobre as calibrações encontradas nas análises adicionais com as placas em forma de L e retangular, conclui-se que uma vez que a boa calibração é encontrada, segundo a geometria e vinculação da placa, esta calibração pode ser utilizada para problemas com outras características de geometria e carregamento. Isto reafirma a importância do controle dos fatores e da utilização da boa calibração para a obtenção de bons resultados segundo a Analogia de Grelha.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos dados obtidos através da solução da laje em balanço em forma de L como um todo, pode-se afirmar que a Analogia de Grelha fornece bons resultados na simulação de uma placa fina quando comparado aos resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos, desde que corretamente calibrado. Pode-se dizer também, que a idéia de se obter uma solução para este problema através do desmembramento da laje, tanto para os modelos de placa quanto para os modelos de barra, é válida, embora os resultados tenham se mostrado anti-econômicos.

Sobre a calibração das barras utilizadas na Analogia de Grelha, verifica-se que para a obtenção dos momentos fletores, deve-se utilizar a menor inércia a torção possível, para que os momentos fletores dos elementos em uma direção não sejam absorvidos pelos esforços de torção dos elementos perpendiculares a estes, obtendo-se assim, os valores máximos possíveis para a flexão nas barras. Já para a obtenção dos deslocamentos da estrutura, conclui-se que nem a sugestão de Montoya (1973 apud ALTO QI, 2009b), utilizando a inércia a torção igual a duas vezes a inércia a flexão, nem o momento de inércia torcional  $J_t$ , podem ser utilizadas como regras de calibração, apesar da primeira ter sido o coeficiente encontrado para placas engastada-engastada livre-livre, e a segunda ter se aproximado bem quando a laje em L foi calculada como um todo.

Sobre a calibração dos modelos de barra quanto ao deslocamento da estrutura, o que se pode afirmar é que cada caso é um caso. Em seu trabalho com lajes retangulares simplesmente apoiadas ao longo das quatro bordas, Rosa (2008) encontrou um coeficiente de calibração  $I_{xx}=3I_{yy}$ . Trabalhando com modelos de barra para simular lajes nervuradas em uma direção, Stramandinoli (2003) encontrou  $I_{xx}=2,8I_{yy}$ . Neste trabalho, analisando a laje em forma de L foi encontrado como calibração  $I_{xx}=4,0I_{yy}$  e analisando placas retangulares engastada-engastada livre-livre, encontrou-se  $I_{xx}=2,0I_{yy}$ .

Como continuação desta pesquisa, sugere-se a busca de coeficientes para a calibração de lajes com diversas configurações de geometria e vinculação. Sugere-se também, um estudo sobre o comportamento da Analogia de Grelha na análise de lajes planas com e sem capitel.

## REFERÊNCIAS

- ALTO QI. **Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha – Conceitos Iniciais**. Disponível em: <[http://www.altoqi.com.br/Suporte/Eberick/duvidas\\_usuais/Dimensionamento/Analogia\\_de\\_Grelha\\_\(Parte1\).htm](http://www.altoqi.com.br/Suporte/Eberick/duvidas_usuais/Dimensionamento/Analogia_de_Grelha_(Parte1).htm)>. Acesso em: 18 jun 2009a.
- \_\_\_\_\_. **Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha – Influência dos Parâmetros de Rigidez**. Disponível em: <[http://www.altoqi.com.br/Suporte/Eberick/duvidas\\_usuais/Dimensionamento/Analogia\\_de\\_Grelha\\_\(Parte2\).htm](http://www.altoqi.com.br/Suporte/Eberick/duvidas_usuais/Dimensionamento/Analogia_de_Grelha_(Parte2).htm)>. Acesso em: 18 jun 2009b.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2000.
- ANSYS INCORPORATION. ANSYS, version 11.0. Canonsburg (USA), 2007.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.
- AWRUCH, A. M.; MORSCH, I. B. **Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica**. 2006. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- FUSCO, P. B. **Técnica de armar as estruturas de concreto**. 1. ed. São Paulo: PINI 1995.
- GROEHS, A. G. **Resistência dos Materiais e Vasos de Pressão**. São Leopoldo: Editora da UNISINOS, 2002.
- HENNRICHS, C. A. **Estudos sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado**. 2003. 201 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- JOHANSEN, K. W. **Linhas de Ruptura Teoria e Prática**. Tradução de Jayme Mason. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1962.
- LANGENDONCK, T. V. **Teoria Elementar das Charneiras Plásticas**. São Paulo: ABCP, 1970. v. 1.
- MASUERO, J. R.; CREUS, G. J. **Introdução à Mecânica Estrutural**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1997.

MASUERO, J. R.; GONZÁLEZ, L. A. S. Potencialidades e perigos do ensino de análise estrutural tendo como ênfase a automatização computacional: um estudo de caso. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 29., Porto Alegre: PUCRS, 2001.

MÜLLER, A. L. **Subsídios para a utilização da Teoria das Charneiras Plásticas na análise de lajes**. 2000. 60 f. Trabalho de Conclusão (Estágio) – Faculdade de Engenharia e Arquitetura. Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo.

NELSON, T.; WANG E. **Reliable FE-Modeling with ANSYS**. Disponível em <[www.ansys.com/events/proceedings/2004/PAPERS/24.PDF](http://www.ansys.com/events/proceedings/2004/PAPERS/24.PDF)>. Acesso em: 12 nov 2009.

OLIVEIRA NETO, L. **Uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de Engenharia Estrutural**. 1998. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos.

ROSA, C. M. **Comparação entre modelos de grelha e modelos de placa na análise de lajes planas**. 2008. 97 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuição à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha**. 2003. 199 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY, K. S. **Theory of Plates and Shells**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method Volume 1**. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

## **APÊNDICE A – Exemplo de solução analítica**

### Exemplo de solução analítica

Para complementar o estudo da teoria de Kirchoff e da aplicação da equação diferencial que governa o problema das placas finas apresentada por Lagrange, este apêndice apresenta a solução de um problema de placa desenvolvida por séries de Fourier.

Para o caso de uma laje retangular com duas bordas opostas simplesmente apoiadas, a terceira borda engastada, e a quarta livre, como mostra a figura A1, Timoshenko e Woinowsky (1959) fornecem uma solução por séries para o deslocamento  $w$  de qualquer ponto na placa, segundo um carregamento uniforme  $q$ , através do conjunto de equações A1 a A7.

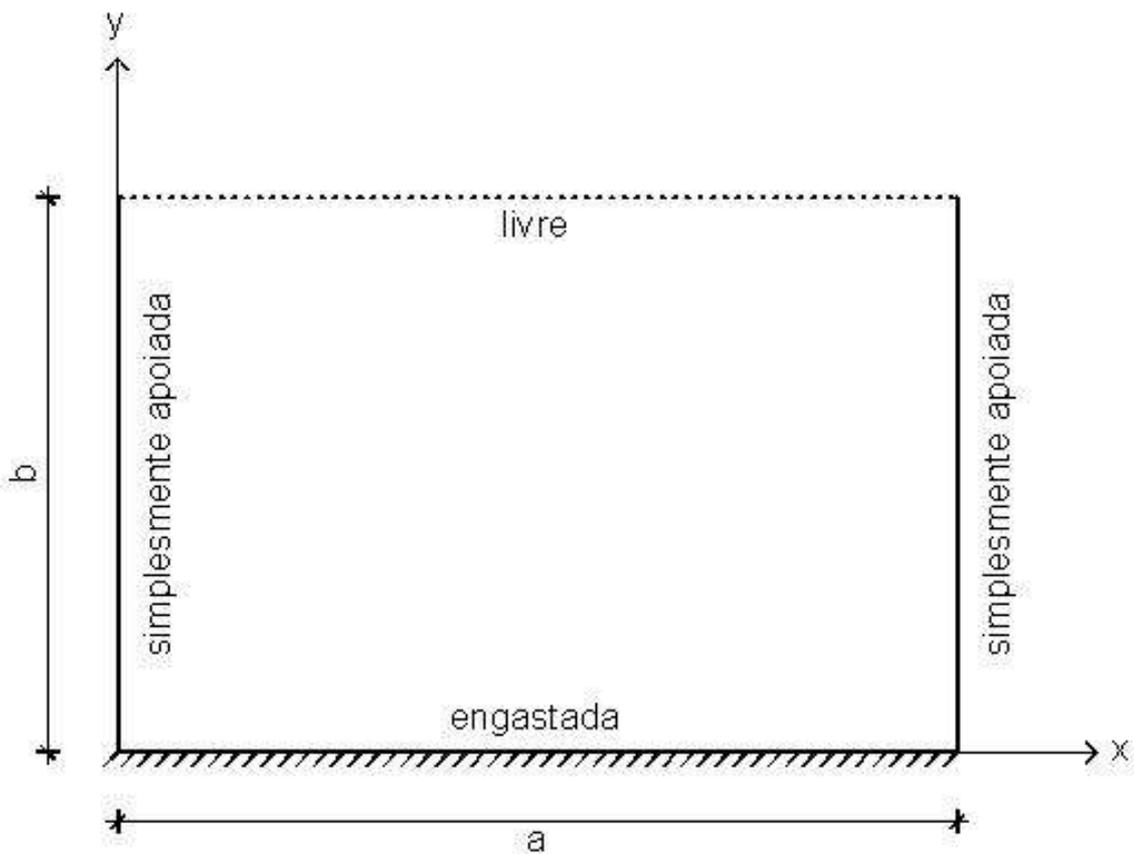


Figura A1: placa engastada-apoiada-apoiada-livre

Assim, as equações são (TIMOSHENKO; WOINOWSKY, 1959):

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{equação A1})$$

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left( A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (\text{equação A2})$$

$$A_m = -\frac{4}{\pi^5 m^5} \quad (\text{equação A3})$$

$$B_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3+\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + 2\nu \cosh \beta_m - \nu(1-\nu) \beta_m \operatorname{senh} \beta_m - (1-\nu^2)}{(3+\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} \quad (\text{equação A4})$$

$$C_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{senh} \beta_m \cosh \beta_m + \nu(1+\nu) \operatorname{senh} \beta_m - \nu(1-\nu) \beta_m \cosh \beta_m - (1-\nu)^2 \beta_m}{(3+\nu)(1-\nu) \cosh^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} \quad (\text{equação A5})$$

$$D_m = -C_m \quad (\text{equação A6})$$

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a} \quad (\text{equação A7})$$

Onde:

$a$  é a dimensão referente aos lados engastado e livre [m];

$b$  é a dimensão referente aos lados simplesmente apoiados [m];

$x$  e  $y$  as coordenadas do sistema [m];

$D$  é o modo de rigidez à flexão da placa [Nm];

$q$  é a carga uniforme aplicada na placa [N/m<sup>2</sup>].

Através da equação do deslocamento  $w$ , pode-se obter facilmente as equações resultantes para os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , a partir das equações 6 da teoria de Kirchhoff e de um software como o MAPLE para ajudar na solução e simplificação algébrica das derivadas parciais. As equações A8 fornecem as séries correspondentes aos momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , respectivamente.

No quadro A1, Timoshenko e Woinowsky (1959) fornecem os valores para o deslocamento  $w$  máximo, o momento  $M_x$  em  $x=a/2$ ,  $y=b$  e o momento  $M_y$  em  $x=a/2$ ,  $y=0$  para uma laje retangular qualquer, segundo a relação entre suas duas principais dimensões,  $b$  e  $a$ .

b/a	w máx.	x = a/2, y = b	x = a/2, y = 0
		M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>
0	0,125qb <sup>4</sup> /D	0	-0,500qb <sup>2</sup>
1/3	0,094qb <sup>4</sup> /D	0,0078qa <sup>2</sup>	-0,428qb <sup>2</sup>
1/2	0,0582qb <sup>4</sup> /D	0,0293qa <sup>2</sup>	-0,319qb <sup>2</sup>
2/3	0,0335qb <sup>4</sup> /D	0,0558qa <sup>2</sup>	-0,227qb <sup>2</sup>
1	0,0113qb <sup>4</sup> /D	0,0972qa <sup>2</sup>	-0,119qb <sup>2</sup>
3/2	0,0141qa <sup>4</sup> /D	0,123qa <sup>2</sup>	-0,124qa <sup>2</sup>
2	0,0150qa <sup>4</sup> /D	0,131qa <sup>2</sup>	-0,125qa <sup>2</sup>
3	0,0152qa <sup>4</sup> /D	0,133qa <sup>2</sup>	-0,125qa <sup>2</sup>
∞	0,0152qa <sup>4</sup> /D	0,133qa <sup>2</sup>	-0,125qa <sup>2</sup>

Quadro A1: valores para  $w$ ,  $M_x$  e  $M_y$  segundo alguns valores de  $b/a$

Observa-se que quando a dimensão engastada  $a$  é muito maior que  $b$ , ou seja, a relação  $b/a$  aproxima-se de zero, a influência das bordas simplesmente apoiadas deixa de existir no meio da placa. Assim, em  $x = a/2$ , a estrutura pode ser tratada como uma laje em balanço em uma única direção e a equação para o deslocamento máximo na borda livre neste ponto é a mesma que se usa para uma viga engastada em balanço.

$$M_{xx} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \begin{aligned} & -\frac{1}{\pi^3 m^3} \left( q \operatorname{asen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) (-4a - m^5 \pi^5 A m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \right. \right. \\ & - m^6 \pi^6 B m \operatorname{ysenh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - m^5 \pi^5 C m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & - m^6 \pi^6 D m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \nu m^5 \pi^5 A m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & + 2\nu m^5 \pi^5 B m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a + \nu m^6 \pi^6 B m \operatorname{ysenh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\ & + \nu m^5 \pi^5 C m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a + 2\nu m^5 \pi^5 D m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & \left. \left. + \nu m^6 \pi^6 D m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \right) \end{aligned} \right) \quad (\text{equação A8.a})$$

$$M_{yy} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \begin{aligned} & \frac{1}{\pi^3 m^3} \left( q \operatorname{asen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) (4a\nu + \nu m^5 \pi^5 A m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \right. \right. \\ & + \nu m^6 \pi^6 B m \operatorname{ysenh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \nu m^5 \pi^5 C m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & + \nu m^6 \pi^6 D m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - m^5 \pi^5 A m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & - 2m^5 \pi^5 B m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a - m^6 \pi^6 B m \operatorname{ysenh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\ & - m^5 \pi^5 C m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a - 2m^5 \pi^5 D m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & \left. \left. - m^6 \pi^6 D m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \right) \end{aligned} \right) \quad (\text{equação A8.b})$$

$$M_{xy} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1 + \nu) \left( \begin{aligned} & q a m^2 \pi^2 \left( \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left( A m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \right. \right. \\ & + B m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a + B m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) m \pi y \\ & + C m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a + D m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) a \\ & \left. \left. + D m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) m \pi y \right) \right) \end{aligned} \right) \quad (\text{equação A8.c})$$

O problema apresentado neste apêndice tem as seguintes características:

- a) carga superficial  $q$ , perpendicular ao plano médio da placa, uniformemente distribuída de  $7000 \text{ N/m}^2$ ;
- b) módulo de elasticidade  $E = 28 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;
- c) coeficiente de Poisson =  $0,3$ ;
- d) espessura  $t = 0,10 \text{ m}$ .
- e)  $a = 6,00 \text{ m}$
- f)  $b = 4,00 \text{ m}$

Os resultados para uma solução deste problema com apenas três termos nas séries estão representados nas figuras A2 a A6. O erro relativo obtido foi de  $0\%$  para o deslocamento  $w$ ,  $0,72\%$  para o momento  $M_x$ ,  $0,37\%$  para o momento  $M_y$  e  $0,24\%$  para o momento  $M_{xy}$ .

A figura A2 possibilita uma visualização espacial dos deslocamentos na placa. Para isso, os valores obtidos para o deslocamento foram plotados como negativos ao longo do eixo  $z$ , já que as equações fornecem os valores absolutos para o mesmo. Além disso, na figura A2, foi feita uma rotação da placa em torno do eixo  $z$  para se obter uma melhor visualização da sua borda livre.

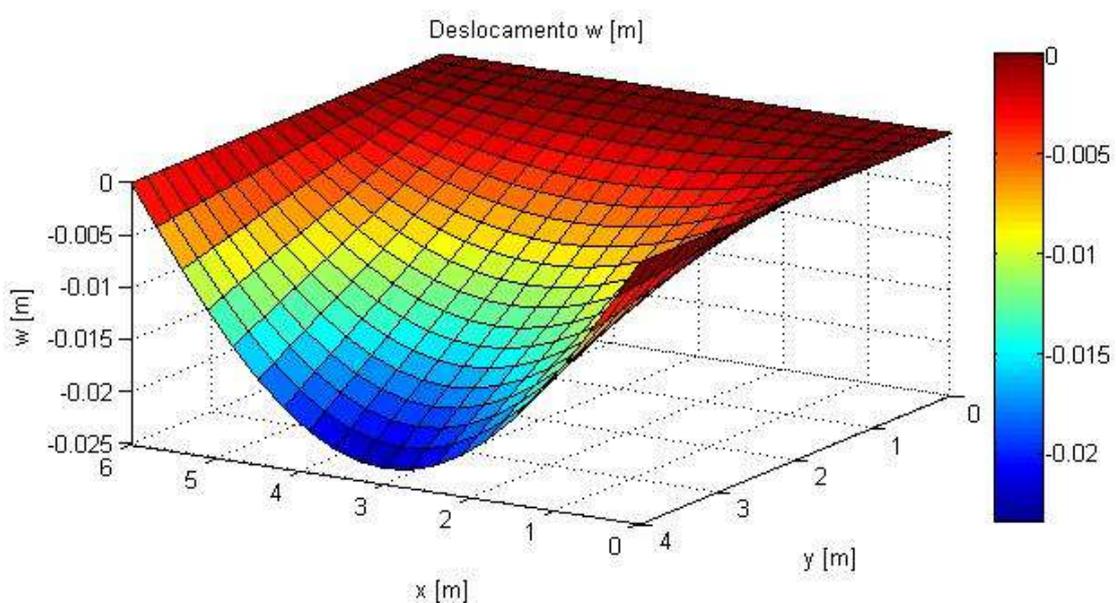


Figura A2: demonstração espacial do deslocamento ao longo da placa obtido por solução analítica com o software Matlab

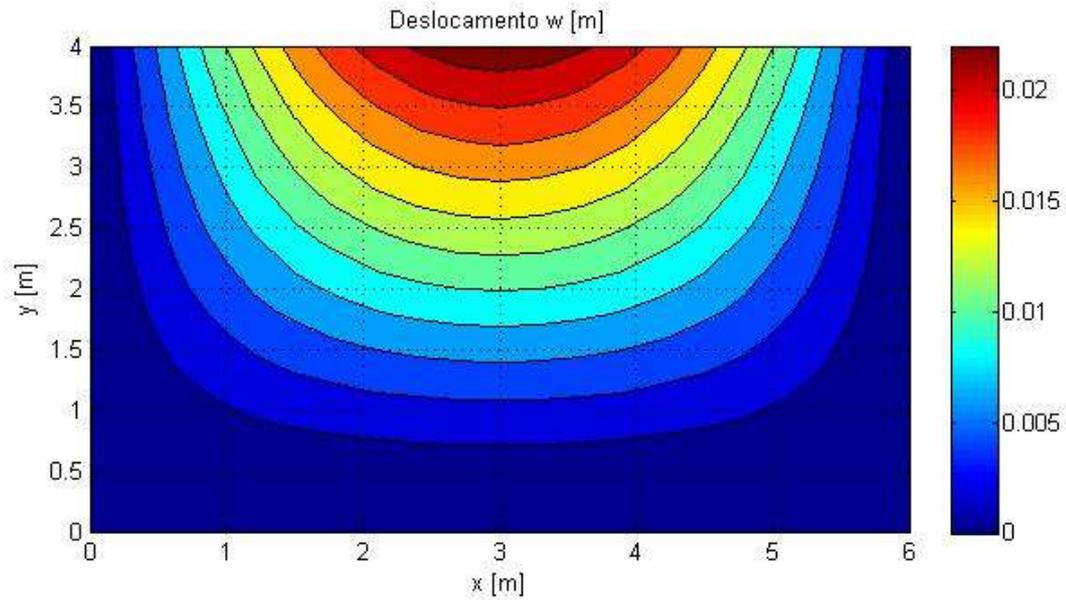


Figura A3: deslocamento  $w$  ao longo da placa obtido por solução analítica com o software Matlab

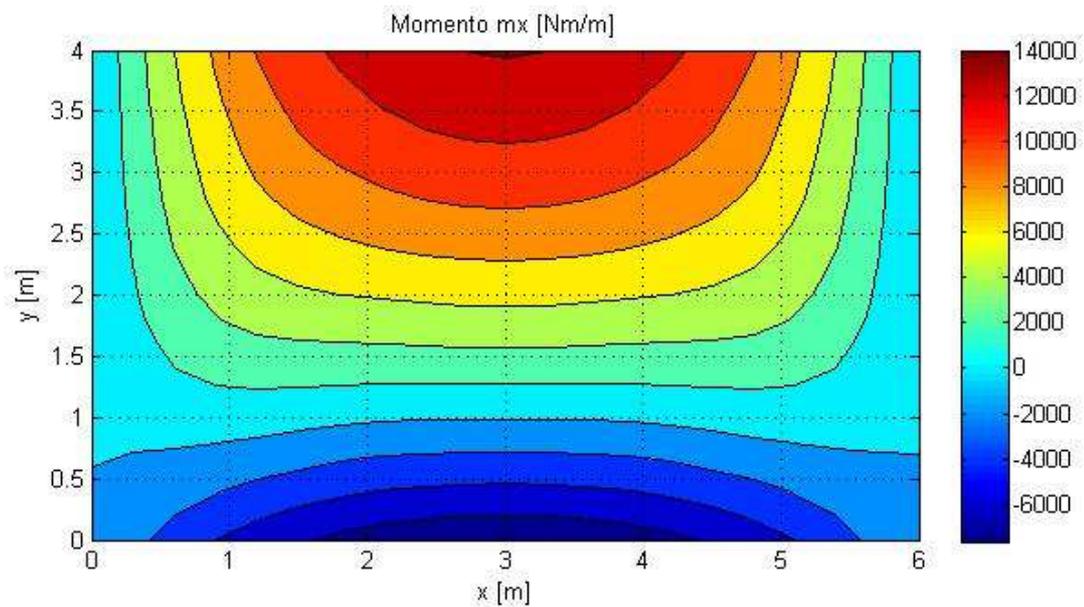


Figura A4: momento  $M_x$  ao longo da placa obtido por solução analítica com o software Matlab

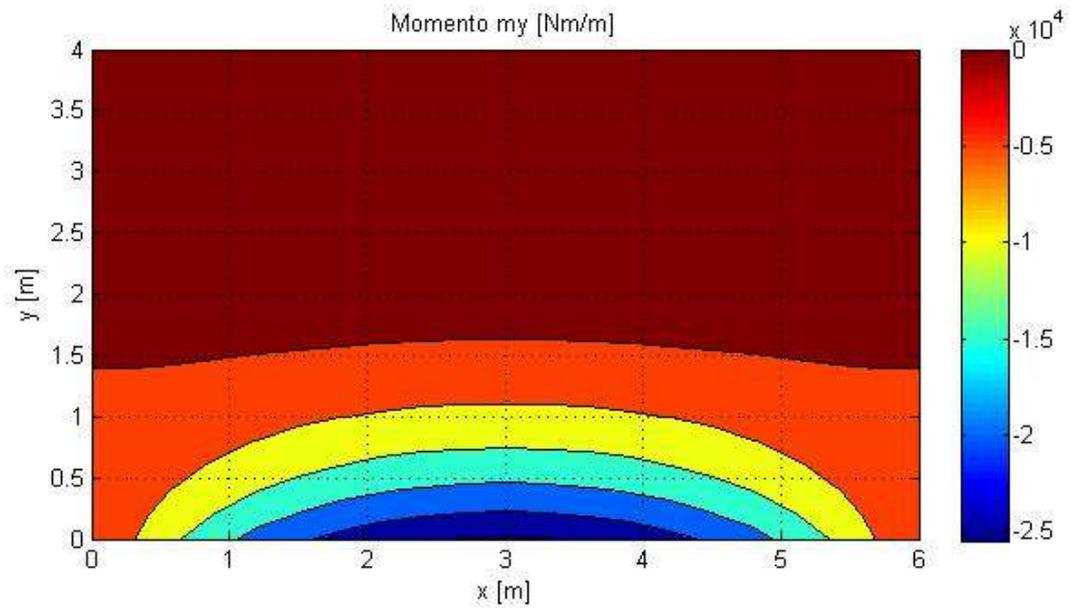


Figura A5: momento  $M_y$  ao longo da placa obtido por solução analítica com o software Matlab

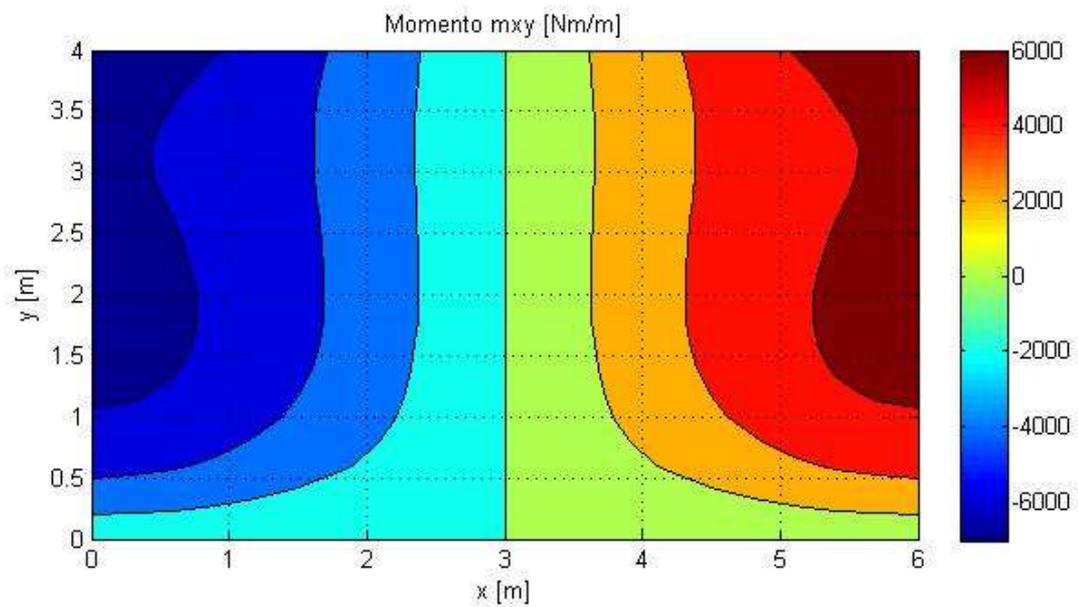


Figura A6: momento  $M_{xy}$  ao longo da placa obtido por solução analítica com o software Matlab

O quadro A2 fornece os resultados obtidos em determinados pontos da placa para o deslocamento  $w$  e os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  para soluções com diferentes termos utilizados nas séries. Observa-se que a solução simplificada proposta por Timoshenko e Woinowsky (1959) apresentada no quadro A1 forneceu resultados entre as soluções com sete e com nove termos. O quadro A3 apresenta o erro relativo obtido para as diferentes soluções.

ponto (x,y)	$x=a/2$ $y=b$	$x=a/2$ $y=b$	$x=a/2$ $y=0$	$x=0$ $y=b$
m	w (cm)	$M_x$ (Nm/m)	$M_y$ (Nm/m)	$M_{xy}$ (Nm/m)
1	2,36	15126,62	-26420,41	-6779,21
3	2,34	13868,58	-25219,47	-7006,56
5	2,34	14145,10	-25479,53	-7053,90
7	2,34	14044,29	-25384,75	-7071,13
<b>tabela</b>	<b>2,34</b>	<b>14061,60</b>	<b>-25424,00</b>	-
9	2,34	14091,72	-25429,34	-7079,12
11	2,34	14065,74	-25404,92	-7083,68

Quadro A2: resultados obtidos para m termos nas séries

m	erro relativo (%)			
	w	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$
1	0,85%	9,07%	4,76%	3,24%
3	0,00%	1,95%	1,02%	0,67%
5	0,00%	0,72%	0,37%	0,24%
7	0,00%	0,34%	0,18%	0,11%
9	0,00%	0,18%	0,10%	0,06%
11	0,00%	0,11%	0,06%	0,04%

Quadro A3: erro relativo para m termos nas séries