UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

RENE CARLOS CARDOSO BALTAZAR JÚNIOR

UMA DISCUSSÃO SOBRE GENERALIZAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre
2008

RENE CARLOS CARDOSO BALTAZAR JÚNIOR

UMA DISCUSSÃO SOBRE GENERALIZAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profª Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre, 2008

RESUMO

Embora não haja um consenso entre os educadores sobre o que é generalização, todos reconhecem sua importância e seu papel na Educação Matemática. Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir esses pensamentos no ambiente de algumas atividades matemáticas. Para entender melhor esses conceitos, investigaremos aspectos presentes na linguagem humana. Finalmente, indicarei que atividades com uma seqüência de sugestões e questionamentos, nas quais o aluno busca, a partir do uso natural da linguagem cotidiana, uma generalização, possibilitam desenvolver o pensamento matemático.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Pensamento Genérico e Generalizado, Formação de Conceitos, Linguagem e Pensamento.

ABSTRACT

Although there is no general or widespread agreement among educators about the concept of generalization, all recognize its role and importance in Mathematics Education. In this work we aim to present and discuss generalization within the setting of some mathematical activities. In order to better understand these issues, we investigate some aspects inherent in the human language. In conclusion, we indicate how the student's mathematical reasoning can be developed through a sequence of suggestions and questioning by which the student seeks generalizations using everyday language.

Key words: Mathematics Education, Generalized Thought, Generic Thought, Training Concepts, Language and Thought.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos:

- à atenção e dedicação de minha orientadora, Profª Elisabete Zardo Búrigo;
- a todos educadores da Escola Estadual de Ensino Fundamental Olintho Pereira por manterem as “portas abertas” para este trabalho;
- aos colegas Lucas Henrique Backes e Simone Martins por participarem na elaboração e execução das atividades;
- aos professores Luisa Doering e Marcus Basso por participarem da banca examinadora e, como aluno, por serem meus exemplos de professores;
- a professora Lisete Bampi pela atenção durante meu estágio.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho está baseado nas experiências desenvolvidas nas disciplinas de Estágio em Matemática e foi realizado de acordo com meus interesses e questões que me deixavam instigado. Analisarei distintas atividades que envolvem raciocínios peculiares de Matemática, as quais requerem reflexões e construções de generalizações pelos alunos. Essas atividades foram desenvolvidas com alunos de uma turma de sexta série da Escola Estadual de Ensino Fundamental Olintho Pereira e, durante a maior parte do tempo, no Projeto Estudo Orientado.

Considero a linguagem como um conjunto de símbolos construídos socialmente e legitimados pelas práticas do cotidiano, a qual tem extrema importância para o aprendizado da Matemática e para o desenvolvimento do ser humano. Pretendo estudar as produções textuais destes estudantes buscando respostas para perguntas como: “como os alunos reagem a situações-desafio?”, “quais as características do professor que se propõe a elaborar essas atividades?”, “há limitações no processo de generalização?” e “possuímos distintas metodologias para a aplicação dessas atividades?”.

Segundo Devlin (2006), a generalização é o que possibilita a comunicação entre os sujeitos; portanto, podemos incluir ainda a linguagem do aluno e do professor, para com o mesmo, no processo de construção da generalização. Já Vygotsky (2000) vai além e trabalha com a linguagem através de uma abrangência maior; repleta de conceitos, sentidos e contextualização social.

Finalmente, indicarei que atividades com uma seqüência de sugestões e questionamentos, nas quais o aluno busca, a partir do uso natural da linguagem cotidiana, uma generalização, possibilitam desenvolver o pensamento matemático.

2. SOBRE GENERALIZAÇÕES

Durante a pesquisa bibliográfica, encontrei, na grande maioria dos textos, tópicos sobre generalizações, ou mesmo pensamento generalizante, juntamente com o Ensino de Álgebra. Entre eles destaco os autores que me inspiraram e deram sustentação para a construção das atividades e elaboração da escrita: Lins (1997), Schwantes (2003), Devlin (2006) e Neves (1995). E outros ainda que auxiliaram a responder minhas questões: Skovsmose (2000) e D'Antonio (2006). Além desses pesquisadores, encontrei esse assunto presente em inúmeros documentos que orientam a educação brasileira e mundial; por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais [1] (PCN) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Programme for International Students Assessment - PISA).

De modo geral, não há um consenso entre os autores sobre o que é generalização, porém veremos que há distinção entre os pensamentos "genéricos" e os "generalizados".

2.1 Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) pretende avaliar até que ponto os alunos próximos do término da educação básica adquiriram conhecimentos e habilidades essenciais para a participação efetiva na sociedade; ou seja, esta nova avaliação visa medir o desempenho dos alunos além do currículo escolar, enfocando competências necessárias à vida moderna. Pretende responder a questões como:

- Até que ponto os jovens adultos estão preparados para enfrentar os desafios do futuro?
- Eles são capazes de analisar, raciocinar e comunicar suas idéias efetivamente?
- Têm capacidade para continuar aprendendo pela vida toda?

O letramento em Matemática no PISA é avaliado em três dimensões:

> 1. O conteúdo de Matemática, definido primeiramente em termos de conceitos matemáticos mais amplos (como estimativa, mudança e crescimento, espaço e forma, raciocínio lógico, incerteza e dependências e

---

[1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental foram produzidos pela Secretaria de Ensino Fundamental do Ministério da Educação como referência para o ensino no Brasil.

> relações), e secundariamente em relação a ramos do currículo (como relações numéricas, álgebra e geometria).
>
> 2. O processo da Matemática, definido pelas competências matemáticas gerais. Essas incluem o uso da linguagem matemática, escolha de modelos e procedimentos e habilidades de resolução de problemas. No entanto, a idéia não é separar essas habilidades em diferentes itens de teste, já que se pressupõe que uma série de competências será necessária para desempenhar qualquer tarefa matemática. Essas competências são organizadas em três classes: a primeira consiste na realização de operações simples; a segunda exige o estabelecimento de conexões para resolver problemas; a terceira consiste de raciocínio matemático, **generalização e descobertas**, e exige que os alunos façam análises, identifiquem elementos matemáticos de uma dada situação e **proponham problemas**.
>
> 3. As situações nas quais a Matemática é usada, variando de contextos particulares. (INEP, 2008, grifo nosso).

O trecho acima foi retirado do sítio eletrônico do INEP citando as incumbências do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). Certamente, eu poderia ser questionado sobre a importância desses pensamentos generalizantes e das atividades com problemas que necessitam movimentos; ou, ainda, indagado sobre se não resolvi pensar sobre isso por mero interesse particular ou destacando aspectos que considero importantes. Como resposta diria que além dos autores já citados, encontramos nas orientações oficiais apontamentos que afirmam a necessidade da presença desses aspectos no ensino, como indicam as duas últimas competências do sistema de avaliação citadas acima.

2.2 Perspectivas em Álgebra no século XXI por Rômulo Lins e Joaquim Gimenez

Os autores propõem, no livro “Perspectiva em Aritmética e Álgebra para o século XXI” (1997), um olhar diferenciado ao ensino e à aprendizagem de Álgebra, e por conseqüência ao pensamento matemático generalizante. Visando não apenas pensar no conteúdo matemático, mas também compreender e transportar o ensino às transformações constantes e rápidas do mundo.

E concluem que o grande objetivo da educação algébrica, hoje, deve ser de encontrar um equilíbrio entre três frentes:

> i) O desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas

> habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar soluções;
>
> ii) O desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização;
>
> iii) O aprimoramento de atividades técnicas, isso é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 165).

Como expressões na língua portuguesa, as palavras “genérico” e “generalizado”, que nomeiam pensamentos, parecem representar os mesmos objetos; porém é fundamental estabelecer distinções, pois nas experiências aparecem representando momentos diferentes. Essas dessemelhanças são apresentadas por Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997):

> A situação generalizada emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares, ao passo que a situação genérica emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação de casos particulares.
> (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 114)

Isso não quer dizer que a situação genérica se constitua independentemente de qualquer caso particular e, sim, como apresentam os autores, que no *interior da atividade,* a atenção seja dirigida ao que é geral. Para ilustrar isso, Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997) utilizam-se de exemplos não-matemáticos:

> Quando olhamos para nuvens no céu, por exemplo, para tentar saber se vai ou não chover, e que tipo de chuva seria – tempestade ou chuva “calma” – não recorremos explicitamente a nossa experiência anterior com nuvens – embora essa seja em geral relevante. Essa experiência se transforma em “regras” praticamente (“na prática”) independentes dos casos anteriores, e nossa atenção é diretamente focada em comparar as nuvens de agora com as que já vimos antes, mas, sim com as ”regras”: Nuvens escuras = Grande probabilidade de chuva. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 115)

Portanto, ou autores querem dizer que, nesse caso, podemos ignorar as situações particulares; ou seja, não nos preocupamos com os dias em que as nuvens estavam até mais escuras do que hoje, mas não choveu. Nas considerações finais citarei outro exemplo para ilustrar essas diferenças.

2.3 Um estudo sobre o significado em Álgebra por Paulo Sérgio Neves

Paulo Neves (1995) propôs um trabalho elaborado com a intenção de discutir questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental. Para isso, dividiu o estudo em três partes:

- ensino de Álgebra nos livros didáticos;
- dificuldades dos alunos em atividades algébricas;
- aspectos curriculares e possibilidades no ensino de Álgebra.

Como conclusão, o autor acredita que o ensino de Álgebra vive um momento "apático" e a solução, para isso, seria o desenvolvimento de projetos que englobassem tópicos do currículo atual. Ou seja, os professores necessitariam elaborar distintas propostas com seus conteúdos presentes.

2.4 Pensamento Algébrico por Vilson Schwantes

O livro *Pensamento Algébrico: uma reflexão sobre seu desenvolvimento no ensino fundamental* consiste numa dissertação de Mestrado em Educação de Vilson Schwantes, fundamentada na pesquisa realizada entre os anos de 2001 e 2003, que se referencia em Vygotsky e nas idéias de Lins. Essa pesquisa, presente no livro, foi feita com jovens da sétima série do ensino fundamental, em que tal autor destaca o pensamento algébrico como enfoque. O pesquisador define seu trabalho dessa forma:

> O trabalho contempla ações e aspirações que abraço e busco compreender melhor para concretizar uma nova forma de perceber, no processo ensino-aprendizagem, a possibilidade do desenvolvimento de um pensamento de caráter generalizante. (SCHWANTES, 2003, p. 16)

O caráter generalizante é muito presente em todo decorrer do texto, muitas vezes na forma de questionamentos direcionados aos alunos. O autor propõe diversas atividades em que o aluno é convidado a identificar um padrão a partir dos termos iniciais de uma seqüência de figuras. E conclui que essas atividades possibilitam desenvolver o pensamento algébrico.

2.5 O Gene da Matemática por Keith Devlin

Se seguíssemos uma ordem cronológica de organização do trabalho, este capítulo seria certamente o primeiro, pois tem o nome da tese de Devlin, defendida em seu livro “O Gene da Matemática” (2006), que me motivou a desenvolver o assunto. Por “o gene da Matemática” o autor quer dizer uma facilidade inata para o pensamento matemático. E ainda, segundo Devlin, todos nós possuímos um gene da matemática, assim como o gene da linguagem; porém, nem todos nós realizamos esforços para que saibamos nos locomover no ambiente da Matemática.

Ainda sobre Devlin, ele propõe questões como: “Os matemáticos pensam diferente de outras pessoas?”. E desenvolve uma resposta afirmando que os matemáticos não pensam diferente, mas sim são pessoas que constroem seus conhecimentos. Para ilustrar, ele fala de um cego que necessita saber se mover em sua casa e desenvolve a aptidão e facilidade para os movimentos.

3. GENERALIZAÇÃO E LINGUAGEM

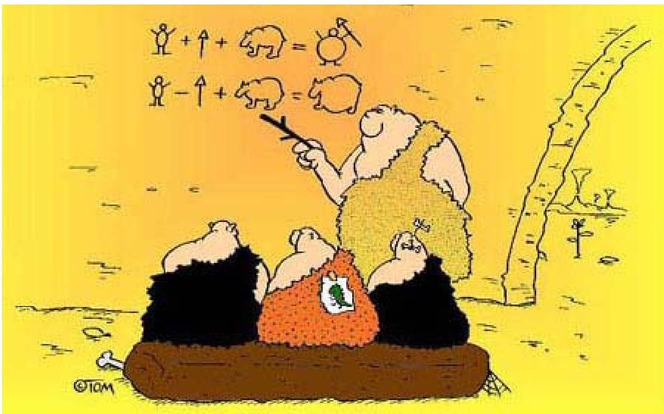


Figura 1 - Evolução

Neste trabalho, pressuponho que a generalização possibilita a comunicação (linguagem) entre os sujeitos, pois ao falar com alguém costumamos fazer referência a objetos particulares. Veremos que nosso interlocutor, mesmo não fazendo a mesma imagem que nós fazemos do objeto em questão, consegue fazer um entendimento, pois sua característica essencial se mantém preservada.

O que está ilustrado na figura acima é um momento fixo de uma aula fictícia onde, através de símbolos, o professor ensina a seus alunos a necessidade da utilização de armas na caça e onde aparece, ainda, a travessura dos alunos em colar desenhos nas costas dos outros. Porém, a linguagem não se constitui apenas em momentos fixos, como veremos a seguir.

Pensamos que a educação matemática está em permanente construção e interação com outros saberes (por exemplo, as questões de sobrevivência na antiguidade). Através da educação é que se manifesta a questão da linguagem, pois é dessa forma que o conhecimento é apresentado, estabelecendo-se uma relação intensa entre pensamento e linguagem.

> O principal fato com que deparamos na análise genética do pensamento e da linguagem é o de que a relação entre esses processos não é uma grandeza constante, imutável, ao longo de todo o desenvolvimento, mas uma grandeza variável. A relação entre pensamento e linguagem modifica-se no processo de desenvolvimento tanto no sentido quantitativo quanto qualitativo. Noutros termos, o desenvolvimento da linguagem e do pensamento realiza-se de forma não paralela e desigual. As curvas desse desenvolvimento convergem e divergem constantemente, cruzam-se,

> nivelam-se em determinados períodos e seguem paralelamente, chegam a confluir em algumas de suas partes para depois tornar a bifurcar-se. (VYGOTSKY, 2000, p. 111)

Ao estudarmos "A Construção do Pensamento e da Linguagem" de Vygotsky (2000), nos deparamos com explicações de muitos eventos por meio de processos da evolução humana. Vygotsky acreditava muito nas relações sociais e nas suas conseqüências para a educação e, também, na evolução de uma forma humana (evolução da espécie) e individual do sujeito ao longo de seu crescimento, chamando isso de amadurecimento da criança. Ao explicar os motivos desse caminho trilhado no campo da genética, escreve o parágrafo acima na introdução do capítulo *As raízes genéticas do pensamento e da linguagem* (VYGOTSKY, 2000, p. 111) com base em experiências de inúmeros pesquisadores.

3.1 Relação Discursiva

Ao entrarmos no ambiente da linguagem estamos diante de um caso particular de relação entre indivíduos, relação essa que Sandra d'Antonio (2006) estuda no ensino de Matemática, chamando de uma relação discursiva do ensino. Como ponto de partida, a autora adota a definição de discurso como "um conjunto sistemático e organizado, gerado e mantido por meio da linguagem e dos processos verbais, traduzindo os significados e valores de uma instituição" (ALMIRO apud D'ANTONIO, 2006, p. 11).

Ressalto que fica bem clara no texto de Sandra d'Antonio (2006) a distinção de linguagem para com o discurso, pois linguagem é vista como um processo geral (englobando aspectos cognitivos, expressões faciais, questões e outros) e discurso como um modo de expressar verbalmente a linguagem. Ou seja, estamos nesse capítulo observando apontamentos de partes do processo da linguagem.

Pensando na Educação Matemática, Sandra d'Antonio (2006) exemplifica que muitas são as variáveis que interferem na interação discursiva entre professor e aluno, e conclui que entre elas destacam-se:

- o contrato didático estabelecido, que tanto pode facilitar quanto dificultar a construção dos conhecimentos;
- a forma de diálogo entre o docente e seu aluno, que tanto pode ser aberta, permitindo uma real interação e troca de idéias, como ser restrita a perguntas e respostas sem significado e significância;
- a entonação de voz e a expressão facial que muitas vezes são usadas como artifício para que o aluno entenda a mensagem do professor;
- a repetição de perguntas pelo professor que provoca, implicitamente, outra resposta, por pressupor uma resposta errada;
- o uso de palavras desconhecidas e/ou possuidoras de mais de um significado, que geram, muitas vezes, incompreensões ou possibilitam uma interpretação por parte do aluno diferente daquela que o professor gostaria de obter;
- a não compreensão do conteúdo pelo próprio professor, sua insegurança na procura de palavras e termos, que obscurecem o sentido do que ele pretendia expressar ou, por outro lado, que o obriga a buscar termos, os quais ao invés de esclarecer, complicam ainda mais a comunicação.

Acredito que Sandra d'Antonio (2006), na citação acima, consegue apontar em seis itens muitos aspectos da interação discursiva entre professor e aluno, caracterizando e apontando quase que a totalidade das ocorrências. Segundo a autora, a maior parte dos alunos vão à escola recheados de "sentidos" para as expressões matemáticas que circundam sua linguagem cotidiana; por isso, muitas vezes, apresentam dificuldades de relacionar seus conceitos com os vistos em aula (isso será discutido no capítulo seguinte como conceito científico). O problema fundamental está no fato de que o aluno é colocado diante da Matemática e, além de ter que lidar com os problemas que envolvem o ato de comunicação, também tem que se defrontar com uma outra linguagem formal. Nesse ponto, posso citar um exemplo particular de meu Estágio III, acontecido ao aplicar uma lista de exercícios para revisão do primeiro teste. Como lecionava para uma turma de EJA, meus alunos tinham uma idade avançada, e eu com minha inexperiência com o ensino de adultos, elaborei uma lista como recomendado pela professora da escola. No momento da atividade, muitos alunos faziam a tarefa enquanto um senhor na última classe só ficava olhando para a lista. Então, dirigi-me até ele e questionei-o se estava muito complicada a lista, e o senhor me respondeu:

"*Tu vê só... não entendo essas perguntas*!". Naquele momento, olhei para a lista e coloquei-me na posição do aluno e a primeira questão era: "Quantas retas passam por dois pontos diferentes?" Finalmente, percebi que realmente aquilo, escrito daquela maneira, não poderia jamais fazer sentido para ele. Então, citei o exemplo de quando precisamos cortar um pedaço de uma tábua de madeira; em que, determinados dois pontos podemos fazer o corte "retinho". E o questionei através da questão: "Imagina se tivessem duas retas passando por esses dois pontos, o que iria acontecer?". Prontamente, o aluno me respondeu: "*Ahhh... não ia dar pra cortar, dois pontos já está muito bom*".

3.2 Linguagem e pensamento por Vygotsky

Quando pesquisamos generalizações através de Vygotsky, encontramos uma obra sua e outras de especialistas (A.N. Leontiev, A. R. Luria e M. K. Oliveira) renomados em apresentar e difundir as idéias do autor. De uma forma geral, os temas tratados são Linguagem, Pensamento e Conceito; sendo esses então os processos a serem tratados neste capítulo. Como já comentei, a relação entre os sujeitos com o objetivo de descrever a realidade se faz com uso da linguagem. Vygotsky (2005) considera a linguagem como constituidora das funções mentais superiores, sendo que o conhecimento é adquirido nas relações entre as pessoas, através da linguagem e da interação social. Sendo assim, Vygotsky acredita que é no significado da palavra que o sujeito encontra as respostas referentes às questões sobre pensamento e fala. O que abre um novo rumo ao pensamento, resultando em um estudo sobre a Linguagem segundo Vygotsky.

No livro "A Construção do Pensamento e da Linguagem", Vygotsky (2000) apresenta uma argumentação para demonstrar que a linguagem é um processo pessoal ao mesmo tempo em que é um processo social. Desse modo, é através dela que a criança supera as limitações existentes em seu ambiente. Assim como nos textos de Vygotsky, na psicologia existem vertentes distintas que explicam a apropriação da linguagem; sendo que umas defendem que ela é inata, já é presente nos bebês, e outras garantem que ela ocorre na interação com o ambiente e pessoas, como pensa Vygotsky.

Para o autor, pensamento e linguagem têm origens diferentes. Inicialmente - ao princípio da vida humana - o pensamento não é verbal e a fala não é intelectual. Dessa maneira, cita como exemplo que o choro da criança, nos primeiros meses de vida, corresponde a um estágio do desenvolvimento da fala que não tem relação com o pensamento, sendo considerado como manifestação de comportamento emocional. Apesar dessa origem diferente entre pensamento e linguagem, o pesquisador se expressa afirmando que considerar esses elementos como isolados é a principal falha de inúmeros autores:

> A ausência de um vínculo primário entre o pensamento e a palavra não significa, de maneira nenhuma, que esse vínculo só possa surgir como ligação externa entre dois tipos essenciais heterogêneos de atividade da nossa consciência. Ao contrário, como procuramos mostrar desde o início de nosso trabalho, a **falha metodológica** principal da imensa maioria de investigações do pensamento e da linguagem – falha essa que determinou a esterilidade deste trabalho – está justamente naquela concepção das relações entre pensamento e linguagem que **considera esses dois processos como dois elementos autônomos**, independentes e isolados, cuja unificação externa faz surgir o pensamento verbalizado com todas as suas propriedades inerentes. (VYGOTSKY, 2000, p. 396, grifo nosso)

Finalmente**,** Vygotsky (2005) considera que a descoberta mais importante da vida da criança acontece por volta dos dois anos de idade, quando as “curvas da evolução do pensamento e da fala” se cruzam e unem-se para formar uma nova formas de comportamento, gerando assim o *pensamento verbal.* Após, conclui que é nesse período que a criança percebe que cada coisa tem um nome (um signo), um significado; ou seja, só há significado após o pensamento verbal (linguagem). Dessa forma, finaliza: “É no significado da palavra que o pensamento e a fala se unem em pensamento verbal. É no significado, então, que podemos encontrar as respostas de nossas questões sobre a relação entre o pensamento e fala” (VYGOTSKY, 2005, p. 5).

3.3. O processo de formação de conceitos

Marta Kohl Oliveira (1993), no texto “Vygotsky e o Processo de Formação de Conceitos”, apresenta que a linguagem humana tem duas funções básicas para Vygotsky:

- intercâmbio social;

- pensamento generalizante.

Isto é, além de servir para a comunicação entre indivíduos, a linguagem generaliza a experiência. Segundo Marta Oliveira, ao utilizar a linguagem para nomear determinado objeto estamos classificando esse objeto numa categoria, numa classe de objetos que têm em comum certos atributos. A utilização da linguagem **favorece**, então, processos de generalização.

Para explicar esses objetos nomeados por Vygotsky, Marta Oliveira cita que o pesquisador propôs um percurso genético do desenvolvimento do pensamento conceitual dividido em três grandes estágios, subdivididos em várias fases. No primeiro estágio a criança forma conjuntos sincréticos, agrupando objetos com base em nexos vagos, subjetivos e baseados em fatores perceptuais, como a proximidade espacial, por exemplo. Esses nexos são instáveis e não necessariamente relacionados aos atributos relevantes dos objetos. O segundo estágio é chamado por Vygotsky de "pensamento por complexos", sendo um complexo um agrupamento concreto de objetos unidos por ligações factuais que exige a combinação de objetos com base em sua similaridade. Já o terceiro estágio levará à formação dos conceitos propriamente ditos, a criança agrupa objetos com base num único atributo, sendo capaz de abstrair características isoladas da totalidade da experiência concreta. Por exemplo, o relógio pode ser pensado com uma ferramenta para saber a hora e não mais pensado através das características físicas de todos os relógios vistos pela criança até então.

Portanto, na formação dos conceitos, a criança interage com os atributos presentes nos elementos do mundo real; sendo essa interação direcionada pelas palavras culturalmente organizadas. A linguagem, então, passa a funcionar como instrumento de organização do conhecimento.

A formação de conceitos, até aqui discutida, refere-se aos conceitos "cotidianos" ou "espontâneos"; isto é, aos conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática da criança, de suas interações sociais imediatas. Marta Kohl Oliveira (1993) apresenta que Vygotsky distingue esse tipo de conceitos dos chamados "conceitos científicos"; que são aqueles adquiridos por meio do ensino como parte de um sistema organizado de conhecimentos.

Veremos que esses conceitos científicos, embora transmitidos em situações formais de ensino-aprendizagem, também sofrem um processo de desenvolvimento:

> A criança adquire consciência dos seus conceitos espontâneos relativamente tarde: a capacidade de defini-los por meio de palavras, de operar com eles à vontade, aparece muito tempo depois de ter adquirido os conceitos. Ela possui o conceito (isto é, conhece o objeto ao qual o conceito se refere), mas não está consciente do seu próprio ato de pensamento. O desenvolvimento de um conceito científico, por outro lado, geralmente **começa com sua definição verbal** e com sua **aplicação em operações não-espontâneas** ao se operar com o próprio conceito, cuja existência na mente da criança tem início a um nível que só posteriormente será atingido pelos conceitos espontâneos (VYGOTSKY apud OLIVEIRA 1993, p. 7, grifos nossos).

Portanto, o conceito científico, apesar de ocorrer de maneira distinta, é também construído. Ou seja, conceito e conceito científico são comparáveis quanto à formação por desenvolvimento, porém distinguem-se pela sua construção cognitiva; como na citação abaixo:

> Um conceito cotidiano da criança, como por exemplo 'irmão', é algo impregnado de experiência. No entanto, quando lhe pedimos para resolver um problema abstrato sobre o irmão de um irmão, como nos experimentos de Piaget, ela fica confusa. Por outro lado, embora consiga responder corretamente a questões sobre 'escravidão', 'exploração' ou 'guerra civil', esses conceitos são esquemáticos e carecem da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal. Vão sendo gradualmente expandidos no decorrer das leituras e dos trabalhos escolares posteriores. Poder-se-ia dizer que *o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente, enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente,* para um nível mais elementar e concreto. Isso decorre das diferentes formas pelas quais os dois tipos de conceitos surgem. [...]
>
> Embora os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvam em direções opostas, os dois processos estão intimamente relacionados. É

> preciso que o desenvolvimento de um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato. Por exemplo, os conceitos históricos só podem começar a se desenvolver quando o conceito cotidiano que a criança tem do passado estiver suficientemente diferenciado - quando a sua própria vida e a vida dos que a cercam puder adaptar-se à generalização elementar 'no passado e agora'; os seus conceitos geográficos e sociológicos devem se desenvolver a partir do esquema simples 'aqui e em outro lugar'. Ao forçar a sua lenta trajetória para cima, um conceito cotidiano abre o caminho para um conceito científico e o seu desenvolvimento descendente. (VYGOTSKY apud OLIVEIRA, 1993, p. 7)

Essa longa citação de Vygotsky (1989), que sintetiza claramente sua concepção sobre o desenvolvimento dos conceitos científicos, apresenta as idéias que fundamentam sua posição de que os conceitos científicos estão organizados em sistemas consistentes de inter-relações. Finalmente, Vygotsky (1989) explica que conceito científico e espontâneo se desenvolvem em direções contrárias, mas ambos processos estão relacionados; ou seja, é necessário que um conceito espontâneo tenha adquirido um certo nível para que a criança consiga construir um conceito científico correspondente.

4. O DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA

Através dos autores citados e parâmetros percebe-se, sem dúvida, que há um intenso interesse pela desenvoltura algébrica e, por conseguinte, generalizante. Esse interesse certamente deve voltar-se para o professor e suas práticas, pois o professor, consciente do seu papel no processo de aprendizagem, precisará criar ambientes orientadores. Está intrínseco em nossa cultura que ensinar é expressar-se com uma fala guiadora, e então o ensino é atrelado à linguagem e seus complementos; por exemplo, ler, falar, questionar, ouvir e responder. Portanto, com esta investigação pretendo analisar em que medida a interação professor-aluno, através da linguagem, contribui no processo de generalizações.

4.1. Problemas

> O que para alguns é um problema para outros é exercício e para alguns outros uma distração. (ditado popular)

Entendo que esta proposta vai ao encontro das questões abordadas por Deleuze (1988) no texto "Q de Questão", ou seja, sair apenas do nível das perguntas, trabalhar no nível das questões, pois ao tentarmos sair do nível dos exercícios (como os citados pelo autor) e avançarmos em direção aos problemas matemáticos, entenda-se aí por suas exigências cognitivas, estamos dando um grande passo em direção à proposta de Deleuze. Isto porque a resolução de um exercício, como relata o artigo, pode ser comparada a uma pergunta do tipo "que horas são?". Pois esta resolução serve apenas para treinar algum algoritmo, não "acrescenta" nada mais, assim como a pergunta.

Já os problemas matemáticos que aqui tratarei podem ser comparados com as questões (no sentido que Deleuze coloca), uma vez que ambos nos exigem uma reflexão, sua resposta não é imediata, exige que nos coloquemos em movimento. Portanto, estarei mais preocupado em trabalhar com problemas-questão (no sentido de Deleuze) do que pensando em oportunizar a compreensão de certos conceitos matemáticos. Uma vez que estarei trabalhando com crianças e observando aspectos cognitivos presentes na forma de linguagem escrita.

4.2 Experiência que embasa a investigação

A obtenção dos dados relativos à presente investigação concentra-se em experiências criadas durante o Projeto Estudo Orientado, desenvolvidas com alunos da sexta série da Escola Estadual de Ensino Fundamental Olintho Pereira. Alunos esses que, no ano de 2008, freqüentaram a turma 61, considerada de ótimo andamento escolar e composta de alunos condizentes com a idade escolar esperada para essa série. Nesse contexto, esse capítulo, introdutório às atividades, ocupar-se-á de como foram coletados os dados na pesquisa, tendo como pano de fundo as questões propostas sobre generalizações para a investigação.

Para a realização do trabalho, coletamos todos os materiais elaborados pelos alunos e algumas de suas falas, anotadas ao final de cada encontro; portanto, essas anotações não são transcrições literais das falas. Como se tratavam de assuntos não abordados na escola até então, fomos analisando formas de organização do pensamento [2] (veremos isso nas análises) ao longo das atividades. E assim, diante de muitas dificuldades nossas em preparar atividades que visassem movimentos para a generalização e refletir sobre as escritas dos alunos, elaboramos pequenas questões (ainda no sentido de Deleuze), para alguns alunos, com vistas a auxiliar na reflexão sobre uma das atividades anteriormente realizadas.

Skovsmose discute, em um conhecido artigo (2000, p. 10), as possibilidades de um professor realizar movimentos nos distintos *ambientes de aprendizagem* [3]. Assim, procurei efetuar minhas atividades em momentos distintos de uma determinada turma; ora como questão-desafio em prova, ora como atividade desenvolvida em sala de aula e, na maior parte do tempo, durante o Projeto. Então, sempre que for apresentada uma experiência, farei

---

[2] Refiro-me ao encadeamento de raciocínios.

referência ao ambiente; e, mais que isso, citarei os formatos para a elaboração do *cenário para a investigação* [3]. Como conseqüência, procurarei estabelecer, no decorrer da análise, elos entre a experiência e as informações obtidas no referencial teórico, embasando-me nas contribuições de alguns pesquisadores.

4.3 Metodologia e questões de estudo

Como já foi referido, pretendo observar as produções textuais dos estudantes buscando respostas para perguntas como:

- Quais as características do professor que se propõe a elaborar essas atividades?
- Como os alunos reagem com situações-desafio?
- Há limitações no processo de generalização?
- Há distintas metodologias à aplicação dessas atividades?

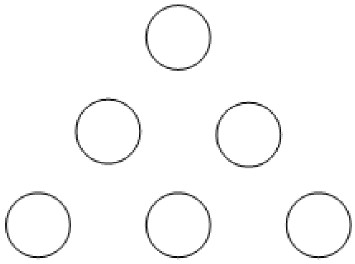
Como o estudo visa analisar uma relação entre professor-aluno em uma determinada prática, optamos em adotar uma investigação qualitativa através de um estudo de caso. Tal escolha é coerente no contexto da investigação, pois o estudo foi realizado através de casos particulares. Isso é, estávamos nos preparando para compreender determinadas expressões específicas - de certos alunos - observadas na prática.

[3] Skovsmose (2000) classifica-os como as formas que o professor possui de lidar com o conhecimento.
[3] Para Skovsmose (2000), é um convite ao aluno a se envolver no processo, sendo esse suporte ao trabalho de investigação.

4.4 Atividade 1 (Triângulos Mágicos)

Um Triângulo é Mágico quando a soma dos números de cada lado é sempre a mesma quando colocamos números nos balões.

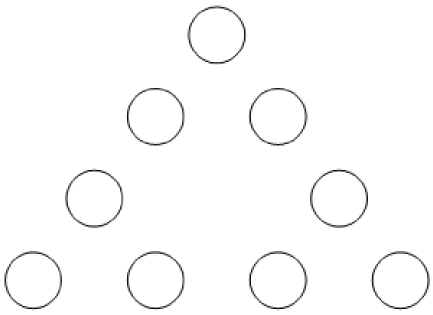
1.1.<u>Triângulo de Medida 3</u>: Tente descobrir uma maneira de construir um Triângulo Mágico com os números: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.



Qual a soma do lado do triângulo que você encontrou? Essa constante do Triangulo é chamada de Constante Mágica. Crie um outro triângulo mágico utilizando o acima! Qual a nova constante mágica?

1.2. <u>Triângulo de Medida 4 e uma Propriedade:</u>

Tente descobrir uma maneira de construir um Triângulo Mágico com os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 de forma que a Constante Mágica seja 20.



Calcule a soma dos números das pontas!!

Sabemos que a soma dos números de 1 até 9 é 45, ou seja 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 e que a soma de todos os lados é 20 + 20 + 20 = 60. Isso acontece porque somamos cada uma das pontas DUAS vezes. Assim:

SOMA DAS PONTAS + SOMA DAS PONTAS + RESTO = 60

Como a SOMA DAS PONTAS + RESTO = 45, pois é a soma de 1 até 9, temos

SOMA DAS PONTAS + 45 = 60

Então, a soma dos números das pontas do nosso Triângulo Mágico é sempre 15?

<u>Desafio:</u>

1. Será que podemos ter um lado inteiro só com números pares?
2. Será que podemos ter um lado inteiro só com números ímpares?

Descrição

Essa atividade, na folha acima, ocorreu com sete alunos da sexta série do ensino fundamental e estive acompanhado de mais dois outros professores estagiários. Então vale relembrar que é um caso particular de alunos que estavam ali dispostos a realizar a tarefa; sendo que não haveria uma cobrança de nota. Como uma aluna citou: “Na aula eu sempre converso! Não é professor? Mas aqui no projeto é diferente”. E, realmente, ela era uma das mais dedicadas nas atividades.

Como se tratou da terceira atividade elaborada, já possuíamos maior destreza do que na elaboração da proposta inicial. Pensamos em trabalhar com os Triângulos Mágicos, pois a atividade remetia à aquisição por parte do aluno de uma definição e, após, um caráter construtivo para testar resultados, seguido do argumentativo para validar as soluções. E, além disso, os alunos estariam diante de resultados generalizantes e inesperados em um Triângulo Mágico.

Dos sete alunos presentes no Projeto, selecionamos dois para analisar detalhadamente suas escritas. Seus nomes fictícios serão: Carolina e Luiz. Suas escolhas como alunos a serem observados se deu por dois motivos: primeiro, porque foram alunos muito envolvidos na atividade e, em segundo lugar, porque apresentaram escritas e falas interessantes à situação (investigação da escrita). Os demais alunos aparecerão no decorrer do relato da experiência.

Inicialmente, os alunos foram apresentados aos triângulos mágicos e, por já terem trabalhado com os quadrados mágicos, a apropriação da definição ocorreu rapidamente. Após, distribuímos uma folha a cada aluno com a atividade acima e efetuamos uma breve explicação do que seria um Triângulo Mágico. Como se trata de uma atividade que exige muita escrita, criamos uma folha com inúmeros triângulos para os alunos efetuarem tentativas (Apêndice 1). E, como dispúnhamos de uma hora, efetuamos a tarefa em dois blocos de meia hora cada.

4.4.1. Análise da Experiência

> [...] o sentido não é capaz de permanecer quieto, fervilha de sentidos segundos, terceiros e quartos, de direções irradiantes que se vão dividindo e subdividindo em ramos e ramilhos, até se perderem de vista, o sentido de cada palavra parece-se com uma estrela quando se põe a projetar marés vivas pelo espaço afora, ventos cósmicos, perturbações magnéticas, aflições. (JOSÉ SARAMAGO)

Organizei o relato da atividade através de *momentos* [4], estabelecidos após efetuarmos a atividade, que estarão presentes ao longo deste capítulo. Pensar a atividade desse modo é só uma forma de organização de escrita, não significando que durante a atividade me apropriei dessa seqüência de passos. E ainda neste capítulo irão aparecer perguntas feitas aos alunos, suas respostas e também falhas na elaboração da atividade.

Depois que os alunos se apropriaram da definição do Triângulo Mágico, foram solicitados a construir, através de tentativas aleatórias, um Triângulo Mágico com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, em seguida dizendo o valor da constante mágica (constante que encontramos ao determinar a soma de algum lado). Passado algum tempo para que os alunos conseguissem rabiscar em suas próprias folhas as tentativas e encontrassem um exemplo, pedimos para que cada um dos sete alunos dissesse a sua constante mágica. Nesse momento inicial, percebe-se a importância da *manipulação do problema* pelo aluno; ou seja, ele está orientando sua própria aprendizagem. Fato presente nas suas folhas de escrita quase que totalmente destroçadas pelas borrachas. Ainda, para facilitar suas construções, sugerimos que em um canto de suas folhas os alunos escrevessem os números que iriam utilizar para o triângulo e fossem riscando os números já utilizados.

O momento seguinte foi para questioná-los sobre a possibilidade de construir distintos triângulos mágicos, através da questão: "Será que é possível construir outro(s) triângulo(s) mágico(s)? Uma vez que colegas acharam constantes distintas". Nesse ponto, a aluna Carolina apresentou sua resposta através de um triângulo igual ao seu primeiro, porém apenas com os

---

[4] Uma organização subjetiva do tempo em intervalos.

lados permutados (figura abaixo).

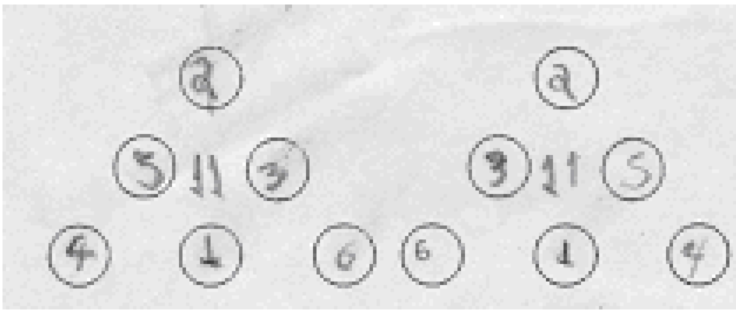


Figura 2 – Carolina 1

Segundo ela, apenas repetiu os números da ponta do triângulo e testou os valores que faltavam para completar a figura. Podemos notar então que certamente para a aluna não ficou clara a idéia de triângulos distintos; logo, acredito que na proposta escrita e em meu discurso deveríamos ter comentado que as constantes precisariam ser diferentes, e não apenas a forma de escrever a figura. No final desse momento, instigamos os alunos a repetir os passos efetuados até então e encontrar inúmeras formas possíveis de criar os triângulos, por tentativas e construções. Para então poderem comparar seus resultados com os dos demais colegas, pois no final disso cada aluno teria cerca de quatro triângulos mágicos com constantes distintas. Nesse momento de procura, a aluna Carolina me solicitou: “Ah, professor, me dá só uma dica: só me diz os números que coloco nas pontas do triângulo”. Através dessa pergunta, percebemos que a aluna se apropriou da idéia de construção dos triângulos, pois uma vez escolhidos os números das pontas certos, o restante da construção é só uma questão de ordenamento adequado dos outros três números.

Na figura abaixo, **reconstruímos** os passos realizados pela aluna para encontrar o triângulo mágico de constante 9:

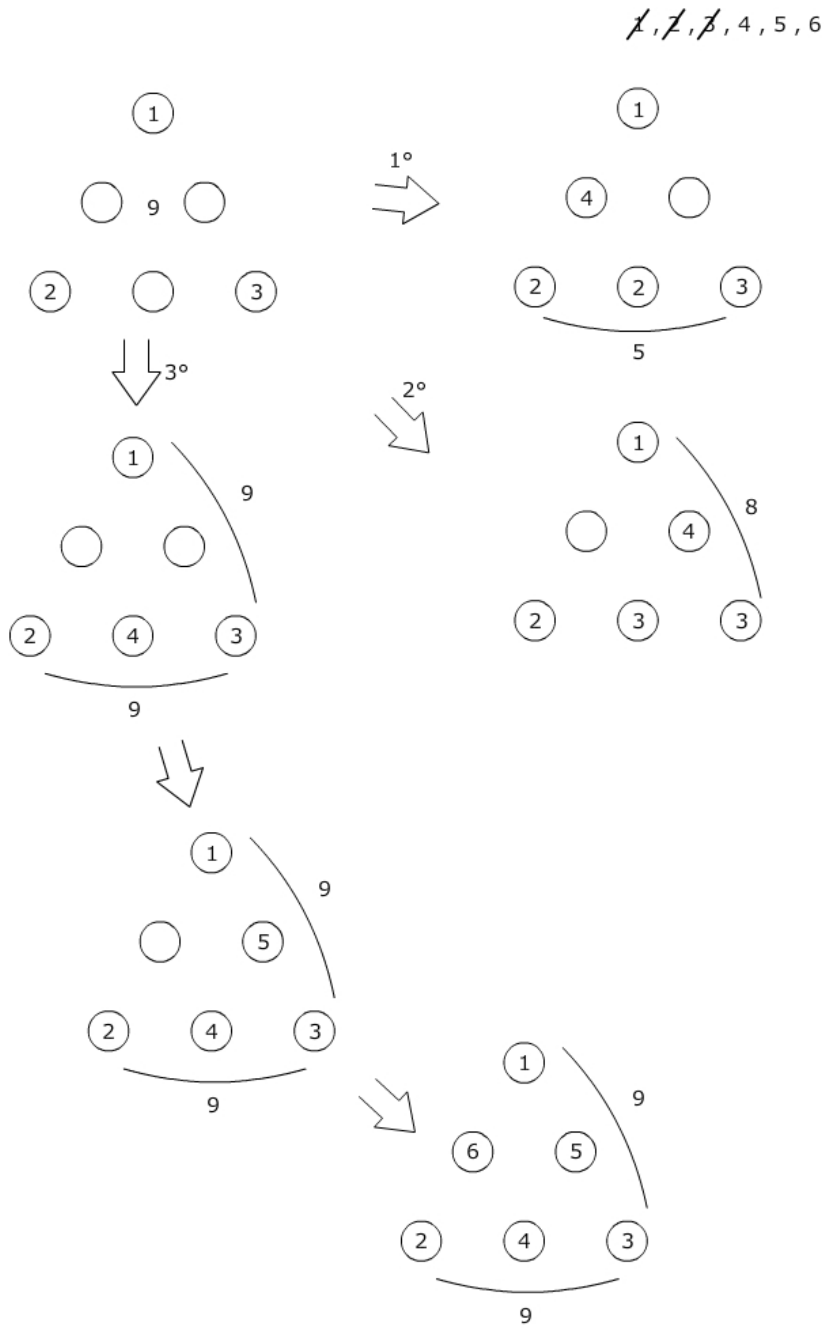


Figura 3 – Carolina 2

- Primeiramente, começou com os números 1, 2 e 3 nas pontas;
- Após, riscou os números já utilizados (1, 2 e 3); sabendo que agora só poderia utilizar os restantes (4, 5 e 6);
- Segundo ela, o número 4 deveria estar em alguma "casinha"; gerando três possíveis

casos:

1.º caso: O número 4 entre os números 1 e 2: Se isso acontecer, a soma desse lado tem que ser 7, então entre os números 2 e 3 deve aparecer o número 2, mas o número dois não pode ser usado novamente.

2.º caso: O número 4 entre os números 1 e 3: Se isso acontecer, a soma desse lado tem que ser 8, então entre os números 2 e 3 deve aparecer o número 3, mas o número 3 não pode ser usado novamente.

3.º caso: O número 4 entre os números 2 e 3: Se isso acontecer, a soma desse lado tem que ser 9, então entre os números 1 e 3 deve aparecer o número 5 e entre os números 1 e 2 deve aparecer o número 6; gerando assim o triângulo mágico de constante 9.

Nossa próxima tarefa foi citar no quadro todas as constantes aparecidas com a investigação dos alunos; essas foram 9, 10 e 11. Com a seguinte questão: "Algum aluno conseguiu construir um triângulo de constante 8?, Vamos tentar encontrá-lo". Entre os murmúrios dos alunos se escutava: "Com o 8 é difícil, já que ninguém achou". Após algumas tentativas, utilizamos a idéia da aluna Carolina de olhar para os números das pontas do triângulo, como no problema: será que o número 6 pode ficar em alguma ponta para construir o triângulo mágico de constante 8? Imediatamente, um dos alunos respondeu: "É claro que não, se o 6 [es]tiver não dá para somar 8 duas vezes". Perguntamos aí então: "Como assim somar o 8 duas vezes?". Resposta do aluno: "É lógico, 6 + 1 = 7 e 6 + 2 = 8 e 6 + 3 já é 9, e ainda falta somar mais um número, pois tem três casinhas pra preencher". Percebe-se aí que através de uma questão simples (saber se um número dado qualquer tem chance de aparecer em uma determinada posição) houve um encadeamento de raciocínios que garantiram ao aluno a negação da afirmação; e, ainda, nos motivou a questioná-los quais números então teriam chance de aparecer nas pontas da figura. Passado mais um tempo de cerca de 5 minutos para os alunos voltarem ao problema de construir o triângulo de constante 8, agora de uma forma orientada, a aluna Carolina propôs que os números menores, isso é 1, 2, 3, deveriam estar nas pontas, mas que ela já tinha colocado eles nas pontas e tinha obtido um triângulo de constante 9 (como na figura abaixo).

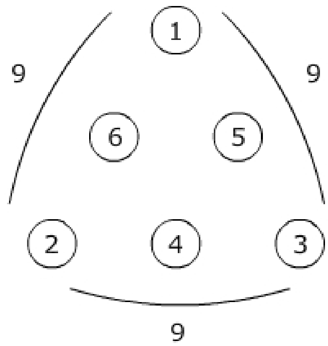


Figura 4 – Carolina 3

Sandra d'Antonio (2006) discute que na escola a criança é, muitas vezes, obrigada a abrir mão de sua própria maneira de pensar para seguir algoritmos prontos, sem significado, que fazem com que negue as próprias idéias. Considerando a última colocação da aluna, pode-se obter muitos resultados, mas ainda precisamos de uma reconstrução do que foi pensado pela Carolina, para então obtermos as conclusões sobre a possibilidade da construção do triângulo de constante 8. Isso é, a aluna apresentou inúmeras idéias, mas foi necessária uma intervenção para se encontrar um resultado geral. Nesse momento, me posiciono em uma direção distinta do pensamento de Schwantes (2003) quando conclui em sua dissertação que as generalizações são obtidas diretamente através de casos particulares. Pois, certamente, nossas últimas discussões nessa atividade vão além de uma busca por tentativas ou da conclusão a partir de casos particulares, necessitando determinados questionamentos entre aluno e professor. Mais que isso, acredito que essa atividade só foi realmente construída através da experiência com os alunos, pois anteriormente tínhamos apenas passos (ou melhor, questões iniciais) para provocar a reflexão dos alunos. E, com o decorrer da atividade, foram surgindo esses apontamentos específicos dos alunos envolvidos no Projeto Estudo Orientado.

Voltando ao momento da atividade em que o triângulo mágico de constante 8 estava sendo "construído": observamos que o aluno Luiz, após ouvir os apontamentos da aluna Carolina, apagou suas tentativas de construir o triângulo e, apontando para a figura de constante 8, escreveu: "Não dá". Observe que realmente não é possível construir tal triângulo mágico, pois, como apresentou a aluna no começo da atividade, para os triângulos "de medida 3", uma vez escolhidos os números que ficam nas pontas, os números restantes ficam determinados pela constante; ou seja, a conjectura inicial da aluna foi sobre a unicidade dessas figuras, que de fato é uma propriedade dos triângulos mágicos "de medida 3". E, quando colocamos os números 1, 2 e 3 nas pontas, encontramos o triângulo de constante 9. Portanto, de fato, através de argumentos distintos, podemos nos convencer da impossibilidade do objeto.

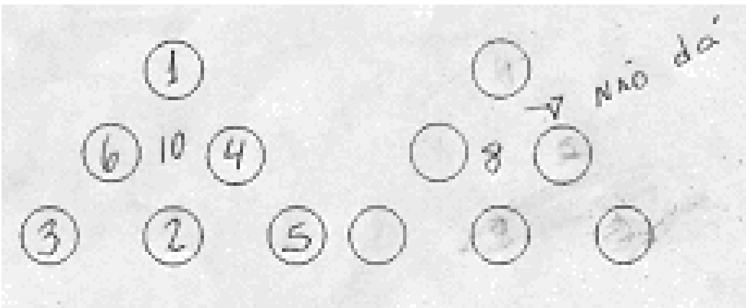


Figura 5 – Luiz 1

E, ainda, voltando aos comentários da Carolina para dispor os números menores nas pontas da figura, observamos que esse resultado foi conseqüência da questão sobre a possibilidade do número 6 estar em uma ponta. Ou seja, ela conseguiu obter uma conclusão por exaustão de um resultado a partir de casos particulares explorados.

Através de um *discurso* [5] similar ao utilizado até então, abordamos a questão contrária à de encontrar o menor número possível para as constantes dos triângulos mágicos; ou seja, com as investigações iniciais os alunos encontraram as constantes 9, 10 e 11 e através de uma questão houve um convencimento de que o mínimo possível de fato era o número 9, porém nosso próximo momento foi criado para ampliar esse resultado e obter a menor cota superior para as constantes. Para isso, não utilizamos mais a questão sobre a possibilidade de formar um triângulo com uma determinada constante para a partir daí tentar concluir pela impossibilidade, mas os colocamos em movimento com a seguinte questão: “Qual é a maior de todas as constantes mágicas que podemos obter para o triângulo mágico?”. Com essa questão como plano de fundo, a aluna Carolina novamente me chamou até sua classe e respondeu: “Olha, professor, eu acho agora que temos que colar os maiores números nas pontas, aí a soma vai ser a maior, mas tentei e não consigo formar o triângulo com os números 4, 5 e 6 nas pontas”. Nesse passo, percebemos que a aluna está utilizando-se do que já foi pensado no começo da atividade (pensar nas somas mínimas), para então tentar concluir a questão. Como resposta à aluna, comentei que ela mesma já citara que a iniciação da formação da figura poderia ser realizada através das extremidades e, após, uma organização dos números que restam. Então ela poderia colocar esses números que restam no lado do triângulo e analisar se um dado número pode estar em uma determinada posição. Por exemplo, o 3 pode ficar entre os números 5 e 6? Passado um pequeno tempo, a aluna, através dos encadeamentos de raciocínios descritos acima, concluiu que de fato ela tinha achado um triângulo diferente de todos os outros até então, com constante mágica 12 e, ainda, que esse era o de maior constante mágica. Percebe-se de fato que essa é a maior constante mágica possível para os triângulos mágicos “de medida 3”, uma vez que é a única constante que pode ser obtida colocando-se os números 4, 5 e 6 nas pontas.

[5] Como Sandra d’Antonio (2006) desenvolve em sua dissertação, o discurso é um conjunto sistemático e organizado, gerado e mantido por meio da linguagem e dos processos verbais.

A atividade do primeiro bloco necessitou mais tempo que o esperado, resultando em uma maior dedicação ao primeiro bloco do que ao segundo. No segundo bloco utilizamos triângulos mágicos com quatro “casinhas” em cada lado do triângulo, com o objetivo inicial de descobrir uma maneira de construir um Triângulo Mágico com os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 de forma que a Constante Mágica fosse 20. E, em seguida, estabelecer uma propriedade particular desses triângulos de constante 20 com esses dígitos. Para desenvolver esse momento final da atividade, utilizei idéias de Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997), em que, em algumas atividades sobre generalização, usaram seqüências de raciocínios para apresentar o problema aos alunos. Sendo assim, fizemos algo similar, porém com o enfoque do nosso trabalho; isto é, incluímos o quadro abaixo no material dos alunos. Ao preparar a atividade, acreditei que o quadro auxiliaria os alunos a, após encontrar um triângulo de constante 20, concluir que a soma das “pontas” do triângulo seria a mesma para todos os triângulos dos alunos, apesar de distintos alunos terem encontrado diferentes formatos para a figura solicitada.

A soma dos números de 1 até 9 é 45, ou seja 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 e;
Soma de todos os lados é 20 + 20 + 20 = 60.
Somamos cada uma das pontas DUAS vezes. Assim:

SOMA DAS PONTAS + SOMA DAS PONTAS + RESTO = 60

Como a SOMA DAS PONTAS + RESTO = 45, pois é a soma de 1 até 9, temos

SOMA DAS PONTAS + 45 = 60

Então, a soma dos números das pontas do nosso Triângulo Mágico é sempre 15?

Quadro 1 – Quadro dos Triângulos Mágicos

No quadro acima, partimos de um triângulo mágico de constante 20. Nesse triângulo a soma dos lados é necessariamente 60 e, como usamos todos os algarismos de 1 a 9, a soma de todas as “casas” é 45. Como cada “casa” que está numa ponta é somada duas vezes na soma dos lados, então podemos dizer que a soma das “soma das pontas” com “a soma das pontas” com as casas do “meio” é igual a 60 e, portanto, a “soma das pontas”, para qualquer triângulo de medida 4 e constante 20, é 15. Essa era a idéia que se pretendia discutir com os alunos.

4.4.2. Conclusões parciais

Por motivos de interesse ou outros desconhecidos, não conseguimos contagiar todos os alunos com a atividade, sendo que dois deles não mostraram nenhuma escrita e, na maior parte do tempo, “simulavam que pensavam” na atividade. Durante a parte inicial do primeiro bloco, quase que a totalidade dos alunos buscava as respostas por tentativas, assim como fizeram com o primeiro triângulo, mas com o desenvolvimento da atividade íamos, sempre que surgiam comentários vindos de um aluno, acrescentando essas questões orientadoras ao grande grupo.

De um modo geral, os alunos não encontraram dificuldades para determinar um exemplo de um triângulo mágico de constante 20. Acredito ser isso conseqüência do bloco 1, em que os alunos estiveram diante da situação de criação de inúmeros triângulos mágicos. Finalmente, no momento do planejamento da atividade fiquei diante da dúvida sobre como abordar a situação do material proposto (se elaborava na folha orientações ou não para o aluno). Assim, segui os dois caminhos; realizando no primeiro bloco uma atividade mais livre de intervenção e no segundo bloco com o texto “orientador” presente no quadro acima. Por estar no final da atividade ou outros motivos, o quadro não foi de grande valia, pois a totalidade dos alunos ao lerem não obtiveram nenhum resultado e nem entendimento do processo apresentado; resultando em explicações detalhadas do quadro para alguns alunos, o que não era o previsto no plano. Abaixo, temos as notas dos alunos estudados.

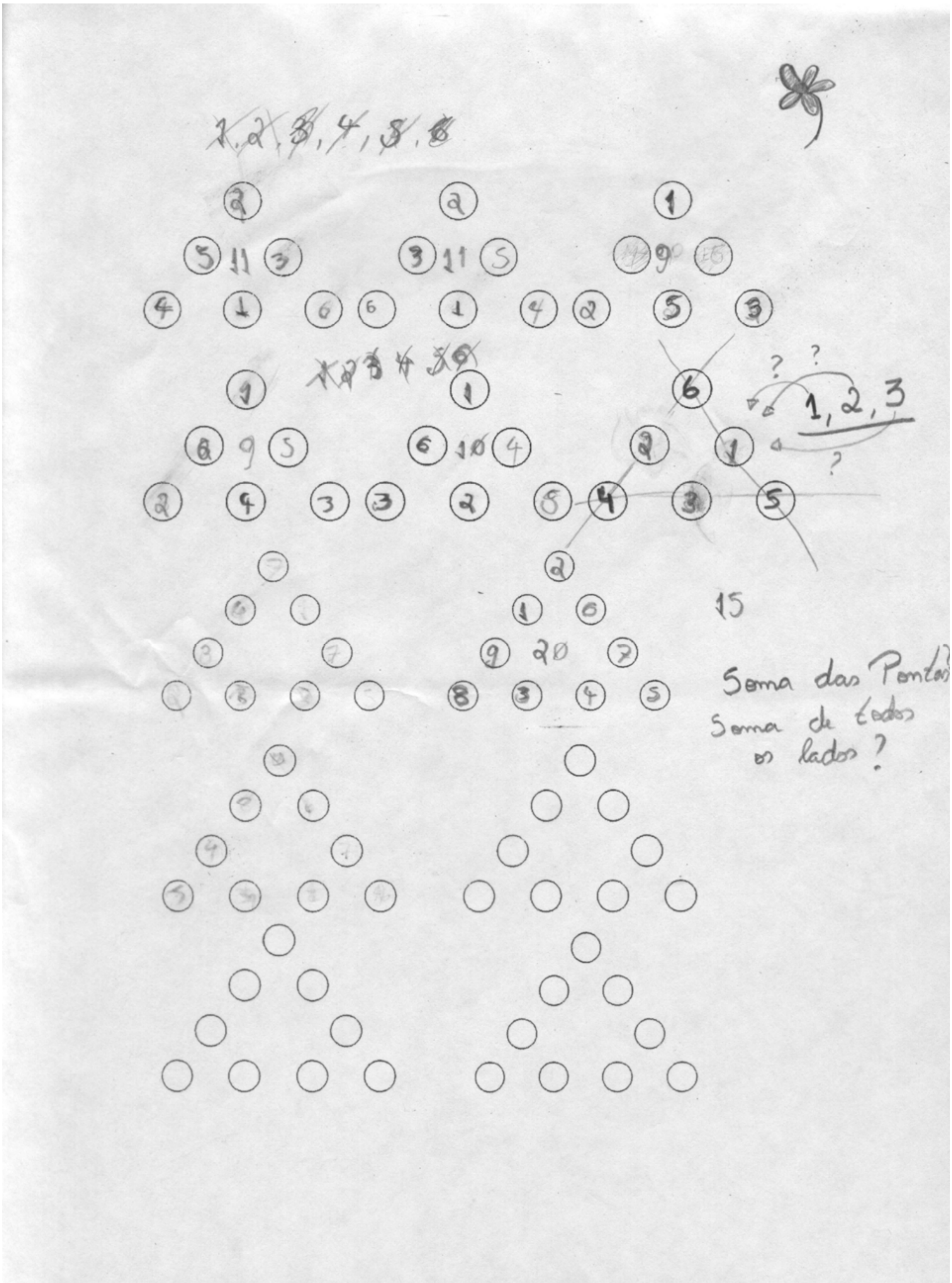


Figura 6 – Notas da Carolina

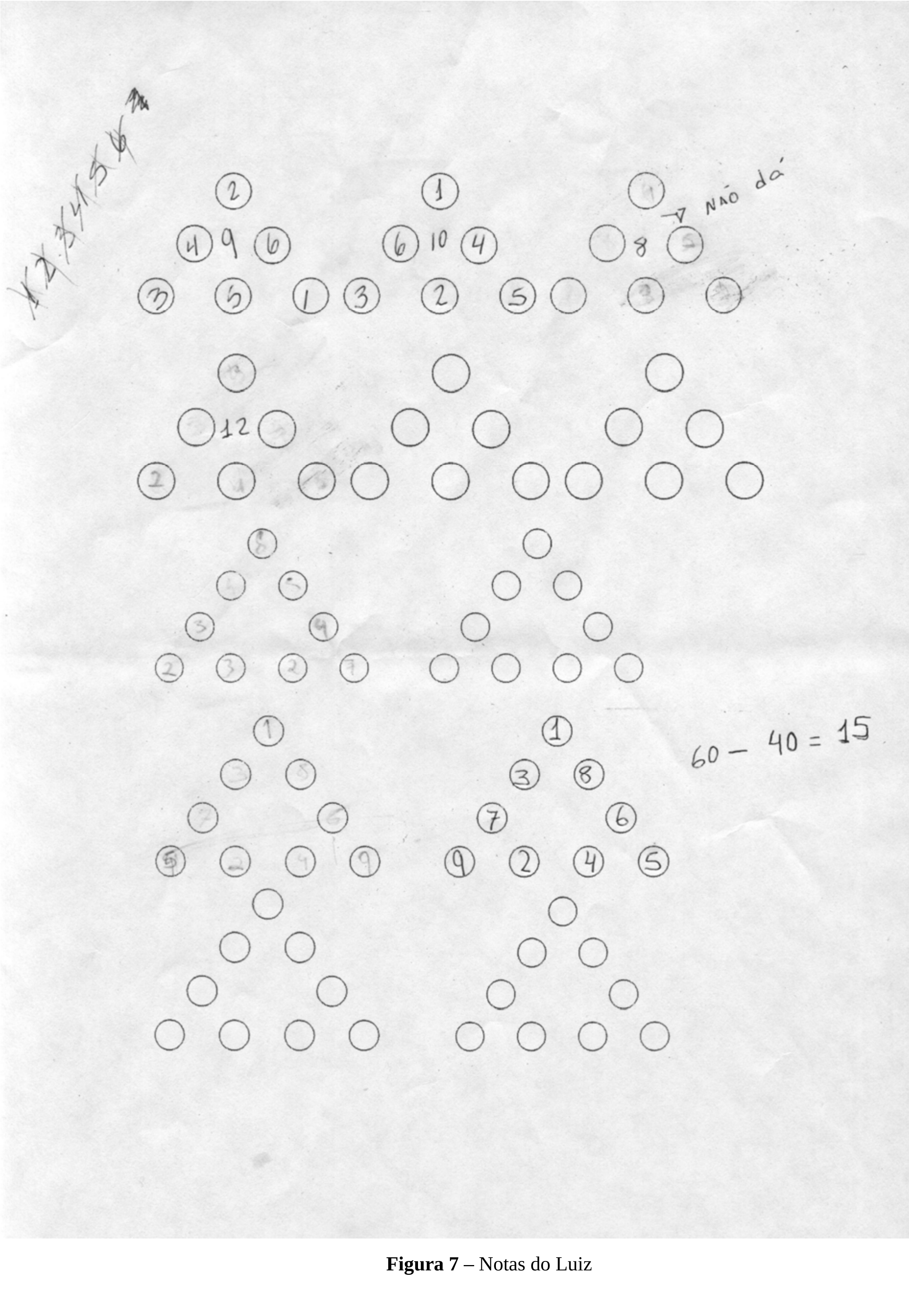


Figura 7 – Notas do Luiz

4.5 Atividade 2

Encontrei esse problema em um material publicado na internet sobre as olimpíadas de Matemática. Apenas como curiosidade, pensei em propor algo similar aos meus alunos do Estágio em Matemática; porém, não muito convicto de obter resultados satisfatórios. Após uma maré, vinda de minha orientadora, de motivações e sugestões de como abordar o problema, realmente acreditei na possibilidade de se pensar algo diferente e produzir idéias através dessa análise.

Como já foi observado, procurei efetuar minhas atividades em momentos distintos de uma determinada turma; ora como questão-desafio em prova, ora como atividade desenvolvida em sala de aula e, na maior parte do tempo, durante o Projeto. Particularmente, esta atividade apareceu como questão-desafio na primeira avaliação dos alunos da turma 61, da sexta série da Escola Estadual de Ensino Fundamental Olintho Pereira. Com essa experiência procurei obter resultados sobre as *escritas livres* [6] dos alunos, através da questão abaixo:

(OBM-1997) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

Essa atividade apareceu como questão extra na prova, então não foi exigida dos alunos sua resolução. E, ainda, para não modificar as condições de realização da atividade, não auxiliei os alunos discutindo alguma dúvida, explicando o enunciado ou a resposta, deixando que interpretassem individualmente, pois acredito que por detrás das palavras (ou melhor, por detrás dos números) há, para cada aluno, uma “gramática” de significados. Certamente, como é de se esperar, os alunos fizeram perguntas que circundavam a questão da atividade, porém me contive em dar explicações. Perguntas essas da forma:

- “Como assim somar 3 algarismos, professor?”;
- “Posso só colocar a resposta?”;

- “Professor, só olha minha resposta e diz se está certa!”;
- “Quanto vale essa questão?”;
- “Me explica o enunciado!”.

Como, até este momento da atividade, nossa análise estava restrita às respostas dos alunos, decidimos incluir, nesse processo, questões direcionadas a determinados alunos para obter seus entendimentos e justificativas para as respostas. Questões essas que foram pensadas com o objetivo de não conduzir o diálogo aos aspectos que nós desejávamos enfatizar, ignorando idéias e convencimentos da criança; mas, sim, com o objetivo de ouvi-los e deixá-los encadear seus próprios raciocínios. Ou seja, não pretendemos modificar a situação, mas compreendê-la como ela se apresenta.

Questões

É relevante citar que as questões abaixo não foram feitas aos alunos na forma de um questionário, mas sim como parte de uma conversa; em que, ao final de cada momento, eu freqüentemente escrevia pequenos esquemas e ia mostrando ao aluno.

- O que você achou do problema?
- Quais são todos os números que têm três algarismos?
- Como você começou a pensar no problema?
- Quantos números você achou para a resposta do problema?
- Como você disse que tem essa quantidade de números em que a soma dos algarismos resulta em 25, então não existe nenhum outro número de três algarismos que a soma dê 25?

A entrevista foi realizada na biblioteca da escola Olintho Pereira durante o intervalo e com um aluno por dia. Para me referir aos alunos entrevistados, utilizarei os nomes fictícios Mariana e Leonardo. Como já mencionei anteriormente, meu objetivo foi buscar uma melhor

[6] Entendo o termo *escritas livres* como a escrita do aluno sem nenhuma intervenção do professor.

compreensão da escrita de alguns alunos e, por conseguinte, seus posicionamentos diante à situação problema.

Ambas entrevistas iniciaram com a questão: “O que você achou do problema?”. Já com uma resposta imediata, fui recebido pela aluna Mariana: “Eu já fiz provas de olimpíada, parece mesmo questões de olimpíadas de Matemática, que *tu tem* que pensar”. De maneira também imediata a questionei: “O que queres dizer com ‘*tem que pensar’*? Normalmente não temos que pensar?”. Através de uma longa resposta, a aluna explicou-se dizendo que normalmente em questões trabalhadas na sala de aula é necessário apenas um cálculo, possivelmente igual aos exemplos, e que nas olimpíadas de Matemática é que apareciam problemas mais “trabalhosos”, segundo ela. Já o aluno Leonardo, com a mesma questão, deixou clara a importância de obter uma melhor nota para ficar com nota “sobrando” no final do ano, quando citou que: “*Ah... é um exercício legal, mas sabe como é: precisamos sempre de uma notinha a mais pra guardar pro último bimestre*”. Questões essas de motivação não serão discutidas, pois abriríamos um leque gigante nesse momento da experiência.

A questão seguinte foi realizada com o intuito de obter um conhecimento do terreno das idéias iniciais do aluno. Ou seja, queríamos saber se eles sabiam com quais números estavam trabalhando e se possuíam as dimensões das possibilidades de respostas. Através de simples questão: “Quais são todos os números que têm três algarismos?”. O aluno Leonardo, buscando uma exaustão das possibilidades, se manifestou através de exemplos: “*222, 232 e outros*”. E, após pensar um pouco, a aluna Mariana respondeu que o número 99 tinha apenas dois algarismos e que a partir dele (isso é, 100, 101, 102,...) todos números possuíam três algarismos, porém quando chegamos no número 1000 temos quatro algarismos; portanto, segundo a aluna os números possíveis para a solução do problema seriam 100, 101, 102,... , 999. Nesse momento preciso deixar claro que não estava induzindo o aluno a respostas, pois já tínhamos as soluções dos alunos; mas, sim, esclarecendo seus apontamentos iniciais.

O próximo passo será o momento que considero crucial à experiência, visto que veremos apontamentos dos alunos que remetem ao início de suas contagens para resolver o problema. Com a questão: "Como você começou a pensar no problema?", iniciamos essa etapa. A aluna Mariana respondeu que necessitou de um tempo relativamente grande para começar, mas que achou um número que fechava com as condições da questão (o número 799) e depois reordenou os algarismos para achar diferentes números (observe sua escrita abaixo).

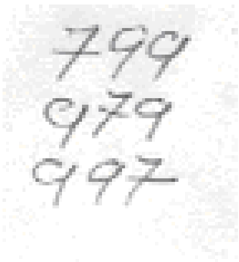


Figura 8 – Mariana 1

O aluno Leonardo, na mesma questão, respondeu: "*Para a soma dar 25 temos que ter algarismos grandes foi o que fiz. Não está certo*?". Respondi-o que sim, estava certo, e o questionei novamente: "qual o primeiro número que você achou?". Leonardo respondeu: "*Foi esse (apontando para o número 889), depois esse (apontando para o número 988) e depois esse aqui (apontando para o número 898), então a resposta é três, certo né professor?"* (observe sua escrita abaixo).

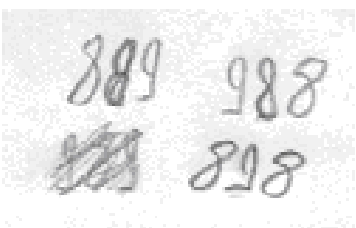


Figura 9 – Leonardo 1

Façamos uma pequena pausa nas questões e observemos que ambos alunos utilizaramse de um método inicial muito semelhante. De um modo geral, para tais alunos o processo se deu inicialmente por buscas de exemplos de solução para o problema seguido do encontro de outros resultados. Percebi isso após a atividade, observando minhas anotações esquemáticas e registros de fala de cada aluno. O quadro abaixo detalha isso:

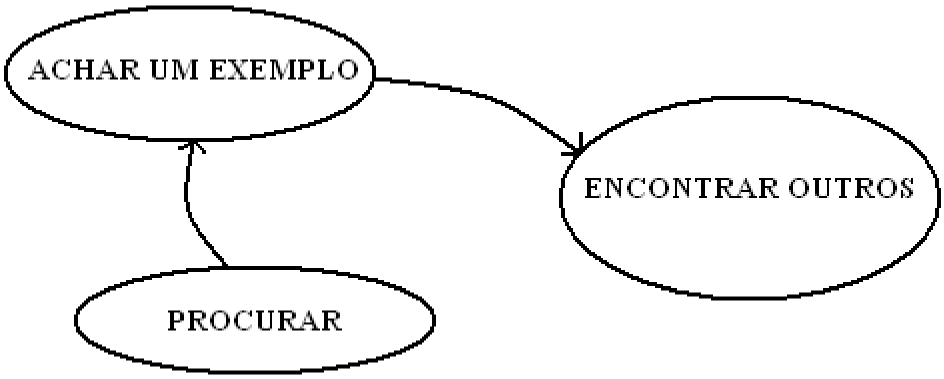
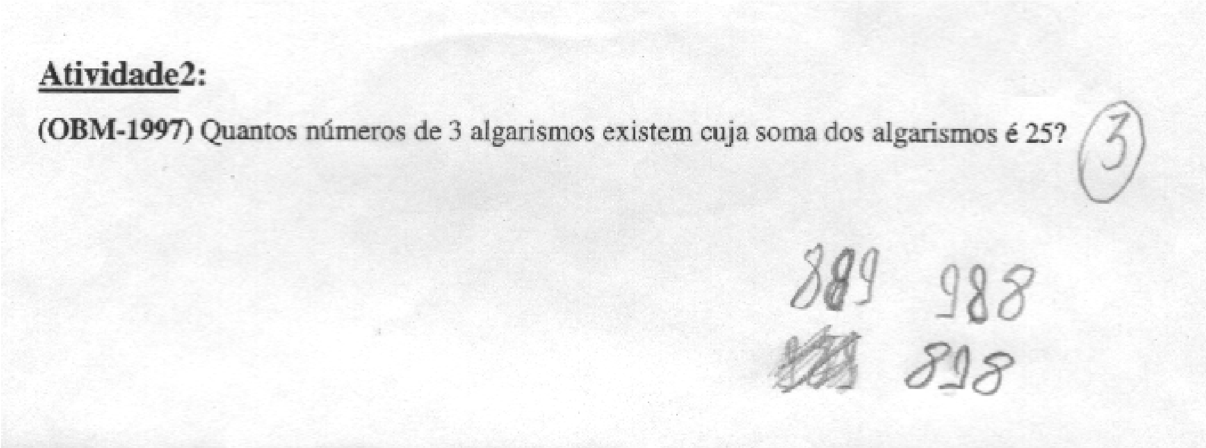


Figura 10 – Procedimentos da Atividade 2

O passo que segue será o que fará o fechamento das conclusões do aluno, nele estarão presentes algumas justificativas de cada aluno para suas respostas. Seguindo com o aluno Leonardo, fiz a questão: "Como você disse que têm três números em que a soma dos algarismos resulta em 25, então não existe nenhum outro número de três algarismos que a soma dê 25?". Respondeu se justificando: "*Não sei porque não tem mais, só achei esses*". Apesar de estar tentando apenas compreender e não intervir na situação, questionei-o novamente: "Se eu disser que têm mais números, você acreditaria?" Respondeu: "Sim... (risos)". Por fim, me contive às questões e concluí que o aluno se manteve fixo no quadro acima. Ou seja, achou um exemplo e utilizou à exaustão todas as possibilidades com aqueles algarismos. Seguindo com a aluna Mariana, na mesma questão, ela respondeu que não estava muito certa de não existir outro, mas que: "*Podia ser 999, o último de três algarismos, mas daria soma 27. E só quero 25, então tenho que tirar dois de algum algarismo*". Com essa frase ela não só repetiu o processo de busca $\rightarrow$ achar exemplo $\rightarrow$ outros exemplos, mas também convenceu-se, apesar dela não ter inicialmente acreditado, de que todas as possibilidades estavam esgotadas.



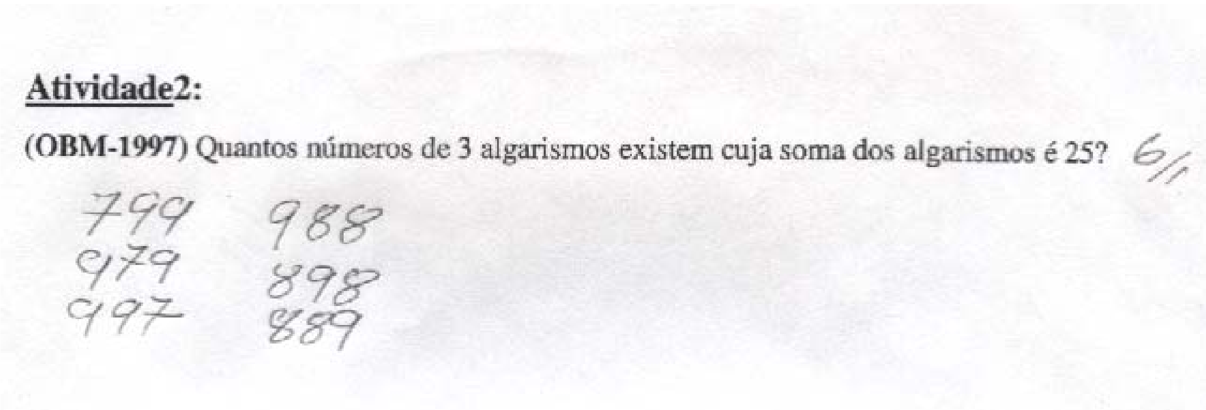
Atividade2:

(OBM-1997) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25? 3

889 988

898

Figura 11 – Notas do Leonardo



Atividade2:

(OBM-1997) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

799 988

979 898

997 889

Figura 12 – Notas da Mariana

4.5.2. Conclusões parciais

Certamente, podem ser questionados os motivos de ter sido analisado somente o material de poucos alunos, uma vez que eu trabalhei nessa atividade com a avaliação de uma turma inteira. Porém esse foi um dos diversos caminhos que podem ser escolhidos para abordar um relato de experiência; e, mais que isso, se entrássemos no campo da discussão dos outros alunos, que nesse momento não manifestaram **escritas** interessantes à situação, poderíamos mergulhar no âmbito dos relatos com vista aos erros, interesses e muitas outras áreas.

Finalmente, abstive-me da intervenção didática para não modificar as condições de realização da atividade, não auxiliando os alunos e nem discutindo alguma dúvida, explicando o enunciado ou a resposta, deixando que a interpretassem individualmente, pois acredito que, como Larrosa (2002), por detrás das palavras (ou melhor, por detrás dos números) há, para cada aluno, uma "gramática" de significados. Em seu trabalho, Larrosa (2002) escreve que: "Eu creio no poder das palavras, na força das palavras, creio que fazemos coisas com as palavras e, também, que as palavras fazem coisas conosco[...]". Com o desenvolvimento dessa atividade, eu diria que: creio no poder dos números, na força dos números, creio que fazemos coisas com os números e que, ainda mais que isso, quando combinamos a expressão oral (entrevista) com a escrita (os números), o professor pode mergulhar nos processos mentais do seu aluno e "descobrir" coisas que apenas com a resolução não seria possível.

4.6 Atividade 3

(OBM-1998) Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 12.

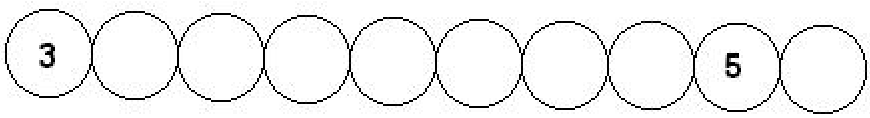


Figura 13 – Atividade 3

No último círculo à direita deve estar escrito o número?

Em uma ordem cronológica, essa foi a primeira atividade trabalhada. Vestígios disso serão encontrados no relato dessa experiência; em que tive inúmeras "falhas" tanto em minhas práticas quanto no sentido de uma pesquisa, porém essas sendo superadas com as demais experiências posteriores. Acredito fortemente que essa atividade, apesar de suas consternações, guiou-me em todos aspectos (questões motivadoras, maneiras de propor os problemas, análises das escritas dos alunos e outros). Tendo sido essa desenvolvida como um plano de aula de meu estágio; ou seja, realizada com a turma 61 da escola Estadual de Ensino Fundamental Olintho Pereira.

Após o recreio da turma, no segundo período de aula de Matemática do dia, os alunos foram organizados em duplas de acordo com suas escolhas. Como diariamente, necessitei de um tempo para a organização da turma para assim dar início à atividade distribuindo a questão acima, bem como descrita, a cada aluno. Inicialmente, não estabeleci um tempo para que os alunos desenvolvessem a questão, deixando que cada aluno tivesse seu momento com a atividade, porém foi percebido que, no grande grupo (cerca de 25 alunos), não foi possível a construção desses momentos individuais. Quero dizer com isso que a grande maioria dos alunos não se dedicou à manipulação inicial da questão, certamente diferente do que eu esperava. Esse ponto foi fundamental ao trabalho como um todo, pois a partir daí comecei a pensar maneiras de estruturar o início de uma atividade; resultando na experiência com os Triângulos Mágicos, em que houve uma continuidade dos trabalhos já realizados por eles com os Quadrados Mágicos, e também existiu um momento em que realmente paramos tudo que estava acontecendo para, com uma "historinha", trazer os triângulos para o ambiente dos alunos. Finalmente, ficou evidente que nesta atividade não se conseguiu despertar o interesse da turma; entretanto, no parágrafo seguinte serão apresentados alguns apontamentos da atividade de um aluno (como é o mesmo aluno da atividade um, chamamos de Luiz), que, particularmente, chegou a conclusões que considero admiráveis.

O aluno Luiz iniciou a atividade testando valores. Logo em seguida da bola com o número 3, ele preencheu com o número 7. E, como sabia que a soma de três números consecutivos deve ser 12, completou a próxima com o número 2.

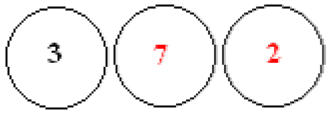


Figura 14 – Luiz 2

Após, o aluno continuou completando as bolas de maneira análoga ao feito anteriormente. Resultando na seguinte figura:

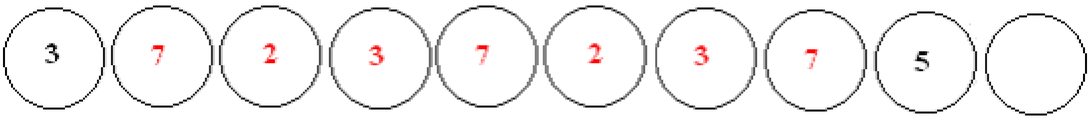


Figura 15 – Luiz 3

Em seguida, o aluno observou que se formava de uma “seqüência” que se repetia através de três dígitos.

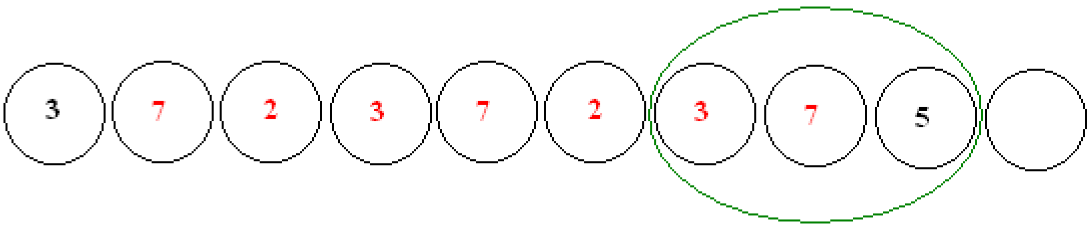


Figura 16 – Luiz 4

E, mais que isso, o dígito 5 deveria aparecer na terceira posição da seqüência. Formando uma nova seqüência em que no lugar do número 2, inicialmente colocado, deveria estar o número 5; sendo assim, como a soma de três números quaisquer resulta em 12, concluiu que o número 4 deveria estar entre o 3 e o 5 da nova seqüência. Dessa forma:

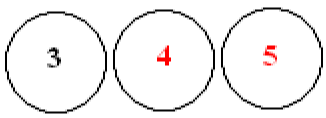


Figura 17 – Luiz 5

Finalmente, repetiu o processo anterior obtendo a seguinte seqüência com último algarismo igual a 3.

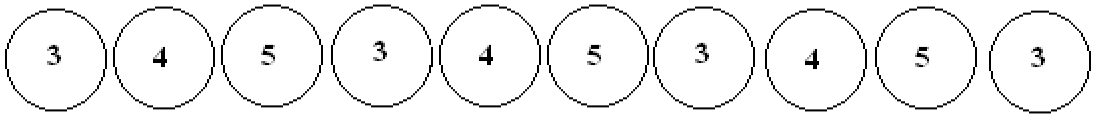


Figura 18 – Luiz 6

4.6.1 Considerações Parciais

Penso que essa atividade trabalhada, com a necessidade de raciocínios do aluno, não se mostrou própria ao trabalho em um grande grupo. Não digo que atividades com problemas não possam ser desenvolvidas em uma turma; mas sim que, nesse ambiente e dessa forma como sugeri, precisaríamos de problemas que envolvessem “pensamentos coletivos” dos alunos. Como exemplo, a atividade de Skovsmose (2000) com apostas em cavalos, em que os alunos apresentam resultados através de comentários para a turma.

No entanto, esse problema da olimpíada de Matemática não apareceria neste trabalho se não possuísse aspectos interessantes. O aluno que chamamos de Luiz, com um estilo tranqüilo de falar em Matemática, efetuou o problema de um modo investigativo. Ou seja, percebi que a diferença entre ele e os demais alunos foi o início da atividade, em que os seus primeiros rabiscos resultaram nas conclusões citadas acima. Nesse problema, é relevante também observar que as propriedades da associatividade e comutatividade dos números inteiros foram usadas em todos os momentos pelo aluno, pois esse necessitou verificar se, de fato, qualquer soma de três elementos resultaria no número 12.

5. O PROFESSOR QUE RENUNCIA

> A Matemática – isso pode surpreender ou chocar muitas pessoas – nunca é dedutiva na sua criação. O Matemático, quando trabalha, faz conjecturas vagas, visualiza generalizações amplas e salta para conclusões não justificadas. Ele arruma e arruma novamente suas idéias, e se torna convencido da verdade que elas encerram antes de lançar no papel uma prova lógica. (HALMOS apud DEVLIN, 2006, p. 293)

Na citação acima do matemático mundialmente famoso percebemos o trabalho árduo necessário à construção de idéias. Por isso, quando propomos atividades mais “elaboradas” [7] a nossos alunos, devemos estar cientes de que necessitaremos de tempo, propostas dinâmicas (os movimentos já citados) e ainda da dificuldade de podermos estar trabalhando em um ambiente totalmente desconhecido.

Skovsmose (2000) discute e analisa distintos ambientes de aprendizagem, sugerindo e caracterizando as diferentes oportunidades de fuga aos paradigmas dos exercícios. Após fazer as caracterizações dos ambientes e combinar com os três diferentes tipos de referência do professor (referência à Matemática, referência à semi-realidade e referência à situação da vida real), o autor apresenta as limitações que o professor deve superar para haver o movimento entre esses cenários.

Por exemplo, sabemos que determinados usos do computador na educação têm auxiliado a estabelecer novos *cenários para investigação* (SKOVSMOSE, 2000), desafiando a autoridade do professor (o paradigma do professor ser o detentor do conhecimento). Como exemplo concreto, Skovsmose (2000) cita que alunos trabalhando com geometria dinâmica, com um software especializado, encontram certamente situações que os professores não preveriam ao planejar a aula. Ou seja, uma mudança de roteiro, ou um planejamento diferente do aluno para a atividade, pode conduzir o aluno a uma zona desconhecida para o professor. Assim sendo, a autoridade do professor pode ser “quebrada” a qualquer segundo, fato que considero um movimento de saberes; em que o professor necessita estar analisando características individuais de pensamento. Concordo com Skovsmose (2000) quando conclui sobre as limitações e as zonas de risco que o professor deve enfrentar, respondendo uma das minhas questões específicas de uma maneira geral ("há limitações no processo de trabalhar com problemas que envolvam generalizações?").

> Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa torna possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo, a aceitação de questões do tipo "o que acontece se...", que possam levar a investigação para um território desconhecido. De acordo com pesquisas de Penteado, uma condição importante para os professores se sentirem capazes de trabalhar na zona de risco é o estabelecimento de novas formas de trabalho colaborativo, em particular, entre os professores, mas também juntamente com alunos, pais, professores e pesquisadores. (SKOVSMOSE, 2000, p.11)

Portanto, como diz o nome desse capítulo e como resposta à questão inicial: "quais as características do professor que se propõe a elaborar essas atividades?"; acredito que o professor, muitas vezes diante dessas dificuldades e inúmeras outras, deve renunciar a suas características de detentor do conhecimento e explorar outros ambientes que fogem dessas zonas de conforto, como diz Skovsmose (2000). Uma vez que, quando vemos um professor expondo algo diretamente, nossa impressão inicial é de que aquilo foi criado pelo professor e ele conhece qualquer zona nebulosa daquele conhecimento; mais que isso, que aquela disciplina é imediata e sem labirintos. Porém, isso não é verdadeiro, pelo menos na Matemática, como cita Paul Halmos.

Portanto, vimos que o aluno pode fazer o "saber" escapar da mão do professor e oscilar entre ambos, questionando-o e colocando-o em permanentes dúvidas. Skovsmose (2000) aparentemente nada tem a ver com meu assunto estudado até aqui, porém esse autor nos beneficia com seus modelos de caracterizar atividades e apresenta as limitações que o professor deve superar para haver o movimento entre os cenários através das zonas de risco. Ou seja, age indiretamente nas questões de linguagem e generalização.

---

[7] Quero dizer utilizar problemas e trabalhar com questões ao invés de perguntas, no sentido de Deleuze.

6. Considerações Finais

Figura 19 – Pingüins

No começo das leituras para esse trabalho, nosso título para a proposta foi "O Ensino de Álgebra"; não demorando muito para que esse nome fosse mudado algumas vezes. Somente após ler Devlin (2006) e Rômulo Lins (1997), realmente fiquei convicto sobre o assunto procurado. Através dos autores, percebemos que "dentro" do Ensino de Álgebra existe um campo de estudo que nos interessava – generalizações. Iniciei assim a elaboração e o desenvolvimento das atividades 1, 2 e 3. Sendo assim, o novo título para o trabalho foi tomado como: "Dificuldades com Generalizações no Ensino Fundamental". Novamente, após novas compreensões de alguns textos de Vygotsky esse último foi alterado para: "Uma discussão sobre Generalizações no Ensino Fundamental".

Como relatei, meu interesse foi observar materiais escritos particulares dos alunos durante meu estágio. Ao estar diante desses escritos, acredito que devemos entender que eles expressam saberes que os alunos possuem e estão sendo apresentados na forma de uma linguagem. Assim, é necessário elaborar intervenções educacionais que, primeiramente, incentivem os alunos a apresentar suas convicções através do discurso; para, após, desestabilizar suas certezas, levando-os a um questionamento sobre as suas respostas.

Não acredito que o desenvolvimento desse trabalho fosse plausível utilizando-se somente aspectos teóricos e os discutindo; mais que isso, imaginando como seria a atitude dos alunos diante das atividades descritas. Assim sendo, acredito muito na disposição que o professor deve possuir para desenvolver experiências, apoiar-se nelas e a partir daí desenvolver propostas e tomar decisões em suas práticas.

Para, inicialmente, descrever essa construção da generalização, percebemos que o pingüim da figura acima utilizou a "situação generalizada" (LINS; GIMENEZ, 1997), pois passou a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares; ou seja, abstraiu um traço comum aos dois exemplos (pingüins e programas de TV antigos) e concluiu pela equivalência entre eles a partir desse traço comum.

Diante do ambiente dos pensamentos com generalizações, encontramos indicações de que esses são processos do desenvolvimento humano. Portanto, estudar generalizações nada mais seria que entender os entremeios que caracterizam a evolução humana. Assim sendo, foram estudados, através de Vygotsky, a construção da linguagem e a formação dos conceitos. Luria (2001, p. 30) na introdução do livro "Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem", apresenta algumas idéias de Vygotsky. Dentre essas, cita, através do exemplo abaixo, que a criança com o amadurecimento (pensado no passar do tempo) efetua em lugar de movimentos naturais, controlados à força, controle voluntário sobre seus movimentos.

> Por exemplo, suponhamos que desejássemos estudar a aquisição dos movimentos de saltar. Nas crianças muito jovens, os saltos ocorrem apenas quando o contexto, inclusive os próprios desejos da criança, o exigir. O saltar "simplesmente ocorre". Não podemos evocá-lo. Em seguida, pouco a pouco, a criança começa a usar estímulos auxiliares para dirigir seus próprios movimentos. **No começo esses estímulos auxiliares são de natureza externa** [...] Finalmente, a criança pode simplesmente pensar "salte", e os movimentos desdobrar-se-ão de forma voluntária (LURIA, 2001, p.31, grifos nossos).

Podemos estabelecer uma analogia entre o controle dos movimentos e o desenvolvimento do pensamento. Inicialmente, são estímulos internos que vão possibilitar que a criança faça relações cognitivas na ausência do concreto; ou seja, imagine situações e coisas jamais vivenciadas ou observadas. Além disso, será necessário, também, que a criança abstraia os atributos relevantes da totalidade de uma determinada situação ou objeto.

Já dissemos que quando utilizamos a linguagem para nomear determinado objeto estamos classificando esse objeto numa categoria, numa classe de objetos que têm em comum certos atributos. Para isso, Marta Kohl de Oliveira (2003) diz que as palavras, como signos mediadores na relação do homem com o mundo são, em si, generalizações: cada palavra refere-se a uma classe de objetos, consistindo num signo, numa forma de representação dessa categoria de objetos, desse conceito.

Quando estudamos conceitos, vimos que um complexo é, antes de qualquer coisa, um agrupamento concreto de objetos unidos por ligações factuais:

> Uma vez que um complexo não é formado no plano do pensamento lógico abstrato, as ligações que o criam, assim como as que ele ajuda a criar, carecem de unidade lógica: podem ser de muitos tipos diferentes. Qualquer conexão factualmente presente pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo. **É esta a diferença principal entre um complexo e um conceito**. Enquanto um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos. (VYGOTSKY apud OLIVEIRA 1993, p. 4, grifo nosso)

Portanto, a formação de complexos exige a combinação de objetos com base em sua semelhança, a unificação de pensamentos dispersos. Apresentamos, no capítulo 3, os três estágios de formação do conceito, e é no terceiro que há a formação dos conceitos propriamente ditos, a criança agrupa objetos com base num único atributo, sendo capaz de abstrair características isoladas da totalidade.

Entrando no cenário das atividades propostas, acredito que atividades com uma seqüência de **sugestões e questionamentos**, nas quais o aluno busca, a partir do uso natural da linguagem cotidiana, uma generalização, possibilitam desenvolver o pensamento matemático. Ou ainda, através da investigação (no nosso caso entrevista), é possível compreender muitos desses pensamentos específicos dos alunos. Por exemplo, na Atividade dos Triângulos Mágicos montamos um contexto de sugestões e questionamentos que permitiu a **reconstrução** dos passos realizados pela aluna para encontrar o triângulo mágico de constante 9, representada através de uma figura (Figura 3). Outro exemplo: a aluna Mariana, na atividade 2, respondeu que não estava muito certa de não existirem outras soluções além das encontradas, mas que: "*Podia ser 999, o último de três algarismos, mas daria soma 27. E só quero 25, então tenho que tirar dois de algum algarismo*". Ou seja, ambos os exemplos expressam a construção de generalizações. Por esse motivo efetuamos a última troca do título do trabalho, pois acreditamos que não se pode falar de dificuldades com generalizações mas, sim, considerar diferentes construções desse pensamento:

> Todos os meus alunos que declararam não entender a prova de Euclides da infinidade dos números primos me demonstraram de muitas outras maneiras que são pessoas inteligentes, capazes de acompanhar sustentações lógicas sobre as matérias que cursam, as vantagens e desvantagens das várias políticas governamentais, ou como aplicar suas economias. Só posso concluir que a incapacidade deles de se seguir a argumentação de Euclides deriva puramente do fato de que ela se refere a um mundo totalmente abstrato e simbólico. Se fosse possível reformular a argumentação de Euclides em termos de uma situação familiar, cotidiana, não tenho dúvida de que praticamente todo mundo seria capaz de acompanhá-la. Na realidade, se eu pudesse fazer uma tradução da prova de Euclides, estou certo que todo mundo diria que ela é 'óbvia'. (DEVLIN, 2006, p. 158)

Lembramos que Sandra d'Antonio (2006), quando fala do discurso, consegue apontar em seis itens muitos aspectos da interação discursiva entre professor e aluno. Apresentamos, também, que segundo a autora, a maior parte dos alunos vai à escola recheados de "sentidos" para as expressões matemáticas que circundam sua linguagem cotidiana; por isso, muitas vezes, apresentam dificuldades de relacionar seus conceitos com os vistos em aula. O problema fundamental está no fato de que o aluno é colocado diante da Matemática e, além de ter que lidar com os problemas que envolvem o ato de comunicação, também tem que se defrontar com uma outra linguagem formal. Diretamente, é esse o problema que Devlin

(2006) apresenta com o exemplo da demonstração de Euclides para a infinitude dos números primos; ficando claro que precisamos ir além do discurso e da linguagem para que o aluno consiga relacionar seus conceitos com os vistos em aula, pois se apenas isso bastasse os alunos “inteligentes” de Devlin entenderiam, certamente, a prova de Euclides.

Finalmente, confio na idéia de que para que a Educação Matemática ocorra, na escola, alunos e professores devem estar envolvidos no processo de construção de conhecimento através de uma linguagem que abranja os distintos conceitos. Vimos que os pensamentos generalizantes e genéricos vão acontecer e aparecer por todo andamento de uma atividade, visto que são concebidos através de um desenvolvimento; no entanto, cabe ao professor poder desenvolver estratégias que favoreçam a construção de generalizações. Em particular, atividades com uma seqüência de **sugestões e questionamentos** mostraram favorecer os aspectos estudados desses pensamentos**.**

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. Secretaria do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. v. 3. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DELEUZE, Gilles. **O abecedário de Gilles Deleuze, a entrevista a Claire Parnet**. Traduzido por Tomaz Tadeu da Silva. 1988.

DEVLIN, Keith. **O gene da Matemática**. O talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. 3 ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS INTERNACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA**. Brasília: 2008. Disponível em < http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/ > .

LINS, Romulo; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LURIA, A. R. Vigostskii. In: VYGOTSKY, Lev S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 7.ed. São Paulo: Icone, 2001.

OLIVEIRA, M. Kohl. **Vygotsky e o Processo de Formação de Conceitos**. São Paulo: USP, 1993. Disponível em: http://www.ascepa.com.br/Artigos/Artigos%20de%20nao%20associados/educacao/Vygotsky%20e%20o%20Processo%20de%20Forma%E7%E3o%20de%20Conceitos.doc

SCHWANTES, Vilson. **Pensamento algébrico: uma reflexão sobre seu desenvolvimento no ensino fundamental**. Marechal Cândido Carrion: Ponto e Vírgula, 2004.

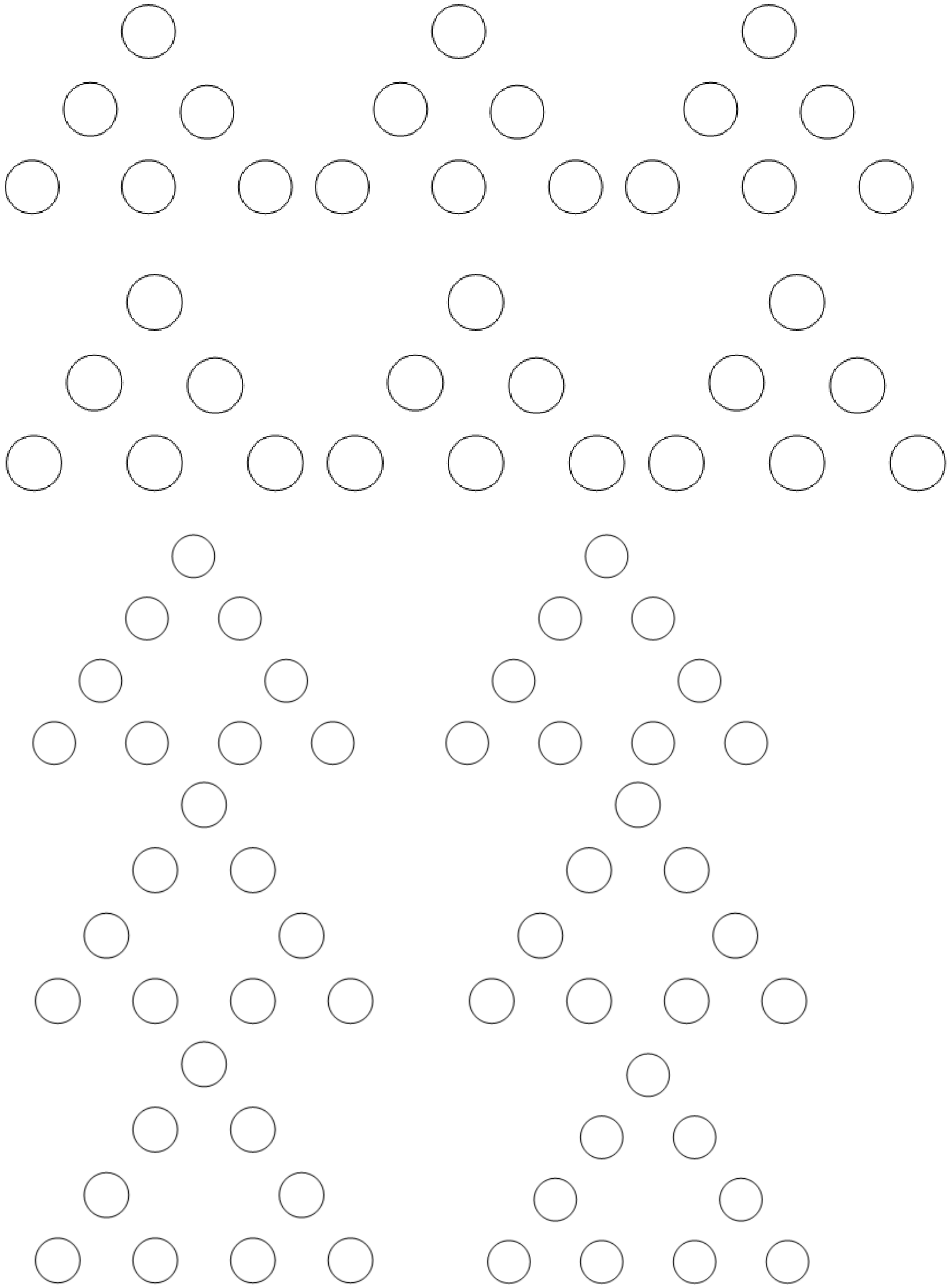
SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Revista Bolema**, Rio Claro, v. 13, 14, p. 66-91, 2000.

VYGOTSKY, Lev S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000. 496 p.

VYGOTSKY, Lev S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 7.ed. São Paulo: Icone, 2001.

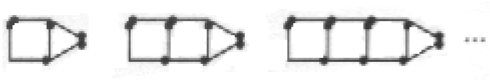
VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e Linguagem**. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

APÊNDICE 1 (TRIÂNGULOS MÁGICOS)



APÊNDICE 2 (PROBLEMAS)

1. **Arrumando fósforos –** Quantos fósforos são necessários para formar o oitavo termo da seqüência, cujos três primeiros termos são mostrados abaixo?



2. **Triângulos com lados inteiros –** Quantos triângulos existem cujos lados são números inteiros e o perímetro é 12?

3. **Número ímpar –** Se n é um número inteiro qualquer, qual das seguintes opções é um número ímpar?

a) $n^2 - n + 2$ b) $n^2 + n + 2$ c) $n^2 + n + 5$

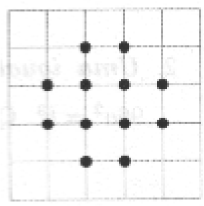
d) $n^2 + 5$ e) $n^3 + 5$

4. **Um queijo triangular –** Osvaldo comprou um queijo em forma de um triângulo eqüilátero. Ele quer dividir o queijo igualmente entre ele e seus quatro primos. Faça um desenho indicando como ele deve fazer essa divisão.

5. **Existência de triângulos –** Qual dos seguintes triângulos não pode existir?

a) Triângulo agudo isósceles;
b) Triângulo retângulo isósceles;
c) Triângulo retângulo obtusângulo;
d) Triângulo retângulo escaleno;
e) Triângulo escaleno obtusângulo.

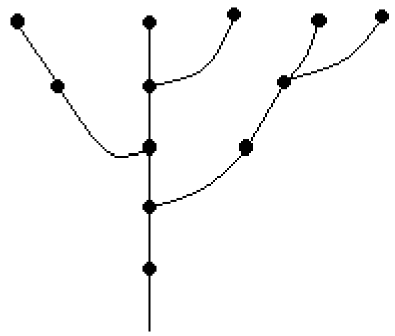
6. **Os doze pontos –** Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculada, conforme mostra a figura. Qual o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?



7. **A seqüência xyz –** Na seqüência *1/2, 5/8, 3/4, 7/8, x, y, z,...* . Os valores de *x, y* e *z* são?

8. **Roseiras em fila –** Jorge ganhou 15 roseiras em seu jardim, com a condição de planta-las em 6 filas de 5 roseiras cada uma. Isso é possível? Em caso afirmativo, faça um desenho indicando para Jorge como plantar as roseiras.

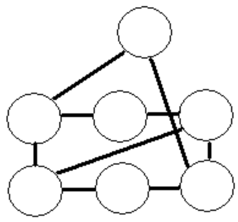
9. **A árvore de Emília –** A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após 2 semanas do aparecimento de um galho, esse mesmo galho produz um novo galho a cada semana, e o galho original continua a crescer. A árvore tem 5 galhos depois de 5 semanas, como mostra a figura abaixo. Quantos galhos, incluindo o galho principal, árvore de Emília terá no final de 8 semanas?



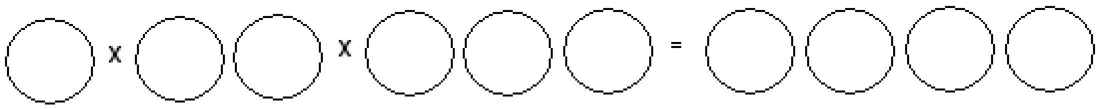
10. **O triângulo de latas –** Um menino tentou alinhar 480 latas em forma de um triângulo com uma lata na 1ª linha, 2 latas na 2ª linha e assim por diante. No fim sobraram 15 latas. Quantas linhas têm esse triângulo?

11. **Rede de estações –** Um serviço de vigilância vai ser instalado num parque na forma de uma rede de estações. As estações devem ser conectadas por linhas de telefone, de modo que qualquer uma das estações possa se comunicar com todas outras, seja por conexão direta seja através de no máximo uma outra estação. Cada estação pode ser conectada diretamente por um cabo a no máximo 3 outras estações.

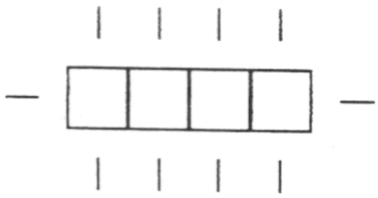
O diagrama abaixo mostra um exemplo de uma rede desse tipo conectando 7 estações. Qual é o maior número de estações que podem ser conectadas dessa maneira?



12. **Produto de três números –** No diagrama abaixo cada círculo representa um algarismo. Preencha o diagrama colocando em cada círculo um dos algarismos de 0 a 9, utilizando cada algarismo uma única vez.



13. **Almoço na escola –** Para acomodar os alunos durante o almoço de uma escola, se enfileiram mesas quadradas de 4 lugares, conforme indicado:



Usando 4 mesas teremos no máximo 10 alunos sentados.

a) Quantas pessoas estariam sentadas se fossem usadas 23 mesas?
b) E usando 47 mesas?
c) Qual o menor número de mesas para que se tenham 318 pessoas sentadas?
d) E 537 pessoas sentadas?

14. **Os azulejos –** Escreva uma fórmula para calcular o número de azulejos brancos se você souber o número de azulejos pretos.