UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEONARDO ENNES DOS SANTOS

COMPREENDENDO OS QUADRILÁTEROS COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre
2021

LEONARDO ENNES DOS SANTOS

COMPREENDENDO OS QUADRILÁTEROS COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2021

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

COMPREENDENDO OS QUADRILÁTEROS COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Leonardo Ennes dos Santos

Banca examinadora:

Orientadora: Profª Drª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

RESUMO

Este trabalho consiste em uma proposta para o estudo da Geometria, especificamente dos quadriláteros, com alunos do terceiro ano do ensino médio, utilizando o software GeoGebra. A fundamentação teórica utilizada para o desenvolvimento das atividades baseia-se em teorias que abordam os princípios da Geometria Dinâmica e a teoria de Van Hiele, que permite a análise da aprendizagem e do desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes, de acordo com os níveis de compreensão e as fases de aprendizagem. Apresentamos um breve histórico sobre o ensino de Geometria no Brasil, uma análise sobre aspectos que perpetuam o ensino por meio de processos estáticos e pouco dinâmicos que contribuem para subutilização dos espaços de aula. Por fim, descrevemos e analisamos a prática desenvolvida com alunos da terceira série do ensino médio do Colégio João Paulo I – Unidade Sul por meio das atividades propostas, de análise e construção geométrica sobre as propriedades de alguns quadriláteros específicos: paralelogramo, retângulo, losango e quadrado. Os resultados da pesquisa apontam para um avanço do nível 0 para o nível 1 de Van Hiele na maioria dos alunos investigados, enquanto alguns alunos apresentaram avanços dentro do nível 1, mas não o suficiente para chegar ao nível 2 e um aluno atingiu o nível 2 de Van Hiele. Identificamos aspectos positivos ao propor a utilização do GeoGebra por proporcionar dinamismo às construções geométricas e por proporcionar um ambiente interessante e desafiador para os alunos, que permite compreender as figuras para além de suas formas, possibilitando um estudo mais aprofundado sobre suas propriedades.

Palavras-chave: Quadriláteros. GeoGebra. Teoria de Van Hiele. Geometria Dinâmica. Propriedades Geométricas.

ABSTRACT

This paper consists in a proposal for the study of Geometry, specifically of quadrilaterals, with third-year high school students, using the GeoGebra software. The theoretical basis used in the development of the activities is based on the theories of Dynamic Geometry and Van Hiele's theory, which allows the analysis of learning and the developing of geometric thinking by the participants, according to the levels of understanding and phases of learning. We presented a brief background about the teaching of Geometry in Brazil, an analysis of aspects that perpetuate teaching through static and little dynamic processes that contribute to the underutilization of classroom spaces. Finally, we described the practice developed with third grade high school students at Colégio João Paulo I – South Unit through proposed activities, of analysis and geometric construction about the properties of some specific quadrilaterals: parallelogram, rectangle, rhombus and square. The research results point to an advance from level 0 to level 1 of Van Hiele in most students investigated, while some students showed progress within level 1, but not enough to reach level 2 and one student reached level 2 by Van Hiele. We identified positive aspects when proposing the use of GeoGebra for providing dynamism to geometric constructions and for providing an interesting and challenging environment for students, which allows them to understand figures beyond their shapes.

Keywords: Quadrilaterals. GeoGebra. Van Hiele Theory. Dynamic Geometry. Geometric Properties.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução, justificativa e objetivos

Durante muitos anos pudemos observar a matemática trabalhada nas escolas muito formal e pouco flexível, além de pouca utilização de ambientes que poderiam ampliar as possibilidades de uma aula, como as tecnologias digitais. Conforme já afirmava D’Ambrosio (1989),

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação[...] (D’AMBROSIO, 1989, p. 1).

Ainda, D’Ambrosio (1989, p.1) enfatiza quão engessada vem sendo a matemática, quando afirma que “os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona”.

Conforme afirma Boschi (2016, p.4) “a matemática tem sido ensinada, com base em livro didático e em um currículo linear engessado, não está conseguindo despertar nos estudantes o gosto por seu estudo”. Portanto, é possível perceber que assim como em 1989, ainda nos dias de hoje podemos observar, na educação básica, a matemática engessada e pautada por livros didáticos, onde se perpetua o corpo de conceitos estáticos e que estão acima de qualquer questionamento, sem abertura para novos ambientes.

Tornou-se comum vermos aulas expositivas, baseadas em livros didáticos, onde não se tem dinamismo algum, sendo esse modo um meio que possa colaborar para a distorção do sentido da matemática. Muitos alunos enxergam a aula de matemática como um ambiente onde devem aprender a teoria e executar os exercícios, onde não precisam refletir ou construir o seu próprio conhecimento. Perceba que,

> Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante. (D’AMBROSIO, 1989, p. 2).

Porém, as aulas de matemática poderiam ter outro sentido, diferente do que se vê atualmente em diversas salas de aula. Devemos proporcionar aos alunos um ambiente onde seja possível a construção de conceitos por eles mesmos, a reflexão sobre as atividades e a tomada de consciência sobre o que está sendo feito, para que possam então encontrar o seu próprio caminho para que construam seus conhecimentos.

Em minha trajetória, após ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, no primeiro semestre, pude perceber o quão raso era meu conhecimento sobre a matemática em si e, contida nesse processo, estava a geometria. Através da disciplina em que estava matriculado (Geometria I), pude perceber que os conceitos e propriedades eram tão ou mais importantes que as figuras e desenhos, pois eram as propriedades que faziam da forma geométrica ela mesma e não um simples desenho. A partir disso, fui me familiarizando com o processo de provas e demonstrações geométricas, ao mesmo tempo em que ia sendo apresentado ao software GeoGebra.

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica, no qual podemos construir figuras a partir de suas propriedades. Nesse espaço de construção dinâmica proporcionado pelo software, podemos manipular vértices para alterar tamanhos de lados, posições, mas jamais as propriedades essenciais da figura, caso esteja construída corretamente. Um dos principais potenciais desse tipo de ambiente para a aprendizagem de geometria é o dinamismo, pois podemos mover as figuras, mudar seu aspecto, sempre fazendo com que se mantenha a figura que era em sua essência, ou seja, preservando suas propriedades geométricas.

Posteriormente, durante o curso, pude concretizar meu fascínio pela área da geometria e pelo software GeoGebra e suas potencialidades através do ambiente de geometria dinâmica durante as aulas de outra disciplina do curso (Educação Matemática e Tecnologia). Foi então que pude explorar e me interessar ainda mais pela geometria dinâmica, com todas suas potencialidades de visualização e consolidação de propriedades e conceitos das figuras geométricas. Inserido nesse contexto do dinamismo e das potenciais ferramentas do GeoGebra, temos o “arrastar”, que se torna uma ferramenta totalmente útil, se bem utilizada, para a visualização indireta de propriedades que se mantém intactas ao mexermos alguns pontos da figura produzida no ambiente digital.

Ainda, tive a oportunidade de aplicar os ensinamentos construídos até então quando fui professor de uma turma de segundo ano de ensino médio e trabalhei com os alunos conceitos de geometria plana e espacial. Foi quando tive a oportunidade de colocar em prática o que havia construído até então e experimentar as possibilidades que os ambientes de geometria dinâmica proporcionam para tornar possível a visualização e o entendimento dos alunos. Então pude perceber que estava na direção correta, pois a aprendizagem dos alunos foi potencializada pelo ambiente criado com o auxílio do software GeoGebra.

Logo, mais uma inquietação surgiu sobre o uso desses ambientes. Não planejei que os alunos fizessem uso do software. Apenas o usei como um expositor, para facilitar a visualização e o entendimento. Agora, me questiono sobre como o software poderia ser uma ferramenta importante na mão dos alunos, visto que, sobre o uso de tecnologias e softwares matemáticos, D'Ambrosio (1989, p. 5) afirma que "Em geral esses programas procuram criar ambientes de investigação e exploração matemática", e também, Gravina (2001) argumenta que estes ambientes: "São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador" (p.82), sendo possível que os mesmos conjecturem sobre os conteúdos abordados e formem seus próprios pensamentos sobre a geometria, por meio de um ambiente de geometria dinâmica utilizado por eles.

Ainda, outra inspiração, vinda das aulas de geometria que ministrei no estágio, refere-se ao objeto de estudo desse projeto, os quadriláteros. Como estamos buscando que os alunos sejam capazes de visualizar e reconhecer propriedades além das formas, que consigam ver o que está implícito ou que decorre de outras regularidades, o tema quadriláteros aproxima-se dessa pesquisa com potencial para esse estudo. Considerando suas propriedades, espera-se que os alunos possam refletir sobre as definições geométricas, por meio dessas informações "escondidas" nas construções, ou seja, propriedades implícitas ou declaradas das construções geométricas dinâmicas. Considero os quadriláteros um bom ponto de partida para que se comece a desenvolver a habilidade de argumentação em geometria, na qual os alunos poderão experimentar, criar, mover e explorar todos os recursos disponíveis no ambiente do software GeoGebra, pois,

> Acredita-se que uma metodologia de trabalho desta natureza tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante no processo de construção de seus conceitos. (D'AMBROSIO, 1989, p. 5).

com o objetivo de construírem seus próprios conhecimentos sobre os quadriláteros.

Aliado à vivência na universidade, iniciei um trabalho como auxiliar de ensino em uma escola de ensino infantil, fundamental e médio, fato esse que me fez enxergar a importância de que os alunos tenham amplo domínio sobre conceitos básicos da geometria. Sendo assim, percebi que poderia elaborar a pesquisa com essas diretrizes: consolidação de propriedades essenciais das formas geométricas, para que eu pudesse entender as potencialidades do ambiente digital para que os alunos buscassem a evolução do seu pensar geométrico, principalmente no campo das propriedades das figuras geométricas, evitando assim distorções no entendimento de todo conhecimento que é gerado a partir disso.

Surge a motivação e inquietação para a elaboração e aplicação dessa pesquisa, com o objetivo de que os alunos consigam identificar e conjecturar sobre as propriedades dos quadriláteros, proporcionando um ambiente no qual os alunos sejam protagonistas durante o processo de ensino/aprendizagem, buscando uma maior compreensão e que esses processos possam trazer maior qualidade no ensino de geometria e um novo sentido para as aulas de matemática, sem omissão de potenciais ambientes para ampliação das possibilidades aos alunos.

Buscando investigar sobre o uso do software GeoGebra e em consonância com a perspectiva de Sonza e Leivas (2018), de que há uma "[...] inegável necessidade de se buscar métodos e metodologias de ensino que tornem a aprendizagem de Matemática mais atrativa, que desperte o interesse do estudante" (SONZA; LEIVAS, 2018, p. 1549), a pergunta que irá conduzir a pesquisa é: **Como o uso do GeoGebra pode potencializar o pensamento geométrico de alunos do ensino médio sobre propriedades dos quadriláteros?**

Os objetivos específicos buscam propor uma abordagem dinâmica para o estudo das propriedades dos quadriláteros e investigar se uso do GeoGebra potencializa:

- A compreensão de propriedades de cada quadrilátero;
- A compreensão das classificações, classes e particularidades de cada quadrilátero;
- A compreensão de que cada quadrilátero pode ser classificado em mais de uma classe conforme suas propriedades;
- O entendimento sobre a importância das propriedades dos quadriláteros, em detrimento da análise da figura por si só.

Assim este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo foram apresentadas algumas dificuldades que o ensino de matemática vem enfrentando durante o tempo, dentre elas a dependência dos livros didáticos, ficando refém de ambientes pouco dinâmicos e muito estáticos e engessados, nos quais o aluno acaba não sendo o agente central no desenvolvimento do seu conhecimento. Ainda, o capítulo inicial traz experiências pessoais que levaram até a escolha do software GeoGebra para ser utilizado com o ambiente e recurso na busca pelo dinamismo e por uma atividade que fugisse do que é comumente feito em sala de aula. Esse capítulo também expõe os objetivos que são buscados com essa pesquisa.

O capítulo 2 apresenta as fundamentações teóricas em que a pesquisa se baseia, expondo de forma mais específica as problemáticas relatadas no capítulo 1 e avançando, no sentido de justificar as ferramentas que foram utilizadas na pesquisa para buscar soluções para as problemáticas apresentadas, dentre elas a definição dos quadriláteros como objeto central das atividades da pesquisa. O capítulo também apresenta as ideias sobre geometria dinâmica, avaliadas no uso com o software GeoGebra, e os recursos que serão utilizados para viabilizar o experimento prático. Além disso, no capítulo 2 está descrita a Teoria de Van Hiele para o ensino de Geometria. Dentro dessa teoria, destacam-se cinco níveis de compreensão e de desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo que a pesquisa terá ênfase nos três primeiros níveis, não buscando os dois níveis mais avançados.

O terceiro capítulo apresenta um breve panorama de trabalhos que estejam relacionados aos temas trabalhados, explicitando em quais aspectos essa pesquisa se diferencia e se aproxima das demais citadas.

A abordagem metodológica está descrita no capítulo 4. Nele estarão expostos o tipo de pesquisa realizada (pesquisa qualitativa), trazendo considerações teóricas e metodológicas que justificam a escolha por esse tipo de pesquisa, a apresentação sobre o local e os participantes da pesquisa, bem como a descrição das atividades e a análise ancorada na teoria de Van Hiele.

A descrição e análise dos dados coletados por meio das atividades da pesquisa continuam no capítulo 5, com mais enfoque e aprofundamento.

No capítulo 6 estão apresentadas as considerações finais e reflexões sobre a pesquisa realizada.

2. Considerações teóricas

Nas próximas seções, apresentaremos uma breve revisão sobre o cenário atual do ensino de Matemática, em particular, o ensino de Geometria, os ambientes e ferramentas que serão utilizados durante a pesquisa e a teoria de Van Hiele, que servirá como norteadora do olhar pesquisador durante toda a pesquisa.

2.1 Aprendizagem de Geometria

Antes mesmo de sermos apresentados à Matemática como uma matéria da escola já ouvimos e, por vezes, até reproduzimos o estereótipo de que é a matéria mais difícil, causando espanto e repulsa em diversas pessoas. De fato, a matemática é motivo de reprovação em provas, vestibulares, concursos e diversos outros processos seletivos. Por todo esse contexto, é possível perceber uma pré-disposição dos alunos em se acharem incapazes de aprender e entender a Matemática, subestimando a eles próprios e suas capacidades. Independentemente desse comportamento comum entre os alunos, a Matemática, não apenas enquanto disciplina, se faz presente e necessária no cotidiano de cada um de nós, além de ser capaz de facilitar diversos processos e atividades do nosso dia a dia, assim como ajudar na organização de ideias, na lógica e na nossa capacidade de expressão. Porém, muitos dos processos em que a Matemática está presente, se dão por meio da abstração, que é um processo necessário para que os alunos consigam desenvolver seus pensamentos e evoluir dentro dos processos de ensino. A exuberância de processos abstratos e a dificuldade em trazer situações concretas dentro da matemática acabam afastando os alunos, deixando-os menos confiantes e com cada vez menos segurança, gerando abandono e desinteresse durante o processo de ensino.

Ao se analisar brevemente o processo histórico do ensino de matemática no Brasil, especificamente do ensino de geometria, é possível perceber alguns acontecimentos que ajudam a justificar o contexto atual.

Conforme afirma Berti (2012, p. 19) sobre o ensino de Geometria no Brasil, “sua importância ora foi relegada à formação de artilheiros, militares e engenheiros, ora para a preparação dos alunos para ingressar no Ensino Superior”.

O que nos dá uma breve ideia de como a Geometria vem sendo tratada desde o surgimento da necessidade de seu ensino no país, ou seja, como um conhecimento para poucos, um assunto que não fazia parte do conhecimento básico necessário, não tendo a sua posição garantida na formação básica da população, sendo destinada apenas a um grupo seleto.

Devido à trajetória histórica do ensino de Geometria, atualmente, podemos observar defasagens, que cada vez mais se evidenciam e acarretam problemas na formação dos alunos, conforme destaca Gravina (1996), observando que os alunos chegam à universidade com problemas relacionados aos níveis mentais de dedução e do rigor. Além disso, a autora ressalta a falta de domínio de processos fundamentais na geometria, como o raciocínio dedutivo, generalizações e compreensão dos objetos geométricos. Isso torna-se um desafio para que se possa trabalhar com argumentação e explicação do raciocínio geométrico, até mesmo no ensino superior. Tal situação decorre das práticas de ensino de nossas escolas (GRAVINA, 1996).

Sobre tais práticas, podemos analisar a subutilização do espaço de aula, que poderia servir para desenvolver os conhecimentos geométricos a partir de noções intuitivas que o aluno já possui. É normal que o aluno, ao chegar na escola, já saiba identificar algumas figuras geométricas, como, por exemplo, o quadrado. Quando em sala de aula, se depara com a exposição de um quadrado e a pergunta sobre qual figura está sendo exposta, logo, responderá que é um quadrado, mas estará apenas reproduzindo um conhecimento que já lhe pertencia. Ao invés de apenas reproduzir os conhecimentos que já domina, o espaço da aula tem a possibilidade de provocar o aluno, de forma que esse seja capaz de argumentar sobre sua resposta. Por exemplo, a atividade poderia ser de exposição de várias figuras geométricas, onde o aluno deveria apontar quais seriam quadrados e justificar o motivo de sua escolha. Assim, o ambiente estaria buscando potencializar a capacidade argumentativa, além de abrir espaço para a construção de novos conhecimentos, como as propriedades de um quadrado e sua definição, ao invés de se limitar a reprodução de conhecimentos adquiridos previamente.

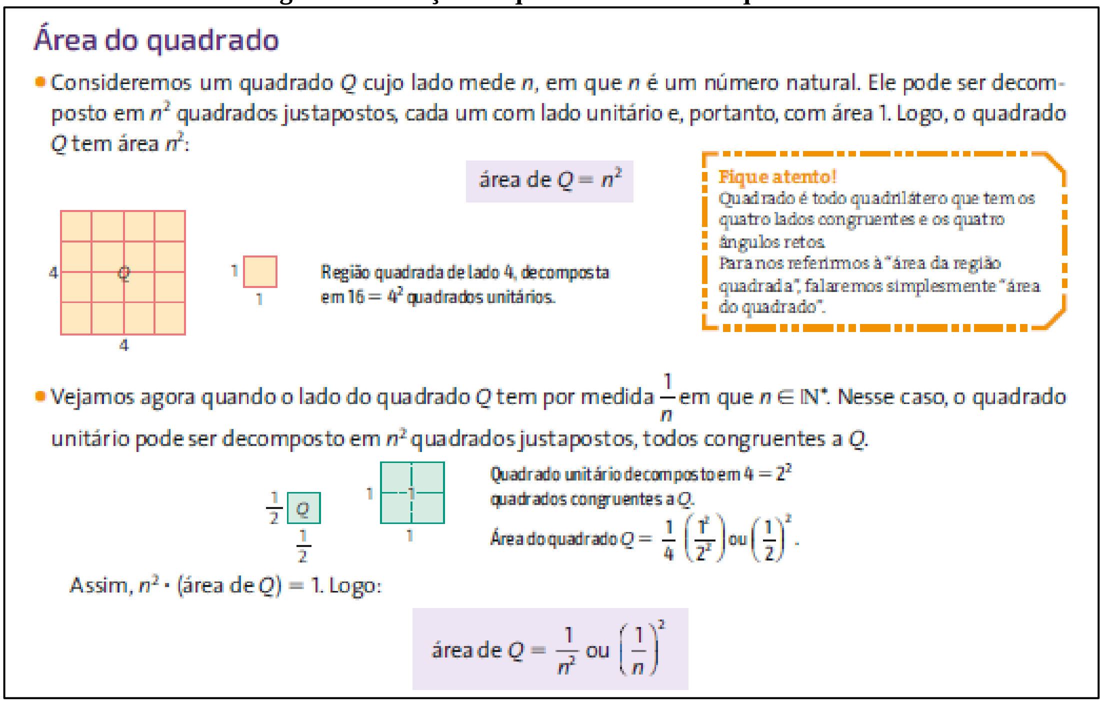
Também, uma ferramenta presente e muito utilizada no ambiente escolar é o livro didático, que na maioria das vezes é utilizado como única fonte de material a ser estudado, onde podemos observar algumas características que não fomentam um ambiente propício para a construção de novos conhecimentos, conforme nos traz Gravina:

> Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos. (GRAVINA, 1996, p. 2).

Sendo assim, faz-se com que posteriormente se tenha dificuldade de reconhecimento das figuras em outra posição, e ainda, dificuldade na generalização dos conceitos e identificação das propriedades de cada figura geométrica. Além disso, quanto à consequência de termos um sistema estático produzido pelos livros didáticos e pela falta de oportunizar aos alunos o trabalho em ambientes dinâmicos, Gravina (1996, p. 2) afirma que “a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das propriedades do objeto, quer no aspecto conceitual ou quer no aspecto figural”.

Analisando o livro didático do segundo ano do ensino médio “Matemática Contexto e Aplicações” (DANTE, 2016), que utilizei em meu estágio, por orientação da escola, podemos observar que os aspectos discutidos por Gravina (1996) ainda hoje permanecem nesse tipo de material. A Figura 1 explicita a definição de quadrado e a área do quadrado.

Figura 1 Definição de quadrado e área do quadrado


Área do quadrado

- Consideremos um quadrado Q cujo lado mede n, em que n é um número natural. Ele pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, cada um com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, o quadrado Q tem área n^2:

área de $Q = n^2$

Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ quadrados unitários.

Fique atento!
Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.
Para nos referirmos à “área da região quadrada”, falaremos simplesmente “área do quadrado”.

- Vejamos agora quando o lado do quadrado Q tem por medida $\frac{1}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, o quadrado unitário pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q.

Quadrado unitário decomposto em $4 = 2^2$ quadrados congruentes a Q.

Área do quadrado $Q = \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{2^2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Assim, $n^2 \cdot$ (área de Q) $= 1$. Logo:

área de $Q = \frac{1}{n^2}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

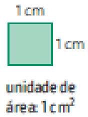
Fonte: Matemática contexto & aplicações (Dante, 2016)

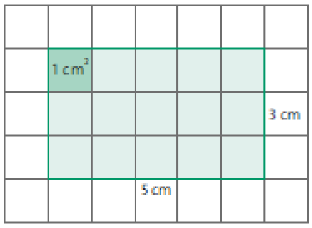
Na Figura 2 estão apresentadas a definição de retângulo e de área do retângulo.

Figura 2 Definição de retângulo e área do retângulo

Área do retângulo

O retângulo pintado abaixo contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm².





Fique atento!
Retângulo é todo quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.
Aqui também, quando falamos "área do retângulo", estamos subentendendo "área da região retangular". E nos demais polígonos nas próximas páginas também.

Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas no retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura:

$$5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

Nesse caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.

Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais quaisquer, a área do retângulo R é dada por:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Consideremos um retângulo R de base b e altura h, em que b e h são números reais.

Fonte: Matemática contexto & aplicações (Dante, 2016)

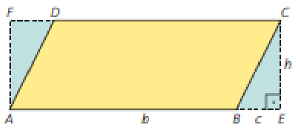
E na Figura 3 tem-se a definição de paralelogramo e a área do paralelogramo.

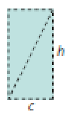
Figura 3 Definição de paralelogramo e área do paralelogramo

Área do paralelogramo

Vamos calcular a área do paralelogramo $ABCD$ tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h.

Examine a figura:





Fique atento!
Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

O paralelogramo está contido em um retângulo de base $b + c$ e altura h. A área desse retângulo é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Observe que o retângulo é formado pelo paralelogramo mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ch. Assim:

$$bh + ch = (\text{área do paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\text{área do paralelogramo} = bh$$

Isso significa que a área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela medida da altura correspondente a essa base escolhida.

Fique atento!
Esse resultado não depende da base escolhida. Se tivéssemos escolhido outro lado como base e tomado a altura correspondente, o resultado seria o mesmo.

Fonte: Matemática contexto & aplicações (Dante, 2016)

Podemos perceber que o livro didático analisado nos traz justamente o que tratamos como a matemática formal e engessada citada anteriormente. Também percebemos que os desenhos prototípicos citados por Gravina (1996) estão presentes e são os únicos apresentados pelo livro. Além disso, fica evidente que o material não traz a ideia principal buscada nessa pesquisa, que é o estudo sobre as propriedades e a análise das regularidades implícitas em cada uma das formas. Por fim, podemos identificar a estaticidade que um livro didático apresenta, não trabalhando as similaridades que as formas podem ter e nem suas diferenças, o que não é problema do livro didático, mas sim uma característica limitadora desse tipo de material. O foco recai sobre fórmulas e cálculos, em detrimento das propriedades de cada figura, justamente o oposto do que se propõe essa pesquisa.

Isto posto, como método e mecanismo para que se possa ir além da estaticidade dos livros didáticos e desenhos em quadros e cadernos, temos os recursos de geometria dinâmica, através de softwares que proporcionam a visualização e manipulação de figuras em movimento. A seção a seguir aborda esses aspectos.

2.2 Geometria Dinâmica

Atualmente, ambientes de geometria dinâmica têm colaborado para o resgate das discussões sobre a importância da tecnologia, usada em prol da aprendizagem dos alunos, nas aulas de Matemática. A possibilidade de movimentar figuras construídas com propriedades geométricas que as definem faz realçar regularidades e propriedades importantes no processo dedutivo (NOTARE; BASSO, 2018).

Corroborando com a ideia da necessidade de compreensão sobre os objetos geométricos e suas características, Notare e Basso (2018, p. 2) afirmam que "Softwares de geometria dinâmica são ambientes que permitem a construção de figuras geométricas a partir de suas propriedades básicas, que quando movimentadas preservam suas características originais", aproximando cada vez mais a abordagem através de softwares de geometria dinâmica do objetivo principal dessa pesquisa.

Especificamente, trabalharemos com o GeoGebra, que conforme o site do próprio software (geogebra.org/about) é um "software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote[...]" e também, para dar destaque à capacidade do software, o site explicita que "O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.". Com suas credenciais e a experiência já obtida através do uso do software, ele se torna a escolha para a execução da pesquisa.

No universo de possibilidades que o GeoGebra nos proporciona está a ação de arrastar, que conforme Leung,

> possibilita ao aluno um meio para expressar seus pensamentos de maneira visual-dinâmica, que pode contribuir para a formação do conhecimento abstrato. O dinamismo e o arrastar proporcionam que o aluno visualize “concretamente” variações de objetos conceituais, que só seriam possíveis de serem visualizados a partir de uma “animação mental”, com o objetivo de reconhecer padrões de variação ou propriedades invariantes. O sucesso de perceber tais padrões ou propriedades geralmente ajuda a compreender o conceito matemático abstrato subjacente. (apud DICKEL, 2019, p. 20).

Ainda, DICKEL (2019) afirma que

> os alunos, ao manipularem os objetos nos softwares de geometria dinâmica, em particular no GeoGebra, expressam por meio desta exploração diferentes modalidades de arrastamento, a fim de alcançar objetivos, como explorar, conjecturar, validar conceitos matemáticos, entre outros. (DICKEL, 2019, p. 20).

Tal afirmação corrobora com o uso do arrastar dentro das atividades dessa pesquisa para os objetivos listados anteriormente.

Ainda, a ação de arrastar pode ser feita de várias maneiras, conforme Arzarello (2002), porém os objetivos das explorações feitas por meio da ação de arrastar estão definidos por Restrepo (apud DICKEL, 2019, p. 20), e são eles três objetivos:

1. Arrastar para identificar as invariantes da figura: dada uma construção, movem-se os pontos livres para encontrar suas invariantes. Então identificam-se as propriedades geométricas da figura.
2. Arrastar para observar variações durante o movimento: movem-se os pontos de uma construção, a fim de compreender as regularidades na variação, observar quais são suas variações, o que muda e o que é conservado.
3. Arrastar para encontrar o caminho de um ponto: move-se um ponto para identificar sua trajetória, o objeto geométrico descrito por este ponto.

Nas atividades desenvolvidas nessa pesquisa, estaremos interessados nesses três objetivos, com ênfase nos objetivos 1 e 2, nos primeiros encontros e a inserção do objetivo 3 no último encontro, onde será realizada uma construção livre por parte dos alunos.

2.3 Teoria de Van Hiele

Para abordar os alunos com atividades que sejam condizentes com a metodologia de trabalho pretendida e para a análise de dados da pesquisa utilizaremos a Teoria de Van Hiele. Tal teoria permite a classificação e a análise do pensamento geométrico atual de cada aluno separada em níveis.

A teoria de Van Hiele pode contribuir com nossa pesquisa para sustentar a análise do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois é possível analisar a capacidade dos alunos ao pensar sobre geometria e sobre alguns exemplos básicos envolvendo o tema quadriláteros, como reconhecer um quadrado (enquanto figura) mas não conseguir defini-lo, ou reconhecer um quadrado e um retângulo, mas não compreender que um quadrado é também um retângulo (LINDQUIST e SHULTE, 1994, p.1). A teoria desenvolvida por Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Marie Van Hiele classifica o nível de maturidade geométrica do aluno a partir de comportamentos como os citados anteriormente. A partir dessa classificação estabelecida pelo do modelo Van Hiele é possível não apenas avaliar as habilidades dos alunos, como também orientar a formação para que se possa evoluir e subir níveis, sob essa perspectiva do modelo de Van Hiele.

O modelo é constituído de cinco níveis de compreensão e eles são denominados "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor", onde cada um deles descreve características do processo de pensamento. Ainda, segundo esse modelo, os alunos vão evoluindo sequencialmente, não sendo possível pular etapas (LINDQUIST E SHULTE, 1994, p.2).

O nível da visualização (nível 0) é o estágio inicial, onde o aluno reconhece as figuras geométricas através de suas formas e não por suas propriedades. Neste nível o aluno é capaz de identificar formas específicas e reproduzi-las. Porém, alguém nesse nível, ao se deparar com um quadrado, não seria capaz de reconhecer que a figura tem ângulos retos e lados opostos paralelos e congruentes, por exemplo.

Em seguida temos o nível de análise (nível 1), onde os alunos começam a entender as características das figuras. Mas, ainda nesse nível os alunos não são capazes de explicar relações entre propriedades, não veem relações entre figuras e não dominam as definições.

O nível de dedução informal (nível 2) é onde os alunos são capazes de estabelecer inter-relações de propriedades dentro de uma figura ou entre figuras, sendo capazes de reconhecer propriedades da figura e reconhecer classes de figuras. Esse nível se delimita pela não compreensão do significado de dedução em sua totalidade ou o papel dos axiomas.

É então que é apresentado o nível de dedução (nível 3), onde os alunos compreendem o significado de dedução como uma forma de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Nesse nível o indivíduo é capaz de construir demonstrações, além de enxergar a possibilidade de desenvolvê-las não só de uma maneira. Também entende a interação das condições necessárias e suficientes, e faz distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

Enfim chegamos ao último dos cinco níveis, o rigor (nível 4), onde o aluno é capaz de perceber a geometria no plano abstrato, podendo estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes.

Nesse estudo os níveis 3 e 4 não serão enfatizados, pois almejamos que os alunos sejam capazes de reconhecer propriedades e classes de figuras e ainda consigam estabelecer deduções informais, buscando um pleno desenvolvimento das capacidades básicas dos alunos ao trabalhar com a geometria. Ainda não se pretende, com essa pesquisa, que os alunos atinjam níveis de dedução ou rigor, por isso não haverá ênfase nos níveis 3 e 4.

Além da compreensão de cada um dos níveis, os Van Hiele identificaram propriedades que são capazes de orientar a tomada de decisão no ensino. Essas propriedades trazem que a Teoria de Van Hiele é sequencial, como dito anteriormente; que a progressão depende mais do conteúdo e métodos de instrução do que da idade e não se pode pular um nível; que os objetos ligados a um nível serão os objetos de ensino do nível seguinte; que segundo Lindquist e Shulte (1994, p.4, apud Pierre Van Hiele, 1984ª, p.246) “cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos”; e que o nível do aluno e do curso devem ser o mesmo para que o aprendizado e o progresso desejados sejam verificados.

2.4 Trabalhos Correlatos

Perante a investigação que se propõe essa pesquisa, foi realizada uma busca por trabalhos relacionados ao tema, que constituiu a pergunta: **Qual o panorama atual de trabalhos que envolvem os quadriláteros e o uso do GeoGebra para a sua compreensão?** A partir desse questionamento, foi realizada uma busca nos seguintes bancos: repositório digital da UFRGS Lume e Google Acadêmico sobre pesquisas, dissertações e teses que abordem o uso de ambientes de geometria dinâmica para o ensino dos quadriláteros. Nessa pesquisa, foram utilizadas as seguintes palavras-chave: quadriláteros, GeoGebra, sendo encontrados trabalhos que satisfazem os pré-requisitos da busca, trabalhos esses que se aproximam ou divergem dessa pesquisa pelos motivos que serão descritos posteriormente. O Quadro 1 abaixo apresenta informações sobre os trabalhos que serão apresentados.

Quadro 1 Trabalhos correlatos

Quadro de informações				
Título	Autor(es)	Ano	Local	Assunto
Aplicação do software GeoGebra no estudo dos quadriláteros notáveis	Dorneles	2011	Alegrete, RS	Ensino de quadriláteros notáveis utilizando o GeoGebra
As construções geométricas no ensino dos quadriláteros	Berti	2012	Porto Alegre, RS	Ensino de quadriláteros utilizando o GeoGebra
O ensino de quadriláteros e suas propriedades com o uso do GeoGebra: uma análise segundo o modelo de van hiele	Thums	2015	Porto Alegre, RS	Ensino de quadriláteros utilizando o GeoGebra
Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental	Costa e Santos	2016	Recife, PE	Ensino de quadriláteros utilizando o GeoGebra

Dorneles (2011), em sua monografia, apresenta demonstrações geométricas sobre os quadriláteros notáveis e propõe a resolução de exercícios de livros didáticos para turmas de 6º a 8º ano do ensino fundamental, utilizando os recursos do software GeoGebra por meio de um passo a passo para que os alunos sigam ao fazerem uso do ambiente digital. A monografia de Dorneles (2011) difere-se do abordado nesse trabalho no sentido de que na presente pesquisa serão utilizadas construções de quadriláteros no GeoGebra, a partir das quais, os alunos de 3º ano do ensino médio deverão fazer uma análise, identificar suas propriedades, responder questionamentos e criar suas próprias construções, proporcionando assim que o ambiente seja de liberdade, criatividade e experimentação, não apenas de reprodução.

Berti (2012), em seu TCC, apresenta o desenho geométrico como um dos pilares de sua pesquisa, traz a busca por aliar materiais concretos e recursos tecnológicos, trabalhando com alunos de 8º ano do ensino fundamental. O TCC de Berti (2012) difere-se da pesquisa aqui apresentada, pois temos enfoque total no ambiente digital para a construção do conhecimento sobre quadriláteros, sem buscar interação com materiais concretos. Porém, nossa pesquisa aproxima-se do TCC de Berti (2012) na medida em que ambas se baseiam na teoria de Van Hiele para analisar os níveis de compreensão e as fases de aprendizagem dos sujeitos participantes.

Thums (2015), em seu trabalho de conclusão de especialização, propõe uma atividade de construção livre de quadriláteros para alunos do 8º ano do ensino fundamental, sem apresentação prévia de outras construções, além de não trabalhar a inclusão de classes dos quadriláteros. Portanto, o trabalho de Thums (2015) distancia-se de nossa pesquisa, pois buscamos, por meio da atividade de caixa preta, fazer com que os alunos observem regularidades primeiramente, para depois partirem para a construção de suas figuras, e ainda, buscamos que os alunos sejam capazes de classificar os quadriláteros conforme suas classes. No entanto, essa pesquisa se aproxima do trabalho de Thums (2015) na medida em ambas fazem uso de Van Hiele para analisar o processo e na busca pela percepção, por parte dos alunos, das propriedades e regularidades de cada um dos quadriláteros.

Costa e Santos (2016), em seu artigo, propõem uma atividade para buscar entender como os alunos do 6º ano do ensino fundamental dominam, ou não, as propriedades de cada um dos quadriláteros notáveis, atividade essa que é apenas de utilização do software, por meio de atividades de construção de alguns desses quadriláteros. Ainda, Costa e Santos (2016) fazem uso de uma teoria baseada na teoria de Van Hiele, mas não da própria teoria. Portanto, o artigo de Costa e Santos (2016) se distancia dessa pesquisa, a medida que procuramos proporcionar aos alunos do ensino médio, primeiramente, uma atividade em que possam mexer com os quadriláteros sem que eles se deformem, assim sendo possível que observem as regularidades de cada figura, para que busquem refletir sobre elas e suas propriedades. No entanto, o artigo de Costa e Santos (2016) se aproxima de nossa pesquisa quanto a busca da investigação sobre o entendimento dos alunos quanto aos quadriláteros notáveis, principalmente sobre suas regularidades, propriedades e classificações.

O capítulo a seguir apresenta os aspectos metodológicos da pesquisa.

3. Abordagem Metodológica

Esta seção visa estabelecer os aspectos metodológicos utilizados para investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar a compreensão sobre quadriláteros e incentivar os alunos ao pensar geometricamente no ensino médio. Para conduzir a pesquisa, realizou-se uma sequência de atividades com os alunos com a utilização do GeoGebra para visualizarem e manipularem figuras já construídas e, em seguida, realizarem a construção de figuras geométricas no software partir de suas propriedades.

Assim, nesse capítulo apresentaremos a forma como a pesquisa foi elaborada, a escola, os participantes, uma descrição das atividades executadas durante o experimento prático e os procedimentos para coleta e produção de dados.

3.1 Pesquisa qualitativa

Para o desenvolvimento desse trabalho, a metodologia escolhida foi a pesquisa qualitativa.

> **Pesquisa Qualitativa:** considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p.26).

Para Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa caracteriza-se pela objetificação do fenômeno; pelas ações de descrever, compreender e explicar; pela precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; pela busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências.

Bogdan e Biklen (1994) corroboram a ideia ao trazerem que as características da pesquisa qualitativa são: ter o ambiente natural como fonte direta de dados e constituir o investigador como instrumento principal, isto é, o contexto em que a pesquisa ocorre influencia diretamente nos dados coletados; ser descritiva, ou seja, os dados recolhidos são em forma de palavras, imagens, áudios, vídeos e outros registros oficiais, e não em forma de números; o interesse maior pelo processo do que pelo resultado final, onde estamos mais interessados em cada passo utilizado durante o caminho percorrido do que no resultado obtido; análise de dados de forma indutiva, ou seja, as abstrações vão sendo construídas conforme os dados vão sendo coletados, não se almeja que a coleta de dados confirme hipóteses construídas previamente, “Não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes.” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16); o significado é de importância vital, isto é, existe o interesse para além da atividade, sobre como as pessoas dão sentido em suas vidas, nas questões abordadas na pesquisa.

Essa pesquisa se encaixa em uma abordagem de pesquisa qualitativa, pois pretende-se analisar as atividades desenvolvidas pelos alunos a partir de suas produções no software, falas, registros escritos e percepções de suas posturas durante as atividades, sendo tão descritivo quanto possível, buscando dar importância a cada passo dado por cada um dos alunos, onde cada novo passo significa uma nova descoberta e uma informação importante a ser compreendida na pesquisa.

3.2 A Escola, os participantes e os meios utilizados para pesquisa

A pesquisa foi realizada a partir dos dados coletados durante uma sequência de atividades aplicada na escola Colégio João Paulo I – Unidade Sul, localizada na Travessa Pedra Redonda, 400, Bairro Ipanema na cidade de Porto Alegre. A carta de aceite da escola encontra-se no Apêndice A.

Para organizar o grupo de estudantes participantes da pesquisa, foi feito convite a alunos do terceiro ano do ensino médio da própria escola, para de forma voluntária, participarem da atividade. A escolha pelos alunos do terceiro ano do ensino médio aconteceu por serem os alunos com quem o pesquisador tinha mais abertura, pois eram as únicas turmas que ele acompanhava durante as aulas semanalmente. O critério de escolha dos alunos se deu por interesse deles durante as aulas de Matemática e por disponibilidade para que pudessem fazer parte da pesquisa, concordando em participar por meio dos Termos de Assentimento e Consentimento apresentados nos Apêndices B e C.

O convite aos alunos foi feito individualmente, através de uma conversa com cada um dos alunos. Os sete alunos que aceitaram o convite, posteriormente, receberam os termos de consentimento e assentimento para que seus responsáveis assinassem. Durante a pesquisa, os alunos participantes estão identificados por A, B, C, D, E, F e G. Cabe ressaltar que os alunos, por serem do terceiro ano do ensino médio e pelas atividades da pesquisa serem realizadas nos meses de outubro e novembro, estavam envolvidos em diversas atividades. Além de participarem de atividades da escola nos dois turnos (manhã e tarde), alguns ainda eram alunos de cursos pré-vestibular e estavam se preparando para a prova do ENEM e para as provas finais da própria escola. Esse cenário fez com que os encontros fossem realizados no turno da noite.

Devido ao estado de pandemia que o mundo se encontra, houve a necessidade de que os encontros para a atividade fossem feitos de maneira remota, sendo eles realizados coletivamente e de modo síncrona, via Google Meet, que é um portal que possibilita a interação com os alunos, além da troca de imagem e áudio. A captação de dados se deu por meio do áudio e da tela de cada um dos alunos, através de suas produções e construções, além das atividades concluídas pelos alunos que eles salvaram e nos enviaram.

Para tornar a prática viável, além do Google Meet, fizemos uso do GeoGebraBook, uma ferramenta efetiva para a apresentação e organização das atividades, do Google Forms, para que os alunos respondessem aos questionamentos e, também, do GeoGebra Clássico, recurso disponível na versão para web, por meio do site geogebra.org, para que os alunos fizessem suas construções.

3.3 As Atividades

Tendo em vista que os alunos carregam consigo uma bagagem de conhecimento, adquirida durante o processo de escolarização e com situações cotidianas vividas, as atividades foram elaboradas para que fosse possível promover um ambiente fértil para analisar, sob a perspectiva da teoria de Van Hiele, os comportamentos e soluções encontradas para a pergunta que permeia essa pesquisa: **Como o uso do GeoGebra pode potencializar o pensamento geométrico de alunos do ensino médio sobre propriedades dos quadriláteros?**

A sequência das atividades realizadas envolveu a manipulação de quadriláteros e suas construções. Com as atividades de manipulação dos quadriláteros, por meio de um questionário, buscou-se entender em qual nível da teoria de Van Hiele cada aluno se encontrava, além de instigar o pensamento inicial sobre os quadriláteros e suas propriedades. As atividades de construção dos quadriláteros tinham como objetivo fazer com que os alunos pudessem explorar o ambiente de geometria dinâmica para utilizar as propriedades e regularidades observadas na atividade anterior em suas construções.

No Quadro 2, resumidamente, temos a descrição das atividades desenvolvidas em cada um dos encontros. Cada encontro foi planejado para ter a duração de 1 hora, com flexibilidade para continuar por mais tempo caso os alunos tivessem disponibilidade.

Quadro 2 Atividades desenvolvidas por encontro

Encontro	Atividade
Primeiro Encontro	Familiarização com o software GeoGebra; Atividade de Caixa Preta: manipulação de quadriláteros previamente construídos, sem que o aluno possa alterá-los; questionário sobre cada uma das figuras manipuladas.
Segundo Encontro	Atividade de Construção 1: construção de quadriláteros a partir de seus lados.
Terceiro Encontro	Atividade de Construção 1: construção de quadriláteros a partir de seus lados. Atividade de Construção 2: construção de quadriláteros a partir de suas diagonais.
Quarto Encontro	Atividade de Construção 2: construção de quadriláteros a partir de suas diagonais. Formulário Final.
Quinto Encontro	Atividade de Construção 2: construção de quadriláteros a partir de suas diagonais. Formulário Final.

Uma atividade de construção 3 havia sido programada, mas não foi executada por alguns fatores relacionados aos alunos e o período do ano em que as atividades foram desenvolvidas. Os alunos são do terceiro ano do ensino médio e como as atividades foram desenvolvidas durante os meses de outubro e novembro, eles estavam na iminência de provas finais, vestibulares e ENEM. Além disso, os alunos desenvolvem atividades na escola, com clubes de estudo e de práticas e projetos de estudo para o ENEM em turno oposto ao de aula, fazendo com que os encontros fossem realizados à noite. Alguns alunos também estudavam em cursos pré-vestibular, o que dificultava ainda mais a disponibilidade de tempo e foco. Por esses motivos, avaliou-se que não seria pertinente tomar mais tempo e atenção dos alunos com a atividade de construção 3, que será detalhada posteriormente.

Apresentamos a seguir o GeoGebraBook elaborado para organizar e disponibilizar as atividades propostas. A ferramenta consiste em um livro virtual criado no site geogebra.org, no qual é possível anexar construções realizadas previamente, para que outras pessoas tenham acesso, desde que o link seja compartilhado pelo desenvolvedor do livro. Na seção seguinte as Figuras 4 e 5 apresentam o GeoGebraBook utilizado, denominado "Quadriláteros" e a descrição de cada uma das atividades elaboradas para cada encontro, ressaltando que todos foram feitos por meio de reuniões via plataforma Google Meet, tendo a participação de sete alunos.

3.3.1 Familiarização com o GeoGebra

No primeiro momento, foi planejado apresentar as atividades que seriam desenvolvidas na oficina e disponibilizar aos alunos o link do site do GeoGebra e orientações para que cada um criasse sua conta no site. Após a criação das contas, os alunos acessam o aplicativo GeoGebra Classic, disponível dentro do próprio site. Após todos os alunos abrirem o aplicativo, o professor-pesquisador planejou apresentar as principais ferramentas do software que seriam utilizadas, navegando pelos menus disponíveis e enfatizando tais ferramentas, dentre elas: ponto, reta, segmento de reta, ponto médio, reta paralela, reta perpendicular, compasso, polígono, reflexão em relação a um ponto, ângulo com amplitude fixa.

Além disso, seriam apresentados os recursos de "exibir/esconder objetos", "exibir/esconder rótulos", "exibir/esconder eixos", "exibir/esconder malhas" e como fazer para gravar as construções feitas.

3.3.2 Atividade de Caixa Preta

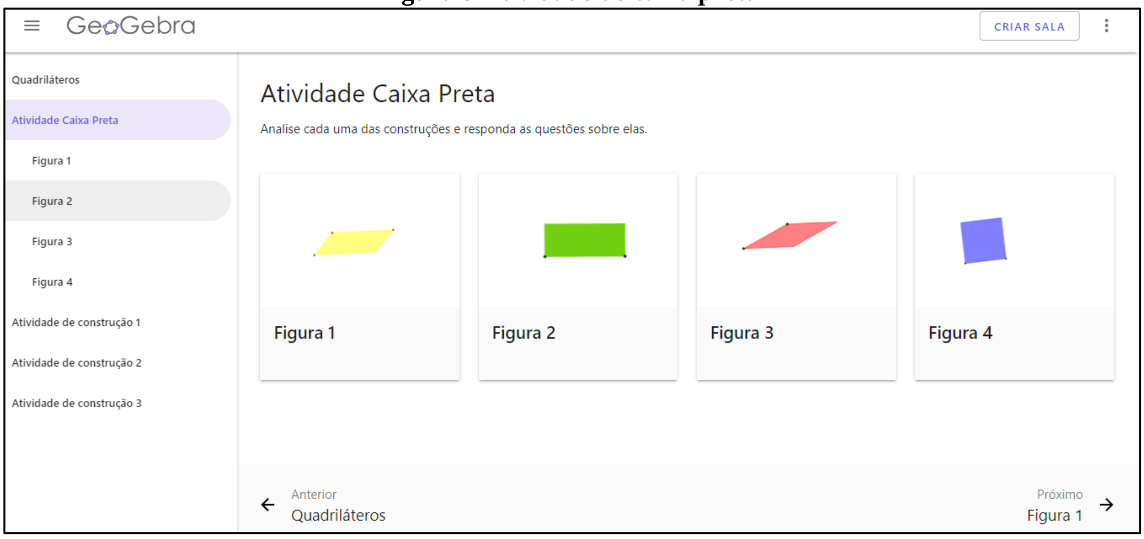
A tela inicial GeoGebraBook (https://www.geogebra.org/m/v3pauanr) está apresentada na Figura 4.

Figura 4 GeoGebraBook - Quadriláteros

Fonte: Acervo do autor

O link “Atividade Caixa Preta” apresenta a tela ilustrada na Figura 5.

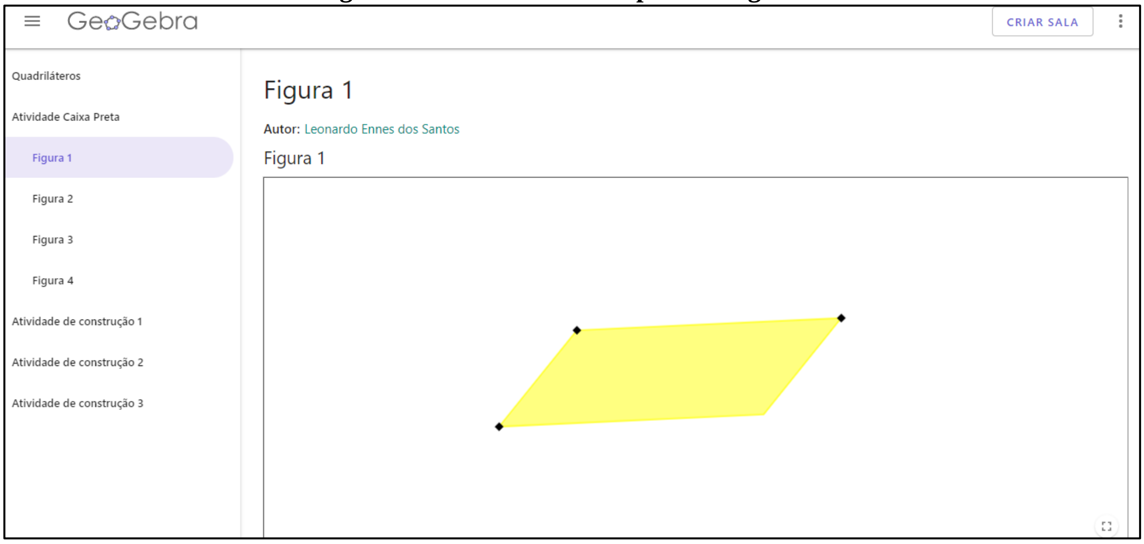
Figura 5 Atividade de caixa preta



Fonte: Acervo do autor

A proposta deste capítulo do livro é que os alunos naveguem pelas atividades solicitadas para resolvê-las. Ao clicar em “Figura 1”, a seguinte página é apresentada (Figura 6).

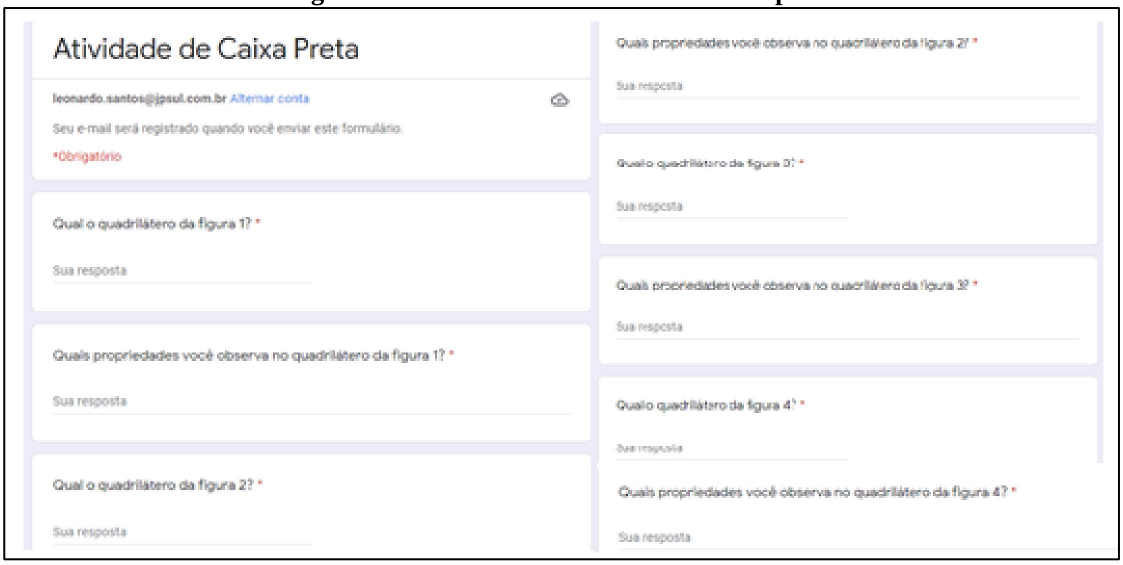
Figura 6 Atividade de caixa preta – Figura 1



Fonte: Acervo do autor

A atividade consiste em movimentar os vértices da figura, analisar o seu comportamento ao ser movimentada, buscando por regularidades e propriedades, e então responder a um questionário sobre a atividade, apresentado na Figura 7.

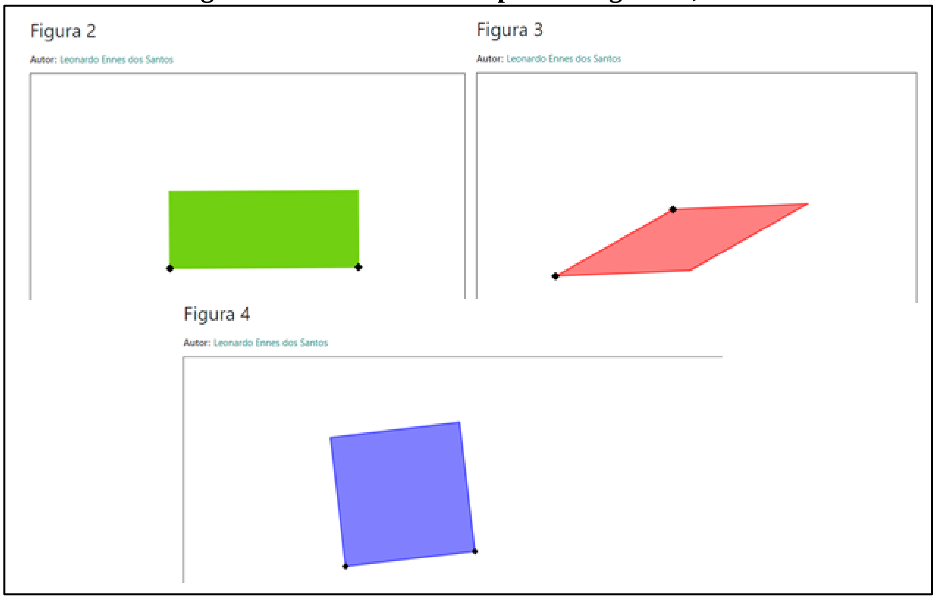
Figura 7 Formulário da atividade de caixa preta



Fonte: Acervo do autor

Para fins de apresentação, abaixo estão as telas da “Figura 2”, “Figura 3” e “Figura 4” da atividade de caixa preta (Figura 8).

Figura 8 Atividade de caixa preta – Figuras 2, 3 e 4



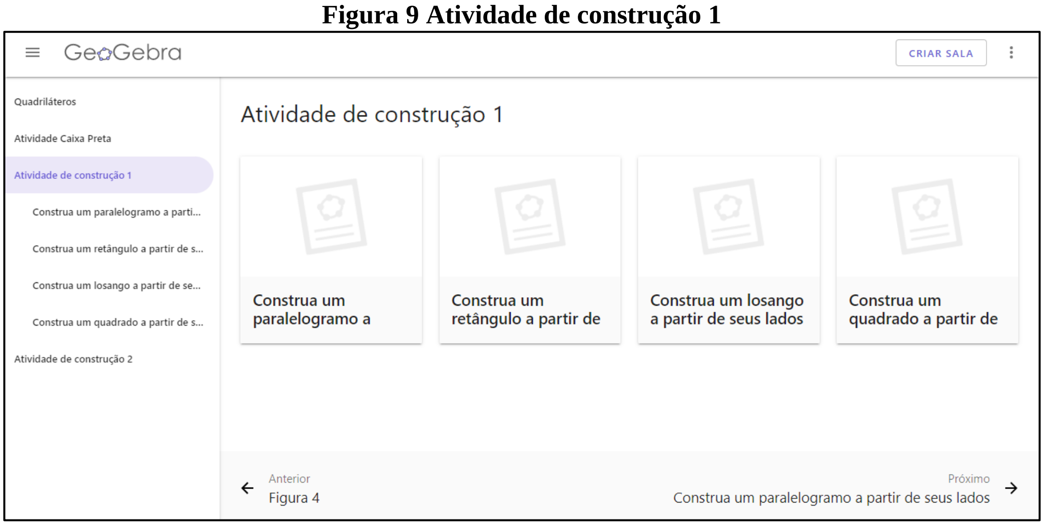
Fonte: Acervo do autor

Na subseção a seguir será apresentada a segunda atividade elaborada.

3.3.3 Atividade de Construção 1

O link “Atividade de Construção 1” propõe que os alunos construam cada uma das figuras apresentadas na atividade anterior iniciando a construção pelo lado da figura. A tela de apresentação desta atividade no GeoGebraBook está ilustrada na Figura 9.

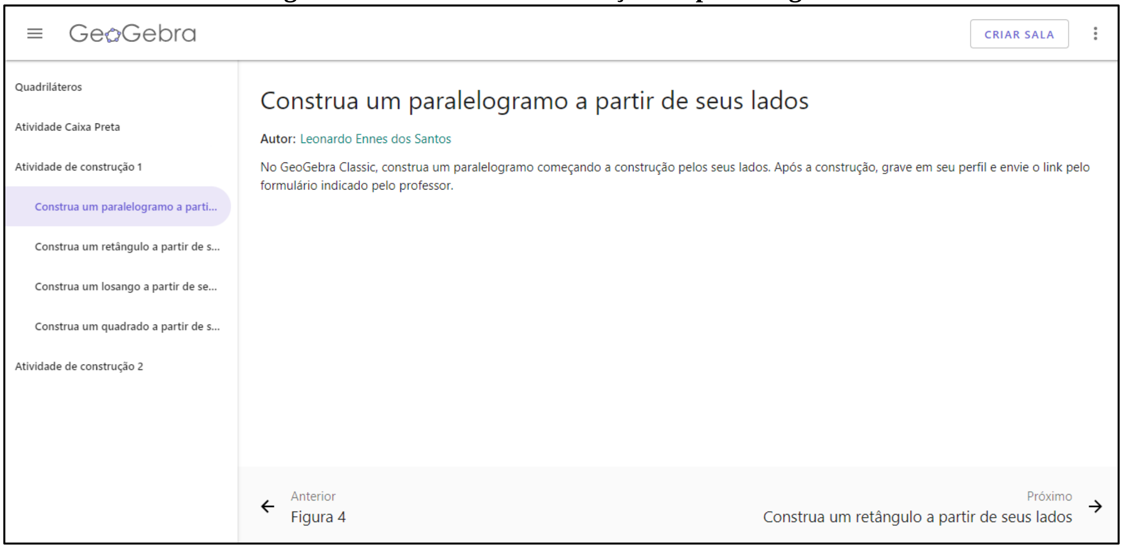
Figura 9 Atividade de construção 1



Fonte: Acervo do autor

No exemplo ilustrado na Figura 10 temos a primeira parte da atividade que propõe a construção de um paralelogramo. Posteriormente também foi proposta a construção de um retângulo, um losango e um quadrado.

Figura 10 Atividade de construção 1 - paralelogramo



Fonte: Acervo do autor

O formulário disponível para os alunos encaminharem o link e responderem questionamentos sobre cada uma das construções está ilustrado na Figura 11.

Figura 11 Formulário da atividade de construção 1

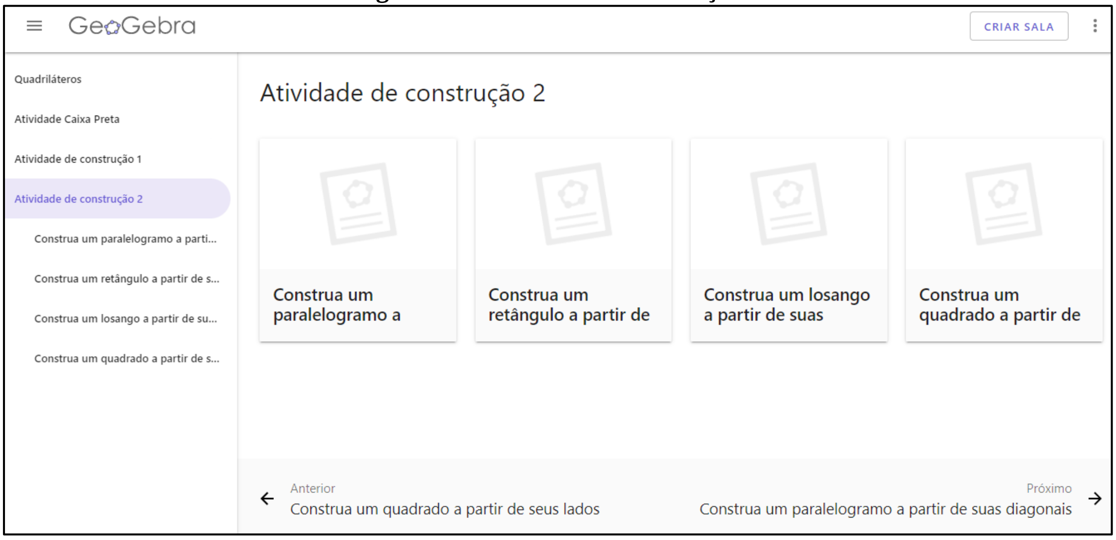
Fonte: Acervo do autor

Na subseção a seguir será apresentada a terceira atividade elaborada.

3.3.4 Atividade de Construção 2

O link "Atividade de Construção 2" propõe atividade similar à atividade anterior, porém os alunos devem construir os quadriláteros iniciando a construção pelas suas diagonais. Tal qual as demais atividades, o GeoGebraBook serviu como norteador para o enunciado da atividade, conforme mostrado na Figura 12.

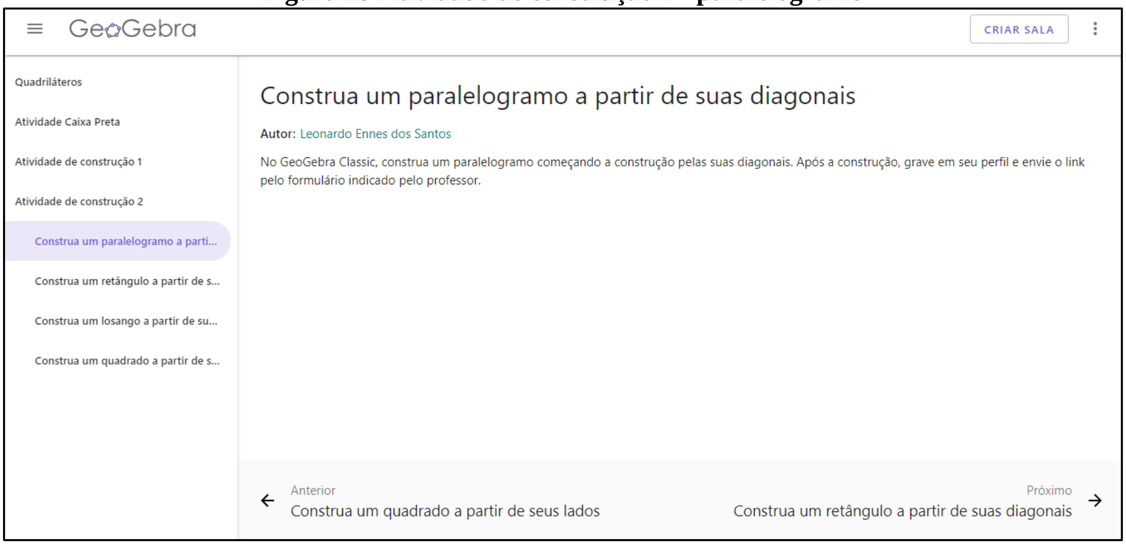
Figura 12 Atividade de construção 2



Fonte: Acervo do autor

Na Figura 13 está apresentado do enunciado da atividade de construção do paralelogramo.

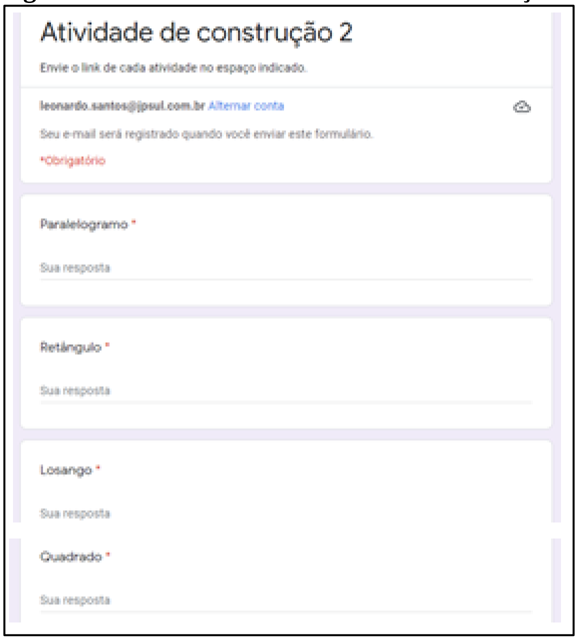
Figura 13 Atividade de construção 2 - paralelogramo



Fonte: Acervo do autor

Após as construções, os alunos gravam e enviam seus arquivos via Google Forms, conforme feito nas atividades anteriores e ilustrado pela Figura 14.

Figura 14 Formulário da atividade de construção 2



Atividade de construção 2

Envie o link de cada atividade no espaço indicado.

leonardo.santos@ipsul.com.br Alternar conta

Seu e-mail será registrado quando você enviar este formulário.

*Obrigatório

Paralelogramo *

Sua resposta

Retângulo *

Sua resposta

Losango *

Sua resposta

Quadrado *

Sua resposta

Fonte: Acervo do autor

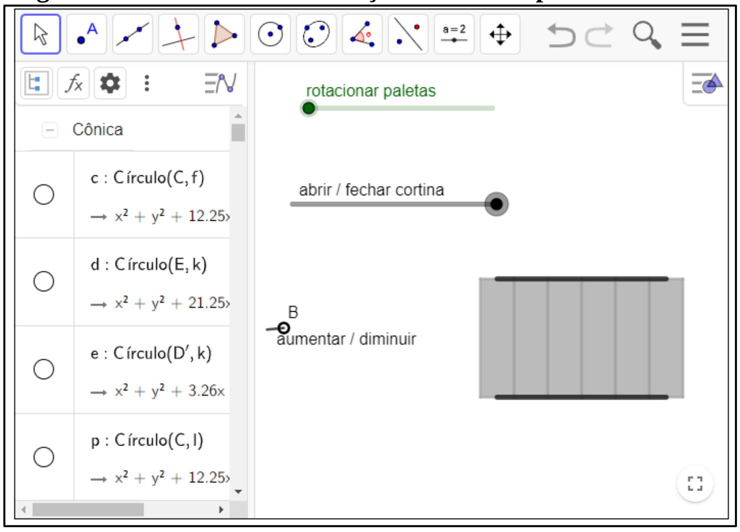
Na subseção a seguir será apresentada a quarta atividade elaborada.

3.3.5 Atividade de construção 3

Nessa atividade os alunos acessam a “atividade de construção 3” disponibilizada no GeoGebraBook, explorar a construção de uma cortina persiana vertical (Figura 15) e construir a sua própria cortina persiana vertical utilizando o GeoGebra Clássico.

Nessa construção, a cortina deveria aumentar e diminuir o seu tamanho não perdendo as proporções, abrir e fechar a cortina e rotacionar as paletas.

Figura 15 Atividade de construção 2 - cortina persiana vertical



Fonte: Acervo do autor

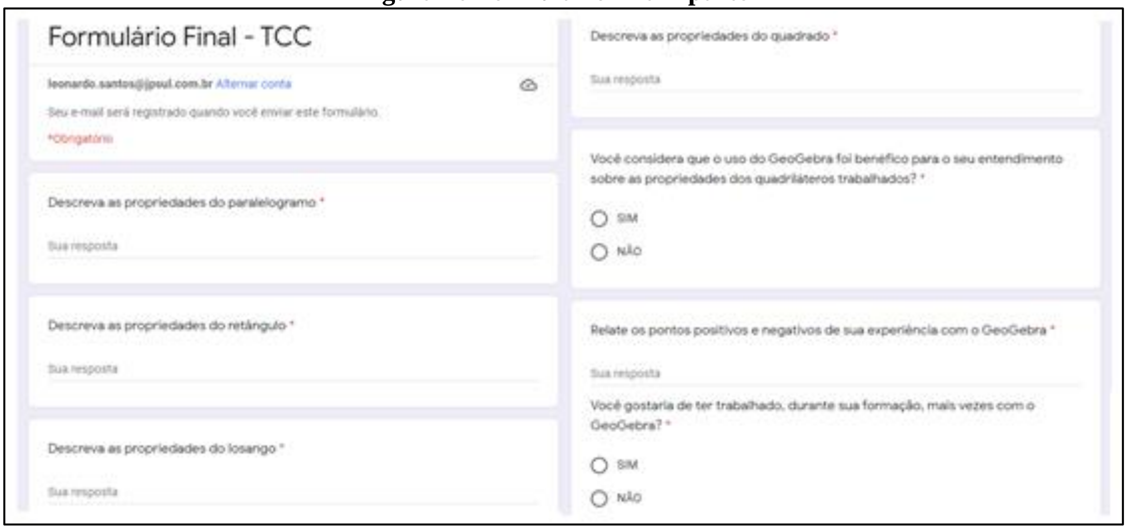
Após a construção, os alunos enviam o link de sua construção por meio de um formulário do Google.

Na subseção a seguir será apresentada a última atividade elaborada.

3.3.6 Formulário Final

O formulário final sobre as percepções dos alunos acerca das atividades realizadas encontra-se nas Figura 16.

Figura 16 Formulário final - parte 1



Fonte: Acervo do autor

No próximo capítulo estão as descrições dos encontros e as análises das atividades desenvolvidas.

4. Descrição e Análise dos Dados

Nesse capítulo iremos descrever e analisar, à luz do referencial teórico, como se desenvolveram cada um dos encontros previstos para essa pesquisa.

4.1 Primeiro encontro

Esse encontro, que teve duração de 1 hora e 5 minutos, começou com a orientação para que os alunos criassem suas contas no site geogebra.org. Enquanto os alunos criavam suas contas, foi dada uma breve explicação sobre o caráter livre do software e sobre as possibilidades de uso que eles teriam nos ambientes disponíveis no site. Após a criação das contas foi pedido que os alunos abrissem o aplicativo GeoGebra Clássico, disponível no site.

No primeiro momento, por meio do compartilhamento de tela, foram apresentados os recursos que seriam utilizados durante as atividades e foi explicada a função de cada um desses recursos e como utilizá-los. Durante a apresentação dos recursos, foi solicitado que os alunos fossem replicando as ações mostradas, para que tivessem uma primeira experiência com os recursos que seriam utilizados.

Após a familiarização com o software, foi disponibilizado aos alunos o link para o GeoGebraBook (Figura 4), para que fosse dado início à atividade de Caixa Preta, assim como foi compartilhado com os alunos o formulário sobre a atividade (Figuras 7). Os alunos foram orientados sobre a proposta da atividade e foi dado tempo e espaço para que eles pudessem realizá-la. Durante as atividades, foi enfatizado que elas tinham um caráter de pesquisa, esclarecendo que não se buscava uma resposta correta, mas sim entender o que cada um pensava sobre o assunto, para tirar uma possível inibição ou responsabilidade dos alunos sobre possíveis erros.

Em certo momento da atividade, o aluno G questionou: “o que seria uma propriedade?”. Identificamos, a partir da dúvida de G, um processo natural e esperado dentro da proposta, pois é a compreensão desse conceito que a atividade se propõe.

Então, lhe foi proposta uma reflexão: “qual uma propriedade do hexágono regular, por exemplo?

G: “Essa propriedade pode ser... Tem dois lados e duas bases, um negócio assim”.

Professor: “No caso da figura que tu estás vendo, tem quatro lados, o que tu podes falar sobre esses lados, sobre os ângulos... Coisas que tu vês que não mudam, se mantém regulares”

G: “Tá. Entendi. Era só para dar um norte”, sendo possível perceber que os questionamentos feitos pelo professor foram suficientes para que o aluno entendesse o que estava sendo solicitado.

Posteriormente, a aluna D questionou: “as respostas podem ser bem quinto ano né? Bem objetivas”.

Foi explicado que sim, as respostas poderiam ser bem objetivas e o espaço de resposta estava aberto para que os alunos escrevessem tudo que achassem pertinente, dando ênfase no caráter de pesquisa da atividade, onde tudo serviria como dado para uma análise posterior.

Conforme os alunos iam enviando as respostas da atividade, ia sendo feita uma conferência, para certificar que todos haviam entendido o que deveria ser feito. Após a análise, percebeu-se que o aluno B descreveu o que acontecia com cada uma das figuras conforme cada um dos vértices era movimentado, o que evidenciou falta de entendimento sobre o que é uma propriedade da figura. Então, foi explicado novamente que a descrição deveria ser das propriedades dos quadriláteros, sobre o que se mantinha regular independente de qual movimento era feito. O aluno entendeu e respondeu novamente o formulário.

Logo que todos os alunos enviaram as respostas da atividade, foi explicado para eles que no próximo encontro iniciar-se-ia uma atividade em que se espera que eles construam as figuras que tiveram contato na atividade desse primeiro encontro, utilizando os recursos previamente apresentados. Foi enaltecido que deveria se ter o cuidado para que a figura não se deforme, depois de criada, dando ênfase nesse requisito como um ponto central dentro das construções que viriam a ser feitas. Após essa conversa final, o encontro foi encerrado e os alunos foram liberados.

4.2 Segundo Encontro

O encontro, que teve duração total de 1 hora e 40 minutos, foi iniciado com o compartilhamento do link do GeoGebraBook elaborado, a explicação sobre a atividade a ser desenvolvida e a apresentação do formulário a ser respondido ao final da atividade. A proposta de atividade para este encontro era a construção de quadriláteros a partir do segmento lado.

Em um primeiro momento, conversamos sobre a construção de um triângulo equilátero iniciando por um de seus lados, para que eles tivessem um exemplo de como construir uma figura no GeoGebra por meio de suas propriedades e não à mão livre, compreendendo o papel dos recursos nesse processo. Assim, foram novamente enfatizados e explorados os recursos de reta paralela, reta perpendicular e polígono. Também foi reforçado aos alunos que se espera que as construções sejam feitas baseadas nas propriedades das figuras e que eles podem utilizar a pesquisa para relembrar as propriedades que utilizarão.

A aluna A estava sem computador no momento e tentou fazer construções pelo celular, questionando se era possível. Foi apresentado a ela os aplicativos do GeoGebra para celular, onde as atividades poderiam ser feitas também, da mesma forma que no computador.

Em certo momento da atividade o aluno E relatou: “estou tendo uma dificuldade de construir o paralelogramo como tu fez na atividade anterior, que quando tu mexia um lado, o outro oposto continuava paralelo. Para construir isso, tem alguma ferramenta que eu poderia tentar utilizar?”

Foi então proposto que o aluno fizesse uma reflexão sobre as propriedades da figura que estava sendo criada:

Professor: “vai começar por um segmento, a partir disso, tu sabes que o lado oposto a esse segmento tem que ser...?”.

E: “paralelo”.

Professor: “Então qual recurso do GeoGebra tu poderias utilizar?”

E: “Eu poderia usar a reta paralela, mas o problema é que eu não quero que fique a reta aparecendo, quero que fique apenas um segmento da reta”

Então salientamos que as construções no GeoGebra são feitas com as retas, segmentos e pontos inicialmente, mas assim que os pontos definitivos dos vértices das figuras fossem marcados, todos esses elementos poderiam ser escondidos na construção, restando apenas o polígono construído com esses vértices. Percebe-se que o aluno E está em processo de apropriação do GeoGebra, questionando e descobrindo possibilidades para sua construção.

A partir dessa conversa, surgiu a necessidade de exemplificação da utilização correta de recursos para preservar as propriedades das figuras. Para tal, foi construído um triângulo retângulo, enfatizando a preservação do ângulo reto, independente do modo como os vértices eram arrastados. No momento imediatamente posterior a essa exemplificação, o aluno G questionou: “como é que eu faço para tirar o resto do negócio? Como é que eu faço para tirar o resto da reta que eu não quero?”, ao mesmo tempo em que relatou estar com dificuldades para mexer no GeoGebra. Então foi pedido que o aluno compartilhasse sua tela na chamada, para que pudesse ser mais bem orientado.

Ao compartilhar sua construção na tela, verificou-se que o aluno conseguiu esconder os objetos que queria, porém não estava satisfeito com o resultado, pois o lado do retângulo desaparecia ao esconder as retas suportes, pois ele não havia construído os segmentos que determinam o lado. Então, foi apresentada a possibilidade de utilizar o recurso "polígono", e assim, o aluno G conseguiu atingir o seu objetivo.

Logo na sequência, o aluno B relatou: "estou fazendo, mas meus pontinhos não estão ficando cinzas, então quando eu mexo, mexe tudo, não fica travado um ponto só", querendo dizer que suas construções estavam deformando, as propriedades não eram preservadas, conforme eles haviam visto na atividade de Caixa Preta. Isto posto, a experiência com a atividade de Caixa Preta foi citada como exemplo pelo professor, relembrando que mesmo que os alunos arrastassem os vértices, a figura do paralelogramo, por exemplo, não sofria deformações quanto ao paralelismo e à congruência dos seus lados opostos e à congruência dos seus ângulos opostos, ressaltando que esses aspectos tinham de permanecer nas figuras. Esse momento do encontro foi amparado pelas ideias de Dickel (2019), que traz a importância do arrastar para a exploração e validação dos conceitos que desejavam empregar em suas construções.

A aluna D questionou: "eu quero fazer uma reta paralela ao segmento AB, mas eu clico no segmento AB e faz uma reta em cima dele, não uma paralela", o que mostra que a aluna ainda não reconhece uma reta sobre outra como duas paralelas. Mais do que isso, a aluna D precisa perceber a importância de definir o ponto pelo qual a reta paralela deve passar, um caso claro do processo de apropriação dos recursos do GeoGebra.

A aluna D foi orientada a clicar no segmento e mover o mouse, para verificar que a reta paralela poderia ser deslocada para fora do segmento em questão, utilizando a possibilidade de arrastar do GeoGebra para verificar que existem infinitas possibilidades de retas paralelas ao segmento dado.

O aluno F havia enviado todas as figuras e respostas do formulário e pediu para que fosse analisado, para ver se ele havia feito conforme o esperado. Ao analisar os arquivos enviados, verificou-se que o aluno F havia feito quadriláteros com quatro pontos (vértices) soltos no plano de construção, o que gerava um quadrilátero qualquer, que se deformava conforme os vértices eram arrastados. Então, foi novamente retomado o diálogo sobre os princípios da geometria dinâmica, destacando sobre o que se espera de construções realizadas no GeoGebra, ressaltando a importância de paralelismos serem preservados, assim como medidas congruentes e as demais propriedades de cada uma das figuras. Destacou-se o papel do arrastar para testar as construções (DICKEL, 2019). A partir deste diálogo, o aluno seguiu para uma nova tentativa de construção das figuras geométricas. Foi possível perceber que o aluno estava preso aos desenhos prototípicos (GRAVINA, 1996), pois utilizava as malhas do GeoGebra como referência em suas construções. Além disso, percebe-se que, nesse momento, o aluno parece não ter grande domínio sobre as propriedades das figuras e estar baseando-se apenas por suas formas, o que caracteriza o nível 0 de Van Hiele. Também foi possível avaliar que F estava com dificuldades para utilizar os recursos do GeoGebra, devido à falta de familiaridade com o software.

Ao avançar nas construções, o aluno G questionou: “como vou fazer um losango? Não tem uma coisa que eu consiga fixar um ponto ali”, querendo dizer que não conseguia fixar um ponto para fazer outro lado congruente.

O professor responde: “tu criaste um lado qualquer? Criou um segmento qualquer?”

G: “Sim”.

Professor: “E agora, o que tu precisas?”

G: “Sei lá”, demonstrando desconhecimento do próximo passo, possivelmente um desconhecimento sobre as propriedades do losango.

Professor: “Tu não precisas, talvez, de quatro lados iguais?”.

G: “Sim, foi o que eu tentei fazer, mas acontece o mesmo negócio do F, se tu clica na bolinha azul, sai deformando”, o que demonstra que o aluno já estava percebendo que era necessário manter a regularidade para não provocar deformações ao mexer os pontos livres da construção. Fica evidenciado que G já reconhece propriedades do losango, característica do nível 1 de Van Hiele, mas ainda não consegue impor essas propriedades em sua construção.

Após essa troca de ideias, como o aluno estava com dificuldade para compartilhar sua tela, o professor compartilhou a tela e foi seguindo os passos que o aluno propunha.

Primeiramente foi construído um segmento qualquer e então perguntado ao aluno: “o que precisa agora?”

G: “De mais três lados iguais”.

Professor: “Como fazemos um lado igual ao outro? Qual o recurso?”.

G: “Régua?”

Então o professor passou o mouse pelos menus e o aluno percebeu, alertando:

G: “É o compasso!”.

Ao selecionar o compasso, o professor pegou a medida do segmento e centrou o compasso em uma das extremidades do segmento anteriormente construído, conforme o aluno foi orientando. Após isso, marcou um ponto na circunferência e traçou outro segmento, adjacente ao que já existia.

Então, questionou ao aluno:

Professor: “Agora, tu vais me dizer sobre o losango. Ele não é um paralelogramo?”.

G: “sim”.

Professor: “então ele tem os lados...?”

G: “Lados iguais? A! Perpendiculares!?”

Professor: “ele é um paralelogramo, então...”

G: “a sim, lados paralelos”.

Então foi selecionado o recurso de reta paralela, que seria paralela a um dos segmentos e o professor questiona: “por onde tem de passar?”

G: “Pelo A?”, que se referia a uma extremidade do segmento AB, já pertencente a figura.

Professor: “e agora, o que tu vais fazer?”

G: “puxar outra paralela, agora em relação ao outro segmento”.

Professor: “e passar por onde?”

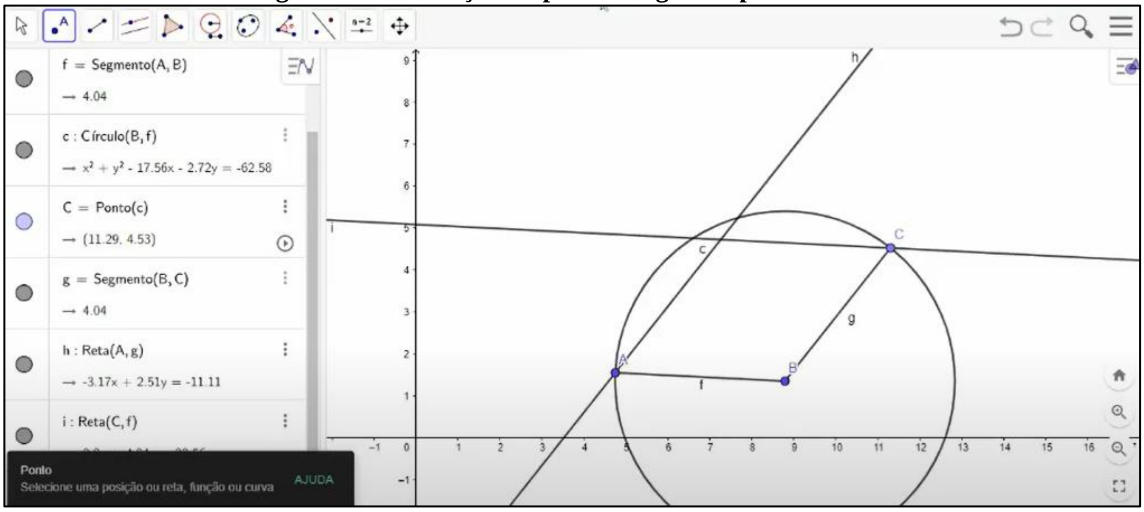
G: “pelo C”, referindo-se à extremidade do segmento BC, adjacente ao segmento AB.

Professor: “E aí?”

G: “aí tá feito”, sinalizando que entendeu a construção que guiou para que fosse feita e saberia como finalizá-la.

A Figura 17 ilustra o que foi feito durante esse diálogo.

Figura 17 Construção do professor guiada pelo aluno G



Fonte: Acervo do autor

Então, surge um questionamento do aluno B.

B: “Professor, tem que usar o compasso em todas as construções? Para ficar bem retinho”, indicando que o compasso fosse o recurso que iria garantir as propriedades necessárias, demonstrando não ter entendido a função real do compasso, que deveria ser utilizado para garantir a congruência entre os lados.

Professor: “A partir do momento em que for traçado um dos lados, a gente sabe que o lado oposto, em todas essas figuras, terá de ser congruente, então é um bom recurso para isso. Mas, por exemplo, o G construiu o retângulo sem utilizar o recurso do compasso”.

B: “Acho que acabei de entender o desenho, vou tentar agora e se não der certo vou compartilhar minha tela”.

Imediatamente, a aluna A, que estava sem acesso ao computador no dia, relatou:

A: “Não tô usando nada, não tô usando compasso, não tô usando polígono, tô fazendo com o dedo mesmo. Quero ver se vai dar certo isso”.

Professor: “Mesmo assim tu tens de usar os recursos”

A: “Eu tô usando as retas”.

Professor: “Usando só as retas?”

A: “Sim, segmentos, só”.

Então, a tela do professor foi compartilhada com a aluna para mostrar que, fazendo a construção como ela estava fazendo, a figura iria deformar ao mexer qualquer um dos vértices, perdendo suas propriedades. Para exemplificar, foi apresentada uma construção de losango, na qual a figura não deformava, com todas as regularidades mantidas, não importando o quanto os vértices livres fossem arrastados. Como resposta à análise da figura exposta, a aluna A relatou:

A: “Sim, fiz tudo errado”, demonstrando entendimento de que seriam necessários outros processos para que a construção fosse feita corretamente.

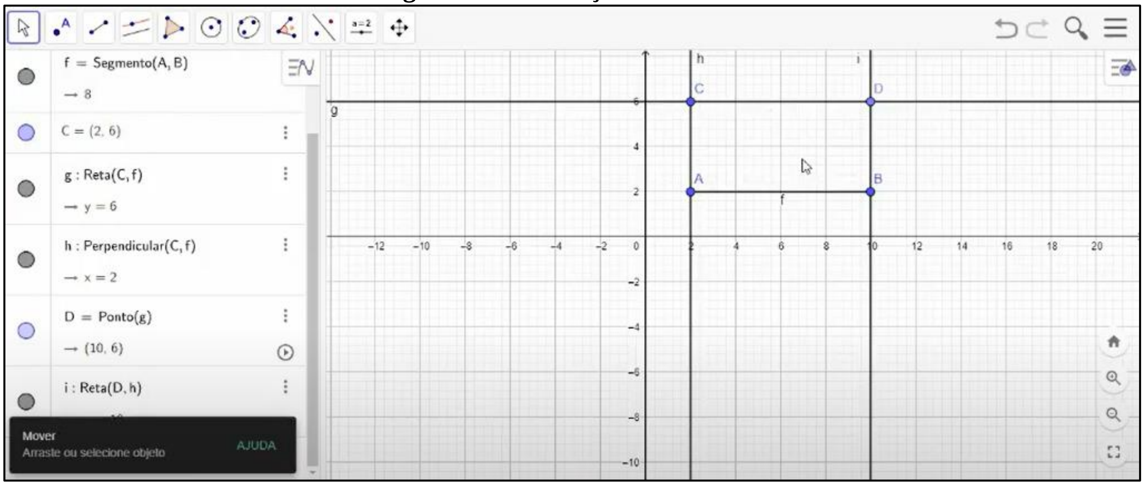
O aluno G relatou novamente:

G: “Não estou conseguindo fazer aquele ponto preto, que fica parado lá”, referindo-se à construção do losango que ele havia iniciado anteriormente, especificamente referindo-se ao ponto de intersecção das retas paralelas criadas a partir dos segmentos adjacentes construídos anteriormente.

Então o aluno compartilhou a sua tela para mostrar o que estava fazendo durante a construção do losango. Os dois primeiros lados congruentes e adjacentes já estavam construídos, utilizando a ferramenta do compasso. O próximo passo do aluno foi utilizar o recurso de reta paralela para criar o paralelismo dos lados opostos, porém o aluno não estava fixando a reta paralela na extremidade dos segmentos já construídos, por isso não conseguia obter a figura desejada. Ao identificar o erro, foi orientado a fixar a reta paralela no ponto da extremidade de um dos segmentos. Nesse momento, percebeu seu erro prosseguiu com a construção, corretamente, sem que fosse necessária qualquer outra intervenção por parte do professor.

No mesmo momento, o aluno B pediu para compartilhar a tela de sua construção, pois estava com dificuldades na construção do retângulo. O aluno fez toda a construção, da forma como achou correto, durante o compartilhamento de tela, para que fosse possível ao professor acompanhar todo processo. Foi possível perceber que o aluno utilizou os recursos corretos, iniciando por um segmento qualquer (AB), construindo uma reta paralela a esse segmento, utilizando uma reta perpendicular a essa reta, passando pela extremidade do segmento e construindo outra reta paralela à última, para determinar o lado oposto, passando pela outra extremidade do segmento inicial (Figura 18). Porém, os erros se mostraram na utilização do software, não no entendimento das propriedades, pois o aluno construiu uma reta paralela qualquer e traçou a perpendicular a essa reta, não ao segmento criado como primeiro elemento da construção, em seguida traçou a reta paralela a essa reta passando por um ponto qualquer da reta paralela ao segmento inicial, o que gerava a deformidade quando os pontos eram arrastados (Figuras 19 e 20), pois a reta deveria estar fixada na extremidade do segmento inicial.

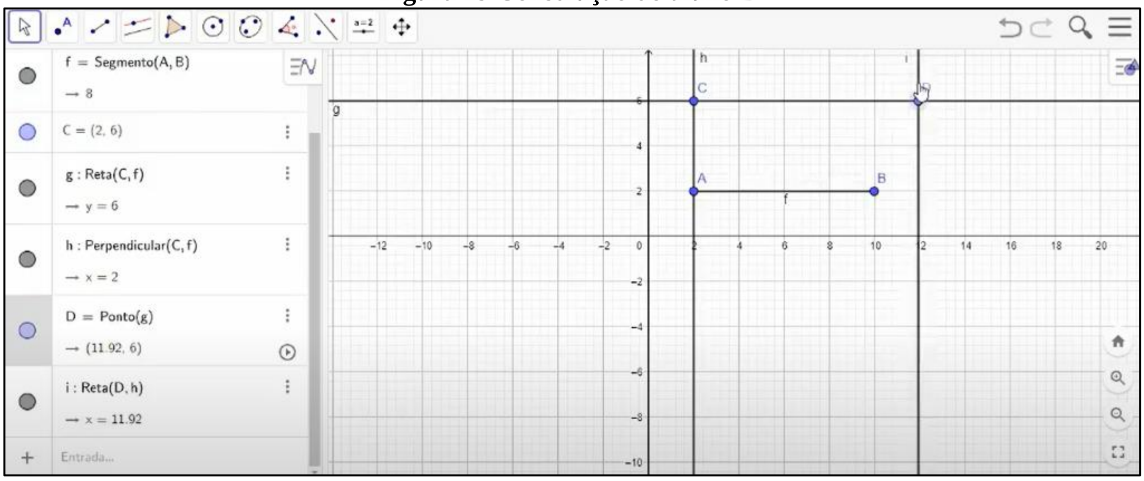
Figura 18 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

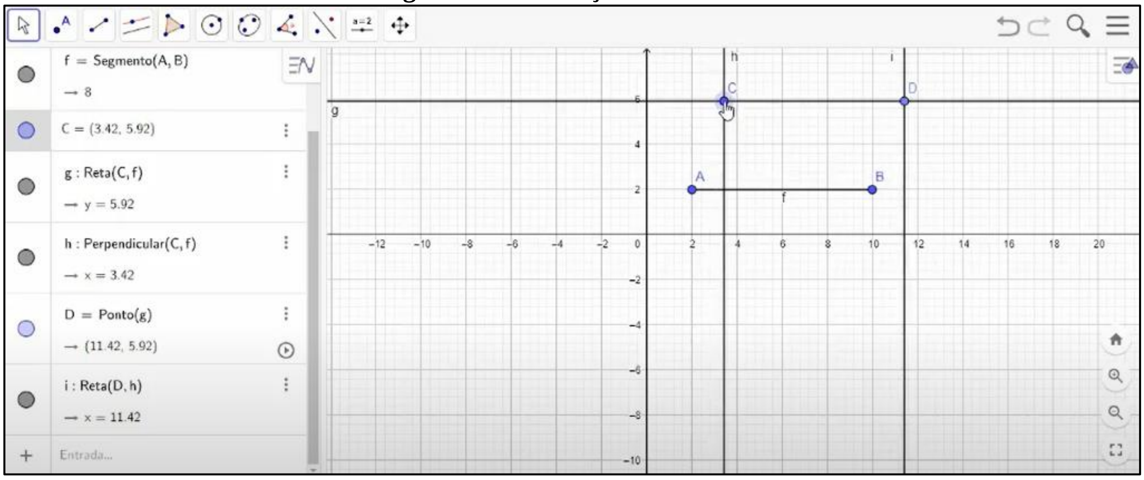
Para provocar a compreensão do erro, o professor pediu que o aluno arrastasse o ponto D (Figura 19) e o ponto C (Figura 20), para que ele percebesse por que a construção não estava estável, de modo a manter as propriedades do retângulo, apoiado nas ideias de Dickel (2019). Ao perceber, o aluno desfez parte da construção e foi instigado a construir novamente, mas agora com alguns apontamentos por parte do professor.

Figura 19 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Figura 20 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

O segmento inicial permaneceu, assim como a reta paralela a ele. Para a construção dos outros dois lados do retângulo, o aluno escolheu o recurso de reta perpendicular, agora utilizando uma perpendicular ao segmento inicial, passando por uma extremidade e depois outra perpendicular ao segmento inicial, passando pela outra extremidade. Pelo simples movimento de identificar onde os lados não estavam fixados na sua primeira tentativa, o aluno B foi capaz de perceber como deveria proceder para arrumar sua construção, evidenciando conhecimento sobre as propriedades do retângulo que estava trabalhando, característica no nível 1 de Van Hiele. Podemos destacar que o equívoco estava no uso correto do software, o que era esperado, visto que esse era o primeiro encontro no qual os alunos estavam construindo figuras no GeoGebra. Ao marcar os pontos de intersecção o aluno comemora:

B: “Cinzinha, era esse que eu estava buscando!”, referindo-se aos pontos de intersecção que ficaram fixos, portanto, por pré-configuração do software, aparecem na cor cinza quando criados.

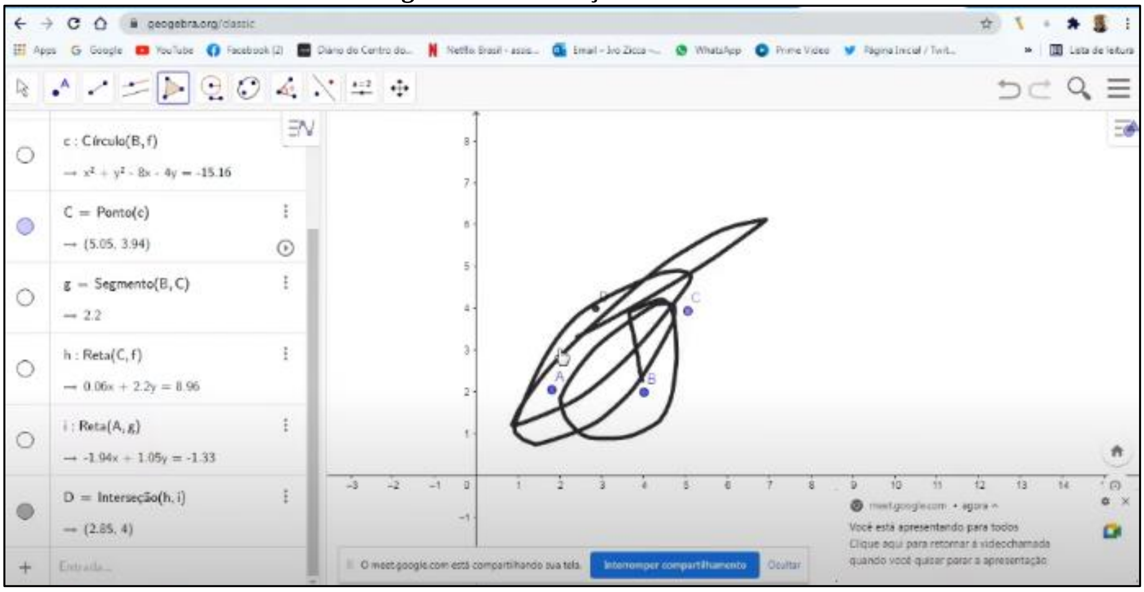
Ao questionar as alunas C e D que não fizeram questionamentos, elas responderam:

C: “Eu consegui o resto, mas o losango não estou conseguindo”.

D: “Tá complicado, mas eu entendi o que tenho que fazer, só tenho que botar em prática”.

O aluno G esbarrou em dificuldades com a utilização do software durante a finalização da construção do losango. Ao compartilhar sua tela, verificou-se que G selecionou o recurso de polígono e, ao clicar em um dos pontos de sua construção, mantinha o botão do mouse pressionado, gerando o efeito apresentado na Figura 21.

Figura 21 Construção do aluno G



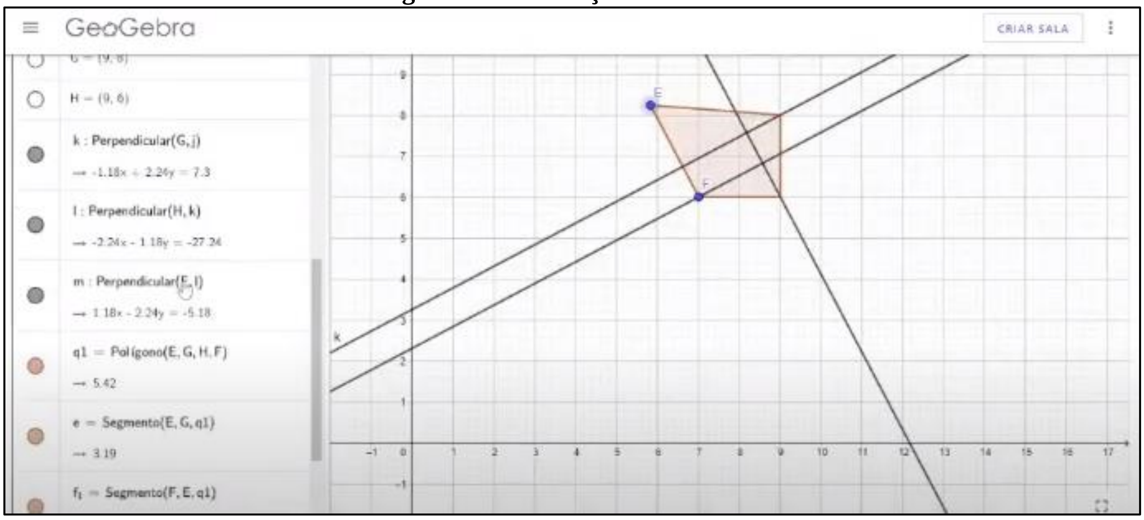
Fonte: Acervo do autor

Identificando o problema que estava ocorrendo, o aluno foi orientado a clicar uma vez em cada um dos vértices do seu losango, enquanto estivesse utilizando o recurso selecionado, fazendo com que a construção do seu polígono fosse possível.

A aluna A estava realizando a atividade pelo seu celular e enfrentou diversos problemas técnicos durante a atividade, pois, inicialmente, não conseguia compartilhar sua tela. Quando conseguiu, observou-se que A fez o início da construção do paralelogramo corretamente, porém o compartilhamento de tela foi interrompido e a aluna teve problemas com a conexão de internet, o que fazia com que seu áudio ficasse travado e a comunicação fosse prejudicada. Ao conseguir certa estabilidade na conexão, A não conseguiu compartilhar novamente a tela do seu celular, então a solução foi que o professor compartilhasse sua própria tela e seguisse os passos da aluna, para identificar suas dúvidas. Durante esse processo, A mostrou domínio sobre o processo de construção, identificando a propriedade de paralelismo entre os lados opostos do paralelogramo (nível 1 de Van Hiele) e identificando corretamente os recursos que deveria utilizar para construí-los, o que indica que a aluna estava esbarrando nos problemas técnicos e não no conhecimento matemático para construção.

A aluna C avisou que havia enviado as repostas dos formulários e pediu para que o professor avaliasse se as construções estavam conforme o que foi proposto. Ao abrir as construções de C., foi possível perceber que ela havia tentado utilizar os recursos necessários para a construção, mas não conseguiu marcar corretamente os vértices dos polígonos, demonstrando dificuldades com a utilização do GeoGebra, com certa falta de entendimento sobre como utilizar os recursos corretamente. A Figura 22 mostra uma das construções, na qual a aluna C tenta utilizar retas perpendiculares, mas os pontos que indicam os vértices do quadrilátero não estão ligados a essas retas.

Figura 22 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

Para reiniciar as construções, a aluna C precisaria compartilhar a tela com o professor, para que pudesse receber as devidas orientações sobre o software e sobre a atividade. Porém, a aluna relatou problema com o seu computador, que a impedia de compartilhar sua tela.

Avançando no encontro, o aluno B falou:

B: “Para mim só falta o losango, mas eu não consigo deixar todos os lados do mesmo tamanho”, o que demonstra que o aluno estava dominando as propriedades do quadrilátero em questão, característica do nível 1 de Van Hiele, mas estava esbarrando na utilização do GeoGebra.

O professor, que estava finalizando o atendimento de outra aluna, respondeu:

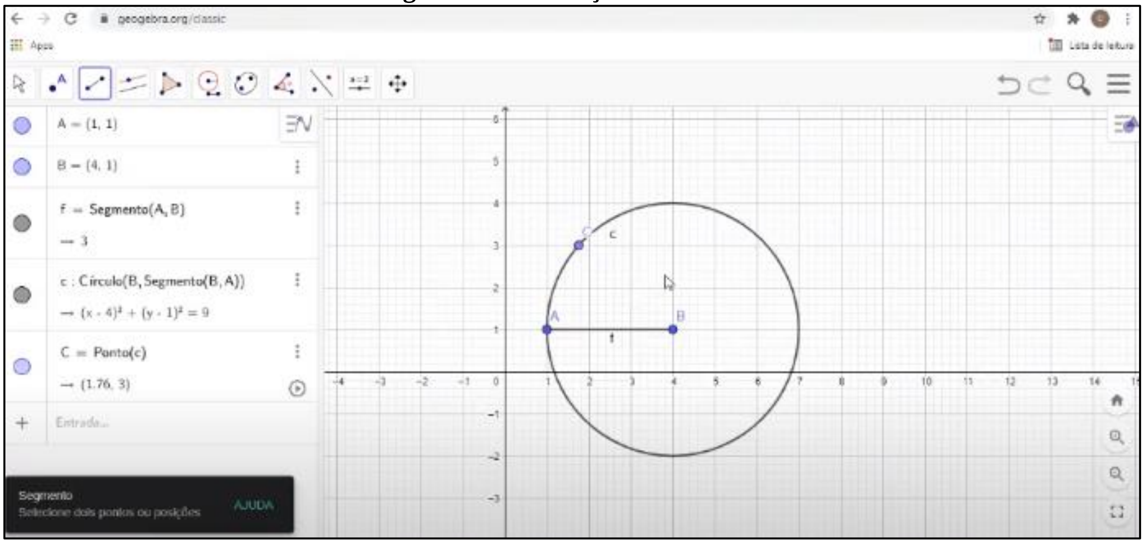
Professor: “Já te atendo, mas vai pensando sobre o compasso”.

Então, o aluno B compartilhou sua tela e refez sua construção. Iniciando por um segmento, o aluno relatou estar iniciando por uma reta paralela a essa, mas questionou:

B: “eu tava começando com uma paralela, tem que começar com o compasso?”, identificando um dos erros iniciais em sua construção.

O aluno iniciou utilizando o compasso com a medida de seu segmento inicial e o fixou em uma das extremidades desse segmento. Durante esse processo, B fez um comentário. A Figura 23 ilustra o contexto do que estava sendo falado.

Figura 23 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

B: “Boto o segmento de A a C?”. Esse comentário revela que B, mesmo utilizando a ferramenta correta, não compreende que os raios da circunferência determinam a congruência dos lados, evidenciando ainda falta de compreensão sobre conceitos relacionados à circunferência, centro da circunferência e raio da circunferência.

Professor: “não, onde é o centro da circunferência?”

B: “é o B”.

Professor: “tu tens que ter AB igual a BC, pois se ambos forem raios da circunferência, tu garantes que eles serão iguais”.

B: “hum... verdade, então vou de B a C”.

Por fim, o aluno B construiu retas paralelas a AB e a BC. Porém na construção da reta paralela à BC, B teve dificuldades para identificar o ponto no qual a reta deveria passar e foi orientado pelo professor.

Professor: “a reta tem que estar fixa onde? Qual o único ponto que já faz parte do losango?”

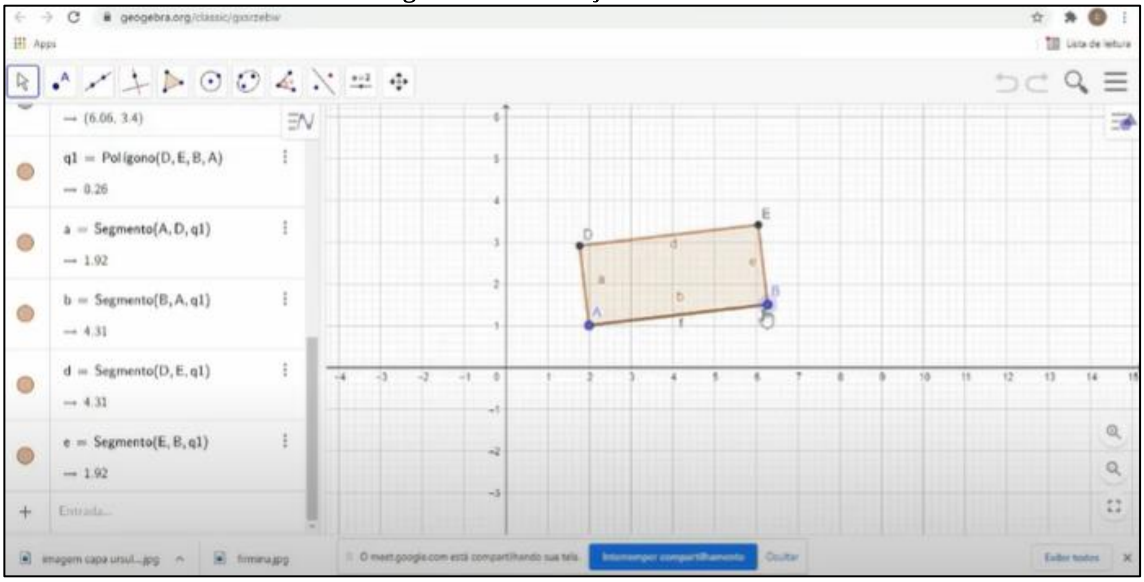
B: “o A”.

E então, o aluno conseguiu finalizar a construção do losango.

O aluno B, durante a construção do losango, ao utilizar o compasso, percebeu que, por descuido, havia utilizado o recurso "círculo dados centro e um de seus pontos" em outras construções, no lugar do compasso. Então, o aluno abriu sua construção do quadrado enquanto sua tela ainda estava compartilhada e disse:

B: "no caso eu teria que mover, né? Para ver se está bom", evidenciando entendimento sobre os princípios da geometria dinâmica e sobre o recurso de arrastar para avaliar se a construção deformaria ou não (RESTREPO apud DICKEL, 2019), então arrastou um dos vértices do quadrado e o resultado foi o mostrado na Figura 24.

Figura 24 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Assim, B certificou-se de que havia utilizado outro recurso, que não o compasso, como gostaria. Foi orientado a refazer a construção, agora utilizando o recurso correto.

Nesse momento retomei o contato com a aluna C, que estava com dificuldades nas construções. O diálogo a seguir retrata parte desse momento:

C: "Professor, estou refazendo aqui, tentando deixar as paralelas corretas, mas eu preciso usar o compasso?", dúvida que surgiu por acompanhar os atendimentos aos outros alunos, que estavam sendo compartilhados para todos os estudantes do encontro virtual. O comentário de C revela falta de entendimento sobre o papel do recurso compasso nas construções geométricas.

Professor: “Tu vais usar o compasso quando tu quiseres tamanhos iguais, se tu não quiseres tamanhos iguais, tu não precisas usar o compasso, entendeu?”.

Professor: “Eu posso fazer um retângulo utilizando somente retas paralelas e perpendiculares, mas também posso fazer utilizando o compasso. Mas, por exemplo, para o quadrado, eu vou ter de usar o compasso, pois tem tamanhos iguais e para o losango também. Mas para outras não necessariamente”.

A aluna D avisou que havia enviado as respostas e pediu para que o professor olhasse. Após a avaliação das respostas, percebeu-se que o losango era a única das formas que se deformava quando movimentada. O diálogo a seguir apresenta o debate neste momento.

Professor: “Só o teu losango está deformando”.

D: “Eu achei ele tão bonitinho!”.

Professor: “Pelo que eu vi, tu fizeste utilizando compassos em tudo, né?”.

D: “É que eu fiz tentando fazer um quadrado, daí eu pensei assim: isso tá mais losango do que quadrado”, avaliando o diálogo com um olhar pautado pela teoria de Van Hiele, percebemos uma característica do nível 1, pois a aluna identifica as propriedades da figura que está construindo.

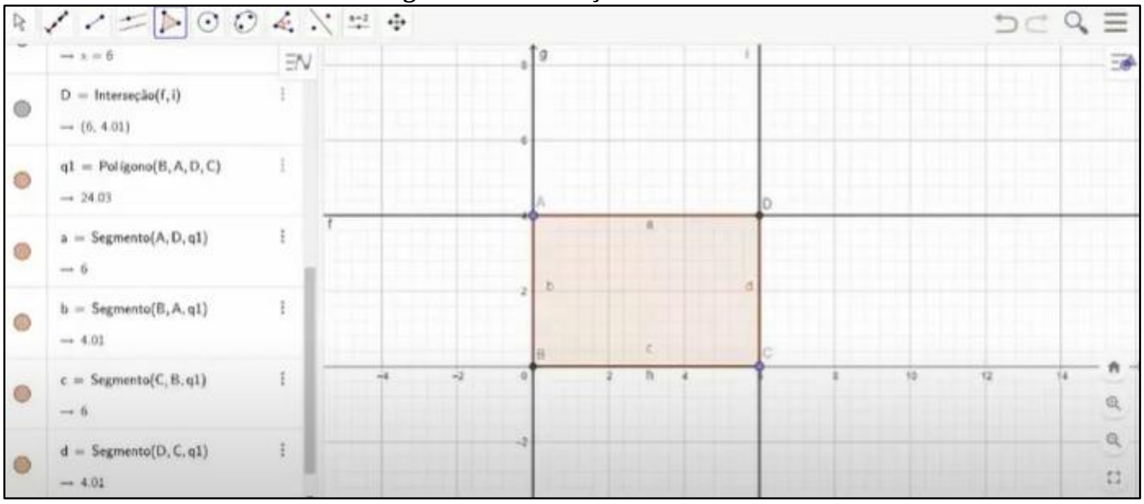
Porém, quando o professor compartilhou a tela para que a aluna visse o que estava acontecendo na construção enviada inicialmente, D disse que a construção dela não estava assim. Isso foi gerado por um equívoco no momento do envio, pois a aluna fez mais de uma construção de losango e salvou mais de uma, sendo assim, no momento de enviar, D enviou a construção feita anteriormente e não a última versão de sua construção.

O professor então perguntou aos alunos E e F se estava indo tudo bem e se precisavam de algum auxílio, pois ambos não haviam falado nada durante o encontro. O aluno F relatou estar fazendo as atividades e o aluno E aproveitou o espaço para pedir ajuda quanto ao retângulo, relatando que:

E: “Eu estava tentando fazer como a apresentação que tu nos deu antes de ontem (se referindo ao encontro anterior), que até rotacionava. Tô tentando fazer ele rotacionar também. Essa é a ideia, só que eu não tô conseguindo”.

Nesse relato o aluno E referia-se ao retângulo estar fixo com os lados paralelos as margens da tela do computador, caracterizando-se como um desenho prototípico usualmente encontrado em livros didáticos. A Figura 25 mostra a construção em questão.

Figura 25 Construção do aluno E



Fonte: Acervo do autor

Analisando a construção, podemos perceber que E começou sua construção com o ponto A sobre o eixo Y e o ponto C sobre o eixo X. Embora tivesse utilizado corretamente os recursos de paralelismo e perpendicularismo, a limitação de movimentos da figura provocou incômodo ao aluno, o que já remete a uma mudança de visão, voltada para as ideias de geometria dinâmica, por meio da ação de arrastar para explorar os movimentos da figura, como forma de teste para avaliar se sua construção estava correta ou não. Esse desconforto do aluno está destacado em seu relato a seguir:

E: “Eu só tenho essa mobilidade aqui de altura”, disse o aluno enquanto arrastava o ponto A para cima e para baixo.

E: “E essa aqui de comprimento”, falou enquanto arrastava o ponto C para os lados.

E: “Não tenho como rotacionar ele (o retângulo), como eu queria, para ficar igual ao que foi apresentado (na atividade de caixa preta)”.

As falas do aluno E ressaltam a utilização do arrastar como recurso de exploração para analisar as variações durante o movimento, conforme Restrepo (apud DICKEL, 2019). Então, ao perceber o que o problema estava sendo causado pela presença dos eixos na janela de visualização do GeoGebra, o professor propôs que o aluno realizasse novamente sua construção, mas, que antes de iniciar, retirasse os eixos da janela. O aluno então realizou novamente a construção e deixou claro que tinha domínio total sobre as propriedades do retângulo e dos recursos que deveria utilizar em sua construção e da forma que deveria utilizá-los, o único problema foi utilizar os eixos coordenados para determinar dois dos vértices, pois acabou deixando sua figura com movimento limitado, o que foi bem observado pelo próprio aluno, gerando inquietação e busca pela melhora no processo de construção.

Durante essa nova construção do retângulo, o aluno E, ao demarcar um ponto de intersecção entre duas retas, percebe que o ponto ficou azul claro, o que significa que esse seria um ponto solto e não de intersecção. O próprio aluno percebe o erro e questiona:

E: "É normal esse ponto ter ficado dessa cor?"

Professor: "Não".

Então o aluno desfaz a construção do ponto e marca um ponto novo na intersecção, agora de forma correta, sem qualquer outro auxílio do professor.

Ao final da construção, o professor sugere que o aluno E arraste um dos pontos demarcados, para perceber o movimento que era possível ser feito agora. O aluno então diz:

E: "Entendi! Por isso tem de evitar prender no eixo", apresentando uma tomada de consciência sobre todo o processo que havia realizado.

O professor ainda relata:

Professor: "Até por isso eu falei para que todos tirassem os eixos e malhas inicialmente. É bom para se guiar, mas às vezes acontecem coisas desse tipo", já prevendo que uma dependência quanto aos eixos poderia acontecer, ainda mais quando fosse buscada a perpendicularidade.

A aluna A relata que terá de sair da chamada, mas já enviou as respostas da atividade.

A aluna C enviou novamente as respostas e, ao avaliar, o professor percebeu que estava com as mesmas deformações. Então a aluna C conseguiu compartilhar sua tela para que o professor conseguisse auxiliá-la. O diálogo a seguir relata como foi esse momento.

Professor: "Vamos começar pensando no paralelogramo".

Professor: "Se temos que começar por um lado do polígono, qual das ferramentas pode ser usada?".

C: "Eu estava usando segmento de reta".

Professor: "Isso, perfeito!".

Então a aluna constrói o primeiro segmento de reta, um outro segmento adjacente a esse e o diálogo continua com o professor instigando:

Professor: "Paralelogramo, o que ele tem?".

C: "Só sei que dois lados opostos são paralelos".

Professor: “É exatamente isso que precisamos. Se eles são paralelos, qual recurso tu vais usar?”.

C: “Esse aqui”, enquanto selecionava a reta paralela no GeoGebra.

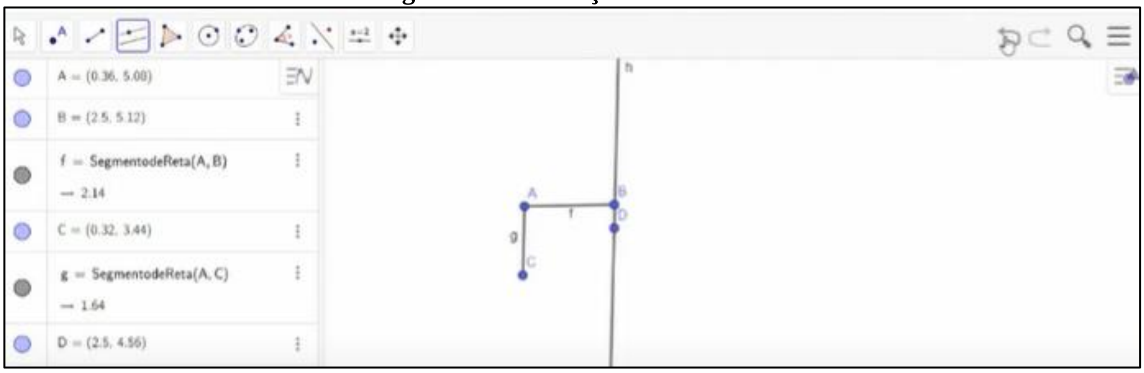
C: “Eu estava fazendo tipo assim”, enquanto utiliza o recurso traçando uma paralela ao lado AC, mas que não está presa no ponto B.

Ainda, o professor pede para que a aluna refaça o processo e indaga,

Professor: “onde tu vais prender a reta?”.

C: “No ponto B”, enquanto clica na tela criando o ponto D, conforme a Figura 26.

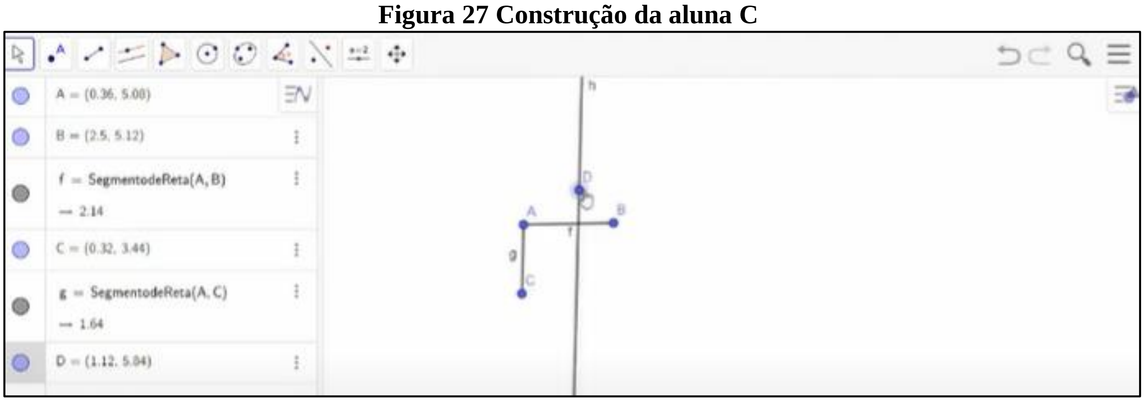
Figura 26 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

A aluna rapidamente apaga o ponto D e a reta, mas o professor pede que ela faça novamente a construção com um ponto D diferente de B e que movimente o ponto D, para entender o motivo pelo qual essa reta estava ficando solta. O processo é ilustrado na Figura 27.

Figura 27 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Viu por que estava deformando?”.

C: “Vi!”.

Professor: “Então pode apagar agora e refazer”.

Então a aluna constrói uma reta paralela a AC passando por B e o professor questiona,

Professor: “o que tu vais fazer agora?”.

C: “Daí eu faço assim (reta paralela ao segmento AB) e no C (passando pelo ponto C)?!”.

Por fim o professor propõe,

Professor: “Agora tu podes pegar a seta (ferramenta de mover) e mexer nos pontos para ver o que acontece”.

C: “A, entendi!”, enquanto movimenta os vértices do paralelogramo que construiu.

Professor: “agora tu o mexes e ele fica sempre paralelogramo, não importa o quanto e nem como tu mexas, pois tu construíste a partir das propriedades. Assim tu vais fazer com o retângulo”.

Então a aluna relatou que havia entendido o que deveria ser feito, mas que teria de sair da chamada, pois iria jantar.

Os alunos B, F e D relataram que haviam enviado as respostas por meio do formulário e se despediram da chamada.

Por fim, o aluno E ainda teve um questionamento.

E: “O losango, qual é a consideração que tem que ter nele?”.

Professor: “O que tu sabes sobre o losango?”.

E: “Tu tem que considerar, para o losango, só que todos os lados tem o mesmo valor? Ou tem que ter paralelismo entre lados opostos também?”, demonstrando domínio sobre as propriedades do losango, mas dúvida ao tentar fazer um desenho mental de sua construção.

Professor: “Tem que ter paralelismo, né?! Pois o losango é um caso específico de paralelogramo”.

E: “Entendi. É que pelo que eu lembro, no losango todos os lados têm o mesmo comprimento né?”.

Professor: “Sim, isso é uma propriedade dos losangos que tu vais usar”.

E: “Então, além do paralelismo entre os lados, tem isso também”.

Professor: “Perfeito, é isso aí”.

E: “Tá, ok! Vou tentar fazer aqui”.

E então o encontro foi encerrado.

4.3 Terceiro Encontro

No terceiro encontro, que teve duração de 1 hora e 50 minutos, foi dada continuidade à atividade de construção 1, que alguns alunos não terminaram no encontro anterior. A aluna D já havia terminado a atividade de construção 1, então seguiu para a atividade de construção 2, na qual deveria fazer os quadriláteros solicitados iniciando as construções por suas diagonais.

No início do encontro, a aluna C pediu para que o professor explicasse novamente o uso dos recursos de reta paralela e de reta perpendicular. As dúvidas da aluna estavam relacionadas com o ponto onde fixar as retas, depois de selecionado o paralelismo ou perpendicularismo, ou seja, o ponto no qual a reta deveria passar. O professor compartilhou sua tela e assim como havia sido explicado ao aluno B no segundo encontro, explicou-se à aluna C que a reta deveria passar por um dos pontos do segmento inicial de sua construção. A aluna entendeu como deveria utilizar os recursos e fez mais um questionamento.

C: “e aquilo que o ponto fica preto?”, referindo-se a um ponto de intersecção quando construído corretamente.

Professor: “O ponto preto é quando tu tens a intersecção e esse ponto não se mexe. Não consigo mexer nele, estou clicando e tentando arrastar e não dá, pois ele depende das outras coisas (da construção). Quando em mexo as outras (partes da construção) ele se mexe junto”.

C: “Sim, entendi”.

Professor: “O pretinho quer dizer que é um ponto que não pode ser movimentado diretamente, ele não é livre para se movimentar como os outros”.

C: “Mas eu tenho que deixar sempre um ponto preto assim?”.

Professor: “Se o ponto ficar azul bem clarinho, quer dizer que ele não está preso em nada, é um bom indício de que a construção está errada. Se ele ficar azul como aparece ali (tela compartilhada), quer dizer que ele faz parte do início da construção, então ele é um ponto livre e outras coisas estarão dependendo dele. Se o ponto for preto, ele não se mexe, porque ele está dependendo de outras coisas. Então, acredito que sim, tu sempre vais ter pelo menos um ponto preto”.

C: “Tá bom, vou tentar fazer”.

O professor relatou ao aluno G alguns aspectos que poderiam ser revisados em suas construções.

Professor: “G dá uma olhada no teu quadrado, abre a construção e mexe nos vértices, pra tu ver o que acontece. E olha o teu paralelogramo, ele até está paralelogramo, mas tem propriedades a mais que tu usaste nele”.

Então, o aluno, após revisar a construção relatou,

G: “Eu fiz um losango duas vezes”, demonstrando ter entendimento sobre a particularidade do losango, que tem os quatro lados congruentes, mas também é um paralelogramo.

G: “Eu cheguei a pensar nisso, “esse aqui (paralelogramo) está meio parecido com o outro (losango), mas agora já são dez horas”, referindo-se ao horário em que havia terminado suas construções no dia do encontro anterior e ressaltando que percebeu a similaridade entre as construções, mas não corrigiu pela falta de tempo.

G: “O meu problema foi que eu não consegui mudar o tamanho de algum dos lados”, apresentando dificuldade em achar soluções dentro do GeoGebra, mas mostrando ter domínio das propriedades em questão.

G: “Por que pelo menos dois tem de estar diferente para ser um paralelogramo, né?”, explicitando falta de entendimento sobre a inclusão de classes, característica do nível 1 de Van Hiele.

Professor: “Não necessariamente. Lembra que eu falei aquela vez que o losango também é um paralelogramo?

G: “Aham”.

Professor: “Que (o losango) é um caso particular de paralelogramo, onde esse paralelogramo tem todos os lados iguais”.

Professor: “Mas aí tu fizeste um específico né, a gente queria mais um genérico. Tu usaste a mesma construção do outro, foi fazendo igual. Sabe a parte onde tu usas o compasso (na construção do losango)?”.

G: “Aham”.

Professor: “Tu vais usar pra quando tu queres segmentos congruentes. Mas nesse caso, tu não queres segmentos (estritamente) congruentes, pois tu estás fazendo um paralelogramo qualquer, não exatamente o que tem todos os lados iguais. Então começa com dois segmentos quaisquer e depois usa só as propriedades dos lados do paralelogramo, sabe quais são?”.

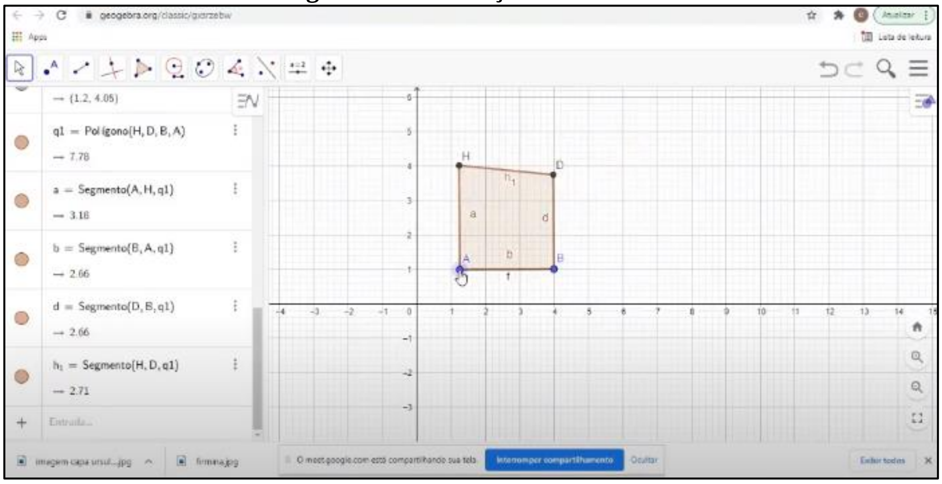
G: “Dois lados paralelos”, referindo-se aos lados opostos, mas não deixando explícito.

Então o aluno B relatou,

B: “Professor, eu fiz o quadrado de novo e ele está com todos os lados iguais, mas quando eu mexo, ele deforma ainda, não sei qual é”, o que evidencia que o aluno está utilizando o recurso de arrastar do GeoGebra para se certificar da correção de sua construção, conforme Arzarello (2002).

Então o aluno compartilhou sua tela na chamada e, ao arrastar um dos vértices do quadrado, a deformação exposta na Figura 28 aconteceu.

Figura 28 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Faltou uma coisa nesse teu quadrado, quem sabe os ângulos? Lembra dos ângulos?”.

Nesse momento o aluno G interrompe, pois tinha a mesma dúvida do aluno B.

G: “Como tu trava os ângulos? Não sei como se usa essa ferramenta”, referindo-se a como deixar os ângulos do quadrado com 90º sempre, independentemente de como movesse os vértices.

Professor: “Tu não precisas travar o ângulo. O ângulo do quadrado é o que?”.

B: “É 90º”.

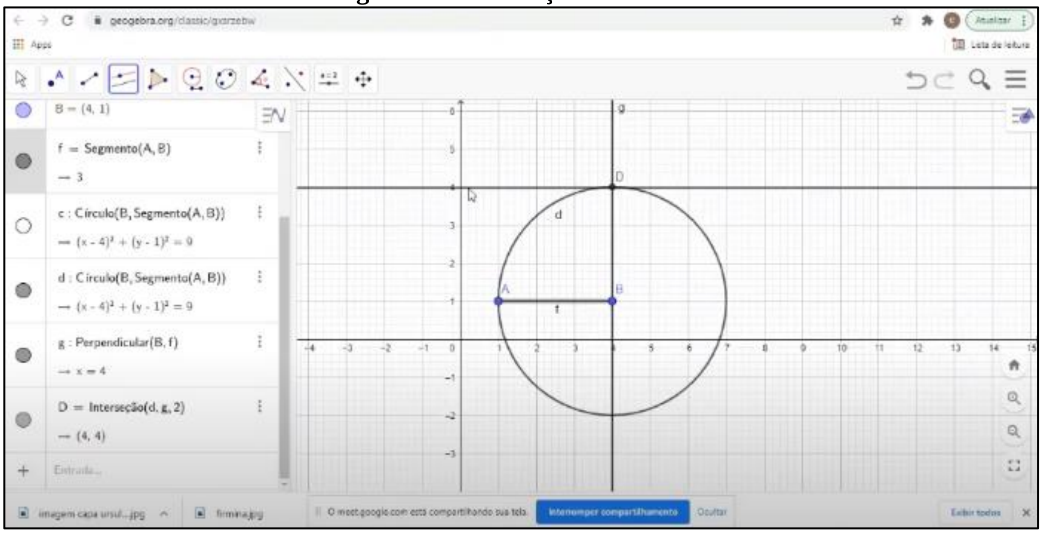
Professor: “E o que é 90º?”.

B: “É perpendicular, na reta”, referindo-se ao recurso de reta perpendicular.

Professor: “É isso aí”.

Então o aluno B mostrou como fez suas construções e descreveu o passo a passo da construção de forma correta, utilizando retas perpendiculares e o compasso. O professor pediu que o aluno fizesse a construção novamente, enquanto estava com a tela compartilhada. O aluno começou a construção com um segmento AB, utilizou o compasso para pegar a medida de AB e centrou em B, em seguida traçou uma reta perpendicular a AB passando por B, marcou a intersecção dessa reta com a circunferência e então pegou uma reta paralela a AB e o erro apareceu. Como ilustrado na Figura 29, o aluno não fixou a reta paralela no ponto D, apenas alinhou com o ponto, o que ocasionava as deformações em sua construção. O cursor do mouse indica onde o aluno iria fixar a reta paralela a AB.

Figura 29 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Está aí o erro. Onde tu tens que botar esse ponto que tu estás procurando? Tu não precisas encaixar ele de longe, se tu levares o mouse lá em cima (no ponto D), tu encaixas perfeitamente”.

B: “Como assim?”.

G: “No ponto ali”, referindo-se ao ponto D.

B: “A, se eu levar aqui”, enquanto movia o cursor do mouse até o ponto D.

O aluno G fez uma interjeição, que sinalizou que estava acompanhando e que tinha sanado sua dúvida também.

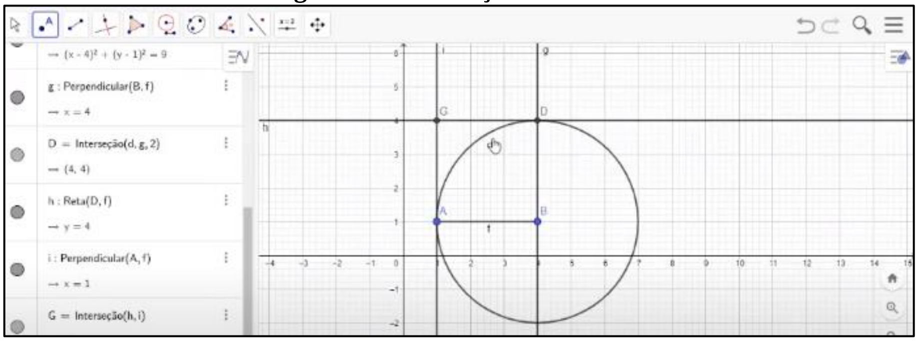
G: “Aham!”.

B: “Esse era o meu erro então!”.

Por fim, o aluno B seguiu com sua construção e narrando o que estava fazendo:

B: “Agora tenho que pegar a perpendicular aqui (perpendicular a AB, passando por A) e marcar o pontinho aqui (ponto G)”, conforme a Figura 30 ilustra.

Figura 30 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Mexe nos teus pontos para tu ver”.

B: “Agora foi, agora já era”.

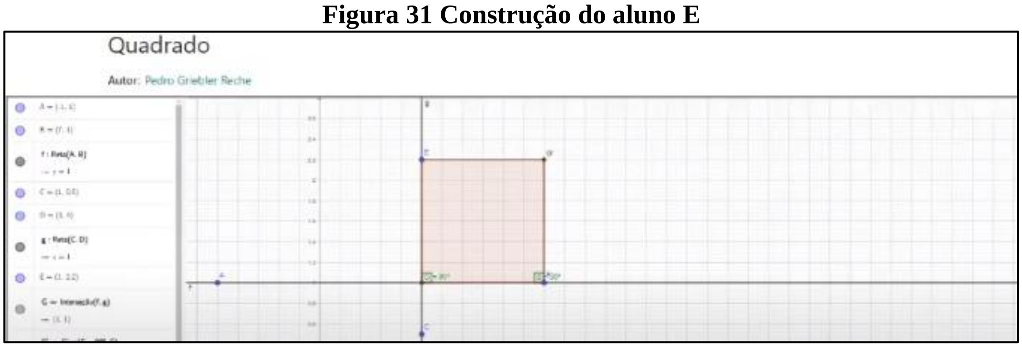
Professor: “É o mesmo que eu expliquei para a C, estava pegando a paralela, mas estava tentando encaixar de longe. Leva o mouse lá em cima (do ponto) que a reta vai ficar presa. Se tu encaixares de longe, quando for mexer, vai soltar”.

B: “Eu fiz a mesma coisa com o losango também, depois eu vou arrumar ele ali”, o que demonstra uma conscientização sobre o erro e identificação do mesmo erro em outras construções.

Aproveitando o momento, o professor questiona ao aluno G se ele havia entendido e o aluno responde que entendeu.

Após ter analisado as construções do aluno E, o professor pede que o aluno explique sua construção do quadrado. A Figura 31 retrata a construção do aluno com todos os elementos expostos.

Figura 31 Construção do aluno E



Fonte: Acervo do autor

O aluno comentou que utilizou apenas a ferramenta de “ângulo com comprimento fixo”. Após certa incompreensão no entendimento, por parte do professor, o aluno explicou como foi feita a construção. Algumas partes do diálogo abaixo retratam parte desse momento do encontro.

Professor: “Poderia me explicar como fez?”.

E: “Eu criei um reflexo duplo ali”.

Professor: “Um reflexo duplo?”, não entendendo o que havia sido feito.

E: “Sim, eu usei a ferramenta de ângulo para fazer o reflexo certinho dos pontos, para que eles não deformassem”.

E: “Peguei uma reta com comprimento fixo (segmento), como ela não pode variar, daí ela continua sendo móvel, mas o tamanho dos outros não deforma. O problema é que quando eu tentava usar o comprimento fixo dos segmentos, eles sempre deformavam, não acompanhavam os outros (lados do quadrado), então essa foi a solução que eu consegui achar pra resolver isso”.

Professor: “Tu usaste uma reflexão?”.

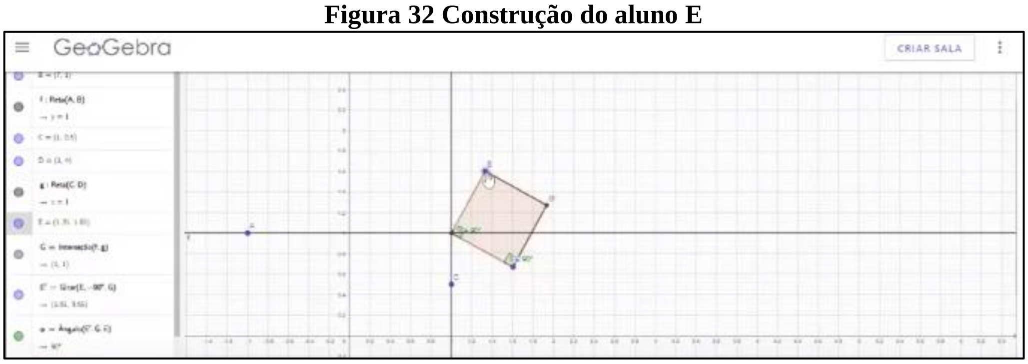
E: “É. Ou ferramenta de ângulo. Acho que foi só ferramenta de ângulo mesmo, daí peguei o ponto formado pela reflexão do ângulo”.

Professor: “Tu usaste um ângulo com comprimento fixo ou apenas um ângulo?”.

E: “Eu só definia o ângulo como 90º e pegava o ponto refletido pelo ângulo”.

E: “O problema é que a figura não mexe e eu queria que ela mexesse também. Que eu pudesse mudar, deslocar ela pelo plano, que ela não ficasse fixa ao centro”, o que está retratado na Figura 32.

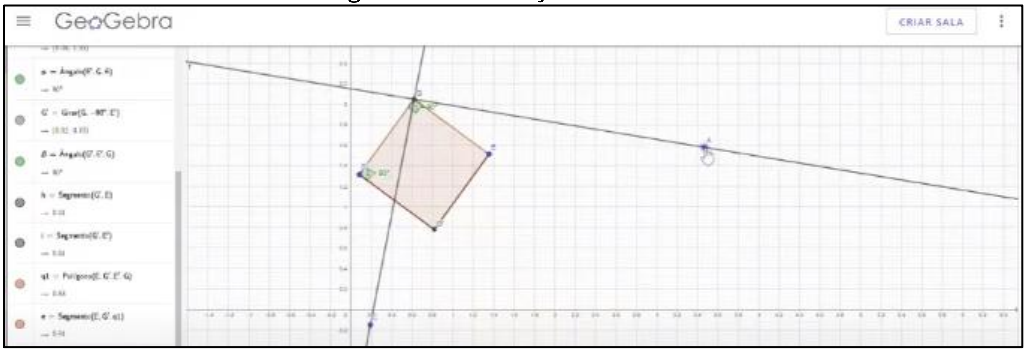
Figura 32 Construção do aluno E



Fonte: Acervo do autor

Professor: “É, a figura não mexe pois tu terias de mexer essas retas aqui (referindo-se às retas que se interseccionam e dão origem ao ponto G), pois ela está presa nessas retas. Tu terias que mexer nessas retas (para a figura se deslocar)”, apresentado na Figura 33.

Figura 33 Construção do aluno E



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Tu sabes me descrever um passo a passo do que fez?”.

E: “Primeiro passo que eu fiz foi definir as duas retas. Só que eu só peguei retas quaisquer. Vou dar uma olhada para ver como eu fiz, pois não estou lembrando”.

Enquanto o aluno E revisava suas construções, o professor pediu que a aluna D avançasse para a atividade de construção 2. A aluna, ao se deparar com a ordem da atividade, falou:

D: “Começar pelas diagonais, o que é isso?”.

Professor: “O que acontece, tu sabes que as diagonais de um desses quadriláteros também têm propriedades. Pode pesquisar sobre as diagonais do paralelogramo, retângulo, losango e quadrado e tu vais ver que elas têm algumas propriedades. Vou te citar uma, para que tu tenhas um exemplo do que eu estou falando. As diagonais do quadrado se interceptam nos seus pontos médios, são de mesmo tamanho e formam um ângulo de 90º uma com a outra. Entendeu?”.

D: “Entendi, vou ir tentando e qualquer coisa eu grito”, referindo-se a pedir ajuda, caso necessitasse.

Professor: “Tu crias as diagonais primeiramente e a partir delas tu vais traçar os vértices e desenhar o polígono”.

D: “Tá bom, vou tentar”.

Dado certo espaço para os alunos, o aluno B relatou estar com problemas na construção do losango. Então foi convidado a compartilhar sua tela e expor a construção em questão. Ao apresentar a tela, o aluno havia feito um segmento e utilizado a ferramenta de compasso tomando como raio a medida desse segmento, definindo o centro da circunferência em uma das extremidades do segmento, o que era o início de construção esperada para o losango. Porém, sua dificuldade estava em progredir a partir desse ponto. Então o professor tentou instigá-lo a pensar sobre o que deveria fazer, conforme o diálogo a seguir relata.

Professor: “O outro lado do teu losango, o segundo lado que tu vais fazer, tem que ter o mesmo tamanho do primeiro, né?”.

B: “Sim”.

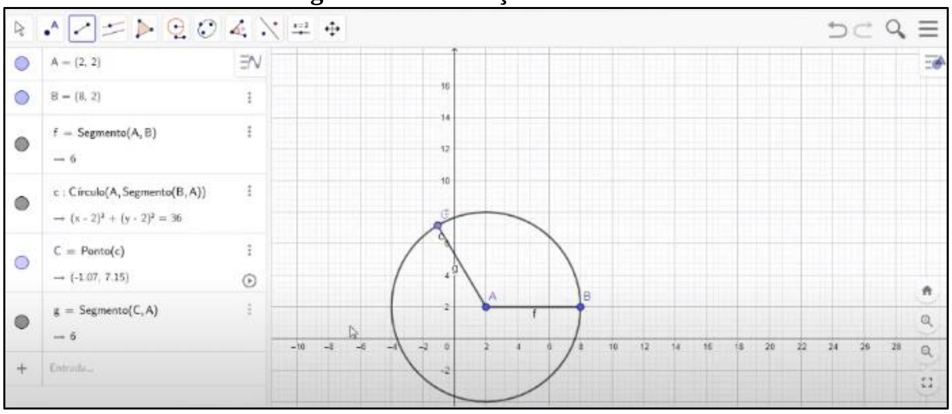
Professor: “Só que ele pode estar em qualquer lugar, não precisa estar a 90º. Então onde tu tens de largar um ponto aí para fazer um segmento?”.

B: “No c?”, referindo-se à circunferência c.

Professor: “Isso, em qualquer lugar da circunferência c”.

Então o aluno criou um ponto na circunferência c e traçou o segmento AC, conforme Figura 34.

Figura 34 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Esse é teu ponto de partida, tu traçaste os dois lados. Por que eles ficam com o mesmo tamanho?”.

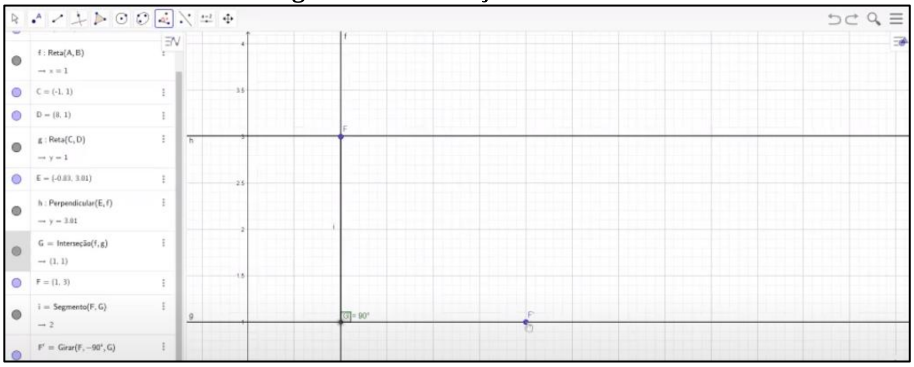
B: “Já entendi, é o raio”, avaliando que ambos eram raios da mesma circunferência, portanto tinham a mesma medida.

Após isso, o aluno seguiu sua construção por conta própria, utilizando retas paralelas aos segmentos criados, marcando a intersecção e finalizando com a determinação do polígono.

Nesse momento o aluno E havia conseguido replicar sua construção do quadrado e pediu o espaço para mostrá-la e explicá-la. Então o aluno compartilhou sua tela e foi explicando os passos de sua construção. Conforme o relato a seguir.

E: “Primeiro eu defini duas retas que se interceptam. Depois eu defini outra reta paralela a uma das duas primeiras. Agora eu criei o segmento, com um ponto móvel e o outro fixo (na intersecção das duas retas criadas primeiramente). E o que eu fiz agora? Peguei essa ferramenta “ângulo com amplitude fixa”, 90º, sentido horário e criei o reflexo”, conforme mostra a Figura 35.

Figura 35 Construção do aluno E



Fonte: Acervo do autor

E: “Então peguei do ponto G ao ponto F’ e criei de novo a mesma coisa. Daí eu só juntei o polígono”.

Durante esse relato percebe-se que o aluno explorou uma característica de uma função do GeoGebra que não havia sido explicada anteriormente, pois os alunos não tinham conhecimento que ao construir um ângulo com amplitude fixa, partindo do segmento que seria lado do ângulo, o ângulo geraria um segmento congruente ao lado tomado inicialmente. Por experimentação, certificando-se por meio da malha da janela de visualização, o aluno pôde constatar que os segmentos seriam congruentes e então determinariam o seu quadrado.

Percebe-se também a construção de alguns elementos sem utilidade e que só limitam a figura criada pelo aluno, esses elementos são as três retas iniciais, sendo a última delas (em ordem de criação) totalmente desnecessária para a construção da figura, enquanto as duas primeiras retas servem apenas para marcar um ponto de intersecção. Uma alternativa a essa tomada de decisão, seria a criação de um segmento apenas e a reprodução dos demais passos, utilizando ângulos com amplitude fixa de 90º. Com isso é possível perceber que o aluno precisou de linhas de guia para que garantisse, quando olhasse, que os lados do quadrado estariam perpendiculares, estando preso às figuras prototípicas, pois busca um paralelismo com as margens da tela do computador para fazer a criação.

O aluno G também avançou para a atividade de construção 2. Conforme o enunciado da atividade, o aluno deveria começar a construção de cada um dos quadriláteros pelas suas diagonais, o que gerou dúvidas.

G: “Só que eu não faço a mínima ideia de como eu vou fazer isso”.

D: “Eu estou há meia hora já tentando”.

Professor: “Vou mostrar um exemplo pra todos”, enquanto compartilhava a tela.

G: “Mas para ter uma diagonal não tem que ter um polígono já?”, pergunta muito pertinente, pensando no ponto de vista do ensino escolar, onde se aprende sobre as diagonais dos polígonos sempre como um ente geométrico do próprio polígono, como se não pudéssemos desassociar as coisas, nem que por um momento, para iniciar a construção pelas próprias diagonais. O que ressalta ainda mais a potencialidade do ambiente de Geometria Dinâmica, em especial do GeoGebra, para trazer novas abordagens não só sobre os polígonos, mas sobre todas as suas propriedades.

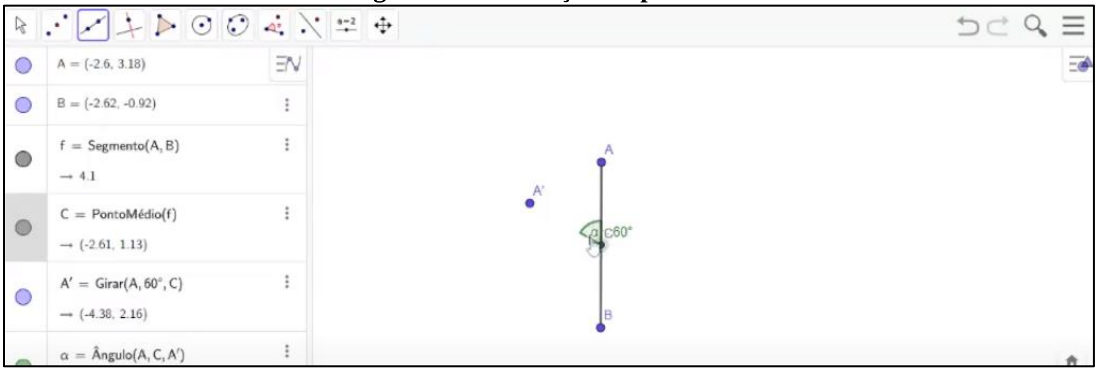
Professor: “Isso que tu estás falando é uma verdade, pois a diagonal é traçada depois do polígono, né?”, referindo-se aos processos convencionais de ensino das diagonais.

G: “Pois é”.

Professor: “A gente aprende as diagonais quando já se tem o polígono, né? Mas é possível traçar os vértices desse polígono pela diagonal. Olhem só o que vou fazer aqui, para vocês terem ideia”.

Professor: “Vou fazer para vocês um hexágono regular, iniciando por suas diagonais. Então começo por um segmento, marco o ponto médio desse segmento e determino um ângulo com amplitude fixa daqui até aqui (extremidade do segmento até o ponto médio) e vou botar o que eu sei, que o ângulo entre eles é 60º, conforme a Figura 36.

Figura 36 Construção do professor

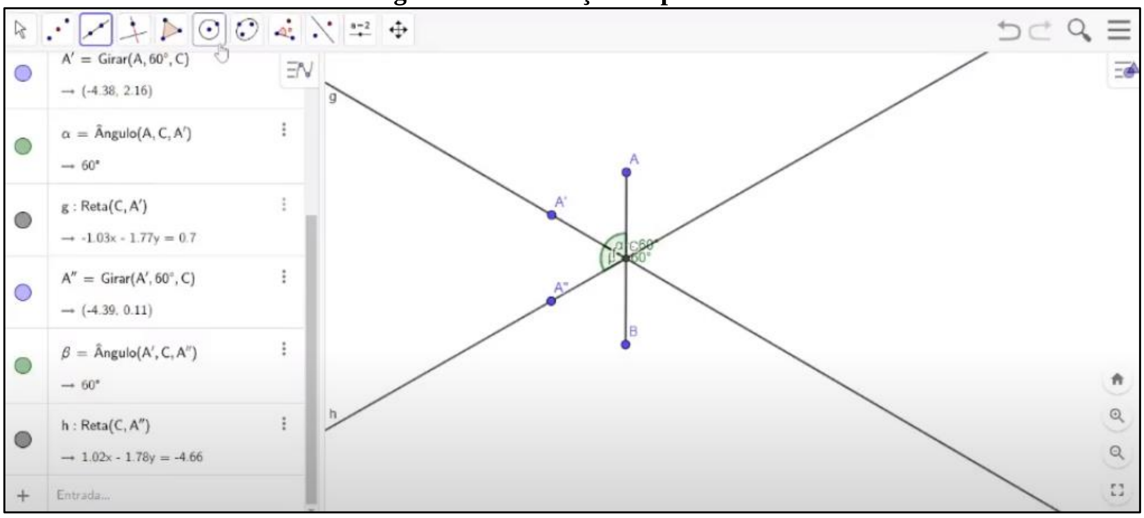


Fonte: Acervo do autor

D: “Essa aí do ângulo eu não sabia fazer, sor”, embora tivesse sido um dos recursos mostrados no primeiro encontro.

O professor então repetiu o processo fazendo um ângulo com amplitude de 60º com vértice no ponto médio do segmento inicial e extremidade em A’, gerando a Figura 37.

Figura 37 Construção do professor



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Daí eu sei que todas as diagonais do hexágono têm o mesmo tamanho, então faço isso aqui”, enquanto utilizava o compasso, do ponto A ao ponto médio e centrando a circunferência gerada no ponto médio.

Após isso, marcou as intersecções entre a circunferência e as retas, pontos esses que se tornaram vértices do hexágono regular e construiu o polígono desejado.

Professor: “Agora que vocês viram uma ideia de como fazer, pesquisem sobre as diagonais do paralelogramo”.

Então, o professor, com sua tela ainda compartilhada, resolve fazer a pesquisa para mostrar aos alunos. No primeiro resultado da pesquisa o professor lê o que está escrito.

Professor: “Em qualquer paralelogramo, suas diagonais se cruzam nos seus pontos médios”.

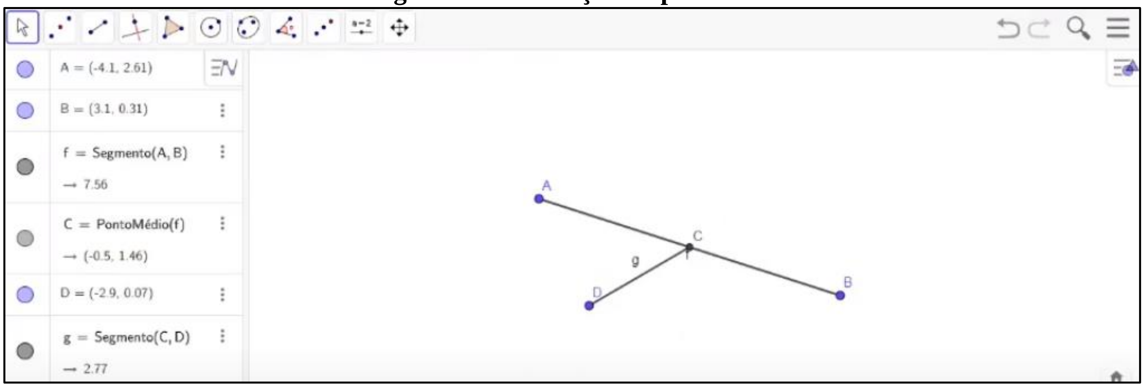
Professor: “Essa é a única propriedade das diagonais de um paralelogramo, então vocês só têm de fazê-las se cruzarem nos pontos médios. Se elas se cruzarem nos pontos médios, vocês terão, em quaisquer quatro pontos determinados pelas extremidades delas, as diagonais de um paralelogramo. Entenderam isso?”.

C. C: “Sim”.

G: “Mais ou menos”.

Percebendo que os alunos estavam sem saber por onde iniciar, o professor tentou exemplificar mais uma vez, mostrando um caminho de início. Nesse processo, o professor construiu um segmento de reta, mostrou a função de ponto médio, marcou o ponto médio do segmento e criou outro segmento com extremidade no ponto médio do segmento anterior, conforme mostra a Figura 38.

Figura 38 Construção do professor



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Já que as diagonais se interceptam nos pontos médios, qual o recurso vocês vão usar para fazer a outra metade dessa diagonal?”.

E: “Reflexo”.

Então o professor utilizou o recurso de reflexão por um ponto, mostrando novamente como funcionava e avaliando que esse recurso funcionava para o objetivo que se buscava. Ainda, o professor questionou aos alunos,

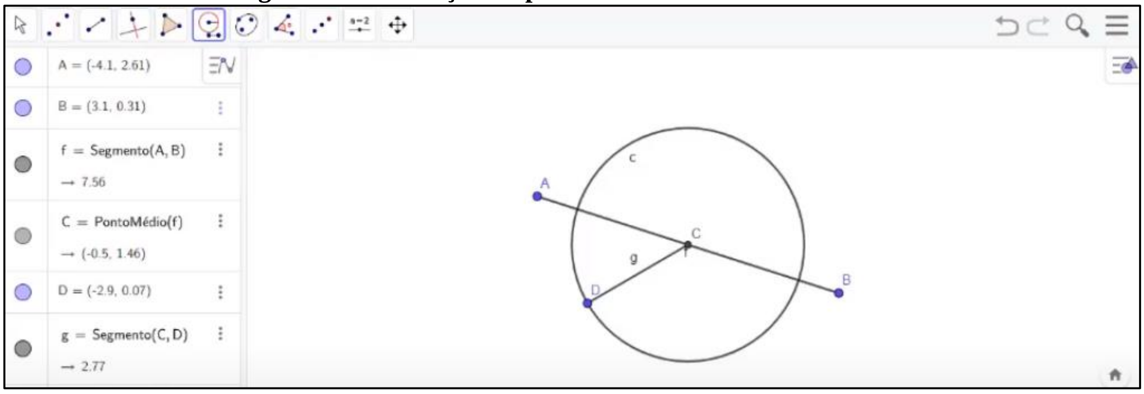
Professor: “Alguém tem uma outra ideia de recurso que poderíamos usar?”.

G: “Eu ia usar o compasso e fazer uma reta perpendicular”.

Então o professor chamou a atenção do aluno que a perpendicular não deveria ser utilizada e pediu para que o aluno guiasse os passos de como faria a construção.

G: “Eu ia tirar a medida do DC e ia fixar no C”, o que gerou a Figura 39.

Figura 39 Construção do professor com auxílio do aluno G



Fonte: Acervo do autor

G: “Deve ter algum recurso que seja o diâmetro dessa bola aí”, o que demonstra que o aluno sabia o que deveria fazer, de forma conceitual, só faltava saber o recurso correto para utilizar.

Então o professor recomendou a utilização de uma reta que passasse por DC, gerando uma intersecção com a circunferência, diferente de D, concluindo assim que o compasso também era um recurso adequado para ser utilizado nessa situação. Ainda, o aluno teve mais um questionamento.

G: “Não pode ter nenhuma reta perpendicular nisso aí?”.

Professor: “Se tu usares a perpendicular, tu vais acabar construindo um?”

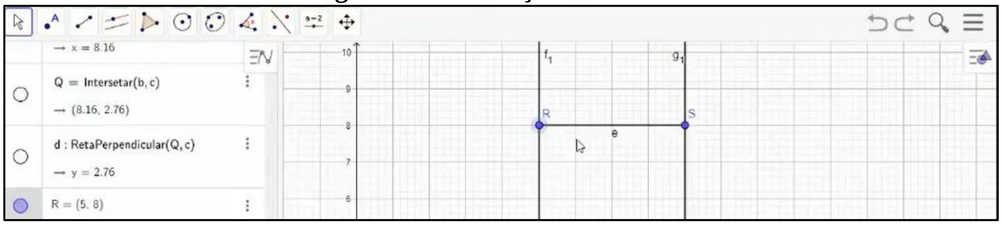
G: “Losango?”, demonstrando conhecimento sobre as diagonais do losango.

Professor: “Exatamente”.

A aluna C estava com dificuldades na construção do quadrado e pediu para compartilhar a sua tela para que o professor a auxiliasse.

C: “Aqui eu estou tentando fazer um quadrado e tu me falou que não dá pra criar ponto (referindo-se a pontos soltos, pois ela estava buscando um ponto de intersecção), que sempre tem que botar a perpendicular num ponto, mas aqui que não tem ponto, aqui embaixo, o que eu faço?”, demonstrando ter entendido sobre a necessidade de as construções não terem pontos livres que pudessem levar à deformação da figura construída. A Figura 40 mostra a construção da aluna, no momento que estava acontecendo o diálogo.

Figura 40 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

Professor: “As perpendiculares estão corretas, mas o que tu tens de transferir agora?”.

C: “O segmento?”.

Professor: “O segmento que tem de ser de mesmo tamanho, né?”.

C: “Sim”.

Professor: “E qual o recurso tu vais usar para isso?”.

C: “O compasso?”, demonstrando ter entendido a função do compasso.

C: “Só que eu ainda não entendi muito bem como se usa o compasso, é só fazer assim?”, enquanto, com o compasso selecionado, a aluna clicava no segmento RS.

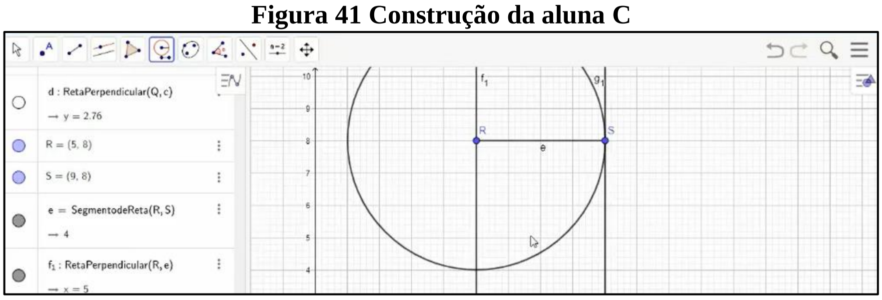
Professor: “Isso. Tu tiraste a medida do RS, tá vendo? Agora tu vais clicar e fixar ele no vértice que tu queres”.

C: “No R?”.

Professor: “Isso, pode ser”.

A Figura 41 apresenta a construção da aluna.

Figura 41 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

Professor: “Vou te explicar um pouco sobre o compasso. Tá vendo que tiraste a medida do segmento RS e essa medida virou raio da circunferência?”.

C: “Sim”.

Professor: “Agora tu tens que fixar o centro da circunferência em algum lugar. Quando tu fixas o centro da circunferência em R, qualquer ponto dessa circunferência estará com a mesma distância do ponto S. Então, quando tu traçares um segmento que vá do centro até um ponto da circunferência, esse segmento terá a mesma medida do segmento RS”.

Após marcar o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a RS e a circunferência, a aluna questionou.

C: “Agora só faço a paralela?”, demonstrando dominar o conceito de paralelismo entre lados opostos no quadrado.

Professor: “É uma boa saída”.

Passado algum tempo em que os alunos trabalhavam em suas construções, o aluno B fez um questionamento que abria a discussão sobre a inclusão de classes.

B: “Estou tentando fazer o retângulo aqui, ele fica retangular, mas quando eu mexo ele, ele uma hora vira um quadrado, se eu mexo demais”, o que, neste momento, reflete ainda falta de domínio quanto às classes dos quadriláteros, desconhecendo que um quadrado é um caso particular de retângulo, portanto, como seu retângulo era construído de forma a ser movido livremente entre as proporções de seus lados, em algum momento seu retângulo também seria quadrado. A falta de domínio sobre a inclusão de classes é uma das características do nível 1 de Van Hiele.

Professor: “Lembra quando eu falei que o quadrado é o caso mais particular de todos? Portanto, todos que tu fizeres (paralelogramo, retângulo e losango) poderão virar quadrado em algum momento. O que não pode é o quadrado, uma hora, virar retângulo”.

B: “Tá, entendi. Então acho que o retângulo eu acertei”.

O aluno G estava com dificuldades na construção do retângulo e pediu ajuda, porém seu computador estava travando, então a solução foi que o professor compartilhasse sua tela com o aluno e o aluno guiasse a construção, para que fosse possível entender onde estavam as dúvidas. Então, o aluno foi guiando as ações do professor durante a construção do retângulo.

Professor: “Como eu começo?”.

G: “Puxa um segmento e bota o ponto médio”.

Professor: “E agora?”.

G: “Agora eu não sei o que fazer”.

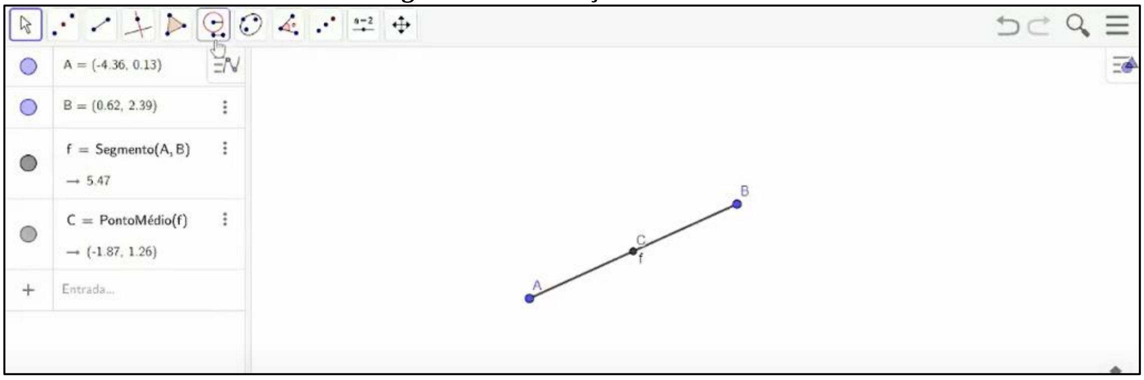
Professor: “Quais são as propriedades das diagonais do retângulo?”.

G: “Tem de ser do mesmo tamanho?”.

Professor: “Tem de ser do mesmo tamanho. Como vão ser do mesmo tamanho?”.

G: “A, tu pega um compasso ali no C, do B até o C”, a Figura 42 deixa mais claro o que está descrito no diálogo.

Figura 42 Construção do aluno G



Fonte: Acervo do autor

Professor: “E fixo onde?”.

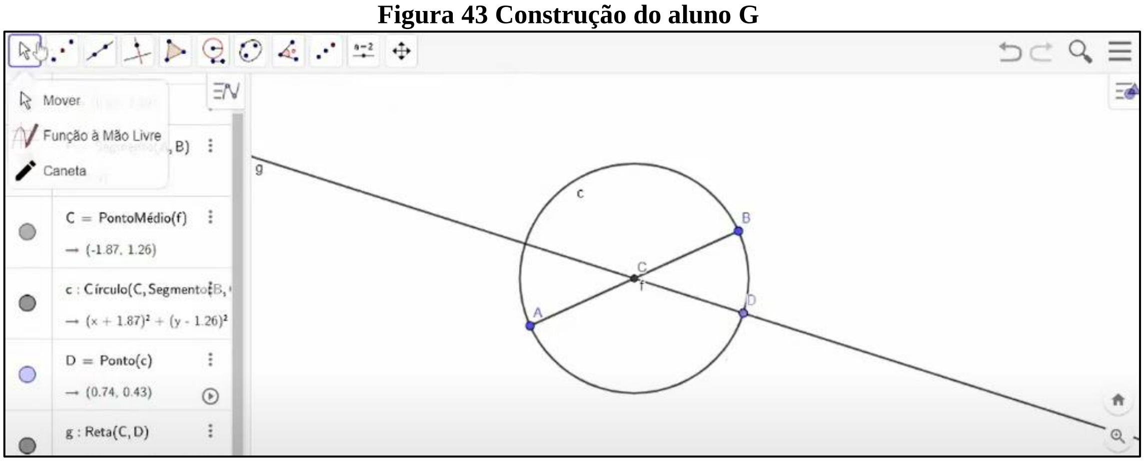
G: “No próprio C”.

Professor: “E agora?”.

G: “Aí tu bota no círculo e faz uma reta infinita depois”, referindo-se a uma reta que passasse por C e por um ponto em cima da circunferência.

O professor fez o que o aluno sugeriu, gerando a construção exposta na Figura 43.

Figura 43 Construção do aluno G



Fonte: Acervo do autor

Professor: “E agora?”.

G: “Aí tu fecha o ponto fixo ali”, referindo-se à outra intersecção da reta com a circunferência.

Então o aluno percebeu que havia construído um retângulo, conforme a atividade propunha e foi fazer a sua construção em seu computador.

A aluna C pediu ajuda para fazer o losango, da atividade de construção 1, ou seja, começando a construção por um dos lados. Então a aluna compartilhou sua tela e começou a construção com um segmento qualquer, como esperado. E então a aluna relatou.

C: “Eu não sei nada do losango”.

Então o professor sugeriu que a aluna C fizesse uma pesquisa no Google sobre as propriedades do losango. Após fazer a pesquisa, a aluna encontrou que todos os lados são congruentes e, ao tomar conhecimento dessa propriedade, a aluna concluiu:

C: “Então eu uso o compasso?”, demonstrando domínio sobre a função do recurso compasso no GeoGebra.

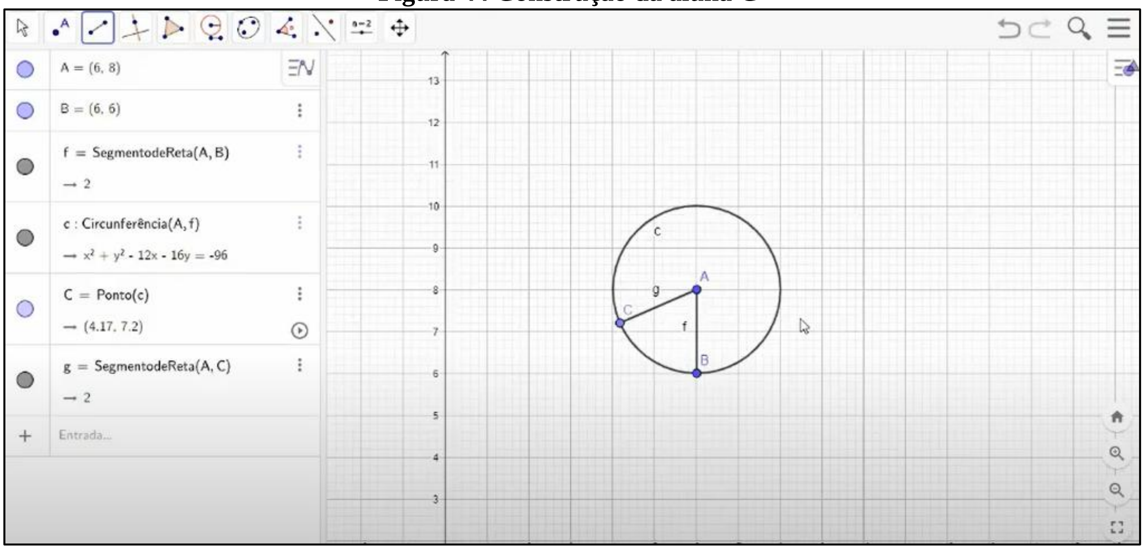
Professor: “isso”.

C: “Eu vou fazer um segmento e daí pro resto eu uso o compasso?”.

Professor: “Primeiro usa o compasso aí uma vez”.

Então a aluna fez uso do compasso no segmento AB e fixou o centro da circunferência gerada em A, depois construiu um ponto sobre a circunferência e traçou um segmento de A até esse ponto, conforme Figura 44.

Figura 44 Construção da aluna C



Fonte: Acervo do autor

C: “Agora é que eu me compliquei”.

Professor: “Os lados, além de serem todos congruentes, eles são o que?”.

C: “Eu só sei das diagonais que são perpendiculares”.

Professor: “E os lados?”.

Então a aluna recorreu novamente a pesquisa e encontrou que os lados opostos do losango eram paralelos. A partir disso, a aluna terminou a construção de forma autônoma, sem mais intervenções do professor. As dúvidas de C ressaltam falta de conhecimentos prévios sobre as propriedades do losango, mas também demonstra o domínio do GeoGebra, sabendo quais recursos utilizar após ter pesquisado sobre as propriedades.

A aluna C enviou as respostas da atividade de construção 1 e pediu que o professor revisasse e apontasse se houvesse algum erro. Então, ao analisar, o professor pediu que a aluna C abrisse sua construção do paralelogramo e questionou:

Professor: “O teu paralelogramo não está errado, mas o que tu visualizas nele? Ele é um paralelogramo qualquer ou um paralelogramo bem específico?”.

C: “Ele tá losango”, demonstrando conseguir analisar sua construção ao visualizá-la, identificar propriedades e diferenciar um paralelogramo qualquer de um losango.

Professor: “Isso, ele está com todos os lados iguais. Por que tu achas que ele está assim? Tu usaste uma ferramenta que não precisava ser usada na construção, qual é essa ferramenta?”.

C: “O compasso”, o que evidencia a concretização do domínio sobre a função do compasso nas construções, assim como a identificação da propriedade de congruência dos lados, propriedade do losango.

Professor: “Exato, pois os lados não precisam necessariamente ser iguais”.

Porém, o professor disse que a aluna C não precisaria refazer a sua construção do losango, justificando que o caráter de pesquisa da atividade trazia consigo possibilidades além do certo e errado.

O aluno B estava com dificuldades na construção do losango da atividade de construção 2, onde deveria iniciar a construção pelas diagonais do losango. Então, o aluno pediu para compartilhar sua tela para que o professor pudesse identificar os problemas e auxiliar na sua construção. Ao iniciar o compartilhamento de tela, o aluno já relata:

B: “Aqui eu já dei uma mexida nele e ficou todo errado”, isso possibilita percebermos que o aluno consolidou a ideia do arrastar como um recurso de testagem para perceber se suas construções estão conforme esperadas ou não.

O professor sugeriu que o aluno iniciasse novamente sua construção, para acompanhar todo processo que o aluno realizou. Então o aluno inicia uma nova construção e vai relatando o que está fazendo.

B: “Começando com um segmento. Daí eu faço o ponto médio. Daí eu tô pegando aqui o compasso”.

Professor: “Aí que está o primeiro problema. Quais são as propriedades das diagonais do losango?”.

B: “Eu sei que tem uma diagonal maior que a outra”, o que delata sobre a não percepção da inclusão de classes, descartando que as diagonais podem ter o mesmo tamanho, gerando assim um quadrado, que é um caso específico de losango.

Professor: “Não necessariamente”.

B: “Não?”.

Professor: “Quando for quadrado, por exemplo, não. Lembra que o quadrado é um caso particular de losango?”.

B: “Sim, tirando o quadrado né”.

Professor: “Ele pode ter (as diagonais não congruentes). As diagonais não necessariamente são do mesmo tamanho, isso já é um bom início. Só por isso, tu já sabes que tu não usar esse recurso que tu estás querendo usar, que é o?”.

B: “Compasso”.

Professor: “O que mais tu sabes sobre as diagonais?”.

B: “Eu sei que elas se interceptam no ponto médio”.

Professor: “E a outra coisa que tu estás esquecendo. Uma propriedade das diagonais. Tu já falaste sobre o tamanho, sobre onde se interceptam, o que faltou?”.

B: “O ângulo”.

Professor: “O que elas são?”

B: “Congruentes?”, o que ressalta certa incompreensão do aluno sobre alguns conceitos, pois ele sugere uma propriedade quanto ao ângulo, mas acaba dando uma resposta que se refere ao tamanho.

Professor: “Congruentes está sendo falado sobre tamanho. Se queremos falar de ângulo, podemos dizer que elas são...?”.

B: “Não sei qual é a palavra específica”.

Então o professor sugere que o aluno pesquise sobre as diagonais do losango, para encontrar a informação que lhe falta. Após fazer a pesquisa o aluno respondeu:

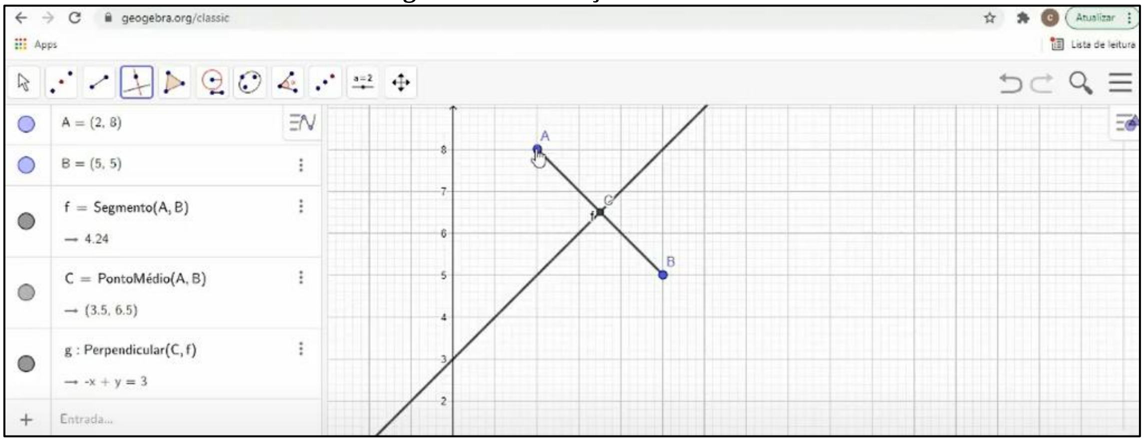
B: “São perpendiculares”.

Professor: “Então como tu vais fazer lá?”.

B: “Vou usar os recursos do GeoGebra”.

Então o aluno traça a reta perpendicular ao segmento já construído, gerando o que está apresentado na Figura 45.

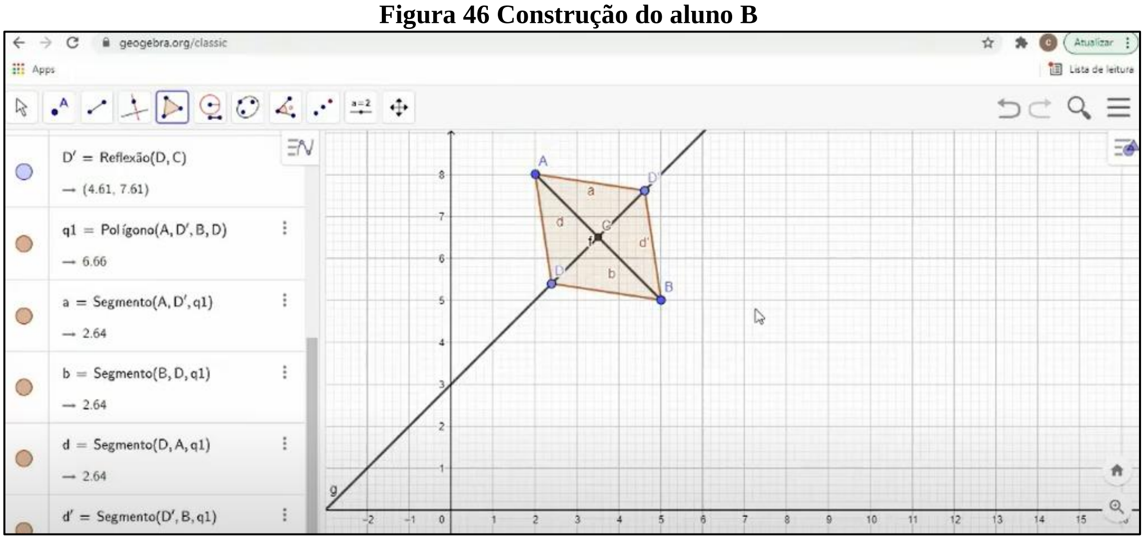
Figura 45 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Então, o aluno marcou um ponto qualquer D na reta perpendicular e utilizou o recurso de reflexão em relação a um ponto, refletindo o ponto D em relação ao ponto C, já demonstrando grande evolução no domínio dos recursos do GeoGebra e em que situações os utilizar, principalmente em relação ao primeiro encontro. A construção do aluno está apresentada na Figura 46.

Figura 46 Construção do aluno B



Fonte: Acervo do autor

Após finalizar a construção, o aluno B relembrou de sua construção do quadrado e relatou:

B: “Acho que eu errei o quadrado, que eu não usei perpendicular”, o que demonstra uma tomada de consciência do aluno na relação do quadrado ser um caso particular de losango, evoluindo no conhecimento de inclusão de classes.

Professor: “Mas tu usaste o compasso lá?”.

B: “É, eu usei compasso”.

Então o aluno abriu sua construção do quadrado e, ao arrastar um dos vértices, percebeu que havia mesmo negligenciado o perpendicularismo. Então o aluno refez a construção do quadrado imediatamente, corrigindo-a, impondo a propriedade de perpendicularismo entre as diagonais.

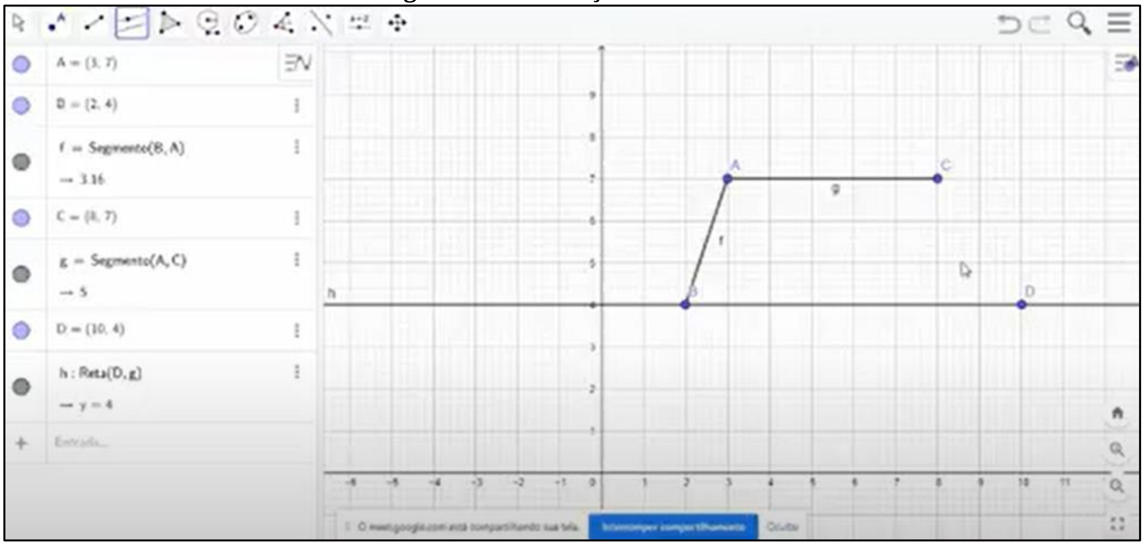
O aluno F só conseguiu entrar na chamada no final do encontro, não conseguindo participar do encontro durante 1 hora e 39 minutos, tendo participado apenas nos últimos 10 minutos. Nesse tempo, o professor conversou com o aluno F e explicou o que o aluno deveria fazer em suas construções da atividade de construção 1 para que ficassem de acordo com a proposta da atividade. Após essa conversa, a chamada foi encerrada.

4.4 Quarto Encontro

Esse encontro, que teve duração de 1 hora e 10 minutos, foi destinado para finalização de todas as atividades. O aluno F estava ainda na atividade de construção 1, enquanto os alunos B, D, G e A haviam terminado as atividades de construção. Para esses participantes foi solicitado que preenchessem o “Formulário Final”, que foi disponibilizado para os alunos por meio de um Google Forms. As interações entre os alunos e o professor, nesse encontro, só foram relevantes com o aluno F, que ainda estava fazendo as atividades de construção. Sendo assim, os alunos B, D, G e A responderam ao formulário final e saíram da chamada. E o aluno F continuou na chamada para finalizar suas construções. Ainda, os alunos C e E não compareceram ao encontro.

O aluno F compartilhou sua tela e mostrou a construção do seu paralelogramo a partir dos lados. Ao construir, o aluno cometeu o mesmo erro que seus colegas também haviam cometido no encontro anterior. Ao traçar a reta paralela ao segmento AC, o aluno posicionou a reta de forma que passasse pelo ponto B, mas fixando em um ponto solto criado (ponto D), conforme ilustra a Figura 47.

Figura 47 Construção do aluno F



Fonte: Acervo do autor

O professor orientou o aluno F conforme havia orientado os demais alunos e a construção seguiu com autonomia do aluno.

Os relatos de interesse com o aluno F começam nas construções da atividade de construção 2, na qual ele deveria construir os quadriláteros iniciando as construções pelas suas diagonais. O aluno construiu as quatro figuras enquanto compartilhava a tela na chamada, então pôde ter auxílio do professor a todos os questionamentos que surgiam.

Iniciando pelo paralelogramo, o aluno foi realizando sua construção e a conversa com o professor foi acontecendo naturalmente. Após fazer o primeiro segmento que seria diagonal do paralelogramo, o professor questionou o aluno:

Professor: “Agora tu tens que saber quais são as propriedades das diagonais do paralelogramo”.

F: “Vão se cruzar”.

Professor: “Mas vão se cruzar onde?”.

F: “Vai ser no meio?”.

Professor: “Exato”.

Após marcar o ponto médio e construir metade do segmento que seria a outra diagonal do paralelogramo, o professor questiona:

Professor: “E agora, o que tu vais fazer?”.

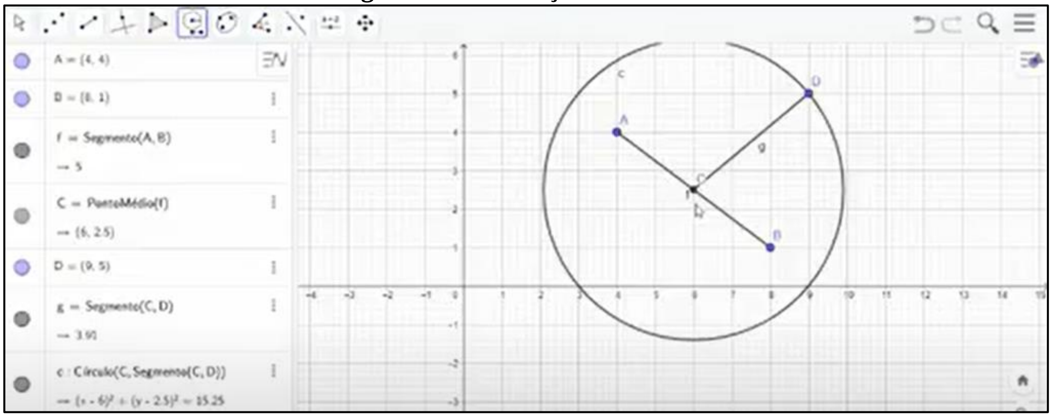
F: “O mesmo aqui”, enquanto criava um segmento na direção oposta ao segmento CD já construído.

Professor: “É, mas como tu vais transportar essa medida exata?”.

F: “Com o compasso”, evidenciando domínio sobre os recursos do software, suas funcionalidades e aplicações.

Após utilizar o compasso, a construção estava conforme a Figura 48 mostra.

Figura 48 Construção do aluno F



Fonte: Acervo do autor

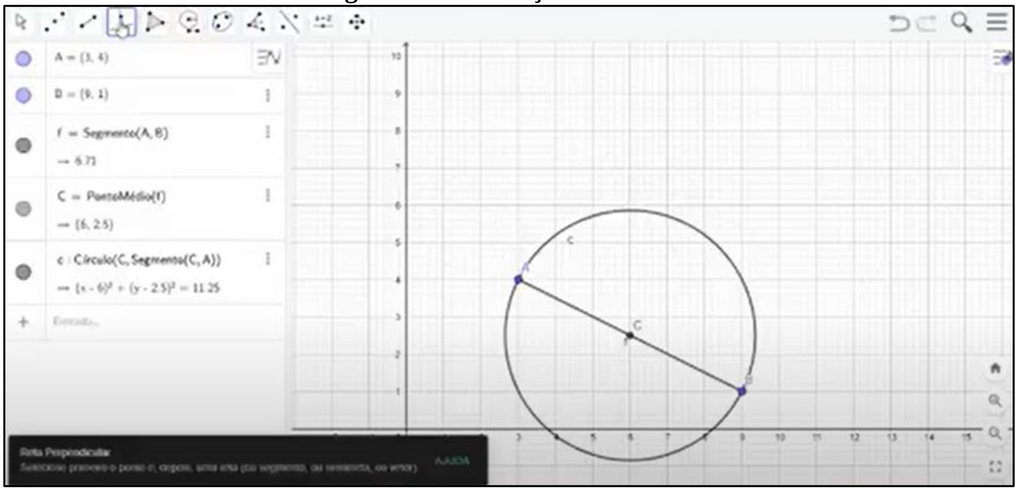
Professor: “Agora, como tu vai marcar o outro ponto?”.

F: “Posso botar uma paralela por cima (do segmento CD)”, demonstrando ter conhecimento sobre a possibilidade de uma reta paralela estar em cima do próprio segmento a que ela é paralela.

Então o aluno finalizou sua construção, conforme solicitado na proposta da atividade.

A construção do retângulo do aluno F estava conforme apresentado na Figura 49, e então ele fez um questionamento.

Figura 49 Construção do aluno F



Fonte: Acervo do autor

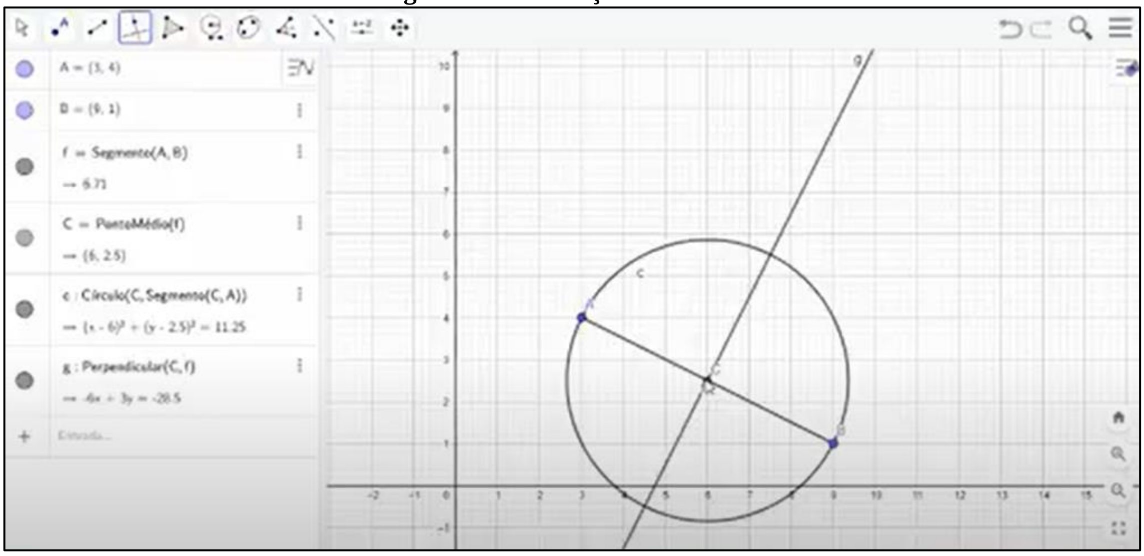
F: “Aí eu faço uma perpendicular?”, sugerindo perpendicularismo entre as diagonais.

Professor: “Não necessariamente. No retângulo não tem que ser perpendicular, entende? Pode ser que seja, mas não tem de ser. Quando for perpendicular, tu terás uma figura bem particular, qual figura é essa?”.

Professor: “Constrói aí, para tu veres”.

Então o aluno construiu uma reta perpendicular ao segmento AB, como na Figura 50 e prontamente disse:

Figura 50 Construção do aluno F



Fonte: Acervo do autor

F: “É um quadrado”.

E, como percebeu que havia construído um quadrado, já aproveitou a construção para o seu quadrado da atividade em questão.

Após isso, o aluno fez a construção do retângulo novamente, agora sem auxílio do professor e de forma bastante rápida, mostrando ter compreendido a diferença entre o retângulo e o quadrado.

O aluno iniciou a construção do losango utilizando os mesmos passos apresentados na Figura 48, porém o professor questionou o aluno sobre sua decisão em utilizar o compasso.

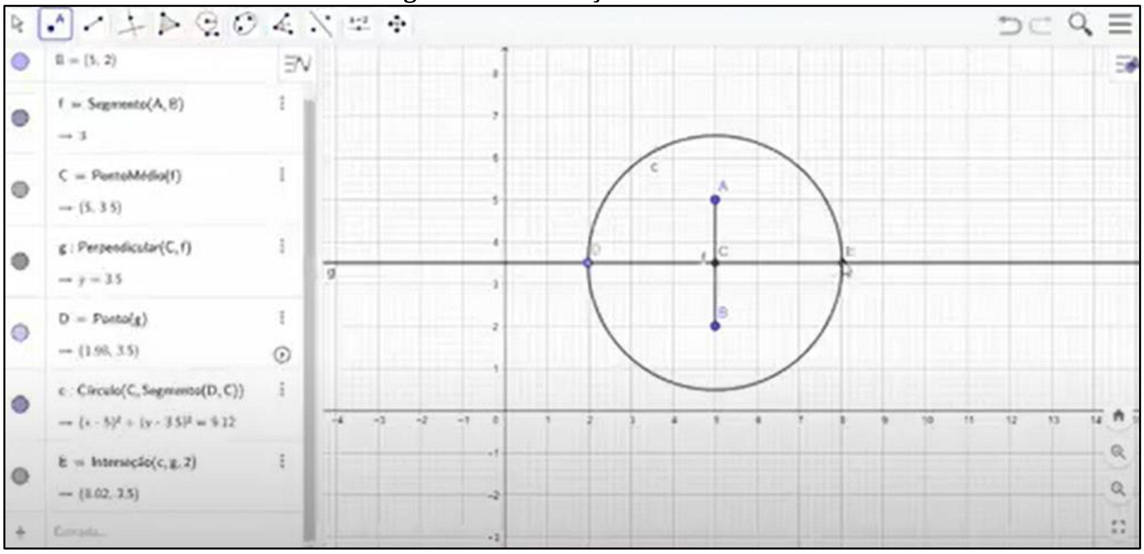
Professor: “O que acontece? As diagonais do losango são”, quando foi interrompido pelo aluno.

F: “Elas são perpendiculares, né?”.

Professor: “Isso, perpendiculares”.

Então o aluno traçou a reta perpendicular à diagonal AB já construída e marcou um ponto sobre essa reta, que viria a ser vértice do losango. Após esse passo, o aluno utilizou o compasso para garantir que as diagonais se interceptassem nos seus pontos médios, como mostra a Figura 51. E então finalizou sua construção traçando o polígono.

Figura 51 Construção do aluno F



Fonte: Acervo do autor

Após finalizar a atividade de construção 2, o aluno F respondeu o formulário final e foi liberado, assim encerrando esse encontro.

4.5 Quinto Encontro

O quinto encontro teve duração de 40 minutos e a participação apenas da aluna C, pois o aluno E, que era o outro aluno que não havia comparecido ao encontro anterior, preencheu o formulário final em um momento fora dos encontros marcados.

Nesse encontro a Aluna C finalizou a atividade de construção 2, sem diálogos relevantes para análise, pois a aluna demonstrou domínio das propriedades das diagonais dos quadriláteros trabalhados, apresentando apenas algumas dificuldades técnicas do programa, que foram solucionadas rapidamente. Após essa atividade, C respondeu ao formulário final e foi liberada, assim encerrando o encontro e dando fim às atividades práticas dessa pesquisa.

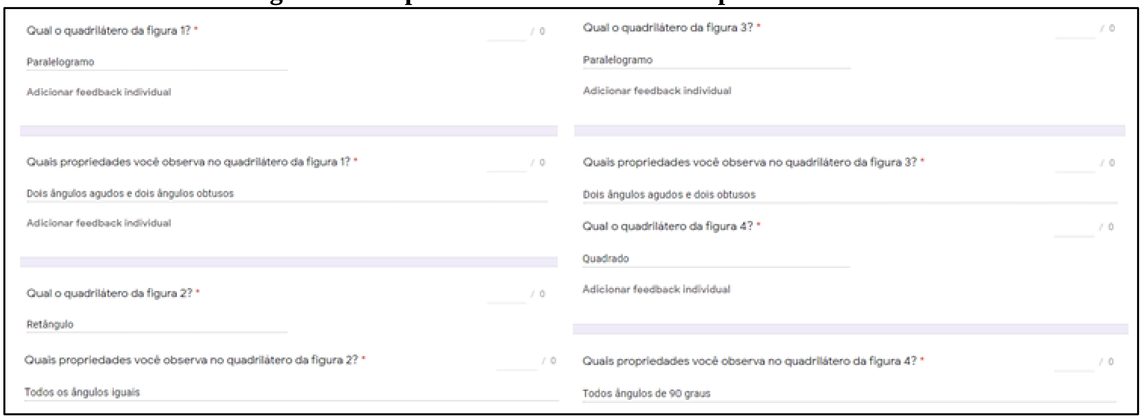
4.6 Análise da atividade de caixa preta

Nessa subseção as respostas de todos os alunos serão apresentadas, pois entende-se que todas serão importantes para fins de comparação com suas respostas do formulário final. Nessa atividade se espera que os alunos descrevam as figuras geométricas que tiveram acesso e puderam arrastar seus vértices. A sequência das figuras corresponde a:

- Figura 1 → Paralelogramo;
- Figura 2 → Retângulo;
- Figura 3 → Losango;
- Figura 4 → Quadrado.

As respostas da aluna A estão expostas abaixo, na Figura 52.

Figura 52 Resposta da atividade de caixa preta - aluna A



Qual o quadrilátero da figura 1? *

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

Dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

Retângulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

Todos os ângulos iguais

Qual o quadrilátero da figura 3? *

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

Dois ângulos agudos e dois obtusos

Qual o quadrilátero da figura 4? *

Quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

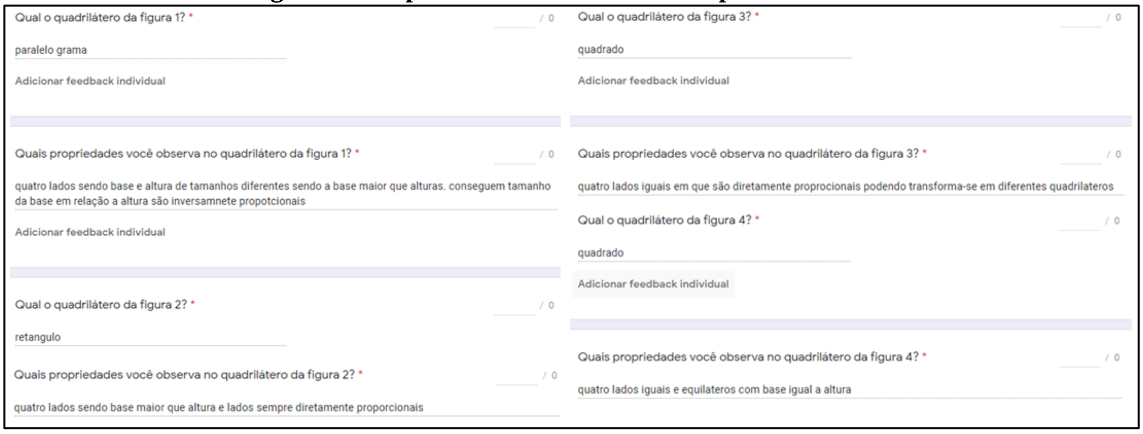
Todos ângulos de 90 graus

Fonte: Acervo do autor

Em suas respostas, sob a ótica da teoria de Van Hiele, podemos observar que a aluna A ainda não apresenta características do nível 1. Os motivos para a classificação no nível 0 advém da incapacidade de diferenciação entre o paralelogramo e o losango. Além disso, a escassez de informações nas suas respostas sobre as propriedades das demais figuras, revelam que A ainda não identifica todas as propriedades que caracterizam estas figuras geométricas.

As respostas do aluno B estão apresentadas na Figura 53.

Figura 53 Resposta da atividade de caixa preta - aluno B


Qual o quadrilátero da figura 1? *

paralelo grama

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

quatro lados sendo base e altura de tamanhos diferentes sendo a base maior que alturas. conseguem tamanho da base em relação a altura são inversamnete propotcionais

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

retangulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

quatro lados sendo base maior que altura e lados sempre diretamente proporcionais

Qual o quadrilátero da figura 3? *

quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

quatro lados iguais em que são diretamente proporcionais podendo transforma-se em diferentes quadrilateros

Qual o quadrilátero da figura 4? *

quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

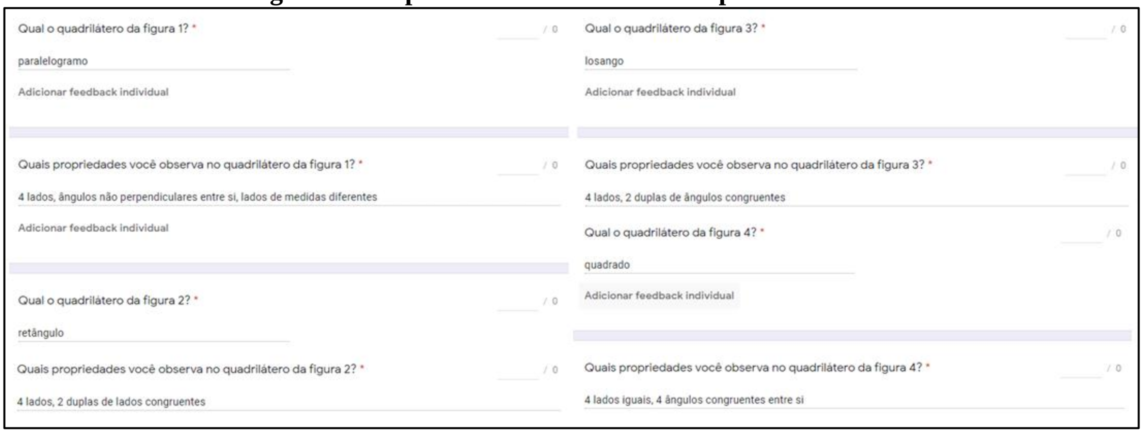
quatro lados iguais e equilateros com base igual a altura

Fonte: Acervo do autor

Nesse caso percebemos que o aluno B encontra-se no nível 0 de Van Hiele, pois ele ainda não consegue diferenciar o quadrado do losango, além de não conhecer a grafia correta do nome de cada uma das figuras. Ainda, em sua resposta sobre as propriedades do paralelogramo, percebemos um exemplo do que Gravina (1996) fala sobre os desenhos prototípicos, pois o aluno afirma que a base de um paralelogramo deve ser maior do que sua altura, o que não é uma propriedade da figura, mas uma característica das figuras utilizadas em livros, como vimos na Figura 3.

A seguir, as respostas da aluna C estão apresentadas na Figura 54.

Figura 54 Resposta da atividade de caixa preta - aluna C


Qual o quadrilátero da figura 1? *

paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

4 lados, ângulos não perpendiculares entre si, lados de medidas diferentes

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

retângulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

4 lados, 2 duplas de lados congruentes

Qual o quadrilátero da figura 3? *

losango

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

4 lados, 2 duplas de ângulos congruentes

Qual o quadrilátero da figura 4? *

quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

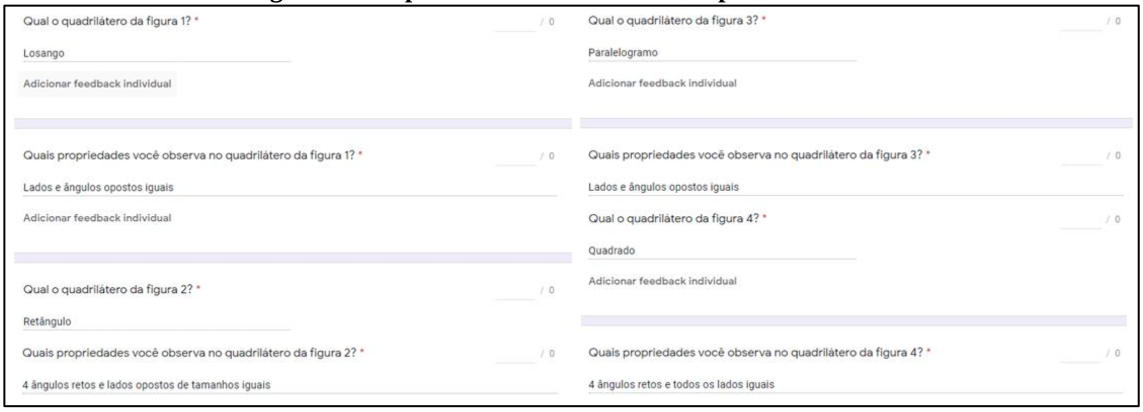
4 lados iguais, 4 ângulos congruentes entre si

Fonte: Acervo do autor

Analisando as respostas da aluna C, podemos classificá-la no nível 1 de Van Hiele, pois é capaz de identificar as figuras por sua forma, reconhecer algumas propriedades, mas não consegue ter clareza ao descrever tais propriedades.

As respostas da aluna D estão expostas na Figura 55.

Figura 55 Resposta da atividade de caixa preta - aluna D


Qual o quadrilátero da figura 1? *

Losango

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

Lados e ângulos opostos iguais

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

Retângulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

4 ângulos retos e lados opostos de tamanhos iguais

Qual o quadrilátero da figura 3? *

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

Lados e ângulos opostos iguais

Qual o quadrilátero da figura 4? *

Quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

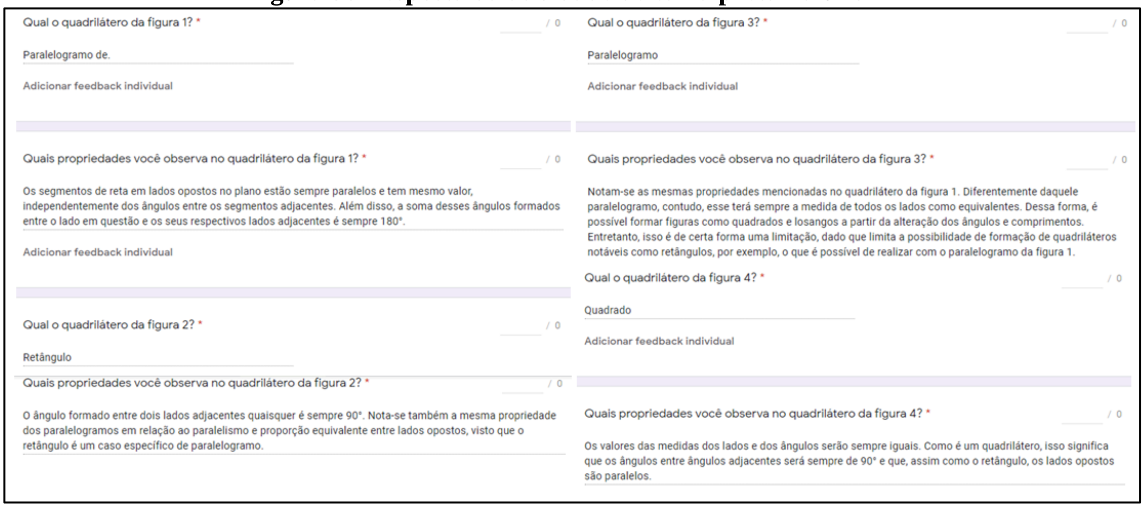
4 ângulos retos e todos os lados iguais

Fonte: Acervo do autor

Percebe-se que a aluna D domina e consegue se expressar melhor sobre as propriedades de cada uma das figuras, trazendo colocações sobre os lados e sobre os ângulos de cada figura, além de tratar dos lados e ângulos opostos, o que ainda não havia sido falado por outros alunos. Porém, a aluna D revela certa incompreensão entre o paralelogramo e o losango e a razão dessa dificuldade fica explícita na descrição das propriedades, quando a aluna não expõe a congruência entre os quatro lados do losango. Por esses motivos, podemos entender que essa aluna se encontra no nível 1 de Van Hiele, pois embora exista incompreensão na identificação de propriedades do paralelogramo e do losango, a aluna apresenta linguagem adequada e um detalhamento valoroso na descrição das propriedades.

As respostas do aluno E estão apresentadas na Figura 56.

Figura 56 Resposta da atividade de caixa preta - aluno E


Qual o quadrilátero da figura 1? *

Paralelogramo de.

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

Os segmentos de reta em lados opostos no plano estão sempre paralelos e tem mesmo valor, independentemente dos ângulos entre os segmentos adjacentes. Além disso, a soma desses ângulos formados entre o lado em questão e os seus respectivos lados adjacentes é sempre 180°.

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

Retângulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

O ângulo formado entre dois lados adjacentes quaisquer é sempre 90°. Nota-se também a mesma propriedade dos paralelogramos em relação ao paralelismo e proporção equivalente entre lados opostos, visto que o retângulo é um caso específico de paralelogramo.

Qual o quadrilátero da figura 3? *

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

Notam-se as mesmas propriedades mencionadas no quadrilátero da figura 1. Diferentemente daquele paralelogramo, contudo, esse terá sempre a medida de todos os lados como equivalentes. Dessa forma, é possível formar figuras como quadrados e losangos a partir da alteração dos ângulos e comprimentos. Entretanto, isso é de certa forma uma limitação, dado que limita a possibilidade de formação de quadriláteros notáveis como retângulos, por exemplo, o que é possível de realizar com o paralelogramo da figura 1.

Qual o quadrilátero da figura 4? *

Quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

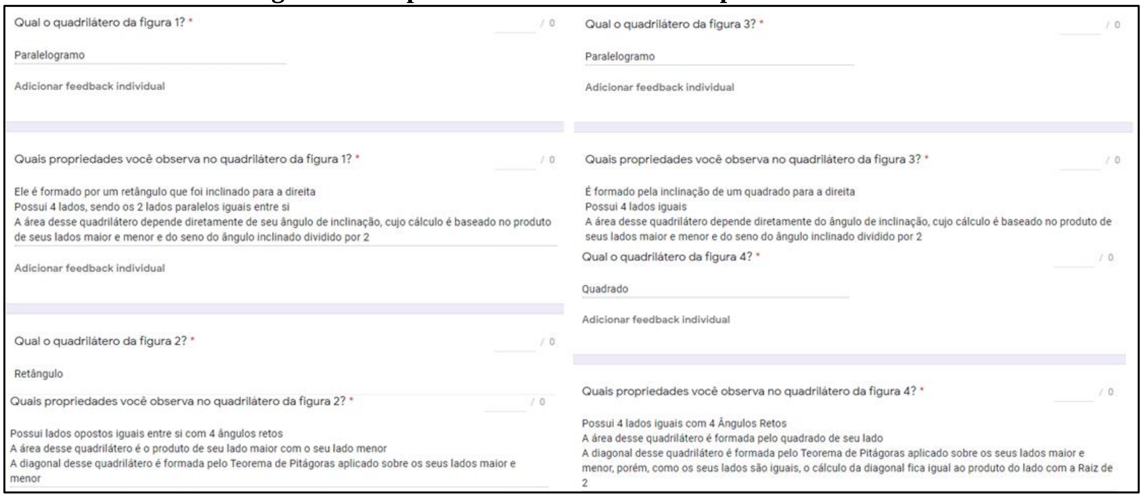
Os valores das medidas dos lados e dos ângulos serão sempre iguais. Como é um quadrilátero, isso significa que os ângulos entre ângulos adjacentes será sempre de 90° e que, assim como o retângulo, os lados opostos são paralelos.

Fonte: Acervo do autor

A partir das respostas analisadas, podemos identificar que o aluno E encontra-se na transição do nível 1 para o nível 2 de Van Hiele, dada a riqueza na identificação e descrição das propriedades, aliadas à correção de suas respostas. Em suas respostas, podemos notar que o aluno já é capaz de fazer relações entre os quadriláteros trabalhados e, embora tenha dito que a figura 3 era um paralelogramo (o que está correto), é capaz de ressaltar a congruência entre os lados e estabelecer que será possível formar quadrados e losangos, mas não será possível formar retângulos na construção em questão, o que denota o domínio sobre a inclusão de classes. Assim, destacamos que E já chega para a pesquisa revelando características nas quais pretende-se desenvolver com as atividades propostas.

As respostas do aluno F estão expostas pelas Figura 57.

Figura 57 Resposta da atividade de caixa preta - aluno F


Qual o quadrilátero da figura 1? * / 0

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? * / 0

Ele é formado por um retângulo que foi inclinado para a direita
Possui 4 lados, sendo os 2 lados paralelos iguais entre si
A área desse quadrilátero depende diretamente de seu ângulo de inclinação, cujo cálculo é baseado no produto de seus lados maior e menor e do seno do ângulo inclinado dividido por 2

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? * / 0

Retângulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? * / 0

Possui lados opostos iguais entre si com 4 ângulos retos
A área desse quadrilátero é o produto de seu lado maior com o seu lado menor
A diagonal desse quadrilátero é formada pelo Teorema de Pitágoras aplicado sobre os seus lados maior e menor

Qual o quadrilátero da figura 3? * / 0

Paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? * / 0

É formado pela inclinação de um quadrado para a direita
Possui 4 lados iguais
A área desse quadrilátero depende diretamente do ângulo de inclinação, cujo cálculo é baseado no produto de seus lados maior e menor e do seno do ângulo inclinado dividido por 2

Qual o quadrilátero da figura 4? * / 0

Quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? * / 0

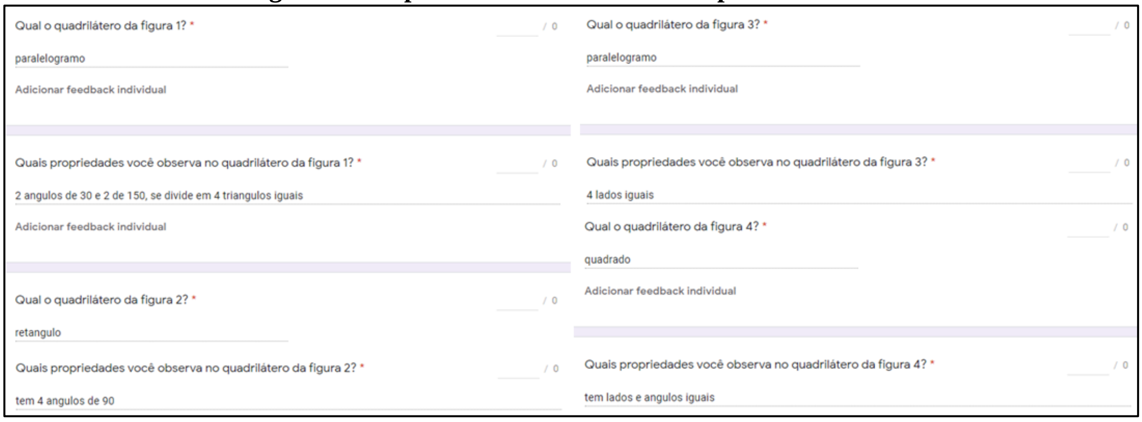
Possui 4 lados iguais com 4 Ângulos Retos
A área desse quadrilátero é formada pelo quadrado de seu lado
A diagonal desse quadrilátero é formada pelo Teorema de Pitágoras aplicado sobre os seus lados maior e menor, porém, como os seus lados são iguais, o cálculo da diagonal fica igual ao produto do lado com a Raiz de 2

Fonte: Acervo do autor

Percebe-se, por suas respostas, que o aluno F encontra-se no nível 1 de Van Hiele, pois ao mesmo tempo em que é capaz de descrever algumas das propriedades dos quadriláteros apresentados, não demonstra dominar a inclusão de classes, embora já seja possível perceber que o aluno faz algumas relações entre as figuras. Ainda, podemos perceber que o aluno tem sua ideia do paralelogramo e do losango baseadas em desenhos prototípicos, conforme o que afirma Gravina (1996).

As respostas do aluno G estão apresentadas na Figura 58.

Figura 58 Resposta da atividade de caixa preta - aluno G



Qual o quadrilátero da figura 1? *

paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 1? *

2 angulos de 30 e 2 de 150, se divide em 4 triangulos iguais

Adicionar feedback individual

Qual o quadrilátero da figura 2? *

retangulo

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 2? *

tem 4 angulos de 90

Qual o quadrilátero da figura 3? *

paralelogramo

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 3? *

4 lados iguais

Qual o quadrilátero da figura 4? *

quadrado

Adicionar feedback individual

Quais propriedades você observa no quadrilátero da figura 4? *

tem lados e angulos iguais

Fonte: Acervo do autor

Percebe-se que o aluno G ainda apresenta características de nível 0 sob a ótica da teoria de Van Hiele, visto que o aluno identifica as figuras pelas suas formas, mas não parece identificar as propriedades das figuras nem faz relações entre as propriedades. Um exemplo que ilustra essa situação é suas respostas sobre a figura 3, na qual ele identifica que a figura é um paralelogramo, identifica que ela possui quatro lados congruentes, mas não relaciona essas duas propriedades a um losango. Também cabe salientar a resposta de G sobre a figura 1, pois mesmo explorando figuras dinâmicas o aluno tenta observar uma característica particular e não uma propriedade geral que define toda a classe na qual essa figura está inserida.

A atividade mostrou-se importante para que os alunos estabelecessem um primeiro contato com a geometria dinâmica, principalmente com o recurso de arrastar visando identificar invariantes e as propriedades da figura, conforme exposto no referencial teórico com a corroboração de Restrepo (apud Dickel, 2019). Ainda, a atividade trouxe a possibilidade de análise de cada aluno sob a luz da teoria de Van Hiele.

4.7 Análise da atividade de construção 1

Nessa subseção serão analisadas respostas e construções que apresentam dados importantes para a pesquisa. Ainda, analisar-se-á uma possível evolução dos alunos em relação à identificação de propriedades geométricas utilizadas em cada uma das construções.

Primeiramente, podemos observar a evolução do aluno B após fazer uso do GeoGebra para construir as figuras solicitadas. Algumas respostas que evidenciam a evolução do aluno B estão expostas na Figura 59.

Figura 59 Resposta da atividade de construção 1 - aluno B

Quais propriedades do paralelogramo você usou nessa construção? * / 0

lados opostos paralelos e congruentes, apresentando ângulos opostos congruentes, não apresenta angulo de 90 graus com nenhum lado

Quais propriedades do retângulo você usou nessa construção? * / 0

lados opostos paralelos e congruentes, formando angulos de 90 graus, sendo a base perpendicular a altura e maior que a altura

Quais propriedades do losango você usou nessa construção? * / 0

quatro lados iguais porém formando angulos opostos congruentes

Fonte: Acervo do autor

É possível perceber que o aluno B avançou no entendimento sobre os quadriláteros trabalhados ao ter de construí-los, visto que uma nova linguagem aparece em suas respostas, tal como os termos "opostos", "paralelos" e "congruentes". Pode-se concluir que, além da utilização do GeoGebra, o aluno ampliou seu vocabulário por meio das diversas conversas com o professor durante a realização das atividades, pois B foi um dos alunos que mais teve dúvidas, solicitou ajudas do professor e demonstrou interesse nas atividades propostas, empenhando-se para entregar o melhor de si em cada uma delas. Ainda, percebemos uma evolução no nível de pensamento geométrico de Van Hiele, apresentado agora características do nível 1, como a descrição das propriedades dos quadriláteros trabalhados.

A aluna C também apresentou evolução. Portanto, algumas de suas respostas da atividade estão apresentadas na Figura 60.

Figura 60 Resposta da atividade de construção 1 - aluna C

Quais propriedades do paralelogramo você usou nessa construção? * / 0

lados opostos paralelos

Quais propriedades do retângulo você usou nessa construção? * / 0

lados opostos iguais, 4 ângulos de 90 graus

Quais propriedades do losango você usou nessa construção? * / 0

4 lados iguais, lados opostos paralelos

Quais propriedades do quadrado você usou nessa construção? * / 0

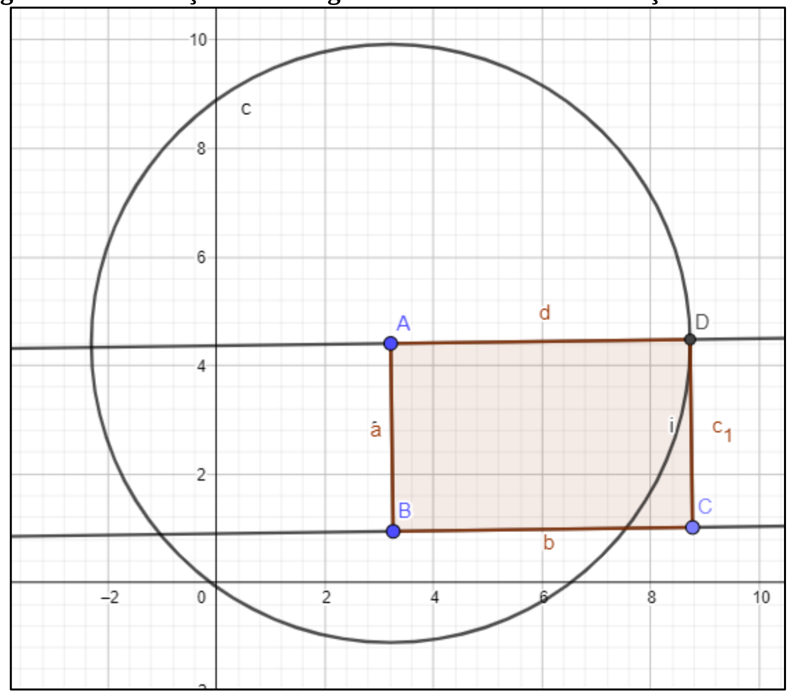
4 lados iguais, 4 ângulos de 90 graus

Fonte: Acervo do autor

As respostas de C agora apresentam mais informações pertinentes sobre os quadriláteros em questão. É possível atrelar o fato de a aluna ter a preocupação em evidenciar a medida dos ângulos no retângulo e no quadrado, diretamente ao uso do GeoGebra, onde ela utilizou o recurso de retas perpendiculares. Ainda, um novo conceito aparece em suas respostas, que é o conceito de paralelismo. Esse processo é resultado da utilização do recurso de retas paralelas no GeoGebra. Pode-se afirmar que o uso do software, nesse caso, foi também um meio de ampliação de vocabulário matemático e geométrico para C, além de um ambiente dinâmico de construção que proporcionou identificação e reconhecimento das propriedades destes quadriláteros, até então negligenciadas por C. Com esses aspectos demonstrados pela aluna por meio de suas respostas, aliadas às experiências durante os encontros, à luz da teoria de Van Hiele, C ainda se mantém no nível 1, mas apresentando evolução considerável para transitar para o nível 2.

A aluna D trouxe uma abordagem particular na construção do retângulo nessa atividade, conforme mostrado na Figura 61.

Figura 61 Construção do retângulo da atividade de construção 1 - aluna D



Fonte: Acervo do autor

Percebe-se a utilização de retas perpendiculares ao segmento AB e a construção de um ponto C, livre sobre uma das retas perpendiculares e então o recurso utilizado que traz a diferença na sua construção de retângulo: o compasso. D faz uso desse recurso, utilizando a propriedade de congruência dos lados opostos do retângulo, demonstrando entendimento sobre as propriedades do retângulo, que não se restringe ao uso das palavras, vai além, chegando à utilização na prática, de forma autônoma.

Com um relato sobre as propriedades utilizadas em suas construções condizente ao que se vê na prática, a aluna se consolida no nível 1 de Van Hiele, mostrando potencial para progredir ao nível 2 rapidamente, principalmente pelas experiências durante os encontros, os quais a aluna demonstrou autonomia sobre suas construções, solicitando pouquíssimas vezes a ajuda do professor.

As respostas do aluno E serão mostradas na Figura 62. Visto que já havia sido avaliado que E transitava entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, esperava-se que não houvesse regressão e se possível perceber algum formalismo maior em suas palavras. O que ficou claro foi que o aluno conseguiu resumir melhor a descrição das propriedades dos quadriláteros trabalhados, o que traz indícios sobre o entendimento da ideia de condições necessárias e suficientes para caracterizar as figuras geométricas.

Figura 62 Resposta da atividade de construção 1 - aluno E

Quais propriedades do paralelogramo você usou nessa construção? * / 0

Na construção, a propriedade considerada foi a congruência e paralelismo entre lados opostos.

Quais propriedades do retângulo você usou nessa construção? * / 0

Paralelismo e congruência entre lados opostos; perpendicularismo entre lados adjacentes.

Quais propriedades do losango você usou nessa construção? * / 0

Paralelismo entre lados opostos; todos os lados são congruentes.

Fonte: Acervo do autor

Algumas respostas do aluno G chamam atenção e estão apresentadas na Figura X.

Figura 63 Resposta da atividade de construção 1 - aluno G

Quais propriedades do losango você usou nessa construção? * / 0

paralelgramo de 4 lados iguais

Quais propriedades do quadrado você usou nessa construção? * / 0

paralelogramo perfeito

Fonte: Acervo do autor

A resposta apresentada na Figura 63, referente ao losango, traz um princípio dos conceitos de inclusão de classes, percebendo que o losango é um caso particular de paralelogramo. Já a resposta referente ao quadrado, traz uma definição criada por G, mas também acaba retratando o mesmo princípio de pensamento sobre a inclusão de classes, quando considera o quadrado um “caso perfeito” de paralelogramo, ou seja, que preserva todas as propriedades dos demais casos. Percebe-se uma evolução de G para o nível 1, já esboçando ideias para progredir ao próximo nível, mas ainda não conseguindo obter um formalismo adequado para apresentar as ideias sobre as propriedades, nem fazer relações entre os diversos quadriláteros.

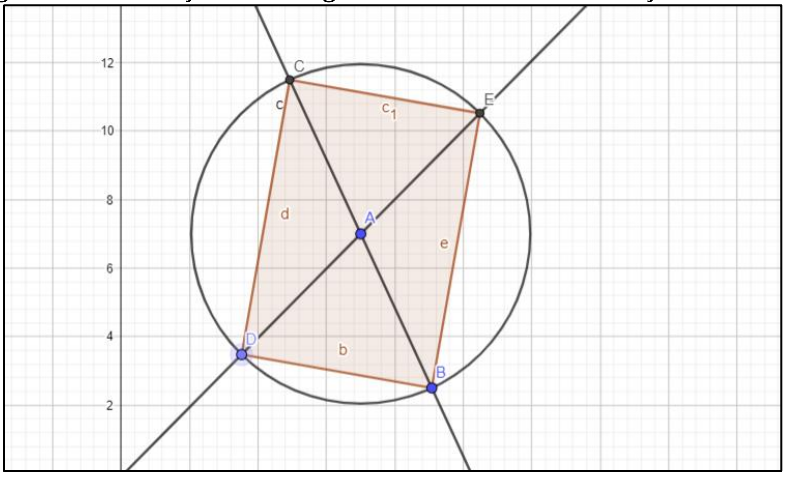
A atividade mostrou-se efetiva no sentido de entender como os alunos poderiam potencializar os conhecimentos geométricos por meio do uso do GeoGebra, pois evidenciou um entendimento das propriedades dos quadriláteros por parte dos alunos para suas construções, mas principalmente por ampliar o vocabulário dos alunos ao argumentarem sobre suas construções geométricas e serem capazes de organizar de forma mais clara as estruturas expositivas sobre as propriedades de cada quadrilátero, o que evidencia a evolução dentro desse grupo de alunos.

4.8 Análise da atividade de construção 2

Algumas construções dessa atividade já foram apresentadas nas descrições dos encontros, portanto, nessa subseção, serão apresentadas apenas construções que tragam novas discussões sobre o tema.

A construção do retângulo da aluna C, ilustrada na Figura 64, traz uma visão diferente das demais construções, pois a construção é iniciada pela metade de uma das diagonais (segmento AB) e então utilizado o compasso para encontrar o ponto C, tornando A o ponto médio da diagonal. Sabendo que as diagonais se interceptam nos seus respectivos pontos médios e são congruentes, a aluna criou um ponto livre sobre a circunferência (ponto D), construiu uma reta que passasse por A e D e marcou o ponto E na intersecção dessa reta com a circunferência, garantindo assim que as propriedades das diagonais do retângulo fossem preservadas.

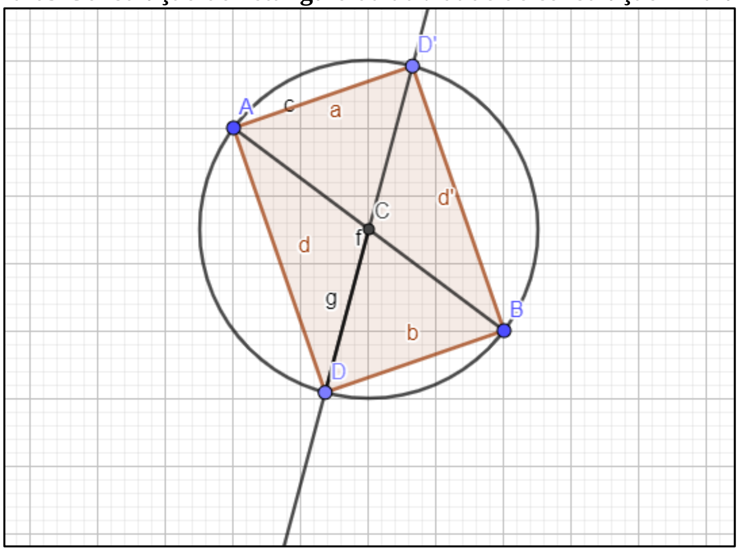
Figura 64 Construção do retângulo da atividade de construção 2 - aluna C



Fonte: Acervo do autor

Enquanto isso, a maioria dos outros alunos, construíram o retângulo iniciando por uma das diagonais e marcando o ponto médio desse segmento, conforme mostrado na Figura 965. Nestes casos, podemos perceber que o segmento AB é o início da construção e o ponto médio desse segmento (ponto C) foi demarcado depois. Nesse caso, o aluno utilizou o recurso de reflexão em relação a um ponto, após criar o ponto D, que foi refletido em relação ao ponto C, garantindo simetria, o que garantiria a congruência das diagonais do retângulo.

Figura 65 Construção do retângulo da atividade de construção 2 - aluno B

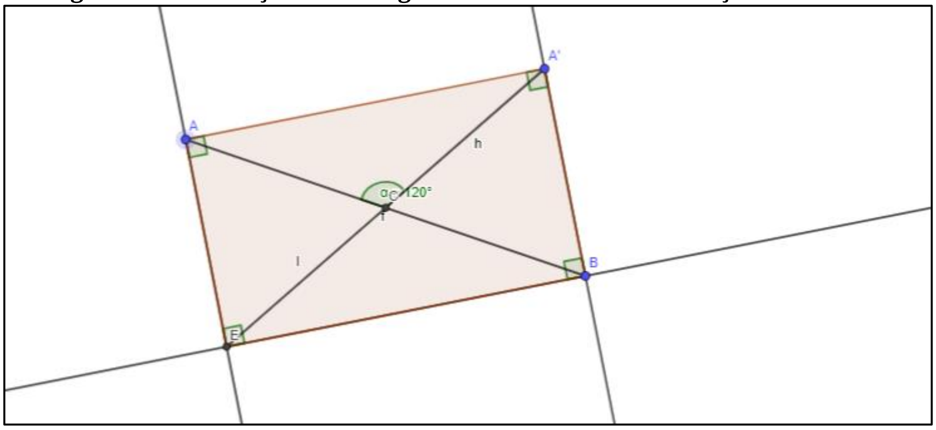


Fonte: Acervo do autor

Outra abordagem utilizada pelos alunos foi a de construção do ponto D, e construção de uma reta passando por D e por C, gerando um ponto de intersecção com a circunferência, que viria a ser um vértice do retângulo. Porém, essa escolha entre a construção de uma reta passando pelo centro, ou da reflexão de um dos vértices, era apenas uma escolha entre recursos, enquanto a diferença de abordagem do início da construção da aluna C para os demais, denota uma visão diferenciada sobre a propriedade que garante que as diagonais de um retângulo se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

Também, o aluno E construiu o retângulo de uma forma bastante específica, que está retratada na Figura 66.

Figura 66 Construção do retângulo da atividade de construção 2 - aluno E

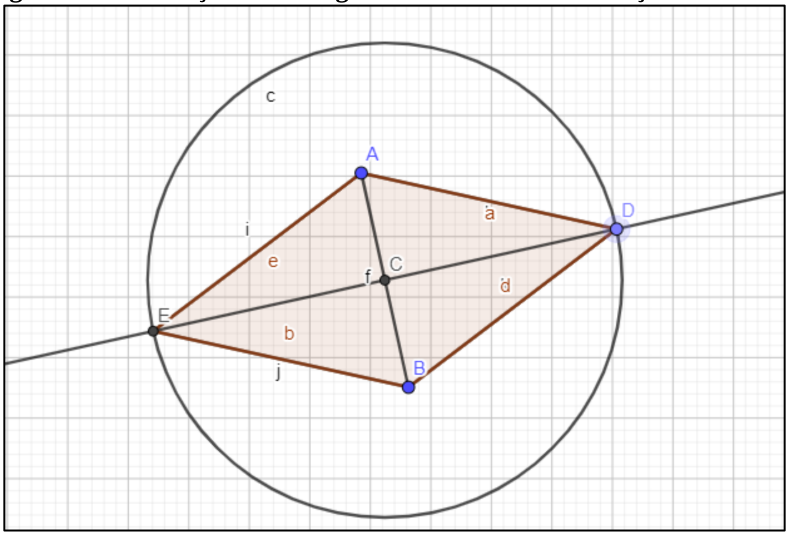


Fonte: Acervo do autor

Percebemos que E estabeleceu um ângulo com amplitude fixa de 120º entre as diagonais do retângulo, fazendo com que o seu retângulo fosse especificamente esse da figura, apenas aumentando e diminuindo as medidas dos lados, mas mantendo fixa a proporção entre essas medidas. Isso evidencia uma certa incompreensão do aluno ao pensar primeiramente sobre as diagonais do quadrilátero, o que levou o aluno a se prender a um modelo específico de retângulo, enquanto havia demonstrado segurança nas atividades anteriores para construir figuras genéricas, baseadas em suas propriedades.

Outra figura construída pelos alunos que vale ser ressaltada uma diferença entre construções é o losango. Alguns alunos utilizaram o compasso para garantir que as diagonais se interceptassem nos seus respectivos pontos médios, enquanto outros alunos utilizaram o recurso de reflexão em relação a um ponto. Em teoria, ambos as escolhas eram corretas e ao pensarmos sobre as propriedades, garantiriam a preservação delas. Porém, ao utilizar o recurso do compasso, a construção apresentava um problema, que está ilustrado nas figuras 67 e 68.

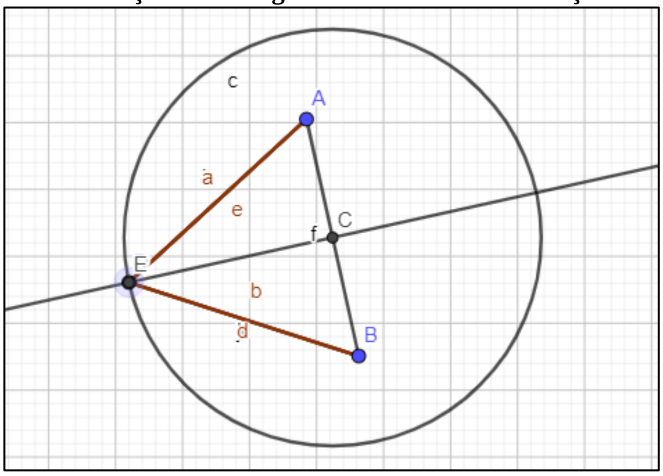
Figura 67 Construção do losango da atividade de construção 2 - aluna D



Fonte: Acervo do autor

Na figura 67 a construção apresenta-se corretamente, mas quando arrastamos o ponto D para semiplano oposto ao segmento AB, acontece o que está ilustrado na Figura 68.

Figura 68 Construção do losango da atividade de construção 2 - aluna D



Fonte: Acervo do autor

O recurso colapsa nessa troca de eixo e acaba fazendo com que o ponto D desapareça, causando prejuízo ao losango obtido pelo recurso do polígono. Enquanto ao fazer uso da reflexão em relação a um ponto, o losango permanece preservado, não importa de que forma o vértice em questão seja arrastado.

Esse caso foi considerado uma situação de exceção por parte do GeoGebra, embora mostre um objeto de discussão que está escondido por trás desse erro. Podemos perceber que os alunos que utilizaram o recurso do compasso para essa construção, acabam evidenciando a não utilização do recurso de arrastar como meio para observar as variações durante o movimento, conforme trazido por Restrepo (apud DICKEL, 2019).

As construções das demais figuras não geraram material para uma nova discussão a ser trazida nessa subseção.

A atividade mostrou-se eficaz enquanto propõe aos alunos outra abordagem sobre os mesmos quadriláteros já trabalhados, principalmente pelo que já foi apresentado na seção 5 e pela possibilidade de perceber que os alunos que haviam utilizado o conceito de inclusão de classes, em certos momentos acabaram deixando de lado isso na construção iniciada pelas diagonais dos quadriláteros, tendo que serem relembrados disso pelo professor durante as intervenções de auxílio.

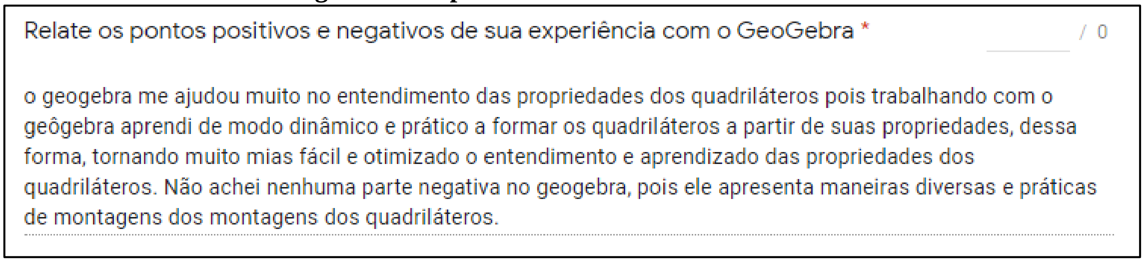
4.9 Formulário Final

Nessa subseção serão apresentadas as respostas de cada um dos alunos após terem finalizado suas construções no GeoGebra, apresentando as evoluções de cada um deles após a realização das atividades propostas nessa pesquisa.

Iniciando pela aluna A, observa-se que ela teve evolução considerável durante as atividades, evoluindo do nível 0 de Van Hiele para o nível 1. Além disso, vale ressaltar que A teve diversas dificuldades técnicas durante as atividades, dentre elas a falta de computador durante dois encontros, o que fez com que a aluna realizasse as atividades pelo celular, onde não conseguiu evoluir tão bem. Isso explica-se pela falta de prática com o software e as dificuldades que a diferença entre o computador e o celular trazem, pois todos os processos estavam sendo apresentados pelo computador.

O aluno B teve participação ativa em todos os encontros, sempre questionando, pedindo ajuda e buscando solucionar seus problemas. Pode-se perceber proatividade por parte do aluno, o que fez com que ele evoluísse do nível 0 de Van Hiele para o nível 1. Embora essa evolução seja justificada por diversas características, uma em especial se destaca no processo desse aluno. O aluno demonstrava dificuldade de expressão em suas justificativas e respostas, contudo, nesse aspecto o aluno termina a prática utilizando termos que consolidam a oposição, congruência, paralelismo, perpendicularismo e pontos médios. Na Figura 69 temos o relato do aluno sobre a sua experiência com o GeoGebra e embora sua postura e suas atitudes durante a prática já indicassem que o aluno havia aproveitado e gostado da experiência, suas palavras refletem ainda mais essa percepção.

Figura 69 Resposta do formulário final - aluno B

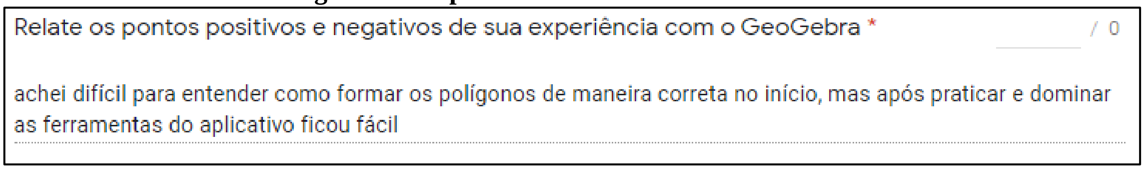

Relate os pontos positivos e negativos de sua experiência com o GeoGebra * / 0

o geogebra me ajudou muito no entendimento das propriedades dos quadriláteros pois trabalhando com o geôgebra aprendi de modo dinâmico e prático a formar os quadriláteros a partir de suas propriedades, dessa forma, tornando muito mias fácil e otimizado o entendimento e aprendizado das propriedades dos quadriláteros. Não achei nenhuma parte negativa no geogebra, pois ele apresenta maneiras diversas e práticas de montagens dos montagens dos quadriláteros.

Fonte: Acervo do autor

Quanto à aluna C também pode-se perceber uma evolução do nível 0 para o nível 1 de Van Hiele. Conforme apresentado na Figura 70, a aluna teve dificuldades no entendimento das atividades, mas após entender os processos e a funcionalidade dos recursos conseguiu desenvolver suas construções de maneira satisfatória, inclusive tendo uma abordagem diferente dos demais colegas na construção do losango iniciado pelas diagonais.

Figura 70 Resposta do formulário final - aluna C

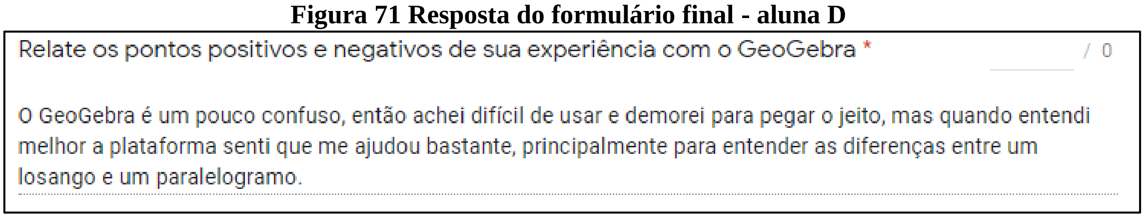

Relate os pontos positivos e negativos de sua experiência com o GeoGebra * / 0

achei difícil para entender como formar os polígonos de maneira correta no início, mas após praticar e dominar as ferramentas do aplicativo ficou fácil

Fonte: Acervo do autor

A aluna D havia evidenciado incompreensão entre o paralelogramo e o losango na atividade de caixa preta e, embora tenha apresentado evolução de vocabulário, autonomia sobre suas construções e capacidade de realizar as construções, de maneira correta, sem auxílios do professor, permanece no nível 1 de Van Hiele, mas muito mais consolidada dentro desse nível. Uma das respostas de D, apresentada na Figura 71, retrata a importância que as atividades tiveram para ela entender as diferenças entre o paralelogramo e o losango.

Figura 71 Resposta do formulário final - aluna D


Relate os pontos positivos e negativos de sua experiência com o GeoGebra * / 0

O GeoGebra é um pouco confuso, então achei difícil de usar e demorei para pegar o jeito, mas quando entendi melhor a plataforma senti que me ajudou bastante, principalmente para entender as diferenças entre um losango e um paralelogramo.

Fonte: Acervo do autor

O aluno E havia sido classificado no nível 2 de Van Hiele após análise da atividade de caixa preta. Ao final das atividades, foi possível perceber uma melhora do aluno em relação ao vocabulário e mais clareza ainda ao expressar suas ideias. Ainda, vale ressaltar uma de suas respostas no formulário final, apresentada na Figura 72, onde ele consegue propor alternativas para as dificuldades encontradas, que foram pela falta de prática com o GeoGebra.

Figura 72 Resposta do formulário final - aluno E

Relate os pontos positivos e negativos de sua experiência com o GeoGebra * / 0

Pontos positivo: funcionalidade da plataforma, que permite desde construções mais simples até as mais complexas, além de não limitar o seu uso para a geometria, mas também para a álgebra (ex.: verificação de propriedades das funções trigonométricas, quadrática, afim, etc.).
Ponto negativo: dificuldade de aprendizado (não são fornecidos tutoriais de uso das ferramentas da plataforma para novos usuários por parte da criadora do software, apenas breves sugestões de uso).

Fonte: Acervo do autor

O aluno F não teve evoluções significativas e permaneceu no nível 1 da teoria de Van Hiele. Além disso, o aluno não conseguiu se desprender da influência dos desenhos prototípicos citados por Gravina (1996) e não conseguiu evoluir no pensamento de inclusão de classes.

Sobre o aluno G foi possível perceber uma evolução do nível 0 para o nível 1 sob a ótica da teoria de Van Hiele. Ainda, foi possível perceber que o aluno evoluiu na percepção das propriedades de todos os quadriláteros trabalhados.

Uma característica das respostas dos alunos que expõe a importância da atividade de construção 2, em específico, foi que todos os alunos, ao descreverem as propriedades dos quadriláteros trabalhados, citaram propriedades de suas diagonais, aspecto que não havia sido levado em consideração por nenhum dos alunos em atividades anteriores.

Por fim, cabe ressaltar que todos os alunos assinalaram “SIM” nas perguntas apresentadas na Figura 73. O que indica que os alunos se interessam por abordagens diferenciadas e enxergam como um benefício a utilização de ambientes de Geometria Dinâmica, especificamente o uso do GeoGebra. Além disso, essa aceitação dos alunos dá indícios de que os eles consideraram a experiência com o software como uma atividade que pode enriquecer o aprendizado e ampliar o conhecimento.

Figura 73 Respostas do formulário final

Você considera que o uso do GeoGebra foi benéfico para o seu entendimento sobre as propriedades dos quadriláteros trabalhados? *

- (•) SIM
- ( ) NÃO

Você gostaria de ter trabalhado, durante sua formação, mais vezes com o GeoGebra? *

- (•) SIM
- ( ) NÃO

Fonte: Acervo do autor

No capítulo a seguir, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

5. Considerações Finais

O ensino matemático baseado exclusivamente no livro didático e no quadro, cada dia mais, se apresenta limitado e retrógrado. Com a evolução, a facilitação do acesso e a familiaridade cada vez maior das crianças, desde o início de suas vidas, com as tecnologias digitais, não podemos ignorar esse contexto quando em sala de aula. Não se tem a pretensão de excluir livros didáticos e o uso do quadro durante os processos de ensino e aprendizagem, porém observa-se um campo muito rico, especificamente na área da Matemática, em particular para a Geometria, nos ambientes digitais.

Com as atividades desenvolvidas, percebemos que os alunos, embora demonstrem interesse em atividades diferenciadas, são pouco envolvidos em situações que não sejam de resolução de exercícios escritos no quadro ou expostos em livros didáticos. Como alternativa a esse cenário trouxemos o GeoGebra, um ambiente que integra mais de uma área da matemática de forma dinâmica. Tal dinamismo tem maior potencial do que os desenhos exibidos em uma folha de papel ou em um quadro, pois possibilitam o movimento e a exploração de cada uma das figuras. Ainda, acredita-se que a busca por um processo em que o aluno estará cada vez mais no centro e como protagonista da construção do seu conhecimento, pode ser potencializada com esses ambientes.

As atividades desenvolvidas durante essa pesquisa corroboram com as expectativas criadas antes da aplicação. Os alunos mostraram-se interessados, atraídos e desafiados pelo novo ambiente a que estavam sendo expostos. Além disso, pudemos observar uma evolução, dentro dos níveis de Van Hiele, geral dos alunos que participaram das práticas programadas, o que nos leva a apontar que o ambiente dinâmico não é apenas mais interessante, mas pode auxiliar na construção do conhecimento dos alunos e em seus avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico.

A análise realizada permitiu identificar dados bastante ricos, que apontam para algumas tendências, mesmo que limitados pelo curto intervalo de tempo em que foi aplicado e pelo público reduzido de participantes. Contudo, considera-se que alguns alunos poderiam avançar ainda mais dentro do campo geométrico, chegando a níveis mais avançados segundo a teoria de Van Hiele, porém isso só poderia ser avaliado com um processo de análise mais duradouro, em que os alunos vivenciassem mais situações como as atividades que executaram e pudessem produzir mais dados, como conversas, debates, dúvidas e soluções autônomas para os problemas propostos.

Chama atenção a inicial limitação de vocabulário para se expressar sobre assuntos ligados à Geometria e a evolução que os alunos tiveram nesse quesito. No início das atividades, poucos eram os alunos que falavam em paralelismo, perpendicularidade, oposição de lados e ângulos e congruência. Porém, ao final das atividades, todos os alunos utilizavam esse vocabulário geométrico com naturalidade. Avalia-se que essa evolução está atrelada ao uso do GeoGebra e ao que foi proposto pelas atividades, mas ainda mais atrelada ao ambiente gerado durante os encontros, com debates, conversas, trocas de ideia, dúvidas, contestações e sugestões, sempre sendo expostos ao vocabulário geométrico em questão, seja pelo professor ou pelos seus próprios colegas que foram se apropriando desses conceitos.

Com a pesquisa realizada com sete alunos do terceiro ano do ensino médio, pudemos perceber a pouca importância dada às propriedades dos quadriláteros durante o processo de ensino escolar, em que se enfatiza muito mais o cálculo de área e a percepção de como encontrar o valor de medidas das figuras, em detrimento das propriedades principais desses quadriláteros, do conceito por traz de todas essas figuras geométricas. Com isso, consideramos que os ambientes de Geometria Dinâmica sejam campos férteis para o desenvolvimento do pensamento geométrico, principalmente para evidenciar e incentivar a discussão sobre a importância das propriedades das figuras geométricas, que são as características que fazem com que um quadrilátero, por exemplo, receba um nome em específico.

Por fim, o experimento avaliado nessa pesquisa nos traz indagações e possíveis caminhos para ampliar a pesquisa sobre o assunto. Pode-se vislumbrar uma sequência que busque fazer com que os alunos alcancem um nível ainda mais avançado e sejam introduzidos à demonstração geométrica, ainda no ensino médio, buscando adentrar aos últimos dois níveis de Van Hiele.

Contudo, ao mesmo tempo, essa pesquisa também nos apresenta situações não pensadas anteriormente, como a interrelação entre a apropriação do software e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Visto que, para que a apropriação do GeoGebra seja feita, é, muitas vezes, necessário a utilização de conhecimentos geométricos, mas ao mesmo tempo a proposta visa buscar potencializar esse pensamento por meio do ambiente criado pelo uso do GeoGebra. Percebemos que os assuntos estão entrelaçados e isso gera dificuldade na análise sobre o que se deve ao pensamento e conhecimento geométrico, ou falta deles e o que se deve ao processo de apropriação do software. Pensa-se que os dois aspectos andam entrelaçados, relacionando-se em diversos momentos, por vezes com relações mais densas, outras com relações mais rasas.

Entendemos que essa pesquisa atingiu seu objetivo principal, que era entender como o GeoGebra poderia potencializar o pensamento geométrico dos alunos em relação às propriedades dos quadriláteros, avaliando uma contribuição principalmente por sua abordagem diferente da mais comumente utilizadas em sala de aula, gerando um espaço fértil para debates e para que o aluno se ponha no centro da construção de seu conhecimento, aprendendo conceitos, ampliando vocabulário e experimentando situações de onde deve argumentar sobre cada passo de suas construções, para garantir que estejam coerentes, o que leva o aluno a ser iniciado ao processo de demonstração geométrica, ainda que de maneira não formal.

Todo esforço vale a pena quando, durante o processo, os alunos demonstram interesse, mostram-se dispostos a ampliar seus conhecimentos matemáticos e em alguns momentos fascinados pela experiência que tiveram nessa pesquisa. Nada é mais motivador do que os alunos, pós atividades de pesquisa, em ambientes comuns de sala de aula, quando expostos ao GeoGebra, demonstrarem orgulho por conhecer e dominar o software. Os próprios alunos, que antes eram orientados a criar construções que não deformassem, cobrarem o professor para que ele não faça construções instáveis e utilize os recursos necessários para garantir as propriedades das formas geométricas trabalhadas, não vendo mais o GeoGebra apenas como um expositor ou uma tela para desenho à mão livre.

Ainda, é válido ressaltar a importância dessa pesquisa na formação do autor, visto que foi uma possibilidade de colocar em prática as experiências mais cativantes vividas durante a faculdade. A oportunidade de levar a outras pessoas um mundo novo de possibilidades para o ensino e para a aprendizagem dos alunos. Para além do aspecto de formação como licenciado em Matemática, a pesquisa serviu também como uma introdução ao mundo da pesquisa no campo da Educação Matemática, estimulando e desenvolvendo ambição de voos mais altos nesse campo.

E para além da análise dos alunos, o professor deve ser capaz de fazer uma autoanálise sobre seus planejamentos, suas práticas, resultados obtidos e atitudes que teve durante os encontros. Nesse aspecto, foi possível perceber uma mudança que foi acontecendo durante os encontros, onde o professor saía do papel de ensinar e iniciava a busca por atitudes e questionamentos pertencentes a um pesquisador. Espera-se que esse processo, considerado uma evolução, permeie o caminho após a formação na graduação, fazendo com que todas as aulas, daqui em diante, sejam também um ambiente de pesquisa, não somente um ambiente de ensino.

6. Referências

ARZARELLO, F. **A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments.** ZDM. Torino, vol. 34, 2002.

BERTI, Carine Muraro. **As construções geométricas no ensino dos quadriláteros.** Orientador: Márcia Rodrigues Notare. 2012. 109 p. Trabalho de conclusão de graduação (Licenciatura em Matemática) - Univesidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/66857. Acesso em: 7 set. 2021.

BOGDAN R. C., BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto Editora, Portugal,1994. Disponível em: http://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-emensino/investigacaoqualitativa. Acesso em 18 nov. 2020

BOSCHI, Giovana. **Modelagem Matemática: uma proposta de ensino e aprendizagem da matemática em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental - Volume II.** Paraná: 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_unicentro_giovanaboschi.pdf. Acesso em: 27 nov. 2020

COSTA, A. P. da; SANTOS, M. C. dos. **Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, [S. l.], v. 5, n. 2, p. 03–17, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/28283. Acesso em: 11 set. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto & aplicações: ensino médio.** 3 ed. São Paulo: Ática, 2016.

D’AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates.** SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DICKEL, Marlei Tais. **Geogebra e isometrias: a ação de arrastar na construção de conceitos.** Orientador: Márcia Rodrigues Notare. 2019. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Univesidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/198640. Acesso em: 20 set. 2021.

DORNELES, Bruna de Bastos Pazini. **Aplicação do software geogebra no estudo dos quadriláteros notáveis.** 101p. 2011. Monografia (Especialização em Tecnologia no ensino de Matemática) – Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete, Alegrete, 2011. Disponível em: http://dspace.unipampa.edu.br/bitstream/riu/1797/1/Aplica%c3%a7%c3%a3o%20do%20software%20geogebra%20no%20estudo%20dos%20quadril%c3%a1teros%20not%c3%a1veis.pdf. Acesso em 11 set. 2021.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa.** Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. - Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120.

GRAVINA Maria Alice. **Os Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. UFRGS, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.** Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, p. 1-13, nov. 1996.

KAUARK, Fabiana; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da pesquisa: guia prático.** Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. **Aprendendo e ensinando geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues – São Paulo: Atual, 1994. 308p.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica.** Renote Novas Tecnologias na Educação, [*S. l.*], julho 2018.

SONZA A. P.; LEIVAS J. C. P. **Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma Oficina Pedagógica.** Thema, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Sul-rio-grandense. Pelotas, RS, Brasil. 2018. Disponível em: http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1122. Acesso em 16 nov. 2020.

THUMS, Cindy Maiara. **O ensino de quadriláteros e suas propriedades com o uso do GeoGebra: uma análise segundo o modelo de Van Hiele.** Orientador: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti. 2015. 33 p. Trabalho de conclusão de especialização (Pós-Graduação em Matemática) - Univesidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/134109. Acesso em: 11 set. 2021.

7. Apêndices

7.1 Carta de aceite da escola

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Porto Alegre, 13 de setembro de 2021.

Prezado Diretor Eduardo Ferret Oyarzabal de Castro
Do Colégio João Paulo I – Unidade Sul

O acadêmico Leonardo Ennes dos Santos é estudante regularmente matriculado no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do currículo do curso, o aluno está desenvolvendo uma pesquisa sobre a compreensão dos quadriláteros no ensino médio, para a conclusão de seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual é exigido para que possa adquirir o título de Licenciado em Matemática.

Os objetivos do trabalho, estritamente acadêmicos, em linhas gerais, consistem em investigar sobre como os alunos compreendem os quadriláteros com a utilização do ambiente digital proporcionado pelo software Geogebra. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo gravações de reuniões virtuais e respostas em formulários digitais, para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os participantes dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: marcia.notare@ufrgs.br.

Agradecemos a sua atenção.
Cordialmente,

____
Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Professora do Instituto de Matemática e Estatística/IME-UFRGS

____
Eduardo Ferret Oyarzabal de Castro
Diretor do Colégio João Paulo I – Unidade Sul

7.2 Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada COMPREENDENDO OS QUADRILÁTEROS COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO, desenvolvida pelo pesquisador Leonardo Ennes dos Santos. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone +5551XXXX-XXXX ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar sobre como os alunos compreendem os quadriláteros com a utilização do ambiente digital proporcionado pelo software Geogebra.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de reunião online e questionário escrito, bem como da participação em oficina online, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de imagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável Leonardo Ennes dos Santos por telefone +5551XXXXXXXXX ou e-mail leonardo.ennes@ufrgs.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

7.3 Termo de assentimento informado

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _________________, aluno(a) do Colégio João Paulo I – Unidade Sul, da turma ____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada COMPREENDENDO OS QUADRILÁTEROS COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO, desenvolvida pelo pesquisador Leonardo Ennes dos Santos. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone +5551XXXX-XXXX ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar sobre como os alunos compreendem os quadriláteros com a utilização do ambiente digital proporcionado pelo software Geogebra.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração se fará por meio de reunião online e questionário escrito, bem como da participação em oficina online, em que será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de imagens, obtidas durante a participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável Leonardo Ennes dos Santos por telefone +5551XXXX-XXXX ou e-mail leonardo.ennes@ufrgs.br.

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Aluno:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: