

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Dinâmica em Modelos de Tunelamento Quântico

Nicholas Jaekel Lopes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a
obtenção do grau de Bacharel em Física
Orientadora: Prof. Dra. Angela Foerster
Coorientador: Prof. Dr. Leandro Hayato Ymai

Porto Alegre - RS

Novembro de 2020

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha mãe, Margareth, e à minha irmã, Thanize, por tornarem toda essa caminhada possível. Foi através do afeto e carinho de vocês que por muitas vezes consegui permanecer seguindo em frente apesar de todas as adversidades que enfrentamos ao longo da vida. Obrigado por tanto, obrigado por serem vocês.

Agradeço à todos os meus amigos, aos que partiram e aos que permanecem, por tornar essa caminhada mais leve e alegre. Muito obrigado por todos os momentos que vivemos, principalmente pelos bons mas também pelos ruins, sem eles, não seria este que hoje sou.

À minha psicóloga, Amanda, por toda a ajuda e espaço que sempre me proporcionou em nossas incontáveis sessões. Seu apoio foi, é, e continuará sendo essencial na caminhada em direção a mim mesmo. Nada disso seria possível sem você.

À minha orientadora, Angela, que acreditou em mim desde o início, quando nem eu acreditava muito em mim, e me possibilitou crescer e amadurecer muito durante todo esse período. Muito obrigado pela oportunidade de realizar esse trabalho, pelos conselhos e conversas.

Ao meu amigo e aluno de mestrado, Daniel, por toda a dedicação, paciência e ajuda durante todos esses anos. Tu tens um dos corações mais bonitos que já vi na vida e sou eternamente grato por toda a atenção e cuidado que tiveste comigo durante esse processo. Muito obrigado, mesmo.

Por fim, gostaria de agradecer e dedicar esse trabalho ao meu pai, Ricardo, que me deixou tão cedo e cuja falta sempre estará presente. Realmente gostaria que você estivesse aqui, vendo onde cheguei e quem tenho me tornado. Obrigado pelas coisas boas que me deixaste.

Resumo

Neste trabalho estudamos dois modelos de tunelamento quântico em sistemas de condensados de Bose-Einstein: os modelos de três e quatro poços. Para os dois casos citados, foi realizada uma análise das soluções exatas obtidas através do Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe, fazendo uma discussão a respeito da integrabilidade dos sistemas a partir do comportamento das soluções exatas encontradas frente à Álgebra de Yang-Baxter e, após isso, apresentamos todas as quantidades conservadas em cada um dos sistemas estudados. Na sequência, conduzimos um estudo acerca da dinâmica quântica dos sistemas para diferentes parâmetros de acoplamento dos hamiltonianos, expondo os diferentes regimes de tunelamento dos sistemas. Por fim, a partir da identificação de regimes de tunelamento ressonante, fomos capazes de determinar hamiltonianos efetivos em termos das quantidades conservadas dos sistemas, interpretando-as fisicamente em função das dinâmicas.

Abstract

In this work we study two models of quantum tunneling in Bose–Einstein condensates systems: the three and four well models. For the two cases mentioned, an analysis of the exact solutions obtained through the Algebraic Bethe *Ansatz* was performed, discussing the systems integrability from the behavior of the exact solutions found regarding Yang-Baxter algebra and, after that, we present all the conserved quantities in each of the studied systems. Then, we conducted a study about the quantum dynamics of the systems for different hamiltonian coupling parameters, exposing different tunneling regimes of the systems. Finally, from the identification of resonant tunneling regimes, we were able to determine effective Hamiltonians in terms of the conserved quantities of the systems, interpreting them physically as function of the dynamics.

Sumário

1	Introdução	7
2	Modelos Integráveis de Tunelamento Quântico	10
3	Integrabilidade	13
3.1	Integrabilidade quântica do Modelo de três poços	14
3.1.1	Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI)	15
3.1.2	Pseudo-vácuo e o <i>Ansatz</i> de Bethe	17
3.1.3	Solução Exata e Carga Conservada	19
3.1.3.1	Solução Exata	19
3.1.3.2	Carga Conservada	20
3.1.4	Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata	20
3.2	Integrabilidade quântica do modelo de quatro poços fechado	22
3.2.1	Método do Espalhamento Quântico Inverso	23
3.2.2	Pseudo-vácuo e o <i>Ansatz</i> de Bethe	24
3.2.3	Solução Exata e Cargas Conservadas	25
3.2.3.1	Solução Exata	25
3.2.3.2	Cargas Conservadas	26
3.2.4	Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata	26
4	Dinâmica Quântica	29
4.1	Regimes dinâmicos	30
4.1.1	Regime de Rabi	30
4.1.2	Regime de Josephson	30
4.1.3	Regime de Fock	30
4.2	Dinâmica do modelo de três poços	30
4.2.1	Distribuição de Energia do Hamiltoniano	30
4.2.2	Dinâmica Quântica do Hamiltoniano	32
4.2.3	Hamiltoniano Efetivo e Interpretação da Carga Conservada	34
4.3	Dinâmica do modelo de quatro poços	37
4.3.1	Distribuição de Energia do Hamiltoniano	37
4.3.2	Dinâmica Quântica do Hamiltoniano	38
4.3.3	Hamiltoniano Efetivo e Interpretação das Cargas Conservadas	41

5 Conclusão	48
A Método Algébrico do <i>Ansatz</i> de Bethe	50
A.1 Equação de Yang-Baxter e Relações de Comutação	50
A.2 Autovalores da Matriz de Transferência e a Equação do <i>Ansatz</i> de Bethe	51
A.2.1 Modelo de Três Poços	52
A.2.2 Modelo de Quatro Poços	53
B Cálculo dos Hamiltonianos Efetivos	55
B.1 Modelo de Três Poços	55
B.2 Modelo de Quatro Poços	57
C Dinâmica do Desequilíbrio de Populações	65

Capítulo 1

Introdução

“Eu não sou o que me aconteceu. Sou o que escolho me tornar”

– Carl Gustav Jung

A condensação de bósons é um fenômeno que foi previsto teoricamente em 1924 por Albert Einstein [1], como consequência dos estudos desenvolvidos por S. N. Bose acerca da mecânica estatística do gás de fótons [2]. O condensado seria um estado da matéria em que a maioria dos átomos atingiria um mesmo estado quântico, o estado fundamental, em temperaturas próximas do zero absoluto, da ordem de nK. Mais tarde, este fenômeno receberia o nome de Condensado de Bose-Einstein (CBE), em homenagem aos dois grandes cientistas do século XX. Entretanto, foram necessários mais de 70 anos de aprimoramento tecnológico, desde a sua predição teórica, para que fosse possível obter uma realização experimental para o fenômeno, que foi realizada em um experimento com vapor de ^{87}Rb resfriado a 170nK em 1995 pelos cientistas Eric Cornell, Wolfgang Ketterle e Carl Wieman [3]. A descoberta permitiu a abertura de um grande leque nas pesquisas de sistemas compostos por átomos ultrafrios, entre eles, os sistemas integráveis de CBEs acoplados por tunelamento quântico, que são o foco principal deste trabalho.

O estudo de sistemas integráveis teve origem junto ao desenvolvimento e consolidação da mecânica clássica por Newton no século XVII. Sistemas integráveis seriam caracterizados pela possibilidade em se determinar soluções exatas para suas equações de movimento não-triviais, como, por exemplo, o problema de Kepler de dois corpos e o oscilador harmônico, ambos solucionados pelo próprio Newton. Dois séculos depois, após a reformulação da mecânica newtoniana por Hamilton e Lagrange, a noção de integrabilidade foi aprimorada por Liouville, de forma que um sistema descrito por um hamiltoniano com N graus de liberdade seria dito integrável se possuísse um conjunto de N integrais de movimento independentes que comutassem com respeito aos parêntesis de Poisson [4].

Com o surgimento da mecânica quântica no início do século XX, também iniciou-se a busca por sistemas quânticos exatamente solúveis, que surgem a partir do artigo de Schrödinger [5], no qual ele demonstra uma solução completa e analítica para o átomo de hidrogênio não-relativístico, cujos resultados para espectro de energia concordam com as previsões teóricas feitas por Bohr, décadas antes. Entretanto, os sistemas quânticos exatamente solúveis são extremamente raros, principalmente quando são formados por um grande número

de partículas, de forma que o seu tratamento analítico se torna muito difícil. Historicamente, é atribuído a H. Bethe [6] o surgimento de soluções exatas para sistemas quânticos de muitos corpos, tais como o modelo de Heisenberg unidimensional, que consiste em uma cadeia unidimensional de spins $1/2$ espacialmente fixados, admitindo interação dos spins em vizinhança imediata, e levando-se em conta condições de contorno periódicas. A partir desse trabalho que o conceito do *Ansatz* de Bethe passou a ser difundido e amplamente utilizado em casos em que se deseja obter os autovalores de energia de um hamiltoniano exatamente solúvel. Dependendo de vários parâmetros livres, são impostas restrições de forma que o *Ansatz* seja um autovetor do hamiltoniano, tendo como consequência um conjunto de equações a serem satisfeitas, denominadas Equações do *Ansatz* de Bethe (EAB). O tratamento de sistemas quânticos com muitas partículas é extremamente difícil, visto que muitas vezes não é possível aplicar métodos de aproximação, como, por exemplo, teorias de campo médio e de perturbação. Nesse contexto, os sistemas integráveis se mostram muito eficientes, já que admitem soluções exatas sem a necessidade do uso de métodos de aproximação.

A partir dos trabalhos de Bethe, diversos problemas puderam ser solucionados de maneira exata, entre os quais o modelo contínuo de gás de bósons de Lieb-Liniger, em 1963 [7], que consiste na descrição de um gás de bósons interagentes, movendo-se livremente em uma dimensão, e o modelo bidimensional de 6-vértices, também por Lieb, em 1967 [8] e generalizado para o modelo de 8-vértices por Baxter [9]. Nesta mesma época, também surgiu a equação de Yang-Baxter (EYB), que fornece as condições necessárias para a construção de modelos integráveis com base em sua solução. Uma das características fundamentais da EYB reside na possibilidade de construção de uma família de matrizes mutuamente comutativas, chamadas matrizes de transferência, que facilitam a aplicação do *Ansatz* de Bethe. Dessa forma, com base nos trabalhos realizados por estes cientistas, o estudo de sistemas exatamente solúveis continua a prosperar bastante nos dias de hoje, abrangendo diversas áreas da física, como mecânica estatística[10], física da matéria condensada[11], teoria de campos[12], física atômica e molecular[13], física nuclear[14], entre outras.

Na década seguinte, com base nos trabalhos de L. Faddeev e a escola russa, é desenvolvido o Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI), também conhecido como método algébrico do *Ansatz* de Bethe, como o resultado de uma síntese de duas tradições no estudo dos sistemas integráveis que, até 1978, se desenvolviam de forma bastante independente, o *Ansatz* de Bethe e o Método do Espalhamento Clássico Inverso [15]. A partir dessa formulação, uma série de modelos puderam ser resolvidos exatamente, impulsionando a pesquisa em busca de novos modelos quânticos integráveis, entre eles, sistemas compostos por átomos ultrafrios em redes ópticas, cujo estudo se mostra promissor em ambos os campos, teórico e experimental.

O estado de um sistema composto por átomos ultrafrios é de natureza puramente quântica, devido à condensação de Bose-Einstein onde, em geral, não se consegue aplicar teorias de campo médio e de perturbação com eficiência, devido às grandes flutuações quânticas dos sistemas. Dessa forma, nesses sistemas o método algébrico do *Ansatz* de Bethe se faz não apenas útil, como também necessário. Dentre os estudos de sistemas de átomos ultrafrios podemos citar a observação experimental dos fenômenos de auto-aprisionamento e tunelamento Josephson entre dois CBEs, realizado pelo grupo do Prof. Oberthaler [16]. Do ponto de vista teórico, esses fenômenos são descritos pelo modelo de Bose-Hubbard de dois sítios, este que, por se tratar de um modelo integrável, admite solução exata para os autovalores de energia do sistema através do método algébrico do *Ansatz* de Bethe [17].

Com a consolidação, teórica e experimental, dos resultados para o modelo de dois poços, o foco da pesquisa se voltou para a sua generalização em modelos de mais poços, entretanto, os modelos de Bose-Hubbard de mais poços não são integráveis, de maneira que não é possível obter o espectro completo de energias dos modelos utilizando apenas o MEQI. Portanto, a partir da proposição de um novo modelo integrável de três poços [18][19], surge uma extensão ao método, que se dá a partir da definição e utilização de um novo operador. Dessa forma, além da obtenção do espectro completo de energias do modelo, também foi determinada uma nova quantidade conservada do sistema, que acaba por desempenhar um papel importantíssimo na descrição da dinâmica quântica deste. Ademais, verificou-se que, com a quebra da integrabilidade do modelo, é possível estabelecer um controle sobre o tunelamento de partículas, constituindo um dispositivo tipo interruptor. Na sequência, foi proposto um modelo integrável de quatro poços dispostos em um anel [20], em que a extensão feita ao método também se mostrou eficiente na obtenção do espectro completo de energias e de todas as quantidades conservadas dos modelos. Recentemente, foi proposto um novo dispositivo atomotrônico tipo interferômetro utilizando o modelo de quatro poços, evidenciando novamente a posição de destaque dos sistemas ultrafrios dentro da vanguarda tecnológica, e é neste cenário que o presente trabalho foi desenvolvido.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: iniciamos apresentando o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios no capítulo 2, logo após fazemos uma discussão acerca dos modelos de mais poços, apresentando algumas características e possíveis aplicações tecnológicas destes. Na sequência apresentamos o hamiltoniano geral do modelo de $m + n$ poços, apresentando os seus termos e discutindo sobre a sua condição de integrabilidade. No capítulo 3 realizamos uma discussão sobre o conceito de integrabilidade, remontando à sua origem dentro da mecânica clássica e expondo as dificuldades que surgem naturalmente na tentativa de sua definição para sistemas quânticos. Seguimos apresentando o Método do Espalhamento Quântico Inverso e aplicando ele em dois modelos, os modelos de três e quatro poços, em que foi possível determinar o espectro de energias dos modelos e também todas as suas quantidades conservadas. Por fim, no capítulo 4, conduzimos um estudo sobre a dinâmica quântica dos dois modelos, identificando os regimes dinâmicos que atingem para diferentes valores dos parâmetros de acoplamento do hamiltoniano, de maneira que foi possível observar o surgimento de um regime de tunelamento ressonante e determinar hamiltonianos efetivos que descrevem a dinâmica do regime para ambos os modelos estudados.

Capítulo 2

Modelos Integráveis de Tunelamento Quântico

Desde a realização experimental dos condensados de Bose-Einstein (CBE), um dos sistemas mais relevantes no contexto de átomos ultrafrios é o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios, que descreve bem-sucedidamente o fenômeno de tunelamento e auto-aprisionamento de átomos entre dois CBEs. Um modelo simples do tipo Bose-Hubbard que caracteriza dois CBEs acoplados por tunelamento Josephson é dado por[21]:

$$H = \frac{K}{8}(N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2}(N_1 - N_2) - \frac{\epsilon_J}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger),$$

onde a_i^\dagger e a_i denotam, respectivamente, os operadores *criação e aniquilação de bósons no poço i* , $N_i = a_i^\dagger a_i$ representa o operador *número de bósons no i -ésimo poço*. O parâmetro K é a amplitude de espalhamento de ondas- s entre átomos de um mesmo condensado, $\Delta\mu$ é o potencial externo e ϵ_J é a amplitude de tunelamento de átomos entre os condensados. As previsões desse modelo estão de acordo com resultados experimentais posteriores [16], e, além disso, verificou-se que o modelo é exatamente solúvel pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe [17], de maneira que é possível estabelecer conexões entre as soluções exatas e as propriedades físicas do modelo[22].

Desde a consolidação dos resultados para o modelo de dois poços, a atenção naturalmente se voltou para a busca da generalização do método em modelos de mais poços conectados por tunelamento quântico. Neste seguimento, o próximo passo foi a proposição de um modelo integrável de três poços alinhados [23], que apesar de apresentar termos de tunelamento entre os poços, não contempla a interação entre as partículas, algo que é fundamental para uma discussão física do problema. Na sequência, foi proposto um novo modelo integrável de três poços alinhados acoplados por tunelamento Josephson [18], que considerava a interação entre as partículas e, pela primeira vez, não foi possível determinar todo o espectro de energias do sistema utilizando apenas o MEQI, de forma que foi necessário realizar uma extensão ao método, através da utilização de um novo operador, que possibilitou a obtenção de todo o espectro de energias do sistema. Além disso, foi possível determinar explicitamente uma nova quantidade conservada do sistema, que se mostrou fundamental na descrição da dinâmica quântica de tunelamento do modelo, que é dada em termos do novo operador utilizado na extensão feita ao método. Com base no estudo dos regimes dinâmicos no modelo de três poços, foi mostrado

[19] que a partir da quebra de integrabilidade do modelo, é possível controlar o tunelamento de partículas, constituindo um dispositivo atomotrônico tipo interruptor, consolidando os sistemas de tunelamento quântico como importantes candidatos para novas implementações tecnológicas no campo da atomotrônica. Além disso, recentemente, também foi possível calcular a entropia de emaranhamento gerada pelo modelo de três poços [24], esta que é uma propriedade quântica importantíssima, pois dá suporte a uma grande parcela das novas propostas de dispositivos quânticos.

A extensão feita ao método no modelo de três poços também se mostrou eficiente para um novo modelo proposto de quatro poços dispostos em um anel. Novamente foi determinado todo o espectro de energias do sistema, só que desta vez obtiveram-se duas novas quantidades conservadas em vez de apenas uma, de forma que foi possível obter um número de quantidades conservadas no sistema igual à quantidade de graus de liberdade do hamiltoniano, satisfazendo uma das mais importantes condições para a integrabilidade de sistemas [20]. Recentemente, o modelo de quatro poços foi utilizado na proposição de um dispositivo tipo interferômetro [25], a partir da produção e identificação de interferências em estados NOON [26], responsáveis pelas mais sensíveis detecções de mudança nos sistemas, demonstrando mais uma vez a relevância dos modelos no âmbito tecnológico.

O fato da extensão feita ao método se mostrar eficiente para ambos modelos descritos acima não é coincidência, afinal, eles fazem de um conjunto de modelos de CBEs acoplados por tunelamento quântico [27], que, sob certos vínculos, correspondem à modelos integráveis. O conjunto de modelos é caracterizado pelo hamiltoniano geral de $n + m$ poços [27]:

$$\begin{aligned} H_{n,m} &= U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + J(A^\dagger B + AB^\dagger) \\ &= U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J_{i,j} (a_i b_j^\dagger + a_i^\dagger b_j), \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

onde $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $B = \sum_{j=1}^m \beta_j b_j$, com $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, e N_A e N_B correspondem, respectivamente, à soma dos operadores *número de bósons* nas classes “A” e “B” de poços, dados por:

$$N_A = \sum_{i=1}^n N_{a,i}, \quad N_B = \sum_{j=1}^m N_{b,j}, \quad (2.0.2)$$

com $N_{a,i} = a_i^\dagger a_i$ e $N_{b,j} = b_j^\dagger b_j$. Na equação (2.0.1), U representa o termo de interação entre os bósons de um mesmo condensado e condensados vizinhos, μ é o potencial externo e $J_{ij} = J\alpha_i\beta_j$ representa a amplitude de tunelamento entre os i -ésimo e j -ésimo condensados. Os operadores bosônicos também estão divididos por classe, a_i^\dagger e a_i denotam os operadores *criação* e *aniquilação* de bósons no i -ésimo condensado da classe “A”, enquanto b_j^\dagger e b_j denotam-nos no j -ésimo condensado da classe “B”. Por construção, temos que a integrabilidade dos modelos componentes do conjunto é garantida para as seguintes condições de α_i e β_j [27]:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^2 = 1. \quad (2.0.3)$$

Fisicamente, pode se dizer que o hamiltoniano (2.0.1) descreve o tunelamento Josephson para sistemas bosônicos de $(n + m)$ poços e cada escolha de $\{n, m\}$ origina um sistema distinto, com aplicações físicas particu-

lares, como discutido anteriormente.

A partir do conjunto de modelos descritos pelo hamiltoniano (2.0.1), no Capítulo 3 iremos determinar as soluções exatas (obtidas pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe) dos autovalores de energia, comparando-os com os resultados obtidos através da diagonalização exata do hamiltoniano e também obteremos todas as quantidades conservadas dos sistemas para dois casos particulares:

1. $n = 2, m = 1$: três poços alinhados;
2. $n = 2, m = 2$: quatro poços dispostos em anel.

Por fim, iremos conduzir uma discussão acerca da dinâmica quântica dos modelos, identificando regimes de tunelamento e interpretando fisicamente as quantidades conservadas “extras” dos sistemas em termos das dinâmicas, tudo isso exposto em detalhes no Capítulo 4 deste trabalho.

Capítulo 3

Integrabilidade

Dentre todas as áreas da física, a mecânica clássica é, com certeza, uma das disciplinas com maior grau de maturidade, tendo seu desenvolvimento completamente estabelecido em teoremas matemáticos e bases axiomáticas e serve como um recorrente exemplo de “como as coisas deveriam funcionar idealmente”, de forma que é muito comum recorrermos à ela como base referencial para qualquer tipo de formulação dentro da mecânica quântica. Um dos pontos fundamentais dentro do estudo da dinâmica de sistemas clássicos é o conceito de integrabilidade. De acordo com o *Teorema de Liouville-Arnold* [4], um sistema descrito por um hamiltoniano $H(p, q)$ com n graus de liberdade é dito integrável se existirem n quantidades conservadas (primeiras integrais de movimento) independentes $I_i, i = 1, \dots, n$, definidas no espaço de fase e em involução, de forma que:

$$\{I_i, H\} = \{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

onde $\{, \}$ representam os *parênteses de Poisson* [28]. Assim existe uma transformação canônica para coordenadas de ação-ângulo, $\{\omega_1, \dots, \omega_n, J_1, \dots, J_n\}$, em que o hamiltoniano transformado depende apenas das coordenadas de ação, $H = H(J_1, \dots, J_n)$, as soluções das equações de movimento para as coordenadas de ação são constantes e as coordenadas de ângulo evoluem linearmente no tempo, ou seja:

$$J_k = \text{constante}, \quad \omega_k(t) = \omega_k(0) + \nu_k t, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde $\nu_k = \partial H / \partial J_k$. Assim, as equações de movimento, $p(t)$ e $q(t)$, do sistema podem ser resolvidas em *quadraturas* se a transformação canônica for explicitamente conhecida. Com base nessas definições, os sistemas clássicos podem ser divididos entre sistemas integráveis e sistemas não-integráveis (caóticos), que apresentam comportamentos físicos totalmente diferentes.

Entretanto, apesar da integrabilidade ser um conceito muito bem estruturado dentro da mecânica clássica, é surpreendente que ainda não seja possível realizar uma perfeita equivalência no contexto quântico, devido às diferenças fundamentais em suas formulações. Um ponto que se mostra importante para esta discussão é a diferença na maneira de contar graus de liberdade na mecânica quântica e na mecânica clássica. Na mecânica quântica, a discretização dos níveis de energia de um sistema nos permite trabalhar com espaços de Hilbert de dimensão finita, já que os auto-estados dos operadores podem ser rotulados com um número quântico discreto, tomando um conjunto finito de valores e assim temos que o número de graus de liberdade de um

sistema quântico é comumente referida como a dimensionalidade do seu espaço de Hilbert associado. Em contrapartida, na mecânica clássica, contamos graus de liberdade a partir da quantidade necessária de pares conjugados de variáveis no espaço de fase para especificar a configuração do sistema, onde cada variável pode assumir valores contínuos. Em qualquer correspondência quântica-clássica, associaríamos, portanto, o número de graus de liberdade clássicos com a multiplicidade de infinitudes da dimensão do Espaço Hilbert. Esse assunto permanece em debate atualmente, através de inúmeras propostas feitas para a integrabilidade quântica [29].

Neste trabalho iremos adotar uma definição de integrabilidade quântica que melhor se relacione com a definição clássica, adotando a quantidade de números quânticos que determinam univocamente os vetores de base do hamiltoniano como a quantidade de graus de liberdade dos modelos estudados aqui. Portanto, de forma a provar a integrabilidade dos modelos, vamos utilizar o Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI), desenvolvido pela escola russa e apresentado pela primeira vez em 1979 no artigo de L. Faddeev [15] (que também é conhecido como método algébrico do *Ansatz* de Bethe). De forma sucinta, o método consiste em três pontos principais:

1. Determinar a matriz R que satisfaça a equação de Yang-Baxter
2. Determinar a matriz de monodromia $T(u)$, associada aos operadores de Lax, que satisfaça a álgebra de Yang-Baxter e a partir da qual seja possível definir a matriz de transferência $\tau(u)$
3. Encontrar as equações do *Ansatz* de Bethe e, a partir delas, determinar os autovalores da matriz de transferência, de forma que se torna possível obter o espectro completo de energias dos modelos.

Nas próximas sessões iremos encontrar as soluções exatas para os modelos de três poços alinhados e quatro poços dispostos em um anel através do MEQI. Além disso, através de uma extensão feita ao método, também seremos capazes de determinar todas as quantidades conservadas dos modelos, que desempenharão um papel fundamental na descrição de suas dinâmicas, exploradas no próximo capítulo.

3.1 INTEGRABILIDADE QUÂNTICA DO MODELO DE TRÊS POÇOS

Iniciamos apresentando o hamiltoniano para o modelo de três poços alinhados, que é obtido através da escolha $n = 2$ e $m = 1$ no hamiltoniano geral (2.0.1), acoplados por tunelamento quântico:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + J_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + J_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger), \quad (3.1.1)$$

onde a_i^\dagger e a_i são, respectivamente, os operadores *criação* e *aniquilação de bósons* no i -ésimo poço, $N_i = a_i^\dagger a_i$, ($i = 1, 2, 3$) são os operadores *número de bósons* em cada poço, sendo $N = N_1 + N_2 + N_3$ o número total de bósons, que é uma quantidade conservada do sistema. O parâmetro U é devido à interação de contato e interação dipolar entre os bósons de um mesmo poço e também entre bósons de poços vizinhos, já μ é o potencial externo e $J_i = J\alpha_i$, ($i = 1, 2, 3$) é a amplitude de tunelamento entre os poços vizinhos, como pode ser visualizado esquematicamente na figura (3.1):

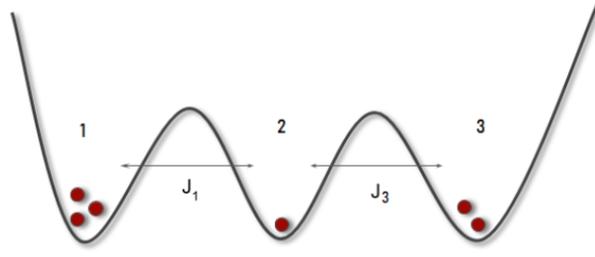


Figura 3.1: Representação esquemática do modelo de três poços alinhados. J_1 e J_3 representam as amplitudes de tunelamento entre os condensados.

Podemos observar que a troca dos índices 1 e 3 mantém o hamiltoniano invariante. Outra característica do hamiltoniano a ser observada é a sua atuação no espaço de Fock, que é varrido pelos vetores:

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \frac{(a_3^\dagger)^{n_3}}{\sqrt{n_3!}} |0, 0, 0\rangle, \quad (3.1.2)$$

onde $|0, 0, 0\rangle$ representa o vácuo bosônico do espaço de Fock. Dessa forma, a atuação dos operadores número sobre os vetores de Fock ocorre da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N_1 |n_1, n_2, n_3\rangle &= n_1 |n_1, n_2, n_3\rangle, \\ N_2 |n_1, n_2, n_3\rangle &= n_2 |n_1, n_2, n_3\rangle, \\ N_3 |n_1, n_2, n_3\rangle &= n_3 |n_1, n_2, n_3\rangle. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Como os vetores de base são determinados univocamente pelos números quânticos n_1, n_2 e n_3 , ou seja, pelo número de bósons em cada um dos condensados, podemos concluir que o modelo tem três graus de liberdade e portanto, o hamiltoniano deve apresentar três quantidades conservadas independentes para que se trate de um modelo integrável. O número total de partículas, $N = \sum_{i=1}^3 N_i$, é uma quantidade conservada do sistema e, portanto, comuta com o hamiltoniano. Para cada valor fixo de N , a dimensão do espaço de Hilbert associado, V_N , se torna [18]:

$$\dim(V_N) = \frac{(2+N)!}{2!N!} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2). \quad (3.1.4)$$

Além disso, já que o hamiltoniano não apresenta dependência temporal, temos que a energia total do sistema é conservada. A terceira quantidade conservada, necessária para que o modelo seja integrável, será apresentada posteriormente.

3.1.1 Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI)

Nosso primeiro objetivo é estabelecer que o hamiltoniano (3.1.1) pode ser obtido através do MEQI. Portanto, começamos através da definição da matriz R com invariância $SU(2)$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} b(u) &= \frac{u}{u+\eta}, \\ c(u) &= \frac{\eta}{u+\eta} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

onde $b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, u é o parâmetro espectral e $\eta \in \mathbb{C}$ é um parâmetro arbitrário, a ser escolhido posteriormente. Podemos verificar que a matriz R satisfaz a equação de Yang-Baxter:

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v). \quad (3.1.6)$$

A equação (3.1.6) atua no produto direto de três espaços $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. $R_{ij}(u)$ denota a atuação da matriz R não trivialmente sobre os i -ésimos e j -ésimos espaços e como identidade no espaço restante. Dando sequência, devemos escolher adequadamente os operadores de Lax, $L_a(u)$ e $L_b(u)$, essenciais ao método. Uma de suas representações se dá em termos dos operadores bosônicos (a_i, a_i^\dagger) , que estão sujeitos à álgebra de Heisenberg:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (3.1.7)$$

Dessa forma, os operadores de Lax são definidos como:

$$L_a(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta(N_1 + N_3) & A \\ A^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad L_b(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta N_2 & a_2 \\ a_2^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad (3.1.8)$$

onde I representa o operador identidade, A e A^\dagger são combinações lineares dos operadores criação e aniquilação de bósons nos poços 1 e 3, dados por:

$$A = k(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3), \quad A^\dagger = k(\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger), \quad k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}}. \quad (3.1.9)$$

Por definição, adotaremos $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$. Os operadores componentes dos operadores de Lax satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [N_i, a_j] &= -a_j \delta_{ij}, & [N_i, a_j^\dagger] &= a_j^\dagger \delta_{ij}, & [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}, \\ [A, A^\dagger] &= 1, & [N_1 + N_3, A] &= -A, & [N_1 + N_3, A^\dagger] &= A^\dagger. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Como dito anteriormente, estamos interessados em determinar a matriz de monodromia $T(u)$, associada aos operadores de Lax. Para que a condição da integrabilidade seja satisfeita, é necessário que ela também satisfaça a equação de Yang-Baxter, assim dizendo:

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v). \quad (3.1.11)$$

Portanto, com base na realização dos operadores de Lax (3.1.8) em termos dos operadores bosônicos, definimos a matriz de monodromia como:

$$T(u) = L_a(u+\omega)L_b(u-\omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (3.1.12)$$

onde ω é um parâmetro a ser definido posteriormente. Portanto, a partir da multiplicação dos operadores de

Lax, é possível realizar a identificação dos operadores que compõem a matriz de monodromia:

$$\begin{aligned}
 A(u) &= [(u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3)][(u - \omega)I + \eta N_2] + A_\alpha a_2^\dagger, \\
 B(u) &= [(u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3)]a_2 + \eta^{-1}A_\alpha, \\
 C(u) &= [(u - \omega)I + \eta N_2] + \eta^{-1}a_2^\dagger, \\
 D(u) &= A_\alpha^\dagger a_2 + \eta^{-2}I.
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Finalmente, definimos a matriz de transferência, $\tau(u)$ da maneira tradicional, como o traço da matriz de monodromia, ou seja:

$$\tau(u) = \text{Tr}(T(u)) = A(u) + D(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2, \tag{3.1.14}$$

onde as constantes c_i são identificadas como:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= J\tau(0) = \frac{H}{J} + \left(\eta^2 \frac{N^2}{4} - \omega^2 + \eta^{-2} \right) I, \\
 c_1 &= \frac{d}{du} \tau(u)|_{u=0} = 2\eta N, \\
 c_2 &= \frac{d^2}{du^2} \tau(u)|_{u=0} = I,
 \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

onde novamente I é o operador identidade, N é o número total de bósons e H é o hamiltoniano (3.1.1). A partir das constantes, temos que os parâmetros de acoplamento do hamiltoniano são identificados como:

$$U = -\frac{J}{4}\eta^2, \quad \mu = -J\eta\omega. \tag{3.1.16}$$

Pode-se mostrar que a matriz de transferência comuta para diferentes valores do parâmetro espectral através da equação de Yang-Baxter(3.1.11), assim dizendo:

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \tag{3.1.17}$$

e assim, temos que o modelo obtido através da matriz de transferência é integrável. Usando as expressões obtidas para os parâmetros de acoplamento e as constantes, podemos reescrever o hamiltoniano em função da matriz de transferência $\tau(u)$:

$$H = J \left(\tau(u) + (\omega^2 - u^2 - \eta^2)I - u\tau'(u) - \frac{\tau'(u)^2}{4} \right). \tag{3.1.18}$$

Portanto, segue que o espectro de energias do sistema é dado por:

$$E = J \left(\lambda_l(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^2 - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right), \quad l = 0, \dots, N, \tag{3.1.19}$$

onde $\lambda_l(u)$ são os autovalores da matriz de transferência.

3.1.2 Pseudo-vácuo e o Ansatz de Bethe

A utilização do Método do Espalhamento Quântico Inverso “tradicional” consiste na utilização do próprio vácuo bosônico do espaço de Fock $|0, 0, 0\rangle$ como pseudo-vácuo, entretanto, ao utilizarmos este, não conseguimos

obter as três quantidade conservadas do sistema. Por esse motivo, é necessário fazer uma extensão do método, modificando os pseudo-vácuos utilizados, de forma a se determinar todas as quantidades conservadas e todas as energias do sistema [27][18], chamaremos essa extensão feita ao método de Método do Espalhamento Quântico Inverso Estendido (MEQIE). Tendo optado pela realização dos operadores de Lax dada por (3.1.8), devemos escolher pseudo-vácuos adequados para o modelo e, para isso, iniciamos definindo o operador Γ como uma combinação linear dos operadores bosônicos dos poços 1 e 3:

$$\Gamma = \alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3, \quad (3.1.20)$$

que em conjunto com o operador A , satisfaz as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\Gamma, A] &= 0, & [\Gamma, a_2] &= 0, \\ [\Gamma^\dagger, A] &= 0, & [\Gamma^\dagger, a_2] &= 0, \\ [N_1 + N_3, (\Gamma^\dagger)^l] &= l(\Gamma^\dagger)^l, & [N_2, (\Gamma^\dagger)^l] &= 0, \\ [\Gamma^\dagger, B(u)] &= -\eta \Gamma^\dagger a_2, & [\Gamma, B(u)] &= \eta \Gamma a_2, \\ [\Gamma^\dagger, C(u)] &= 0, & [\Gamma, C(u)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Como visto anteriormente, o vácuo bosônico do espaço de Fock é definido como:

$$|0\rangle = |0, 0, 0\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes |0_3\rangle, \quad (3.1.22)$$

e é caracterizado pela seguinte propriedade do operador *destruição de bósons* no j -ésimo poço:

$$a_j |0\rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.1.23)$$

Portanto, de maneira a satisfazer as condições necessárias impostas ao pseudo-vácuo para a aplicação do método (veja apêndice A), definimos os pseudo-vácuos através da utilização do operador Γ , como:

$$|\phi_l\rangle = (\Gamma^\dagger)^l |0\rangle, \quad l \leq N, \quad (3.1.24)$$

em que cada valor de l está associado a um pseudo-vácuo diferente e é dado pela quantidade de bósons no poço dois. Assim, temos que os pseudo-vácuos satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} A(u) |\phi_l\rangle &= (u - \omega)(u + \omega + \eta l) |\phi_l\rangle, \\ B(u) |\phi_l\rangle &= 0, \\ C(u) |\phi_l\rangle &\neq 0, \\ D(u) |\phi_l\rangle &= \eta^{-2} |\phi_l\rangle. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Dessa forma, podemos definir os estados de Bethe, em termos dos pseudo-vácuos adequadamente selecionados, que são dados por:

$$|\psi_l\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle, & l < N \\ |\phi_N\rangle, & l = N, \end{cases} \quad (3.1.26)$$

onde $\{v_i\}$ são o conjunto de soluções da equação do *Ansatz* de Bethe, que será apresentada na sequência. Como visto anteriormente, o hamiltoniano do modelo pode ser escrito em termos da matriz de transferência, $\tau(u)$, (3.1.19). Com isso, é possível afirmar que se um estado é auto-estado da matriz de transferência, também será auto-estado do hamiltoniano, e vice-versa. Os estados de Bethe são, por definição, auto-estados do hamiltoniano, ou seja, espera-se que também sejam da matriz de transferência $\tau(u)$, portanto, iremos utilizá-los para determinar os autovalores da matriz de transferência $\lambda_l(u)$, de maneira:

$$\tau(u) |\psi_l\rangle = \lambda_l(u) |\psi_l\rangle. \quad (3.1.27)$$

Para $l = N$, encontramos os seguintes autovalores para a matriz de transferência:

$$\lambda_N(u) = (u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2}. \quad (3.1.28)$$

Já para $l < N$, obtemos:

$$\lambda_l(u) = (u + \omega + \eta l)(u - \omega) \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i}. \quad (3.1.29)$$

Para que o estado de Bethe seja, de fato, um auto-estado da matriz de transferência, é necessário que algumas condições sejam satisfeitas (veja apêndice A para mais detalhes). Com isso, obtemos uma nova equação, denominada de Equação do *Ansatz* de Bethe (EAB), dada por:

$$\eta^2 (v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N-l, \quad (3.1.30)$$

onde o conjunto de parâmetros $\{v_i\}$ são as soluções da equação. Com as soluções da EAB em mãos, podemos determinar todos os autovalores da matriz de transferência (3.1.30) e, conseqüentemente, todo o espectro de energias do modelo.

3.1.3 Solução Exata e Carga Conservada

3.1.3.1 Solução Exata

Como visto anteriormente, somos capazes de determinar os autovalores da matriz de transferência utilizando as equações (3.1.29) e (3.1.30). Sendo assim, utilizando o conjunto de soluções calculados pela equação (3.1.31), podemos obter o espectro de energia do sistema utilizando a equação (3.1.20). Portanto temos que para $l = N$, a energia do sistema será dada por:

$$E = UN^2 - \mu N. \quad (3.1.31)$$

Já para $l < N$, teremos:

$$E = J \left[(u + \omega + \eta l)(u - \omega) \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta l - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right]. \quad (3.1.32)$$

Para $l = N$, podemos ver que existe uma classe de auto-estados que admite uma forma simples para a energia, que não depende do parâmetro de tunelamento J . Já para $l < N$, utilizando vários pseudo-vácuos, obtemos todos os demais autovalores do sistema e, conseqüentemente, todo o espectro de energia para o modelo integrável de três poços alinhados.

3.1.3.2 Carga Conservada

O modelo que estamos trabalhando possui três graus de liberdade, ou seja, a condição para a integrabilidade do sistema requer que existam três quantidades conservadas independentes. Como vimos, o MEQI apenas nos fornece duas quantidades conservadas, o número total de bósons N e a energia total do sistema. A terceira quantidade conservada do sistema é obtida pela extensão feita ao método e é expressa em termos do operador Γ , sendo:

$$\begin{aligned} Q &= \Gamma^\dagger \Gamma = (\alpha_3 a_1^\dagger - \alpha_1 a_3^\dagger)(\alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3) = \alpha_3^2 N_1 + \alpha_1^2 N_3 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \\ Q &= \alpha_3^2 N_1 + \alpha_1^2 N_3 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Podemos verificar que o operador Q satisfaz as seguintes relações de comutação:

$$[H, Q] = 0, \quad [N, Q] = 0. \quad (3.1.34)$$

Dessa forma, os operadores H , N e Q formam um conjunto de três quantidades conservadas e independentes, satisfazendo a condição de integrabilidade do sistema. Também podemos ver que o operador Q também satisfaz a seguinte relação de comutação:

$$[Q, C(u)] = 0, \quad (3.1.35)$$

ou seja, podemos dizer que cada estado de Bethe $|\psi_l\rangle$ é um auto-estado do operador Q com autovalor:

$$Q|\psi_l\rangle = l|\psi_l\rangle. \quad (3.1.36)$$

A interpretação física da quantidade conservada Q será apresentada no capítulo seguinte, onde estudaremos os regimes dinâmicos para o modelo de três poços.

3.1.4 Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata

Uma das características fundamentais dos sistemas integráveis é a possibilidade de obtenção de uma solução exata para o espectro de energia dos sistemas de muitos corpos, sem a necessidade do uso de métodos numéricos para aproximação. De maneira a exemplificar essa propriedade, realizamos uma comparação entre as energias obtidas através da utilização do MEQI e as energias obtidas através da diagonalização exata do hamiltoniano (3.1.1) para um sistema com $u = \omega = \mu = 0$, $J = 1.0$, $U = 1.0$ e $N = 3$. Para essa configuração do sistema, temos que os autovalores da matriz de transferência, $\lambda_l(u)$, são dados por:

$$\lambda_l(u) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \prod_{j=1}^{3-l} \frac{v_j + 2i}{v_j}, & l < 3 \\ -\frac{1}{4}, & l = 3. \end{cases} \quad (3.1.37)$$

Dessa forma, a partir da utilização das equações (3.1.32) e (3.1.33), obtemos as energias do sistema:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(37 - \prod_{j=1}^{3-l} \frac{v_j + 2i}{v_j} \right), & l < 3 \\ 9, & l = 3, \end{cases} \quad (3.1.38)$$

onde os parâmetros v_j são obtidos através da equação de Bethe (3.1.31). A representação matricial do hamiltoniano sobre os estados $|n_1, n_2, n_3\rangle$ nessa configuração se torna:

$$H = \begin{pmatrix} 9 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1 & \sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3/2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 9 & 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 9 \end{pmatrix} \quad (3.1.39)$$

Fazendo a diagonalização exata de (3.1.40), calculando o conjunto de parâmetros v_j e utilizando-os em (3.1.39), montamos a tabela (3.1), de forma a comparar os resultados de energia obtidos através da utilização das duas abordagens.

l	Soluções das EAB	Energias (A)	Energias (D)
0	$v_1 = -2.0246i, v_2 = -4.1927i, v_3 = -0.0147i$	$E_1 = 9.4641$	$E_1 = 9.4641$
0	$v_1 = -1.9952i, v_2 = -4.1165i, v_3 = 0.01503i$	$E_2 = 9.2915$	$E_2 = 9.2915$
0	$v_1 = 0.2096 + 0.022i, v_2 = -2.8122i, v_3 = -(v_1)^*$	$E_3 = 2.5359$	$E_3 = 2.5359$
0	$v_1 = 0.48944 - 0.5438i, v_2 = -0.2335i, v_3 = -(v_1)^*$	$E_4 = -1.2915$	$E_4 = -1.2915$
1	$v_1 = -4.1213i, v_2 = -2.0035i$	$E_5 = 9.24977$	$E_5 = 9.24977$
1	$v_1 = -2.6545i, v_2 = -0.0178i$	$E_6 = 2.27334$	$E_6 = 2.27334$
1	$v_1 = -1.2052i, v_2 = -0.0331i$	$E_7 = -0.52311$	$E_7 = -0.52311$
2	$v_1 = 0.06155i$	$E_8 = 0.876894$	$E_8 = 0.876894$
2	$v_1 = -4.0615i$	$E_9 = 9.12311$	$E_9 = 9.12311$
3		$E_{10} = 9.0$	$E_{10} = 9.0$

Tabela 3.1: Soluções e energias para o modelo de três poços, com $N=3$. A representa as energias obtidas pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe e D representa as energias obtidas através da diagonalização exata do hamiltoniano.

Com isso, demonstramos a capacidade do método para obter soluções exatas para o espectro de energias do sistema.

3.2 INTEGRABILIDADE QUÂNTICA DO MODELO DE QUATRO POÇOS FECHADO

Considerando a escolha $n = 2$ e $m = 2$ no hamiltoniano geral (2.0.1), obtemos o hamiltoniano para o modelo de quatro poços fechados, acoplados por tunelamento quântico, dado por:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3 - N_4)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3 - N_4) + J_{12}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + J_{14}(a_1^\dagger a_4 + a_1 a_4^\dagger) + J_{23}(a_3^\dagger a_2 + a_3 a_2^\dagger) + J_{34}(a_3^\dagger a_4 + a_3 a_4^\dagger), \quad (3.2.1)$$

onde os termos são identificados da mesma forma que em (3.1.1), com exceção ao parâmetro de tunelamento, que agora assume a forma $J_{ij} = J\alpha_i\alpha_j$, determina a amplitude de tunelamento entre o i -ésimo e o j -ésimo poço. A partir de diferentes valores para as constantes α_i , podemos identificar diferentes regimes de tunelamento, tanto isotrópicos quanto anisotrópicos. No decorrer dessa sessão, iremos considerar apenas o caso isotrópico, tal que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/\sqrt{2}$. Na figura (3.2) apresentamos uma representação esquemática do modelo de 4 poços.

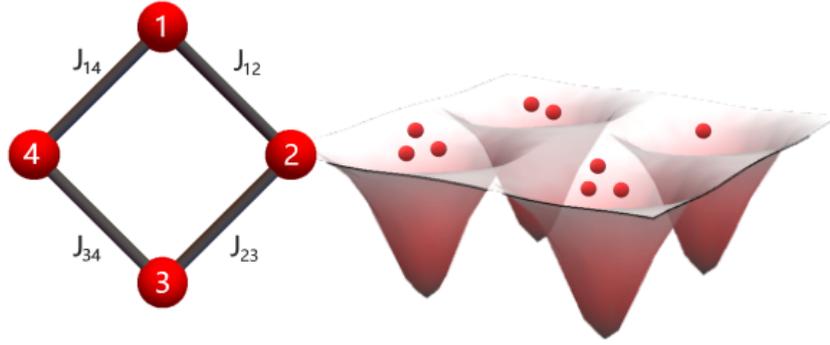


Figura 3.2: Representação esquemática do modelo de quatro poços.

Podemos observar que dessa vez o hamiltoniano se mantém invariante perante as trocas $1 \leftrightarrow 3$ e $2 \leftrightarrow 4$, também temos que o espaço de Fock, onde se dá a atuação do hamiltoniano, é varrido pelos vetores:

$$|n_1, n_2, n_3, n_4\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \frac{(a_3^\dagger)^{n_3}}{\sqrt{n_3!}} \frac{(a_4^\dagger)^{n_4}}{\sqrt{n_4!}} |0, 0, 0, 0\rangle, \quad (3.2.2)$$

onde $|0, 0, 0, 0\rangle$ é o vácuo bosônico do espaço de Fock. Dessa forma, temos que os operadores número atuam sobre os vetores de Fock de maneira análoga ao modelo de três poços (3.1.3):

$$\begin{aligned} N_1 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle &= n_1 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle, \\ N_2 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle &= n_2 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle, \\ N_3 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle &= n_3 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle, \\ N_4 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle &= n_4 |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Para o modelo de quatro poços, os vetores de base são determinados univocamente pelos quatro números quânticos n_i , $\{i = 1, 2, 3, 4\}$, portanto, o modelo deve apresentar quatro quantidades conservadas independentes, já que o hamiltoniano possui quatro graus de liberdade, para que seja de fato um modelo integrável. O número

total de partículas $N = \sum_{i=1}^4 N_i$ é uma das quantidades conservadas do sistema e, para cada valor fixo de N , a dimensão do espaço de Hilbert associado V_N é dada por [20]:

$$\dim(V_N) = \frac{(N+3)!}{3!N!} = \frac{1}{6}(N+3)(N+2)(N+1). \quad (3.2.4)$$

Novamente o hamiltoniano não apresenta dependência temporal, portanto, a energia total do sistema é outra das quatro quantidades conservadas do modelo de quatro poços. As duas quantidades conservadas restantes serão apresentadas e interpretadas na sequência deste trabalho.

3.2.1 Método do Espalhamento Quântico Inverso

Para o modelo de quatro poços, iremos seguir a mesma abordagem utilizada no modelo de três poços ao implementarmos o MEQI. A matriz R é definida da mesma forma (3.1.5) e como visto anteriormente, ela satisfaz a equação de Yang-Baxter (3.1.6). Entretanto, a diferença na implementação do MEQI para o modelo de quatro poços reside nos operadores de Lax, que são definidos como:

$$L^{(1,3)}(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta N_{1,3} & A_{1,3} \\ A_{1,3}^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad L^{(2,4)}(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta N_{2,4} & A_{2,4} \\ A_{2,4}^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

onde I é o operador identidade e os operadores que os compõem são dados por:

$$N_{i,j} = N_i + N_j, \quad A_{i,j} = \alpha_i a_i + \alpha_j a_j, \quad A_{i,j}^\dagger = \alpha_i a_i^\dagger + \alpha_j a_j^\dagger, \quad (3.2.6)$$

onde $\alpha_i^2 + \alpha_j^2 = 1$. Assim, podemos novamente definir a matriz de monodromia $T(u)$, com base na realização adotada para os operadores de Lax, como:

$$T(u) = L^{(1,3)}(u + \omega)L^{(2,4)}(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

tal que suas componentes são identificadas como:

$$\begin{aligned} A(u) &= ((u + \omega)I + \eta N_{1,3})((u - \omega)I + \eta N_{2,4}) + A_{1,3}A_{2,4}^\dagger, \\ B(u) &= ((u + \omega)I + \eta N_{1,3})A_{2,4} + \eta^{-1}A_{1,3}, \\ C(u) &= A_{1,3}^\dagger((u - \omega)I + \eta N_{2,4}) + \eta^{-1}A_{2,4}^\dagger, \\ D(u) &= A_{1,3}^\dagger A_{2,4} + \eta^{-2}I. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Segue que a matriz de monodromia $T(u)$ para o modelo de quatro poços também satisfaz a equação de Yang-Baxter (3.1.12) e novamente temos que a matriz de transferência, $\tau(u)$, é definida como o traço da matriz de monodromia (3.1.15) com as constantes identificadas como em (3.1.16) e a partir destas, temos a mesma identificação dos parâmetros de acoplamento do hamiltoniano (3.1.17). Novamente é possível mostrar que a matriz de transferência comuta para diferentes valores do parâmetro espectral, como em (3.1.18), sendo assim, temos que o modelo é integrável pelo MEQI e podemos escrever o hamiltoniano (3.2.1) em termos da matriz de transferência:

$$H = J \left(\tau(u) + (\omega^2 - u^2 - \eta^{-2})I - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right). \quad (3.2.9)$$

Portanto, as energias do sistema são dadas por:

$$E = J \left(\lambda_{l,k}(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right), \quad (3.2.10)$$

onde $\lambda_{l,k}(u)$ denotam os autovalores da matriz de transferência. Estamos interessados agora em obter esses autovalores para termos uma solução exata para o modelo.

3.2.2 Pseudo-vácuo e o *Ansatz* de Bethe

Conforme discutido anteriormente, o MEQI por si só não é capaz de fornecer todas as quantidades conservadas do sistema. Portanto, se faz necessária realizar novamente uma extensão ao método, de forma a obter as duas quantidades conservadas restantes. Essa extensão se dará novamente através da escolha de pseudo-vácuos adequados, e para isso, iniciamos definindo os operadores:

$$\Gamma_{1,3}^\dagger = \alpha_3 a_1^\dagger - \alpha_1 a_3^\dagger, \quad \Gamma_{2,4}^\dagger = \alpha_4 a_2^\dagger - \alpha_2 a_4^\dagger, \quad (3.2.11)$$

que em conjunto com os operadores componentes da matriz de monodromia (3.2.8) e os operadores $A_{i,j}$ (3.2.6), satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\Gamma_{1,3}^\dagger, A_{1,3}] &= 0, & [\Gamma_{2,4}^\dagger, A_{2,4}] &= 0, \\ [\Gamma_{1,3}^\dagger, A_{2,4}] &= 0, & [\Gamma_{2,4}^\dagger, A_{1,3}] &= 0, \\ [N_{1,3}, (\Gamma_{1,3}^\dagger)^l] &= l(\Gamma_{1,3}^\dagger)^l, & [N_{2,4}, (\Gamma_{2,4}^\dagger)^k] &= k(\Gamma_{2,4}^\dagger)^k, \\ [\Gamma_{1,3}, B(u)] &= \eta \Gamma_{1,3} A_{2,4}, & [\Gamma_{2,4}, B(u)] &= 0, \\ [\Gamma_{1,3}, B(u)] &= -\eta \Gamma_{1,3}^\dagger A_{2,4}, & [\Gamma_{2,4}, B(u)] &= 0, \\ [\Gamma_{1,3}, C(u)] &= 0, & [\Gamma_{2,4}, C(u)] &= \eta \Gamma_{2,4} A_{1,3}^\dagger, \\ [\Gamma_{1,3}, C(u)] &= 0, & [\Gamma_{2,4}, C(u)] &= -\eta \Gamma_{2,4}^\dagger A_{1,3}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Assim, definimos o pseudo-vácuo para o modelo de quatro poços através da utilização dos operadores $\Gamma_{i,j}$, como:

$$|\phi_{k,l}\rangle = (\Gamma_{1,3}^\dagger)^l (\Gamma_{2,4}^\dagger)^k |0\rangle, \quad l + k \leq N, \quad (3.2.13)$$

onde $|0\rangle$ representa o vácuo bosônico do espaço de Fock e cada valor de l e k está associado a um pseudo-vácuo diferente, que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} A(u) |\phi_{k,l}\rangle &= (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) |\phi_{k,l}\rangle, \\ B(u) |\phi_{k,l}\rangle &= 0, \\ C(u) |\phi_{k,l}\rangle &\neq 0, \\ D(u) |\phi_{k,l}\rangle &= \eta^{-2} |\phi_{k,l}\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Com isso, podemos definir o estado de Bethe a partir dos pseudo-vácuos, como:

$$|\psi_{l,k}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle, & k+l < N \\ |\phi_{l,k}\rangle, & k+l = N. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

De maneira a determinar o espectro de energias para o modelo, é necessário que encontremos os autovalores da matriz de transferência, conforme descrito pela equação (3.2.10). Os estados de Bethe são, por definição, auto-estados do hamiltoniano e, como visto anteriormente, se um estado é auto-estado do hamiltoniano, também deverá ser auto-estado da matriz de transferência. Dessa forma, utilizando os estados de Bethe, podemos encontrar os autovalores $\lambda_{l,k}(u)$ da matriz de transferência $\tau(u)$:

$$\tau(u) |\psi_{l,k}\rangle = \lambda_{l,k}(u) |\psi_{l,k}\rangle. \quad (3.2.16)$$

Para $l+k = N$, encontramos os seguintes autovalores para a matriz de transferência:

$$\lambda_{l,k}(u) = (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) + \eta^{-2}, \quad l+k = N. \quad (3.2.17)$$

Já para $l+k < N$, os autovalores da matriz de transferência são dados por:

$$\lambda_{l,k}(u) = (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i}, \quad (3.2.18)$$

onde os parâmetros v_i são o conjunto de soluções da Equação do *Ansatz* de Bethe (EAB), obtida pela imposição de que $|\psi_{l,k}\rangle$ seja um auto-estado de $\tau(u)$, computada por:

$$\eta^2 (v_i + \omega + k\eta)(v_i - \omega + l\eta) = \prod_{j \neq i}^{N-l-k} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N-l-k. \quad (3.2.19)$$

Com os parâmetros v_i calculados pela equação (3.2.19), somos capazes de determinar os autovalores da matriz de transferência e, dessa forma, obter o espectro de energia do modelo pela equação (3.2.10).

3.2.3 Solução Exata e Cargas Conservadas

3.2.3.1 Solução Exata

A partir do conjunto de parâmetros calculados pela equação (3.2.19), somos capazes de determinar os autovalores da matriz de transferência utilizando as equações (3.2.17) e (3.2.18). Sendo assim, podemos obter o espectro de energia do sistema utilizando a equação (3.2.10). Para $l+k = N$, a energia do sistema será dada por:

$$E = J \left[\eta^2 lk + (l-k)\omega\eta - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right]. \quad (3.2.20)$$

Já para $l + k < N$, teremos:

$$E = J \left[(u + \omega + \eta k)(u - \omega + \eta l) \prod_{j=1}^{N-l-k} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l-k} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} + \omega^2 - u^2 - u\eta N - \eta^{-2} - \frac{\eta^2 N^2}{4} \right]. \quad (3.2.21)$$

Para $l + k = N$, podemos ver que existe uma classe de auto-estados que admite uma forma simples e fechada para a energia, que não depende dos parâmetro de tunelamento J_{ij} . Já para $l + k < N$, utilizando vários pseudo-vácuos, obtemos todos os demais autovalores e, conseqüentemente, todo o espectro de energia para o modelo de quatro poços.

3.2.3.2 Cargas Conservadas

Como visto anteriormente, os vetores base do hamiltoniano (3.2.1) são univocamente determinados por quatro números quânticos n_i , $\{i = 1, 2, 3, 4\}$, portanto, a integrabilidade do sistema requer que existam quatro quantidades conservadas independentes, todavia, o método de espalhamento quântico inverso (MEQI) aplicado ao sistema apenas nos fornece duas quantidades conservadas, energia total e número total de partículas. De fato, é a extensão feita ao MEQI, através da introdução dos operadores $\Gamma_{i,j}$, que nos fornece as duas quantidades conservadas restantes, que são os operadores dados por:

$$\begin{aligned} Q_{1,3} &= \Gamma_{1,3}^\dagger \Gamma_{1,3} = \alpha_3^2 N_1 + \alpha_1^2 N_3 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \\ Q_{2,4} &= \Gamma_{2,4}^\dagger \Gamma_{2,4} = \alpha_4^2 N_2 + \alpha_2^2 N_4 - \alpha_2 \alpha_4 (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Como se tratam de quantidades conservadas, satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[Q_{1,3}, Q_{2,4}] = [H, Q_{1,3}] = [N, Q_{1,3}] = [H, Q_{2,4}] = [N, Q_{2,4}] = 0. \quad (3.2.23)$$

E dessa forma, os operadores $Q_{1,3}$ e $Q_{2,4}$, junto com o hamiltoniano H e o número total de partículas N , formam o conjunto de quatro operadores conservados do modelo integrável de quatro poços. Além disso, seguem as seguintes relações de comutação:

$$[Q_{1,3}, C(u)] = [C(u), Q_{2,4}] = 0. \quad (3.2.24)$$

E assim temos que o Estado de Bethe (3.2.15) é simultaneamente um auto-estado de $Q_{1,3}$ e $Q_{2,4}$, com os respectivos autovalores:

$$\begin{aligned} Q_{1,3} |\psi_{l,k}\rangle &= k |\psi_{l,k}\rangle, \\ Q_{2,4} |\psi_{l,k}\rangle &= l |\psi_{l,k}\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

3.2.4 Comparativo entre MEQI e Diagonalização Exata

Como discutido anteriormente, uma das características fundamentais dos sistemas integráveis é a possibilidade de obtenção de uma solução exata para o espectro de energia dos sistemas de muitos corpos. De maneira a exemplificar essa propriedade, realizamos uma comparação entre as energias obtidas através da utilização do MEQI e as energias obtidas através da diagonalização exata do hamiltoniano (3.2.1) para um sistema com $N = 2$,

$U = 0.5, J = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/\sqrt{2}$ e $\mu = u = \omega = 0$. A partir das equações (3.2.17) e (3.2.18), os autovalores da matriz de transferência são:

$$\lambda_{l,k}(u) = \begin{cases} kl\eta^2 \prod_{i=1}^{2-l-k} \frac{v_i - \eta}{v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{2-l-k} \frac{v_i + \eta}{v_i}, & l+k < 2 \\ kl\eta^2 + \eta^{-2}, & l+k = 2. \end{cases} \quad (3.2.26)$$

Já as energias do sistemas são dadas por:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(5 - \prod_{j=1}^{2-l-k} \frac{v_j + \sqrt{2}i}{v_j} \right), & l+k < 2 \\ \frac{1}{2}(l-k)^2, & l+k = 2, \end{cases} \quad (3.2.27)$$

onde os parâmetros v_j são obtidos através da equação de Bethe (3.2.19). A representação matricial do hamiltoniano sobre os estados $|n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$ nessa configuração se torna:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

Fazendo a diagonalização exata de (3.2.27) e calculando o conjunto de parâmetros v_j através da EAB (3.2.19), montamos a tabela (3.2), de forma a comparar os resultados de energia obtidos por diagonalização exata com os obtidos através do método algébrico do *Ansatz* de Bethe:

l & k	Soluções das EAB	Energias (<i>Ansatz</i>)	Energias (D)
l=0, k=0	$v_1 = 0.293i, v_2 = -1.701i$	$E_1 = 2$	$E_1 = 2$
l=0, k=0	$v_1 = -2.044i, v_2 = -0.245i$	$E_2 = 3.23607$	$E_2 = 3.23607$
l=0, k=0	$v_1 = -0.566 + 0.437i, v_2 = -(v_1)^*$	$E_3 = -1.23607$	$E_3 = -1.23607$
l=0, k=1	$v_1 = -1.70711i$	$E_4 = 2.41421$	$E_4 = 2.41421$
l=0, k=1	$v_1 = 0.292893i$	$E_5 = -0.414215$	$E_5 = -0.414215$
l=1, k=0	$v_1 = -1.70711$	$E_6 = 2.41421$	$E_6 = 2.41421$
l=1, k=0	$v_1 = 0.292893i$	$E_7 = -0.414215$	$E_7 = -0.414215$
l=2, k=0		$E_8 = 2$	$E_8 = 2$
l=1, k=1		$E_9 = 2$	$E_9 = 2$
l=0, k=2		$E_{10} = 0$	$E_{10} = 0$

Tabela 3.2: Soluções de energias para o modelo de quatro poços, com $N=2$

Novamente, fomos capazes de demonstrar a capacidade do método na obtenção da solução exata para o espectro de energias do sistema, encontrando valores exatamente iguais aos valores obtidos através da diagonalização exata do hamiltoniano (3.2.1).

Capítulo 4

Dinâmica Quântica

Nosso objetivo neste capítulo é conduzir um estudo acerca da dinâmica quântica de tunelamento dos modelos, de maneira que se torne possível identificar e classificar diferentes regimes de tunelamento de partículas entre os poços. Sendo assim, abordaremos a dinâmica da maneira usual, através da variação temporal dos valores esperados do número de partículas em cada um poços. A evolução temporal de toda quantidade física é regida pelo operador evolução temporal, que é dado por:

$$U(\tau) = \sum_{n=1}^d e^{-iE_n\tau} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (4.0.1)$$

onde $\tau = t/\hbar$, d é a dimensão do espaço de Hilbert, $\{E_n\}$ e $\{|\psi_n\rangle\}$ são os autovalores de energia e os auto-estados do hamiltoniano, respectivamente. Dessa forma, a evolução temporal de qualquer estado pode ser calculada por:

$$|\Psi(\tau)\rangle = U(\tau)|\psi_0\rangle = \sum_{n=1}^d a_n e^{-iE_n\tau} |\psi_n\rangle, \quad (4.0.2)$$

onde $a_n = \langle \psi_n | \psi_0 \rangle$ e $|\psi_0\rangle$ representa o estado inicial, expresso em termos dos vetores base do espaço de Fock.

A evolução temporal do valor esperado de um observável A é obtida através da utilização de A em sua representação matricial e das equações (4.0.1) e (4.0.2), de forma que:

$$\langle A(\tau) \rangle = \langle \Psi(\tau) | A | \Psi(\tau) \rangle. \quad (4.0.3)$$

Assim, temos que a evolução temporal do valor esperado para a população de partículas em cada um dos poços é computada por:

$$\langle N_i(\tau) \rangle = \langle \Psi(\tau) | N_i | \Psi(\tau) \rangle. \quad (4.0.4)$$

Com isso, podemos investigar as dinâmicas relativas ao hamiltoniano, de maneira a identificar a ocorrência de regimes de tunelamento. No que segue, é interessante definirmos alguns regimes dinâmicos, caracterizados por valores dos parâmetros de acoplamento dos hamiltonianos dos modelos estudados.

4.1 REGIMES DINÂMICOS

Seguindo uma classificação análoga à [21], os modelos atingem diferentes regimes dinâmicos através da escolha dos parâmetros. É evidente que a dependência do parâmetro de interação, U , dos hamiltonianos nos revela características distintas em regimes da dinâmica quântica dos modelos. No que se segue, caracterizamos cada um desses regimes por meio de limites do valor do parâmetro $\chi = UN/J$.

4.1.1 Regime de Rabi

Regime de interação fraca ($\chi \ll 1$). O regime de Rabi é caracterizado por $2N + 1$ níveis de energia com alto grau de degenerescência. O intervalo entre dois níveis de energia diminui com o aumento do parâmetro de interação. No extremo do regime de Rabi ($U = 0$), os níveis de energia são dados por:

$$E_s = Js, \quad s = -N, -N + 1, \dots, 0, \dots, N - 1, N, \quad (4.1.1)$$

tal que a diferença de energia entre dois níveis adjacentes é constante e vale $\Delta E = J$.

4.1.2 Regime de Josephson

Regime de interação intermediária ($1 \ll \chi \ll N^2$). Já no regime de Josephson a diferença de energia entre dois níveis é quase inexistente, de maneira que o espectro de energia é praticamente contínuo. Entretanto, uma estrutura de bandas começa a emergir a partir de $\chi \simeq 1$. A quantidade de bandas de energia depende do parâmetro de interação e aumenta com ele.

4.1.3 Regime de Fock

Regime de interação forte ($\chi \gg N^2$). O espectro de energia do regime de Fock é inteiramente caracterizado pela estrutura de bandas, e estas são finas, bem definidas e distantes das bandas adjacentes. No limite $\chi \rightarrow \infty$, o número de bandas é $(N + 2)/2$ se N é par e $(N + 1)/2$ se N for ímpar. As energias dos níveis são dadas por:

$$E_s = U(N - 2s)^2, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \text{int}(N/2), \quad (4.1.2)$$

onde $\text{int}(N/2)$ representa a parte inteira de $N/2$.

4.2 DINÂMICA DO MODELO DE TRÊS POÇOS

4.2.1 Distribuição de Energia do Hamiltoniano

De maneira a elucidar a discussão acerca dos regimes dinâmicos para diferentes valores dos parâmetros de acoplamento, foram traçados gráficos da distribuição de níveis de energia do hamiltoniano do modelo de três poços. Observa-se na figura 4.1 a representação ordenada dos níveis de energia do hamiltoniano para diferentes valores do parâmetro de interação. Para $U = 0$, existem $2N + 1$ níveis de energia e podemos observar intervalos uniformes $\Delta E = J$ entre níveis de energia adjacentes, com alto grau de degenerescência, como é característico do regime de Rabi. Quando temos $U = 0.05$, observa-se uma distribuição aproximadamente contínua dos níveis de energia do sistema, indicando que o sistema atinge o regime de Josephson. Entretanto, podemos perceber

o surgimento da estrutura de bandas para os níveis mais energéticos de $U = 0.1$. Já para $U = 0.3$, é possível observar claramente a estrutura de bandas em níveis menos energéticos do sistema, para valores maiores do parâmetro de interação, a distribuição de níveis de energia apresentaria predominantemente as estruturas de bandas, características do regime de Fock.

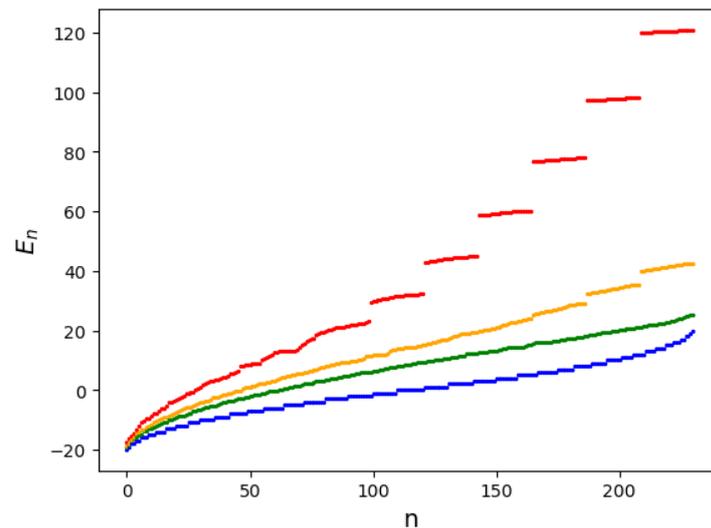


Figura 4.1: Níveis de energias do hamiltoniano ordenados para um sistema com $N = 20$. A linha vermelha representa $U = 0.3$, a linha amarela $U = 0.1$, a linha verde $U = 0.05$ e a linha azul $U = 0$.

Para complementar a discussão sobre os níveis de energia para diferentes valores do parâmetro de acoplamento, traçamos um gráfico da distribuição níveis de energia do hamiltoniano do modelo de três poços em função dos valores de UN/J :

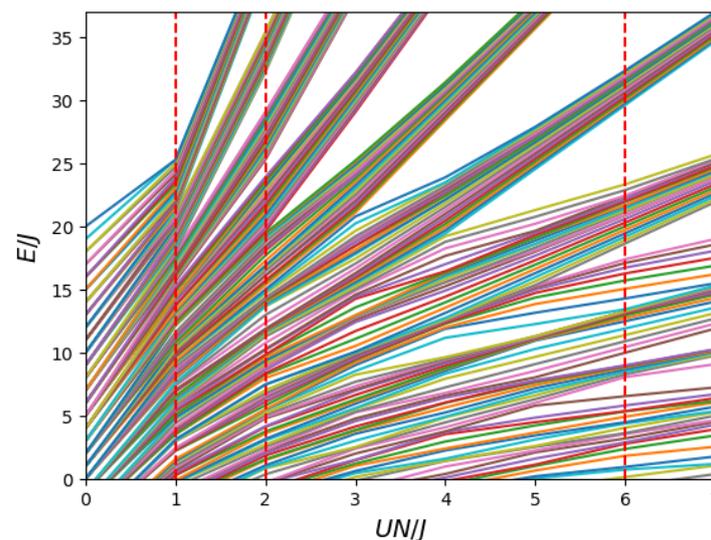


Figura 4.2: Distribuição dos níveis de energia em função do parâmetro UN/J para um sistema com $N = 20$. As linhas vermelhas representam $U = 0.05$, $U = 0.1$ e $U = 0.3$.

Para $UN/J = 0$, o sistema apresenta alto grau de degenerescência em seus níveis de energia, assim como intervalos de energia uniformes entre eles. Com o crescimento do valor de U , podemos observar que os níveis de energia do sistema vão se misturando até atingir uma distribuição aproximadamente uniforme em $UN/J \approx 1$. Aumentando ainda mais o valor de U , somos capazes de visualizar o surgimento das estruturas de bandas de energia, presente nos níveis mais energéticos do sistema quando $UN/J = 2$ e também já em níveis menos energéticos quando temos $UN/J = 6$, estando de acordo com os resultados da figura 4.1 e com a discussão acerca dos regimes dinâmicas feita na seção anterior.

4.2.2 Dinâmica Quântica do Hamiltoniano

Queremos agora investigar a dinâmica quântica de tunelamento do modelo de três poços, que se dá através da diagonalização exata do hamiltoniano (3.1.1). Para isso, iremos considerar o estado inicial mais geral do espaço de Fock:

$$|\psi_0\rangle = |N-l-k, l, k\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{N-l-k}}{\sqrt{(N-l-k)!}} \frac{(a_2^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} \frac{(a_3^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0,0,0\rangle, \quad l=0,1,\dots,N, \quad 0 \leq k \leq N-l. \quad (4.2.1)$$

Como visto anteriormente, a evolução temporal do valor esperado do número de bósons em cada um dos condensados é computada por (4.0.4) e, como isso, podemos obter a dinâmica de tunelamento das partículas para diferentes condições iniciais, de maneira a investigar a influência de diferentes populações iniciais em cada um dos poços sobre a dinâmica quântica do sistema. Na figura 4.3 foram traçados gráficos da evolução temporal do valor esperado de partículas em cada um dos poços para $N = 20$, $J = 1.0$, $\mu = 0$ e diferentes valores do parâmetro de interação U , considerando o estado inicial $|20, 0, 0\rangle$:

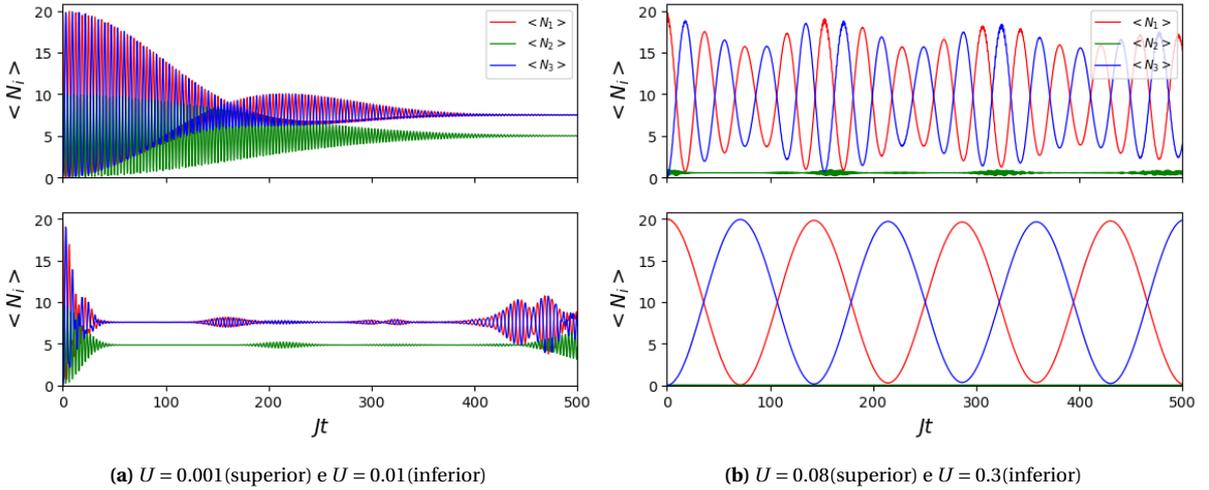


Figura 4.3: Evolução temporal do valor esperado para o número relativo de partículas entre os condensados para diferentes valores do parâmetro de interação, considerando um sistema com $N = 20$.

Podemos ver na figura 4.3 que quando temos $U = 0.001$, predomina o termo de tunelamento do hamiltoniano, ocasionando um aumento na frequência de tunelamento e um acúmulo de partículas no poço 2. Quando $U = 0.01$, parece existir um equilíbrio de forças entre o termo de interação e o termo de tunelamento do hamiltoniano, de forma que a fase transiente é rápida, seguida de um estado estável prolongado, que é sucedido

pelo ressurgimento da dinâmica de tunelamento dos bósons entre os poços, caracterizando um fenômeno de colapso e reparação da dinâmica. Já para maiores valores do parâmetro de interação, U , observamos seu domínio sobre o parâmetro de tunelamento, J , de forma que se torna possível perceber que o valor esperado de partículas no poço 2 se torna constante, ou seja, a dinâmica de tunelamento ocorre apenas entre os bósons dos poços 1 e 3. É conhecido que no modelo de dois poços as partículas ficam aprisionadas nos poços quando $UN \gg J$ [30]. Tratando os poços 1 e 3 como uma classe única de poços (denominada classe “1,3”), o sistema assume uma estrutura de dois modos, dessa forma, como nosso estado inicial possui partículas apenas na classe de poços “1,3”, o número de partículas $N_{1,3}$ será conservado, pois elas ficam aprisionadas no subsistema de poços 1 e 3 e, conseqüentemente, o número de partículas no poço 2 também será conservado, o que implica em $\langle N_2 \rangle = 0$. Como o hamiltoniano não possui termo de interação entre os poços 1 e 3 (um termo $\sim N_1 N_3$), efetivamente, os poços 1 e 3 funcionam como sistema de poço duplo não interagente, e por isso os bósons tunelam entre eles, dando origem a um regime de tunelamento ressonante quando $UN \gg J$.

Outra característica importante da dinâmica do sistema se manifesta ao inserirmos uma população inicial de partículas no poço 2, fazendo $l \neq 0$. Com essa inserção, observamos uma alteração no comportamento da dinâmica de tunelamento, de maneira que, com o aumento do valor de l , podemos observar oscilações no valor esperado de partículas no poço 2, sugerindo que o tunelamento passa a não ocorrer apenas entre os poços 1 e 3, conforme pode ser visualizado na figura 4.4.

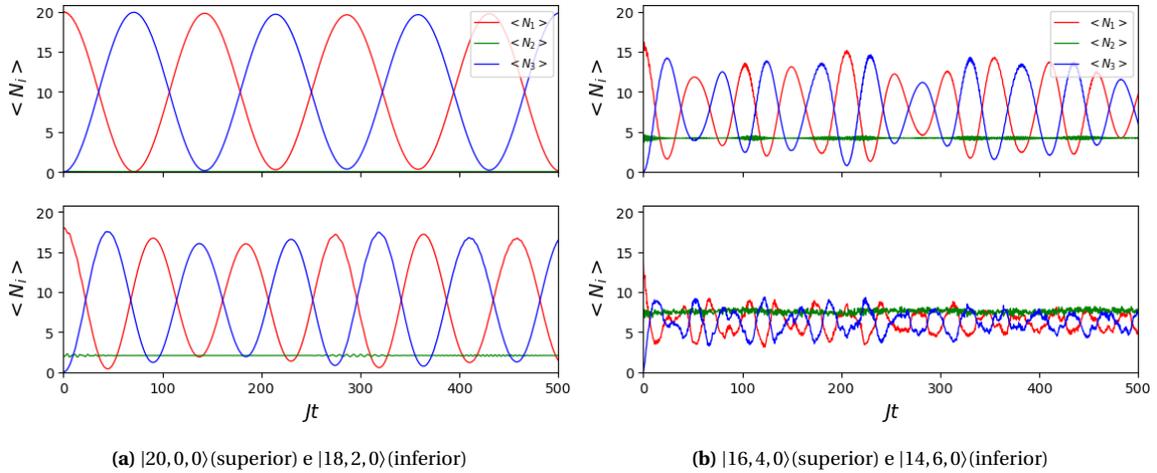


Figura 4.4: Evolução temporal do valor esperado para o número relativo de bósons entre os condensados com $U = 0.3$, $N = 20$, e diferentes estados iniciais

A razão para a variação do valor esperado de partículas no poço 2 pode ser visualizada no gráfico das bandas de energia na figura 4.5, onde cada uma das bandas é determinada pela população inicial de bósons no poço 2, já que todos os estados dentro das bandas de energia possuem, aproximadamente, $\langle N_2 \rangle \approx l$ ou $\langle N_2 \rangle \approx N - l$. O regime ressonante só ocorre quando temos a banda separada e bem definida, ou seja, para cada escolha do valor de l , teremos um limite diferente do parâmetro U para que o regime de tunelamento ressonante entre as partículas dos poços 1 e 3 aconteça, de forma que o valor esperado de partículas no poço 2 se mantém constante. Sendo assim, temos que a condição para a ocorrência do regime ressonante se torna $U|N - 2l| \gg J$.

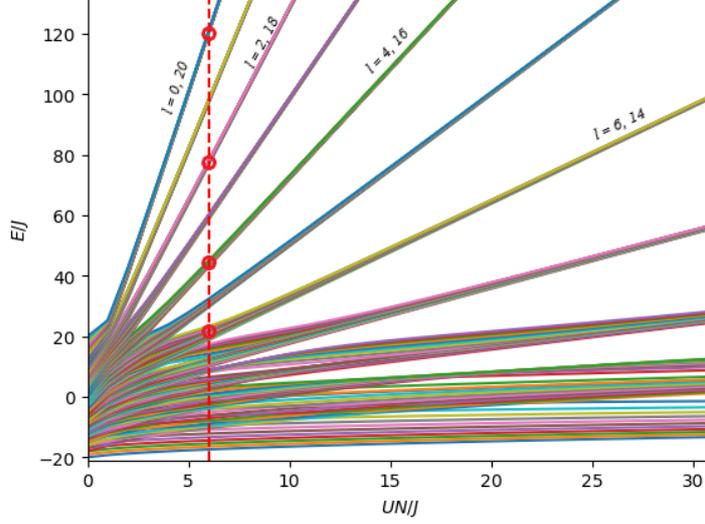


Figura 4.5: Distribuição de energia do sistema como função do parâmetro de interação χ , considerando $N = 20$. A linha vermelha representa $\chi = 6$.

Podemos observar que para $l = 0$, a banda de energia é separada e bem definida para $\chi = 6$, entretanto, para $l = 6$, não temos uma banda de energia separada e bem definida, o que causa a variação no valor esperado de partículas no poço 2.

A partir da identificação do regime de tunelamento ressonante das partículas e da condição para sua ocorrência, estamos interessados agora em determinar um hamiltoniano efetivo que descreva sua dinâmica com sucesso.

4.2.3 Hamiltoniano Efetivo e Interpretação da Carga Conservada

Como vimos, o regime de tunelamento ressonante das partículas entre os poços 1 e 3 ocorre quando o termo de interação do hamiltoniano (3.1.1) domina sobre o termo de tunelamento, dessa forma, podemos considerar o termo de tunelamento como uma pequena perturbação frente ao termo de interação. Sendo assim, podemos reescrever o hamiltoniano para $\mu = 0$, como:

$$H = H_i + V, \quad H_i = U(N - 2N_2)^2, \quad V = J(a_{1,3}^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_{1,3}), \quad (4.2.2)$$

onde H_i representa a parte de interação e V representa a parte de tunelamento do hamiltoniano. Usando a condição inicial $N_{1,3}(t = 0) \approx N$, temos que para o termo de interação:

$$H_i |N_1, N_2, N_3\rangle = UN^2 |N_1, N_2, N_3\rangle, \quad (4.2.3)$$

ou seja, a menos de uma constante global UN^2 , é possível obter um hamiltoniano efetivo que leve apenas os termos de tunelamento em consideração. No regime ressonante temos que $\langle N_{1,3} \rangle$ é aproximadamente constante, como nossa condição inicial é $N_{1,3} \approx N$, o tunelamento dos bósons vai acontecer apenas entre os

poços 1 e 3, de forma que o hamiltoniano efetivo do regime assume a forma:

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (4.2.4)$$

Já que é possível considerar o termo de tunelamento como uma pequena perturbação, podemos usar teoria de perturbação dependente do tempo para investigar a taxa de transição entre dois estados, considerando processos de segunda ordem. Lembrando que a taxa de transição entre os estados $|s\rangle \rightarrow |f\rangle$, em i -ésima ordem, é dada por:

$$W_{s \rightarrow f}^{(i)} = 2\pi |\langle f | V^{(i)} | s \rangle|^2 \delta(E_f - E_s). \quad (4.2.5)$$

Em primeira ordem, temos que $V^{(1)} = V$ (regra de ouro de Fermi). Já para as transições de segunda ordem, temos que:

$$V^{(2)} = \sum_m \frac{V | m \rangle \langle m | V}{E_s - E_m}. \quad (4.2.6)$$

Para encontrar o hamiltoniano efetivo, iremos calcular explicitamente os elementos de matriz para V e H_{eff} de mais baixa ordem e não nulos, fazendo uma igualdade entre os resultados obtidos, de maneira a determinar o parâmetro de tunelamento efetivo, J_{eff} . Utilizando o potencial perturbativo, a taxa de transição em primeira ordem entre os estados $|N-l, l, 0\rangle$ e $|N-l-1, l, 1\rangle$ é dada por:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= 2\pi \langle N-l-1, l, 1 | V^{(1)} | N-l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 2\pi \langle N-l-1, l, 1 | V | N-l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Ou seja, não há transição de primeira ordem entre as partículas dos poços 1 e 3 considerando o potencial perturbativo V . Considerando agora transições de segunda ordem para o potencial perturbativo, a taxa de transição entre os estados é calculada por (4.2.6) e (4.2.7), da forma:

$$W^{(2)} = 2\pi \sum_{N_1, N_2, N_3} \frac{\langle N-l-1, l, 1 | V | N_1, N_2, N_3 \rangle \langle N_1, N_2, N_3 | V | N-l, l, 0 \rangle}{E_{N-l, l, 0} - E_{N_1, N_2, N_3}}, \quad (4.2.8)$$

onde a soma é realizada sob a restrição do número total de partículas do sistema, $N_1 + N_2 + N_3 = N$. Portanto, em segunda ordem, a taxa de transição entre os estados é dada por (os detalhes completos do cálculo são expostos no apêndice B):

$$W^{(2)} = 2\pi \lambda_l \alpha_1 \alpha_3 \sqrt{N-l}, \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left(\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right). \quad (4.2.9)$$

Agora, considerando transições entre os estados $|N-l, l, 0\rangle$ e $|N-l-1, l, 1\rangle$ em primeira ordem utilizando o hamiltoniano efetivo (4.2.5), obtemos que a taxa de transição resulta em:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= 2\pi \langle N-l-1, l, 1 | H_{\text{eff}}^{(1)} | N-l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 2\pi \langle N-l-1, l, 1 | H_{\text{eff}} | N-l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 2\pi J_{\text{eff}} \sqrt{N-l}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Comparando os resultados obtidos para as taxas de transição de mais baixa ordem e não-nulas, em (4.2.10)

e (4.2.11), obtemos a seguinte relação para o parâmetro de tunelamento efetivo:

$$J_{\text{eff}} = \lambda_l \alpha_1 \alpha_3, \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left(\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right). \quad (4.2.11)$$

Com o parâmetro J_{eff} determinado, temos que o hamiltoniano efetivo que governa a dinâmica do regime ressonante entre as partículas dos poços 1 e 3 é dado por:

$$H_{\text{eff}} = \lambda_l \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left[\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right]. \quad (4.2.12)$$

Portanto, de maneira a verificar a validade dos resultados obtidos para o regime ressonante, iremos realizar uma comparação entre as dinâmicas quânticas governadas pelo hamiltoniano (3.1.1) e pelo hamiltoniano efetivo (4.2.13). Para esta comparação, foram traçados os gráficos abaixo, para o estado inicial $|18, 2, 0\rangle$ e $U = 1.2$:

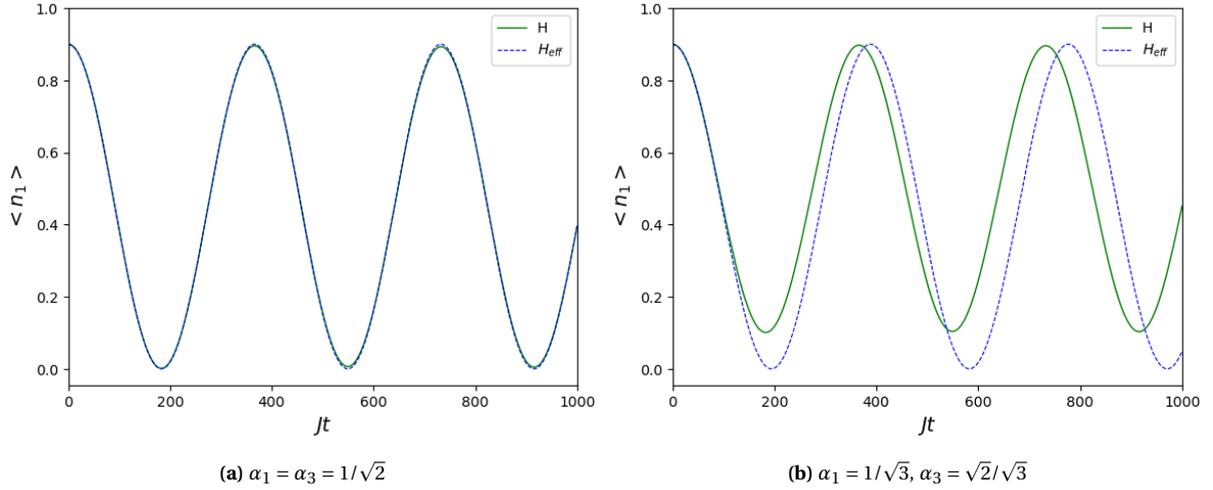


Figura 4.6: Comparação das dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original (3.1.1) e pelo hamiltoniano efetivo (4.2.13). Temos o caso isotrópico na esquerda e o anisotrópico na direita.

Pela figura 4.6, podemos ver que o hamiltoniano efetivo obtido através de teoria de perturbação dependente do tempo descreve bem a dinâmica do hamiltoniano original para o caso isotrópico. Entretanto, quando tratamos do caso anisotrópico, é perceptível que a utilização do hamiltoniano efetivo não concorda com a dinâmica do hamiltoniano original. Isso ocorre pois a expressão de H_{eff} envolve apenas um termo de tunelamento comum a todos operadores bosônicos, o que não leva em conta possíveis anisotropias do sistema. Por conta dessa discrepância no caso anisotrópico, percebemos que a modelagem correta para um hamiltoniano efetivo, levando em consideração o caso isotrópico e o anisotrópico, se dá pela utilização da carga conservada Q (3.1.34), sendo:

$$H_{\text{eff}} = -\lambda_l Q, \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left[\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right], \quad (4.2.13)$$

Entretanto, a verificação da validade do uso da carga conservada Q como hamiltoniano efetivo se dá apenas de maneira numérica, não sendo possível realizar qualquer conexão algébrica partindo da expressão para Q de forma a se obter uma equação completa para H_{eff} .

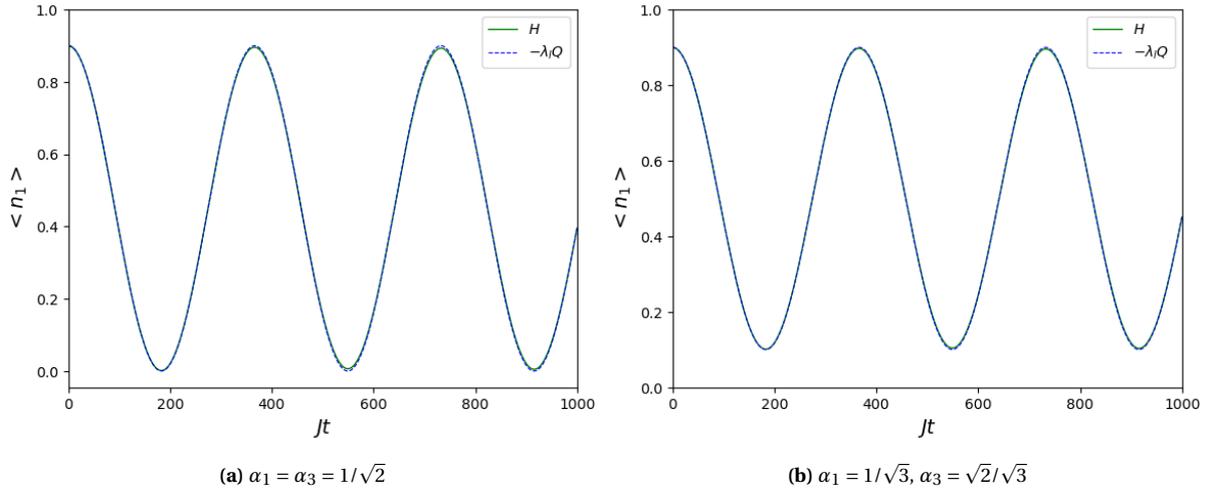


Figura 4.7: Comparação das dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original (3.1.1) e pelo hamiltoniano efetivo (4.2.15).

Dessa forma, é possível perceber pela figura 4.7 a equivalência entre as dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original e por $-\lambda_l Q$, contemplando possíveis anisotropias do sistema. Portanto, pela equação (4.2.14), temos que a carga conservada Q , enquanto operador de translação temporal, corresponde ao hamiltoniano efetivo sob as condições para a ocorrência do regime ressonante.

4.3 DINÂMICA DO MODELO DE QUATRO POÇOS

4.3.1 Distribuição de Energia do Hamiltoniano

Novamente podemos realizar uma análise sobre os regimes dinâmicos do sistema, desta vez para o modelo de quatro poços, com base nos níveis de energia do hamiltoniano que o descreve. Sendo assim, traçamos gráficos da distribuição ordenada dos níveis de energia do hamiltoniano (3.2.1) para diferentes valores do parâmetro de interação U na figura 4.8, onde é possível visualizar um comportamento bem semelhante ao modelo de três poços. Para $U = 0$ observamos níveis energéticos altamente degenerados e com intervalos uniformes de energia entre níveis adjacentes, caracterizando o regime de Rabi. Quando temos $U = 0.05$, o sistema apresenta um espectro aproximadamente contínuo dos seus níveis de energia, representando o regime Josephson de tunelamento. Para maiores valores do parâmetro de interação, conseguimos observar novamente o surgimento de bandas de energia, presentes nos níveis mais energéticos quando $U = 0.2$ e também em níveis menos energéticos quando $U = 0.5$, estruturas características do regime de Fock.

A discussão é complementada com a figura 4.9, onde traçamos a distribuição de energia do hamiltoniano em função dos valores do parâmetro de interação. Observa-se o alto grau de degenerescência e intervalos uniformes de energia para $U = 0$. Quando temos $U = 0.05$, visualizamos uma distribuição aproximadamente uniforme, sucedida pelo surgimento das estruturas de bandas para valores maiores do parâmetro de interação, que se manifestam nos níveis mais energéticos do sistema quando $U = 0.2$. Para $U = 0.5$, a distribuição dos níveis de energia é praticamente toda caracterizada pela estrutura de bandas de energia, estando de acordo com os resultados da figura 4.8.

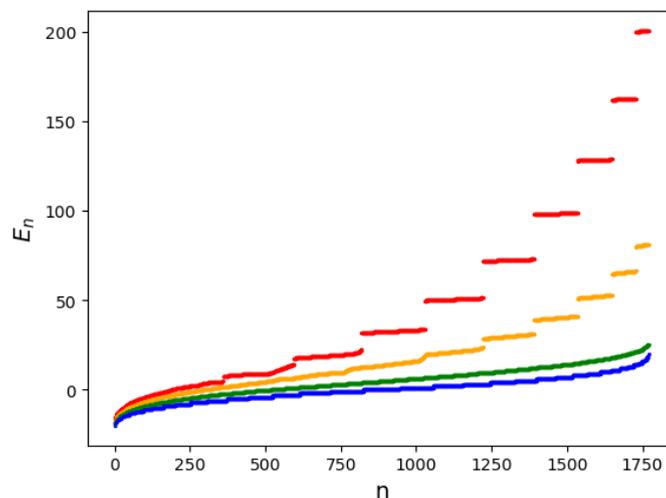


Figura 4.8: Distribuição ordenada dos níveis de energia do hamiltoniano para um sistema com $N = 20$. A linha vermelha representa $U = 0.5$, a linha amarela $U = 0.2$, a linha verde $U = 0.05$ e a linha azul $U = 0$.

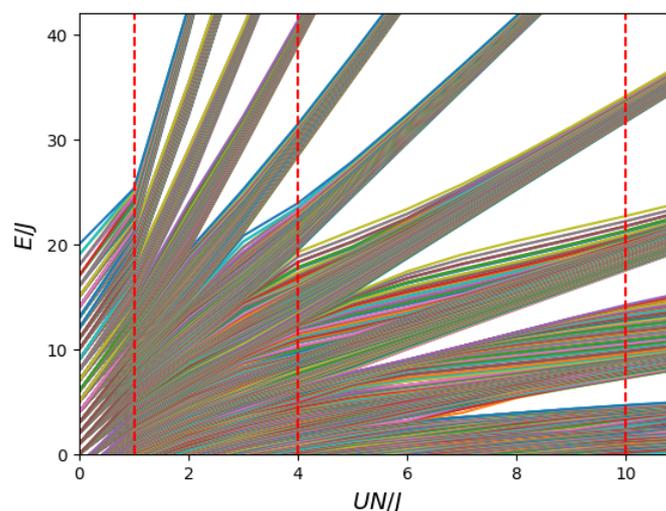


Figura 4.9: Distribuição dos níveis de energia do hamiltoniano em função do parâmetro U para um sistema com $N = 20$. As linhas vermelhas representam $U = 0.05$, $U = 0.2$ e $U = 0.5$.

4.3.2 Dinâmica Quântica do Hamiltoniano

Novamente, estamos interessados em conduzir um estudo acerca da dinâmica de tunelamento no modelo de quatro poços, que se dá através da diagonalização exata do hamiltoniano (3.2.1). Definimos um estado inicial geral para o sistema em termos dos vetores base do espaço de Fock, dado por:

$$|\psi_0\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{M-l}}{\sqrt{(M-l)!}} \frac{(a_2^\dagger)^{P-k}}{\sqrt{(P-k)!}} \frac{(a_3^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} \frac{(a_4^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0, 0, 0, 0\rangle = |M-l, P-k, l, k\rangle, \quad (4.3.1)$$

onde M denota a quantidade de partículas nos poços 1 e 3 e P denota a quantidade de partículas nos poços 2 e 4. Novamente, a evolução temporal do valor esperado do número de partículas em cada um dos poços é computada por (4.0.4) e assim, somos capazes de estudar a dinâmica do modelo de quatro poços para diferentes condições iniciais, identificando a influência de populações iniciais distintas nos poços sobre os regimes dinâmicos do sistema. Iniciamos realizando a dinâmica do sistema considerando o estado inicial $|N, 0, 0, 0\rangle$ para diferentes valores do parâmetro de interação, U . Na figura 4.10 foram traçados os gráficos da evolução temporal do valor esperado do número de partículas em cada um dos poços para $N = 20$, $\mu = 0$, $J = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/\sqrt{2}$:

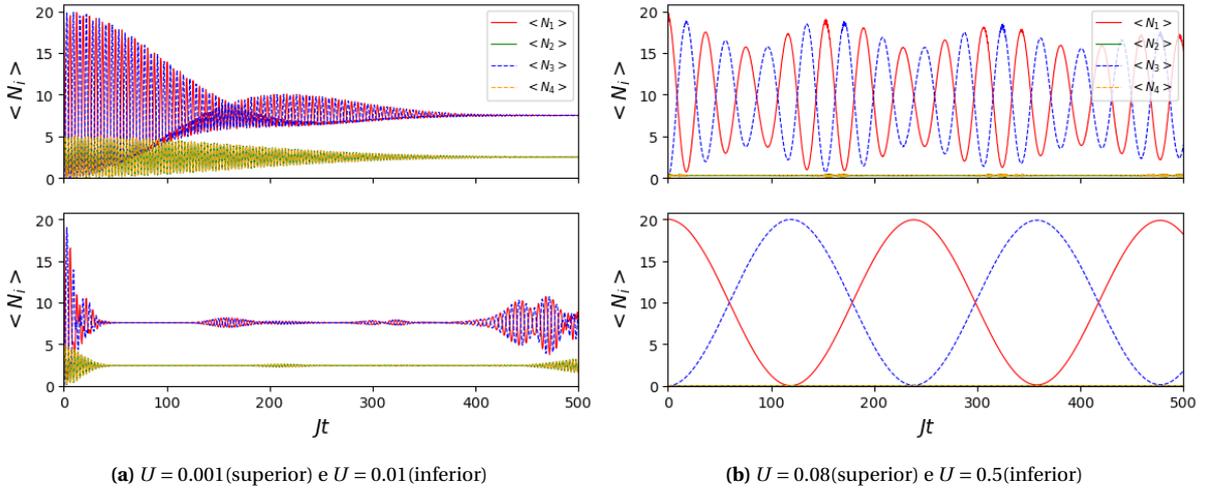


Figura 4.10: Evolução temporal do valor esperado do número de partículas em cada um dos poços para diferentes valores do parâmetro de interação e $N = 20$.

Para $U = 0.001$, o termo de tunelamento do hamiltoniano domina sobre o termo de interação, ocasionando em um aumento da frequência de tunelamento, causando um acúmulo de bósons nos poços 3 e 4, que inicialmente estavam vazios e também percebe-se que a dinâmica cessa quando o sistema atinge $\langle N_1 \rangle = \langle N_3 \rangle$ e $\langle N_2 \rangle = \langle N_4 \rangle$. Já para $U = 0.01$, observamos que existe um equilíbrio entre o termo de tunelamento e o termo de interação, de forma que a fase transiente é extremamente rápida, seguida de um estado estável prolongado, que dá lugar ao ressurgimento da dinâmica de tunelamento das partículas entre os poços. Quando temos valores maiores de U , visualizamos um claro domínio do termo de interação sobre o termo de tunelamento do hamiltoniano, de forma que a frequência de tunelamento diminui consideravelmente e o valor esperado de partículas nos poços 2 e 4 tende a zero, indicando novamente o surgimento de um regime de tunelamento ressonante entre os bósons dos poços 1 e 3.

Como visto anteriormente, o regime de auto-aprisionamento das partículas nos poços ocorre quando o termo de interação domina sobre o termo de tunelamento no modelo de Bose-Hubbard de dois sítios. Assim, podemos novamente organizar o sistema em uma estrutura de dois modos, com os poços 1 e 3 formando a classe de poços “1,3” e os poços 2 e 4 formando a classe de poços “2,4”. Portanto, como o estado inicial só contém partículas na classe de poços “1,3”, a quantidade $N_{1,3}$ será conservada, já que as partículas permanecerão aprisionadas nesse subsistema de poços, de forma que o tunelamento de bósons ocorrerá apenas entre os poços

1 e 3. Consequentemente, a quantidade $N_{2,4}$ também será conservada, implicando em $\langle N_{2,4} \rangle = 0$ e concordando com os resultados do painel (d) da figura 4.10, caracterizando o regime de tunelamento ressonante. Quando consideramos o estado inicial apenas com partículas na classe de poços “2,4”, podemos observar que o regime ressonante ocorre entre os poços 2 e 4, de forma que $\langle N_{1,3} \rangle = 0$, conforme pode ser visualizado na figura 4.11:

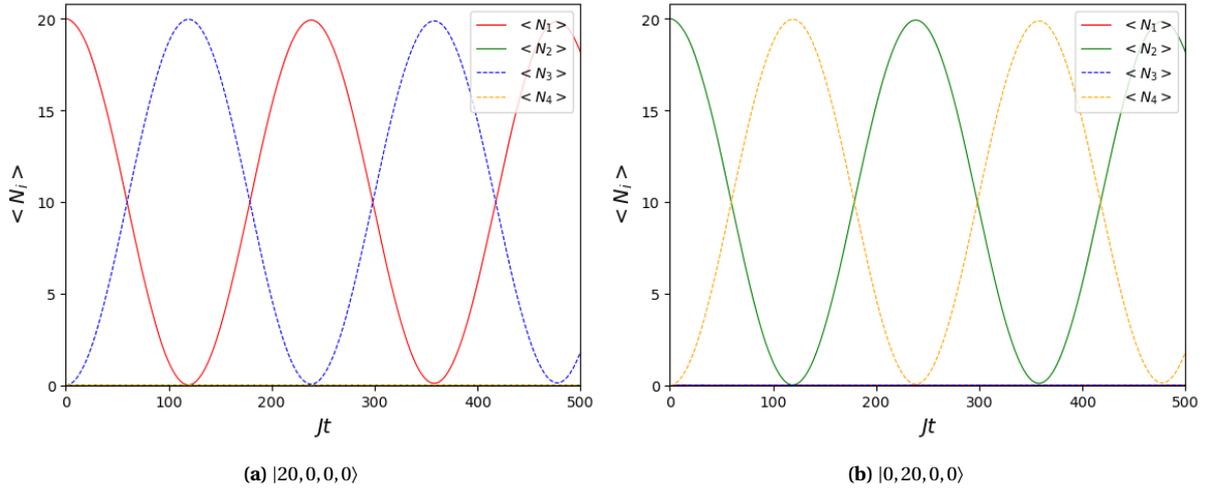


Figura 4.11: Dinâmicas do regime ressonante para diferentes estados iniciais, considerando $U = 0.5$.

Outro detalhe fundamental na compreensão da dinâmica do regime ressonante se dá ao utilizarmos estados iniciais que contenham partículas em ambas as classes de condensados. Podemos observar na figura 4.12 que ao utilizarmos um estado inicial com partículas no poço 2, visualizamos uma alteração no comportamento da dinâmica do sistema, em que é possível ver uma diminuição gradual na amplitude de tunelamento até que o sistema atinge $\langle N_1 - N_3 \rangle = \langle N_2 - N_4 \rangle = 0$ no instante $t_m \approx 1602.21/J$. Em seguida, a dinâmica do sistema ressurge, aumentando a amplitude de de tunelamento gradualmente, caracterizando um regime de colapso e reparição do tunelamento no sistema.

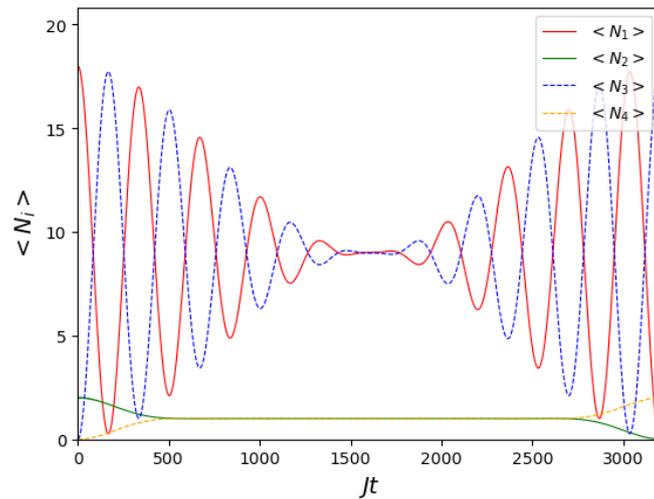


Figura 4.12: Evolução temporal do valor esperado de partículas para o estado inicial $|18, 2, 0, 0\rangle$ e $U = 1.0$.

Portanto, estamos novamente interessados em obter hamiltonianos efetivos que descrevam a dinâmica do regime ressonante para o modelo de quatro poços, tomando o cuidado para que eles sejam capazes de descrever com sucesso os fenômenos de tunelamento expostos nas figuras 4.11 e 4.12.

4.3.3 Hamiltoniano Efetivo e Interpretação das Cargas Conservadas

No regime de tunelamento ressonante, o termo de interação do hamiltoniano (3.2.1) domina sobre o termo de tunelamento, de maneira que podemos considerar o último como uma pequena perturbação. Sendo assim, realizando um procedimento análogo ao feito para o modelo de três poços, podemos reescrever o hamiltoniano para $\mu = 0$, a menos de uma constante global UN^2 , como:

$$H = H_i + V \quad (4.3.2)$$

$$H_i = -4U(N_1 + N_3)(N_2 + N_4), \quad V = J \left[(\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)(\alpha_2 a_2 + \alpha_4 a_4) + (\alpha_2 a_2^\dagger + \alpha_4 a_4^\dagger)(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3) \right],$$

onde H_i representa o termo de interação e V o termo de tunelamento do hamiltoniano. Para o termo de interação vale que:

$$H_i |N_1, N_2, N_3, N_4\rangle = E_{N_1, N_2, N_3, N_4} |N_1, N_2, N_3, N_4\rangle, \quad E_{N_1, N_2, N_3, N_4} = -4U(N_1 + N_3)(N_2 + N_4), \quad (4.3.3)$$

e assim podemos determinar um hamiltoniano efetivo que leve em conta apenas o termo de tunelamento do hamiltoniano. De acordo com a equação (4.2.3), o hamiltoniano pode ser expresso em uma estrutura de dois modos, de forma que o sistema apresenta um regime de auto-aprisionamento para $UN \gg J$. Ou seja, para o estado inicial $|N, 0, 0, 0\rangle$, os bósons permanecerão aprisionados nos poços da classe “1,3”, tunelando entre eles de forma ressonante. Já para o estado inicial $|0, N, 0, 0\rangle$, os bósons permanecerão aprisionados nos poços da classe “2,4”, novamente em um regime de tunelamento ressonante. Estamos interessados em obter hamiltonianos efetivos que descrevam a dinâmica de cada um dos regimes, portanto, definimos os dois hamiltonianos efetivos como:

$$H_{\text{eff}}^{1,3} = J_{\text{eff}}^{1,3} (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \quad (4.3.4)$$

$$H_{\text{eff}}^{2,4} = J_{\text{eff}}^{2,4} (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2),$$

onde $H_{\text{eff}}^{1,3}$ denota o hamiltoniano efetivo do regime ressonante para o estado inicial $|N, 0, 0, 0\rangle$ e $H_{\text{eff}}^{2,4}$ para o estado inicial $|0, N, 0, 0\rangle$. Repetindo o procedimento feito na seção (4.2.3), considerando o hamiltoniano efetivo e os estados $|N, 0, 0, 0\rangle$ e $|N-1, 0, 1, 0\rangle$, obtemos que, em primeira ordem, a taxa de transição entre os estados é dada por:

$$W^{(1)} = 2\pi \langle N-1, 0, 1, 0 | H_{\text{eff}}^{(1)} | N, 0, 0, 0 \rangle,$$

$$W^{(1)} = 2\pi \langle N-1, 0, 1, 0 | H_{\text{eff}}^{1,3} | N, 0, 0, 0 \rangle, \quad (4.3.5)$$

$$W^{(1)} = 2\pi J_{\text{eff}}^{1,3} \sqrt{N}.$$

Já para o potencial perturbativo, considerando transições de primeira ordem, obtemos:

$$W^{(1)} = 2\pi \langle N-1, 0, 1, 0 | V^{(1)} | N, 0, 0, 0 \rangle,$$

$$W^{(1)} = 2\pi \langle N-1, 0, 1, 0 | V | N, 0, 0, 0 \rangle, \quad (4.3.6)$$

$$W^{(1)} = 0,$$

e vemos que não existe transição em primeira ordem entre os estados $|N, 0, 0, 0\rangle$ e $|N - 1, 0, 1, 0\rangle$. Considerando as transições de segunda ordem, obtemos que a taxa de transição entre os estados, calculada por (4.2.6) e (4.2.7), é dada por:

$$W^{(2)} = 2\pi \sum_{N_1, N_2, N_3, N_4} \frac{\langle N - 1, 0, 1, 0 | V | N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \langle N_1, N_2, N_3, N_4 | V | N, 0, 0, 0 \rangle}{E_{N, 0, 0, 0} - E_{N_1, N_2, N_3, N_4}}, \quad (4.3.7)$$

tal que a somatória é feita sob a restrição do número total de partículas do sistema $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$. Dessa forma, a partir dos termos não-nulos da soma, encontramos que a taxa de transição em segunda ordem resulta em:

$$W^{(2)} = 2\pi \frac{J_1 J_3}{4U(N-1)} \sqrt{N}. \quad (4.3.8)$$

Comparando os resultados (4.3.7) e (4.3.10), obtemos uma expressão para o parâmetro de tunelamento efetivo:

$$J_{\text{eff}}^{1,3} = \lambda \alpha_1 \alpha_3, \quad \lambda = \frac{J^2}{4U(N-1)}. \quad (4.3.9)$$

Dessa forma, temos que o hamiltoniano efetivo para a classe de poços “1,3” assume a forma:

$$H_{\text{eff}}^{1,3} = \lambda \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (4.3.10)$$

De maneira análoga, considerando os estados $|0, N, 0, 0\rangle$ e $|0, N - 1, 0, 1\rangle$, encontramos que o hamiltoniano efetivo que descreve o regime de tunelamento ressonante para a classe “2,4” é:

$$H_{\text{eff}}^{2,4} = \lambda \alpha_2 \alpha_4 (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \quad (4.3.11)$$

De maneira a verificar a validade dos resultados obtidos, fizemos a comparação entre as dinâmicas regidas pelo hamiltoniano efetivo (4.3.12) e pelo hamiltoniano original (3.2.1), para o caso isotrópico e para o caso anisotrópico, considerando o estado inicial $|20, 0, 0, 0\rangle$ e $U = 0.5$.

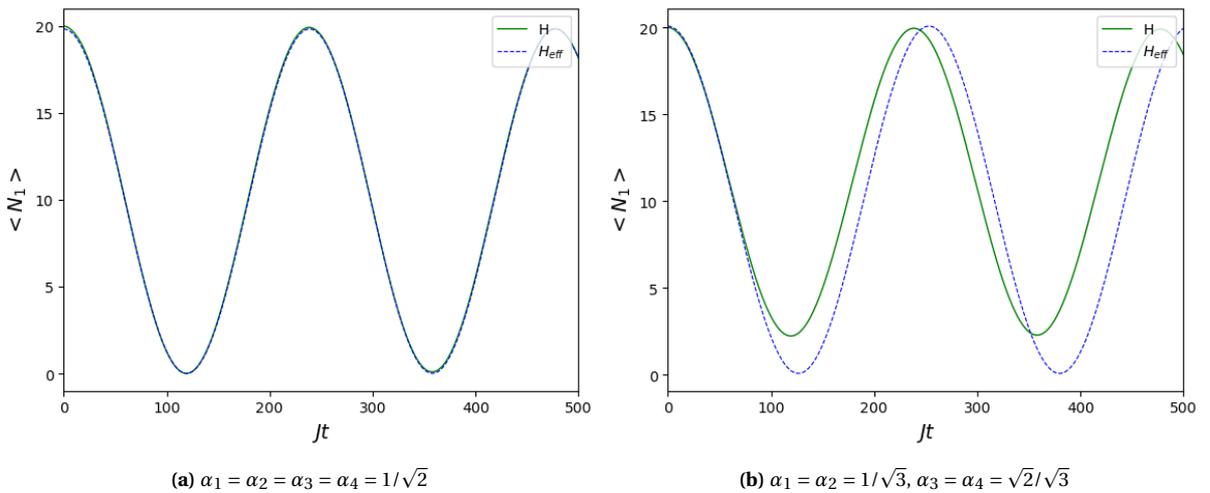


Figura 4.13: Comparação das dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original e do hamiltoniano efetivo da classe “1,3”.

Como podemos ver na figura 4.13, o hamiltoniano efetivo obtido através da teoria de perturbação dependente do tempo novamente não descreve a dinâmica do sistema anisotrópico de maneira satisfatória. Por essa discrepância, percebemos por inspeção numérica que, para o regime ressonante, a dinâmica de tunelamento entre os condensados da classe “1,3” é governada pela quantidade conservada $Q_{1,3}$, que atua como um hamiltoniano efetivo:

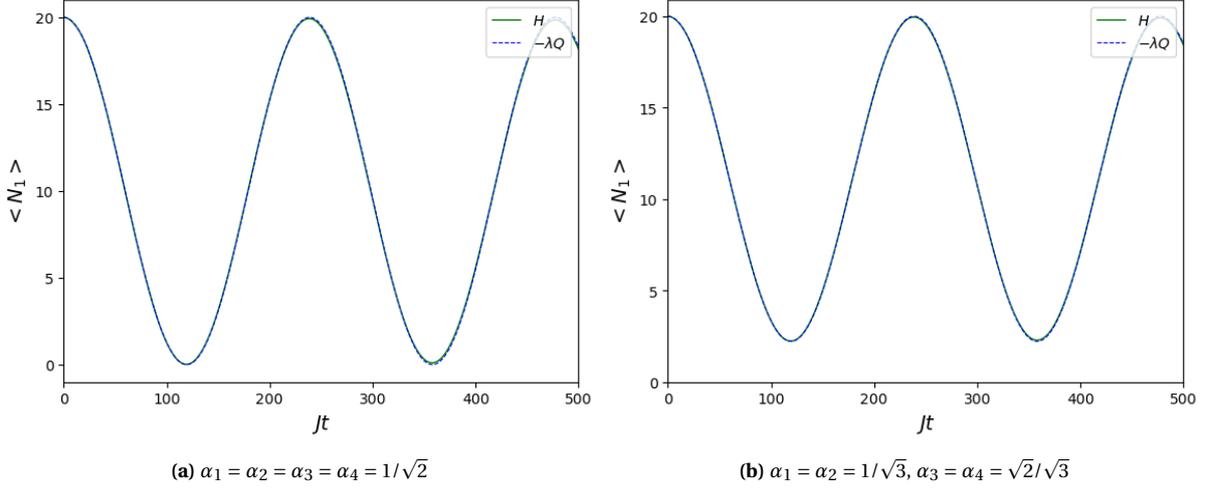


Figura 4.14: Comparação das dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original e pela quantidade conservada $Q_{1,3}$.

A análise da figura 4.14 deixa claro que a carga $Q_{1,3}$, enquanto operador de translação temporal, atua como o hamiltoniano efetivo para o regime de tunelamento ressonante para o estado inicial $|N, 0, 0, 0\rangle$. Os mesmos resultados são obtidos através da utilização de $H_{\text{eff}}^{2,4}$ e $Q_{2,4}$. Sendo assim temos que os hamiltonianos que descrevem a dinâmica para o regime ressonante para os estados iniciais $|N, 0, 0, 0\rangle$ e $|0, N, 0, 0\rangle$ são dados por:

$$H_{\text{eff}}^{1,3} = -\lambda Q_{1,3}, \quad H_{\text{eff}}^{2,4} = -\lambda Q_{2,4}, \quad \lambda = \frac{J^2}{4U(N-1)}. \quad (4.3.12)$$

Ao determinarmos os hamiltonianos efetivos levamos apenas em consideração estados iniciais que contém partículas apenas em uma das classes de poços, de forma que esses falham ao tentar descrever a dinâmica do regime ressonante para um estado inicial geral que possua partículas em todos os poços. Sendo assim, estamos interessados agora em determinar um hamiltoniano efetivo que descreva da dinâmica do regime ressonante para um estado inicial geral, dado por (4.3.1). Novamente iremos utilizar teoria de perturbação dependente do tempo para encontrar as taxas de transição, em primeira e segunda ordem, entre dois estados, mas desta vez iremos considerar a transição de estados para quatro casos distintos, de maneira a obtermos uma expressão completa para o hamiltoniano efetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & |M-l, P-K, l, K\rangle \rightarrow |M-l-1, P-K, l+1, K\rangle; \\
 \text{(ii)} \quad & |M-l, P-K, l, K\rangle \rightarrow |M-l, P-K-1, l, K+1\rangle; \\
 \text{(iii)} \quad & |M-l, P-K, l, K\rangle \rightarrow |M-l+1, P-K-1, l-1, K+1\rangle; \\
 \text{(iv)} \quad & |M-l, P-K, l, K\rangle \rightarrow |M-l+1, P-K+1, l-1, K-1\rangle.
 \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

De maneira a simplificar a notação, iremos utilizar $|s^{(i)}\rangle$ e $|f^{(i)}\rangle$ para denotar o estado inicial e final de cada um dos casos considerados. Para a transição entre os estados do caso (i), o hamiltoniano efetivo assume a forma:

$$H_{\text{eff}}^{(i)} = J_{\text{eff}}^{(i)}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (4.3.14)$$

Já para os estados do caso (ii), temos:

$$H_{\text{eff}}^{(ii)} = J_{\text{eff}}^{(ii)}(a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \quad (4.3.15)$$

Para os estados do caso (iii), temos o seguinte hamiltoniano efetivo:

$$H_{\text{eff}}^{(iii)} = J_{\text{eff}}^{(iii)}(a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4). \quad (4.3.16)$$

E, finalmente, para os estados do caso (iv), o hamiltoniano efetivo é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(iv)} = J_{\text{eff}}^{(iv)}(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger). \quad (4.3.17)$$

Novamente iremos calcular a taxa de transição entre os estados utilizando a equação (4.2.6) e comparar os resultados de mais baixa ordem utilizando os hamiltonianos efetivos e o termo de tunelamento do hamiltoniano como potencial perturbativo do sistema. Em primeira ordem, temos a regra de ouro de Fermi e para transições de segunda ordem, o potencial perturbativo é dado pela equação (4.2.7). Em primeira ordem, temos que as taxas de transição entre os estados, considerando o potencial perturbativo, são:

$$\langle f^{(i)} | V^{(1)} | s^{(i)} \rangle = \langle f^{(ii)} | V^{(1)} | s^{(ii)} \rangle = \langle f^{(iii)} | V^{(1)} | s^{(iii)} \rangle = 0. \quad (4.3.18)$$

Ou seja, em primeira ordem, não existe transição entre os estados para nenhum dos três casos. Já para as transições de segunda ordem do caso (i), encontramos (ver apêndice B para o cálculo exposto em detalhes):

$$\langle f^{(i)} | V^{(2)} | s^{(i)} \rangle = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{M-P-1} - \frac{P}{M-P+1} \right] \sqrt{(l+1)(M-l)}. \quad (4.3.19)$$

Agora calculando a taxa de transição entre os estados do caso (i) em primeira ordem, usando o hamiltoniano efetivo (4.3.15), obtemos:

$$\langle f^{(i)} | H_{\text{eff}}^{(i)} | s^{(i)} \rangle = J_{\text{eff}}^{(i)} \sqrt{(l+1)(M-l)}. \quad (4.3.20)$$

Comparando os resultados obtidos em (4.3.19) e (4.3.20), determinamos o parâmetro de tunelamento efetivo, que é dado por:

$$J_{\text{eff}}^{(i)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{M-P-1} - \frac{P}{M-P+1} \right]. \quad (4.3.21)$$

Portanto, o hamiltoniano efetivo para o caso (i) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(i)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{M-P-1} - \frac{P}{M-P+1} \right] (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (4.3.22)$$

Repetimos todo o processo para os estados do caso (ii), em que a taxa de transição em segunda ordem,

considerando o potencial perturbativo, é dada por:

$$\langle f^{(ii)} | V^{(2)} | s^{(ii)} \rangle = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{M}{M-P-1} - \frac{M+2}{M-P+1} \right] \sqrt{(K+1)(P-K)}. \quad (4.3.23)$$

Já para o hamiltoniano efetivo (4.3.16), encontramos que a taxa de transição é:

$$\langle f^{(ii)} | H_{\text{eff}}^{(ii)} | s^{(ii)} \rangle = J_{\text{eff}}^{(ii)} \sqrt{(K+1)(P-K)}. \quad (4.3.24)$$

Comparando os dois resultados obtidos para o caso (ii), encontramos a expressão para $J_{\text{eff}}^{(ii)}$:

$$J_{\text{eff}}^{(ii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{M}{M-P-1} - \frac{M+2}{M-P+1} \right]. \quad (4.3.25)$$

Ou seja, o hamiltoniano efetivo que descreve o tunelamento entre os estados do caso (ii) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(ii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{N-P}{N-2P-1} - \frac{N-P+2}{N-2P+1} \right] (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \quad (4.3.26)$$

Por fim, considerando os estados do caso (iii), repetimos o processo e encontramos que a taxa de transição em segunda entre os estados, considerando o potencial perturbativo, é:

$$\langle f^{(iii)} | V^{(2)} | s^{(iii)} \rangle = \frac{J^2}{16U} \sqrt{(N-P-l+1)(P-K)l(K+1)} \left[\frac{1}{N-2P-1} - \frac{1}{N-2P+1} \right]. \quad (4.3.27)$$

Calculando diretamente a taxa de transição entre os estados do caso (iii) utilizando o hamiltoniano efetivo, obtemos:

$$\langle f^{(iii)} | H_{\text{eff}}^{(iii)} | s^{(iii)} \rangle = J_{\text{eff}}^{(iii)} \sqrt{(M-l+1)(P-K)l(K+1)}. \quad (4.3.28)$$

Novamente, comparando os dois resultados, obtemos uma expressão para $J_{\text{eff}}^{(iii)}$, que é dado por:

$$J_{\text{eff}}^{(iii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{M-P-1} - \frac{1}{M-P+1} \right]. \quad (4.3.29)$$

E assim, temos que o hamiltoniano efetivo para o tunelamento entre os estados do caso (iii) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(iii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{M-P-1} - \frac{1}{M-P+1} \right] (a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4). \quad (4.3.30)$$

Para os estados do caso (iv), o cálculo é similar ao caso (iii) e resulta no mesmo resultado para J_{eff} , de forma que o hamiltoniano efetivo se torna:

$$H_{\text{eff}}^{(iv)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{M-P-1} - \frac{1}{M-P+1} \right] (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger). \quad (4.3.31)$$

Como cada um dos casos considerados representa a transição entre dois estados distintos, podemos escrever um hamiltoniano efetivo geral que descreva o regime de tunelamento ressonante para todos os casos, a partir

da soma dos quatro hamiltonianos efetivos obtidos, dado por:

$$H_{\text{eff}} = \frac{J^2}{16U} \left[\left(\frac{P+2}{M-P-1} - \frac{P}{M-P+1} \right) (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) + \left(\frac{M}{M-P-1} - \frac{M+2}{M-P+1} \right) (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{M-P-1} - \frac{1}{M-P+1} \right) (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger) \right]. \quad (4.3.32)$$

Nota-se que o hamiltoniano efetivo obtido é invariante frente a troca dos índices $1 \longleftrightarrow 2$ e $3 \longleftrightarrow 4$, junto com $P \longleftrightarrow M$. Podemos expressar o hamiltoniano efetivo em função das cargas conservadas do sistema, fazemos isso a partir das seguintes identificações:

$$\begin{aligned} 2Q_{1,3} &= N_1 + N_3 - a_1^\dagger a_3 + a_1 a_3^\dagger = M - a_1^\dagger a_3 + a_1 a_3^\dagger, \\ 2Q_{2,4} &= N_2 + N_4 - a_2^\dagger a_4 + a_2 a_4^\dagger = P - a_2^\dagger a_4 + a_2 a_4^\dagger, \\ 4Q_{1,3}Q_{2,4} &= MP - P(M - 2Q_{1,3}) - M(P - 2Q_{2,4}) + a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Com isso, somos capazes de reescrever o hamiltoniano efetivo como:

$$H_{\text{eff}} = \frac{J^2}{4U} \frac{1}{(M-P)^2 - 1} [(N+1)(Q_{1,3} + Q_{2,4}) - 2Q_{1,3}Q_{2,4} + (M-1)M + (P-1)P + MP]. \quad (4.3.34)$$

Dessa forma, a menos de uma constante, o hamiltoniano efetivo que descreve a dinâmica do regime ressonante para um estado inicial geral, é dado por:

$$H_{\text{eff}} = \Omega(N+1)(Q_{1,3} + Q_{2,4}) - 2\Omega Q_{1,3}Q_{2,4}, \quad \Omega = \frac{J^2}{4U} \frac{1}{(M-P)^2 - 1}. \quad (4.3.35)$$

Portanto, com o hamiltoniano efetivo calculado, somos capazes de realizar uma comparação entre a dinâmica descrita por ele e pelo hamiltoniano original (3.2.1), de maneira a verificar a validade dos resultados obtidos. Para isso, foi traçado o gráfico abaixo, que ilustra a comparação entre as dinâmicas, considerando o estado inicial $|18, 2, 0, 0\rangle$ e $U = 1.0$:

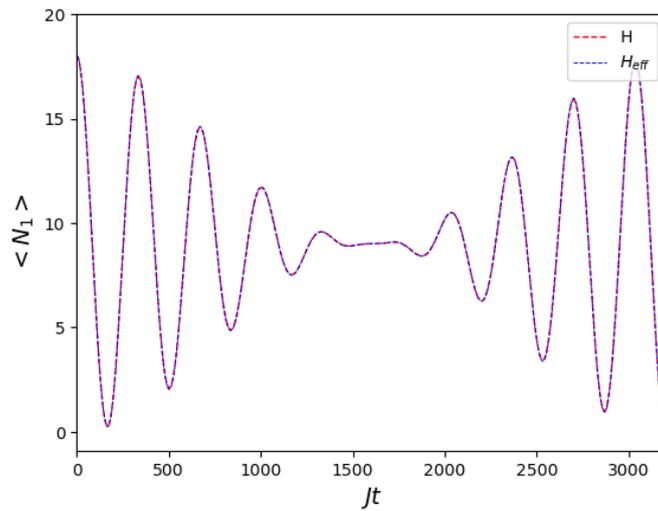


Figura 4.15: Comparação da dinâmica descrita pelo hamiltoniano original e pelo hamiltoniano efetivo, considerando o sistema com $N = 20$.

Na figura 4.15 podemos observar uma excelente concordância entre as dinâmicas descritas pelo hamiltoniano original e pelo hamiltoniano efetivo, de forma que o regime dinâmico de colapso e reparação pode ser explicado pelo termo proporcional à $Q_{1,3}Q_{2,4}$ da expressão (4.3.35), dando origem aos “batimentos” na dinâmica de tunelamento do sistema. Além disso, através do resultado obtido para o hamiltoniano efetivo, diversos resultados analíticos são possíveis, dentre eles, podemos ressaltar a obtenção de uma expressão analítica para a evolução temporal do valor esperado do desequilíbrio entre as populações dos poços 1 e 3 (cálculo exposto em detalhes no apêndice C), considerando um estado inicial $|M, P, 0, 0\rangle$, dada por:

$$\langle N_1 - N_3 \rangle = M \cos[(M + 1)\Omega t] [\cos(\Omega t)]^P. \quad (4.3.36)$$

A partir da expressão (4.3.36), observamos que o sistema atinge $\langle N_1 - N_3 \rangle = \langle N_2 - N_4 \rangle = 0$ periodicamente, em instantes de tempo dados por:

$$t_m = \frac{\pi n}{\Omega} - \frac{\pi}{2\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.37)$$

caracterizando o regime de colapso e reparação na dinâmica de tunelamento do regime ressonante do sistema. Podemos visualizar esse fenômeno na figura 4.16, em que traçamos o gráfico da evolução temporal do valor esperado do número de partículas em cada um dos poços para um intervalo de tempo maior do que o utilizado na figura 4.12, considerando o estado inicial $|18, 2, 0, 0\rangle$, $U = 1.0$:

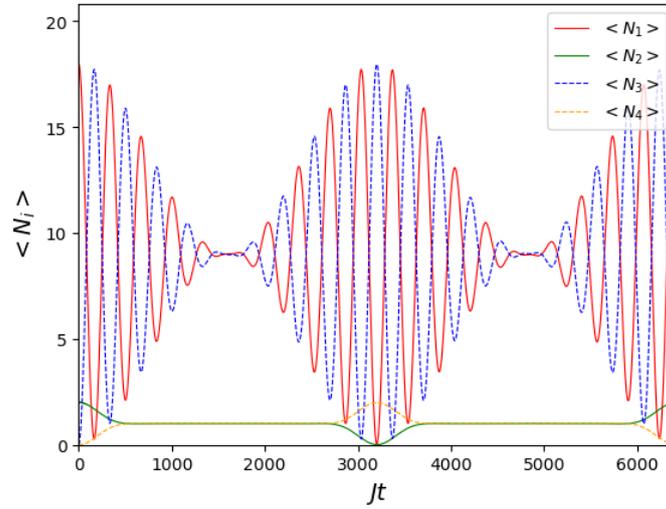


Figura 4.16: Fenômeno de colapso e reparação da dinâmica no modelo de quatro poços com $N = 20$ no regime ressonante.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho, realizamos um estudo sobre dois modelos integráveis de tunelamento quântico, compostos por condensados de Bose-Einstein, os modelos de três e quatro poços. Para cada um deles, determinamos o espectro completo de energias, através do método algébrico do *Ansatz* de Bethe, e todas as suas quantidades conservadas. Além disso, analisamos a dinâmica quântica dos modelos para diferentes valores dos parâmetros de acoplamento do hamiltoniano e diferentes condições iniciais, de forma que foi possível identificar o surgimento de regimes de tunelamento ressonante e obter hamiltonianos efetivos que descrevem a sua dinâmica, dados em termos das cargas conservadas dos modelos.

No capítulo 2 abordamos brevemente o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios, apresentando seu hamiltoniano e identificando seus termos. Ademais, discutimos a sua generalização em modelos de mais poços, os modelos de três e quatro poços, cujas soluções exatas são obtidas através de uma extensão feita ao método, e suas aplicações tecnológicas em sistemas atomotrônicos. Após isso, mostramos que os dois modelos, que são o foco principal deste trabalho, são casos particulares de um modelo geral que descreve um conjunto de modelos de $m + n$ poços, ligados por tunelamento quântico, que, sob certas condições, se tratam de modelos integráveis.

Então, já no capítulo 3, realizamos uma revisão sucinta do conceito de integrabilidade clássica, abordando as condições necessárias para que um sistema clássico seja integrável, também expomos as dificuldades que surgem naturalmente ao tentarmos implementar o conceito em sistemas quânticos. Dessa forma, adotando uma definição específica para a integrabilidade quântica, que se dá a partir da definição da quantidade de graus de liberdade do sistema como a quantidade de números quânticos que determinam univocamente os vetores base, fomos capazes de aplicar o Método do Espalhamento Quântico Inverso para obter, explicitamente, expressões analíticas para o espectro de energias dos hamiltonianos dos dois modelos estudados, sem que houvesse a necessidade de suas diagonalizações. A obtenção desses resultados só foi possível através de uma extensão feita ao método, por meio da utilizações de operadores extras, que acabaram por possibilitar a definição dos pseudo-vácuos utilizados. Além disso, esses mesmos operadores também nos fornecem todas as cargas conservadas dos modelos, satisfazendo a definição de integrabilidade quântica adotada aqui. Então, realizamos comparações entre as energias obtidas através do método e as energias obtidas pela diagonalização exata dos hamiltonianos, de maneira que ambos os resultados mostraram excelente concordância, comprovando a capacidade do método na obtenção das soluções exatas para os espectros de energias dos sistemas.

Finalmente, no capítulo 4, conduzimos um estudo acerca da dinâmica quântica dos dois modelos, em que foi possível identificar diferentes regimes de tunelamento nos modelos através da variação nos valores dos parâmetros de acoplamento de seus hamiltonianos, demonstrados por meio de suas distribuições de energia. Além do mais, através da evolução temporal do valor esperado de partículas em cada um dos poços, conseguimos analisar o comportamento da dinâmica de tunelamento dos modelos, considerando diferentes valores do parâmetro de interação e diferentes condições iniciais, de maneira que observamos o surgimento de regimes de tunelamento ressonante, quando o sistema apresenta $UN \gg J$. Por fim, fomos capazes de determinar hamiltonianos efetivos que descrevem a dinâmica dos regimes ressonantes para cada um dos modelos, que são dados em termos de suas cargas conservadas, de modo que se tornou possível analisar comportamentos particulares dos sistemas, como, por exemplo, investigar a influência de uma população inicial no poço 2 sobre a dinâmica do regime ressonante no modelo de três poços e a identificação e obtenção de expressões analíticas do regime de colapso e reaparição no modelo de quatro poços.

Durante a realização deste trabalho, além dos tópicos e resultados abordados aqui, outros assuntos acabaram sendo estudados, levantando dúvidas e despertando nossa curiosidade. Isso nos permitirá explorá-los em produções futuras, indicando um caminho com potencial muito rico para a sequência da pesquisa. Entre eles, podemos destacar o cálculo da dinâmica de emaranhamento gerada nos modelos, que é um recurso quântico fundamental, já que sustenta grande parte das propostas para implementação de novas tecnologias quânticas, computada através da entropia de Von-Neumann[31], utilizando duas abordagens distintas para o cálculo das matrizes de densidades dos sistemas [32][33], e também um estudo sobre a dependência par-ímpar do número de partículas sobre a dinâmica dos modelos.

Apêndice A

Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe

A.1 EQUAÇÃO DE YANG-BAXTER E RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

Neste apêndice, estamos interessados em obter as relações de comutação para os operadores componentes da matriz de monodromia, $T(u)$, necessários para a aplicação do método algébrico do *Ansatz* de Bethe, a partir da equação de Yang-Baxter (3.1.11). Para isso, iniciamos definindo os operadores de Lax, $L^A(u)$ e $L^B(u)$, para o hamiltoniano (2.0.1):

$$L^A(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_A & A \\ A^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix} \quad L^B(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_B & B \\ B^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.1})$$

Como visto anteriormente, a matriz de monodromia é dada por:

$$T(u) = L^A(u + \omega)L^B(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1(u) & T_2^1(u) \\ T_1^2(u) & T_2^2(u) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.2})$$

que por sua vez, deve satisfazer a Equação de Yang-Baxter (3.1.11):

$$R_{12}(u - v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u - v). \quad (\text{A.1.3})$$

A equação (A.1.3), escrita em forma matricial, assume a forma:

$$R(u - v)T(u) \otimes T(v) = (T(u) \otimes T(v))^{\text{op}}R(u - v), \quad (\text{A.1.4})$$

onde (...) ^{op} denota a operação de permutação da ordem dos operadores em cada entrada da matriz $T(u) \otimes T(v)$. Dessa forma, temos que o produto tensorial $T(u) \otimes T(v)$ é dado por:

$$T(u) \otimes T(v) = \begin{pmatrix} T_1^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} & T_2^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} \\ T_1^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} & T_2^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(v) & T_2^1(v) \\ T_1^2(v) & T_2^2(v) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.5})$$

$$T(u) \otimes T(v) = \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(v) & T_1^1(u)T_2^1(v) & T_2^1(u)T_1^1(v) & T_2^1(u)T_2^1(v) \\ T_1^1(u)T_1^2(v) & T_1^1(u)T_2^2(v) & T_2^1(u)T_1^2(v) & T_2^1(u)T_2^2(v) \\ T_1^2(u)T_1^1(v) & T_1^2(u)T_2^1(v) & T_2^2(u)T_1^1(v) & T_2^2(u)T_2^1(v) \\ T_1^2(u)T_1^2(v) & T_1^2(u)T_2^2(v) & T_2^2(u)T_1^2(v) & T_2^2(u)T_2^2(v) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.6})$$

Atuando (A.1.6) sobre (A.1.4), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-v) & c(u-v) & 0 \\ 0 & c(u-v) & b(u-v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(v) & T_1^1(u)T_2^1(v) & T_2^1(u)T_1^1(v) & T_2^1(u)T_2^1(v) \\ T_1^1(u)T_1^2(v) & T_1^1(u)T_2^2(v) & T_2^1(u)T_1^2(v) & T_2^1(u)T_2^2(v) \\ T_1^2(u)T_1^1(v) & T_1^2(u)T_2^1(v) & T_2^2(u)T_1^1(v) & T_2^2(u)T_2^1(v) \\ T_1^2(u)T_1^2(v) & T_1^2(u)T_2^2(v) & T_2^2(u)T_1^2(v) & T_2^2(u)T_2^2(v) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} T_1^1(v)T_1^1(u) & T_2^1(v)T_1^1(u) & T_1^1(v)T_2^1(u) & T_2^1(v)T_2^1(u) \\ T_1^2(v)T_1^1(u) & T_2^2(v)T_1^1(u) & T_1^2(v)T_2^1(u) & T_2^2(v)T_2^1(u) \\ T_1^1(v)T_1^2(u) & T_2^1(v)T_1^2(u) & T_1^1(v)T_2^2(u) & T_2^1(v)T_2^2(u) \\ T_1^2(v)T_1^2(u) & T_2^2(v)T_1^2(u) & T_1^2(v)T_2^2(u) & T_2^2(v)T_2^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-v) & c(u-v) & 0 \\ 0 & c(u-v) & b(u-v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.7})$$

A partir do produto de matrizes em (A.1.7), obtemos diversas igualdades e somos capazes de determinar várias relações de comutação, através da identificação dos operadores em (A.1.2). Dentre elas, destacamos as relações mais relevantes:

$$\begin{aligned} [A(u), A(v)] &= [B(u), B(v)] = [C(u), C(v)] = [D(u), D(v)] = 0, \\ A(u)C(v) &= \frac{u-v+\eta}{u-v}C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v}C(u)A(v), \\ D(v)C(u) &= \frac{\eta}{v-u}C(v)D(u) - \frac{u-v+\eta}{v-u}C(u)D(v). \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

Com estas relações de comutação determinadas, somos capazes de realizar o cálculo dos autovalores da matriz de transferência, $\tau(u)$, fundamentais para a aplicação do método algébrico do *Ansatz* de Bethe, conforme será exposto na seção seguinte deste apêndice.

A.2 AUTOVALORES DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA E A EQUAÇÃO DO *Ansatz* DE BETHE

O método algébrico do *Ansatz* de Bethe nos possibilita encontrar os autovalores de energia do hamiltoniano do sistema. Isso se dá com base na definição dos estados de Bethe, que são, por definição, auto-estados do hamiltoniano, portanto, como podemos escrever o hamiltoniano em termos da matriz de transferência, $\tau(u)$, impomos que o estado de Bethe também seja um auto-estado da última. A partir dessa imposição, surge naturalmente uma condição para sua satisfação, chamada de equação do *Ansatz* de Bethe, cuja solução nos fornece os parâmetros necessários para o cálculo dos autovalores da matriz de transferência.

Os estados de Bethe são definidos em termos dos pseudo-vácuos dos sistemas. Como cada um dos modelos estudados neste trabalho possui um pseudo-vácuo diferente, iremos calcular os autovalores da matriz de transferência em detalhes para cada um deles.

A.2.1 Modelo de Três Poços

Como visto anteriormente, o estado de Bethe para o modelo de três poços é dado por:

$$|\psi_l\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle, & l < N \\ |\phi_N\rangle, & l = N, \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

onde $|\phi_l\rangle = (\Gamma^\dagger)^l |0\rangle$, $\{l \leq N\}$ são os pseudo-vácuos e $\{v_i\}$ são o conjunto de soluções da equação do *Ansatz* de Bethe, que será apresentada na sequência. Aplicando o estado de Bethe (A.2.1) sobre a matriz de transferência, $\tau(u) = A(u) + D(u)$, obtemos:

$$\tau(u) |\psi_l\rangle = (A(u) + D(u)) |\psi_l\rangle = \lambda_l(u) |\psi_l\rangle. \quad (\text{A.2.2})$$

Para $l = N$, encontramos os seguintes autovalores para a matriz de transferência:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_N\rangle &= \lambda_N(u) |\phi_N\rangle = [(u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2}] |\phi_N\rangle \\ \lambda_N(u) &= (u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2}, \quad l = N. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Já para $l < N$, temos:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_l\rangle &= \lambda_l(u) |\psi_l\rangle = (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle \\ &= A(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle + D(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

Utilizando as relações de comutação em (A.1.8), obtemos que:

$$\begin{aligned} A(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) A(u) |\phi_l\rangle + \text{termos indesejados} \\ &= (u + \omega + \eta l)(u - \omega) \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_l\rangle + \text{termos indesejados} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\begin{aligned} D(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} C(v_i) D(u) |\phi_l\rangle + \text{termos indesejados} \\ &= \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_l\rangle + \text{termos indesejados.} \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

Para que o estado de Bethe seja, de fato, um autovetor da matriz de transferência, é necessário que os termos indesejados em (A.2.5) e (A.2.6) se cancelem. Esse cancelamento nos fornece mais uma equação, denominada de Equação do *Ansatz* de Bethe, dada por:

$$\eta^2 (v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N-l, \quad (\text{A.2.7})$$

onde o conjunto de parâmetros $\{v_i\}$ são as soluções da equação e, com eles, podemos determinar os autovalores

restantes da matriz de transferência, que são dados por:

$$\lambda_l(u) = (u + \omega + \eta l)(u - \omega) \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i}. \quad (\text{A.2.8})$$

A.2.2 Modelo de Quatro Poços

O estado de Bethe para o modelo de quatro poços é definido como:

$$|\psi_{l,k}\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle, & k+l < N \\ |\phi_{l,k}\rangle, & k+l = N, \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

onde $|\phi_{k,l}\rangle = (\Gamma_{1,3}^\dagger)^l (\Gamma_{2,4}^\dagger)^k |0\rangle$, $\{l+k \leq N\}$, denotam os pseudo-vácuos do sistema. Aplicando o estado de Bethe sobre a matriz de transferência, obtemos:

$$\tau(u) |\psi_{l,k}\rangle = (A(u) + D(u)) |\psi_{l,k}\rangle = \lambda_{l,k}(u) |\psi_{l,k}\rangle. \quad (\text{A.2.10})$$

Para $l+k = N$, encontramos os seguintes autovalores para a matriz de transferência:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_{l,k}\rangle &= \lambda_{l,k}(u) |\phi_{l,k}\rangle = [(u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) + \eta^{-2}] |\phi_{l,k}\rangle \\ \lambda_{l,k}(u) &= (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) + \eta^{-2}, \quad l+k = N. \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

Já para $l+k < N$, encontramos:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\psi_{l,k}\rangle &= \lambda_{l,k}(u) |\psi_{l,k}\rangle = (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle \\ &= A(u) \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle + D(u) \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

Usando as relações de comutação em (A.1.8), obtemos:

$$\begin{aligned} A(u) \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) A(u) |\phi_{l,k}\rangle + \text{termos indesejados} \\ &= (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle + \text{termos indesejados} \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

$$\begin{aligned} D(u) \prod_{i=1}^{N-l-k} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) D(u) |\phi_{l,k}\rangle + \text{termos indesejados} \\ &= \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_{l,k}\rangle + \text{termos indesejados.} \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

Novamente, é necessário que os termos indesejados das equações (A.2.13) e (A.2.14) se cancelem para que o estado de Bethe (A.2.9) seja de fato um auto-estado da matriz de transferência. A partir dessa condição, obtemos

a equação do *Ansatz* de Bethe para o modelo de quatro poços, que é dada por:

$$\eta^2(v_i + \omega + k\eta)(v_i - \omega + l\eta) = \prod_{j \neq i}^{N-l-k} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N-l-k. \quad (\text{A.2.15})$$

Com a equação (A.2.15), somos capazes de calcular os parâmetros $\{v_i\}$ e determinar os autovalores restantes da matriz de transferência, computados por:

$$\lambda_{l,k}(u) = (u + \omega + k\eta)(u - \omega + l\eta) \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l-k} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i}, \quad (\text{A.2.16})$$

Com os autovalores da matriz de transferência em mãos, somos capazes de determinar os autovalores de energia do hamiltoniano.

Apêndice B

Calculo dos Hamiltonianos Efetivos

A partir da identificação dos regimes de tunelamento ressonante nos dois modelos estudados, estamos interessados em determinar hamiltonianos efetivos que descrevam as suas dinâmicas. Como visto anteriormente, o regime ressonante ocorre para valores altos do parâmetro de interação, U , de forma que o termo de interação do hamiltoniano domina sobre o termo de tunelamento. Sendo assim, podemos considerar o termo de tunelamento como uma pequena perturbação do hamiltoniano e utilizar teoria de perturbação dependente do tempo para calcular a taxa de transição entre dois estados. A taxa de transição entre os estados $|s\rangle \rightarrow |f\rangle$, em i -ésima ordem, é dada por:

$$W_{s \rightarrow f}^{(i)} = 2\pi |\langle f | V^{(i)} | s \rangle|^2 \delta(E_f - E_s). \quad (\text{B.0.1})$$

Em primeira ordem, temos que $V^{(1)} = V$ (regra de ouro de Fermi). Já para as transições de segunda ordem, temos que:

$$V^{(2)} = \sum_m \frac{V | m \rangle \langle m | V}{E_s - E_m}. \quad (\text{B.0.2})$$

Com isso, a partir da identificação das taxas de transição, somos capazes de determinar os hamiltonianos efetivos que descrevem a dinâmica dos regimes ressonantes para cada um dos modelos estudados, que têm os cálculos expostos em detalhes nas próximas seções deste apêndice.

B.1 MODELO DE TRÊS POÇOS

Para o modelo de três poços, podemos reescrever o hamiltoniano (3.1.1), para $\mu = 0$, como:

$$H = H_i + V, \quad H_i = U(N - 2N_2)^2, \quad V = J(a_{1,3}^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_{1,3}), \quad (\text{B.1.1})$$

onde H_i representa a parte de interação e V representa a parte de tunelamento do hamiltoniano. Usando a condição inicial $N_{1,3}(t=0) \approx N$, temos que para o termo de interação:

$$H_i |N_1, N_2, N_3\rangle = UN^2 |N_1, N_2, N_3\rangle, \quad (\text{B.1.2})$$

ou seja, a menos de uma constante global UN^2 , é possível obter um hamiltoniano efetivo que leve apenas os termos de tunelamento em consideração. No regime ressonante, o tunelamento dos bósons acontece apenas

entre os poços 1 e 3, de forma que o hamiltoniano efetivo do regime assume a forma:

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (\text{B.1.3})$$

Para que seja possível determinar a expressão completa para o hamiltoniano efetivo do modelo, iremos calcular explicitamente os elementos de matriz de mais baixa ordem não-nulos, para V e H_{eff} , considerando a transição entre os estados $|N-l, l, 0\rangle$ e $|N-l-1, l, 1\rangle$, e a partir da igualdade entre ambos, iremos determinar o parâmetro de tunelamento efetivo, J_{eff} . Em primeira ordem, temos que a taxa de transição entre os estados é dada por:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= 2\pi \langle N-l-1, l, 1 | V | N-l, l, 0 \rangle \\ &= 2\pi J_1 \sqrt{l(N-l+1)} \langle N-l-1, l, 1 | N-l+1, l, 0 \rangle \\ &\quad + 2\pi J_1 \sqrt{(l+1)(N-l)} \langle N-l-1, l, 1 | N-l-1, l, 0 \rangle \\ &\quad + 2\pi J_3 \sqrt{l} \langle N-l-1, l, 1 | N-l, l, 1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Ou seja, considerando o potencial perturbativo, não existe transição em primeira ordem. Já para as transições de segunda ordem, obtemos:

$$W^{(2)} = 2\pi \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{\langle N-l-1, l, 1 | V | n_1, n_2, n_3 \rangle \langle n_1, n_2, n_3 | V | N-l, l, 0 \rangle}{E_{N-l, l, 0} - E_{n_1, n_2, n_3}}, \quad (\text{B.1.5})$$

onde a soma é realizada sob a restrição do número total de partículas do sistema, $n_1 + n_2 + n_3 = N$. Iniciamos fazendo:

$$\begin{aligned} \langle N-l-1, l, 1 | V &= \langle N-l-1, l, 1 | \left[(J_1 a_1 + J_3 a_3) a_2^\dagger + (J_1 a_1^\dagger + J_3 a_3^\dagger) a_2 \right] \\ &= J_1 \sqrt{(N-l-1)(l+1)} \langle N-l-2, l+1, 1 | + J_3 \sqrt{l+1} \langle N-l-1, l+1, 0 | \\ &\quad + J_1 \sqrt{l(N-l)} \langle N-l, l-1, 1 | + J_3 \sqrt{2l} \langle N-l-1, l-1, 2 |. \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

Fazendo o sanduíche, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle N-l-1, l, 1 | V | n_1, n_2, n_3 \rangle &= J_1 \sqrt{(N-l-1)(l+1)} \delta_{N-l-2, n_1} \delta_{l+1, n_2} \delta_{1, n_3} \\ &\quad + J_3 \sqrt{l+1} \delta_{N-l-1, n_1} \delta_{l+1, n_2} \delta_{0, n_3} \\ &\quad + J_1 \sqrt{l(N-l)} \delta_{N-l, n_1} \delta_{l-1, n_2} \delta_{1, n_3} \\ &\quad + J_3 \sqrt{2l} \delta_{N-l-1, n_1} \delta_{l-1, n_2} \delta_{2, n_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

Seguimos com:

$$\begin{aligned} V | N-l, l, 0 \rangle &= J_1 \sqrt{(l+1)(N-l)} | N-l-1, l+1, 0 \rangle + J_1 \sqrt{l(N-l+1)} | N-l+1, l-1, 0 \rangle \\ &\quad + J_3 \sqrt{l} | N-l, l-1, 1 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

Fazemos novamente o sanduíche e encontramos:

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2, n_3 | V | N-l, l, 0 \rangle &= J_1 \sqrt{(l+1)(N-l)} \delta_{n_1, N-l-1} \delta_{n_2, l+1} \delta_{n_3, 0} \\ &\quad + J_1 \sqrt{l(N-l+1)} \delta_{n_1, N-l+1} \delta_{n_2, l-1} \delta_{n_3, 0} \\ &\quad + J_3 \sqrt{l} | N-l, l-1, 1 \rangle \delta_{n_1, N-l} \delta_{n_2, l-1} \delta_{n_3, 1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.9})$$

Utilizando os resultados (B.1.7) e (B.1.9) em (B.1.5), os únicos termos não-nulos da somatória são:

$$\begin{aligned} (A) \quad n_1 &= N - l - 1, & n_2 &= l + 1, & n_3 &= 0, \\ (B) \quad n_1 &= N - l, & n_2 &= l - 1, & n_3 &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a taxa de transição em segunda ordem é dada por:

$$\langle N - l - 1, l, 1 | V^{(2)} | N - l, l, 0 \rangle = J_1 J_3 \sqrt{N - l} \left(\frac{l + 1}{E_S - E_A} + \frac{l}{E_S - E_B} \right). \quad (\text{B.1.10})$$

Calculando as energias, obtemos:

$$E_S = U(N - 2l)^2, \quad E_A = U(N - 2l - 2)^2, \quad E_B = U(N - 2l + 2)^2. \quad (\text{B.1.11})$$

Encontramos, portanto, que a taxa de transição em segunda entre os estados, considerando o potencial perturbativo, é dada por:

$$W^{(2)} = 2\pi \lambda_l \alpha_1 \alpha_3 \sqrt{N - l}, \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left(\frac{l + 1}{N - 2l - 1} - \frac{l}{N - 2l + 1} \right). \quad (\text{B.1.12})$$

Considerando agora as transições entre os estados em primeira ordem, utilizando o hamiltoniano efetivo (B.1.3), obtemos que a taxa de transição resulta em:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= 2\pi \langle N - l - 1, l, 1 | H_{\text{eff}}^{(1)} | N - l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 2\pi \langle N - l - 1, l, 1 | H_{\text{eff}} | N - l, l, 0 \rangle, \\ W^{(1)} &= 2\pi J_{\text{eff}} \sqrt{N - l}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

Comparando os resultados obtidos para as taxas de transição, obtemos a seguinte relação para o parâmetro de tunelamento efetivo:

$$J_{\text{eff}} = \lambda_l \alpha_1 \alpha_3, \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left(\frac{l + 1}{N - 2l - 1} - \frac{l}{N - 2l + 1} \right). \quad (\text{B.1.14})$$

Com o parâmetro J_{eff} determinado, temos que o hamiltoniano efetivo que governa a dinâmica do regime ressonante entre as partículas dos poços 1 e 3 é dado por:

$$H_{\text{eff}} = \lambda_l \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \quad \lambda_l = \frac{J^2}{4U} \left[\frac{l + 1}{N - 2l - 1} - \frac{l}{N - 2l + 1} \right]. \quad (\text{B.1.15})$$

B.2 MODELO DE QUATRO POÇOS

Para o modelo de quatro poços, iremos utilizar a mesma abordagem de dividir o hamiltoniano original em dois termos, um termo de interação e um termo de tunelamento, que irá atuar como uma perturbação. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H_0 &= U(N_1 - N_2 + N_3 - N_4)^2, \quad H_1 = \frac{J}{2} \left[(a_1^\dagger + a_3^\dagger)(a_2 + a_4) + (a_2^\dagger + a_4^\dagger)(a_1 + a_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

Para o modelo de quatro poços, o estado inicial do sistema é dado por:

$$|\Psi\rangle = |N-l-P, P-K, l, K\rangle, \quad l = 0, 1, \dots, N-P, \quad K = 0, 1, \dots, P, \quad P = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{B.2.2})$$

Vemos que nosso estado inicial é um auto-estado do termo de interação do hamiltoniano, com autovalor:

$$H_0 |\Psi\rangle = H_0 |N-l-P, P-K, l, K\rangle = U(N-2P)^2 |\Psi\rangle. \quad (\text{B.2.3})$$

Novamente iremos utilizar teoria de perturbação dependente do tempo para encontrar as taxas de transição entre dois estados, em três casos distintos, de maneira a obtermos uma expressão completa para o hamiltoniano efetivo:

- (i) $|N-l-P, P-K, l, K\rangle \rightarrow |N-l-P-1, P-K, l+1, K\rangle$
- (ii) $|N-l-P, P-K, l, K\rangle \rightarrow |N-l-P, P-K-1, l, K+1\rangle$
- (iii) $|N-l-P, P-K, l, K\rangle \rightarrow |N-l-P+1, P-K-1, l-1, K+1\rangle$;
- (iv) $|N-l-P, P-K, l, K\rangle \rightarrow |N-l-P+1, P-K+1, l-1, K-1\rangle$.

Para simplificar a notação dos cálculos a seguir, iremos utilizar $|s^{(j)}\rangle$ e $|f^{(j)}\rangle$ para denotar o estado inicial e final de cada um dos casos considerados. Para a transição entre os estados do caso (i), o hamiltoniano efetivo assume a forma:

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (\text{B.2.4})$$

Já para os estados do caso (ii), temos:

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}(a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \quad (\text{B.2.5})$$

Para os estados do caso (iii), temos o seguinte hamiltoniano efetivo:

$$H_{\text{eff}}^{(\text{iii})} = J_{\text{eff}}^{(\text{iii})} (a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4). \quad (\text{B.2.6})$$

E, finalmente, para os estados do caso (iv), o hamiltoniano efetivo é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(\text{iv})} = J_{\text{eff}}^{(\text{iv})} (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger). \quad (\text{B.2.7})$$

Novamente iremos calcular a taxa de transição entre os estados utilizando a equação (B.0.1) e comparar os resultados de mais baixa ordem utilizando os hamiltonianos efetivos e o termo de tunelamento como potencial perturbativo do sistema. Em primeira ordem, temos a regra de ouro de Fermi e para transições de segunda ordem, o potencial perturbativo é dado pela equação (B.0.2). Considerando os estados do caso (i), temos que a

taxa de transição é dada por:

$$\begin{aligned}
 W^{(1)} &= \langle N-l-P-1, P-K, l+1, K | H_1 | N-l-P, P-K, l, K \rangle \\
 &= \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l+1)} \langle f | N-P-l+1, P-K-1, l, K \rangle \right. \\
 &\quad + \sqrt{K(N-P-l+1)} \langle f | N-P-l+1, P-K, l, K-1 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(l+1)(P-K)} \langle f | N-P-l, P-K-1, l+1, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(l+1)K} \langle f | N-P-l, P-K, l+1, K-1 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(P-K+1)(N-P-l)} \langle f | N-P-l-1, P-K+1, l, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{l(P-K+1)} \langle f | N-P-l, P-K+1, l-1, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(K+1)(N-P-l)} \langle f | N-P-l-1, P-K, l, K+1 \rangle \\
 &\quad \left. + \sqrt{(K+1)l} \langle f | N-P-l, P-K, l-1, K+1 \rangle \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{B.2.8}$$

Ou seja, em primeira ordem, não existe transição entre os estados do caso (i). O mesmo resultado também é obtido considerando os estados dos casos (ii) e (iii). Já para as transições de segunda ordem, fazemos:

$$W^{(2)} = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \frac{\langle f^{(i)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | H_1 | s^{(i)} \rangle}{E_{N-l-P, P-K, l, K} - E_{n_1, n_2, n_3, n_4}} \tag{B.2.9}$$

Iniciamos fazendo:

$$\begin{aligned}
 H_1 | s^{(i)} \rangle &= \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l+1)} | N-P-l+1, P-K-1, l, K \rangle \right. \\
 &\quad + \sqrt{K(N-P-l+1)} | N-P-l+1, P-K, l, K-1 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(l+1)(P-K)} | N-P-l, P-K-1, l+1, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(l+1)K} | N-P-l, P-K, l+1, K-1 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(P-K+1)(N-P-l)} | N-P-l-1, P-K+1, l, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{l(P-K+1)} | N-P-l, P-K+1, l-1, K \rangle \\
 &\quad + \sqrt{(K+1)(N-P-l)} | N-P-l-1, P-K, l, K+1 \rangle \\
 &\quad \left. + \sqrt{(K+1)l} | N-P-l, P-K, l-1, K+1 \rangle \right]
 \end{aligned} \tag{B.2.10}$$

$$\begin{aligned}
 \langle f^{(i)} | H_1 &= \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l)} \langle N-l-P-1, P-K-1, l+1, K | \right. \\
 &\quad + \sqrt{K(N-P-l)} \langle N-P-l, P-K, l+1, K-1 | \\
 &\quad + \sqrt{(l+2)(P-K)} \langle N-P-l-1, P-K-1, l+2, K | \\
 &\quad + \sqrt{(l+2)K} \langle N-P-l-1, P-K, l+2, K-1 | \\
 &\quad + \sqrt{(P-K+1)(N-P-l-1)} \langle N-P-l-2, P-K+1, l+1, K | \\
 &\quad + \sqrt{(l+1)(P-K+1)} \langle N-P-l-1, P-K+1, l, K | \\
 &\quad + \sqrt{(K+1)(N-P-l-1)} \langle N-P-l-2, P-K, l+1, K+1 | \\
 &\quad \left. + \sqrt{(K+1)(l+1)} \langle N-P-l-1, P-K, l, K+1 | \right].
 \end{aligned} \tag{B.2.11}$$

Fazendo os sanduíches, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | H_1 | s^{(i)} \rangle = & \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l+1)} \delta_{n_1, N-P-l+1} \delta_{n_2, P-K-1} \delta_{n_3, l} \delta_{n_4, K} \right. \\
 & + \sqrt{K(N-P-l+1)} \delta_{n_1, N-P-l+1} \delta_{n_2, P-K} \delta_{n_3, l} \delta_{n_4, K-1} \\
 & + \sqrt{(l+1)(P-K)} \delta_{n_1, N-P-l} \delta_{n_2, P-K-1} \delta_{n_3, l+1} \delta_{n_4, K} \\
 & + \sqrt{(l+1)K} \delta_{n_1, N-P-l} \delta_{n_2, P-K} \delta_{n_3, l+1} \delta_{n_4, K-1} \\
 & + \sqrt{(P-K+1)(N-P-l)} \delta_{n_1, N-P-l-1} \delta_{n_2, P-K+1} \delta_{n_3, l} \delta_{n_4, K} \\
 & + \sqrt{l(P-K+1)} \delta_{n_1, N-P-l} \delta_{n_2, P-K+1} \delta_{n_3, l-1} \delta_{n_4, K} \\
 & + \sqrt{(K+1)(N-P-l)} \delta_{n_1, N-P-l-1} \delta_{n_2, P-K} \delta_{n_3, l} \delta_{n_4, K+1} \\
 & \left. + \sqrt{(K+1)l} \delta_{n_1, N-P-l} \delta_{n_2, P-K} \delta_{n_3, l-1} \delta_{n_4, K+1} \right]. \tag{B.2.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle f^{(i)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle = & \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K, n_4} \right. \\
 & + \sqrt{K(N-P-l)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\
 & + \sqrt{(l+2)(P-K)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l+2, n_3} \delta_{K, n_4} \\
 & + \sqrt{(l+2)K} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l+2, n_3} \delta_{K-1, n_4} \\
 & + \sqrt{(P-K+1)(N-P-l-1)} \delta_{N-P-l-2, n_1} \delta_{P-K+1, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K, n_4} \\
 & + \sqrt{(l+1)(P-K+1)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K+1, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K, n_4} \\
 & + \sqrt{(K+1)(N-P-l-1)} \delta_{N-P-l-2, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\
 & \left. + \sqrt{(K+1)(l+1)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K+1, n_4} \right]. \tag{B.2.13}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, os únicos termos não-nulos da somatória são:

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & n_1 = N-P-l, & n_2 = P-K-1, & n_3 = l+1, & n_4 = K, \\
 (B) \quad & n_1 = N-P-l-1, & n_2 = P-K+1, & n_3 = l, & n_4 = K, \\
 (C) \quad & n_1 = N-P-l-1, & n_2 = P-K, & n_3 = l, & n_4 = K+1, \\
 (D) \quad & n_1 = N-P-l, & n_2 = P-K, & n_3 = l+1, & n_4 = K-1.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que a taxa de transição entre os estados do caso (i) em segunda ordem é dada por:

$$\langle f^{(i)} | V^{(2)} | s^{(i)} \rangle = \frac{J^2}{4} \sqrt{(l+1)(N-P-l)} \left[\frac{P-K}{E_s - E_A} + \frac{P-K+1}{E_s - E_B} + \frac{K+1}{E_s - E_C} + \frac{K}{E_s - E_D} \right]. \tag{B.2.14}$$

Calculando as energias, obtemos:

$$\begin{aligned}
 E_s = U(N-2P)^2, \quad E_A = U(N-2P+2)^2, \quad E_B = U(N-2P-2)^2, \\
 E_C = U(N-2P+2)^2, \quad E_D = U(N-2P-2)^2. \tag{B.2.15}
 \end{aligned}$$

Encontramos, portanto:

$$\langle f^{(i)} | V^{(2)} | s^{(i)} \rangle = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{N-2P-1} - \frac{P}{N-2P+1} \right] \sqrt{(l+1)(N-P-l)}. \quad (\text{B.2.16})$$

Agora calculando a taxa de transição entre os estados do caso (i) em primeira ordem, usando o H_{eff} , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle f^{(i)} | H_{\text{eff}} | s^{(i)} \rangle &= J_{\text{eff}}^{(i)} \langle N-l-P-1, P-K, l+1, K | (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) | N-l-P, P-K, l, K \rangle \\ \langle f^{(i)} | H_{\text{eff}} | s^{(i)} \rangle &= J_{\text{eff}}^{(i)} \sqrt{(l+1)(N-P-l)}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.17})$$

Comparando os resultados obtidos em (B.2.15) e (B.2.16), determinamos o parâmetro de tunelamento efetivo $J_{\text{eff}}^{(i)}$, que é dado por:

$$J_{\text{eff}}^{(i)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{N-2P-1} - \frac{P}{N-2P+1} \right]. \quad (\text{B.2.18})$$

Dessa forma, temos que o hamiltoniano efetivo que descreve o tunelamento entre os estados do caso (i) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(i)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{P+2}{N-2P-1} - \frac{P}{N-2P+1} \right] (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (\text{B.2.19})$$

Repetimos todo o processo considerando os estados do caso (ii). A taxa de transição entre os estados, em segunda ordem, é calculada como:

$$W^{(2)} = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \frac{\langle f^{(ii)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | H_1 | s^{(ii)} \rangle}{E_{N-l-P, P-K, l, K} - E_{n_1, n_2, n_3, n_4}}. \quad (\text{B.2.20})$$

Iniciamos fazendo:

$$\begin{aligned} \langle f^{(ii)} | H_1 &= \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l)} \langle N-l-P-1, P-K, l, K+1 | \right. \\ &+ \sqrt{(K+2)(N-P-l)} \langle N-P-l-1, P-K-1, l, K+2 | \\ &+ \sqrt{(N-P-l+1)(P-K-1)} \langle N-P-l+1, P-K-2, l, K+1 | \\ &+ \sqrt{(N-P-l+1)(K+1)} \langle N-P-l+1, P-K-1, l, K | \\ &+ \sqrt{(P-K-1)(l+1)} \langle N-P-l, P-K-2, l+1, K+1 | \\ &+ \sqrt{l(P-K)} \langle N-P-l, P-K, l-1, K+1 | \\ &+ \sqrt{l(K+2)} \langle N-P-l, P-K-1, l-1, K+2 | \\ &+ \left. \sqrt{(K+1)(l+1)} \langle N-P-l, P-K-1, l+1, K | \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.21})$$

Fazendo o sanduíche, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle f^{(ii)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle = \frac{J}{2} & \left[\sqrt{(P-K)(N-P-l)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K+1, n_4} \right. \\
 & + \sqrt{(K+2)(N-P-l)} \delta_{N-P-l-1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K+2, n_4} \\
 & + \sqrt{(N-P-l+1)(P-K-1)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K-2, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\
 & + \sqrt{(N-P-l+1)(K+1)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K, n_4} \\
 & + \sqrt{(P-K-1)(l+1)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K-2, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\
 & + \sqrt{l(P-K)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\
 & + \sqrt{l(K+2)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K+2, n_4} \\
 & \left. + \sqrt{(K+1)(l+1)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l+1, n_3} \delta_{K, n_4} \right]. \tag{B.2.22}
 \end{aligned}$$

Para os estados do caso (ii), os termos não-nulos da somatória são:

$$\begin{aligned}
 (E) \quad n_1 = N-P-l+1, \quad n_2 = P-K-1, \quad n_3 = l, \quad n_4 = K, \\
 (F) \quad n_1 = N-P-l-1, \quad n_2 = P-K, \quad n_3 = l, \quad n_4 = K+1, \\
 (G) \quad n_1 = N-P-l, \quad n_2 = P-K, \quad n_3 = l-1, \quad n_4 = K+1, \\
 (H) \quad n_1 = N-P-l, \quad n_2 = P-K-1, \quad n_3 = l+1, \quad n_4 = K.
 \end{aligned}$$

Portanto temos que a taxa de transição entre os estados é dada por:

$$\langle f^{(ii)} | V^{(2)} | s^{(ii)} \rangle = \frac{J^2}{4} \sqrt{(k+1)(P-K)} \left[\frac{N-P-l+1}{E_s - E_E} + \frac{N-P-l}{E_s - E_F} + \frac{l}{E_s - E_G} + \frac{l+1}{E_s - E_H} \right]. \tag{B.2.23}$$

Calculando novamente as energias, obtemos:

$$\begin{aligned}
 E_s = U(N-2P)^2, \quad E_E = U(N-2P+2)^2, \quad E_F = U(N-2P-2)^2, \\
 E_G = U(N-2P-2)^2, \quad E_H = U(N-2P+2)^2. \tag{B.2.24}
 \end{aligned}$$

Encontramos, portanto:

$$\langle f^{(ii)} | V^{(2)} | s^{(ii)} \rangle = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{N-P}{N-2P-1} - \frac{N-P+2}{N-2P+1} \right] \sqrt{(k+1)(P-K)}. \tag{B.2.25}$$

Calculando a taxa de transição em primeira ordem para os estados do caso (ii), utilizando H_{eff} :

$$\begin{aligned}
 \langle f^{(ii)} | H_{\text{eff}} | s^{(ii)} \rangle & = J_{\text{eff}}^{(ii)} \langle N-l-P, P-K-1, l, K+1 | (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2) | N-l-P, P-K, l, K \rangle \\
 \langle f^{(ii)} | H_{\text{eff}} | s^{(ii)} \rangle & = J_{\text{eff}}^{(ii)} \sqrt{(K+1)(P-K)}. \tag{B.2.26}
 \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados obtidos para o caso (ii), encontramos a expressão para $J_{\text{eff}}^{(ii)}$:

$$J_{\text{eff}}^{(ii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{N-P}{N-2P-1} - \frac{N-P+2}{N-2P+1} \right] \tag{B.2.27}$$

Ou seja, o hamiltoniano efetivo que descreve o tunelamento entre os estados do caso (ii) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(ii)} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{N-P}{N-2P-1} - \frac{N-P+2}{N-2P+1} \right] (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2). \quad (\text{B.2.28})$$

Por fim, considerando os estados do caso (iii), repetimos o processo calculando a taxa de transição em segunda ordem, dada por:

$$W^{(2)} = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \frac{\langle f^{(iii)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | H_1 | s^{(iii)} \rangle}{E_{N-l-P, P-K, l, K} - E_{n_1, n_2, n_3, n_4}}. \quad (\text{B.2.29})$$

Iniciamos fazendo:

$$\begin{aligned} \langle f^{(iii)} | H_1 = & \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K-1)(N-P-l+2)} \langle N-l-P+2, P-K-2, l-1, K+1 | \right. \\ & + \sqrt{(K+1)(N-P-l+2)} \langle N-P-l+2, P-K-1, l-1, K | \\ & + \sqrt{l(P-K-1)} \langle N-P-l+1, P-K-2, l, K+1 | \\ & + \sqrt{l(K+1)} \langle N-P-l+1, P-K-1, l, K | \\ & + \sqrt{(P-K)(N-P-l+1)} \langle N-P-l, P-K, l-1, K+1 | \\ & + \sqrt{(l-1)(P-K)} \langle N-P-l+1, P-K, l-2, K+1 | \\ & + \sqrt{(N-P-l+1)(K+2)} \langle N-P-l, P-K-1, l-1, K+2 | \\ & \left. + \sqrt{(K+2)(l-1)} \langle N-P-l+1, P-K-1, l-2, K+2 | \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.30})$$

Fazendo o sanduíche, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle f^{(iii)} | H_1 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle = & \frac{J}{2} \left[\sqrt{(P-K-1)(N-P-l+2)} \delta_{N-P-l+2, n_1} \delta_{P-K-2, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \right. \\ & + \sqrt{(K+1)(N-P-l+2)} \delta_{N-P-l+2, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K, n_4} \\ & + \sqrt{l(P-K-1)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K-2, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\ & + \sqrt{l(K+1)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l, n_3} \delta_{K, n_4} \\ & + \sqrt{(P-K)(N-P-l+1)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\ & + \sqrt{(l-1)(P-K)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K, n_2} \delta_{l-2, n_3} \delta_{K+1, n_4} \\ & + \sqrt{(N-P-l+1)(K+2)} \delta_{N-P-l, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l-1, n_3} \delta_{K+2, n_4} \\ & \left. + \sqrt{(K+2)(l-1)} \delta_{N-P-l+1, n_1} \delta_{P-K-1, n_2} \delta_{l-2, n_3} \delta_{K+2, n_4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.31})$$

Para os estados do caso (iii), os termos não-nulos da somatória são:

$$\begin{aligned} (I) \quad n_1 &= N-P-l+1, & n_2 &= P-K-1, & n_3 &= l, & n_4 &= K, \\ (J) \quad n_1 &= N-P-l, & n_2 &= P-K, & n_3 &= l-1, & n_4 &= K+1. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que a taxa de transição entre os estados é dada por:

$$\langle f^{(iii)} | V^{(2)} | s^{(iii)} \rangle = \frac{J^2}{4} \sqrt{(N-P-l+1)(P-K)l(K+1)} \left[\frac{1}{E_s - E_I} + \frac{1}{E_s - E_J} \right]. \quad (\text{B.2.32})$$

Calculando as energias, encontramos:

$$E_I = U(N - 2P + 2)^2, \quad E_J = U(N - 2P - 2)^2 \quad (\text{B.2.33})$$

Com as energias calculadas, temos que a taxa de transição entre os estados do caso (iii) é:

$$\langle f^{(\text{iii})} | V^{(2)} | s^{(\text{iii})} \rangle = \frac{J^2}{16U} \sqrt{(N - P - l + 1)(P - K)l(K + 1)} \left[\frac{1}{N - 2P - 1} - \frac{1}{N - 2P + 1} \right]. \quad (\text{B.2.34})$$

Calculando diretamente a taxa de transição entre os estados do caso (iii) utilizando H_{eff} , obtemos:

$$\langle f^{(\text{iii})} | H_{\text{eff}} | s^{(\text{iii})} \rangle = J_{\text{eff}}^{(\text{iii})} \sqrt{(N - P - l + 1)(P - K)l(K + 1)}. \quad (\text{B.2.35})$$

Novamente, comparamos os dois resultados e obtemos uma expressão para J_{eff} , que é dado por:

$$J_{\text{eff}}^{(\text{iii})} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{N - 2P - 1} - \frac{1}{N - 2P + 1} \right]. \quad (\text{B.2.36})$$

E assim, temos que o hamiltoniano efetivo para o tunelamento entre os estados do caso (iii) é dado por:

$$H_{\text{eff}}^{(\text{iii})} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{N - 2P - 1} - \frac{1}{N - 2P + 1} \right] (a_1^\dagger a_2 a_3 a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4). \quad (\text{B.2.37})$$

Para a transição entre os estados do caso (iv), o cálculo é similar ao caso (iii), de forma que obtemos o mesmo valor para J_{eff} e o hamiltoniano efetivo se torna:

$$H_{\text{eff}}^{(\text{iv})} = \frac{J^2}{16U} \left[\frac{1}{N - 2P - 1} - \frac{1}{N - 2P + 1} \right] (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger). \quad (\text{B.2.38})$$

Como cada um dos casos representa um regime de tunelamento diferente, podemos escrever um hamiltoniano efetivo geral que englobe todos os casos:

$$H_{\text{eff}} = \frac{J^2}{16U} \left[\left(\frac{P + 2}{N - 2P - 1} - \frac{P}{N - 2P + 1} \right) (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) + \left(\frac{N - P}{N - 2P - 1} - \frac{N - P + 2}{N - 2P + 1} \right) (a_2^\dagger a_4 + a_4^\dagger a_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{N - 2P - 1} - \frac{1}{N - 2P + 1} \right) (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger a_4 + a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger) \right]. \quad (\text{B.2.39})$$

Apêndice C

Dinâmica do Desequilíbrio de Populações

Neste apêndice, estamos interessados em determinar uma expressão analítica para a evolução temporal do valor esperado do desequilíbrio de populações entre os poços, considerando o modelo de quatro poços no regime de tunelamento ressonante. Como visto anteriormente, o regime ressonante ocorre quando o termo de interação, U do hamiltoniano (3.2.1) domina sobre o termo de tunelamento, J , e podemos observar que o tunelamento de partículas ocorre apenas entre poços da mesma classe. Foi mostrado que a dinâmica quântica do regime ressonante, considerando um estado inicial do tipo $|M, P, 0, 0\rangle$, é descrita por um hamiltoniano efetivo, que assume a forma:

$$H_{\text{eff}} = \Omega(N+1)(Q_1 + Q_2) - 2\Omega Q_1 Q_2, \quad \Omega = \frac{J^2}{4U} \frac{1}{(M-P)^2 - 1}, \quad (\text{C.0.1})$$

onde as quantidades Q_1 e Q_2 representam as cargas conservadas do modelo de quatro poços e são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(N_1 + N_3) - \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_3 + a_1 a_3^\dagger) \\ Q_2 &= \frac{1}{2}(N_2 + N_4) - \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_4 + a_2 a_4^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

É facilmente encontrado, através de transformações de Bogoliubov, que o espectro de energias de H_{eff} , é:

$$\epsilon_{q_1, q_2} = \frac{J^2}{4U[(N-2P)^2 - 1]} [(N+1)(q_1 + q_2) - 2q_1 q_2], \quad (\text{C.0.3})$$

onde q_1 e q_2 representam os autovalores de Q_1 e Q_2 , respectivamente. De maneira a simplificar os cálculos, iremos construir uma auto-base de $\{Q_1, Q_2\}$, denotada por $\{|N, P, q_1, q_2\rangle\}$ e definida como:

$$|N, P, q_1, q_2\rangle = \frac{C}{\sqrt{2^N}} (a_1^\dagger + a_3^\dagger)^{N-P-q_1} (a_1^\dagger - a_3^\dagger)^{q_1} (a_2^\dagger + a_4^\dagger)^{P-q_2} (a_2^\dagger - a_4^\dagger)^{q_2} |0\rangle, \quad (\text{C.0.4})$$

tal que $H_{\text{eff}}|N, P, q_1, q_2\rangle = \epsilon_{q_1, q_2}|N, P, q_1, q_2\rangle$, $C = 1/\sqrt{q_1!(N-P-q_1)!q_2!(P-q_2)!}$ e $|0\rangle$ denota o vácuo bosônico do espaço de Fock. Seguimos reescrevendo os estados definidos na equação (C.0.4) como:

$$|N, P, q_1, q_2\rangle = C(b_1^\dagger)^{N-P-q_1} (b_2^\dagger)^{q_1} (b_3^\dagger)^{P-q_2} (b_4^\dagger)^{q_2} |0\rangle, \quad (\text{C.0.5})$$

onde os operadores b_i são definidos como:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_3); & b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_3); \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + a_4); & b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - a_4). \end{aligned} \quad (\text{C.0.6})$$

Dessa forma, as expressões para o desequilíbrio de população entre os poços 1-3 e 2-4, em termos de b_i , se tornam:

$$\begin{aligned} N_1 - N_3 &= b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger; \\ N_2 - N_4 &= b_3^\dagger b_4 + b_3 b_4^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{C.0.7})$$

Aplicando $(N_1 - N_3)$ sobre o estado (C.0.5), obtemos:

$$(N_1 - N_3)|N, P, q_1, q_2\rangle = \sqrt{q_1(M - q_1 + 1)}|N, P, q_1 - 1, q_2\rangle + \sqrt{(M - q_1)(q_1 + 1)}|N, P, q_1 + 1, q_2\rangle, \quad (\text{C.0.8})$$

onde usamos as seguintes propriedades dos operadores: $[b_i, (b_i^\dagger)^j] = j(b_i^\dagger)^{j-1}$ e $b_i|0\rangle = 0$. De maneira similar, ao aplicarmos $(N_2 - N_4)$ sobre $|N, P, q_1, q_2\rangle$, encontramos:

$$(N_2 - N_4)|N, P, q_1, q_2\rangle = \sqrt{q_2(P - q_2 + 1)}|N, P, q_1, q_2 - 1\rangle + \sqrt{(P - q_2)(q_2 + 1)}|N, P, q_1, q_2 + 1\rangle, \quad (\text{C.0.9})$$

propriedades que serão usadas na sequência deste apêndice. Além disso, podemos reescrever o estado da equação (C.0.4) como:

$$\begin{aligned} |N, P, q_1, q_2\rangle &= \frac{C(-1)^{q_1+q_2}}{\sqrt{2^N}} \sum_{i=0}^{M-q_1} \sum_{j=0}^{q_1} \binom{M-q_1}{i} \binom{q_1}{j} (-1)^j (a_1^\dagger)^i (a_3^\dagger)^{M-q_1-i} (a_1^\dagger)^j (a_3^\dagger)^{q_1-j} \\ &\quad \sum_{k=0}^{P-q_2} \sum_{l=0}^{q_2} \binom{P-q_2}{k} \binom{q_2}{l} (-1)^l (a_2^\dagger)^k (a_4^\dagger)^{P-q_2-k} (a_2^\dagger)^l (a_4^\dagger)^{q_2-l} |0\rangle \\ &= \frac{C(-1)^{q_1+q_2}}{\sqrt{2^N}} \sum_{i=0}^{M-q_1} \sum_{j=0}^{q_1} \binom{M-q_1}{i} \binom{q_1}{j} (-1)^{j+l} (a_1^\dagger)^{i+j} (a_3^\dagger)^{M-i-j} \\ &\quad \sum_{k=0}^{P-q_2} \sum_{l=0}^{q_2} \binom{P-q_2}{k} \binom{q_2}{l} (a_2^\dagger)^{k+l} (a_4^\dagger)^{P-k-l} |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.0.10})$$

onde consideramos a expansão do binômio de Newton: $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$. Sendo assim, utilizando a propriedade do operador *criação de bósons*, $(a^\dagger)^r |0\rangle = \sqrt{r!} |r\rangle$, somos capazes de calcular a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \langle M, P, 0, 0 | N, P, q_1, q_2 \rangle &= \frac{C(-1)^{q_1+q_2}}{\sqrt{2^N}} \sum_{i=0}^{M-q_1} \sum_{j=0}^{q_1} (-1)^j \binom{M-q_1}{i} \binom{q_1}{j} \sqrt{(M-i-j)!(i+j)!} \delta_{i+j, M} \\ &\quad \sum_{k=0}^{P-q_2} \sum_{l=0}^{q_2} (-1)^l \binom{P-q_2}{k} \binom{q_2}{l} \sqrt{(P-k-l)!(k+l)!} \delta_{k+l, P} \end{aligned}$$

Substituindo C por sua expressão e simplificando as somatórias com o delta de Kronecker, obtemos:

$$\langle M, P, 0, 0 | N, P, q_1, q_2 \rangle = \sqrt{\frac{M!P!}{2^N q_1!(M-q_1)!q_2!(P-q_2)!}}. \quad (\text{C.0.11})$$

Podemos obter, de maneira similar, uma expressão para $\langle M, 0, 0, P | N, P, q_1, q_2 \rangle$, utilizando os resultados da equação (C.0.10), que se torna:

$$\begin{aligned} \langle M, 0, 0, P | N, P, q_1, q_2 \rangle = & \frac{C(-1)^{q_1+q_2}}{\sqrt{2^N}} \sum_{i=0}^{M-q_1} \sum_{j=0}^{q_1} (-1)^{j+l} \binom{M-q_1}{i} \binom{q_1}{j} \sqrt{(M-i-j)!(i+j)!} \delta_{i+j,0} \\ & \sum_{k=0}^{P-q_2} \sum_{l=0}^{q_2} \binom{P-q_2}{k} \binom{q_2}{l} \sqrt{(P-k-l)!(k+l)!} \delta_{k+l,P}. \end{aligned}$$

Novamente, simplificando as somatórias e substituindo C , obtemos o seguinte resultado:

$$\langle M, 0, 0, P | N, P, q_1, q_2 \rangle = (-1)^{q_2} \sqrt{\frac{M!P!}{2^N q_1!(M-q_1)!q_2!(P-q_2)!}}. \quad (\text{C.0.12})$$

Usando o hamiltoniano efetivo, H_{eff} , descrito pela equação (C.0.1), podemos calcular a evolução temporal do operador $(N_1 - N_3)$, dada por:

$$\begin{aligned} (N_1 - N_3)(t) &= e^{iH_{\text{eff}}t} (N_1 - N_3) e^{-iH_{\text{eff}}t} \\ &= \sum_{p_1=0}^M \sum_{p_2=0}^P \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=0}^P e^{i(\epsilon_{p_1,p_2} - \epsilon_{q_1,q_2})t} |N, P, p_1, p_2\rangle \langle N, P, p_1, p_2 | (N_1 - N_3) |N, P, q_1, q_2\rangle \langle N, P, q_1, q_2 | \\ &= \sum_{p_1=0}^M \sum_{p_2=0}^P \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=0}^P e^{i(\epsilon_{p_1,p_2} - \epsilon_{q_1,q_2})t} |N, P, p_1, p_2\rangle \langle N, P, p_1, p_2 | \\ & \quad (\sqrt{q_1(M-q_1+1)} |N, P, q_1-1, q_2\rangle + \sqrt{(M-q_1)(q_1+1)} |N, P, q_1+1, q_2\rangle) \langle N, P, q_1, q_2 | \\ &= \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=0}^P \left(e^{-i(\epsilon_{q_1,q_2} - \epsilon_{q_1-1,q_2})t} \sqrt{q_1(M-q_1+1)} |N, P, q_1-1, q_2\rangle \right. \\ & \quad \left. + e^{-i(\epsilon_{q_1,q_2} - \epsilon_{q_1+1,q_2})t} \sqrt{(M-q_1)(q_1+1)} |N, P, q_1+1, q_2\rangle \right) \langle N, P, q_1, q_2 |. \end{aligned} \quad (\text{C.0.13})$$

A dinâmica do desequilíbrio de população é obtida através da escolha de um estado inicial $|\psi_0\rangle$, tal que $\langle N_1 - N_3 \rangle(t) = \langle \psi_0 | (N_1 - N_3)(t) | \psi_0 \rangle$. Considerando o estado inicial $|\psi_0\rangle = |M, P, 0, 0\rangle$, e definindo $\Delta \epsilon_1^+ \equiv \epsilon_{q_1, q_2} -$

ϵ_{q_1+1, q_2} e $\Delta \epsilon_1^- \equiv \epsilon_{q_1, q_2} - \epsilon_{q_1-1, q_2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle N_1 - N_3 \rangle(t) &= \sum_{q_2=0}^P \left(\sum_{q_1=1}^M e^{-i\Delta \epsilon_1^- t} \sqrt{q_1(M-q_1+1)} \langle M, P, 0, 0 | N, P, q_1-1, q_2 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{q_1=0}^{M-1} e^{-i\Delta \epsilon_1^+ t} \sqrt{(M-q_1)(q_1+1)} \langle M, P, 0, 0 | N, P, q_1+1, q_2 \rangle \right) \langle N, P, q_1, q_2 | M, P, 0, 0 \rangle. \\
 &= \frac{M!P!}{2^N} \sum_{q_2=0}^P \frac{1}{q_2!(P-q_2)! \sqrt{q_1!(M-q_1)!}} \left(\sum_{q_1=1}^M e^{-i\Delta \epsilon_1^- t} \sqrt{\frac{q_1(M-q_1+1)}{(q_1-1)!(M-q_1+)}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{q_1=0}^{M-1} e^{-i\Delta \epsilon_1^+ t} \sqrt{\frac{(M-q_1)(q_1+1)}{(q_1+1)!(M-q_1-1)!}} \right) \\
 &= \frac{M!P!}{2^N} \sum_{q_2=0}^P \frac{1}{q_2!(P-q_2)! \sqrt{q_1!(M-q_1)!}} \left(\sum_{q_1=1}^M e^{-i\Delta \epsilon_1^- t} \sqrt{\frac{q_1}{(q_1-1)!(M-q_1)!}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{q_1=0}^{M-1} e^{-i\Delta \epsilon_1^+ t} \sqrt{\frac{M-q_1}{q_1!(M-q_1-1)!}} \right) \tag{C.0.14} \\
 &= \frac{M!P!}{2^N} \sum_{q_2=0}^P \frac{1}{q_2!(P-q_2)!} \left(\sum_{q_1=1}^M \frac{e^{-i\Delta \epsilon_1^- t}}{(q_1-1)!(M-q_1)!} + \sum_{q_1=0}^{M-1} \frac{e^{-i\Delta \epsilon_1^+ t}}{q_1!(M-q_1-1)!} \right) \\
 &= \frac{M!P!}{2^N} \sum_{q_2=0}^P \frac{1}{q_2!(P-q_2)!} \sum_{q_1=1}^M \frac{1}{(q_1-1)!(M-q_1)!} \left(e^{-i\Delta \epsilon_1^- t} + e^{i\Delta \epsilon_1^- t} \right) \\
 &= \frac{M!P!}{2^{N-1}} \sum_{q_2=0}^P \frac{1}{q_2!(P-q_2)!} \sum_{q_1=1}^M \frac{1}{(q_1-1)!(M-q_1)!} \cos(\Delta \epsilon_1^- t).
 \end{aligned}$$

Seguimos calculando explicitamente $\Delta \epsilon_1^-$ utilizando a equação (C.0.3):

$$\begin{aligned}
 \Delta \epsilon_1^- &= \epsilon_{q_1, q_2} - \epsilon_{q_1-1, q_2} \\
 &= \frac{J^2}{4U[(M-P)^2-1]} [(N+1)(q_1+q_2) - 2q_1q_2 - (N+1)(q_1+q_2-1) + 2(q_1-1)q_2] \\
 &= \frac{J^2}{4U[(M-P)^2-1]} [(N+1) - 2q_2] = \Omega [(N+1) - 2q_2], \tag{C.0.15}
 \end{aligned}$$

Utilizando o resultado da equação (C.0.15) na equação (C.0.14), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle N_1 - N_3 \rangle (t) &= \frac{M!P!}{2^{N-1}} \sum_{q_2=0}^P \frac{\cos([N+1-2q_2]\Omega t)}{q_2!(P-q_2)!} \sum_{q_1=1}^M \frac{1}{(q_1-1)!(M-q_1)!} \\
 &= \frac{P!}{2^{N-1}} \sum_{q_2=0}^P \frac{\cos([N+1-2q_2]\Omega t)}{q_2!(P-q_2)!} \sum_{q_1=0}^{M-1} \frac{M(M-1)!}{q_1![(M-1)-q_1]!} \\
 &= M \frac{P!}{2^P} \sum_{q_2=0}^P \frac{\cos([N+1-2q_2]\Omega t)}{q_2!(P-q_2)!} \\
 &= M \frac{P!}{2^{P+1}} \sum_{q_2=0}^P \frac{e^{i(N+1-2q_2)\Omega t} + e^{-i(N+1-2q_2)\Omega t}}{q_2!(P-q_2)!} \\
 &= M \frac{1}{2^{P+1}} \left(e^{i(N+1)\Omega t} \sum_{q_2=0}^P \frac{P!}{q_2!(P-q_2)!} e^{-2i\Omega t q_2} + e^{-i(N+1)\Omega t} \sum_{q_2=0}^P \frac{P!}{q_2!(P-q_2)!} e^{2i\Omega t q_2} \right) \\
 &= M \frac{1}{2^{P+1}} \left(e^{i(N+1)\Omega t} [1 + e^{-2i\Omega t}]^P + e^{-i(N+1)\Omega t} [1 + e^{2i\Omega t}]^P \right) \\
 &= M \frac{1}{2^{P+1}} \left(e^{i(N+1)\Omega t} e^{-iP\Omega t} + e^{-i(N+1)\Omega t} e^{iP\Omega t} \right) 2^P (\cos \Omega t)^P \\
 &= \frac{M}{2} (\cos \Omega t)^P \left(e^{i(M+1)\Omega t} + e^{-i(M+1)\Omega t} \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente, simplificando a ultima expressão, encontramos que evolução temporal do valor esperado do desequilíbrio de população entre os poços 1 e 3, que é dada por:

$$\langle N_1 - N_3 \rangle (t) = M \cos[(M+1)\Omega t] [\cos(\Omega t)]^P. \quad (\text{C.0.16})$$

Além disso, podemos utilizar a simetria $M \leftrightarrow P$ para determinar a expressão analítica para o desequilíbrio de população entre os poços 2 e 4, que resulta em:

$$\langle N_2 - N_4 \rangle (t) = P \cos[(P+1)\Omega t] [\cos(\Omega t)]^M. \quad (\text{C.0.17})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A Einstein. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1924.
- [2] Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26(1):178–181, 1924.
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [4] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.
- [5] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Ann. Phys.*, 384(4):361–376, 1926.
- [6] H. Bethe. Zur theorie der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 71(3):205–226, 1931.
- [7] Elliott H. Lieb and Werner Liniger. Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state. *Phys. Rev.*, 130:1605–1616, May 1963.
- [8] Elliott H. Lieb. Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice. *Phys. Rev. Lett.*, 18:692–694, 1967.
- [9] R. J. Baxter. Eight-vertex model in lattice statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 26:832–833, Apr 1971.
- [10] R. J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. In *Integrable systems in statistical mechanics*, page 5. World Scientific, 1985.
- [11] Vladimir E Korepin and Fabian H L Eler. *Exactly solvable models of strongly correlated electrons*. World Scientific, 1994.
- [12] L.D. Faddeev. Algebraic aspects of the bethe ansatz. *International Journal of Modern Physics A*, 10(13):1845–1878, 1995.
- [13] Bernd Wolf, Andreas Honecker, Walter Hofstetter, Ulrich Tutsch, and Michael Lang. Cooling through quantum criticality and many-body effects in condensed matter and cold gases. *International Journal of Modern Physics B*, 28(26):1430017, 2014.
- [14] G Santos, A Foerster, I Roditi, Z V T Santos, and A P Tonel. Exactly solvable models for triatomic-molecular Bose-Einstein Condensates. page 11, 2008.
- [15] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan. The quantum inverse problem method. 1. *Theor. Math. Phys.*, 40:688–706, 1980. *Teor. Mat. Fiz.*40,194(1979).

- [16] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic josephson junction. *Phys. Rev. Lett.*, 95:010402, 2005.
- [17] J. Links, A. Foerster, A. P. Tonel, and G. Santos. The two-site bose-hubbard model. *Annales Henri Poincaré*, 7:1591–1600, 2006.
- [18] Karin Wittmann Wilsmann. Quebra da integrabilidade para um modelo de tunelamento quântico de três poços. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.
- [19] Karin Wittmann Wilsmann, Leandro H. Ymai, Arlei Prestes Tonel, Jon Links, and Angela Foerster. Control of tunneling in an atomtronic switching device. *Communications Physics*, 1(1), Dec 2017.
- [20] A. P. Tonel, L. H. Ymai, A. Foerster, and J Links. Integrable model of bosons in a four-well ring with anisotropic tunneling. *J. Phys. A*, 48(49):1–13, 2015.
- [21] Anthony J. Leggett. Bose-einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, 73:307–356, Apr 2001.
- [22] D Rubeni, J Links, P S Isaac, and A Foerster. Two-site Bose-Hubbard model with nonlinear tunneling: Classical and quantum analysis. *Phys. Rev. A*, 95(4):1–11, 2017.
- [23] A. Foerster and E. Ragoucy. Exactly solvable models in atomic and molecular physics. *Nuclear Physics B*, 777:373–403, 08 2007.
- [24] Arlei P. Tonel, Leandro H. Ymai, Karin Wittmann W., Angela Foerster, and Jon Links. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential. *SciPost Phys. Core*, 2:3, 2020.
- [25] D. S. Grun, L. H. Ymai, K Wittmann W., A. P. Tonel, A. Foerster, and J. Links. Integrable atomtronic interferometry. arXiv:2004.11987, 2020.
- [26] Hwang Lee, Pieter Kok, and Jonathan P. Dowling. A quantum rosetta stone for interferometry. *Journal of Modern Optics*, 49(14-15):2325–2338, Nov 2002.
- [27] L. H. Ymai, A. P. Tonel, A. Foerster, and J. Links. Quantum integrable multi-well tunneling models. *J. Phys. A*, 50(26):1–14, 2017.
- [28] N. A. Lemos. *Mecânica analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [29] Jean-Sébastien Caux and Jorn Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(02):P02023, 2011.
- [30] A P Tonel, J Links, and A Foerster. Quantum dynamics of a model for two josephson-coupled bose–einstein condensates. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(6):1235–1245, Jan 2005.
- [31] J. Von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften : in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. J. Springer, 1932.

- [32] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53:2046–2052, Apr 1996.
- [33] Luca Pezzè, Augusto Smerzi, Markus K. Oberthaler, Roman Schmied, and Philipp Treutlein. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles. *Reviews of Modern Physics*, 90(3), Sep 2018.