Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Diretoria de Educação a Distância – DED

Universidade Aberta do Brasil – UAB

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Reitor Carlos Alexandre Netto
Vice-Reitor Rui Vicente Oppermann
Pró-Reitor de Pós-Graduação Aldo Bolten Lucion
Secretário de Educação a Distância Sérgio Roberto Kieling Franco
Coordenador da UAB/UFRGS Luis Alberto Segovia Gonzalez

Comitê Editorial da SEAD

Presidente Sérgio Roberto Kieling Franco
Lovois de Andrade Miguel
Mára Lúcia Fernandes Carneiro
Silvestre Novak
Sílvio Luiz Souza Cunha

Apoio em Publicações da SEAD

Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática

Diretor do Instituto de Matemática Rudinei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Revisão Textual

Revisor de Língua Portuguesa Zuleica Oprach de Souza (Evangraf)

Projeto Gráfico

Projeto Gráfico e Diagramação Rafael Marczal de Lima (Evangraf)
Capa Bibiana Carapeços de Lima

Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática

Organizadores

Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Elisabete Zardo Búrigo
Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Maria Alice Gravina

Evangraf
Porto Alegre | 2011

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS

1 edição

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

R332 Reflexão e pesquisa na formação de professores de matemática / organizadores Vera Clotilde Vanzetto Garcia … [et al.]- Porto Alegre : Evangraf: UFRGS, 2011.
230 p. : il.

ISBN: 978-85-7727-327-0

1. Matemática - Ensino. 2. Professor - Formação. I.Garcia, Vera Clotilde Vanzetto. II.Búrigo, Elisabete Zardo. III.Basso, Marcus Vinicius de Azevedo. IV. Gravina, Maria Alice.

CDU – 51:37

Elaborada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Capítulo 8

A MÚSICA CONTRIBUINDO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

FABIO GOMES LINCK[1]
VERA CLOTILDE GARCIA[2]

Introdução

O presente trabalho traz o relato e a discussão de uma engenharia didática para ensino de algumas funções trigonométricas, que explora as relações entre a Música e a Matemática e utiliza diferentes recursos tecnológicos. O texto se divide em etapas: estudos e reflexões prévias sobre o conteúdo matemático, o ensino usual e dificuldades de aprendizagem; plano de ensino e relato da prática pedagógica, que ocorreu com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Silvio Ribeiro na cidade de Santana do Livramento/RS, no ano de 2010. As reflexões posteriores trazem críticas e revisões do plano, análise da prática e do desempenho dos alunos.

Apresentação do Tema e Justificativa

O objetivo maior dessa engenharia é o ensino com aprendizagem significativa das funções trigonométricas. O foco está na representação gráfica da família de funções $y = A\ sen(bx)$, sendo A e b números reais, não nulos, bons modelos para movimentos vibratórios periódicos. Curva senoide relaciona-se com onda sonora e os parâmetros A e b com características do som.

1 fabiolick@yahoo.com.br

2 veraclot@ufrgs.br

Segundo Moreira *et al.* (1997), o conhecimento prévio que os alunos possuem é a variável crucial para que a aprendizagem significativa ocorra. O autor introduz noções sobre a teoria da "*aprendizagem significativa*": ideias novas só podem ser aprendidas e retidas, de maneira útil, caso refiram-se a conceitos e proposições já disponíveis, que proporcionam as âncoras conceituais. Novos conhecimentos são adquiridos quando relacionam-se com o conhecimento prévio que o aluno possui.

Supondo que noções básicas sobre Música são conhecimentos já incorporados pelo aluno, partimos daí para desenvolver conhecimentos matemáticos. A ideia foi estabelecer relações entre esses dois mundos, para facilitar a compreensão das novas informações.

Por outro lado, *softwares* interativos, como o Geogebra, permitem lidar com o conceito de família de funções, na qual a "função mãe" (no caso $y = sen x$) é transformada em outras funções ($y = A\ sen(bx)$), com as mudanças dos parâmetros, A e b. A tecnologia permite aos estudantes investigar rapidamente muitas funções e seus gráficos e descobrir relações entre eles. Apenas o domínio da ideia de periodicidade é necessário, antes que o estudante esteja pronto para visualizar qualquer variação da função seno.

Análises Prévias: relações da Música com a Matemática

Lazzarini (s.d.) define: som é uma onda longitudinal, que só se propaga em meios materiais (sólidos, líquidos ou gases). Não é possível perceber o som se não existir um meio material entre o corpo que vibra e o nosso ouvido. Ele é gerado pela vibração, exerce pressão sobre o ar, e propaga-se no meio em forma de ondas, até chegar aos nossos ouvidos, onde há uma estrutura que recebe essas vibrações, interpreta-as e envia-as ao cérebro, gerando a percepção que temos do som.

Para Priolli (1987, p. 63), o som tem três propriedades:

a) a altura consiste na maior ou menor elevação do som, e depende do maior ou menor número de vibrações executadas num tempo dado;
b) a intensidade consiste no grau de força com que se apresenta o som e depende da amplitude das vibrações;
c) o timbre é a personalidade do som. Se ouvirmos um mesmo som produzido por vozes ou instrumentos diferentes, é por meio do timbre que reconhecemos esta ou aquela voz, ou ainda qual o instrumento que o produziu.

Em outras palavras, a *Intensidade* é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco; a *Altura* é a propriedade que o som tem de ser mais grave (baixo) ou mais agudo (alto); e o *Timbre* é a qualidade do som.

Quando o som propaga-se no ar, as ondas sonoras consistem simplesmente em uma série de variações de pressão. O diafragma de um microfone pode captar estas variações[3], movendo-se em resposta às mudanças de pressão. O movimento do diafragma é, então, convertido num sinal elétrico. Usando um microfone e uma interface – o equalizador – é possível "visualizar" as ondas sonoras.

As três características do som – intensidade, altura e timbre – podem ser vistas no aspecto físico do comportamento da onda.

A amplitude da onda corresponde à intensidade do som: a pressão do ar oscila acima e abaixo de um valor médio, que é a pressão do ar do local onde nos encontramos. O módulo da variação máxima, em relação a esse valor médio, chama-se amplitude da onda de pressão; o seu valor está relacionado com o volume ou intensidade sonora. Em termos espaciais, o deslocamento das partículas da onda sonora é muito pequeno, da ordem de frações de milímetros. Para quantizar a intensidade do som, utilizamos uma medida chamada decibel (dB), que é o logaritmo da pressão exercida pela vibração no ar.

A amplitude é a intensidade do som e, graficamente, é a altura da onda com relação ao ponto médio. Quanto maior a intensidade sonora, maior será a amplitude da onda da curva que a representa. A imagem a seguir representa a diferença entre dois sons distintos.

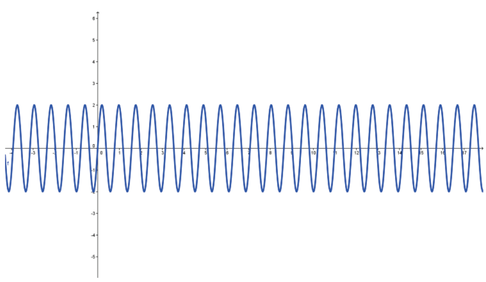

Figura 1: som 1
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

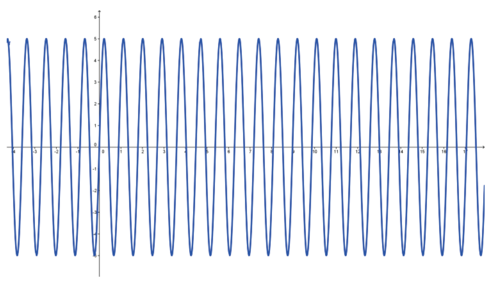

Figura 2: som 2
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

[3] Parte deste estudo encontra-se disponível em: <http://education.ti.com/sites/PORTUGAL/downloads/pdf/07ondas_sonoras.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011.

As representações gráficas mostram que o som representado na Figura 1 é um som menos intenso (mais fraco) do que o representado na Figura 2, pois sua amplitude é menor.

As partes mais altas da onda são chamadas cristas, são os pontos de maior compressão de partículas. As partes mais baixas são chamadas vales, são pontos de menor compressão de partículas.

A frequência da onda corresponde à altura do som: é o número de vezes que a partícula completa seu movimento vibratório e volta ao seu estado inicial em uma determinada unidade de tempo. A unidade de frequência mais utilizada é Hertz (Hz), ou número de ciclos por segundo. A frequência é interpretada como a altura do som. O termo altura é frequentemente confundido com volume.[4] A diferença de volume refere-se a quanto um som é mais forte ou mais fraco do que outro, enquanto a diferença de altura refere-se a quanto um som é mais agudo ou mais grave que outro.

O período é o tempo necessário para que a partícula complete seu movimento vibratório e volte ao seu estado inicial. A unidade de medida do período, na Física, é segundo. A frequência é o inverso do período, por isso 1 Hz = 1 s^{-1}.

A imagem a seguir representa graficamente ondas sonoras, conforme a nota musical, em diferentes alturas e frequências. A nota fá é mais grave e a nota sol é mais aguda.

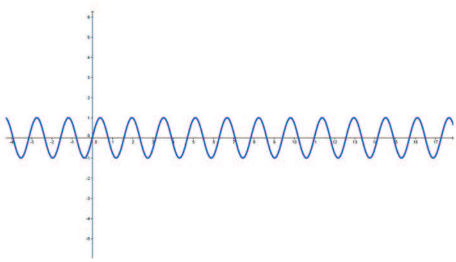

Figura 3**: nota fá**
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

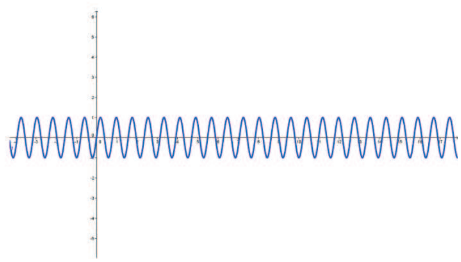

Figura 4: **nota sol**
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

Quem determina a altura – mais grave ou mais agudo – é o número de oscilações por unidade de tempo, ou seja, a frequência.

O espectro de frequências da onda corresponde ao timbre: raramente um som é composto de uma única frequência, geralmente ele é uma

[4] Parte deste estudo encontra-se disponível em: < www.mtm.ufsc.br/pos/Saulo_Castilho.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011.

combinação de vibrações em várias frequências diferentes simultaneamente. O espectro de frequências determina quais as frequências que compõem o som, e quais suas intensidades.

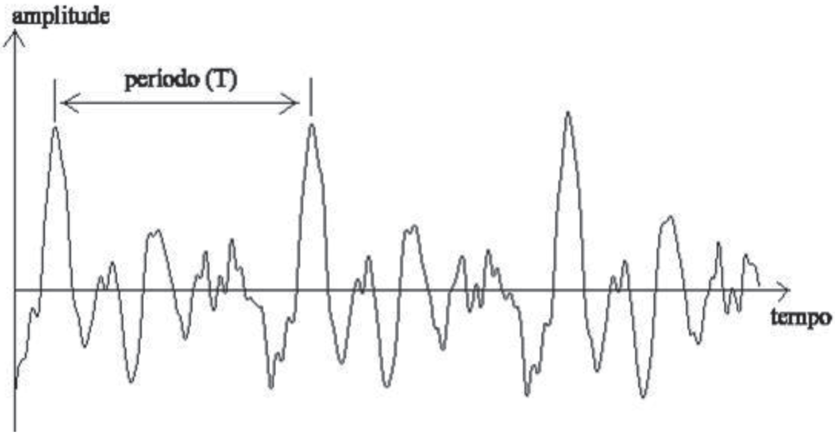

Figura 5: Representação temporal de uma onda sonora periódica produzida pela viola Fonte:< http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011

É interessante observar que esta onda complexa também mostra um movimento *periódico*, ou seja, sons se repetem em um espaço de tempo. Sons periódicos são relacionados com instrumentos *afinados,* e a frequência dos ciclos inteiros de onda, que define a altura de determinada nota, vai ser chamada de frequência fundamental. Existem, é claro, os sons, instrumentais ou não, que não têm altura definida, cuja forma de onda é *aperiódica*, ou seja, que não possui um padrão audível de repetição.

Podemos falar também sobre *ritmo*. Em uma música, são as variações do número de pulsações que determinam os diferentes ritmos musicais que conhecemos. Um frevo, por exemplo, tem um ritmo mais acelerado do que uma valsa. O número de pulsações, em um intervalo de tempo (minuto), é maior no frevo.

Os fenômenos ondulatórios podem ser estudados em sua forma mais simples, para se ganhar um entendimento dos seus constituintes básicos. A forma mais simples de onda sonora tem, como modelo matemático, funções que possuem uma característica periódica, isto é, repetem-se em um certo intervalo de tempo.

As notas puras, sem superposição de outros sons, são representadas por curvas do tipo senoidal.

A fórmula geral de uma curva senoidal é representada pela função mostrada a seguir.

$y = A\ sen\ (bx + c)$

No caso do som, que se propaga no ar como uma onda longitudinal:

a) y refere-se à variação de pressão a cada momento, com relação à pressão normal do ambiente, sem vibração. A unidade é Pascal ou Joule.

b) A é a amplitude máxima da onda, é um multiplicador simples que determina os valores máximos e mínimos entre os quais a oscilação ocorre. A equação $y = sen\ x$, corresponde a uma curva senoide, com amplitude 1.

A *amplitude* de uma onda de pressão correlaciona-se diretamente com a nossa percepção de intensidades sonoras, por exemplo, sons mais intensos serão resultado de uma maior amplitude de variação da pressão do meio (ou seja um deslocamento maior das moléculas).

c) $b = 2\pi.f$, onde f é a frequência. O modelo poderia ser reescrito como

$y = A\ sen\ (2\pi fx + c)$ *ou*

$y = A\ sen\ ((2\pi/P)x + c)$

com f de frequência e P de período, pois $f = 1/P$.

A *frequência*, e por consequência o *período* e o *comprimento de onda*, relacionam-se com a percepção de alturas (ou seja, o quão grave ou agudo um som é). O período é o tempo decorrido entre duas cristas consecutivas. Certos valores de frequências são convencionalmente equivalentes às notas musicais, por exemplo, 440 Hz é a frequência da nota lá de concerto.

d) x representa o tempo, em segundos;

e) c refere-se à fase.

A *fase* é o valor de x, em que se inicia um ciclo completo da curva senoide, isto é, fase é o valor de x para o qual $y = 0$ e a função é crescente. A fase determina a posição inicial da onda, ou a posição do começo do movimento. A unidade de fase é segundos.

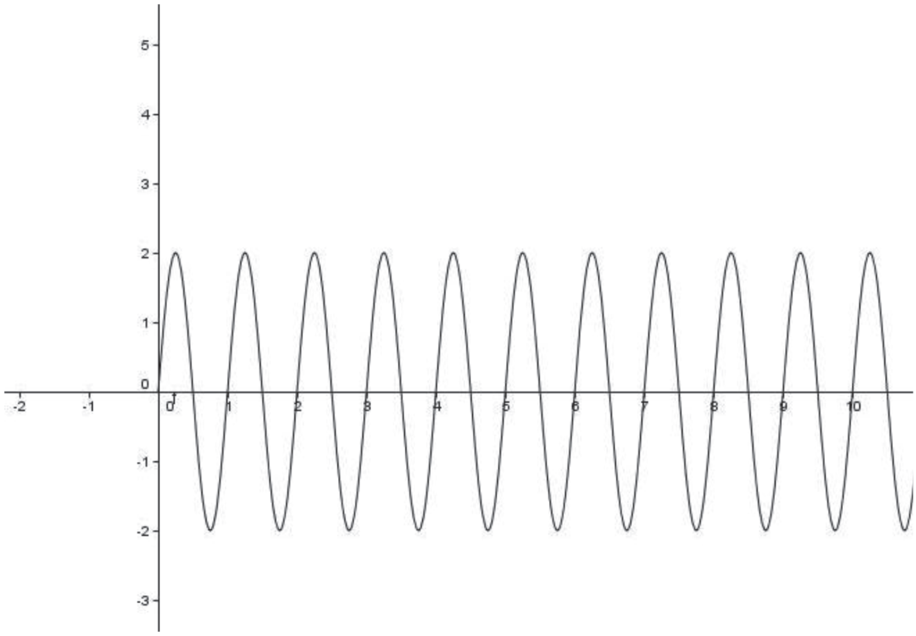

Figura 6: Gráfico da função $y = 2\ sen\ (6{,}28x)$
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

Nesta figura, a fase c é zero, em $x = 0$; a amplitude é A=2, o período é o tempo decorrido entre duas cristas, P=1. Observe que 2π é aproximadamente 6,28 . Na nossa simbologia, $1/f$ = P segundos e f = 1.

Portanto, vemos uma onda de pressão senoidal com *amplitude 1, frequência 1,* e desvio de *fase c= 0.*

No presente trabalho exploramos apenas o modelo ***y = A sen (bx),*** pois consideramos que as noções de altura e volume de som preexistem nos alunos, enquanto a ideia de fase é desconhecida, de difícil explicação e visualização.

Análises Prévias: ensino e aprendizagem das funções trigonométricas

Esta engenharia foi fundamentada na teoria da aprendizagem significativa e numa tendência atual, mais qualitativa, para o ensino de gráficos com auxilio de noções de modelagem matemática.

Gravina (1990) lembra que muitos alunos, ao estudar funções, ficam presos ao uso de tabelas na construção de gráficos. Isto faz com que percam a ideia mais geral sobre o comportamento da função. Com a tabela, o problema se reduz à marcação de alguns pontos do gráfico, tornando-se um exercício meramente computacional, sem muito raciocínio. A autora também sugere dar ênfase a transformações de gráficos, a partir da mudança de parâmetros, com análise das informações ali contidas.

Hirsch, Weinhold e Nichols (1991) explicam que a tecnologia permite lidar com o conceito de famílias de função, na qual a "função mãe" (no caso $y = sen\ x$) é transformada em outras funções, com mudanças de parâmetros. O uso de *softwares* permite aos estudantes investigar rapidamente muitas funções e seus gráficos e descobrir relações entre eles. Apenas o domínio da ideia de periodicidade é necessário para que o estudante possa visualizar qualquer variação da função seno da forma: $y= A.sen(bx + c)+d$, sendo A, b, c, d parâmetros dados por números reais.

Para os autores, uma aplicação extremamente importante da trigonometria é o uso das variações das funções seno e cosseno para modelar fenômenos que se desenvolvam de forma periódica, com auxílio da tecnologia.

As ondas sonoras correspondentes a notas puras são graficamente visualizadas como curvas senoides, e a família de funções $y = A\ sen(bx+c)$ é um modelo simplificado, adequado para esse fenômeno.

Segundo Menna Barreto (2007), um modelo matemático nada mais é do que uma representação na linguagem da Matemática de um fenômeno não matemático. Modelagem é um processo de tradução de um fenômeno do mundo físico em uma equação ou um sistema de equações. Uma metodologia de ensino que envolve modelos apresenta-se como uma possibilidade de intermediação entre o mundo não matemático e o matemático, e propicia a criação de ambientes de aprendizagem que valorizam as interações com o meio, assim como desenvolve a percepção da utilidade da Matemática.

Análises Prévias: escolha das mídias como recursos didáticos

Neste caso, partimos da análise do fenômeno do som, estabelecemos relação visual entre ondas sonoras e curvas senoides, com o objetivo de estudar a matemática do modelo, função seno.

A engenharia foi construída para dar significado aos gráficos da família de funções seno $y = A\ sen(bx)$, modelo das ondas sonoras.

Para alcançar esse objetivo, utilizamos diferentes mídias como recursos didáticos.

Iniciamos o trabalho com a utilização do vídeo de sensibilização “A Matemática da Música”, de autoria do Ministério da Educação[5]. Esse vídeo, de forma geral, apresenta as relações entre a Matemática e os sons. Em seguida usamos o equalizador do *Windows*, para dar uma primeira visualização do som. O programa *Windows Media Player*[6] apresenta as variações, através de um gráfico, da intensidade e da altura dos diferentes sons musicais combinados. O objetivo foi mostrar que: o gráfico mostra uma superposição de ondas; quanto maior a intensidade sonora, maiores são os picos que aparecem na telinha; a composição de sons dos instrumentos diversos resulta na superposição de varias curvas senoides.

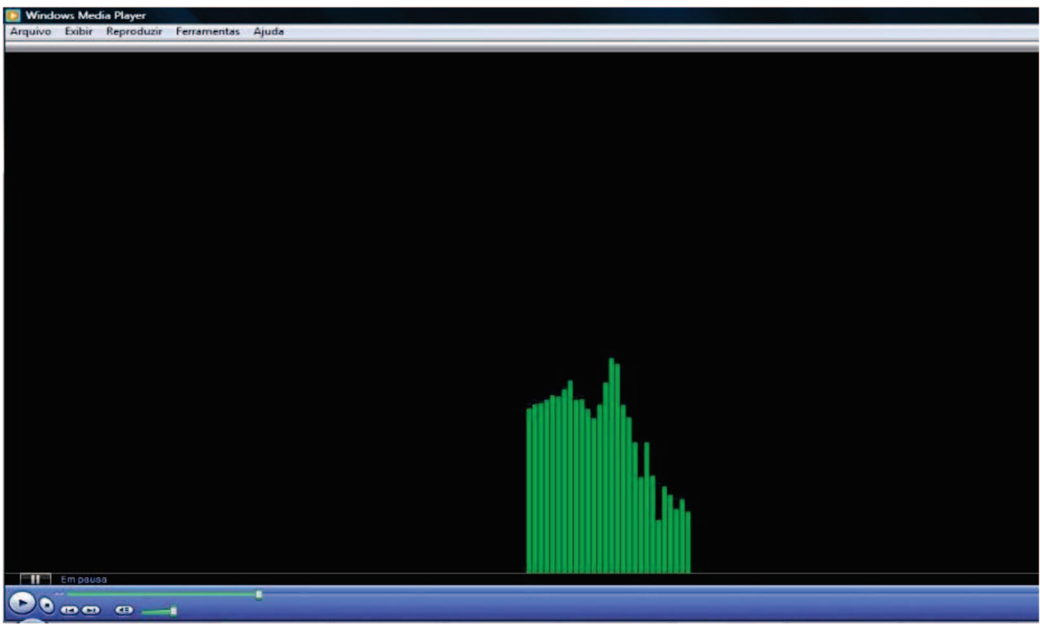

Figura 8: Interface do equalizador enquanto a Nona Sinfonia de *Beethoven* tocava
Fonte: <http://windows.microsoft.com/pt-BR/windows/products/windows-media>. Acesso em 10 ago. 2010.

[5] Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20816>. Acesso em: 10 ago 2010.

[6] Programa de computador que executa arquivos conteúdo multimídia em geral como: MP3, WMA, WAV, MPEG, VCDs, DVDs, etc. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Media_player>. Acesso em: 10 ago 2010.

Utilizamos o *software* Frequency Generation[7], que cria ondas senoides, a partir da manipulação de botões que determinam a frequência, a amplitude e a fase[8]. O objetivo foi mostrar representações gráficas de notas puras, que são visualizadas como uma só onda. Aumentando a frequência, o som fica mais agudo e o período da onda diminui; da mesma forma, quando diminui a frequência, o som fica mais grave e o período aumenta, pois essas duas grandezas são inversamente proporcionais. Aumentando o volume do som, a amplitude da onda aumenta, diminuindo o volume, a amplitude diminui.

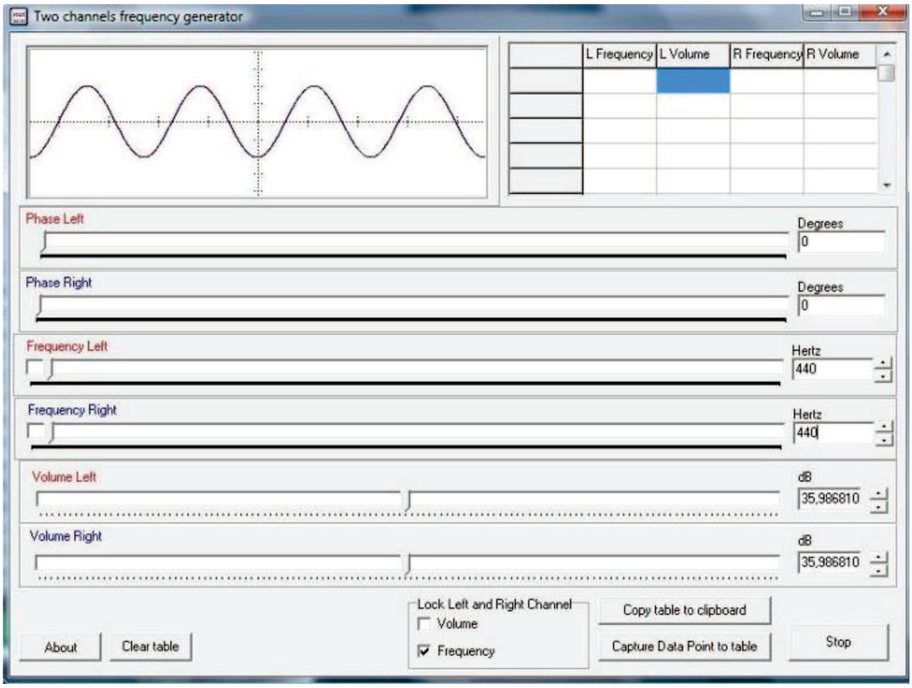

Figura 9: Interface do *Software* com uma frequência de 440 Hz
Fonte:<http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

[7] É um software. Existem vários disponíveis em http://www.diffusionsoftware.com/sinegen.php e http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave. Acesso em 10 ago. 2010.

[8] Não tratei do conceito de fase.

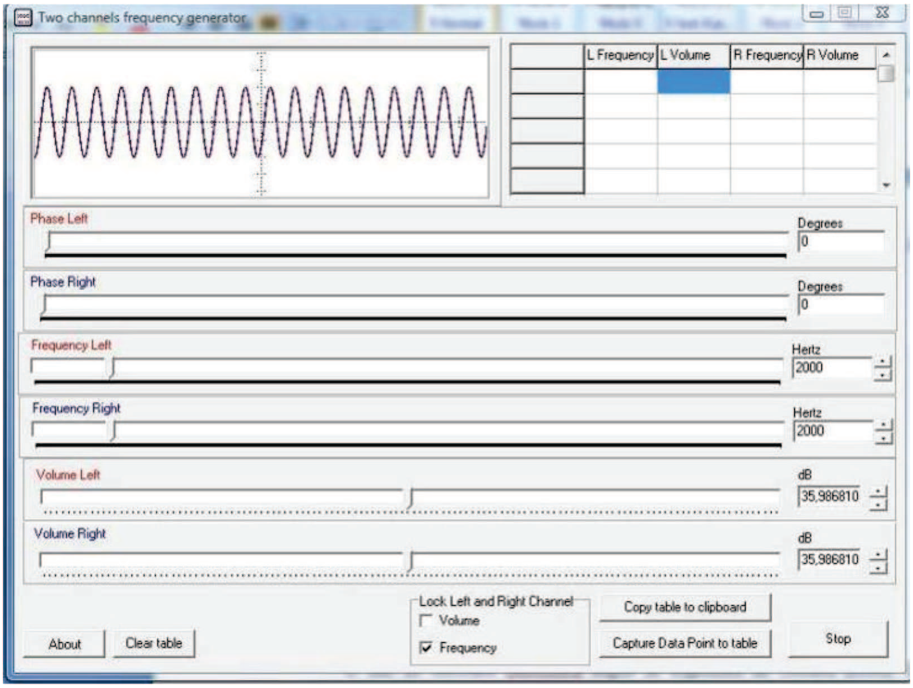

Figura 10: Interface do Software com uma frequência de 2000 Hz
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

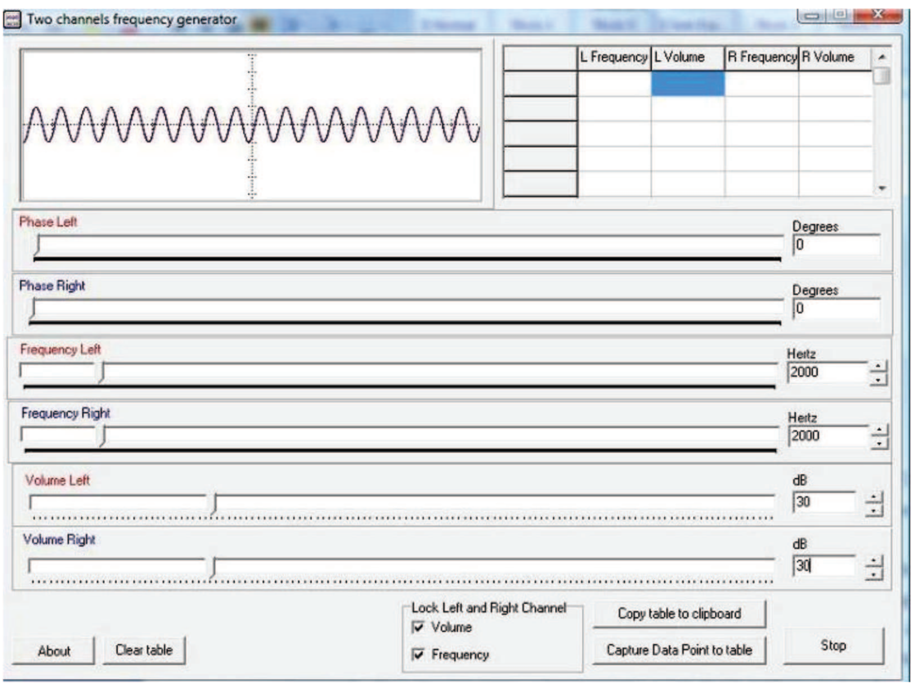

Figura 11: Interface do software com um volume de 30 decibéis (dB)
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

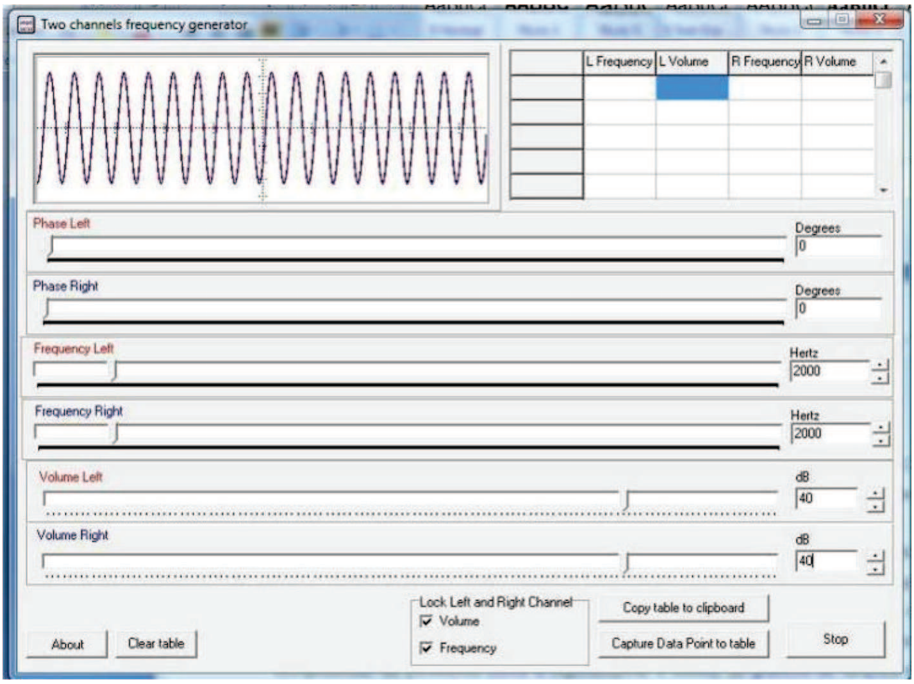

Figura 12: Interface do software com um volume de 40 decibéis (dB)
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

O GeoGebra é um *software* de Matemática educativo. Possibilita a construção de diversas formas geométricas planas e, ainda, contribui na compreensão de conteúdos como a trigonometria, o estudo de gráficos de funções e tópicos de geometria analítica. O uso do Geogebra teve o objetivo de identificar as características da onda sonora com os parâmetros da família de funções $y = Asen\ (bx)$. A análise de diferentes gráficos, obtidos com mudanças de valores de A e b, proporciona a generalização desejada: A corresponde à amplitude; b corresponde ao período e, ao mesmo tempo, à frequência.

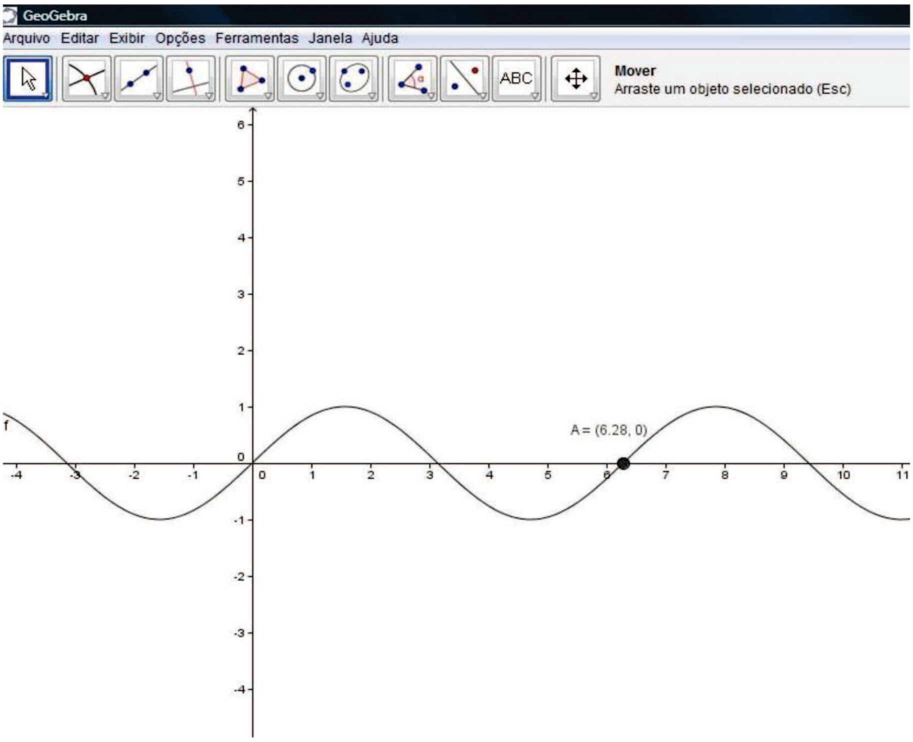

Figura 13: Interface do *software GeoGebra*, representando a função seno
Fonte: <www.geogebra.org> Acesso em: 20 fev. 2011.

Recorremos também ao aplicativo Mathlet para concretizar o conceito de seno.

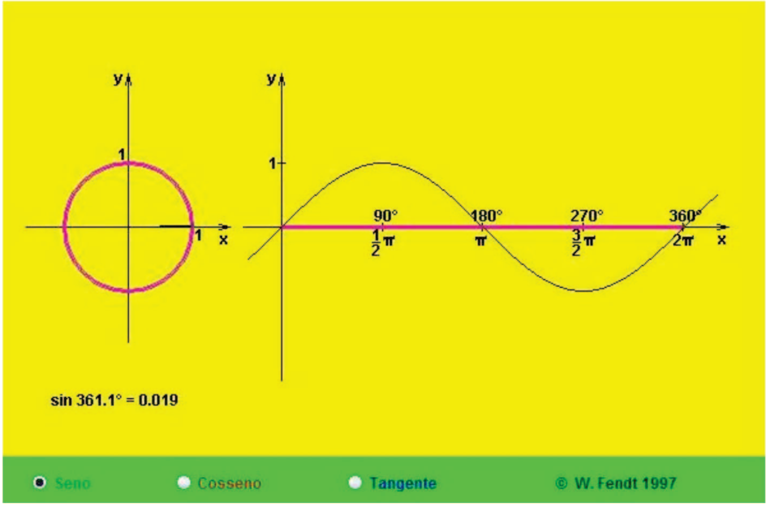

Figura 14: Interface do Aplicativo *Mathlet*
Fonte: < http://www.walter-fendt.de/m14pt/sincostan_pt.htm> Acesso em: 20 fev. 2011

Projeto Pedagógico

A experiência foi desenvolvida em dois momentos diferentes, com alunos da terceira série do Ensino Médio noturno da Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Silvio Ribeiro no Município de Santana do Livramento.

Este relato vai focalizar atividades desenvolvidas no segundo momento, fruto da reflexão e da avaliação crítica, com correção de rumos, sobre as primeiras ações.

O objetivo maior da prática foi favorecer a construção dos gráficos da família de funções $y = A\ sen(bx)$ – traçado, variação dos parâmetros e análise do período e da frequência – a partir do estudo de conceitos relativos ao som – onda sonora, representação gráfica da onda sonora, características do som. A ideia-chave foi chegar à função seno entendendo-a como modelo matemático para representar a onda sonora.

Para isso, foram traçados alguns objetivos específicos: trabalhar com alunos que tenham noções sobre Música; discutir o fenômeno do som e analisar a onda sonora; representar graficamente sons musicais, resultantes de superposições de ondas sonoras, usando o *Windows Media Player;* relacionar características da onda sonora, de notas puras, com alterações da sua representação gráfica, usando o *software* Frequency Genetration; dar significado aos gráficos das funções $y = Asen(bx)$, apresentando-as como modelos adequados para as ondas sonoras que representam notas puras; analisar as mudanças dos parâmetros A e b, em construções de curvas senoides no *software* GeoGebra*;* relembrar o círculo trigonométrico e relacionar o período 2π com os períodos observados no Geogebra, representados por números decimais, e com a frequência.

Antes da experiência, foram elaboradas as seguintes hipóteses:

a) Sobre conhecimentos prévios: o conhecimento musical pode contribuir na aprendizagem, mas não é essencial, pois o plano inicia com o estudo do som e das ondas sonoras; assumimos que os alunos tinham noções sobre funções e gráficos, pois estes termos seriam usados normalmente, sem explicações maiores; pressupomos conhecimento do uso do Geogebra.

b) Sobre os objetivos: assumimos que os recursos midiáticos variados facilitariam a aprendizagem significativa.

Seguimos as hipóteses para a elaboração do plano de ensino e para a sequência didática.

Quadro 1: Plano de Ensino

OBJETIVO	AÇÃO	RECURSO
Observar relações entre sons e sua forma gráfica.	Analisar representações gráficas de músicas, utilizando o equalizador. **Material 1**	*Windows* Media Player
Relacionar características da onda sonora com alterações da curva que a representa.	Manipular e responder questões sobre o *software Frequency Generator;* verificar o que acontece quando aumenta ou diminui a frequência sonora, assim como quando aumenta ou diminui o volume do som. **Material 2**	*Software* Frequency Generator
Relacionar a representação gráfica da onda sonora com gráfico da função. $y = Asen\ (bx)$. Analisar gráficos com números decimais e ausência do numero π .	Traçar gráficos das funções $y = Asen\ (bx)$ com o *software GeoGebra.* **Material 3**	*Software* GeoGebra Material escrito
Relacionar os parâmetros dos gráficos das funções $y = Asen\ (bx)$ com as características da onda sonora.	Os alunos irão responder questões, utilizando o *GeoGebra.* **Material 3 – Atividade 1**	*Software* GeoGebra Material escrito
Relembrar a noção de período da função $y = Asen(bx)$.	Uso de um aplicativo **Material 3 – Atividade 2**	Mathlet
Encontrar período e frequência das funções $y = sen\ (bx)$. Relacionar período e frequência.	Questões com observação de gráficos. **Material 3 – Atividades 3 e 4**	Software *GeoGebra* Material escrito

Fonte: Elaborado pelos autores

Material 1 – Análise das Imagens do Equalizador
Pra começar nada mais natural que ouvir uma música. A música vai tocar no *Windows Media Player.*
Pergunta: As formas que aparecem, em movimento, no Equalizador, têm relação com a música?
O som conforme mais forte e agudo, ou mais fraco e baixo, interfere nas imagens que o equalizador nos mostra?

Material 2 – Análise do S*oftware* Frequency Generator
Nesse *software* podemos analisar o som e algumas de suas particularidades. Vamos ver como funciona.
O gráfico que vimos durante a música, no equalizador, resulta de uma superposição de sons, é uma composição de diferentes curvas.
Nosso objetivo agora é mostrar que notas musicais puras, sem superposições, resultam na imagem gráfica de uma só curva. Esta curva é uma "senoide".
A senoide é a forma mais simples de representar graficamente uma onda sonora.
As partes mais altas da onda são chamadas cristas e as partes mais baixas são chamadas vales. Estão vendo que a senoide parece estar repetindo sempre a mesma coisa (vai e vem)? Isso que ela está repetindo é um **ciclo**. O número de ciclos repetidos a cada segundo é a **frequência**.
Vamos ver, no *software,* o que acontece se aumentarmos ou diminuirmos a frequência. E o que acontece com o som, quando aumentamos ou diminuímos a frequência?
A unidade da frequência é o hertz (Hz). Comparar a nota Lá (430 Hz) com a nota Mi (320 Hz), e também a nota Dó (256 Hz) com a nota Si (480 Hz).
Vocês sabiam que o ouvido humano distingue vibrações de aproximadamente 20 ciclos por segundo (20 Hz) a 20.000 ciclos por segundo (20.000 Hz ou 20 kHz)? Vamos testar no programa?
Sons abaixo de 20 Hz são infrassons e acima de 20 kHz são ultrassons.
O *período* é o tempo gasto para que um ciclo seja completado. Vamos ver, no *software,* o que acontece quando modificamos o período.
Se o período é aumentado, a frequência diminui (menos ciclos completos em 1 segundo) e o som fica mais **grave**.
Se ao invés disso deixarmos o período menor, a frequência vai ser maior (mais ciclos completos, em 1 segundo) e o som vai ficar mais **agudo**.

Devemos observar que conforme aumentamos o período a frequência diminui e vice-versa, se diminuímos o período a frequência aumenta.
Outra característica das ondas sonoras é a **amplitude**. A amplitude é a altura da onda.
Vamos ver no *software* o que acontece quando modificamos a amplitude. A amplitude nos dá a intensidade do som, isto é, o volume.
COMENTÁRIOS
A velocidade de propagação das ondas é constante para um determinado meio.
O timbre é a qualidade que nos permite distinguir os sons de mesma altura e de mesma intensidade, mas emitidos por fontes diferentes.
A frequência da onda depende somente da fonte que a emitiu.

Material 3 – Estudo do Som no *software* Geogebra
Modelo matemático é uma simplificação da realidade.
O som pode ser representado por uma onda e essa onda pode ser estudada usando expressões e gráficos da Matemática. Existe uma função matemática, cujo gráfico corresponde a essa curva, é o modelo matemático para o som.
Vamos estudar o *software* GeoGebra. Com ele podemos traçar diferentes gráficos de funções matemáticas, como por exemplo, $y = x$ e $y = x^2$.
Observem que estes gráficos não correspondem à onda sonora.
Vamos traçar o gráfico da função cuja equação é $y = sen\ x$.
Observe a forma desse gráfico.
Encontre o período (em números decimais) e a frequência. Essa curva chama-se senoidal ou sinusoidal.
Essa função matemática é o modelo adequado para as ondas sonoras simples.
Neste *software*, podemos fazer transformações sobre esta curva.

Atividade 1
Questão 1: Como modificar a curva para representar o som mais forte ou mais fraco, isto é, alterando o volume do som?
Questão 2: Como modificar a curva para representar frequência, tanto maior quanto menor, ou seja mudar o tom do som, para mais agudo ou mais grave?

Atividade 2

Vamos utilizar um aplicativo disponível na internet para ver o círculo trigonométrico, o que é período e relacionar o período obtido no gráfico, em números decimais, com o número 2π.

- *Mathlet, d*isponível em: <http://www.walter-fendt.de/m14pt/sincostan_pt.htm>. Acesso em: 10 ago. 2010.

Exercícios

Trace o gráfico da função $y = 2\ sen\ (6{,}28x)$.

a) Qual é a amplitude?

b) Qual é o período?

c) Qual é a frequência?

Quais parâmetros podem ser mudados para que a nova curva retrate uma onda sonora com som:

a) mais grave;

b) mais agudo;

c) mais forte;

d) mais forte e mais agudo;

e) mais forte e mais grave;

Atividade 3

Análise do período e da frequência da função $y = sen\ (bx)$.

1) Trace a função $y = sen\ x$. Observe o gráfico. Qual é o período (em números decimais)? Qual é a frequência?

Atividade 4

1) Trace as funções $y = sen(2\pi x)$, $y = sen(4\pi x)$ e $y = sen\ (2/3)\ x$. Encontre o período no gráfico. Encontre a frequência.

2) Analise $y = senx$, $y = sen2x$. Observe que no primeiro caso o período é 2π e no segundo caso o período é a metade do período da função $y = senx$ Justifique.

3) Faça outro teste para $y = sen\ x/2$. Observe que neste caso o período é 4π, o dobro do período da função $y = sen\ x$

Já vimos que frequência é o número de ciclos completos da curva senoide que ocorrem num intervalo de uma unidade. Podemos deduzir que a frequência (f) é o inverso do período (P)? Analise todas as suas respostas, observe os gráficos, e conclua que $f = 1/P$.

Relato da Prática

A primeira prática, com os nove alunos da turma, ocupou 8 horas/aula. Em uma avaliação posterior, detectamos falhas, refizemos o plano e desenvolvemos outra experiência, com dois alunos voluntários, com duração total de 3 horas/aula.

Na segunda experiência, iniciamos falando do objetivo; em seguida conversamos um pouco sobre Música. Os alunos comentaram suas experiências na Banda da Escola e a motivação para participarem dessa experiência.

Em seguida começamos o trabalho com o *Windows Media Player*. Iniciamos com a observação do gráfico para a música *Vai Sacudir, Vai Abalar*, da Banda Cheiro de Amor. Após, trocamos para a *Nona Sinfonia de Beethoven*. Nesse momento, os alunos foram questionados sobre as diferenças entre cada música, e como o gráfico se comportava em cada uma delas, estabelecendo relações entre volume, altura e as formas correspondentes.

A próxima atividade se deu com o *software* Frequency Generation. Com esse programa, trabalhamos com as notas puras e foi possível relacionar a forma de ondas com diferentes sons. Com isso, abordamos o conceito de frequência, dando exemplos de notas musicais com diferentes frequências, conceituando sons graves e sons agudos, período e ciclo da onda. Também foi possível modificar a intensidade sonora, e, portanto, identificar sons mais fortes e mais fracos, abordando assim o conceito de amplitude da onda.

No *software* GeoGebra, os alunos traçaram gráficos variados e identificaram a função que melhor representa a onda sonora, a função seno. Conversamos sobre a noção de modelo matemático. Durante as atividades com o programa, identificaram os parâmetros da função $y= Asen(bx)$, que se relacionam com a frequência e com a intensidade sonora. A partir de uma função dada, os alunos criaram exemplos de funções associada a sons diferentes. Também determinaram o período, a frequência e a amplitude. Utilizamos o aplicativo *Mathlet* para rever os conceitos de círculo trigonométrico e de período e para relacionar o período obtido no gráfico, representado por números decimais, com o número 2π.

Com relação às hipóteses, em seus depoimentos, os alunos afirmaram que o que mais os motivou a participar dessa experiência foi o fato de ela ter envolvido Música.

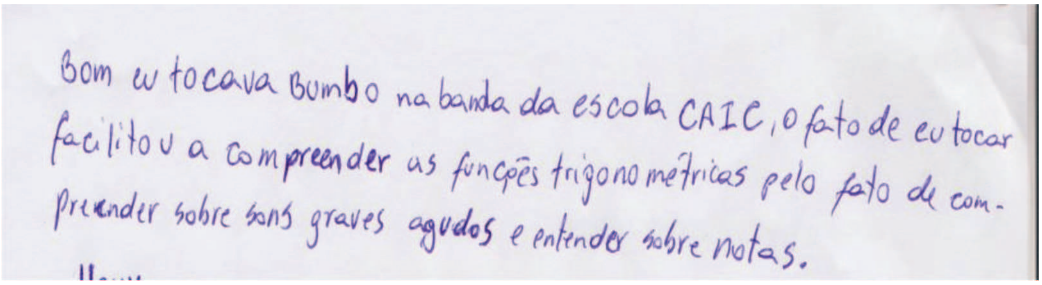
Bom eu tocava bumbo na banda da escola CAIC, o fato de eu tocar facilitou a compreender as funções trigonométricas pelo fato de com-preender sobre sons graves agudos e entender sobre notas.

Figura 15: Depoimento de aluno
Fonte: Aluno A, 3º série E.M. (2010)

"Bom eu tocava bumbo na banda da escola CAIC, o fato de eu tocar facilitou a compreender as funções trigonométricas pelo fato de compreender sobre sons graves agudos e entender sobre notas."

O trabalho com o Windows Media Player contribuiu para estabelecer relações entre o som e sua representação gráfica: sons fortes correspondem a cristas altas; em sons agudos, as cristas ficam mais próximas

O trabalho com o *software* Frequency Generator favoreceu a conclusão de que a frequência (f) é inversamente proporcional ao período (P). Ou seja, aumenta-se a frequência e o período diminui. Com vários exemplos, houve uma generalização e foi adotado este conceito ($f = 1/P$).

Nas construções realizadas no *GeoGebra*, os alunos conseguiram identificar o modelo da curva que representa um som musical, conforme imagem a seguir.

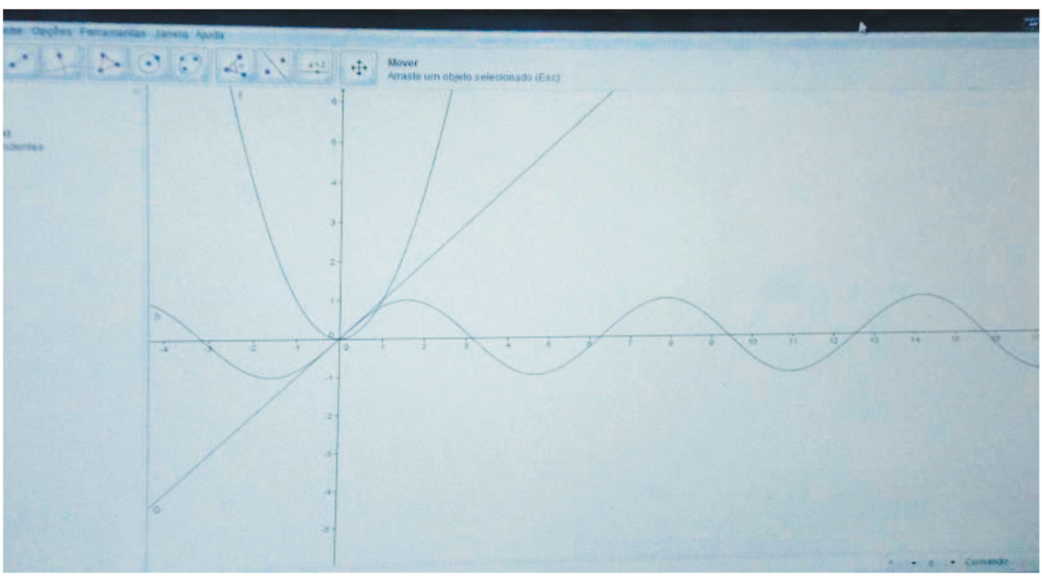

Figura 16: Curvas construídas no *GeoGebra*
Fonte: <www.geogebra.org>. Acesso em: 10 ago. 2010.

Com o Geogebra ocorreu a passagem do mundo dos sons para o mundo matemático. Nesse momento, os alunos trabalharam com o modelo matemático, em um primeiro momento, associando os parâmetros da família $y = Asen(bx)$ com as características da onda sonora, visualizadas na atividade anterior.

Posteriormente, o trabalho ficou restrito à Matemática, utilizando-se os conhecimentos anteriores. Os gráficos obtidos com o *Geogebra* têm o eixo das abscissas marcado de um em um. Construindo gráficos para funções da família $y = Asen(bx)$, os alunos visualizaram períodos em números decimais.

Após traçarem a curva $y= sen2\pi x$, eles visualizaram que o período e a frequência são iguais a 1. Após traçarem a curva $y= sen4x$, visualizaram que o período é "quase 1,5" e que a frequência pode ser obtida na calculadora, "mais ou menos 0,7".

Observamos que os períodos, no Geogebra, são representados por números decimais ou fracionários e o trabalho com o aplicativo foi importante para a formalização da Matemática que já estava sendo usada. Nesse momento, foi visto que o período 6,28 corresponde aproximadamente ao período 2π.

Conclusões e Reflexões sobre a Prática

Este trabalho trouxe sugestões para o ensino das funções trigonométricas relacionando-as com os sons musicais e utilizou diferentes recursos de tecnologia.

Na primeira experiência, iniciamos com um vídeo para introduzir o conteúdo, despertando a curiosidade e motivando os alunos. Esse recurso pôde mostrar cenários desconhecidos por eles. O vídeo, neste caso, além de sensibilizador, também foi educativo, pois aborda vários temas, como a história, a cultura, a Música e a Matemática, possibilitando, assim, um trabalho interdisciplinar e com muitas ilustrações.

Naquele momento, pressupusemos que eram necessários conhecimentos prévios sobre funções trigonométricas, porém, constatamos que esses conhecimentos não existiam. Isso nos fez interromper a experiência e voltar ao hábito tradicional de "dar aulas", usando o quadro, retomando conceitos, tais como o comportamento do seno e do cosseno no círculo trigonométrico. Essa estratégia tornou-se um problema que exigiu mudanças no plano, para uma segunda experiência: foi inserido um aplicativo que teve um efeito muito mais positivo do que a aula tradicional. Esse aplicativo contribuiu para o entendimento do conteúdo trabalhado e possibilitou retomar conteúdos anteriores.

Oliveira (2006) afirma que o aprendizado exige abstração por parte do aluno, mas pode ser facilitado com a utilização de atividades manipulativas. Nessas práticas, todas as atividades foram manipulativas, com o uso dos *softwares* citados anteriormente.

Antes de iniciar a prática, acreditávamos que, por fazer parte do cotidiano dos alunos, a Música pudesse contribuir para a aprendizagem significativa da Matemática, e que além de ser uma estratégia interessante, possibilitaria um ambiente de interação entre o objeto de estudo da aula, o professor e os alunos. Com isso, esperávamos alunos interessados durante as aulas. O interesse realmente aconteceu, mas alguns conceitos básicos sobre o som, que são necessários como âncora deste trabalho, não eram do conhecimento da maioria dos alunos, como, por exemplo, a distinção entre som alto e som forte. A utilização da música e das mídias supriu essa ausência e o gosto pela música certamente contribuiu na interação entre nós.

O estudo de Barbosa (2009) afirma que não basta apenas uma boa sequência de ensino, a interação entre alunos e professores e a participação nas atividades propostas são os principais instrumentos para que se tenha uma aprendizagem significativa em uma perspectiva construtivista. Nesse caso, nas duas experiências, houve participação ativa de todos os alunos, entre si e com o professor. .

Com relação ao planejamento, algumas inclusões poderiam ser realizadas. O vídeo trata de assuntos relacionados a várias áreas do conhecimento e poderia ter sido mais explorado. Percebemos que seria viável questionar os alunos sobre esses temas, de um modo mais amplo, para cultura geral, pois não estão ligados apenas à Matemática.

Acreditamos que também seria possível criar um ambiente de interatividade, com a criação de um *blog* com orientações sobre as atividades que realizamos. O uso de *blogs* não pode ser desprezado pela escola, pois são muitos consultados pelos alunos. Nos *blogs* dos professores, os alunos podem encontrar sugestões de *sites*, programas, leituras e avaliação das atividades e isso os tornaria mais autônomos e facilitaria a interação.

Destacamos aqui possíveis desdobramentos deste trabalho, que se encontra inserido em um projeto que propõe atividades com o uso de diferentes recursos digitais, oferecido para professores de Matemática da Rede Pública de Ensino, no município de Santana do Livramento. Tal projeto consiste na elaboração e implementação de um curso de 40 horas/aula para um público em torno de 14 professores, tendo como tema gerador o ensino de frações, das funções trigonométricas e de suas relações com a Música.

Através de ações com esse foco, pretendemos contribuir para a inserção do uso de recursos tecnológicos na prática de ensino de professores da educação básica.

Referências

BARBOSA, A. A. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem Relacionadas às Razões e as Funções Trigonométricas, Visando uma Perspectiva Construtivista. 161 p.** (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/americo_barbosa.pdf.> Acesso em: 10 ago. 2010.

GRAVINA, M. A. O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções? **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 17, p. 27-34, 1990.

HIRSCH, C. R.; WEINHOLD, M.; NICHOLS, C. Trigonometry today**. Mathematics Teacher**, v. 84, n. 2, p. 98-106, 1991.

LAZZARINI, V. **Elementos de Acústica**. Disponível em: <http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2010

MENNA BARRETO, M. **Matemática e Educação Sexual**: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. 216 p. (Dissertação de Mestrado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto alegre, 2007. Disponível em: <http://143.54.226.61/~vclotilde/>. Acesso em: 10 set. 2010.

MOREIRA**,** M. A**.;** CABALLERO**,** M. C**.;** RODRÍGUEZ**,** M. L. **Actas Del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo.** Burgos, España. p. 19-44. 1997.

OLIVEIRA, F. C. . **Dificuldades no Processo Ensino Aprendizagem de Trigonometria por meio de Atividades. 74 p.** 2006. (Dissertação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e da Terra). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

PRIOLLI, M. L. **Princípios Básicos da Música para a Juventude**: 2. Vol. Rio de Janeiro: Casa Oliveira de Músicas, 1987.