

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Decomposição nula de grafos unicíclicos

por

Maikon Machado Toledo

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Co-orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2019.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Toledo, Maikon Machado

Decomposição nula de grafos unicíclicos / Maikon Machado Toledo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2019.

104 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística, Porto Alegre, 2019.

Orientador: Trevisan, Vilmar; Co-orientador: Allem, Luiz Emilio

Tese: Matemática Aplicada.

árvores, unicíclicos, suporte, emparelhamento, independência, número de emparelhamento, número de independência

Decomposição nula de grafos unicíclicos

por

Maikon Machado Toledo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de Grafos

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Co-orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Hoppen
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Elismar da Rosa Oliveira
PPGMat-UFRGS

Prof. Dr. Diego Orlando Bravo Guerrero
Udelar

Tese defendida e aprovada em
18 de Dezembro de 2019.

Prof. Dr. Esequia Sauter
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha família pela educação que me foi dada dentro de casa, e que apesar das dificuldades não mediram esforços para que eu tivesse a oportunidade de estudar.

Agradeço, em especial, à minha mãe e ao meu pai, Jaqueline Beatriz Machado e João Carlos Toledo, que sempre me deram bons conselhos que ajudaram a formar o meu caráter e a minha conduta. E, principalmente, pela luta para que eu pudesse realizar meus sonhos.

Agradeço à minha namorada, Débora Ribeiro Alves, por todo amor, carinho e companheirismo que tem me proporcionado desde o início do nosso namoro.

Agradeço ao meu primo e quase irmão, Jonathan Toledo da Silva, pela amizade, pelas conversas e pelo companheirismo que foram fundamentais durante toda minha vida.

Ao meu grande amigo e colega, Guilherme Porto da Silva, pela grande parceria nos estudos e nas viagens aos congressos, e, principalmente, pela amizade.

Ao Prof. Dr. Luiz Emilio Allem, por ter me co-orientado durante todo o doutorado.

Ao Prof. Dr. Vilmar Trevisan, pela orientação, pelas oportunidades que me deu, pelas conversas e pelos conselhos que foram primordiais ao longo da minha formação acadêmica.

Aos Profs. Drs. Carlos Hoppen, Elismar da Rosa Oliveira e Diego Orlando Bravo Guerrero, componentes da banca examinadora, pela atenção ao terem estudado e criticado este trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 NOÇÕES BÁSICAS E MATRIZ DE ADJACÊNCIA	9
2.1 Definições preliminares	9
2.2 Matriz de adjacência e grafos singulares	16
3 DECOMPOSIÇÃO NULA DE ÁRVORES	19
3.1 Suporte	19
3.2 Decomposição nula de árvores	21
4 NÚMEROS DE INDEPENDÊNCIA E EMPARELHAMENTO DE GRAFOS UNICÍCLICOS	27
4.1 Grafos unicíclicos singulares	27
4.2 Número de independência de grafos unicíclicos	33
4.3 Número de emparelhamento de grafos unicíclicos	41
5 ESPAÇO NULO DE GRAFOS UNICÍCLICOS	50
5.1 Espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo I	50
5.2 Espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo II	57

6	DECOMPOSIÇÃO NULA DE GRAFOS UNICÍCLICOS	63
6.1	Suporte, core e conjunto dos N -vértices de grafos unicíclicos do Tipo I	63
6.2	Suporte, core e conjunto dos N -vértices de grafos unicíclicos do Tipo II	71
6.3	Decomposição nula de grafos unicíclicos	75
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	88
7.1	Decomposição de Gallai-Edmonds de grafos unicíclicos	89
7.2	Decomposição de Zito de grafos unicíclicos	90
7.3	Nulidade máxima e mínima de uma sequência de graus unicíclica	91
7.4	Fórmulas para a quantidade de emparelhamentos e conjuntos independentes máximos de grafos unicíclicos	95
7.5	Decomposição nula de grafos threshold	95
7.6	Conclusão	96
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98

LISTA DE FIGURAS

2.1	Grafo G	10
2.2	Subgrafos de G	10
2.3	Caminho e ciclo.	11
2.4	União dos grafos G_1 e G_2	11
2.5	Floresta com 3 árvores T_1 , T_2 e T_3	12
2.6	Grafo unicíclico G	13
2.7	Conjunto independente.	14
2.8	Emparelhamento e emparelhamento perfeito.	14
2.9	Remoção do vértice u	15
2.10	Grafo $G - H$	16
2.11	Ciclo C_4	17
2.12	Árvore não singular.	18
3.1	Suporte de S em um grafo G	20
3.2	Suporte deste grafo unicíclico não é um conjunto independente.	21
3.3	Árvore T	22
4.1	Grafos unicíclicos do Tipo I e II	28
4.2	Grafo unicíclico G do Tipo I e o seu conjunto independente $I_1 \cup I_2$	35
4.3	Grafo unicíclico G e suas subárvores.	37
4.4	Grafo unicíclico G do Tipo II e o seu conjunto independente I	38
4.5	Grafo unicíclico do Tipo II e o suporte de suas subárvores.	40
4.6	Caminho M -alternante e caminho M -aumentante.	41
4.7	Grafo unicíclico G do Tipo I e o seu emparelhamento máximo M	42
4.8	Caminho M -aumentante P	43

4.9	Grafo unicíclico do Tipo <i>I</i> e o suporte de suas subárvores. . . .	44
4.10	Grafo unicíclico <i>G</i> do Tipo <i>II</i> e o seu emparelhamento <i>M</i>	46
4.11	Grafo unicíclico do Tipo <i>II</i> e suas subárvores T_1, T_2, T_3 e T_4 . . .	48
5.1	Grafo <i>G</i>	51
6.1	Grafo unicíclico <i>G</i> e seu suporte.	86
6.2	Grafo unicíclico <i>G</i> e seu suporte.	87

LISTA DE TABELAS

4.1	Suporte e N -vértices das subárvores T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5	40
4.2	Suporte, core e N -vértices das árvores T_1, T_2, T_3 e T_4	48

LISTA DE SÍMBOLOS

x_v	Coordenada de um vetor x associada a um vértice v .
ε_λ	O autoespaço de $A(G)$ associado a λ .
$A(G)$	Matriz de adjacência de um grafo G .
$ B $	Cardinalidade do conjunto B .
d_i	Grau do vértice v_i .
$N(v)$	O conjunto dos vizinhos de um vértice v .
$N[S]$	Vizinhança fechada do conjunto S de vértices.
$G\langle S \rangle$	Subgrafo de G induzido por S .
P_n	Caminho de n vértices.
C_n	Ciclo de n vértices.
$G - u$	Grafo resultante da remoção de um vértice u de um grafo G .
$G - H$	Grafo obtido de G através da remoção dos vértices do seu subgrafo H .
$G \cup H$	Grafo resultante da união dos grafos G e H .
$G\{v\}$	Árvore pendente de um grafo unicíclico G .
$\mathcal{I}(G)$	O conjunto de todos conjuntos independentes de cardinalidade máxima em G .
$\mathcal{M}(G)$	O conjunto de todos emparelhamentos de cardinalidade máxima em G .
$EG(G)$	O conjunto de todos vértices não saturados por algum emparelhamento de cardinalidade máxima em G .
$B(G)$	O conjunto dos vizinhos de $EG(G)$ que não estão em $EG(G)$.
$C(G)$	O conjunto dos vértices de um grafo G que não estão em $EG(G)$ e nem em $B(G)$.
$\eta(G)$	Nulidade de um grafo G .
$\mathcal{N}(G)$	Espaço nulo de um grafo G .

$\mathcal{N}(H) \upharpoonright_H^G$	Espaço nulo estendido de um subgrafo H de um grafo G .
$\mathcal{F}_S(T)$	S -floresta de uma árvore T .
$\mathcal{F}_N(T)$	N -floresta de uma árvore T .
$\text{Supp}_G(x)$	Suporte de um vetor x pertencente ao \mathbb{R}^n em G .
$\text{Supp}_G(S)$	Suporte de um subconjunto S do \mathbb{R}^n em G .
$\text{Supp}(G)$	Suporte de um grafo G .
$\text{Core}(G)$	O core de um grafo G .
$\mathcal{G}_S(G)$	S -grafo de um grafo G .
$\mathcal{G}_N(G)$	N -grafo de um grafo G .
$\alpha(G)$	Número de independência de um grafo G .
$\nu(G)$	Número de emparelhamento de um grafo G .
$a(s)$	Número de aniquilação de uma sequência de graus s .
$\ell(s)$	Número de 1's de uma sequência de graus s .
\mathcal{U}_s	O conjunto de todos unicíclicos com sequência de graus s .
$\text{null}_M(\mathcal{U}_s)$	Nulidade máxima entre todos unicíclicos em \mathcal{U}_s .
$\text{null}_m(\mathcal{U}_s)$	Nulidade mínima entre todos unicíclicos em \mathcal{U}_s .

RESUMO

Nesta tese, obtemos informações estruturais de um grafo unicíclico usando seu espaço nulo. Observando as entradas dos autovetores associados ao autovalor zero, obtemos a decomposição nula de um grafo. Utilizando a decomposição nula desse grafo unicíclico, obtemos fórmulas fechadas para os números de emparelhamento e independência do mesmo. Algumas dessas fórmulas permitem o cálculo desses dois parâmetros através da decomposição nula de subárvores do grafo unicíclico enquanto outras possibilitam o cálculo através da decomposição nula do próprio grafo unicíclico. Além disso, caracterizamos um grafo unicíclico singular através do suporte de suas árvores pendentes e obtemos uma base para o espaço nulo desse grafo usando uma base do espaço nulo de suas subárvores.

ABSTRACT

In this dissertation, we obtain structural information of a unicyclic graph using its null space. Observing the entries of the eigenvectors corresponding to the eigenvalue zero we obtain the null decomposition of a graph. Using the null decomposition of a unicyclic graph we obtain closed formulas for the matching and independence numbers of unicyclic graphs. Some of these formulas allows one to compute these two parameters using the null decomposition of the subtrees of the unicyclic graph while others make it possible to compute these parameters by null decomposition of the unicyclic graph itself. Moreover, we obtain a characterization of a singular unicyclic graph using the support of their pendant trees and we obtain a basis for the null space of unicyclic graph using a basis of the null space of their subtrees.

1 INTRODUÇÃO

Fiedler, em 1975, foi o primeiro a relacionar a estrutura do grafo com seus autovetores [21]. Um dos mais importantes resultados sobre a matriz laplaciana é o *Teorema da Monotocidade de Fiedler* [7]. Esse teorema relaciona a estrutura dos vértices de um grafo com os sinais das entradas de um autovetor associado ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana. O segundo menor autovalor da matriz laplaciana, mais conhecido por conectividade algébrica, desempenha um papel muito importante na Teoria Espectral de Grafos. Esse autovalor ganhou destaque após o Fiedler mostrar que um grafo é conexo se, e somente se, o segundo menor autovalor laplaciano é diferente de zero [22]. Esse resultado motivou que tal autovalor fosse chamado de conectividade algébrica. Em 1988, Powers [58] também obteve relações entre os autovetores e propriedades dos grafos. Em 1998, Kirkland e Fallat introduziram a noção de componentes de Perron de um vértice em um grafo com pesos e relacionaram essas componentes com os autovetores associados à conectividade algébrica [43]. Sander e Sander, em 2009, apresentaram uma técnica interessante, chamada de composição-decomposição, que correlaciona autovetores de uma árvore com certos autovetores de uma floresta esquelética associada a mesma [59]. Seus resultados permitiram caracterizar as árvores cujos autoespaços admitem uma base formada por vetores com entradas em $\{-1, 0, 1\}$. Recentemente, em 2018, Jaume e Molina relacionaram os números de independência e emparelhamento de árvores com os vetores do espaço nulo de sua matriz de adjacência [38].

Nosso trabalho, em certo sentido, se assemelha ao trabalho de Fiedler, visto que também usamos as entradas de autovetores para obter informações estruturais de um grafo. A diferença é que observamos as entradas dos autovetores associados ao autovalor zero. Outra diferença em relação ao trabalho de Fiedler é que não nos importa o sinal das entradas, mas sim se a entrada é zero ou diferente de zero. Mais precisamente, a técnica que utilizamos consiste em analisar o *suporte*

de um grafo unicíclico. O *suporte* de um grafo é um subconjunto de vértices do grafo tal que pelo menos uma de suas respectivas entradas de algum vetor do espaço nulo da matriz de adjacência é diferente de zero. O conceito de suporte de um grafo é o mais importante do nosso trabalho, pois é a partir dele que definimos a decomposição nula de um grafo. Existem trabalhos que comprovam que o suporte de um grafo nos fornece informações estruturais sobre o mesmo. Por exemplo, está implícito em [53] (veja a página 18 dessa referência) que dois vértices do suporte de uma árvore nunca podem ser vizinhos. Vale destacar que o autor de [53] chamava os vértices do suporte de 0-essenciais. Recentemente, Jaume e Molina [38] demonstraram, de uma maneira diferente, que o suporte de uma árvore é sempre um conjunto independente.

Em [38], Jaume e Molina, usando o conceito de suporte, definem a decomposição nula de árvores. Em geral, a decomposição nula divide uma árvore T em duas florestas (uma delas pode ser vazia), uma floresta formada por árvores singulares e outra formada por árvores não singulares. Eles estudaram cada uma destas florestas e, através deste estudo, obtiveram fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de árvores (Teorema 3.5). Além disso, conseguiram fórmulas fechadas para o número de conjuntos independentes máximos de árvores (veja Teorema 4.17 de [38]) e para o número de emparelhamentos máximos de árvores (veja Corolário 4.16 de [38]).

Nosso principal objetivo nesta tese é obter informações estruturais de grafos unicíclicos através dos autovetores associados ao autovalor zero da matriz de adjacência, ou seja, obter propriedades de grafos unicíclicos através de seu espaço nulo. Em outras palavras, nos propomos a estudar quais características podemos obter de um grafo unicíclico através de sua decomposição nula. Note que uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares é muito importante, pois é nesta classe de grafos unicíclicos que o espaço nulo da matriz de adjacência é não trivial, por consequência, é nesta classe que o suporte é não vazio. Em [51], os autores obtêm

uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares e além disso, constroem uma base para espaço nulo de grafos unicíclicos. Nesta tese, também obtemos uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares e uma base para o espaço nulo de grafos unicíclicos, porém a caracterização e a base são muito diferentes das encontradas em [51]. Mais precisamente, os autores de [51] determinam uma caracterização e uma base de um grafo unicíclico G tomando de pares de subconjuntos de vértices de G com determinadas propriedades em relação as suas vizinhanças.

Como aplicação de nossos estudos, destacamos a obtenção de fórmulas fechadas para os números de emparelhamento e independência de grafos unicíclicos, lembrando que os números de emparelhamento e independência de um grafo G são denotados por $\nu(G)$ e $\alpha(G)$, respectivamente. O estudo de emparelhamentos e conjuntos independentes é um clássico da teoria de grafos. Na literatura, podem ser encontrados inúmeros trabalhos sobre emparelhamentos e conjuntos independentes que abordam essas estruturas combinatórias sob várias perspectivas. Dentre essas perspectivas temos a determinação do tamanho de emparelhamentos e conjuntos independentes máximos ($\nu(G)$ e $\alpha(G)$), participação de vértices em conjuntos independentes máximos, existência de emparelhamento máximo que utilize determinada aresta, etc. A seguir vamos fazer um breve histórico de trabalhos desenvolvidos sobre emparelhamentos e conjuntos independentes.

Historicamente, a teoria de emparelhamentos iniciou em grafos bipartidos [57]. Um dos primeiros estudos sobre emparelhamentos em grafos foi registrado em 1916, quando o matemático húngaro Dénes König publicou dois artigos gêmeos, um em húngaro [44] e o outro em alemão [46], no qual mostrou que todo o grafo bipartido regular admite um emparelhamento perfeito. Em 1931, König demonstrou o Teorema minimax [45], mais conhecido como Teorema de König-Egerváry, que é um teorema muito importante dentro da teoria de grafos. O Teorema de König-Egerváry diz que, em grafos bipartidos, a cardinalidade do maior emparelhamento é igual à cardinalidade da menor cobertura de vértices. O nome König-Egerváry

do teorema vem do fato de que, em 1931, o matemático húngaro Jenő Egerváry também demonstrou o Teorema minimax [20], porém de uma maneira mais geral, mais precisamente, para grafos com pesos. Em 1947, Tutte [63] estabeleceu condições necessárias e suficientes para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo qualquer.

Em 1957, Claude Berge introduziu a noção de caminho aumentante e mostrou que um emparelhamento M em G é de cardinalidade máxima se e somente se não existir caminho M -aumentante em G [10]. No ano de 1964, Gallai estabeleceu a existência de uma teoria de decomposição de um grafo qualquer em termos de seus emparelhamentos máximos [48]. Em 1965, Jack Edmonds [19] forneceu um método eficiente para obter essa decomposição, conhecida hoje como decomposição de Gallai-Edmonds. O *Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds* ([48], Capítulo 3) nos fornece várias informações sobre emparelhamentos máximos em um grafo qualquer G , que inclui, por exemplo, uma fórmula fechada para $\nu(G)$. No Capítulo 7, vamos falar um pouco mais sobre essa decomposição, mais precisamente, sobre uma possível relação da decomposição de Gallai-Edmonds de grafos unicíclicos com a decomposição nula.

Em 1955, Kuhn criou o método húngaro, este algoritmo determina, em tempo polinomial, um emparelhamento máximo em grafos bipartidos [47]. Esse algoritmo é chamado de húngaro porque ele é baseado fortemente nos trabalhos dos matemáticos húngaros König e Egerváry. Posteriormente, em 1973, Hopcroft e Karp publicaram um artigo [37], no qual também desenvolvem um algoritmo polinomial que encontra um emparelhamento máximo em grafos bipartidos. Vários outros matemáticos estudaram e desenvolveram algoritmos que obtêm o emparelhamento máximo em grafos bipartidos e não bipartidos [24, 27, 28, 34, 42].

Um problema bem famoso é o problema das n rainhas [9], que foi estudado por vários matemáticos, inclusive Gauss [9]. O problema consiste em dispor n rainhas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ de tal maneira que nenhuma rainha possa

ser atacada por outra. Podemos modelar este problema da seguinte forma: as casas do tabuleiro são os vértices e um vértice v_i é adjacente ao vértice v_j se uma rainha posicionada na casa v_i pode ser atacada por uma rainha posicionada em v_j . Logo resolver o problema das n rainhas é equivalente a encontrar um conjunto independente de tamanho n em um grafo com n^2 vértices. O primeiro a resolver esse problema no caso em que $n = 8$ foi Nauck [52], que em 1850, apresentou todas as 92 soluções. Encontrar conjuntos independentes máximos é um problema *NP*-completo [31]. Há diversos algoritmos que encontram aproximações ou soluções exatas de conjuntos independentes em grafos [13, 49, 50].

Note que, em geral, um conjunto independente não é único. Em 2009, Yufei Zhao [65] estudou o problema de determinar o número de conjuntos independentes em grafos regulares. Em 2010, David Galvin e Yufei Zhao [30] determinaram uma cota superior para o número de conjuntos independentes de grafos com grau máximo menor ou igual a 5. Em 2012, James Alexander, Jonathan Cutler e Tim Mink [2] estabeleceram uma cota superior para o número de conjuntos independentes de tamanho t em grafos bipartidos com grau mínimo fixo. Vários matemáticos já estudaram o problema de determinar o número de conjuntos independentes máximos [17, 40] em um grafo.

Em 1991, Jennifer Zito [66] forneceu uma fórmula fechada para o maior número de conjuntos independentes máximos entre todas as árvores com n vértices e além disso fornece famílias que alcançam o valor máximo. Para obter este resultado, Zito precisou definir uma partição dos vértices de um grafo usando propriedades que estes vértices cumpriam em relação a participação em conjuntos independentes máximos. Essa partição é conhecida como a decomposição de Zito. No Capítulo 7, vamos comentar mais sobre a decomposição de Zito de grafos unicíclicos e sua provável relação com a decomposição nula.

Determinar o valor de $\alpha(G)$ é útil para diversos problemas clássicos da teoria da computação [23]. O problema de calcular $\alpha(G)$ é *NP*-difícil [41]. Por

outro lado, esse problema é polinomial para várias classes de grafos como árvores, bipartidos, perfeitos, entre outros [36]. Acreditamos que seja possível adaptar os algoritmos de árvores e de bipartidos de tal forma que funcionem em grafos unicíclicos, porém não encontramos uma referência onde isto seja feito. De todo o modo, os resultados desta tese implicam que determinar $\alpha(G)$, onde G é um grafo unicíclico, é polinomial. Em 1982, James Shearer [60] obteve uma cota inferior para o número de independência de um grafo G livre de triângulos e grau médio fixo. Em 1988, Frieze [25] estabeleceu uma cota para o número de independência de grafos aleatórios. Em 1998, Noga Alon e Nabil Kahale [6] desenvolveram um algoritmo que calcula uma aproximação de $\alpha(G)$. Outros matemáticos também estudaram e encontraram algoritmos para calcular $\alpha(G)$ [12, 15, 16, 55].

A relevância destes dois parâmetros ($\alpha(G)$ e $\nu(G)$) é, portanto, incontestável tanto no universo acadêmico quanto nas aplicações práticas de nossa sociedade inovadora. É importante destacar que nossos resultados permitem concluir que tais parâmetros podem ser obtidos usando ferramentas de Álgebra Linear.

Entendemos que no caso de grafos unicíclicos, estes parâmetros de independência e emparelhamento podem ser obtidos por outras ferramentas algorítmicas. Mas a obtenção desses parâmetros através da decomposição nula é uma amostra de que nossa técnica pode ter outras aplicações importantes.

Neste trabalho, obtemos fórmulas fechadas para $\alpha(G)$ e $\nu(G)$ de um grafo unicíclico G . Para isto, foi necessário estudar separadamente a decomposição nula dos grafos unicíclicos do Tipo *I* e dos grafos unicíclicos do Tipo *II* (veja a definição no Capítulo 4). Em decorrência deste estudo, obtemos duas espécies, distintas, de fórmulas que são: as fórmulas que permitem o cálculo de $\alpha(G)$ e $\nu(G)$ a partir da decomposição nula de subárvores de G e as fórmulas que permitem o cálculo de $\alpha(G)$ e $\nu(G)$ a partir da decomposição nula de G .

Esta tese está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 2, definimos alguns conceitos preliminares e fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho, como os conceitos de conjunto independente, emparelhamento, número de independência e número de emparelhamento. Também falamos sobre alguns conceitos básicos da matriz de adjacência e grafos singulares.

No Capítulo 3, introduzimos os conceitos de suporte, core, N -vértices e decomposição nula de um grafo. Falamos principalmente sobre o artigo “Null decomposition of trees” [38] de Jaume e Molina, mais especificamente, falamos sobre a decomposição nula de árvores e sobre as fórmulas fechadas dos números de independência e emparelhamento de árvores (Teorema 3.5) obtidas através desta decomposição.

Nos Capítulos 4, 5 e 6, apresentamos nossas contribuições. No Capítulo 4, obtemos uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes (Teorema 4.7) e, principalmente, as fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos (Teoremas 4.11, 4.13, 4.16 e 4.17). Estas fórmulas permitem o cálculo dos números de independência e emparelhamento de um grafo unicíclico através da decomposição nula de suas subárvores.

No Capítulo 5, construímos uma base para o espaço nulo de grafos unicíclicos usando uma base do espaço nulo de suas subárvores. Essas contribuições são cruciais para, no Capítulo 6, relacionarmos a decomposição nula de um grafo unicíclico com a decomposição nula de suas subárvores.

No Capítulo 6, descrevemos o suporte, o core e os N -vértices de um grafo unicíclico em função do suporte, do core e dos N -vértices de suas subárvores, ou seja, obtemos a decomposição nula de um grafo unicíclico através da decomposição nula de suas subárvores. E como aplicação, obtemos as fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos (Teoremas 6.12 e

6.15). Diferentemente das fórmulas fechadas do Capítulo 4, as fórmulas do Capítulo 6 possibilitam a computação destes parâmetros utilizando a decomposição nula do grafo unicíclico.

No Capítulo 7, apresentamos cinco problemas futuros que vão nos direcionar nas próximas investigações sobre este tópico. Além disso, fazemos algumas considerações finais sobre os resultados alcançados e os possíveis avanços que a teoria de decomposição nula pode ter.

2 NOÇÕES BÁSICAS E MATRIZ DE ADJACÊNCIA

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção, apresentamos alguns conceitos preliminares e de suma importância para o desenvolvimento do nosso trabalho, como os conceitos de conjunto independente, emparelhamento, número de independência e número de emparelhamento. Já na segunda, falamos sobre alguns conceitos básicos da matriz de adjacência e principalmente das árvores singulares. Para mais detalhes recomendamos a leitura das referências [1, 14, 18, 26].

2.1 Definições preliminares

Seja um grafo $G = (V, E)$. Se u e v pertencem a V e $e = \{u, v\} \in E$, dizemos que a aresta e incide nos vértices u e v ou ainda que u e v são vizinhos (adjacentes). O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice v é chamado de vizinhança de v e é denotada por $N(v)$, ou seja, $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$. A vizinhança fechada de um vértice v , denotada por $N[v]$, é a união da vizinhança de v com o próprio vértice v , ou seja, $N[v] = \{v\} \cup N(v)$. Além disso, a vizinhança fechada de um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, denotada por $N[S]$, é dada por $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v]$. Neste trabalho, consideramos apenas grafos sem arestas ligando um vértice a si mesmo (laços), sem arestas múltiplas (mais de uma aresta incidindo no mesmo par de vértices) e sem orientação. Tais grafos são chamados grafos simples. Considere o grafo $G = (V, E)$ da Figura 2.1. Note que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, no qual $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_5\}$, $e_3 = \{v_1, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$, $e_5 = \{v_2, v_5\}$, $e_6 = \{v_5, v_6\}$ e $e_7 = \{v_3, v_6\}$.

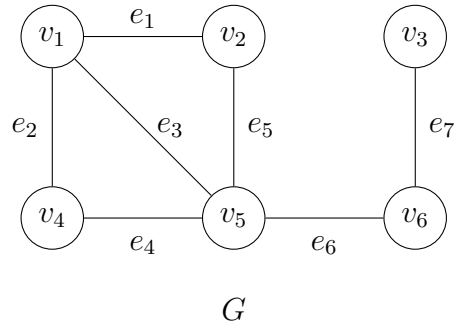


Figura 2.1 Grafo G .

Definição 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dizemos ainda que G' é um subgrafo de $G = (V, E)$ induzido pelos vértices de V' , se dados dois vértices de V' , então eles são adjacentes em G' se, e somente se, são adjacentes em G . Quando G' for um subgrafo de G induzido por V' , o denotaremos por: $G\langle V' \rangle$.*

Os grafos $G\langle\{v_1, v_2, v_4, v_5\}\rangle$ e H da Figura 2.2 são subgrafos do grafo G da Figura 2.1. Além disso, o grafo $G\langle\{v_1, v_2, v_4, v_5\}\rangle$ é um subgrafo de G induzido pelos vértices $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.



Figura 2.2 Subgrafos de G .

Definição 2.2. *Um passeio de v_1 a v_k é uma sequência finita de vértices (v_1, v_2, \dots, v_k) de um grafo $G = (V, E)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$.*

Dizemos que um passeio (v_1, v_2, \dots, v_k) é fechado se $v_1 = v_k$. Um caminho é um passeio (v_1, v_2, \dots, v_k) em que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq k$. Um

ciclo é um passeio fechado (v_1, v_2, \dots, v_k) no qual, $v_1 \neq v_l$, $v_i \neq v_j$, para $i \neq j$ e $2 \leq i, j, l \leq k - 1$. Um caminho e um ciclo com n vértices são denotados por P_n e C_n , respectivamente. O comprimento de um caminho ou de um ciclo é dado pelo número de arestas pelos quais cada um é constituído.

A Figura 2.3 nos dá um exemplo de um caminho $P_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ com 4 vértices e um ciclo C_5 com 5 vértices, respectivamente.

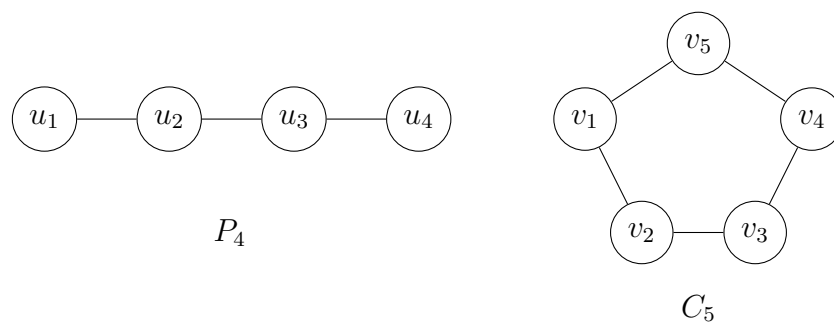


Figura 2.3 Caminho e ciclo.

Definição 2.3. *Sejam $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_m = (V_m, E_m)$ grafos com $V_i \cap V_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. O grafo união (denotado por $\bigcup_{k=1}^m G_k$) é aquele cujos vértices e arestas são $\bigcup_{k=1}^m V_k$ e $\bigcup_{k=1}^m E_k$, respectivamente.*

A Figura 2.4 exibe a união dos grafos G_1 e G_2 .

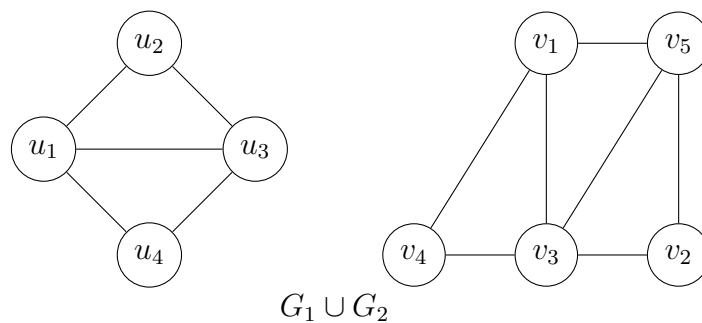


Figura 2.4 União dos grafos G_1 e G_2 .

Definição 2.4. Dizemos que um grafo é conexo se, dados dois vértices quaisquer, houver pelo menos um caminho que os liga. Caso não haja esse caminho para algum par de vértices, dizemos que o grafo é desconexo.

Nas Figuras 2.4 e 2.1 temos um exemplo de um grafo desconexo e um conexo, respectivamente.

A seguir definiremos as duas classes de grafos que trabalhamos nesta tese, que são as árvores e os grafos unicíclicos.

Definição 2.5. Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo sem ciclos é chamado de floresta.

O nome floresta é bem sugestivo visto que grafos deste tipo podem ser obtidos através da união de várias árvores.

A Figura 2.5 nos dá um exemplo de floresta formada pela união das três árvores T_1 , T_2 e T_3 .

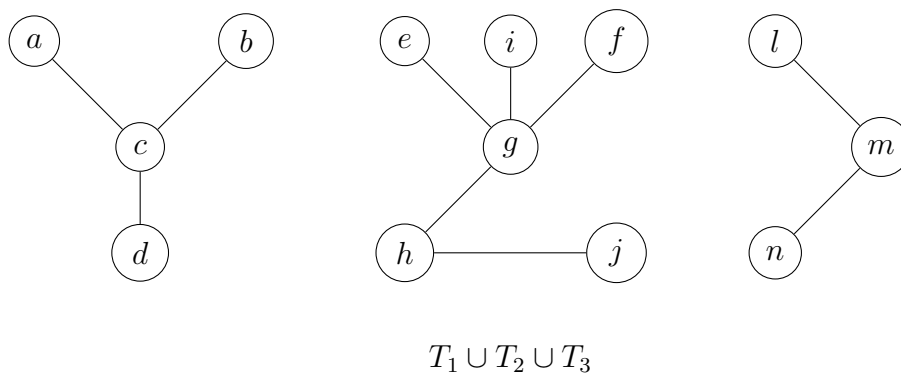


Figura 2.5 Floresta com 3 árvores T_1 , T_2 e T_3 .

Definição 2.6. Um grafo unicíclico é um grafo conexo que contém somente um ciclo como subgrafo.

Na Figura 2.6 temos um exemplo de um grafo unicíclico.

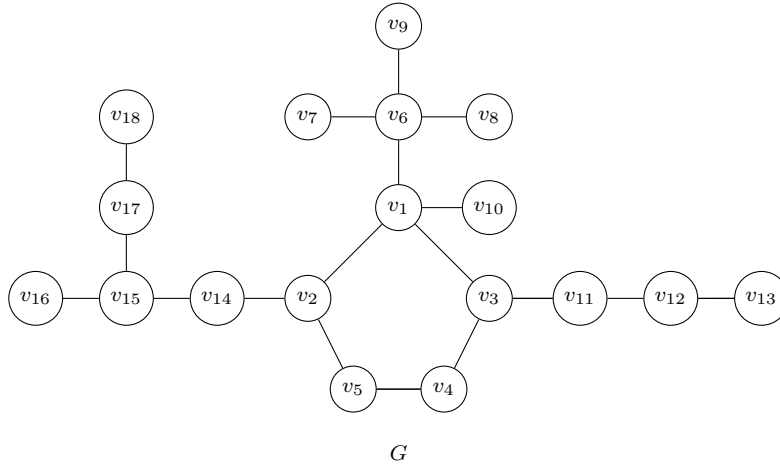


Figura 2.6 Grafo unicíclico G .

A seguir definiremos dois conceitos importantes que serão usados durante todo nosso trabalho, que são os conceitos de conjunto independente e emparelhamento.

Definição 2.7. *Um conjunto independente (ou estável) I de um grafo G é um subconjunto de vértices de G tal que quaisquer dois vértices em I não são adjacentes. Denotaremos por $\mathcal{I}(G)$ o conjunto de todos conjuntos independentes de cardinalidade máxima em G . Além disso, o número de independência de um grafo G , denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade de um conjunto independente de cardinalidade máxima de G .*

A seguir temos um exemplo ilustrando os conceitos definidos acima. Na Figura 2.7, os subconjuntos de vértices $\{a, b, c, l, k, w\}$, $\{a, b, c, l, k, v\}$ e $\{a, b, c, l, k, u\}$ do grafo unicíclico G são os únicos conjuntos independentes de cardinalidade máxima de G . Portanto,

$$\mathcal{I}(G) = \{\{a, b, c, l, k, w\}, \{a, b, c, l, k, v\}, \{a, b, c, l, k, u\}\},$$

e $\alpha(G) = |\{a, b, c, l, k, v\}| = 6$.

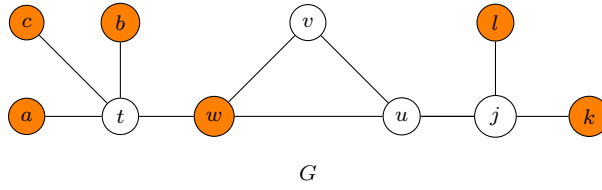


Figura 2.7 Conjunto independente.

Definição 2.8. Um emparelhamento M de um grafo G é um conjunto de arestas de G tal que quaisquer duas arestas em M não possuem vértices em comum. Um vértice de G é dito saturado por M se existe uma aresta de M que incide neste vértice, caso contrário é dito não saturado por M . Um emparelhamento é dito perfeito se satura todos os vértices de G . Denotaremos por $EG(G)$ o conjunto de todos vértices não saturados por algum emparelhamento de cardinalidade máxima em G . Além disso, o número de emparelhamento de um grafo G , denotado por $\nu(G)$, é a cardinalidade de um emparelhamento de cardinalidade máxima de G . Denotaremos por $\mathcal{M}(G)$ o conjunto de todos emparelhamentos de cardinalidade máxima em G .

Na Figura 2.8, a árvore T_1 tem emparelhamento $\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_6\}\}$ e a árvore T_2 tem emparelhamento perfeito $\{\{v_7, v_9\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_{11}, v_{14}\}, \{v_{12}, v_{13}\}\}$. Os emparelhamentos máximos de T_1 são

$$\mathcal{M}(T_1) = \{\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_6\}\}, \{\{v_1, v_3\}, \{v_5, v_6\}\}, \{\{v_1, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}\}.$$

Portanto, $\nu(T_1) = 2$, $\nu(T_2) = 4$, $EG(T_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ e $EG(T_2) = \emptyset$.

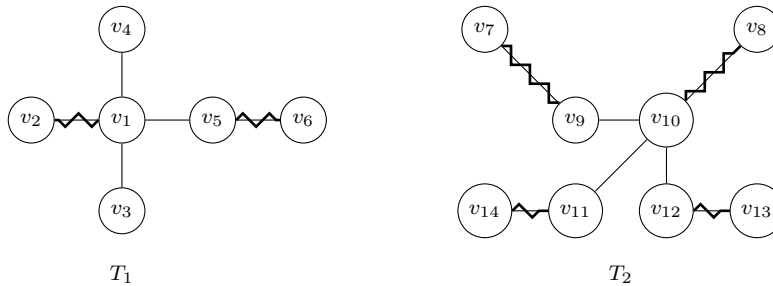


Figura 2.8 Emparelhamento e emparelhamento perfeito.

Definição 2.9. Dado um grafo $G = (V, E)$. A remoção de um vértice $u \in V$ fornece o grafo $G - u = (V_u, E_u)$, onde

$$V_u = V - \{u\} \text{ e } E_u = E - \{\{v, u\} : v \in N(u)\}.$$

Em outras palavras, o grafo $G - u$ é obtido removendo do grafo G o vértice u e todas as arestas incidentes a u .

A Figura 2.9 nos dá um exemplo de um vértice u removido do grafo G .

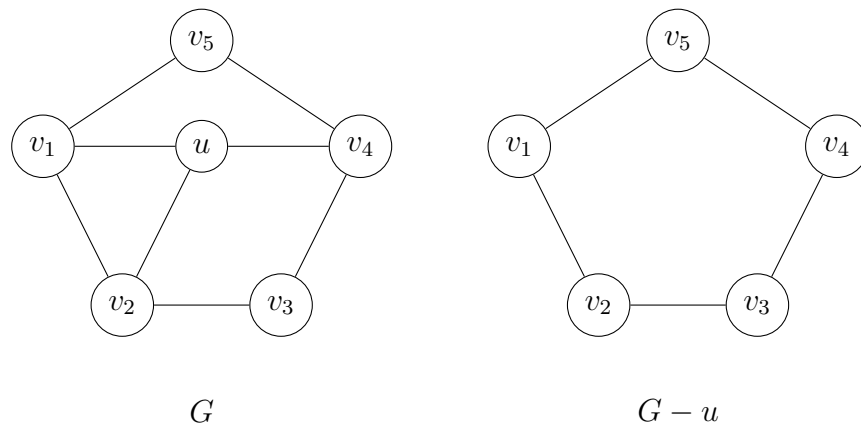


Figura 2.9 Remoção do vértice u .

Definição 2.10. Seja H um subgrafo de um grafo G . A diferença entre G e H , denotado por $G - H$, é o subgrafo de G induzido por $V(G) - V(H)$, ou seja, $G - H = G \langle V(G) - V(H) \rangle$.

A Figura 2.10 exhibe um grafo G e o subgrafo $G - H$ que é obtido de G removendo todos os vértices do seu subgrafo H .

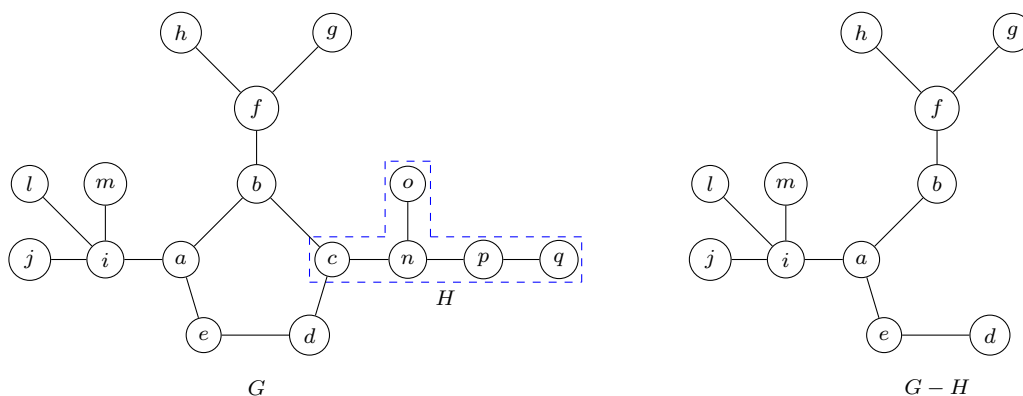


Figura 2.10 Grafo $G - H$.

2.2 Matriz de adjacência e grafos singulares

Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices, com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A matriz de adjacência de G , denotada por $A(G)$, é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas a_{ij} são:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

A nulidade de um grafo G , denotada por $\eta(G)$, é a nulidade de sua matriz de adjacência $A(G)$, ou seja, é a multiplicidade de zero como autovalor de $A(G)$, ou equivalentemente, a dimensão do espaço nulo de $A(G)$. Note que a nulidade de G não depende do modo como seus vértices são rotulados.

Denote por ε_λ o autoespaço de $A(G)$ associado a λ , ou seja, $\varepsilon_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : A(G)x = \lambda x\}$. O autoespaço associado ao autovalor zero (ε_0) é o foco do nosso trabalho e denotaremos por $\mathcal{N}(G)$.

A Figura 2.11 exhibe o ciclo C_4 .

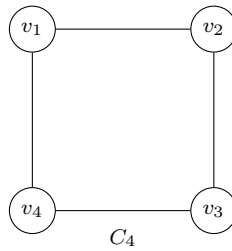


Figura 2.11 Ciclo C_4 .

A matriz de adjacência C_4 é

$$A(C_4) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$$

Note que a base do espaço nulo de C_4 é constituída pelos vetores abaixo:

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo o ciclo C_4 tem nulidade 2, pois a dimensão do espaço nulo de $A(C_4)$ é 2.

A seguir vamos definir os conceitos de grafo singular e grafo não singular.

Definição 2.11. Um grafo G é dito não singular se $A(G)$ for não singular, ou, equivalentemente, se $\eta(G) = 0$. Caso contrário, o grafo G é chamado de singular.

Em geral, caracterizar grafos singulares não é um problema fácil, mas existem algumas classes de grafos para as quais se têm boas caracterizações. A

seguir veremos que para o caso em que $G = C_n$, o Teorema 2.12 exibe uma boa caracterização.

Teorema 2.12. [64] *Se $n \equiv 0 \pmod{4}$, então $\eta(C_n) = 2$. Caso contrário, $\eta(C_n) = 0$.*

Por exemplo, pelo Teorema 2.12 sabemos que C_8 é singular e $\eta(C_8) = 2$, porque $8 \equiv 0 \pmod{4}$.

O Teorema 2.13 caracteriza totalmente as árvores singulares e é usado na demonstração do Teorema 4.7, no qual é fornecida uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares.

Teorema 2.13. [8] *Uma árvore T é não singular se, e somente se, T tem um emparelhamento perfeito.*

Note que a árvore T da Figura 2.12 é não singular, pois T tem emparelhamento perfeito dado por

$$\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_9\}, \{v_{10}, v_8\}, \{v_{12}, v_{13}\}, \{v_{14}, v_{11}\}, \{v_4, v_{15}\}, \{v_3, v_{16}\}\}.$$

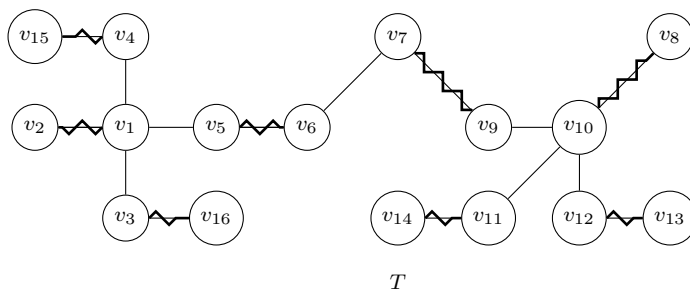


Figura 2.12 Árvore não singular.

3 DECOMPOSIÇÃO NULA DE ÁRVORES

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção, introduzimos o conceito de suporte de um grafo. Este conceito é primordial, pois é em torno dele que a teoria de decomposição nula se desenvolve.

Na segunda seção, abordamos o trabalho dos autores Jaume e Molina [38], essencialmente falamos sobre decomposição nula e as fórmulas fechadas dos números de independência e emparelhamento de árvores obtidas através desta decomposição. Em geral, esta decomposição nula divide uma árvore em duas florestas (uma das florestas pode ser vazia), uma floresta formada por árvores singulares e a outra formada por árvores não singulares. Jaume e Molina estudaram cada uma destas florestas e, através deste estudo, obtiveram fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de árvores (Teorema 3.5).

3.1 Suporte

A seguir temos a definição de suporte de um conjunto de vetores qualquer em um grafo G .

Definição 3.1. *Sejam G um grafo de ordem n e $x \in \mathbb{R}^n$. O suporte de x em G é o conjunto*

$$Supp_G(x) = \{v \in V(G) : x_v \neq 0\}.$$

Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$, então o suporte de S em G é

$$Supp_G(S) = \bigcup_{x \in S} Supp_G(x).$$

A seguir temos um exemplo ilustrando o conceito de suporte de S em um grafo G . Considere G o grafo da Figura 3.1, e seja S o conjunto de vetores abaixo:

$$S = \{[0, 1, 0, -1, 0, 0, 0]^t, [1, 0, 1, -1, 0, 0, 1]^t\}.$$

Note que a segunda e a quarta coordenada do primeiro vetor de S são diferentes de zero, logo v_2 e v_4 estão em $Supp_G(S)$. Além disso, a primeira, a terceira e a sétima coordenada do segundo vetor de S são diferentes de zero, logo v_1 , v_3 e v_7 também estão em $Supp_G(S)$. Portanto, concluímos que $Supp_G(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$.

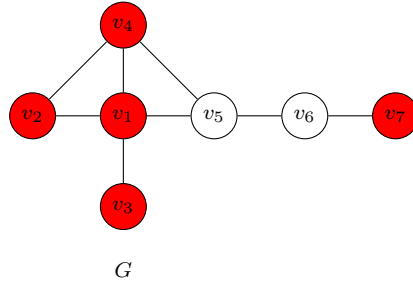


Figura 3.1 Suporte de S em um grafo G .

O resultado a seguir nos diz que para obtermos o suporte de um autoespaço de $A(G)$ basta analisarmos as coordenadas dos vetores de uma base deste autoespaço.

Lema 3.2. [38] Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se \mathcal{B} é uma base de S , então $Supp_G(S) = Supp_G(\mathcal{B})$.

Neste trabalho, estamos interessados no suporte do espaço nulo de $A(G)$, $Supp_G(\mathcal{N}(G))$, que, para fins de simplificação, será denotado por $Supp(G)$ e chamado suporte de G . Na prática, para calcular $Supp(G)$, usaremos o Lema 3.2 e não a definição de suporte. Ou seja, vamos calcular uma base do espaço nulo e considerar somente as entradas dos vetores da base deste espaço nulo para obter o suporte deste grafo. O suporte de uma árvore tem algumas propriedades interessantes como podemos verificar no Teorema 3.3 e no Lema 4.3.

O Teorema 3.3 nos diz que o suporte de uma árvore forma sempre um conjunto independente de vértices.

Teorema 3.3. [38] Seja T uma árvore, então $Supp(T)$ é um conjunto independente de T .

Olhando para o suporte da árvore T da Figura 3.3 vemos que é um conjunto independente. Observamos que, diferentemente das árvores, o suporte de grafos unicíclicos em geral não é um conjunto independente. Por exemplo, considere G o grafo unicíclico da Figura 3.2, o suporte de G é o conjunto $\{u, v, z, w, b, c, d, e, h, i, j, \ell, m\}$, o que obviamente não é um conjunto independente, mas existem algumas classes de grafos unicíclicos onde o suporte é um conjunto independente de vértices. Veremos no Capítulo 6 que o suporte dos grafos unicíclicos do Tipo I e dos grafos unicíclicos do Tipo II com ciclo de comprimento diferente de $4k$ são conjuntos independentes.

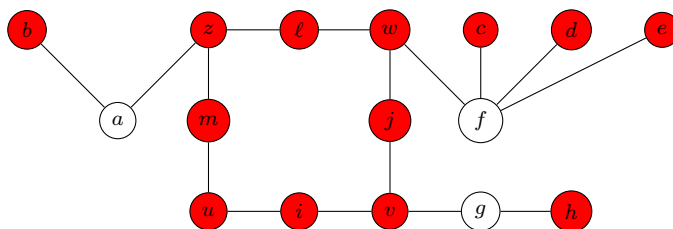


Figura 3.2 Suporte deste grafo unicíclico não é um conjunto independente.

3.2 Decomposição nula de árvores

A seguir apresentamos a decomposição nula de um grafo.

Definição 3.4. *Seja G um grafo. O core de um grafo G , denotado por $Core(G)$, é o conjunto formado pelos vizinhos de algum vértice do suporte, ou seja,*

$$Core(G) = \bigcup_{v \in Supp(G)} N(v).$$

O S -grafo de G , denotado por $\mathcal{G}_S(G)$, é o subgrafo induzido pela vizinhança fechada do $Supp(G)$ em G :

$$\mathcal{G}_S(G) = G\langle N[Supp(G)] \rangle = G\langle Supp(G) \cup Core(G) \rangle.$$

O N -grafo de G , denotado por $\mathcal{G}_N(G)$, é definido como o grafo remanescente como segue:

$$\mathcal{G}_N(G) = G - \mathcal{G}_S(G).$$

A decomposição nula de G é o par $(\mathcal{G}_S(G), \mathcal{G}_N(G))$. E $V(\mathcal{G}_N(G))$ é chamado de conjunto dos N -vértices de G .

Vale a pena ressaltar que, dado um grafo G desconexo tal que $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, onde G_i 's são as componentes conexas de G , é fácil ver que: $Supp(G) = \bigcup_{i=1}^k Supp(G_i)$, $Core(G) = \bigcup_{i=1}^k Core(G_i)$ e $V(\mathcal{G}_N(G)) = \bigcup_{i=1}^k V(\mathcal{G}_N(G_i))$.

Jaume e Molina definiram a decomposição nula para árvores [38], denotando $\mathcal{G}_S(G)$ por $\mathcal{F}_S(G)$ e $\mathcal{G}_N(G)$ por $\mathcal{F}_N(G)$. Note que em árvores $\mathcal{G}_S(G)$ e $\mathcal{G}_N(G)$ são florestas, por este motivo usaram o \mathcal{F} na notação. Neste trabalho usamos a notação $\mathcal{G}_S(G)$ e $\mathcal{G}_N(G)$.

A seguir temos um exemplo ilustrando todos os conceitos acima. Considere T a árvore da Figura 3.3.

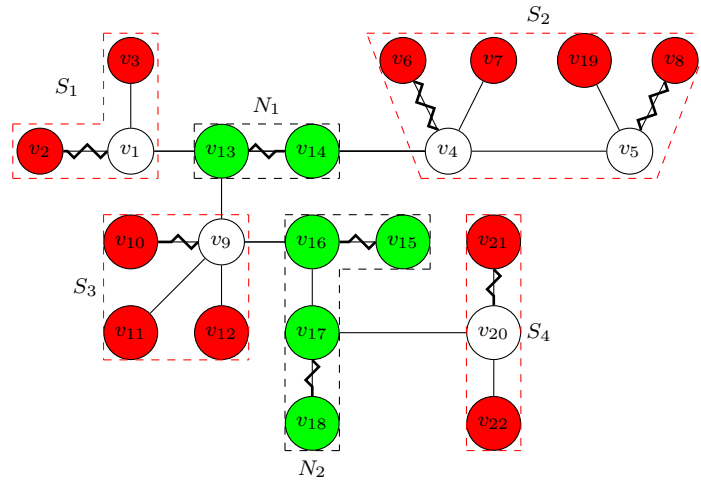


Figura 3.3 Árvore T .

A matriz de adjacência da árvore T da Figura 3.3 é:

O S -grafo de T é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_S(T) &= T\langle N[\text{Supp}(T)] \rangle = T\langle N[\{v_2, v_3, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{19}, v_{21}, v_{22}\}] \rangle \\ &= \underbrace{T\langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle}_{S_1} \cup \underbrace{T\langle \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{19}\} \rangle}_{S_2} \cup \underbrace{T\langle \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \rangle}_{S_3} \cup \underbrace{T\langle \{v_{20}, v_{21}, v_{22}\} \rangle}_{S_4}.\end{aligned}$$

Já o N -grafo de T é formado por:

$$\mathcal{G}_N(T) = T - \mathcal{G}_S(T) = \underbrace{T\langle \{v_{13}, v_{14}\} \rangle}_{N_1} \cup \underbrace{T\langle \{v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}\} \rangle}_{N_2}.$$

O Teorema 3.5 nos dá uma fórmula fechada para os números de independência e emparelhamento de árvores. Esta fórmula possibilita o cálculo destes parâmetros através da decomposição nula da árvore. Além disso, será usada diversas vezes ao longo deste trabalho, mais precisamente, para obter as fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos nos Capítulos 4 e 6.

Teorema 3.5. [38] *Se T é uma árvore, então*

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= |\text{Supp}(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2} \\ \nu(T) &= |\text{Core}(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2}.\end{aligned}$$

Considere T a árvore da Figura 3.3, logo pelo Teorema 3.5 nós temos que os números de independência e emparelhamento de T são dados por:

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= |\text{Supp}(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2} = 11 + \frac{6}{2} = 14 \\ \nu(T) &= |\text{Core}(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2} = 5 + \frac{6}{2} = 8.\end{aligned}$$

É fácil ver que o emparelhamento

$$M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_8\}, \{v_9, v_{10}\}, \{v_{13}, v_{14}\}, \{v_{15}, v_{16}\}, \{v_{17}, v_{18}\}, \{v_{20}, v_{21}\}\}$$

e o conjunto independente $I = \{v_2, v_3, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{19}, v_{21}, v_{22}, v_{13}, v_{15}, v_{17}\}$ têm cardinalidade máxima (ver Figura 3.3), e como era de se esperar temos que $|M| = 8$ e $|I| = 14$.

Neste capítulo estabelecemos o alicerce de toda a nossa teoria, os conceitos de suporte, core, N -vértice e decomposição nula serão cruciais para, nos próximos capítulos, estudarmos a decomposição nula de grafos unicíclicos e suas aplicações.

4 NÚMEROS DE INDEPENDÊNCIA E EMPARELHAMENTO DE GRAFOS UNICÍCLICOS

Neste capítulo, obtemos várias contribuições, as mais importantes são as fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos. Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, apresentamos nossas primeiras contribuições, mostramos que para verificar se um grafo unicíclico é do Tipo *I* ou do Tipo *II* basta averiguarmos se o vértice de intersecção da árvore pendente com o ciclo do grafo unicíclico está ou não no suporte desta árvore pendente (Proposição 4.4 e o Corolário 4.5). A contribuição mais relevante desta primeira seção é a caracterização dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes (Teorema 4.7). Na segunda e terceira seções, obtemos fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos (Teoremas 4.11, 4.13, 4.16 e 4.17). Para obter essas fórmulas, estudamos os grafos unicíclicos do Tipo *I* e do Tipo *II* separadamente, mais precisamente, usamos estratégias distintas para obter conjuntos independentes e emparelhamentos máximos em cada uma dessas classes. Com essa estratégia estabelecida e as fórmulas de Jaume e Molina [38] para os números de independência e emparelhamento de árvores foi possível obter as fórmulas para estes dois parâmetros em grafos unicíclicos ($\alpha(G)$ e $\nu(G)$).

4.1 Grafos unicíclicos singulares

Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Para cada $v \in V(C)$, denote por $G\{v\}$, a árvore pendente de G , que é o maior subgrafo induzido de G que é uma árvore e cuja intersecção com o ciclo C é o único vértice v . Observe que G pode ser obtido identificando cada vértice v do ciclo C com o vértice v de sua

árvore pendente $G\{v\}$. A Figura 4.1 exibe dois grafos unicíclicos G e H com árvores pendentes $G\{v_1\}$, $G\{v_2\}$, $G\{v_3\}$, $H\{v_4\}$, $H\{v_5\}$ e $H\{v_6\}$, respectivamente.

Definição 4.1. [35] O grafo unicíclico G é dito do Tipo I se existe um vértice v no ciclo de G tal que v é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$; caso contrário, G é dito do Tipo II.

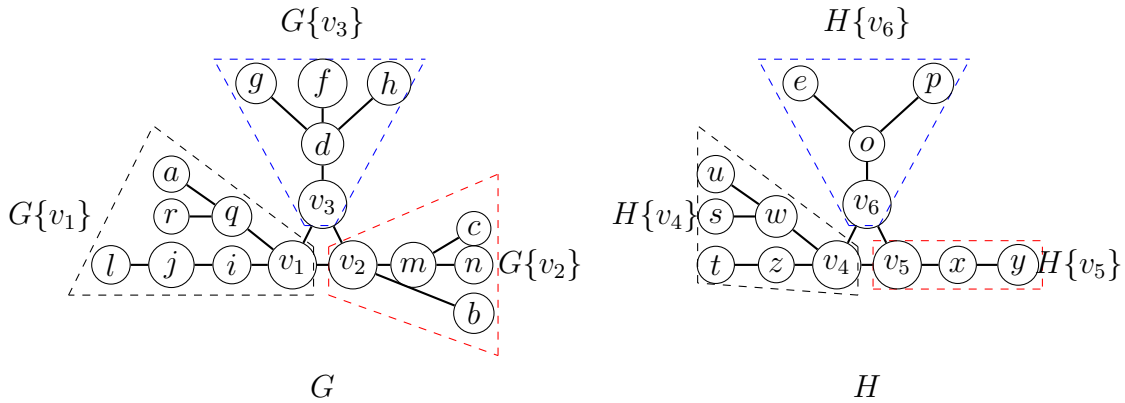


Figura 4.1 Grafos unicíclicos do Tipo I e II.

O grafo unicíclico G da Figura 4.1 é do Tipo I, note que o vértice v_1 é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v_1\}$. De fato, os emparelhamentos de cardinalidade máxima em $G\{v_1\}$ são $\{\{a, q\}, \{v_1, i\}, \{j, l\}\}$ e $\{\{r, q\}, \{v_1, i\}, \{j, l\}\}$ e ambos saturam v_1 . Já o grafo unicíclico H da Figura 4.1 é do Tipo II, pois, nas suas árvores pendentes $H\{v_4\}$, $H\{v_5\}$ e $H\{v_6\}$, encontramos emparelhamentos de cardinalidade máxima que não saturam v_4 , v_5 e v_6 , respectivamente. Por exemplo, $\{\{u, w\}, \{t, z\}\}$, $\{\{x, y\}\}$ e $\{\{p, o\}\}$ são emparelhamentos de cardinalidade máxima em $H\{v_4\}$, $H\{v_5\}$ e $H\{v_6\}$ que não saturam v_4 , v_5 e v_6 , respectivamente.

Os Lemas 4.2 e 4.3 são fundamentais para obtermos a caracterização dos grafos unicíclicos do Tipo I e Tipo II em função do suporte de suas árvores pendentes. Mais precisamente, uma caracterização que permite verificar através da álgebra linear se um grafo unicíclico é do Tipo I ou Tipo II (veja a Proposição 4.4

e o Corolário 4.5). O enunciado utiliza as noções de S -grafo e N -grafo definidos no Capítulo 3.

Lema 4.2. *Seja T uma árvore. Considere $\mathcal{G}_S(T) = \bigcup_{i=1}^k S_i$ e $\mathcal{G}_N(T) = \bigcup_{j=1}^t N_j$, onde para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{1, \dots, t\}$ temos que S_i e N_j são componentes conexas de $\mathcal{G}_S(T)$ e $\mathcal{G}_N(T)$, respectivamente. Se $M \in \mathcal{M}(T)$, então $M \cap E(S_i) \in \mathcal{M}(S_i)$ e $M \cap E(N_j) \in \mathcal{M}(N_j)$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{1, \dots, t\}$.*

Demonstração. Suponha que existe $M \in \mathcal{M}(T)$ tal que $M \cap E(S_r) \notin \mathcal{M}(S_r)$ ou $M \cap E(N_s) \notin \mathcal{M}(N_s)$, para algum $r \in \{1, \dots, k\}$ ou $s \in \{1, \dots, t\}$, ou seja, $|M \cap E(S_r)| < \nu(S_r)$ ou $|M \cap E(N_s)| < \nu(N_s)$. Pelo Corolário 4.14 de [38], obtemos que $M \cap (E(T) - (E(\mathcal{G}_S(T)) \cup E(\mathcal{G}_N(T)))) = \emptyset$. Logo $M = (M \cap E(\mathcal{G}_S(T))) \cup (M \cap E(\mathcal{G}_N(T)))$. Pelos Corolários 3.8 e 4.6 de [38] obtemos $\nu(S_i) = |Core(S_i)|$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $Core(T) = \bigcup_{i=1}^k Core(S_i)$, respectivamente. Além disso, pelo Teorema 4.13 de [38] temos que N_j é uma árvore não singular, para todo $j \in \{1, \dots, t\}$. Portanto, pelo Lema 2.13 concluímos que N_j tem emparelhamento perfeito e $\nu(N_j) = \frac{|V(N_j)|}{2}$. Logo temos que

$$\begin{aligned} \nu(T) &= |M| = |M \cap E(\mathcal{G}_S(T))| + |M \cap E(\mathcal{G}_N(T))| \\ &= \sum_{i=1}^k |M \cap E(S_i)| + \sum_{j=1}^t |M \cap E(N_j)| \\ &< \sum_{i=1}^k \nu(S_i) + \sum_{j=1}^t \nu(N_j) = \sum_{i=1}^k |Core(S_i)| + \sum_{j=1}^t \frac{|V(N_j)|}{2} \\ &= |Core(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2}. \end{aligned}$$

O que é uma contradição, porque pelo Lema 3.5 temos que $\nu(T) = |Core(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2}$. \square

Lema 4.3. *Se T uma árvore, então $EG(T) = Supp(T)$.*

Demonstração. Seja T uma árvore. Considere $\mathcal{G}_S(T) = \bigcup_{i=1}^k S_i$ e $\mathcal{G}_N(T) = \bigcup_{j=1}^t N_j$, onde para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{1, \dots, t\}$ temos que S_i e N_j são componentes conexas de $\mathcal{G}_S(T)$ e $\mathcal{G}_N(T)$, respectivamente. Dado $v \in Supp(T)$. Vamos

obter $M \in \mathcal{M}(T)$ tal que M não satura v . Pelo Corolário 4.6 de [38] temos que $Supp(T) = \bigcup_{i=1}^k Supp(S_i)$ e $Core(T) = \bigcup_{i=1}^k Core(S_i)$. Logo $v \in Supp(S_r)$, para algum $r \in \{1, \dots, k\}$. Pelo Teorema 4.13 de [38] temos que existe $M_r \in \mathcal{M}(S_r)$ tal que v é não saturado por M_r . Considere $M_i \in \mathcal{M}(S_i)$ e $M'_j \in \mathcal{M}(N_j)$, onde $i \in \{1, \dots, k\} - \{r\}$ e $j \in \{1, \dots, t\}$. Defina $M = \left(\bigcup_{i=1}^k M_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^t M'_j \right)$. Note que M é um emparelhamento em T e

$$\begin{aligned} |M| &= \sum_{i=1}^k |M_i| + \sum_{j=1}^t |M'_j| = \sum_{i=1}^k \nu(S_i) + \sum_{j=1}^t \nu(N_j) \\ &= \sum_{i=1}^k |Core(S_i)| + \sum_{j=1}^t \frac{|V(N_j)|}{2} = |Core(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2} = \nu(T), \end{aligned}$$

ou seja, $M \in \mathcal{M}(T)$. Além disso, v é não saturado por M . Portanto, $v \in EG(T)$.

Agora, dado $v \in EG(T)$. Vamos mostrar que $v \in Supp(T)$. Uma vez que $v \in EG(T)$, então existe $M \in \mathcal{M}(T)$ tal que v é não saturado por M . Note que pelo Teorema 4.13 de [38] temos que N_j é uma árvore não singular, para todo $j \in \{1, \dots, t\}$. Logo pelo Lema 2.13 concluímos que N_j tem emparelhamento perfeito. Além disso, pelo Lema 4.2 obtemos $M \cap E(N_j) \in \mathcal{M}(N_j)$, para todo $j \in \{1, \dots, t\}$, logo $M \cap E(N_j)$ é o emparelhamento perfeito de N_j . Portanto, $v \notin \bigcup_{j=1}^t V(N_j)$. Logo $v \in V(S_r)$, para algum $r \in \{1, \dots, k\}$. Uma vez que v é não saturado por M , então v é não saturado por $M \cap E(S_r)$. Observe que pelo Lema 4.2 temos que $M \cap E(S_r) \in \mathcal{M}(S_r)$. Logo pelo Teorema 4.13 de [38] concluímos que $v \in Supp(S_r)$. Pelo Corolário 4.6 de [38] temos que $Supp(T) = \bigcup_{i=1}^k Supp(S_i)$. Portanto, $v \in Supp(T)$. \square

Nos próximos dois resultados mostramos que, para verificar se um grafo unicíclico é do Tipo *I* ou *II*, basta averiguarmos se o vértice de intersecção da árvore pendente com o ciclo do grafo unicíclico está ou não no suporte desta árvore pendente.

Proposição 4.4. *Um grafo unicíclico G é do Tipo I se e somente se existir pelo menos uma árvore $G\{v\}$ tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$.*

Demonstração. Como G é do Tipo I sabemos que existe um vértice v no ciclo de G tal que v é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$. Além disso, pelo Lema 4.3, segue que um vértice w na árvore $G\{v\}$ é saturado por qualquer emparelhamento máximo se e somente se $w \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Em particular, o vértice v obrigatoriamente não está no suporte de $G\{v\}$. \square

Corolário 4.5. *Um grafo unicíclico G é do Tipo II se, e somente se, toda árvore pendente $G\{v\}$ é tal que $v \in \text{Supp}(G\{v\})$.*

Demonstração. Segue direto da Proposição 4.4. \square

O Lema 4.6 nos dá uma expressão para a nulidade de um grafo unicíclico, mais especificamente, nos diz que a nulidade de um grafo unicíclico depende da nulidade de árvores e/ou da nulidade do ciclo contido neste grafo unicíclico. Este fato é muito importante, pois sabemos caracterizar árvores e ciclos singulares e conseqüentemente o usamos para caracterizar os grafos unicíclicos singulares (Teorema 4.7).

Lema 4.6. [35] *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Se G é do Tipo I e $v \in V(C)$ é um vértice saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$, então*

$$\eta(G) = \eta(G\{v\}) + \eta(G - G\{v\}).$$

Se G é do Tipo II, então $\eta(G) = \eta(G - C) + \eta(C)$.

O Teorema 4.7 é nossa principal contribuição desta seção e nos dá uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes.

Teorema 4.7. *Seja G um grafo unicíclico. Considere C o ciclo de G . O grafo G é singular se, e somente se, uma das duas condições abaixo acontecer:*

- (i) *Existe pelo menos uma árvore pendente $G\{v\}$, com $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, onde $G\{v\}$ não tem emparelhamento perfeito ou $G - G\{v\}$ não tem emparelhamento perfeito;*
- (ii) *Toda árvore pendente $G\{v\}$ é tal que $v \in \text{Supp}(G\{v\})$, onde pelo menos uma das árvores que compõem a floresta $G - C$ não tem emparelhamento perfeito ou o ciclo C tem comprimento igual a um múltiplo de 4.*

Demonstração. (i) Como existe uma árvore pendente $G\{v\}$ tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, concluímos pela Proposição 4.4 que G é do Tipo *I*. Além disso, pelo Lema 4.6 concluímos que G terá nulidade diferente de zero se, e somente se, $G\{v\}$ tiver nulidade diferente de zero ou $G - G\{v\}$ tiver nulidade diferente de zero. Pelo Teorema 2.13, sabemos que isso acontece se, e somente se, $G\{v\}$ não tiver emparelhamento perfeito ou $G - G\{v\}$ não tiver emparelhamento perfeito;

- (ii) Como toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in \text{Supp}(G\{v\})$ concluímos pelo Corolário 4.5 que G é do Tipo *II*. Logo, pelo Lema 4.6, sabemos que G terá nulidade diferente de zero se, e somente se, $G - C$ tiver nulidade diferente de zero ou C tiver nulidade diferente de zero. Segue do Teorema 2.13 e do Lema 2.12 que isso acontece se, e somente se, pelo menos uma das árvores que compõem a floresta $G - C$ não tiver emparelhamento perfeito ou o ciclo C tiver comprimento igual a um múltiplo de 4.

□

4.2 Número de independência de grafos unicíclicos

O próximos resultados nos fornecem ferramentas para estabelecer nossa estratégia de formação de conjuntos independentes em grafos unicíclicos, consequentemente, são fundamentais para a demonstração dos teoremas que fornecem fórmulas fechadas para o número de independência (Teoremas 4.11 e 4.13)

Proposição 4.8. *Sejam T uma árvore não singular e $v \in V(T)$. Então existem $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(T)$ tais que $v \in I_1$ e $v \notin I_2$.*

Demonstração. Uma vez que T é uma árvore logo T é um grafo bipartido. Então existem dois subconjuntos disjuntos B_1 e B_2 de $V(T)$ tais que $V(T) = B_1 \cup B_2$ e para toda aresta $\{a, b\} \in E(T)$, temos $\{a, b\} \cap B_1 \neq \emptyset$ e $\{a, b\} \cap B_2 \neq \emptyset$. Como T é não singular, T tem um emparelhamento perfeito M . Além disso, temos que $Supp(T) = \emptyset$, $Core(T) = \emptyset$ e $V(T) = V(\mathcal{G}_N(T))$. Pelo Teorema 3.5, concluímos que $\alpha(T) = \nu(T) = \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2} = \frac{|V(T)|}{2}$. Já que $\alpha(T) = \nu(T) = |M| = \frac{|V(T)|}{2}$ e para toda aresta $\{a, b\} \in M$ temos $\{a, b\} \cap B_1 \neq \emptyset$ e $\{a, b\} \cap B_2 \neq \emptyset$, então $|B_1| = |B_2| = \frac{|V(T)|}{2}$. Ou seja, $B_1, B_2 \in \mathcal{I}(T)$. Portanto, dado $v \in V(T)$ temos que $v \in B_1$ e $v \notin B_2$ ou $v \in B_2$ e $v \notin B_1$. \square

Lema 4.9. *Se T é uma árvore e $v \in V(\mathcal{G}_N(T))$, então existem $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(T)$ tais que $v \in I_1$ e $v \notin I_2$.*

Demonstração. A decomposição nula, em geral, divide uma árvore T em duas florestas (uma delas pode ser vazia), uma floresta formada por árvores singulares, denotada por $\mathcal{G}_S(T)$, e outra formada por árvores não singulares, denotado por $\mathcal{G}_N(T)$ (veja Teorema 4.5 e Teorema 4.13 de [38]).

Além disso, pelo Corolário 4.6 de [38], temos que $Supp(T) = \bigcup_{S \in \mathcal{G}_S(T)} Supp(S)$ e $V(\mathcal{G}_N(T)) = \bigcup_{N \in \mathcal{G}_N(T)} V(N)$. Assim, se $v \in V(\mathcal{G}_N(T))$, temos $v \in V(N_1)$ para algum

$N_1 \in \mathcal{G}_N(T)$. Como N_1 é não singular, pela Proposição 4.8, obtemos $I_{N_1}, J_{N_1} \in \mathcal{I}(N_1)$ tais que $v \in J_{N_1}$ e $v \notin I_{N_1}$. Defina $I_N, J_N \in \mathcal{I}(N)$, com $N \neq N_1$. Sejam

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Supp}(T) \cup I_{N_1} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{G}_N(T) \text{ e } N \neq N_1} I_N \right) \text{ e} \\ I_2 &= \text{Supp}(T) \cup J_{N_1} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{G}_N(T) \text{ e } N \neq N_1} J_N \right), \end{aligned}$$

Observe que I_1 e I_2 são conjuntos independentes, porque $\text{Supp}(T)$ é um conjunto independente de T e $N(\text{Supp}(T)) = \text{Core}(T)$, então $N(\text{Supp}(T)) \cap \left(\bigcup_{N \in \mathcal{G}_N(T)} I_N \right) = \emptyset$. Note que $|I_1| = |I_2| = |\text{Supp}(T)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T))|}{2}$, logo usando o Teorema 3.5 concluímos que $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(T)$. Além disso, temos que $v \notin I_1$ e $v \in I_2$. \square

Lema 4.10. *Sejam T uma árvore e I um conjunto independente de T . Se $c_i \in \text{Core}(T)$ e $c_i \in I$, então $I \notin \mathcal{I}(T)$.*

Demonstração. Observe que, em geral, temos

$$I = \{s_1, s_2, \dots, s_j\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_t\} \cup \{n_1, n_2, \dots, n_r\},$$

onde $\{s_1, s_2, \dots, s_j\} \subseteq \text{Supp}(T)$, $\{c_1, c_2, \dots, c_t\} \subseteq \text{Core}(T)$ e $\{n_1, n_2, \dots, n_r\} \subseteq V(\mathcal{G}_N(T))$ (possivelmente podemos ter $\{n_1, n_2, \dots, n_r\} = \emptyset$). Pelo Lema 3.5 de [38] temos

$$|N(\{c_1, c_2, \dots, c_t\}) \cap \text{Supp}(T)| > |\{c_1, c_2, \dots, c_t\}|.$$

Note que $J = \{s_1, s_2, \dots, s_j\} \cup (N(\{c_1, c_2, \dots, c_t\}) \cap \text{Supp}(T)) \cup \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ é um conjunto independente de T . De fato, $N(\text{Supp}(T)) \cap \{n_1, n_2, \dots, n_r\} = \emptyset$ por definição de $V(\mathcal{G}_N(T))$ e $\{s_1, s_2, \dots, s_j\} \cup (N(\{c_1, c_2, \dots, c_t\}) \cap \text{Supp}(T)) \subseteq \text{Supp}(T)$ é um conjunto independente de T , pois $\text{Supp}(T)$ é um conjunto independente de T pelo Teorema 3.3. Além disso, temos que $\{s_1, s_2, \dots, s_j\} \cap (N(\{c_1, c_2, \dots, c_t\}) \cap \text{Supp}(T)) =$

\emptyset , caso contrário I não seria um conjunto independente, isso mostra que $|J| > |I|$, portanto, $I \notin \mathcal{I}(T)$. \square

O Teorema 4.11 dá uma fórmula fechada para o número de independência de todos os grafos unicíclicos do Tipo I . Esta fórmula possibilita o cálculo do número de independência usando a decomposição nula de subárvores deste grafo unicíclico do Tipo I .

Teorema 4.11. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, então*

$$\alpha(G) = |\text{Supp}(G\{v\})| + |\text{Supp}(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}. \quad (4.1)$$

Demonstração. Como $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ temos que existe $I_1 \in \mathcal{I}(G\{v\})$ tal que $v \notin I_1$. De fato, se $v \in V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup \text{Core}(G\{v\})$, então, pelos Lemas 4.9 e 4.10, existe $I_1 \in \mathcal{I}(G\{v\})$ tal que $v \notin I_1$. Seja $I_2 \in \mathcal{I}(G - G\{v\})$. Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Provaremos que $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}(G)$ (vértices em vermelho e azul na Figura 4.2) e, assim sendo, que a fórmula (4.1) é válida.

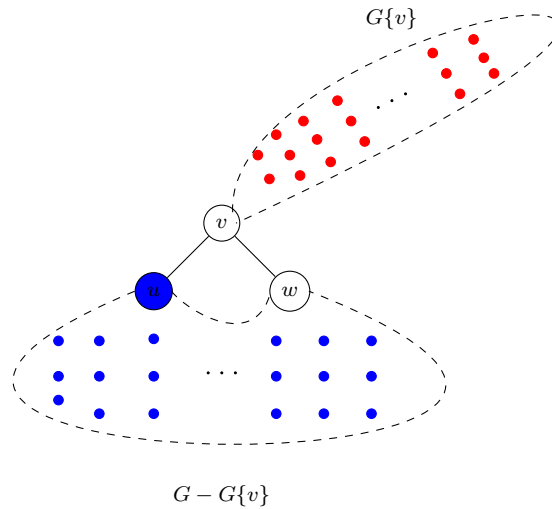


Figura 4.2 Grafo unicíclico G do Tipo I e o seu conjunto independente $I_1 \cup I_2$.

Primeiramente, note que $I_1 \cup I_2$ é conjunto independente de G . De fato, os vértices de I_1 não são conectados entre si, porque I_1 é um conjunto independente, semelhantemente concluímos que os vértices de I_2 não são conectados entre si. Além disso, as únicas adjacências entre $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ são as arestas entre os vértices v e u e os vértices v e w . Como $v \notin I_1$, não há a possibilidade de ocorrer adjacências entre os vértices de I_1 e os vértices de I_2 . Suponha que $I_1 \cup I_2 \notin \mathcal{I}(G)$, isto é, existe um conjunto independente J de G tal que $|J| > |I_1 \cup I_2|$. Como $V(G) = V(G\{v\}) \cup V(G - G\{v\})$ existe um $J_1 \subseteq V(G\{v\})$ e um $J_2 \subseteq V(G - G\{v\})$ tais que $J = J_1 \cup J_2$. Temos que

$$|I_1| + |I_2| = |I_1 \cup I_2| < |J| = |J_1| + |J_2|. \quad (4.2)$$

Mas note que J_1 e J_2 são conjuntos independentes de $G\{v\}$ e de $G - G\{v\}$, respectivamente. Logo temos que $|J_1| \leq |I_1|$ e $|J_2| \leq |I_2|$, porque $I_1 \in \mathcal{I}(G\{v\})$ e $I_2 \in \mathcal{I}(G - G\{v\})$. Portanto, $|J_1| + |J_2| \leq |I_1| + |I_2|$, o que é uma contradição por (4.2). Portanto, $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}(G)$. Pelo Teorema 3.5 temos

$$\alpha(G\{v\}) = |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2}$$

$$\alpha(G - G\{v\}) = |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}.$$

Portanto, o número de independência de G é dado por

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= |I_1| + |I_2| = \alpha(G\{v\}) + \alpha(G - G\{v\}) \\ &= |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} + |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}. \end{aligned}$$

□

A seguir, temos um exemplo da aplicação do Teorema 4.11. Considere G o grafo unicíclico da Figura 4.3. Observe que G é um grafo unicíclico do Tipo I . De fato, $v \notin Supp(G\{v\}) = \{g, e, d\}$, então, pela Proposição 4.4, temos que G é um grafo unicíclico do Tipo I . Além disso, $Supp(G - G\{v\}) = \{a, b, i, j, z\}$, $V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) = \emptyset$ e $V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) = \{w, c\}$.

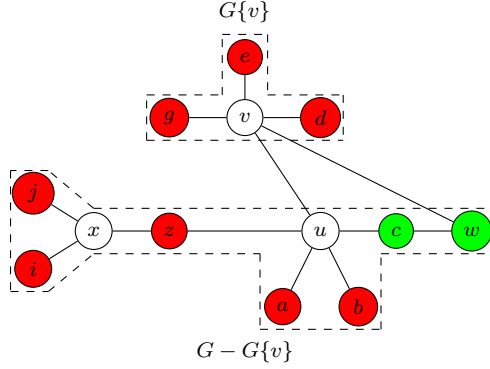


Figura 4.3 Grafo unicíclico G e suas subárvores.

Portanto, pelo Teorema 4.11, temos que o número de independência de G é dado por:

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= |Supp(G\{v\})| + |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\ &= 3 + 5 + \frac{2}{2} = 9. \end{aligned}$$

Observe que $J = \{a, b, c, d, e, g, i, j, c\}$ é um conjunto independente máximo de G e $|J| = 9$.

Lema 4.12. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Seja $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \in Supp(G\{v\})$. Se $u \in N(v) \cap V(G\{v\})$, então $u \notin Supp(G - C)$.*

Demonstração. Seja $G\{v\} - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i é uma componente conexa de $G\{v\} - v$. Seja $M_i \in \mathcal{M}(T_i)$. Como $v \in Supp(G\{v\})$ existe $M \in \mathcal{M}(G\{v\})$ tal que M não satura v pelo Lema 4.3. Observe que $u \in N(v) \cap V(G\{v\})$, então $u \notin Supp(G\{v\})$, porque $Supp(G\{v\})$ é um conjunto independente de $G\{v\}$ pelo Teorema 3.3. Então $M \in \mathcal{M}(G\{v\} - v)$ e $\nu(G\{v\}) = \nu(G\{v\} - v)$. Suponha que $u \in Supp(G\{v\} - v) = \bigcup_{i=1}^k Supp(T_i)$, ou seja, existe um i tal que $u \in Supp(T_i)$, logo pelo Lema 4.3 em T_i obtemos $M_i \in \mathcal{M}(T_i)$ que não satura u . Note que, $\bigcup_{i=1}^k M_i \in \mathcal{M}(G\{v\} - v)$ e $\bigcup_{i=1}^k M_i$ não satura u . Então $\bigcup_{i=1}^k M_i \in \mathcal{M}(G\{v\})$, porque $\nu(G\{v\}) = \nu(G\{v\} - v)$. O que é uma contradição, porque $\bigcup_{i=1}^k M_i$ não satura u e

todo emparelhamento máximo em $G\{v\}$ satura u porque $u \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Portanto, $u \notin \text{Supp}(G\{v\} - v)$. Uma vez que as componentes conexas de $G\{v\} - v$ são componentes conexas de $G - C$ temos $u \notin \text{Supp}(G - C)$. \square

O Teorema 4.13 dá uma fórmula fechada para o número de independência de todos os grafos unicíclicos do Tipo II. Esta fórmula depende da decomposição nula de subárvores deste grafo unicíclico e da quantidade de vértices do seu ciclo.

Teorema 4.13. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Seja $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde cada T_i é árvore que compõe a floresta $G - C$. Se G é do Tipo II, então*

$$\alpha(G) = \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |\text{Supp}(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Seja u_i o vértice de T_i adjacente ao vértice $v_i \in V(C)$. Pelo Lema 4.12, o vértice $u_i \notin \text{Supp}(T_i)$. Como $u_i \in V(\mathcal{G}_N(T_i)) \cup \text{Core}(T_i)$, pelos Lemas 4.9 e 4.10 podemos garantir que existe $J_i \in \mathcal{I}(T_i)$ tal que $u_i \notin J_i$. Tome $J_c \in \mathcal{I}(C)$. Seja $I = J_c \cup \left(\bigcup_{i=1}^k J_i \right)$ (vértices em vermelho na Figura 4.4). Mostraremos que $I \in \mathcal{I}(G)$ e de modo consequente a fórmula (4.3) é válida.

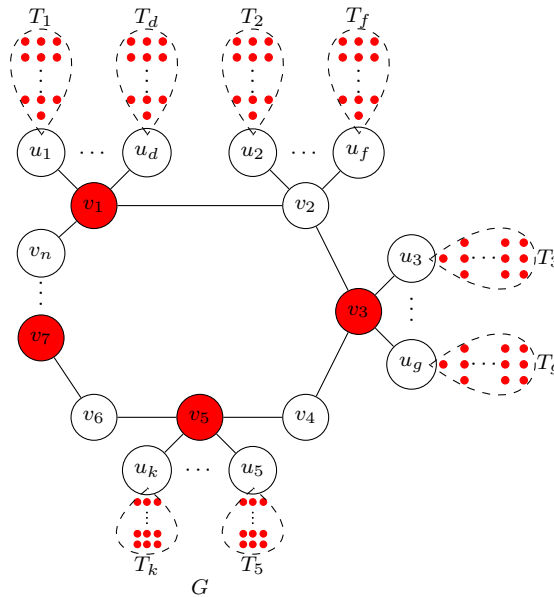


Figura 4.4 Grafo unicíclico G do Tipo II e o seu conjunto independente I .

Primeiramente, note que I é conjunto independente de G . De fato, para todo i temos que os vértices de J_i não são ligados entre si, pois J_i é um conjunto independente. Analogamente concluímos que os vértices de J_c não são ligados entre si. Além disso, não há chance de um vértice de J_i ser ligado a um vértice J_ℓ , com $i \neq \ell$, pois os vértices das árvores T_i e T_ℓ não são ligados entre si. Note também que não há perigo de um vértice de J_i ser ligado a vértice de J_c , pois a única adjacência que há entre T_i e C é a adjacência entre o vértice u_i e c_i , mas como $u_i \notin J_i$ podemos descartar a possibilidade de adjacência entre e os vértices de J_i e J_c . Suponha agora que $I \notin \mathcal{I}(G)$, isto é, existe um conjunto independente F tal que $|F| > |I|$. Como $V(G) = V(C) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k V(T_i) \right)$ temos que existem $F_c \subseteq V(C)$ e $F_i \subseteq V(T_i)$ tal que $F = F_c \cup \left(\bigcup_{i=1}^k F_i \right)$. Logo temos que

$$|F_c| + \sum_{i=1}^k |F_i| = |F| > |I| = |J_c| + \sum_{i=1}^k |J_i|. \quad (4.4)$$

Note que F_c e F_i são conjuntos independentes de C e T_i , respectivamente. Logo $|F_c| \leq |J_c|$ e $|F_i| \leq |J_i|$, pois $J_c \in \mathcal{I}(C)$ e $J_i \in \mathcal{I}(T_i)$. Logo temos que $|F_c| + \sum_{i=1}^k |F_i| \leq |J_c| + \sum_{i=1}^k |J_i|$, o que é uma contradição por (4.4). Logo $I \in \mathcal{I}(G)$. Note que $\alpha(C) = \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor$ e pelo Teorema 3.5 temos para todo i que

$$\alpha(T_i) = |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}.$$

Portanto, o número de independência de G é dado por:

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= |J_c| + \sum_{i=1}^k |J_i| = \alpha(C) + \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) \\ &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \end{aligned}$$

□

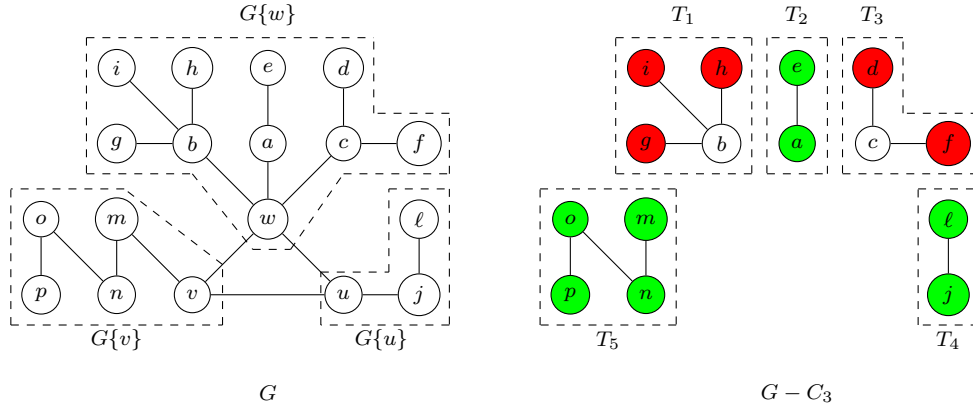


Figura 4.5 Grafo unicíclico do Tipo II e o suporte de suas subárvores.

Considere G o grafo unicíclico da Figura 4.5. Observe que G é um grafo unicíclico do Tipo II, porque $v \in \text{Supp}(G\{v\}) = \{n, p, v\}$, $w \in \text{Supp}(G\{w\}) = \{e, g, h, i, w, d, f\}$ e $u \in \text{Supp}(G\{u\}) = \{u, \ell\}$. Então pelo Corolário 4.5 obtemos que G é um grafo unicíclico do Tipo II. Além disso, temos $G - C_3 = \bigcup_{i=1}^5 T_i$, onde $T_1 = G\langle\{b, g, h, i\}\rangle$, $T_2 = G\langle\{a, e\}\rangle$, $T_3 = G\langle\{c, f, d\}\rangle$, $T_4 = G\langle\{j, \ell\}\rangle$ e $T_5 = G\langle\{m, n, o, p\}\rangle$ (veja a Figura 4.5). Uma vez que T_2 , T_4 e T_5 tem emparelhamento perfeito, logo são não singulares e tem suporte vazio. T_1 e T_3 não têm emparelhamento perfeito, logo são singulares e calculando seus suportes obtemos a Tabela 4.1.

$G - C_3$	Suporte	N -vértices
T_1	$\text{Supp}(T_1) = \{g, h, i\}$	$V(\mathcal{G}_N(T_1)) = \emptyset$
T_2	$\text{Supp}(T_2) = \emptyset$	$V(\mathcal{G}_N(T_2)) = \{a, e\}$
T_3	$\text{Supp}(T_3) = \{d, f\}$	$V(\mathcal{G}_N(T_3)) = \emptyset$
T_4	$\text{Supp}(T_4) = \emptyset$	$V(\mathcal{G}_N(T_4)) = \{j, \ell\}$
T_5	$\text{Supp}(T_5) = \emptyset$	$V(\mathcal{G}_N(T_5)) = \{m, n, o, p\}$

Tabela 4.1 Suporte e N -vértices das subárvores T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 .

Portanto, pelo Teorema 4.13 temos que o número de independência de G é dado por:

$$\begin{aligned}\alpha(G) &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + 3 + \frac{2}{2} + 2 + \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 10.\end{aligned}$$

Observe que $I = \{g, h, i, e, d, f, p, n, \ell, v\}$ é um conjunto independente máximo de G e $|I| = 10$.

4.3 Número de emparelhamento de grafos unicíclicos

Nesta seção obtemos fórmulas fechadas para o número de emparelhamento de grafos unicíclicos.

Definição 4.14. *Seja M um emparelhamento em um grafo G . Um caminho M -alternante é um caminho que alterna aresta em M com arestas que não estão em M . Um caminho M -alternante é um caminho M -aumentante, se começa e termina em vértices não saturados por M .*

Considere o emparelhamento $M = \{\{d, c\}, \{a, b\}, \{v, w\}\}$ no grafo G da Figura 4.6. Note que o caminho $P_1 = (e, d, c, b, a)$ é um caminho M -alternante porque as suas arestas alternam fora e dentro de M . Já o caminho $P_2 = (u, v, w, o)$ é M -aumentante, porque ele é um caminho M -alternante e começa e termina em vértices não saturados por M (vértices u e o).

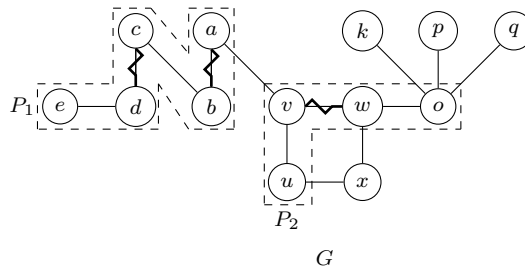


Figura 4.6 Caminho M -alternante e caminho M -aumentante.

O próximo teorema é um resultado clássico que caracteriza os emparelhamentos máximos em um grafo G .

Teorema 4.15. (Berge, 1957)[10] *Um emparelhamento M é máximo em G se e somente se G não tem caminho M -aumentante.*

O Teorema 4.16 nos dá uma fórmula fechada para o número de emparelhamento de todos os grafos unicíclicos G do Tipo I .

Teorema 4.16. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, então*

$$\nu(G) = |\text{Core}(G\{v\})| + |\text{Core}(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}. \quad (4.5)$$

Demonstração. Sejam $M_1 \in \mathcal{M}(G\{v\})$ e $M_2 \in \mathcal{M}(G - G\{v\})$.

Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$ e $M = M_1 \cup M_2$ (arestas em vermelho e azul na Figura 4.7). Mostraremos que $M \in \mathcal{M}(G)$ e como consequência que a fórmula (4.5) é válida.

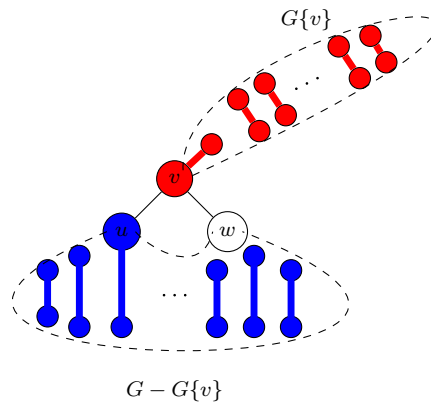


Figura 4.7 Grafo unicíclico G do Tipo I e o seu emparelhamento máximo M .

Suponha que $M \notin \mathcal{M}(G)$. Portanto, pelo Teorema 4.15 existe um caminho M -aumentante, denotado por P . Note que P não está contido em $G\{v\}$ e nem em $G - G\{v\}$, caso contrário, P seria um caminho M_1 -aumentante ou M_2 -aumentante, o que é uma absurdo, porque $M_1 \in \mathcal{M}(G\{v\})$ e $M_2 \in \mathcal{M}(G - G\{v\})$. Além disso, P não contém as arestas $\{u, v\}$ e $\{w, v\}$ simultaneamente, porque $\{u, v\}, \{w, v\} \notin M$. Então P começa em um vértice a_1 de $G\{v\}$ e termina em um vértice b_{2s} de $G - G\{v\}$. Note que o caminho P contém a aresta $\{u, v\}$ ou a aresta $\{w, v\}$. Suponha que P contém a aresta $\{u, v\}$, então temos $P = (a_1, a_2, \dots, a_{2k}, v, u, b_1, b_2, \dots, b_{2s})$ (veja Figura 4.8).

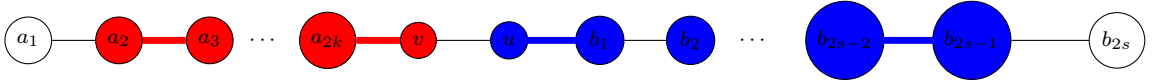


Figura 4.8 Caminho M -aumentante P .

Sejam $B_1 = \{\{a_{2k}, v\}, \{u, b_1\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\{a_{2i}, a_{2i+1}\}\} \cup \bigcup_{j=1}^{s-1} \{\{b_{2j}, b_{2j+1}\}\}$ e $B_2 = \{\{u, v\}\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{\{a_{2i-1}, a_{2i}\}\} \cup \bigcup_{j=1}^s \{\{b_{2j-1}, b_{2j}\}\}$. Note que $B_1 \subseteq M$ e $B_2 \cap M = \emptyset$. Seja M' um emparelhamento de G dado por $M' = (M \cup B_2) \setminus B_1$. Note que $M' \cap E(G\{v\})$ é um emparelhamento de $G\{v\}$ que não satura v , como $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ então $M' \cap E(G\{v\}) \notin \mathcal{M}(G\{v\})$ (veja Lema 4.3). Isto é, $|M' \cap E(G\{v\})| < |M_1|$. Mas temos

$$\begin{aligned}
|M' \cap E(G\{v\})| &= |(M \cup B_2) \setminus B_1 \cap E(G\{v\})| \\
&= |(M_1 \cup M_2 \cup B_2) \setminus B_1 \cap E(G\{v\})| \\
&= |((M_1 \setminus B_1) \cup (M_2 \setminus B_1) \cup (B_2 \setminus B_1)) \cap E(G\{v\})| \\
&= |((M_1 \setminus B_1) \cup (M_2 \setminus B_1) \cup B_2) \cap E(G\{v\})| \\
&= |((M_1 \setminus B_1) \cap E(G\{v\})) \cup ((M_2 \setminus B_1) \cap E(G\{v\})) \cup (B_2 \cap E(G\{v\}))| \\
&= |((M_1 \cap E(G\{v\})) \setminus B_1) \cup ((M_2 \cap E(G\{v\})) \setminus B_1) \cup (B_2 \cap E(G\{v\}))| \\
&= |(M_1 \setminus B_1) \cup (B_2 \cap E(G\{v\}))| \\
&= |(M_1 \setminus B_1)| + |(B_2 \cap E(G\{v\}))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |M_1| - |M_1 \cap B_1| + |(B_2 \cap E(G\{v\}))| \\
&= |M_1| - \left| \{a_{2k}, v\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{a_{2i}, a_{2i+1}\} \right| + \left| \bigcup_{i=1}^k \{a_{2i-1}, a_{2i}\} \right| \\
&= |M_1| - k + k = |M_1|.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por (4.6) temos que $|M_1| > |M' \cap E(G\{v\})| = |M_1|$, o que é um absurdo. O caso em que P contém a aresta $\{w, v\}$ é análogo. Portanto, $M \in \mathcal{M}(G)$. Então $\nu(G) = \nu(G\{v\}) + \nu(G - G\{v\})$. Usando o Teorema 3.5 nas árvores $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ temos que

$$\nu(G) = |Core(G\{v\})| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}.$$

□

Temos um exemplo de aplicação do Teorema 4.16, considere o grafo unicíclico G da Figura 4.9. Note que G é um grafo unicíclico do Tipo I , pois $v \notin Supp(G\{v\}) = \{a, b, j\}$ logo pela Proposição 4.4 temos que G é um unicíclico do Tipo I . Além disso, $Supp(G - G\{v\}) = \{e, f, i\}$, $Core(G\{v\}) = \{c\}$, $V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) = \{v, d, \ell, m\}$, $Core(G - G\{v\}) = \{g, h\}$ e $V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) = \{o, n\}$.

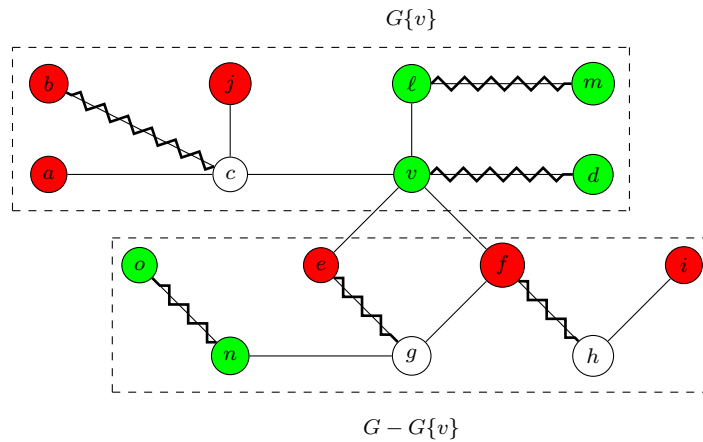


Figura 4.9 Grafo unicíclico do Tipo I e o suporte de suas subárvores.

Portanto, pelo Teorema 4.16, obtemos que o número de emparelhamento de G é dado por:

$$\begin{aligned}\nu(G) &= |Core(G\{v\})| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\ &= 1 + \frac{4}{2} + 2 + \frac{2}{2} = 6.\end{aligned}$$

Note que $M = \{\{b, c\}, \{v, d\}, \{\ell, m\}, \{n, o\}, \{e, g\}, \{f, h\}\}$ é um emparelhamento máximo de G e $|M| = 6$.

O Teorema 4.17 nos dá uma fórmula fechada para o número de emparelhamento de todos os grafos unicíclicos do Tipo *II*.

Teorema 4.17. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Seja $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i é uma árvore que compõe a floresta $G - C$. Se G é do Tipo *II*, então*

$$\nu(G) = \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \quad (4.7)$$

Demonstração. Para todo $v \in V(C)$, escolha $M_v \in \mathcal{M}(G\{v\})$ que não satura o vértice v . Note que M_v existe, pois G é um grafo unicíclico do Tipo *II*, isto implica que $v \in Supp(G\{v\})$ para todo $v \in V(C)$ e nestas condições o Lema 4.3 garante a existência de M_v . E tome $M_c \in \mathcal{M}(C)$. Seja $M = M_c \cup \left(\bigcup_v M_v \right)$ (as arestas de M são ilustradas em vermelho na Figura 4.10). Mostraremos que $M \in \mathcal{M}(G)$, e como consequência, demonstraremos que a fórmula (4.7) é válida.

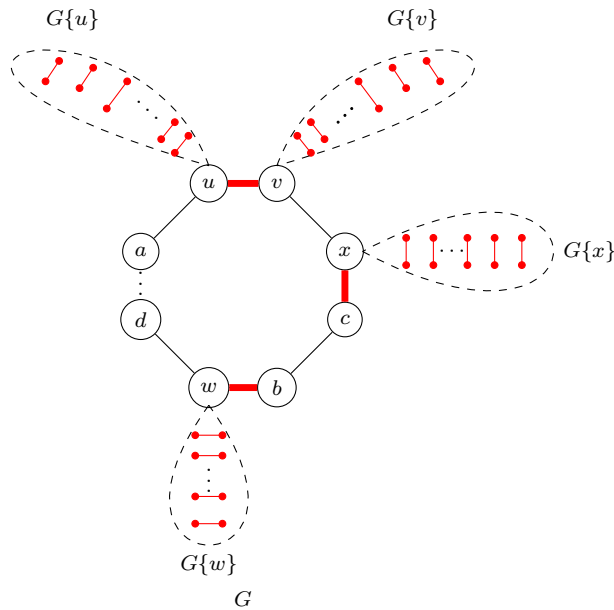


Figura 4.10 Grafo unicíclico G do Tipo II e o seu emparelhamento M .

Note que não há chances de termos um caminho M -aumentante em G . De fato, dentro C não há caminho M -aumentante, pois isto implicaria que teríamos um caminho M_c -aumentante em C , o que é absurdo pois $M_c \in \mathcal{M}(C)$ e nestas condições o Teorema 4.15 garante que não há caminho M_c -aumentante em C . Observe também que não há caminho M -aumentante contido em uma árvore pendente $G\{v\}$, pois isto implicaria que teríamos um caminho M_v -aumentante em $G\{v\}$, o que é absurdo pois $M_v \in \mathcal{M}(G\{v\})$ e nestas condições o Teorema 4.15 nos garante que não há caminho M_v -aumentante em $G\{v\}$. Logo a única maneira de haver um caminho M -aumentante em G é se iniciarmos esse caminho M -aumentante por um vértice u de alguma árvore pendente $G\{v\}$, com $u \neq v$, e terminar em um vértice do ciclo C ou em um vértice z de uma alguma outra árvore pendente $G\{w\}$, com $z \neq w$. Para isto, teríamos que ter um caminho M_v -alternante iniciando em u e passando por v , mas como M_v não satura v teríamos que este caminho M_v -alternante também seria M_v -aumentante em $G\{v\}$, absurdo, pois $M_v \in \mathcal{M}(G\{v\})$. Logo $M \in \mathcal{M}(G)$.

Pelo Teorema 3.5 temos que

$$\nu(T_i) = |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}.$$

Além disso, é fácil ver que $\nu(C) = \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor$. Note que v é não saturado por M_v , logo temos que $M_v \in \mathcal{M}(G\{v\} - v)$, ou seja, $\nu(G\{v\}) = \nu(G\{v\} - v)$. Logo temos que o número de emparelhamento é dado por:

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \nu(C) + \sum_{v \in V(C)} \nu(G\{v\}) \\ &= \nu(C) + \sum_{v \in V(C)} \nu(G\{v\} - v) \\ &= \nu(C) + \sum_{i=1}^k \nu(T_i) \\ &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \end{aligned}$$

□

Considere G o grafo unicíclico da Figura 4.11. Veja que G é um grafo unicíclico do Tipo *II*, pois $a \in Supp(G\{a\}) = \{a, j, l, m\}$, $b \in Supp(G\{b\}) = \{b, h, g\}$, $c \in Supp(G\{c\}) = \{c, o\}$, $d \in Supp(G\{d\}) = \{d, u, v, w, t\}$ and $e \in Supp(G\{e\}) = \{e\}$, logo pelo Corolário 4.5, temos que G é um grafo unicíclico do Tipo *II*. Observe que $G - C_5 = \bigcup_{i=1}^4 T_i$, onde $T_1 = G\langle\{f, g, h\}\rangle$, $T_2 = G\langle\{n, o, p, q\}\rangle$, $T_3 = G\langle\{r, s, t, u, v, w\}\rangle$ e $T_4 = G\langle\{j, i, l, m\}\rangle$ (veja Figura 4.11). Note que T_2 tem emparelhamento perfeito, então T_2 é não singular e tem suporte vazio. Além disso, temos que T_1 , T_3 e T_4 não possuem emparelhamento perfeito, logo são singulares e seus suportes, cores e N -vértices são dados na Tabela 4.2.

Suporte	Core	N -vértices
$Supp(T_1) = \{h, g\}$	$Core(T_1) = \{f\}$	$V(\mathcal{G}_N(T_1)) = \emptyset$
$Supp(T_2) = \emptyset$	$Core(T_2) = \emptyset$	$V(\mathcal{G}_N(T_2)) = \{n, o, p, q\}$
$Supp(T_3) = \{t, v, u, w\}$	$Core(T_3) = \{r, s\}$	$V(\mathcal{G}_N(T_3)) = \emptyset$
$Supp(T_4) = \{j, l, m\}$	$Core(T_4) = \{i\}$	$V(\mathcal{G}_N(T_4)) = \emptyset$

Tabela 4.2 Suporte, core e N -vértices das árvores T_1, T_2, T_3 e T_4 .

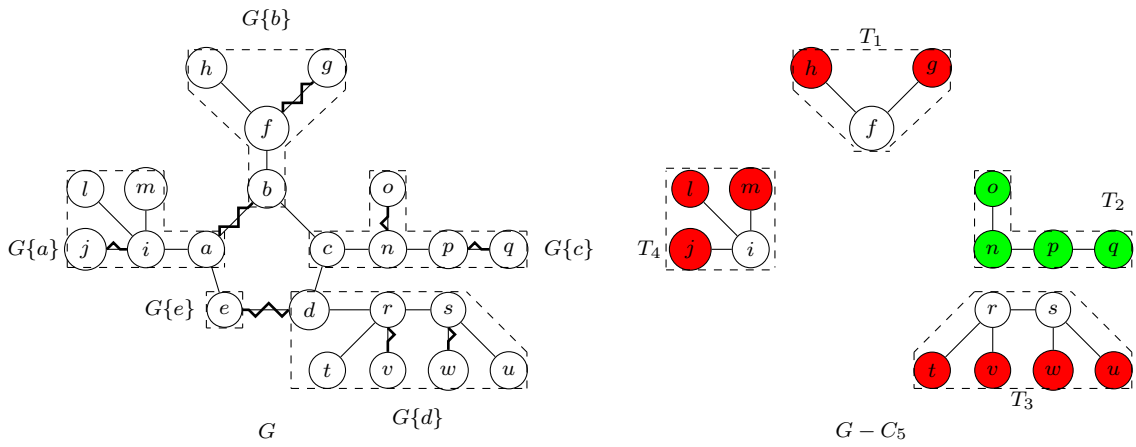


Figura 4.11 Grafo unicíclico do Tipo II e suas subárvores T_1, T_2, T_3 e T_4 .

Portanto, pelo Teorema 4.17, temos que o número de emparelhamento de G é dado por:

$$\begin{aligned}
 \nu(G) &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \\
 &= \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 + \frac{4}{2} + 2 + 1 = 8.
 \end{aligned}$$

Note que $M = \{\{a, b\}, \{d, e\}, \{i, j\}, \{f, g\}, \{p, q\}, \{n, o\}, \{r, v\}, \{s, w\}\}$ é um emparelhamento máximo de G e $|M| = 8$.

Com exceção do Lema 4.6 e o Teorema 4.15 que usamos para demonstrar resultados deste capítulo, todos os outros resultados são nossas contribuições. Destacamos o Teorema 4.7 que caracteriza os grafos unicíclicos singulares através

do suporte de suas árvores pendentes, e principalmente os Teoremas 4.11,4.13, 4.16 e 4.17 que fornecem fórmulas espectrais fechadas para dois parâmetros clássicos de grafos (números de independência e emparelhamento). Estas fórmulas permitem o cálculo dos números de independência e emparelhamento de todos os grafos unicíclicos usando álgebra linear.

5 ESPAÇO NULO DE GRAFOS UNICÍCLICOS

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção obtemos uma base para o espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo *I* e na segunda conseguimos uma base para o espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo *II*. Estes resultados são essenciais para, no próximo capítulo, relacionarmos o suporte, o core e o N -vértices de um grafo unicíclico com o suporte, o core e os N -vértices de suas subárvores.

5.1 Espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo I

Nesta seção, obtemos vários resultados de Álgebra Linear em grafos unicíclicos do Tipo *I*, mais precisamente, obtemos uma base do espaço nulo de todos grafos unicíclicos do Tipo *I* usando uma base de $\mathcal{N}(G\{v\})$ e $\mathcal{N}(G - G\{v\})$.

A seguir definimos o conceito de espaço nulo estendido, este conceito é muito importante para o entendimento dos teoremas que virão na sequência.

Definição 5.1. *Seja H um subgrafo de um grafo G . Cada vetor $x \upharpoonright_H^G$ do espaço nulo estendido de H , denotado por $\mathcal{N}(H) \upharpoonright_H^G$, é construído estendendo o vetor $x \in \mathcal{N}(H)$ como segue:*

1- Para cada $v \in V(G) - V(H)$, $(x \upharpoonright_H^G)_v = 0$;

2- Para cada $v \in V(H)$, $(x \upharpoonright_H^G)_v = x_v$.

Por exemplo, considere o subgrafo $H = G\langle\{a, b, c\}\rangle$ de G (Figura 5.1). Observe que a matriz de adjacência de H é:

$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que o vetor $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$ pertence a $\mathcal{N}(H)$, e temos que $x \upharpoonright_H^G \in \mathcal{N}(H) \upharpoonright_H^G$ é dado por:

$$x \upharpoonright_H^G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

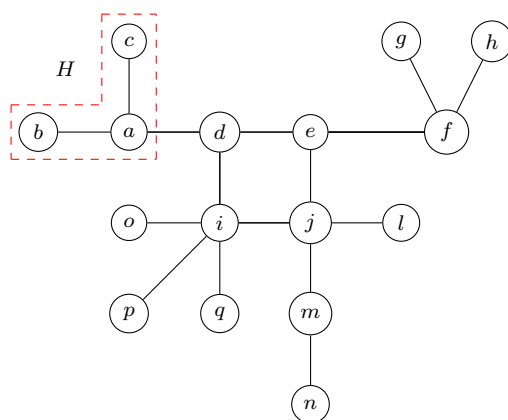


Figura 5.1 Grafo G .

A Proposição 5.2 nos diz como obter parte do espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo I através do espaço nulo estendido de algumas de suas árvores pendentes.

Proposição 5.2. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v_i\}$ é uma árvore pendente tal que $v_i \notin \text{Supp}(G\{v_i\})$, então $\mathcal{N}(G\{v_i\}) \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G \subseteq \mathcal{N}(G)$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{N}(G\{v_i\})$. Note que a matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto

$$A(G) = \begin{array}{c} V(G\{v_1\}) \\ \vdots \\ V(G\{v_{i-1}\}) \\ V(G\{v_i\}) \\ V(G\{v_{i+1}\}) \\ \vdots \\ V(G\{v_k\}) \end{array} \begin{bmatrix} V(G\{v_1\}) & \dots & V(G\{v_{i-1}\}) & V(G\{v_i\}) & V(G\{v_{i+1}\}) & \dots & V(G\{v_k\}) \\ A(G\{v_1\}) & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0}^t & \dots & A(G\{v_{i-1}\}) & M & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & \dots & M^t & A(G\{v_i\}) & B & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t & B^t & A(G\{v_{i+1}\}) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^t & \dots & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \dots & A(G\{v_k\}) \end{bmatrix},$$

onde M , B e C são submatrizes com quase todas entradas nulas, com exceção das entradas correspondentes às adjacências entre os vértices v_{i-1} e v_i , v_i e v_{i+1} , v_1 e v_k , respectivamente. Note que $x \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G \in \mathcal{N}(G)$. De fato, como $v_i \notin \text{Supp}(G\{v_i\})$ temos $x_{v_i} = 0$. Logo temos que

$$A(G)x \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Mx \\ A(G\{v_i\})x \\ B^t \cdot x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_{v_i} \cdot 1 \\ A(G\{v_i\})x \\ x_{v_i} \cdot 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Portanto, $\mathcal{N}(G\{v_i\}) \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G \subseteq \mathcal{N}(G)$. □

A Proposição 5.3 nos diz como obter parte do espaço nulo de uma família de grafos unicíclicos através do espaço nulo estendido de uma determinada subárvore.

Proposição 5.3. *Sejam G um grafo unicíclico e $G\{v\}$ uma árvore pendente. Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ é tal que $x_u + x_w = 0$, então*

$$x \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G \in \mathcal{N}(G).$$

Demonstração. Note que a matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto

$$A(G) = \begin{matrix} & V(G - G\{v\}) & V(G\{v\}) \\ V(G - G\{v\}) & \begin{bmatrix} A(G - G\{v\}) & M \\ M^t & A(G\{v\}) \end{bmatrix} \\ V(G\{v\}) & & \end{matrix},$$

onde M é uma submatriz com quase todas entradas nulas, com exceção das entradas associadas às adjacências entre os vértices v e u e entre v e w . Como $x_u + x_w = 0$, temos:

$$A(G)x \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G = \begin{bmatrix} A(G - G\{v\})x + \mathbf{0}.M \\ M^t x + A(G\{v\}).\mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_u + x_w \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Logo $x \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G \in \mathcal{N}(G)$. □

O Teorema 5.4 nos diz que o espaço nulo de uma família de grafos unicíclicos de Tipo I é a soma direta, denotada por \bigoplus , dos espaços nulos estendidos de duas subárvores. Observe que o Teorema 5.4 nos permite conhecer a aparência dos vetores da base deste grafo unicíclico.

Teorema 5.4. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se, para todo $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$, temos $x_u + x_w = 0$, então*

$$\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G \bigoplus \mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G = \mathcal{N}(G).$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G \cap \mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G = \{0\}.$$

Como $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ e para todo $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos $x_u + x_w = 0$, então pelas Proposições 5.2 e 5.3, $\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G$ e $\mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G$ são subespaços de $\mathcal{N}(G)$ e, portanto, $\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G \bigoplus \mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G$ é também um subespaço

de $\mathcal{N}(G)$. Além disso, pelo Lema 4.6 temos que $\mathcal{N}(G)$ e $\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G \oplus \mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G$ têm a mesma dimensão. Portanto,

$$\mathcal{N}(G\{v\}) \upharpoonright_{G\{v\}}^G \oplus \mathcal{N}(G - G\{v\}) \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G = \mathcal{N}(G).$$

□

O Lema 5.5 é usado para garantir a existência de um vetor $y \in \mathcal{N}(G\{v\} - v)$ satisfazendo as propriedades da Proposição 5.6.

Lema 5.5. *Seja T uma árvore. Se $v \notin \text{Supp}(T)$, então $N(v) \cap \text{Supp}(T - v) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $M \in \mathcal{M}(T)$. Como $v \notin \text{Supp}(T)$, pelo Lema 4.3 v é saturado por M , ou seja, existe $w \in N(v)$ tal que $\{v, w\} \in M$. Note que $M - \{\{v, w\}\}$ é um emparelhamento máximo em $T - v$, caso contrário, existiria $M' \in \mathcal{M}(T - v)$ tal que $|M'| > |M - \{\{v, w\}\}| = |M| - 1$. Note que M' também é um emparelhamento de T . Como $M \in \mathcal{M}(T)$ temos que $|M| \geq |M'|$. Logo

$$|M| - 1 < |M'| \leq |M|.$$

Como $|M| - 1$ e $|M|$ são números inteiros consecutivos, temos que $|M'| = |M|$, o que é uma contradição, porque M' não satura v e todo emparelhamento máximo de T satura v , uma vez que $v \notin \text{Supp}(T)$. Portanto, $M - \{\{v, w\}\} \in \mathcal{M}(T - v)$. Note que $T - v$ é uma floresta, isto é, $T - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i são as componentes conexas de $T - v$. Como w não saturado pelo emparelhamento máximo $M - \{\{v, w\}\}$ em $T - v$, e $w \in V(T_i)$ para algum i , então aplicando o Lema 4.3 em cada árvore T_i , concluímos que $w \in \text{Supp}(T - v)$. □

A Proposição 5.6 nos dá um vetor do espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo I.

Proposição 5.6. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Seja*

$N(v) \cap \text{Supp}(G\{v\} - v) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. Se $y \in \mathcal{N}(G\{v\} - v)$ e existe $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u + x_w \neq 0$, então $s \in \mathcal{N}(G)$, onde

$$s = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^k y_{t_i} \\ x_u + x_w \end{pmatrix} x \upharpoonright_{G-G\{v\}}^G + y \upharpoonright_{G\{v\}-v}^G.$$

Demonstração. Note que a matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto

$$A(G) = \begin{matrix} & V(G - G\{v\}) & v & V(G\{v\} - v) \\ V(G - G\{v\}) & \left[\begin{array}{ccc} A(G - G\{v\}) & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^t & 0 & \mathbf{b}^t \\ \mathbf{0}^t & \mathbf{b} & A(G\{v\} - v) \end{array} \right] \\ v & & & \\ V(G\{v\} - v) & & & \end{matrix},$$

onde \mathbf{a} é uma submatriz com quase todas as entradas nulas, como exceção das entradas correspondentes à adjacência entre v e u e à adjacência entre v e w . A submatriz \mathbf{b} tem quase todas entradas nulas, com exceção das entradas correspondentes às adjacências entre v e vértices de $G\{v\} - v$. Logo temos

$$\begin{aligned} A(G)s &= \begin{bmatrix} \left(\frac{-\sum_{i=1}^k y_{t_i}}{x_u + x_w} \right) A(G - G\{v\})x \\ \left(\frac{-\sum_{i=1}^k y_{t_i}}{x_u + x_w} \right) \mathbf{a}^t x + \mathbf{b}^t y \\ A(G\{v\} - v)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left(\frac{-\sum_{i=1}^k y_{t_i}}{x_u + x_w} \right) (x_u + x_w) + \sum_{i=1}^k y_{t_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\sum_{i=1}^k y_{t_i} + \sum_{i=1}^k y_{t_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Portanto, $s \in \mathcal{N}(G)$. □

Precisamos do Lema 5.7 para garantir a existência do vetor y no Teorema 5.8.

Lema 5.7. (Lemma 7,[54]) *Sejam G um grafo com n vértices e S subconjunto de \mathbb{R}^n com dimensão $k > 0$. Então existe uma base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ de S satisfazendo $\text{Supp}_G(S) = \text{Supp}_G(b_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.*

O próximo resultado nos dá uma base de $\mathcal{N}(G)$, onde G é um grafo unicíclico do Tipo I , usando as bases de $\mathcal{N}(G\{v\})$ e $\mathcal{N}(G - G\{v\})$. Note que o Teorema 5.8 nos dá o aspecto dos vetores do espaço nulo da base dos grafos unicíclicos do Tipo I . Conseqüentemente, nos permite saber quem são os vértices do suporte destes grafos.

Teorema 5.8. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Sejam $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Seja $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ uma base de $\mathcal{N}(G\{v\})$. Seja $\{b_1, b_2, \dots, b_p\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ uma base de $\mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $(b_i)_u + (b_i)_w \neq 0$ e $(a_j)_u + (a_j)_w = 0$, com $i = 1, 2, \dots, p$ e $j = 1, 2, \dots, r$. Seja $y \in \mathcal{N}(G\{v\} - v)$ tal que $\text{Supp}(G\{v\} - v) = \text{Supp}_{G\{v\} - v}(y)$. Seja $c_i = \frac{-\sum_{s=1}^k y_{t_s}}{(b_i)_u + (b_i)_w}$, com $i = 1, 2, \dots, p$ e $N(v) \cap \text{Supp}(G\{v\} - v) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. Seja*

$$\mathcal{B}_1 = \bigcup_{i=1}^p \left\{ \begin{bmatrix} c_i b_i \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \bigcup_{i=1}^r \{a_i \upharpoonright_{G - G\{v\}}^G\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_3 = \bigcup_{i=1}^t \{w_i \upharpoonright_{G\{v\}}^G\}.$$

Então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ é uma base de $\mathcal{N}(G)$.

Demonstração. Note que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{N}(G)$ pelas Proposições 5.6, 5.3 e 5.2, respectivamente. Além disso, $|\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3| = \eta(G\{v\}) + \eta(G - G\{v\})$. Note que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ é um conjunto de vetores linearmente independente. De fato, dados $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \in \mathbb{R}$, temos

$$\sum_{i=1}^p \left(\alpha_i \begin{bmatrix} c_i b_i \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \right) + \sum_{j=1}^r \left(\beta_j \begin{bmatrix} a_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + \sum_{\ell=1}^t \left(\gamma_\ell \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ w_\ell \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i b_i + \sum_{j=1}^r \beta_j a_j \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} + \sum_{\ell=1}^t \gamma_\ell w_\ell \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

Por (5.1) temos $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i b_i + \sum_{j=1}^r \beta_j a_j = 0$. Como $\{b_1, b_2, \dots, b_p\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ é uma base de $\mathcal{N}(G - G\{v\})$ e $c_i \neq 0$, então para todo i, j , temos que $\alpha_i = \beta_j = 0$. Logo temos que $\sum_{\ell=1}^t \gamma_\ell w_\ell = 0$. Como $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é uma base de $\mathcal{N}(G\{v\})$, então para todo ℓ , $\gamma_\ell = 0$. Como G é um grafo unicíclico do Tipo I , pelo Lema 4.6 temos que $\eta(G) = \eta(G\{v\}) + \eta(G - G\{v\})$, e portanto, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ é uma base de $\mathcal{N}(G)$. \square

5.2 Espaço nulo de grafos unicíclicos do Tipo II

Nesta seção, obtemos uma base para o espaço nulo de grafos unicíclicos G do Tipo II usando a base de $\mathcal{N}(G - C)$ e $\mathcal{N}(G\{v_i\})$, onde C é o ciclo de G e v_i são vértices de C .

A Proposição 5.9 nos diz como obter parte do espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo II através do espaço nulo estendido de uma floresta contida neste grafo unicíclico.

Proposição 5.9. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G , então $\mathcal{N}(G - C) \upharpoonright_{G-C}^G \subseteq \mathcal{N}(G)$.*

Demonstração. Note que $G - C$ é uma floresta, portanto, $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i 's são as componentes conexas de $G - C$. Seja $x \in \mathcal{N}(T_i)$. Vamos mostrar que

$x \upharpoonright_{T_i}^G \in \mathcal{N}(G)$. De fato, pelo Lema 4.12, se $v \in V(C)$ e $u_i \in V(T_i)$, então $x_{u_i} = 0$ quando u_i é adjacente a v .

Note que a matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & V(T_1) & V(T_2) & \cdots & V(T_i) & \cdots & V(T_k) & V(C) \\ V(T_1) & A(T_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & M_1 \\ V(T_2) & \mathbf{0}^t & A(T_2) & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & M_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V(T_i) & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \cdots & A(T_i) & \cdots & \mathbf{0} & M_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V(T_k) & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \cdots & \mathbf{0}^t & \cdots & A(T_k) & M_k \\ V(C) & M_1^t & M_2^t & \cdots & M_i^t & \cdots & M_k^t & A(C) \end{array} \\ = \end{array},$$

onde M_j , para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, é uma submatriz de $A(G)$ com quase todas entradas nulas, com exceção da única entrada associada à adjacência entre o único vértice u_j de T_j que é adjacente a um vértice do ciclo C . Logo

$$A(G)x \upharpoonright_{T_i}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ A(T_i)x \\ \mathbf{0} \\ M_i^t \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ x_{u_i} \cdot 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Portanto, $\mathcal{N}(T_i) \upharpoonright_{T_i}^G \subseteq \mathcal{N}(G)$, e dado que isto é verdade para qualquer componente conexa T_j , com $j \in \{1, \dots, k\}$, de $G - C$, então

$$\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{N}(T_i) \upharpoonright_{T_i}^G \subseteq \mathcal{N}(G).$$

Como $G - C$ é a união de grafos disjuntos $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{N}(T_i) \upharpoonright_{T_i}^G = \mathcal{N}(G - C)$, temos $\mathcal{N}(G - C) \upharpoonright_{G-C}^G \subseteq \mathcal{N}(G)$. \square

O Teorema 5.10 nos diz que o espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo II com ciclo de comprimento diferente de $4k$ é igual ao espaço nulo estendido

de uma floresta contida nele. Note que Teorema 5.10 nos permite saber o aspecto dos vetores do espaço nulo da base dos grafos unicíclicos do Tipo II com ciclo de comprimento diferente de $4k$. Consequentemente, nos permite saber quem são os vértices do suporte destes grafos.

Teorema 5.10. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G tal que $|V(C)| \neq 4k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{N}(G - C) \upharpoonright_{G-C}^G = \mathcal{N}(G)$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.6, temos $\eta(G - C) = \eta(G)$ e pela Proposição 5.9 concluímos que $\mathcal{N}(G - C) \upharpoonright_{G-C}^G = \mathcal{N}(G)$. \square

A Proposição 5.11 nos dá dois vetores do espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo II quando $|V(C)| = 4k$.

Proposição 5.11. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G . Seja $V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_{4k}\}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, tal que $N(v_i) \cap V(C) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ e $v_0 = v_{4k}$. Seja $x(v_i) \in \mathcal{N}(G\{v_i\})$ tal que $\text{Supp}(G\{v_i\}) = \text{Supp}_{G\{v_i\}}(x(v_i))$. Se $x(v_i)_{v_i} = 1$, então $z_1, z_2 \in \mathcal{N}(G)$, onde*

$$z_1 = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \quad e \quad z_2 = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G .$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} (A(G)x(v_i) \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G)_{v_j} &= \sum_{u \in N(v_j)} (x(v_i) \upharpoonright_{G\{v_i\}}^G)_u \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } j \in \{1, \dots, 4k\} \text{ e } j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo temos que

$$(A(G)z_1)_{v_j} = \left(A(G) \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \right)_{v_j}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i A(G)x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \right)_{v_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \left(A(G)x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \right)_{v_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \sum_{u \in N(v_j)} \left(x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \right)_u \\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i, & \text{se } j \in \{1, \dots, 4k\} \text{ e } j = 2i - 2 \text{ ou } j = 2i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
(A(G)z_2)_{v_j} &= \left(A(G) \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G \right)_{v_j} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i A(G)x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G \right)_{v_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \left(A(G)x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G \right)_{v_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \sum_{u \in N(v_j)} \left(x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G \right)_u \\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i, & \text{se } j \in \{1, \dots, 4k\} \text{ e } j = 2i - 1 \text{ ou } j = 2i + 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $z_1, z_2 \in \mathcal{N}(G)$. □

O Teorema 5.12 nos dá uma base do espaço nulo de um grafo unicíclico do Tipo II quando $|V(C)| = 4k$.

Teorema 5.12. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G . Seja $V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_{4k}\}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, tal que $N(v_i) \cap V(C) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$*

e $v_0 = v_{4k}$. Seja $x(v_i) \in \mathcal{N}(G\{v_i\})$ tal que $\text{Supp}(G\{v_i\}) = \text{Supp}_{G\{v_i\}}(x(v_i))$. Seja $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ uma base de $\mathcal{N}(G - C)$. Se $x(v_i)_{v_i} = 1$, então $\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\}$ é uma base $\mathcal{N}(G)$, onde

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^t \{w_i \upharpoonright_{G-C}^G\}, \quad z_1 = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i-1}) \upharpoonright_{G\{v_{2i-1}\}}^G \quad e \quad z_2 = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i x(v_{2i}) \upharpoonright_{G\{v_{2i}\}}^G.$$

Demonstração. Note que $\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\} \subseteq \mathcal{N}(G)$ pelas Proposições 5.11 e 5.9. Uma vez que $|V(C)| = 4k$ podemos concluir pelo Lema 2.12 que $\eta(C) = 2$. Logo temos que $|\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\}| = t + 2 = \eta(G - C) + \eta(C)$. Mostraremos que $\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente. De fato, dado $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, suponha que

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \sum_{i=1}^t \alpha_i w_i \upharpoonright_{G-C}^G = 0. \quad (5.2)$$

Tomando $j \in \{1, \dots, 4k\}$ temos que

$$\left(\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \sum_{i=1}^t \alpha_i w_i \upharpoonright_{G-C}^G \right)_{v_j} = \begin{cases} \gamma_1 (-1)^i, & \text{se } j = 2i - 1; \\ \gamma_2 (-1)^i, & \text{se } j = 2i. \end{cases} \quad (5.3)$$

Comparando (5.2) e (5.3) concluímos que $\gamma_1 (-1)^i = \gamma_2 (-1)^i = 0$, logo temos que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Substituindo o valor de γ_1 e γ_2 em (5.2) obtemos que

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i w_i \upharpoonright_{G-C}^G = 0 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t \alpha_i w_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Usando (5.4) obtemos que $\sum_{i=1}^t \alpha_i w_i = 0$, como $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é uma base de $\mathcal{N}(G - C)$ concluímos que $\alpha_i = 0$ para todo i . Logo $\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente.

Como G é um grafo unicíclico do Tipo II , logo pelo Lema 4.6 temos que $\eta(G) = \eta(G - C) + \eta(C)$, portanto, $\mathcal{B} \cup \{z_1, z_2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(G)$. \square

Neste capítulo, construímos uma base do espaço nulo de um grafo unicíclico G usando bases do espaço nulo de suas subárvores. Estes resultados são essenciais para no próximo capítulo estabelecermos relações entre o suporte, core e N -vértices de G com o suporte, core e N -vértices de suas subárvores.

6 DECOMPOSIÇÃO NULA DE GRAFOS UNICÍCLICOS

Este capítulo está dividido em três seções. Nas duas primeiras, determinamos o suporte, core e N -vértices dos grafos unicíclicos em função de suas subárvores. Na terceira, obtemos as fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de um grafo unicíclico. No capítulo 4, obtivemos fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de um grafo unicíclico G que permitem o cálculo destes parâmetros usando a decomposição nula de suas subárvores. Neste capítulo, também apresentamos fórmulas fechadas para esses parâmetros de G , a diferença é que aqui as fórmulas (Teoremas 6.12 e 6.15) possibilitam o cálculo destes parâmetros utilizando a decomposição nula de G . No caso do número de emparelhamento, a fórmula é dada por

$$\nu(G) = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor.$$

Vale ressaltar que as fórmulas são válidas para qualquer grafo unicíclico, mas, para demonstrá-las, é necessário considerar diversos casos conforme veremos nas próximas seções.

6.1 Suporte, core e conjunto dos N -vértices de grafos unicíclicos do Tipo I

Nesta seção, estudamos o suporte, core e os N -vértices de um grafo unicíclico do Tipo I.

Observação 6.1. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I, $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin Supp(G\{v\})$ e $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Note que G necessariamente satisfaz as hipóteses de uma das proposições 6.2, 6.3, 6.4 ou 6.6. De*

fato, podemos dividir o conjunto dos grafos unicíclicos do Tipo I em quatro classes disjuntas, conforme os itens abaixo.

- (1) $\forall x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos que $x_u = x_w = 0$, ou seja, $u, w \notin \text{Supp}(G - G\{v\})$.
(Hipóteses da Proposição 6.2)
- (2) $\forall x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos que $x_u + x_w = 0$, e existe $y \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $y_u \neq 0$ e $v \in \text{Core}(G\{v\})$ (Hipóteses da Proposição 6.3)
- (3) $\forall x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos que $x_u + x_w = 0$, e existe $y \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $y_u \neq 0$ e $v \in V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))$ (Hipóteses da Proposição 6.4)
- (4) Existe $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u + x_w \neq 0$ (Hipóteses da Proposição 6.6)

Nas próximas proposições, relacionamos o suporte, core e N -vértices de um grafo unicíclico do Tipo I com o suporte, core e N -vértices de determinadas subárvores, ou seja, relacionamos a decomposição nula de um grafo unicíclico do Tipo I com a decomposição nula de suas subárvores.

Proposição 6.2. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I, $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ e $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se $u, w \notin \text{Supp}(G - G\{v\})$, então*

- (i) $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(G\{v\}) \cup \text{Supp}(G - G\{v\})$;
- (ii) $\text{Core}(G) = \text{Core}(G\{v\}) \cup \text{Core}(G - G\{v\})$;
- (iii) $V(\mathcal{G}_N(G)) = V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))$;
- (iv) $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente de G ;
- (v) $\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G) = \emptyset$.

Demonstração. (i) Como $u, w \notin \text{Supp}(G - G\{v\})$, temos $x_u = x_w = 0$ para todo $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$, portanto, $x_u + x_w = 0$. Analisando as entradas não nulas dos vetores da base do $\mathcal{N}(G)$ no Teorema 5.4 obtemos o resultado.

(ii) Dado um vértice $p \in \text{Core}(G)$, então existe um vértice $p_1 \in \text{Supp}(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Observe que, as únicas adjacências entre $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ ocorrem entre os vértices v e u e os vértices v e w , ou seja, $V(G - G\{v\}) \cap N(V(G\{v\})) = \{u, w\}$ e $V(G\{v\}) \cap N(V(G - G\{v\})) = \{v\}$. Como $u, w \notin \text{Supp}(G - G\{v\})$ e $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, temos que $N(\text{Supp}(G\{v\})) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$ e $N(\text{Supp}(G - G\{v\})) \cap V(G\{v\}) = \emptyset$. Além disso, utilizando o item (i) concluímos que $p_1 \in \text{Supp}(G\{v\})$ ou $p_1 \in \text{Supp}(G - G\{v\})$. Portanto, se $p_1 \in \text{Supp}(G\{v\})$, então $p \in V(G\{v\})$; se $p_1 \in \text{Supp}(G - G\{v\})$, então $p \in V(G - G\{v\})$. Concluimos que $p \in \text{Core}(G\{v\})$ ou $p \in \text{Core}(G - G\{v\})$.

Agora, dado um vértice $p \in \text{Core}(G\{v\}) \cup \text{Core}(G - G\{v\})$, existe um $p_1 \in \text{Supp}(G\{v\})$ tal que $p \in N(p_1)$ ou existe um $p_2 \in \text{Supp}(G - G\{v\})$ tal que $p \in N(p_2)$. Usando o item (i) obtemos que $p_1 \in \text{Supp}(G)$ ou $p_2 \in \text{Supp}(G)$. Portanto, $p \in \text{Core}(G)$.

(iii) Apenas use os itens (i) e (ii).

(iv) Pelo item (i) temos que $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(G\{v\}) \cup \text{Supp}(G - G\{v\})$. Note que $N(\text{Supp}(G\{v\})) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$ e isto implica que

$$N(\text{Supp}(G\{v\})) \cap \text{Supp}(G - G\{v\}) = \emptyset.$$

Além disso, aplicando o Teorema 3.3 nas árvores $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$, concluímos que $\text{Supp}(G\{v\})$ e $\text{Supp}(G - G\{v\})$ são conjuntos independentes. Portanto, $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente.

- (v) Pelo item (iv) $Supp(G)$ é um conjunto independente. Logo não existe a possibilidade de um vértice do suporte ser também um vértice do core. Portanto, temos que $Supp(G) \cap Core(G) = \emptyset$.

□

Proposição 6.3. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I, $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin Supp(G\{v\})$ e $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se $v \in Core(G\{v\})$, e para todo $y \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos que $y_u + y_w = 0$ e existe um $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u \neq 0$, então*

- (i) $Supp(G) = Supp(G\{v\}) \cup Supp(G - G\{v\})$;
- (ii) $Core(G) = Core(G\{v\}) \cup Core(G - G\{v\})$;
- (iii) $V(\mathcal{G}_N(G)) = V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))$;
- (iv) $Supp(G)$ é um conjunto independente de G ;
- (v) $Supp(G) \cap Core(G) = \emptyset$.

Demonstração. (i) Uma vez que, para todo $y \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$, temos que $y_u + y_w = 0$. Para obter o resultado, basta analisar as entradas não nulas dos vetores da base do $\mathcal{N}(G)$ no Teorema 5.4.

- (ii) Dado um vértice $p \in Core(G)$, note que, se $p = v$, então $p \in Core(G\{v\})$, porque, por hipótese, $v \in Core(G\{v\})$. Suponha que $p \in Core(G) \setminus \{v\}$, então existe um vértice $p_1 \in Supp(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Note que $V(G - G\{v\}) \cap N(V(G\{v\})) = \{u, w\}$ e $V(G\{v\}) \cap N(V(G - G\{v\})) = \{v\}$. Como $u, w \in Supp(G - G\{v\})$ (porque $x_u \neq 0$ e $x_w \neq 0$) e $v \notin Supp(G\{v\})$ (porque $v \in Core(G\{v\})$), temos que $N(Supp(G\{v\})) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$ e $N(Supp(G - G\{v\})) \cap V(G\{v\}) = \{v\}$. Pelo item (i) concluímos que $p_1 \in Supp(G\{v\}) \cup Supp(G - G\{v\})$. Portanto, se

$p_1 \in \text{Supp}(G\{v\})$, então $p \in V(G\{v\})$ ou se $p_1 \in \text{Supp}(G - G\{v\})$, então $p \in V(G - G\{v\})$. Concluimos que $p \in \text{Core}(G\{v\})$ ou $p \in \text{Core}(G - G\{v\})$.

A inclusão \supseteq é análoga à Proposição 6.2 (ii).

- (iii) Apenas use os itens (i) e (ii).
- (iv) Mesmo argumento usado no item (iv) da Proposição 6.2.
- (v) Igual ao argumento utilizado no item (v) da Proposição 6.2.

□

Proposição 6.4. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I, $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ e $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se $v \in V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))$, para todo $y \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ temos que $y_u + y_w = 0$ e existe $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u \neq 0$, então*

- (i) $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(G\{v\}) \cup \text{Supp}(G - G\{v\})$;
- (ii) $\text{Core}(G) = \text{Core}(G\{v\}) \cup \text{Core}(G - G\{v\}) \cup \{v\}$;
- (iii) $V(\mathcal{G}_N(G)) = (V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \setminus \{v\}) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))$;
- (iv) $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente de G .
- (v) $\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G) = \emptyset$.

Demonstração. (i) Mesmo argumento usado no item (i) da Proposição 6.3.

- (ii) Dado um vértice $p \in \text{Core}(G)$. Note que, se $p = v$, então $p \in \{v\}$. Considere $p \in \text{Core}(G) \setminus \{v\}$, então existe um vértice $p_1 \in \text{Supp}(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Note que $N(V(G\{v\})) \cap V(G - G\{v\}) = \{u, w\}$ e $N(V(G - G\{v\})) \cap V(G\{v\}) = \{v\}$. Já que $u, w \in \text{Supp}(G - G\{v\})$ (porque $x_u \neq 0$ e $x_w \neq 0$) e $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, logo temos que $N(\text{Supp}(G$

$\{v\}) \cap V(G - G\{v}) = \emptyset$ e $N(\text{Supp}(G - G\{v})) \cap V(G\{v}) = \{v\}$. Pelo item (i) concluímos que $p_1 \in \text{Supp}(G\{v}) \cup \text{Supp}(G - G\{v})$. Logo se $p_1 \in \text{Supp}(G\{v})$, então $p \in V(G\{v})$ ou se $p_1 \in \text{Supp}(G - G\{v})$, então $p \in V(G - G\{v})$. Portanto, $p \in \text{Core}(G\{v}) \cup \text{Core}(G - G\{v})$.

Dado um vértice $p \in \text{Core}(G\{v}) \cup \text{Core}(G - G\{v}) \cup \{v\}$. Observe que, usando o item (i) temos que $u, w \in \text{Supp}(G)$, porque $u, w \in \text{Supp}(G - G\{v})$. Note que, se $p = v$ então temos que $p \in \text{Core}(G)$ porque $v \in N(u)$ e $u \in \text{Supp}(G)$. Se $p \in \text{Core}(G\{v})$ então existe $r \in N(p)$ tal que $r \in \text{Supp}(G\{v})$. Usando o item (i) podemos concluir que $r \in \text{Supp}(G)$. Portanto, $p \in \text{Core}(G)$. Se $p \in \text{Core}(G - G\{v})$ então existe um $r \in N(p)$ tal que $r \in \text{Supp}(G - G\{v})$. Usando o item (i) temos que $r \in \text{Supp}(G)$. Portanto, $p \in \text{Core}(G)$.

(iii) Apenas use os itens (i) e (ii).

(iv) Mesmo argumento usado no item (iv) da Proposição 6.2.

(v) Análogo ao argumento usado no item (v) da Proposição 6.2.

□

Lema 6.5. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v})$, então $\text{Supp}(G\{v}) \subseteq \text{Supp}(G\{v} - v)$.*

Demonstração. Considere um vértice $j \in \text{Supp}(G\{v})$. Isto significa que existe um vetor $x \in \mathcal{N}(G\{v})$ tal que $x_j \neq 0$. A matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto:

$$A(G\{v}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} V(G\{v} - v) \\ v \end{array} \\ \begin{array}{c} V(G\{v} - v) \\ v \end{array} & \begin{bmatrix} A(G\{v} - v) & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Onde a submatriz \mathbf{a} tem quase todas as entradas nulas, exceto as entradas associadas às adjacências entre v e os vértices de $G\{v\} - v$. Note que

$$x = \begin{bmatrix} w \\ x_v \end{bmatrix},$$

onde $w = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_j \ \cdots \ x_{v-1}]^t$ e $x_v = 0$, porque $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$. Logo temos

$$A(G\{v\})x = \begin{bmatrix} A(G\{v\} - v)w + x_v \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(G\{v\} - v)w \\ \mathbf{a}^t w \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

portanto, $A(G\{v\} - v)w = 0$. E, como $(w)_j = x_j \neq 0$, obtemos $j \in \text{Supp}(G\{v\} - v)$. \square

Proposição 6.6. *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo I, $G\{v\}$ uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$ e $u, w \in N(v) \cap V(G - G\{v\})$. Se existe $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u + x_w \neq 0$, então*

- (i) $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(G\{v\} - v) \cup \text{Supp}(G - G\{v\})$;
- (ii) $\text{Core}(G) = \text{Core}(G\{v\} - v) \cup \text{Core}(G - G\{v\}) \cup \{v\}$;
- (iii) $V(\mathcal{G}_N(G)) = V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v)) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))$;
- (iv) $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente de G .
- (v) $\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G) = \emptyset$.

Demonstração. (i) Note que pelo Lema 6.5 sabemos que $\text{Supp}(G\{v\}) \subseteq \text{Supp}(G\{v\} - v)$. Uma vez que existe $x \in \mathcal{N}(G - G\{v\})$ tal que $x_u + x_w \neq 0$ logo podemos usar o Teorema 5.8 e analisando as entradas não nulas dos vetores da base do $\mathcal{N}(G)$ obtemos o resultado.

(ii) Dado um vértice $p \in Core(G)$. Se $p = v$, então $p \in \{v\}$. Assuma $p \in Core(G) \setminus \{v\}$. Logo existe um vértice $p_1 \in Supp(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Note que, não existe adjacência entre $V(G\{v\} - v)$ e $V(G - G\{v\})$, ou seja, $N(V(G\{v\} - v)) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$. Portanto, $N(Supp(G\{v\} - v)) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$. Usando o item (i) podemos concluir que $p_1 \in Supp(G\{v\} - v) \cup Supp(G - G\{v\})$. Portanto, se $p_1 \in Supp(G\{v\} - v)$, então $p \in V(G\{v\} - v)$ ou se $p_1 \in Supp(G - G\{v\})$, então $p \in V(G - G\{v\})$, ou seja, $p \in Core(G\{v\} - v)$ ou $p \in Core(G - G\{v\})$.

Agora, dado um vértice $p \in Core(G\{v\} - v) \cup Core(G - G\{v\}) \cup \{v\}$. Note que $x_u + x_w \neq 0$ logo $u \in Supp(G - G\{v\})$ ou $w \in Supp(G - G\{v\})$. Usando o item (i) concluímos que $u \in Supp(G)$ ou $w \in Supp(G)$. Se $p = v$ então $p \in N(u) \cap N(w)$. Portanto, $p \in Core(G)$. Se

$$p \in Core(G\{v\} - v) \cup Core(G - G\{v\}),$$

então existe um $p_1 \in Supp(G\{v\} - v)$ tal que $p \in N(p_1)$ ou existe um $p_2 \in Supp(G - G\{v\})$ tal que $p \in N(p_2)$. Pelo item (i) concluímos que $p_1 \in Supp(G)$ ou $p_2 \in Supp(G)$. Isto implica que $p \in Core(G)$.

(iii) Apenas use os itens (i) e (ii).

(iv) Pelo item (i) temos que $Supp(G) = Supp(G\{v\} - v) \cup Supp(G - G\{v\})$. Seja $G\{v\} - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i 's são as componentes conexas da floresta $G\{v\} - v$. Note que $N(Supp(G\{v\} - v)) \cap V(G - G\{v\}) = \emptyset$ e isto implica que $N(Supp(G\{v\} - v)) \cap Supp(G - G\{v\}) = \emptyset$. Além disso, usando o Teorema 3.3 em cada árvore T_i e em $G - G\{v\}$, obtemos que $Supp(G\{v\} - v) = \bigcup_{i=1}^k Supp(T_i)$ e $Supp(G - G\{v\})$ são conjuntos independentes. Portanto, $Supp(G)$ é um conjunto independente.

(v) Igual ao argumento usado no item (v) da Proposição 6.2.

□

6.2 Suporte, core e conjunto dos N -vértices de grafos unicíclicos do Tipo II

Nesta seção, estudamos o suporte, core e os N -vértices de grafos unicíclicos do Tipo II. Para isto, dividimos o conjunto dos grafos unicíclicos do Tipo II em duas classes disjuntas. Aqueles com um ciclo de comprimento diferente de $4t$ (Proposição 6.7) e aqueles com um ciclo de comprimento igual a $4t$ (Proposição 6.9), em que $t \in \mathbb{N}$.

Nas proposições a seguir, obtemos o suporte, core e N -vértices de um grafo unicíclico do Tipo II utilizando suas subárvores e os vértices do seu ciclo.

Proposição 6.7. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Considere $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i é uma componente conexa de $G - C$. Se G é do Tipo II tal que $|V(C)| \neq 4t$ para todo $t \in \mathbb{N}$, então*

$$(i) \text{ Supp}(G) = \text{Supp}(G - C) = \bigcup_{i=1}^k \text{Supp}(T_i);$$

$$(ii) \text{ Core}(G) = \text{Core}(G - C) = \bigcup_{i=1}^k \text{Core}(T_i);$$

$$(iii) V(\mathcal{G}_N(G)) = V(C) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k V(\mathcal{G}_N(T_i)) \right);$$

(iv) $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente de G ;

$$(v) \text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G) = \emptyset.$$

Demonstração. (i) Apenas analise as entradas não nulas dos vetores do espaço nulo no Teorema 5.10.

(ii) Dado um vértice $p \in \text{Core}(G)$. Então existe um $p_1 \in \text{Supp}(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Pelo item (i), concluímos que $p_1 \in \text{Supp}(G - C)$. Usando o Lema 4.12 podemos concluir que $N(C) \cap \text{Supp}(G - C) = \emptyset$.

Então $p \in V(G - C)$. Portanto, $p \in \text{Core}(G - C)$. Agora, dado um vértice $p \in \text{Core}(G - C)$. Então existe um $p_1 \in \text{Supp}(G - C)$ tal que $p \in N(p_1)$. Usando o item (i), obtemos que $p_1 \in \text{Supp}(G)$. Portanto, $p \in \text{Core}(G)$.

(iii) Apenas use os itens (i) e (ii).

(iv) Pelo item (i) temos que $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(G - C) = \bigcup_{i=1}^k \text{Supp}(T_i)$. Note que para todo $i \neq j$ temos que $N(\text{Supp}(T_i)) \cap \text{Supp}(T_j) = \emptyset$. Usando o Teorema 3.3 em cada T_i , concluímos que $\text{Supp}(T_i)$ é conjunto independente, logo $\text{Supp}(G)$ é um conjunto independente.

(v) Mesmo argumento utilizado no item (v) da Proposição 6.2.

□

O Lema 6.8 é usado para provar o item (i) da Proposição 6.9.

Lema 6.8. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Se G é do Tipo II, então $\text{Supp}(G - C) \subseteq \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\})$.*

Demonstração. Considere $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i é uma componente conexa de $G - C$. Sabemos que $\text{Supp}(G - C) = \bigcup_{i=1}^k \text{Supp}(T_i)$. Dado $w_i \in \text{Supp}(G - C)$, então existe um i tal que $w_i \in \text{Supp}(T_i)$. Tomando $x \in \mathcal{N}(T_i)$, note que $V(T_i) \subseteq V(G\{v\})$ para algum $v \in V(C)$. Mostraremos que $x \upharpoonright_{T_i}^{G\{v\}} \in \mathcal{N}(G\{v\})$. De fato, uma vez G é um grafo unicíclico do Tipo II temos que $v \in \text{Supp}(G\{v\})$. Pelo Lema 4.12, se $u_i \in V(T_i) \cap N(v)$, então $x_{u_i} = 0$. A matriz de adjacência de $G\{v\}$ tem o seguinte formato

$$A(G\{v\}) = \begin{matrix} & V(T_i) & V(G\{v\} - T_i) \\ V(T_i) & \begin{bmatrix} A(T_i) & B \\ B^t & A(G\{v\} - T_i) \end{bmatrix} \\ V(G\{v\} - T_i) & \end{matrix},$$

onde B é uma submatriz de $A(G\{v\})$ com quase todas entradas nulas, exceto a entrada correspondente à adjacência entre o vértice u_i e o vértice v . Logo temos que

$$A(G)x \Big|_{T_i}^{G\{v\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ A(T_i)x \\ B^t \cdot x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \cdot x_{u_i} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo concluímos que $x \Big|_{T_i}^{G\{v\}} \in \mathcal{N}(G\{v\})$. Portanto, $w_i \in \text{Supp}(G\{v\})$ e temos que $\text{Supp}(G - C) \subseteq \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\})$. \square

Proposição 6.9. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Se G é do Tipo II tal que $|V(C)| = 4t$ para $t \in \mathbb{N}$, então*

- (i) $\text{Supp}(G) = \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\})$;
- (ii) $\text{Core}(G) = V(C) \cup \left(\bigcup_{v \in V(C)} \text{Core}(G\{v\}) \right)$;
- (iii) $V(\mathcal{G}_N(G)) = \bigcup_{v \in V(C)} V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))$;
- (iv) $\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G) = V(C)$;
- (v) $\text{Supp}(G)$ não é um conjunto independente de G .

Demonstração. (i) Uma vez que G é um grafo unicíclico do Tipo II, então, pelo Lema 6.8, temos que

$$\text{Supp}(G - C) \subseteq \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\}).$$

Analisando as entradas não nulas dos vetores da base do espaço nulo no Teorema 5.12 obtemos o resultado.

- (ii) Dado um vértice $p \in Core(G)$, então existe um $p_1 \in Supp(G)$ tal que $p \in N(p_1)$. Pelo item (i) obtemos que $p_1 \in Supp(G\{v\})$ para algum $v \in V(C)$. Se $p_1 \neq v$, então $p \in V(G\{v\})$, porque v é o único vértice de $G\{v\}$ que tem vizinhos em $V(G - G\{v\})$. Isto implica que $p \in Core(G\{v\})$. Se $p_1 = v$, então temos que $p \in V(C) \cup V(G\{v\})$, portanto,

$$p \in V(C) \cup \left(\bigcup_{v \in V(C)} Core(G\{v\}) \right).$$

Dado um vértice $p \in V(C) \cup \left(\bigcup_{v \in V(C)} Core(G\{v\}) \right)$. Se $p \in Core(G\{v\})$ para alguma árvore pendente $G\{v\}$, então existe um $p_1 \in Supp(G\{v\})$ tal que $p \in N(p_1)$. Pelo item (i) concluímos que $p_1 \in Supp(G)$. Portanto, $p \in Core(G)$. Agora, se $p \in V(C)$, então temos que $p \in N(v)$ para algum $v \in V(C)$. Usando o item (i) e o fato de que G é um grafo unicíclico do Tipo II concluímos que $V(C) \subseteq Supp(G)$, logo $v \in Supp(G)$. Portanto, $p \in Core(G)$.

- (iii) Apenas use os itens (i) e (ii).
- (iv) Dado um vértice $v \in V(C)$, então $v \in Supp(G\{v\})$, porque G é um grafo unicíclico do Tipo II. Ou seja, $v \in \bigcup_{v \in V(C)} Supp(G\{v\})$. Pelo item (i) temos que $v \in Supp(G)$, e isto implica que $V(C) \subseteq Supp(G)$. Além disso, existe um vértice $w \in N(v) \cap V(C)$ e já que $w \in Supp(G)$ concluímos que $v \in Core(G)$. Portanto, $v \in Supp(G) \cap Core(G)$. Agora, dado um vértice $v \in Supp(G) \cap Core(G)$, então existe um vértice $w \in Supp(G)$ tal que $w \in N(v)$. Se $v \in V(C)$, então não temos nada a provar. Suponha que $v \notin V(C)$. Então $v \in V(G\{u\})$ para algum $u \in V(C)$. Uma vez que u é o único vértice de $G\{u\}$ que tem vizinhos

fora de $G\{u\}$ podemos concluir que $w \in V(G\{u\})$. Então, pelo item (i) obtemos que $w \in \text{Supp}(G\{u\})$. Note que $v \in \text{Supp}(G\{u\})$, porque

$$v \in \text{Supp}(G) = \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\}).$$

Logo v e w pertencem a $\text{Supp}(G\{u\})$ o que é uma contradição, porque $\text{Supp}(G\{u\})$ é um conjunto independente. Portanto, $v \in V(C)$.

(v) Pelo item (i) temos que $\text{Supp}(G) = \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\})$. Como G é um grafo unicíclico do Tipo II, temos que $V(C) \subseteq \text{Supp}(G)$. Logo $\text{Supp}(G)$ não é um conjunto independente.

□

6.3 Decomposição nula de grafos unicíclicos

Nesta seção, obtemos fórmulas fechadas para os números de emparelhamento e independência de grafos unicíclicos. Os Teoremas 6.12 e 6.15 são nossos principais resultados e fornecem uma maneira diferente de calcular os números de emparelhamento e independência de grafos unicíclicos usando sua decomposição nula. Mais precisamente, para calcular esses dois parâmetros de grafos unicíclicos é necessário calcular o suporte, core e N -vértices e verificar se o conjunto dos vértices do ciclo do grafo unicíclico está ou não contido no conjunto dos N -vértices.

Lema 6.10. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ é uma árvore pendente tal que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, então*

$$|\text{Supp}(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} = |\text{Supp}(G\{v\} - v)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2}.$$

Demonstração. Considere $G\{v\} - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i é uma componente conexa de $G\{v\} - v$ para $i = 1, \dots, k$. Uma vez que $v \notin \text{Supp}(G\{v\})$, então $v \in V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup \text{Core}(G\{v\})$. Utilizando os Lemas 4.9 e 4.10 sabemos que existe $I \in \mathcal{I}(G\{v\})$ tal

que $v \notin I$. Além disso, $I \in \mathcal{I}(G\{v\} - v)$. Então, usando o Teorema 3.5 em cada T_i temos

$$\begin{aligned} \alpha(G\{v\}) = \alpha(G\{v\} - v) &= \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) = \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\ |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} &= |Supp(G\{v\} - v)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2}. \end{aligned}$$

□

Lema 6.11. *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I e $G\{v\}$ é uma árvore pendente tal que $v \notin Supp(G\{v\})$, então*

$$|Core(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} = |Core(G\{v\} - v)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2} + 1.$$

Demonstração. Seja $M \in \mathcal{M}(G\{v\})$. Como $v \notin Supp(G\{v\})$, pelo Lema 4.3 temos que M satura v . Então, existe um vértice u em $G\{v\} - v$ tal que $\{u, v\} \in M$. Primeiro, mostraremos que $M \setminus \{\{u, v\}\} \in \mathcal{M}(G\{v\} - v)$. Suponha que $M \setminus \{\{u, v\}\} \notin \mathcal{M}(G\{v\} - v)$. Portanto, existe um emparelhamento M' em $G\{v\} - v$ tal que $|M'| > |M \setminus \{\{u, v\}\}|$. Note que M' é um emparelhamento em $G\{v\}$. Como $M \in \mathcal{M}(G\{v\})$ temos que $|M| \geq |M'|$. Assim

$$|M| - 1 < |M'| \leq |M|. \quad (6.1)$$

Como $|M| - 1$ e $|M|$ são números inteiros consecutivos e a equação (6.1) é válida, logo temos que $|M'| = |M|$, o que é uma contradição. Porque M' não satura v e todo emparelhamento máximo em $G\{v\}$ satura v . Portanto, $M \setminus \{\{u, v\}\} \in \mathcal{M}(G\{v\} - v)$. Agora temos que $\nu(G\{v\}) = 1 + \nu(G\{v\} - v)$. Note que, $G\{v\} - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i 's são as componetes conexas de $G\{v\} - v$. Usando o Teorema 3.5 em cada T_i e em $G\{v\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu(G\{v\}) &= 1 + \nu(G\{v\} - v) \\ |Core(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} &= 1 + \sum_{i=1}^k \nu(T_i) \end{aligned}$$

$$|Core(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} = 1 + \sum_{i=1}^k |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}$$

$$|Core(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} = 1 + |Core(G\{v\} - v)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2}.$$

□

Teorema 6.12. *Se G é um grafo unicíclico, então*

$$\nu(G) = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Uma vez que G é um grafo unicíclico, então G obrigatoriamente satisfaz as condições de uma das seguintes proposições: 6.2, 6.3, 6.4, 6.6, 6.7 ou 6.9. Ou seja, podemos dividir o conjunto dos grafos unicíclicos em seis classes disjuntas.

Caso 1: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.2.

Pela Proposição 6.2, temos que

$$Core(G) = Core(G\{v\}) \cup Core(G - G\{v\}),$$

$$V(\mathcal{G}_N(G)) = V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e}$$

$$\emptyset = Supp(G) \cap Core(G).$$

Usando o Teorema 4.16 podemos concluir que o número de emparelhamento de G é dado por

$$\begin{aligned} \nu(G) &= |Core(G\{v\})| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\ &= |Core(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor \\ &= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Caso 2: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.3.

Este caso é análogo ao Caso 1.

Caso 3: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.4.

Logo, pela Proposição 6.4, temos que

$$\begin{aligned} Core(G) &= Core(G\{v\}) \cup Core(G - G\{v\}) \cup \{v\}, \\ V(\mathcal{G}_N(G)) &= (V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \setminus \{v\}) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e} \\ \emptyset &= Supp(G) \cap Core(G). \end{aligned}$$

E, usando o Teorema 4.16, temos que o número de emparelhamento de G é dado por

$$\begin{aligned} \nu(G) &= |Core(G\{v\})| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\ &= |Core(G)| - 1 + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| + 1}{2} = |Core(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - 1}{2} \\ &= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor \\ &= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Caso 4: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.6.

Pela Proposição 6.6, temos

$$\begin{aligned} Core(G) &= Core(G\{v\} - v) \cup Core(G - G\{v\}) \cup \{v\}, \\ V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v)) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e} \\ \emptyset &= Supp(G) \cap Core(G). \end{aligned}$$

E, usando o Teorema 4.16 e o Lema 6.11 temos que número de emparelhamento de G é dado por

$$\nu(G) = |Core(G\{v\})| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= |Core(G\{v\} - v)| + |Core(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2} \\
&\quad + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} + 1 \\
&= |Core(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor \\
&= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Caso 5: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.7.

Pela Proposição 6.7, temos

$$\begin{aligned}
Core(G) &= Core(G - C) = \bigcup_{i=1}^k Core(T_i), \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(C) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k V(\mathcal{G}_N(T_i)) \right) \text{ e} \\
\emptyset &= Supp(G) \cap Core(G).
\end{aligned}$$

E, pelo Teorema 4.17, o número de emparelhamento de G é o seguinte

$$\begin{aligned}
\nu(G) &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |Core(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\
&= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor \\
&= |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Caso 6: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.9.

Pela Proposição 6.9, sabemos que

$$\begin{aligned}
Core(G) &= V(C) \cup \left(\bigcup_{v \in V(C)} Core(G\{v\}) \right), \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= \bigcup_{v \in V(C)} V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \text{ e} \\
V(C) &= Supp(G) \cap Core(G).
\end{aligned}$$

Considere que $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde T_i 's são as componentes conexas de $G - C$. Note que $\nu(G\{v\}) = \nu(G\{v\} - v)$, porque $v \in \text{Supp}(G\{v\})$. E, usando o Teorema 4.17, obtemos que o número de emparelhamento é da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\nu(G) &= \left\lfloor \frac{|V(C)|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k |\text{Core}(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\
&= \frac{|V(C)|}{2} + \sum_{i=1}^k \nu(T_i) = -\frac{|V(C)|}{2} + |V(C)| + \sum_{i=1}^k \nu(T_i) \\
&= -\frac{|V(C)|}{2} + |V(C)| + \sum_{v \in V(C)} \nu(G\{v\} - v) \\
&= -\frac{|V(C)|}{2} + |V(C)| + \sum_{v \in V(C)} \nu(G\{v\}) \\
&= -\frac{|V(C)|}{2} + |V(C)| + \sum_{v \in V(C)} |\text{Core}(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} \\
&= |\text{Core}(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G)|}{2} \\
&= |\text{Core}(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G)|}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.13. *Se T é uma árvore, então $\bigcap_{I \in \mathcal{I}(T)} I = \text{Supp}(T)$.*

Demonstração. Dado um vértice $v \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}(T)} I$, e $v \in \text{Core}(T) \cup V(\mathcal{G}_N(T))$, então, pelos Lemas 4.9 e 4.10, existe um $J \in \mathcal{I}(T)$ tal que $v \notin J$, o que é uma contradição, porque $v \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}(T)} I$. Portanto, $v \in \text{Supp}(T)$.

Agora dado um vértice $v \in \text{Supp}(T)$. Se $v \notin \bigcap_{I \in \mathcal{I}(T)} I$, então existe um conjunto independente máximo $J \in \mathcal{I}(T)$ tal que $v \notin J$. Note que, dado $c \in \text{Core}(T)$, pelo Lema 4.10 temos que $c \notin J$. Logo $J = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \cup \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$, onde para todo i temos que $s_i \in \text{Supp}(T)$ e $n_i \in V(\mathcal{G}_N(T))$. Portanto, $J \cup \{v\}$ é um conjunto independente de T , porque $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \cup \{v\} \subseteq \text{Supp}(T)$ e pelo Lema 3.3 $\text{Supp}(T)$ é um conjunto independente de T . Além disso,

$|J \cup \{v\}| = |J| + 1 > |J|$, o que é uma contradição, porque $J \in \mathcal{I}(T)$. Portanto,
 $v \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}(T)} I$. □

Lema 6.14. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Considere que $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde os T_i 's são as componentes conexas de $G - C$. Se G é do Tipo II, então*

$$\sum_{v \in V(C)} |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} = |V(C)| + \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}.$$

Demonstração. Dado $I_v \in \mathcal{I}(G\{v\})$ e já que G é do Tipo II temos que $v \in Supp(G\{v\})$. Usando o Lema 6.13 temos que

$$Supp(G\{v\}) = \bigcap_{I \in \mathcal{I}(G\{v\})} I,$$

logo $v \in I_v$. Mostraremos que $I_v - \{v\} \in \mathcal{I}(G\{v\} - v)$. Suponha que $I_v - \{v\} \notin \mathcal{I}(G\{v\} - v)$. Portanto, existe um conjunto independente J de $G\{v\} - v$ tal que

$$|J| > |I_v - \{v\}| = |I_v| - 1. \tag{6.2}$$

Como $G\{v\} - v$ é um subgrafo de $G\{v\}$, temos que J também é conjunto independente de $G\{v\}$. Então

$$|J| \leq |I_v|. \tag{6.3}$$

Usando (6.2) e (6.3) obtemos que $|I_v| \geq |J| > |I_v| - 1$. Isto implica que $|J| = |I_v|$, logo $J \in \mathcal{I}(G\{v\})$. O que é uma contradição, porque $v \notin J$ e sabemos que v está todo conjunto independente máximo de $G\{v\}$, pois pelo Lema 6.13 $v \in Supp(G\{v\})$. Então, temos que $I_v - \{v\} \in \mathcal{I}(G\{v\} - v)$. Note que $\bigcup_{v \in V(C)} G\{v\} - v = \bigcup_{i=1}^k T_i$. Pelo Teorema 3.5 temos que

$$\alpha(T_i) = |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \text{ e } \alpha(G\{v\}) = |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2}$$

onde $i \in \{1, \dots, k\}$ e $v \in V(C)$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(C)} \alpha(G\{v\} - v) &= \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) \\ \sum_{v \in V(C)} -1 + \alpha(G\{v\}) &= \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) \\ \sum_{v \in V(C)} -1 + \sum_{v \in V(C)} \alpha(G\{v\}) &= \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) \\ -|V(C)| + \sum_{v \in V(C)} |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} &= \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.15. *Sejam G um grafo unicíclico e C o ciclo de G . Se $V(C) \not\subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$, então*

$$\alpha(G) = |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rceil,$$

caso contrário,

$$\alpha(G) = |Supp(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Suponha que $V(C) \not\subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$. Note que G não pode satisfazer as hipóteses da Proposição 6.7, porque na Proposição 6.7 temos que $V(C) \subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$.

Case 1: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.2.

Pela Proposição 6.2 temos

$$\begin{aligned} Supp(G) &= Supp(G\{v\}) \cup Supp(G - G\{v\}), \\ V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e} \\ \emptyset &= Supp(G) \cap Core(G). \end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.11, concluímos que o número de independência de G é

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= |Supp(G\{v\})| + |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} = |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rceil \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Case 2: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.3.

Este caso é análogo ao Caso 1.

Case 3: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.4

Então pela Proposição 6.4, temos

$$\begin{aligned}
Supp(G) &= Supp(G\{v\}) \cup Supp(G - G\{v\}), \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= (V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \setminus \{v\}) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e} \\
\emptyset &= Supp(G) \cap Core(G).
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 4.11 temos que o número de independência de G é dado por

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} + |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| - 1}{2} \right\rceil + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \setminus \{v\}|}{2} \right\rceil + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rceil \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Case 4: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.6.

Pela Proposição 6.6 temos que

$$Supp(G) = Supp(G\{v\} - v) \cup Supp(G - G\{v\}),$$

$$\begin{aligned}
V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v)) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})) \text{ e} \\
\emptyset &= \text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.11 e o Lema 6.10, obtemos que o número de independência de G é dado por

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= |\text{Supp}(G\{v\})| + |\text{Supp}(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |\text{Supp}(G\{v\} - v)| + |\text{Supp}(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\} - v))|}{2} \\
&\quad + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |\text{Supp}(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} = |\text{Supp}(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rceil \\
&= |\text{Supp}(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |\text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G)|}{2} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Case 5: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.9.

Pela Proposição 6.9, sabemos que

$$\begin{aligned}
\text{Supp}(G) &= \bigcup_{v \in V(C)} \text{Supp}(G\{v\}), \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= \bigcup_{v \in V(C)} V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \text{ e} \\
V(C) &= \text{Supp}(G) \cap \text{Core}(G).
\end{aligned}$$

Considere que $G - C = \bigcup_{i=1}^k T_i$, onde os T_i 's são as componentes conexas de $G - C$. Utilizando o Teorema 4.13 e o Lema 6.14, obtemos que o número de independência de G é dado por

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= \left\lceil \frac{|V(C)|}{2} \right\rceil + \sum_{i=1}^k |\text{Supp}(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\
&= \frac{|V(C)|}{2} + \sum_{i=1}^k |\text{Supp}(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2} \\
&= -\frac{|V(C)|}{2} + |V(C)| + \sum_{i=1}^k |\text{Supp}(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{|Supp(G) \cap Core(G)|}{2} + \sum_{v \in V(C)} |Supp(G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Se $V(C) \subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$, então G não pode satisfazer as hipóteses das Proposições 6.3, 6.6, 6.4 e 6.9, porque nessas proposições temos que $V(C) \not\subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$.

Caso 1: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.2.

Pela Proposição 6.2 temos

$$\begin{aligned}
Supp(G) &= Supp(G\{v\}) \cup Supp(G - G\{v\}) \text{ e} \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(\mathcal{G}_N(G\{v\})) \cup V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\})).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.11, podemos dizer que o número de independência de G é

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &= |Supp(G\{v\})| + |Supp(G - G\{v\})| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))| + |V(\mathcal{G}_N(G - G\{v\}))|}{2} \\
&= |Supp(G)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} = |Supp(G)| + \left\lceil \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Caso 2: Suponha que G satisfaz as hipóteses da Proposição 6.7.

Pela Proposição 6.7 obtemos

$$\begin{aligned}
Supp(G) &= Supp(G - C) = \bigcup_{i=1}^k Supp(T_i) \text{ e} \\
V(\mathcal{G}_N(G)) &= V(C) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k V(\mathcal{G}_N(T_i)) \right).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.13 obtemos que o número de independência number de G é dado por

$$\alpha(G) = \left\lceil \frac{|V(C)|}{2} \right\rceil + \sum_{i=1}^k |Supp(T_i)| + \frac{|V(\mathcal{G}_N(T_i))|}{2}$$

$$= |Supp(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor.$$

□

A seguir temos um exemplo, onde usamos os Teoremas 6.12 e 6.15 para calcular $\alpha(G)$ e $\nu(G)$ do grafo unicíclico G da Figura 6.1. Calculando a decomposição nula de G obtemos que $Supp(G) = \{b, c, d, e, j, \ell, u, v, z, w\}$, $Core(G) = \{f, a, i, u, v, z, w\}$ e $V(\mathcal{G}_N(G)) = \{g, h\}$.

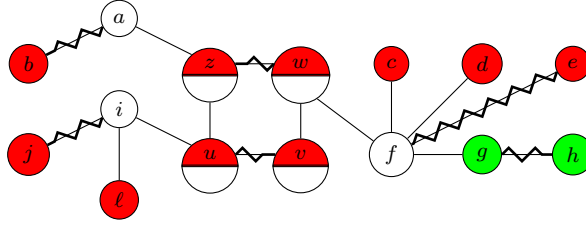


Figura 6.1 Grafo unicíclico G e seu suporte.

Note que $\{u, v, z, w\} = V(C) \not\subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$. Portanto, pelo Teoremas 6.12 e 6.15 temos que os números de independência e emparelhamento de G podem ser calculados como segue

$$\alpha(G) = |Supp(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor = 10 + \left\lfloor \frac{2 - 4}{2} \right\rfloor = 9$$

$$\nu(G) = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor = 7 + \left\lfloor \frac{2 - 4}{2} \right\rfloor = 6.$$

Perceba que $I = \{b, c, d, e, g, j, \ell, v, z\}$ é um conjunto independente máximo de G e $M = \{\{a, b\}, \{e, f\}, \{i, j\}, \{g, h\}, \{u, v\}, \{z, w\}\}$ é um emparelhamento máximo de G . Porque $|I| = 9$ e $|M| = 6$.

No próximo exemplo, também utilizamos os Teoremas 6.12 e 6.15 para obter $\alpha(G)$ e $\nu(G)$ do grafo unicíclico da Figura 6.2. Calculando a decomposição nula de G obtemos $Supp(G) = \{h, g, i, j, \ell, m, t, u, w, v, y, z\}$, $Core(G) = \{f, i, r, s, x\}$ e $V(\mathcal{G}_N(G)) = \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}$.

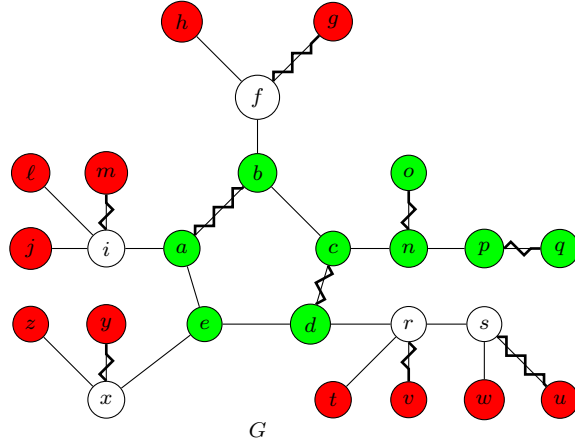


Figura 6.2 Grafo unicíclico G e seu suporte.

Observe que $\{a, b, c, d, e\} = V(C) \subseteq V(\mathcal{G}_N(G))$. Portanto, pelos Teoremas 6.12 e 6.15, os números de independência e emparelhamento de G são dados por

$$\alpha(G) = |Supp(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))|}{2} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 15$$

$$\nu(G) = |Core(G)| + \left\lfloor \frac{|V(\mathcal{G}_N(G))| - |Supp(G) \cap Core(G)|}{2} \right\rfloor = 5 + \left\lfloor \frac{9 - 0}{2} \right\rfloor = 9.$$

Note que $I = \{g, h, j, k, l, m, u, v, w, t, z, y, a, c, o, q\}$ é um conjunto independente máximo de G e $M = \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{f, g\}, \{n, o\}, \{p, q\}, \{r, v\}, \{s, u\}, \{x, y\}, \{m, i\}\}$ é um emparelhamento máximo de G . Porque $|I| = 15$ e $|M| = 9$.

Neste capítulo, apresentamos diversas contribuições. As mais importantes são os Teoremas 6.12 e 6.15 que nos fornecem fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, projetamos futuras investigações sobre este tópico e apresentamos alguns problemas futuros. Este capítulo está dividido em seis seções, onde em cinco descrevemos problemas específicos relacionados à decomposição nula. O primeiro problema envolve uma possível relação entre a decomposição de Gallai-Edmonds de grafos unicíclicos e a decomposição nula. Semelhantemente ao primeiro problema, o segundo problema é sobre uma provável relação entre uma outra decomposição clássica de grafos, a decomposição de Zito [66], e a decomposição nula. O terceiro problema consiste, basicamente, em caracterizar as nulidades máxima e mínima do conjunto dos grafos unicíclicos com uma mesma sequência de graus. O quarto problema trata da determinação de fórmulas fechadas para a quantidade de emparelhamentos e de conjuntos independentes máximos de grafos unicíclicos que dependam da decomposição nula do mesmo. O quinto problema aborda a decomposição nula de grafos threshold e sua provável relação com a sua estrutura e suas distintas representações.

Esta tese produziu dois artigos. O Capítulo 4 forma o primeiro artigo, intitulado “Independence and matching numbers of unicyclic graphs from null space” [5], que foi publicado em *Computational and Applied Mathematics*. Parte deste trabalho foi apresentado no *XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2017)* e seu resumo [62], intitulado “Suporte de grafos unicíclicos”, foi publicado em *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*. Os Capítulos 5 e 6 resultaram no segundo artigo, intitulado “Null decomposition of unicyclic graphs” [4], que foi submetido a um periódico. Também apresentei este trabalho na conferência *22nd Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2019)*.

7.1 Decomposição de Gallai-Edmonds de grafos unicíclicos

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denote por $\mathcal{M}(G)$, o conjunto de todos emparelhamentos de cardinalidade máxima de G . A decomposição de Gallai-Edmonds de G [19, 29] é uma partição dos vértices G em três conjuntos com determinadas propriedades relacionadas à atuação destes vértices em emparelhamentos de cardinalidade máxima. Mais precisamente, V é particionado em três conjuntos $EG(G)$, $R(G)$ e $S(G)$ onde:

- $EG(G) = \{v \in V : \exists M \in \mathcal{M}(G) \text{ tal que } M \text{ não satura } v\}$.
- $R(G) = \{v \in V : v \in N(EG(G)) \text{ e } v \notin EG(G)\}$.
- $S(G) = V - (EG(G) \cup R(G))$.

A decomposição de Gallai-Edmonds foi introduzida por Gallai [29] e, posteriormente, Edmonds criou um algoritmo que a determina em tempo polinomial [19]. A decomposição de Gallai-Edmonds desempenha um papel muito importante dentro da teoria de emparelhamentos, visto a quantidade de propriedades que ela nos fornece sobre emparelhamentos de um grafo qualquer. Um resultado bem conhecido é o *Teorema estrutural de Gallai-Edmonds* ([48], Capítulo 3), este teorema nos dá várias informações sobre os emparelhamentos de um grafo qualquer. Por exemplo, o Teorema estrutural de Gallai-Edmonds nos garante que:

- O subgrafo induzido por $S(G)$ tem emparelhamento perfeito.
- $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - c(EG(G)) + |R(G)|)$, onde $c(EG(G))$ é o número de componentes do subgrafo induzido por $EG(G)$.

Dada uma árvore T , usando o Lema 2.7 de [5] e o Lema 2.6 de [38] junto com as definições de core e de conjunto dos N -vértices, obtemos que $EG(T) = \text{Supp}(T)$,

$R(T) = Core(T)$ e $S(T) = V(\mathcal{G}_N(T))$. Logo, a decomposição nula de T determina a decomposição de Gallai-Edmonds de T . Sendo assim, estamos propondo estudar o seguinte problema:

Problema 1: *Como obter a decomposição de Gallai-Edmonds de um grafo unicíclico a partir da decomposição nula?*

Na busca pela solução do Problema 1 obtemos o Teorema 7.1.

Teorema 7.1. [3] *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G . Se $|V(C)| = 2t$, com $t \in \mathbb{N}$, então $EG(G) = Supp(G - C)$, $R(G) = Core(G - C)$ e $S(G) = V(\mathcal{G}_N(G - C)) \cup V(C)$, caso contrário, temos $EG(G) = \bigcup_{v \in V(C)} Supp(G\{v\})$, $R(G) = \bigcup_{v \in V(C)} Core(G\{v\})$ e $S(G) = \bigcup_{v \in V(C)} V(\mathcal{G}_N(G\{v\}))$.*

Sejam G um grafo unicíclico do Tipo II e C o ciclo de G . Note que, pelo Teorema 7.1, concluimos que, se $|V(C)| = 2t$, com $t \in \mathbb{N}$, então a partir da decomposição nula da floresta $G - C$ obtemos a decomposição de Gallai-Edmonds de G e caso contrário, decomposição de Gallai-Edmonds de G pode ser obtida através da decomposição nula de suas árvores pendentes $G\{v\}$. Note que o Teorema 7.1 não resolve completamente o Problema 1, pois falta encontrar uma maneira de obter a decomposição de Gallai-Edmonds de um grafo unicíclico do Tipo I a partir da decomposição nula. Pensamos que seja possível obter um teorema para grafos unicíclicos do Tipo I semelhante ao Teorema 7.1.

7.2 Decomposição de Zito de grafos unicíclicos

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denote por $\mathcal{I}(G)$, o conjunto de todos conjuntos independentes máximos de G . A decomposição de Zito de G [66] é uma partição dos vértices de G em três conjuntos, de acordo com a participação destes vértices em conjuntos independentes máximos. Mais especificamente, V é particionado em três classes conforme os itens abaixo:

- *Flexíveis*: conjunto dos vértices v tais que existe um conjunto independente máximo de G que contenha v e outro que não contenha v .
- *Estáticos excluídos*: conjunto dos vértices v tais que v não pertence a nenhum conjunto independente máximo de G .
- *Estáticos incluídos*: conjunto dos vértices v tais que v pertence a todos conjuntos independentes máximos de G .

Essa decomposição foi introduzida por Jennifer Zito, que a usou para obter uma fórmula fechada para o maior número de conjuntos independentes máximos entre todas árvores com n vértices [66]. Além disso, Zito forneceu famílias de árvores que alcançam esse valor máximo.

Fixe uma árvore T . Pelos Lemas 4.6, 4.7 de [5] e pelo Lema 7.11 de [4], obtemos que $V(\mathcal{G}_N(T))$, $Core(T)$ e $Supp(T)$ são, respectivamente, os vértices flexíveis, estáticos excluídos e estáticos incluídos de T . Logo, concluímos a decomposição nula de T nos fornece a decomposição de Zito de T . Diante deste fato, estamos propondo estudar o seguinte problema:

Problema 2: *Como obter a decomposição de Zito de um grafo unicíclico a partir da decomposição nula?*

7.3 Nulidade máxima e mínima de uma sequência de graus unicíclica

Sejam $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ uma sequência de graus de árvore e \mathcal{T}_s o conjunto de todas árvores que tem s como sua sequência de graus. Note que $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$, onde m é o número de arestas de uma árvore em \mathcal{T}_s . Denote por $null_M(\mathcal{T}_s)$ e $null_m(\mathcal{T}_s)$ as nulidades máxima e mínima, respectivamente, entre todas árvores em

\mathcal{T}_s . Por resultados em [11, 32, 33], concluímos que

$$\text{null}_m(\mathcal{T}_s) = \begin{cases} 2\ell(s) - n, & \text{se } \ell(s) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 1, & \text{se } \ell(s) < \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ e } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } \ell(s) < \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ e } n \text{ é par,} \end{cases} \quad (7.1)$$

e

$$\text{null}_M(\mathcal{T}_s) = 2a(s) - n, \quad (7.2)$$

onde $\ell(s)$ é quantidade de 1's de s e $a(s) = \max \left\{ b : \sum_{i=1}^b d_i \leq m \right\}$ é o número de aniquilação (veja [56]). Motivados pelo resultado supracitado, pretendemos estudar o seguinte problema.

Problema 3: *É possível fórmulas que permitam calcular as nulidades máxima e mínima entre todos os grafos unicíclicos com uma mesma sequência analisando, somente, as entradas da sequência de graus? Em outras palavras, existem fórmulas fechadas para as nulidades máxima e mínima entre todos os grafos unicíclicos com uma mesma sequência de graus semelhantes às fórmulas (7.1) e (7.2) de árvores? Além disso, almejamos caracterizar os grafos unicíclicos que alcançam a nulidade máxima ou a mínima.*

Na tentativa de solucionar o Problema 3 conseguimos, com a colaboração dos pesquisadores Daniel Jaume, Gonzalo Molina e Marco Puliti, durante o meu doutorado sanduíche, alguns resultados parciais que são os Teoremas 7.2, 7.3 e 7.5. Seja $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ uma sequência de graus unicíclica, o que significa que $\sum_{k=1}^n d_k = 2n$. A sequência s é dita não trivial se existe um i tal que $d_i = 1$. Seja \mathcal{U}_s o conjunto de todos grafos unicíclicos que tem s como sua sequência de graus. Denote por $\text{null}_M(\mathcal{U}_s)$ e $\text{null}_m(\mathcal{U}_s)$ as nulidades máxima e mínima, respectivamente, entre todos grafos unicíclicos em \mathcal{U}_s . Para qualquer grafo G com sequência de graus

s sabemos que $\alpha(G) \leq a(s)$ [56]. As fórmulas para o número de independência de grafos unicíclicos do Capítulo 4 e o fato que $\alpha(G) \leq a(s)$ permitiram demonstrar de maneira simples os Teoremas 7.2 e 7.3.

Teorema 7.2. [39] *Se G é um grafo unicíclico do Tipo I com seqüência de graus $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, então*

$$\eta(G) \leq 2a(s) - n.$$

Teorema 7.3. [39] *Sejam G um grafo unicíclico do Tipo II, C o seu ciclo e $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ a sua seqüência de graus. Se $|V(C)| = 4t$, com $t \in \mathbb{Z}$, então*

$$\eta(G) \leq 2a(s) - n + 2,$$

caso contrário

$$\eta(G) < 2a(s) - n + 2.$$

O Corolário 7.4 é uma consequência imediata dos Teoremas 7.2 e 7.3.

Corolário 7.4. [39] *Se $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ é uma seqüência de graus unicíclica, então $\text{null}_M(\mathcal{U}_s) \leq 2a(s) - n + 2$.*

Teorema 7.5. [39] *Sejam G_1 um grafo unicíclico do Tipo II, C_1 o seu ciclo e s a sua seqüência de graus. Se $G_1 \in \mathcal{U}_s$ é tal que $|V(C_1)| \geq 5$ e s é não trivial, então existe $G_2 \in \mathcal{U}_s$ tal que $\eta(G_1) \leq \eta(G_2)$ e $|V(C_2)| = 4$, onde C_2 é o ciclo G_2 .*

Note que o Teorema 7.5 nos dá uma ideia do aspecto de um candidato a nulidade máxima entre todos os grafos unicíclicos do Tipo II com seqüência de graus s , que são os grafos unicíclicos com ciclo de comprimento 4. Esse resultado vai ao encontro do que observamos em nossos experimentos computacionais no Sagemath. Para demonstrar o Teorema 7.5 foi necessário construir um emparelhamento com determinadas propriedades neste grafo unicíclico do Tipo II, acreditamos que com nossa experiência em construir emparelhamentos em grafos unicíclicos do Tipo I

seja possível demonstrar uma versão do Teorema 7.5 para grafo unicíclicos do Tipo I.

Conjectura 7.6. *Se $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ é uma sequência de graus unicíclica, então $2a(s) - n - 2 \leq null_M(\mathcal{U}_s)$.*

Note que, se a Conjectura 7.6 for verdadeira e pelo Corolário 7.4, sabemos que $null_M(\mathcal{U}_s) \leq 2a(s) - n + 2$, logo teremos que $null_M(\mathcal{U}_s)$ poderia assumir somente os cinco valores abaixo:

$$2a(s) - n - 2, 2a(s) - n - 1, 2a(s) - n, 2a(s) - n + 1 \text{ e } 2a(s) - n + 2.$$

Sendo assim, faltaria apenas encontrar hipóteses que determinassem em que situação $null_M(\mathcal{U}_s)$ assume cada um dos valores acima.

A Conjectura 7.7 nos fornece uma ideia do aspecto de uma sequência de graus unicíclica s tal que $null_M(\mathcal{U}_s) = 2a(s) - n + 2$. Infelizmente a recíproca não é verdadeira.

Conjectura 7.7. *Se $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ é uma sequência de graus unicíclica e $null_M(\mathcal{U}_s) = 2a(s) - n + 2$, então $\sum_{i=1}^{a(s)+1} d_i = n + 1$.*

A Conjectura 7.8 nos dá uma fórmula fechada para a nulidade mínima $null_m(\mathcal{U}_s)$.

Conjectura 7.8. *Seja $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ uma sequência de graus unicíclica. Se $l(s)$ é a quantidade de 1's de s , então*

$$null_m(\mathcal{U}_s) = \begin{cases} 2l(s) - n & \text{se } l(s) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \\ 1 & \text{se } \frac{n-3}{2} < l(s) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ e } n \text{ ímpar.} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

7.4 Fórmulas para a quantidade de emparelhamentos e conjuntos independentes máximos de grafos unicíclicos

Em [38], Jaume e Molina, além de terem obtido fórmulas fechadas para os números de emparelhamento e independência de uma árvore T , também obtiveram fórmulas fechadas para a quantidade de emparelhamentos e de conjuntos independentes máximos de árvores, conforme os Teoremas 7.9 e 7.10 abaixo. A quantidade de emparelhamentos e conjuntos independentes máximos de um grafo G são usualmente denotados na literatura por $m(G)$ e $i(G)$.

Teorema 7.9. [38] *Se T é uma árvore, então $i(T) = \prod_{N \subseteq \mathcal{G}_N(T)} i(N)$, onde $\mathcal{G}_N(T)$ é o subgrafo de T induzido por $V(\mathcal{G}_N(T))$ e N é uma componente conexa de $\mathcal{G}_N(T)$.*

Teorema 7.10. [38] *Se T é uma árvore, então $m(T) = \prod_{S \subseteq \mathcal{G}_S(T)} m(S)$, onde $\mathcal{G}_S(T)$ é o subgrafo de T induzido por $\text{Supp}(T) \cup \text{Core}(T)$ e S é uma componente conexa de $\mathcal{G}_S(T)$.*

Inspirados pelos resultados comentados acima propomos estudar o seguinte problema.

Problema 4: *É possível determinar fórmulas fechadas para a quantidade de emparelhamentos e conjuntos independentes máximos de grafos unicíclicos que dependam da decomposição nula do mesmo? Ou seja, existem versões similares aos Teoremas 7.9 e 7.10 para grafos unicíclicos?*

7.5 Decomposição nula de grafos threshold

Os grafos threshold são grafos livres de P_4 , C_4 e $P_2 \cup P_2$ como subgrafo induzido. Uma característica dos grafos dessa classe é que podem ser gerados através de diferentes procedimentos operacionais. Durante o doutorado estudamos

a decomposição nula de grafos unicíclicos e, através deste estudo, estabelecemos relações entre a decomposição nula de um grafo unicíclico e os números de independência e emparelhamento do mesmo [5, 4, 62].

Motivados pelos resultados alcançados no estudo da decomposição nula de grafos unicíclicos, pretendemos estudar o seguinte problema.

Problema 5: *A decomposição nula de grafos threshold nos fornece informações sobre conjuntos independentes, emparelhamentos, número de independência, número de emparelhamento ou outro parâmetro qualquer? Além disso, a decomposição nula de um grafo threshold tem alguma relação com a forma recursiva como é construído ou com suas diferentes representações, por exemplo, a representação via sequência binária?*

Em relação ao Problema 5 já obtivemos alguns resultados parciais que foram apresentados no evento satélite do ICM 2018, chamado de Linear Algebra and its Applications Workshop 2018 (LAAW 2018), e teve seu resumo [61], intitulado “Independent Sets and Support of Threshold graphs”, publicado nos anais deste evento.

7.6 Conclusão

Ao longo desta tese obtemos resultados através do estudo da decomposição nula de grafos unicíclicos. No Capítulo 4, obtivemos o Teorema 4.7, que caracteriza os grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes, e, principalmente, os Teoremas 4.11, 4.13, 4.16 e 4.17, que fornecem fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de um grafo unicíclico que permitem o cálculo destes parâmetros usando a decomposição nula de suas subárbores.

Semelhantemente ao Capítulo 4, no Capítulo 5, obtivemos contribuições como os Teoremas 5.4, 5.8, 5.10 e 5.12, que nos permitem saber o aspecto dos vetores da base o espaço nulo de um grafo unicíclico através de uma base do espaço nulo de suas subárvores. Já no Capítulo 6, alcançamos resultados, os principais são os Teoremas 6.12 e 6.15 que fornecem fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de um grafo unicíclico. A grande diferença entre as fórmulas do Capítulo 4 e do Capítulo 6 é que as do Capítulo 6 permitem o cálculo destes parâmetros usando a decomposição nula do grafo unicíclico.

Como vimos nas seções anteriores, há várias perguntas a serem respondidas sobre a decomposição nula de grafos unicíclicos. Aliado ao fato de que há muitas famílias de grafos que ainda não foram estudadas, por exemplo os bicíclicos, os tricíclicos, os cografos e sua subclasse dos construtivelmente laplaciano integrais, torna a teoria de decomposição nula muito promissora para futuras investigações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução, IIIº Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014.
- [2] ALEXANDER, J., CUTLER, J., AND MINK, T. Independent sets in graphs with given minimum degree. *The Electronic Journal of Combinatorics* 19, 3 (2012), P37.
- [3] ALLEM, L. E., JAUME, D. A., MOLINA, G., TOLEDO, M. M., AND TREVISAN, V. Gallai-edmonds decomposition of unicyclic graphs from null space. Em preparação.
- [4] ALLEM, L. E., JAUME, D. A., MOLINA, G., TOLEDO, M. M., AND TREVISAN, V. Null decomposition of unicyclic graphs. *arXiv preprint arXiv:1907.08618* (2019).
- [5] ALLEM, L. E., JAUME, D. A., MOLINA, G., TOLEDO, M. M., AND TREVISAN, V. Independence and matching numbers of unicyclic graphs from null space. *Computational and Applied Mathematics* 39, 2 (2020), 64.
- [6] ALON, N., AND KAHALE, N. Approximating the independence number via the j -function. *Math. Program.* 80, 3 (Feb. 1998), 253–264.
- [7] BAPAT, R., LAL, A., AND PATI, S. On algebraic connectivity of graphs with at most two points of articulation in each block. *Linear and Multilinear Algebra* 60, 4 (2012), 415–432.
- [8] BAPAT, R. B. *Graphs and matrices*, vol. 27. Springer, 2010.
- [9] BELL, J., AND STEVENS, B. A survey of known results and research areas for n -queens. *Discrete Mathematics* 309, 1 (2009), 1–31.

- [10] BERGE, C. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 43, 9 (1957), 842–844.
- [11] BOCK, F., AND RAUTENBACH, D. On matching numbers of tree and bipartite degree sequences. *Discrete Mathematics* 342, 6 (2019), 1687–1695.
- [12] CHVÁTAL, V. Determining the stability number of a graph. *SIAM Journal on Computing* 6, 4 (1977), 643–662.
- [13] COGIS, O., AND THIERRY, E. Computing maximum stable sets for distance-hereditary graphs. *Discrete Optimization* 2, 2 (2005), 185–188.
- [14] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs: theory and application*, vol. 87. Academic Pr, 1980.
- [15] DE KLERK, E., AND PASECHNIK, D. V. Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. *SIAM Journal on Optimization* 12, 4 (2002), 875–892.
- [16] DENLEY, T. The independence number of graphs with large odd girth. *Electron. J. Combin* 1, 9 (1994).
- [17] DERIKVAND, T., AND OBOUDI, M. R. On the number of maximum independent sets of graphs. *Transactions on Combinatorics* 3, 1 (2014), 29–36.
- [18] DIESTEL, R. *Graph theory*. Springer-Verlag New York, 2000.
- [19] EDMONDS, J. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics* 17, 3 (1965), 449–467.
- [20] EGERVÁRY, E. *On combinatorial properties of matrices*. 1931.
- [21] FIEDLER, M. Eigenvectors of acyclic matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal* 25, 4 (1975), 607–618.

- [22] FIEDLER, M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal* 25, 4 (1975), 619–633.
- [23] FOX, J., AND PACH, J. Computing the independence number of intersection graphs. In *Proceedings of the twenty-second annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (2011), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 1161–1165.
- [24] FRIEZE, A. M. Maximum matchings in a class of random graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 40, 2 (1986), 196–212.
- [25] FRIEZE, A. M. On the independence number of random graphs. *Discrete Math.* 81, 2 (Apr. 1990), 171–175.
- [26] FRITSCHER, E. Propriedades espectrais de um grafo. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.
- [27] GABOW, H. N. *Implementation of algorithms for maximum matching on nonbipartite graphs*. PhD thesis, Stanford University, 1974.
- [28] GALIL, Z. Sequential and parallel algorithms for finding maximum matchings in graphs. *Annual Review of Computer Science* 1, 1 (1986), 197–224.
- [29] GALLAI, T. Maximale systeme unabhangiger kanten. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* 9 (1964), 401–413.
- [30] GALVIN, D., AND ZHAO, Y. The number of independent sets in a graph with small maximum degree. *Graphs and Combinatorics* 27, 2 (2011), 177–186.
- [31] GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. Computers and intractability; a guide to the theory of NP-completeness. Tech. rep., 1979.

- [32] GENTNER, M., HENNING, M. A., AND RAUTENBACH, D. Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence. *Discrete Applied Mathematics* 206 (2016), 181–187.
- [33] GENTNER, M., HENNING, M. A., AND RAUTENBACH, D. Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence. *Journal of Graph Theory* 88, 1 (2018), 131–145.
- [34] GOLDBERG, A. V., PLOTKIN, S. A., AND VAIDYA, P. Sublinear-time parallel algorithms for matching and related problems. Tech. rep., Massachusetts Inst of Tech Cambridge Lab for Computer Science, 1988.
- [35] GONG, S.-C., FAN, Y.-Z., AND YIN, Z.-X. On the nullity of graphs with pendant trees. *Linear Algebra and its Applications* 433, 7 (2010), 1374–1380.
- [36] GRÖTSCHEL, M., LOVÁSZ, L., AND SCHRIJVER, A. Polynomial algorithms for perfect graphs. *Annals of Discrete Mathematics* 21 (1984), 325–356.
- [37] HOPCROFT, J. E., AND KARP, R. M. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal on computing* 2, 4 (1973), 225–231.
- [38] JAUME, D. A., AND MOLINA, G. Null decomposition of trees. *Discrete Mathematics* 341, 3 (2018), 836 – 850.
- [39] JAUME, D. A., MOLINA, G., TOLEDO, M. M., AND PULLUTI, M. Maximum and minimum nullity of a unicyclic degree sequence. Em preparação.
- [40] JOU, M.-J., AND CHANG, G. J. The number of maximum independent sets in graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics* 4, 4 (2000), 685–695.

- [41] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations* (1972), 85–104.
- [42] KIM, T., AND CHWA, K.-Y. An $\mathcal{O}(n \log n \log \log n)$ parallel maximum matching algorithm for bipartite graphs. *Information processing letters* 24, 1 (1987), 15–17.
- [43] KIRKLAND, S., AND FALLAT, S. Perron components and algebraic connectivity for weighted graphs. *Linear and Multilinear Algebra* 44, 2 (1998), 131–148.
- [44] KÖNIG, D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. *Mathematikai és Természettudományi Ertesito* 34 (1916), 104–119.
- [45] KÖNIG, D. Graphok es matrixok (hungarian)[graphs and matrices]. *Matematikai és fizikai lapok* 38 (1931), 116–119.
- [46] KÖNIG, D. Über graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 77, 4 (1916), 453–465.
- [47] KUHN, H. W. The hungarian method for the assignment problem. *Naval research logistics quarterly* 2, 1-2 (1955), 83–97.
- [48] LOVÁSZ, L., AND PLUMMER, M. D. *Matching theory*, vol. 367. American Mathematical Soc., 2009.
- [49] MANNINO, C., AND SASSANO, A. Edge projection and the maximum cardinality stable set problem. *DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science* 26 (1996), 205–219.
- [50] MOSCA, R. Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5 -free graphs. *Information Processing Letters* 61, 3 (1997), 137–143.

- [51] NATH, M., AND SARMA, B. K. On the null-spaces of acyclic and unicyclic singular graphs. *Linear Algebra and its Applications* 427, 1 (2007), 42–54.
- [52] NAUCK, F. Briefwechsel mit allen für alle. *Illustrierte Zeitung* 15 (1850), 182.
- [53] NEUMAIER, A. The second largest eigenvalue of a tree. *Linear Algebra and its Applications* 46 (1982), 9–25.
- [54] NYLEN, P. Null space structure of tree-patterned matrices. *Linear algebra and its applications* 279, 1-3 (1998), 153–161.
- [55] PENA, J., VERA, J., AND ZULUAGA, L. F. Computing the stability number of a graph via linear and semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization* 18, 1 (2007), 87–105.
- [56] PEPPER, R. On the annihilation number of a graph. In *Recent Advances In Electrical Engineering: Proceedings of the 15th American Conference on Applied Mathematics* (2009), pp. 217–220.
- [57] PLUMMER, M. D. Matching theory - a sampler: from Dénes König to the present. *Discrete Mathematics* 100, 1-3 (1992), 177–219.
- [58] POWERS, D. L. Graph partitioning by eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications* 101 (1988), 121–133.
- [59] SANDER, T., AND SANDER, J. W. Tree decomposition by eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications* 430, 1 (2009), 133–144.
- [60] SHEARER, J. B. A note on the independence number of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics* 46, 1 (1983), 83 – 87.
- [61] TOLEDO, M. M., AND ALLEM, L. E. Independent sets and support of threshold graphs. In *Linear Algebra and its Applications Workshop* (Niterói, Rio de Janeiro, Brasil, 2018), pp. 32–

33. disponível em https://laaw2018.files.wordpress.com/2018/07/book-of-abstract_laaw2018.pdf.

- [62] TOLEDO, M. M., AND ALLEM, L. E. Suporte de grafos unicíclicos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* 6, 1 (2018).
- [63] TUTTE, W. T. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society* 1, 2 (1947), 107–111.
- [64] XUEZHONG, T., AND LIU, B. On the nullity of unicyclic graphs. *Linear algebra and its applications* 408 (2005), 212–220.
- [65] ZHAO, Y. The number of independent sets in a regular graph. *Combinatorics, Probability and Computing* 19, 2 (2010), 315–320.
- [66] ZITO, J. The structure and maximum number of maximum independent sets in trees. *Journal of Graph Theory* 15, 2 (1991), 207–221.