

Conservação de Volume em Modelos Simplificados de Propagação de Vazão

Paulo Rógenes Monteiro Pontes, Walter Collischonn

Instituto de Pesquisas Hidráulicas, UFRGS
 p.rogenes@gmail.com, collischonn@iph.ufrgs.br

Recebido: 13/06/11 – revisado: 12/10/11 – aceito: 07/08/12

RESUMO

O método de Muskingum-Cunge é amplamente utilizado para cálculos de propagação de vazão em rios, especialmente como um módulo de modelos hidrológicos mais complexos. Na sua forma não linear este método permite representar a propagação de cheias em rios com planícies de inundação e permite estimar com mais eficácia as vazões extremas. Entretanto, problemas na conservação de volume podem ocorrer em função da aplicação de esquemas não lineares. Modificações recentes foram propostas ao método de Muskingum-Cunge não linear para compensar ou evitar estes erros de volume. Uma dessas modificações, proposta por Todini (2007), denominada aqui de método Muskingum-Cunge-Todini (MCT). O presente trabalho avalia o método MCT em termos comparativos com outros métodos de propagação de vazão em um canal hipotético, além de verificar sua aplicação em um trecho do Rio São Francisco, Brasil. Para a avaliação dos resultados foram utilizadas dois indicadores de desempenho: o coeficiente de Nash-Sutcliffe e o erro de volume. A aplicação comparativa no canal hipotético o confirmou que o modelo de Muskingum-Cunge não linear convencional não conserva o volume adequadamente, sendo este problema mais pronunciado em rios de baixa declividade (erro maior que 4% para uma declividade de 0,0001 m/m). Além disso, foi observado que o modelo MCT praticamente elimina os erros de conservação de volume (erro de 0,01% para uma declividade de 0,0001 m/m). A aplicação do método MCT em um trecho do Rio São Francisco também apresentou resultados satisfatórios. O coeficiente de Nash-Sutcliffe alcançou um valor máximo de 0,98 enquanto o erro de volume médio foi de apenas 0,8%.

Palavras-chave: Conservação de volume. Muskingum-Cunge não linear. Modelos de escoamento simplificados.

INTRODUÇÃO

O escoamento da água e a propagação de ondas de cheias em rios podem ser representados atualmente de forma relativamente simples com o uso de modelos hidrodinâmicos que resolvem numericamente as equações de Saint-Venant. Entretanto, modelos mais simplificados de propagação de vazão ainda têm uma grande importância, uma vez que eles exigem menos dados de entrada e normalmente são mais eficientes computacionalmente, ou seja, o tempo para chegar a uma determinada solução é mais rápido.

Um dos modelos simplificados mais importantes de escoamento em rios continua sendo o modelo de Muskingum, proposto por McCarthy em 1939 (TUCCI, 2005). Em 1980, Cunge demonstrou que o método Muskingum é equivalente à solução da onda cinemática com um esquema numérico de diferenças finitas, e que a difusão da onda de cheia

resultante da aplicação do modelo Muskingum era, na realidade, o resultado de um erro numérico dependente dos intervalos de discretização utilizados nas derivadas do tempo e do espaço. Partindo desta constatação, Cunge propôs uma forma de estimar os valores dos parâmetros K e X do modelo Muskingum para que a difusão causada pelo erro numérico se iguale à difusão real da onda de cheia. O modelo de Muskingum, aplicado de acordo com as sugestões de Cunge, passou a ser chamado modelo Muskingum-Cunge.

Ainda em 1980, Cunge modificou o modelo para que os parâmetros K e X fossem variados no tempo, de acordo com a vazão a ser propagada. Esta versão passou a ser conhecida como modelo Muskingum-Cunge não linear (MCNL). A versão em que os valores de K e X não se alteram ao longo do tempo é conhecida como Muskingum-Cunge linear (MCL) (PONCE, 1989; TUCCI, 2005).

O método MCNL apresenta grandes vantagens quando a celeridade da onda de cheia varia

com a vazão. Isto é especialmente importante em rios com planícies de inundação, em que a celeridade da onda de cheia é bastante diferente nas condições de escoamento contido na calha, ou escoamento que inunda a planície. Nestas condições, o modelo MCL não representa tão bem as vazões de pico como o modelo MCNL (PERUMAL, O'CONNELL; RANGA RAJU, 2001).

Silva Mascarenhas e Miguez (2003) e Tucci (2005) e, por exemplo, mostram algumas vantagens da utilização do método MCNL no rio Jacuí - RS em escoamentos com planície de inundação. Entretanto, diversos autores demonstraram que o método MCNL pode ter um erro de conservação de massa da ordem de 8% a 10% (FAILACHE; ALLASIA; COLLISCHNONN, 2004; TANG; SAMUELS, 1999). O método MCL, por outro lado, não apresenta erros na conservação de volume.

Estes erros de conservação de volume podem ser irrelevantes quando se analisa apenas o problema de propagação de uma cheia em um rio de forma isolada. Entretanto, estes erros podem ser importantes quando o modelo de propagação é parte de um modelo hidrológico mais complexo, que está sendo utilizado, por exemplo, para avaliação de impactos de mudanças climáticas, previsão de vazão em tempo real ou simulação de rios com grandes planícies de inundação. Em aplicações dessa natureza é desejável que o modelo hidrológico como um todo respeite a conservação de massa, para não prejudicar a representação das vazões.

Ao longo dos últimos 20 anos o problema da conservação de volume no modelo MCNL foi analisado por diversos autores, que procuraram resolver a questão de diversas formas (CAPPELAE, 1997; PERUMAL, 1994; PRICE, 2009; TODINI, 2007).

Uma das propostas mais simples, e ao mesmo tempo mais promissoras, foi desenvolvida por Todini (2007). Este autor percebeu uma inconsistência na forma como eram obtidas as equações para aplicação do modelo MCNL a partir das equações originais de Muskingum-Cunge e desenvolveu uma metodologia que contempla a conservação de volume, denominada método Muskingum-Cunge-Todini (MCT).

Aqui mostramos que o método MCT apresenta melhor desempenho em termos de conservação de volume em comparação com outros métodos de propagação de vazão em um canal retangular hipotético. Além disso, mostramos que o método pode ser aplicado satisfatoriamente para representar a propagação de cheias em um trecho do Rio São Francisco.

MODELOS MCL E MCNL

O modelo Muskingum Linear (MCL) é derivado a partir da combinação da equação da continuidade (1) com uma equação que relaciona o armazenamento em um trecho de rio com as vazões de entrada e a saída do trecho (2).

$$\frac{dS}{dt} = I - Q \tag{1}$$

$$S = k\epsilon I + k(1 - \epsilon)Q \tag{2}$$

Os termos nas equações 1 e 2 são: S é o volume armazenado no trecho [L³]; I e Q são as vazões de entrada e saída respectivamente [L³/T]; k e ε são parâmetros do modelo.

Derivando a equação 2 em relação ao tempo (considerando os parâmetros k e ε constantes) e substituindo na equação 1, obtêm-se:

$$k\epsilon \frac{dI}{dt} + k(1 - \epsilon) \frac{dQ}{dt} = I - Q \tag{3}$$

As derivadas na equação 3 são aproximadas por derivadas numéricas, resultando em:

$$k\epsilon \frac{I_{t+1} - I_t}{\Delta t} + k(1 - \epsilon) \frac{Q_{t+1} - Q_t}{\Delta t} = \frac{I_{t+1} + I_t}{2} - \frac{Q_{t+1} + Q_t}{2} \tag{4}$$

A equação 4 pode ser reescrita conforme a equação abaixo:

$$Q_{t+1} = C1I_{t+1} + C2I_t + C3Q_t \tag{5}$$

onde:

$$C1 = \frac{-2k\epsilon + \Delta t}{2k(1 - \epsilon) + \Delta t} \tag{6}$$

$$C2 = \frac{2k\epsilon + \Delta t}{2k(1 - \epsilon) + \Delta t} \tag{7}$$

$$C3 = \frac{2k\epsilon - \Delta t}{2k(1 - \epsilon) + \Delta t} \tag{8}$$

A equação 5, com os coeficientes C1, C2 e C3 corresponde ao método de Muskingum Linear em sua forma original.

Em 1980, Cunge concluiu que o método de Muskingum é equivalente a uma solução numérica da equação hiperbólica da onda cinemática (Equação 9). Este autor também concluiu que a atenuação da onda de cheia que acontece na propagação utilizando a solução numérica da equação de onda cinemática é devido à difusão numérica em função do esquema numérico de diferenças finitas adotado para representar as derivadas da equação 9.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

Cunge (1980) utilizou um esquema numérico de quatro pontos, como ilustrado na figura 1, e aproximou as derivadas através das equações 10 e 11.

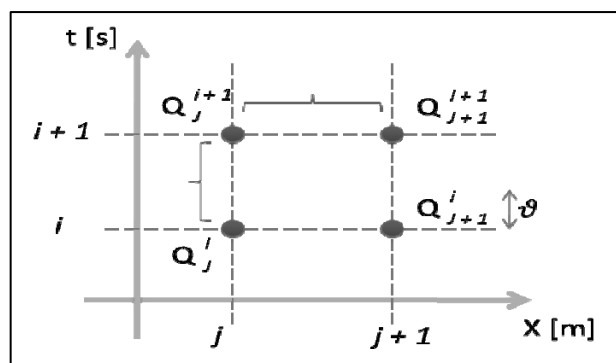


Figura 1 - Esquema numérico de quatro pontos utilizado no método Muskingum-Cunge. Os índices i e j representam tempo e espaço respectivamente. Q é a vazão, T o eixo tempo e X o eixo espaço

As derivadas são aproximadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\varepsilon(Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^i) + (1 - \varepsilon)(Q_{j+1}^{i+1} - Q_{j+1}^i)}{\Delta t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\vartheta(Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) + (1 - \vartheta)(Q_{j+1}^i - Q_j^i)}{\Delta x} \quad (11)$$

Os índices i e j representam tempo e espaço respectivamente. Q é a vazão e ϑ um parâmetro ponderador.

Substituindo essas equações 10 e 11 na equação 9, obtém-se:

$$\frac{\varepsilon(Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^i) + (1 - \varepsilon)(Q_{j+1}^{i+1} - Q_{j+1}^i)}{\Delta t} + \frac{\vartheta(Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) + (Q_{j+1}^i - Q_j^i)}{\Delta x} = 0 \quad (12)$$

(Considerando $\vartheta = 0.5$, ou seja, o esquema numérico centrado).

Após algum algebrismo, pode-se obter a seguinte equação:

$$Q_{j+1}^{i+1} = C1Q_j^{i+1} + C2Q_j^i + C3Q_{j+1}^i \quad (13)$$

Onde:

$$C1 = \frac{-2\Delta x\varepsilon + c\Delta t}{2\Delta x(1 - \varepsilon) + c\Delta t} \quad (14)$$

$$C2 = \frac{2\Delta x\varepsilon + c\Delta t}{2\Delta x(1 - \varepsilon) + c\Delta t} \quad (15)$$

$$C3 = \frac{2\Delta x\varepsilon - c\Delta t}{2\Delta x(1 - \varepsilon) + c\Delta t} \quad (16)$$

Observa-se que a equação 13 é equivalente à equação 5, com $k = \Delta x/c$.

Cunge (1980) sugeriu uma equação para o parâmetro ε , onde a difusão numérica seria equivalente à difusão real:

$$\varepsilon = 0.5\left(1 - \frac{Q}{c\Delta xBS_0}\right) \quad (17)$$

onde B e S0 correspondem a largura do rio [L] e a declividade de fundo [L/L], respectivamente.

Considerando o valor do parâmetro sugerido por Cunge, pode-se reescrever as equações 14 a 16 na forma apresentada a seguir:

$$C1 = \frac{-1 + C + D}{1 + C + D} \quad (18)$$

$$C2 = \frac{1 + C - D}{1 + C + D} \quad (19)$$

$$C3 = \frac{1 - C + D}{1 + C + D} \tag{20}$$

onde C é o número de Courant e D é o coeficiente de difusão, dado por:

$$C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \tag{21}$$

$$D = \frac{Q}{c\Delta xBS0} \tag{22}$$

Os parâmetros k e ε são estimados com base em uma vazão de referência. Após a quantificação dessa vazão de referência, calcula-se a celeridade, e os outros parâmetros necessários para a obtenção do hidrograma de saída.

No modelo Muskingum Cunge Linear (M-CL), essa vazão de referência é fixa para todo o período de cálculo. Tucci (2005) sugere que a vazão de referência seja aproximadamente 70% da vazão máxima do hidrograma de entrada no trecho.

No modelo Muskingum-Cunge Não Linear (MCNL), a vazão de referência é calculada em cada passo de tempo de simulação. Desta forma, os parâmetros k e ε também variam em cada passo de tempo.

Diferentes formas de estimar a vazão de referência foram propostas (FAILLACHE; ALLASIA; COLLISCHONN, 2004; PONCE, 1989; TANG; SAMUELS, 1999;).

Dois esquemas para a estimação da vazão de referência são mais usuais são eles: (a) o esquema de três pontos explícito – chamado aqui de MCNL3 - (equação 23); e (b) o esquema de 4 pontos implícito – MCNL4 - (equação 24)

$$Q_{ref}(i, j) = \frac{Q_j^i + Q_j^{i+1} + Q_{j+1}^i}{3} \tag{23}$$

onde $c(i, j) = c(Q_{ref}(i, j))$

$$Q_{ref}(i, j) = \frac{Q_{j+1}^{i+1} + Q_j^i + Q_j^{i+1} + Q_{j+1}^i}{4} \tag{24}$$

onde $c(i, j) = c(Q_{ref}(i, j))$

O método MCNL4 exige um processo iterativo para solução da equação, em função da presen-

ça do termo Q^{i+1} e por ser um método implícito. O método MCNL3 é explícito, logo não precisa das iterações para encontrar o termo Q^{i+1} .

Operacionalmente, o modelo MCNL é aplicado utilizando uma tabela que relaciona a vazão no sub-trecho com a celeridade e os parâmetros k e ε. Para cada passo de tempo uma vazão de referência é estimada a partir da equação 23 ou da equação 24, e os valores dos parâmetros k e ε correspondentes são definidos de acordo com a relação tabular.

O MODELO MUSKINGUM-CUNGE-TODINI (MCT)

Todini (2007) detectou dois problemas no método MCNL. Um dos problemas está relacionado com a conservação de massa ou volume.

No modelo Muskingum-Cunge não linear os parâmetros k e ε devem variar em cada passo de tempo e em cada trecho. Operacionalmente, essa premissa é obedecida, porém Todini percebeu que a variação de k e ε no tempo não acontece de fato (equação 3). Conceitualmente, o modelo não linear utiliza o equacionamento inicial do modelo linear, gerando problemas de conservação de volume.

A resolução desse problema consiste em uma nova derivação das equações do modelo Muskingum-Cunge assumindo a variação dos parâmetros k e ε no tempo como mostra a equação 25.

$$\frac{d(k\epsilon I)}{dt} + \frac{d(k(1 - \epsilon)Q)}{dt} = I - Q \tag{25}$$

As derivadas na equação 25 são aproximadas por derivadas numéricas, resultando na equação 26.

$$\frac{(k\epsilon I)_{t+1} - (k\epsilon I)_t}{\Delta t} + \frac{(k(1 - \epsilon)Q)_{t+1} - (k(1 - \epsilon)Q)_t}{\Delta t} = \frac{I_{t+1} - I_t}{\Delta t} \tag{26}$$

Após algum algebrismo, pode-se reescrever as equações 18, 19 e 20 com os parâmetros k e ε variando no tempo:

$$C1 = \frac{-1 + C_{t+1} + D_{t+1}}{1 + C_{t+1} + D_{t+1}} \tag{27}$$

$$C2 = \frac{C_{t+1}}{C_t} \frac{1 + C_t - D_t}{1 + C_{t+1} + D_{t+1}} \tag{28}$$

$$C3 = \frac{C_{t+1}}{C_t} \frac{1 - C_t + D_t}{1 + C_{t+1} + D_{t+1}} \quad (29)$$

Essa modificação permite a conservação de volume dos hidrogramas propagados.

O segundo problema do método MCNL está associado às equações de armazenamento. A derivação das equações 1 e 2 permite calcular o armazenamento no tempo $i+1$ de duas formas diferentes:

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{\Delta t} = \frac{I_{t+1} + I_t}{2} - \frac{Q_{t+1} + Q_t}{2} \quad (30)$$

$$S_{t+1} = k\varepsilon I_{t+1} + k(1 - \varepsilon)Q_{t+1} \quad (31)$$

Os resultados obtidos pelas equações 30 e 31 apresentam valores de S_{t+1} diferentes e que não estão de acordo com as condições de regime permanente. Todini (2007) mostra a equação 30 não respeita as condições iniciais de armazenamento em regime permanente e o armazenamento calculado pela equação 31 apresenta valores menores do que as condições de regime permanente.

Em regime permanente as vazões de entrada e saída em um determinado trecho devem ser iguais, sem considerar o amortecimento da onda, mas apenas uma translação “k”. O armazenamento é calculado pela equação 32.

$$S_{t+1} = kI_{t+1} = kQ_{t+1} \quad (32)$$

O armazenamento também pode ser calculado pela equação 31 baseado no equacionamento inicial do modelo Muskingum (KOUSSIS, 2009).

$$S = A\Delta x = \frac{Q}{v}\Delta x = k^*Q \quad (33)$$

Onde A é a área da seção [L²]; Δx é o trecho ou comprimento [L]; Q é a vazão [L³/T], v é a velocidade média na seção [L/T] e k é referente à translação da vazão [T].

Em contrapartida, o modelo derivado por Cunge em 1980 (PONCE, 1989; TODINI, 2007) considera que a onda translada com uma celeridade “c” e translação “k”, é dado por:

$$k = \frac{\Delta x}{c} \quad (34)$$

Para resolver a inconsistência com o regime permanente deve-se partir da premissa que o modelo Muskingum (não linear) respeita essas condições. Todini, então, introduziu um parâmetro β^* , que corresponde à razão entre celeridade e velocidade da onda.

Considerando esse novo parâmetro, pode-se reescrever as equações 21 e 22 na forma apresentada a seguir:

$$C^* = \frac{c\Delta t}{\Delta x \beta} \quad (35)$$

$$D^* = \frac{Q}{c\Delta x B S O \beta} \quad (36)$$

Portanto, deve-se reescrever C1, C2 e C3 em função de C^* e D^* para que o modelo MCT conserve volume e respeite a condição de armazenamento em regime permanente.

Algoritmo do método MCT

Nesta seção foi descrito um resumo do algoritmo computacional referente ao método MCT para nortear a implementação e otimizar os custos computacionais. É importante citar que as equações a seguir são válidas para um canal com seção retangular. Nesse tópico o intervalo temporal foi representado pelo índice “i” e o intervalo espacial é representado por “j”.

O primeiro passo do algoritmo é estimar a vazão no tempo $i+1$ do hidrograma de saída. Inicialmente o valor é:

$$Q0 = Q_{j+1}^i + Q_j^{i+1} - Q_j^i \quad (37)$$

Com essa vazão, calculam-se as vazões de referência nos intervalos de tempo i e $i+1$:

$$Q_{refj+1}^i = \frac{Q_j^i + Q_{j+1}^i}{2} \quad (38)$$

$$Q_{refj+1}^{i+1} = \frac{Q_j^{i+1} + Q0}{2} \quad (39)$$

Com base nessas vazões de referência, calcula-se os níveis de água na seção de jusante nos intervalos de tempo i e $i+1$:

$$y_{j+1}^i = \alpha Q_{ref,j+1}^i \quad (40)$$

$$y_{j+1}^{i+1} = \alpha Q_{ref,j+1}^{i+1} \quad (41)$$

$$\alpha = \frac{n^{0.6}}{S_0^{0.3} B^{0.6}} \quad (42)$$

Usando ainda a vazão de referência, calcula-se as celeridades em cada intervalo de tempo:

$$c_{j+1}^i = \frac{5}{3} \frac{S_0^{0.3}}{n^{0.6} B^{0.4}} Q_{ref,j+1}^i \quad (43)$$

$$c_{j+1}^{i+1} = \frac{5}{3} \frac{S_0^{0.3}}{n^{0.6} B^{0.4}} Q_{ref,j+1}^{i+1} \quad (44)$$

Aqui, assumimos que o raio hidráulico é equivalente ao nível da água (i.e. canais que apresentam largura muito superior a profundidade).

Com base na vazão de referência, na área de seção transversal e na celeridade pode-se calcular o fator de correção β^* :

$$\beta_{j+1}^i = \frac{c_{j+1}^i A_{j+1}^i}{Q_{ref,j+1}^i} \quad (45)$$

$$\beta_{j+1}^{i+1} = \frac{c_{j+1}^{i+1} A_{j+1}^{i+1}}{Q_{ref,j+1}^{i+1}} \quad (46)$$

o número de Courant (C^*):

$$C_{j+1}^i = \frac{c_{j+1}^i \Delta t}{\beta_{j+1}^i \Delta x} \quad (47)$$

$$C_{j+1}^{i+1} = \frac{c_{j+1}^{i+1} \Delta t}{\beta_{j+1}^{i+1} \Delta x} \quad (48)$$

e o coeficiente de Difusão (D^*):

$$D_{j+1}^i = \frac{Q_{ref,j+1}^i}{c_{j+1}^i \beta_{j+1}^i \Delta x B S_0} \quad (49)$$

$$D_{j+1}^{i+1} = \frac{Q_{ref,j+1}^{i+1}}{c_{j+1}^{i+1} \beta_{j+1}^{i+1} \Delta x B S_0} \quad (50)$$

Na sequência, calcula-se os parâmetros C1, C2 e C3 do método proposto por Todini (2007):

$$C1 = \frac{-1 + C_{j+1}^{i+1} + D_{j+1}^{i+1}}{1 + C_{j+1}^{i+1} + D_{j+1}^{i+1}} \quad (51)$$

$$C2 = \frac{1 + C_{j+1}^i - D_{j+1}^i}{1 + C_{j+1}^{i+1} + D_{j+1}^{i+1}} \quad (52)$$

$$C3 = \frac{1 - C_{j+1}^i + D_{j+1}^i}{1 + C_{j+1}^{i+1} + D_{j+1}^{i+1}} \quad (53)$$

O último passo é calcular a vazão de saída no tempo $i+1$ pela fórmula tradicional:

$$Q_{j+1}^{i+1} = C1 Q_{j+1}^{i+1} + C2 Q_j^i + C3 Q_{j+1}^i \quad (54)$$

É importante que esta sequência de cálculo se repita pelo menos duas vezes, para que se possa eliminar a influência do palpite inicial para Q_{j+1}^{i+1} .

METODOLOGIA

Comparação entre os modelos MCT, MCL, MCNL e MCT

Os métodos MCL, MCNL3, MCNL4 e MCT foram aplicados em um canal retangular hipotético para avaliar a representatividade da propagação de uma onda de cheia em termos de conservação de volume.

Este experimento numérico consiste em um trecho de canal com seção transversal retangular, de largura (B), comprimento (L), declividade (S_0), coeficiente de Manning (Man), discretização espacial (Δx) e discretização temporal (Δt). Consideramos os seguintes valores dos parâmetros como a simulação de referência: B = 50m; L = 10km; $S_0 = 0.0007$ m/m; Man = $0.045 \text{ m}^{-1/3}$ s; $\Delta x = 1000$ m; $\Delta t = 3600$ s.

A figura 2 mostra a seção transversal para esse teste considerando os parâmetros padrão. A condição inicial do modelo é uma vazão de $100 \text{ m}^3/\text{s}$,

que corresponde a uma profundidade de 2,2 metros.

Diversas simulações foram realizadas variando os parâmetros S_0 , Man , Δx e Δt . Cada parâmetro foi perturbado, em torno do valor de referência, mantendo os outros parâmetros fixos, de acordo com a tabela 1.

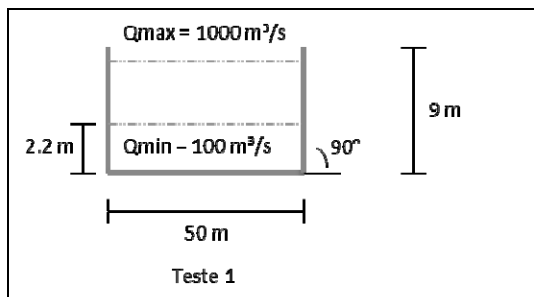


Figura 2 - Seção transversal do teste realizado

Tabela 1 - Variação dos parâmetros utilizados na simulação. Os valores em negrito são os parâmetros para a simulação de referência do teste realizado

S_0	0,0001	0,00025	0,0007	0,001	0,002
Man	0,01	0,02	0,035	0,045	0,06
Δx	500	1000	2000	4000	6000
Δt	900	1800	3600	5400	7200

Além disso, foi considerado um hidrograma de entrada sintético NERC (1975) apud Todini (2007), na seção de montante, dado por:

$$Q(t) = Q_{base} + (Q_{pico} - Q_{base}) \left[\frac{t}{T_p} \exp\left(1 - \frac{t}{T_p}\right) \right]^\beta \quad (55)$$

onde: $Q_{base} = 100 \text{ m}^3/\text{s}$; $Q_{pico} = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$; $T_p = 24 \text{ horas}$ e $\beta = 16$. (Parâmetro de curvatura do hidrograma).

Após as simulações foram comparados e analisados os resultados obtidos por cada modelo de propagação de vazão. O erro de volume foi calculado pela seguinte fórmula:

$$\Delta V(\%) = \frac{\sum I - \sum Q}{\sum I} 100 \quad (56)$$

Aplicação do MCT no Rio São Francisco

A região escolhida para a aplicação do método MCT situa-se dentro da bacia do Rio São Francisco, no centro de Minas Gerais, mais especifica-

mente entre a UHE Três Marias e a cidade de Pirapora (Figura 3).

Nesse trecho existem dois postos fluviométricos com dados horários (Figura 4). O primeiro a jusante da UHE Três Marias e outro na cidade de Pirapora (Pirapora Barreiro). Até o posto Pirapora Barreiro, há um aporte lateral – Rio Abaeté – onde também há uma estação fluviométrica com dados horários (Ponte da BR-040).

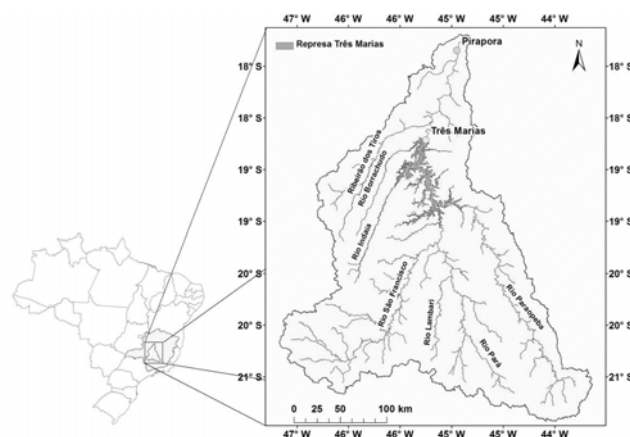


Figura 3 - Trecho alto da bacia do rio São Francisco e os principais rios da região. O trecho considerado neste estudo começa a jusante do reservatório de Três Marias e se estende apenas até a confluência com o rio das Velhas

Fonte: Rhama (2012).

A distância entre o posto fluviométrico a jusante da barragem e o rio Abaeté é de aproximadamente 33 km. A distância ao longo do rio Abaeté, entre o posto fluviométrico e o rio São Francisco é de aproximadamente 35 km. Finalmente, a distância entre a confluência do rio Abaeté e o Rio São Francisco até a estação de Pirapora Baerreiro é de 97 km. Com o auxílio do software Google Earth estimou-se uma largura média e a declividade desses trechos. No rio São Francisco, a largura média é de aproximadamente 300 metros e a declividade 29.5 cm/km. A largura média do rio Abaeté é de 90 metros e a declividade de 1.2 m/km. A rugosidade dos trechos foi considerada de 0.030 (m-1/3 s). Considerou-se uma seção do tipo retangular com profundidade de 5 metros. Essa profundidade foi escolhida em função das vazões observadas de modo que não houvesse extravasamento da calha principal.

Foram utilizadas duas medidas de desempenho para avaliar o modelo MCT: o erro de volume e o coeficiente de Nash-Sutcliffe (NS) (NASH; SUTCLIFFE, 1970 apud PERUMAL; SASHOO, 2007).

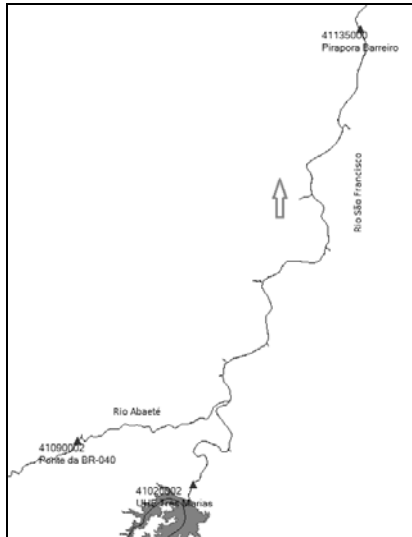


Figura 4 – Postos fluviométricos utilizados para a simulação do sistema composto pelo rio São Francisco (UHE Três Marias à Pirapora) e pelo Rio Abaeté
Fonte: Rhama (2012).

Estações fluviométricas com dados horários

Foram obtidos junto a CEMIG dados de vazão com intervalo de tempo horário disponibilizados no período entre 1998 e 2011. As estações utilizadas no estudo são apresentadas na tabela 2.

Tabela 2 - Postos fluviométricos com dados horários disponibilizados pela CEMIG no contexto do projeto de pesquisa
Fonte: Rhama (2012).

Nome	Área de Drenagem (km ²)	Lat (Decimal)	Long (decimal)
Ponte Br 040	5320	-18.1086	-45.4614
Pirapora Ponte	62100	-17.3675	-44.9428
Três Marias Jusante	50816	-18.1869	-45.2528

Simulação dos eventos

Foram simulados três eventos:

- Evento 1: Período entre 06/11/2009 às 00:00 horas e 21/11/2009 às 22:00 horas.
- Evento 2: Período entre 12/01/2007 às 20:00 horas e 19/01/2007 às 04:00 horas.

- Evento 3: Período entre 01/09/2007 às 05:00 horas e 03/09/2007 às 23:00 horas.

RESULTADOS

Comparação entre os modelos de escoamento simplificados

Os hidrogramas da simulação de referência são mostrados na Figura 5. Observa-se que os modelos MCT, MCNL3 e MCNL4 tiveram resultados bem parecidos visualmente. O modelo MCL foi o que mais se diferenciou com relação aos outros modelos.

Os erros de volume da simulação de referência são apresentados na tabela 3.

Tabela 3 - Resultados da vazão de pico (Q_{pico}), tempo de pico (Tp) e conservação de volume (ΔV%) na simulação de referencia

Modelo	Q _{pico} (m ³ /s)	Tp(h)	ΔV%
MCL	957,28	32	0,00%
MCT	958,85	31	0,01%
MCNL3	958,03	31	-0,80%
MCNL4	958,55	31	-0,33%

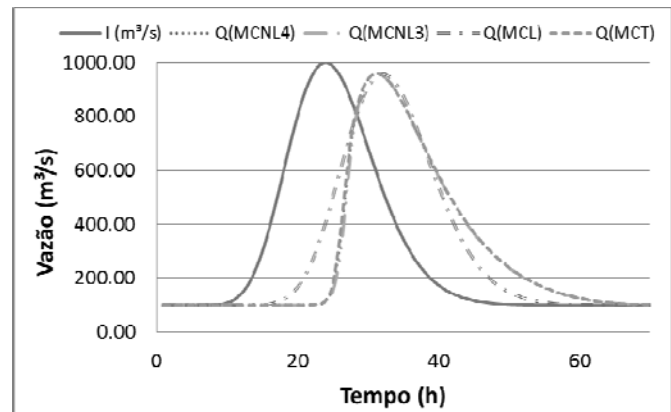


Figura 5 - Hidrogramas gerados com os parâmetros de referência

Observa-se que o MCL não apresenta erro de conservação de volume. No entanto, os modelos MCNL3 e MCNL4 apresentam erros dessa natureza, Finalmente o modelo MCT apresenta um erro de 0,01%, o que pode ser considerado desprezível

comparado ao erro observado nos outros modelos não lineares.

Varição da declividade

Observa-se também que a declividade tem um efeito importante sobre a propagação da onda de cheia. As maiores atenuações do hidrograma ocorrem em rios com menor declividade (Figura 6).

A declividade também teve um efeito importante com relação à conservação de volume. A figura 7 apresenta os erros de volume dos modelos comparados no teste numérico para diferentes declividades. Observa-se que os modelos MCNL3 e MCNL4 apresentam erros maiores à medida que S0 diminui. Os erros são superiores a 4% em valor absoluto na declividade 0,0001 m/m.

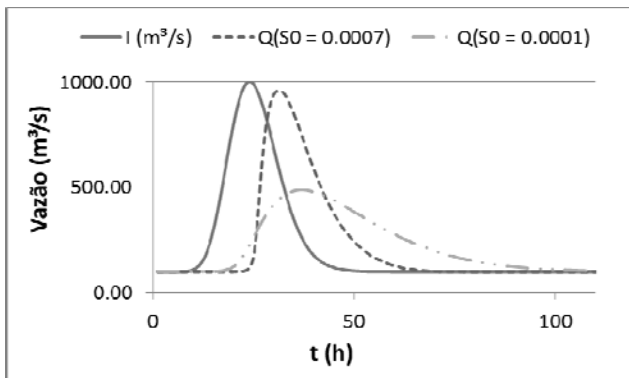


Figura 6 - Hidrogramas resultantes do modelo MCT para duas declividades diferentes. Os hidrogramas mostram que para declividades menores o hidrograma é mais amortecido. Para maiores declividades, o amortecimento é menor

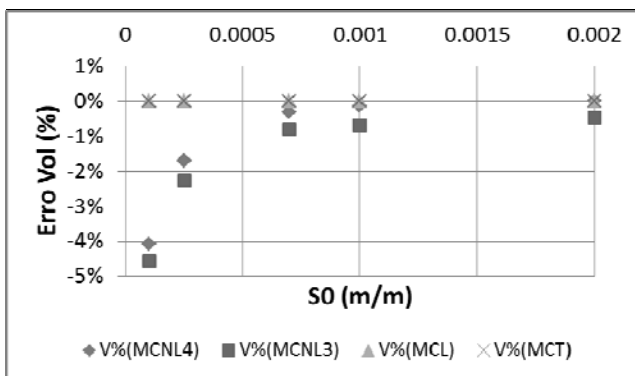


Figura 7 - Erro no volume para diferentes declividades

A figura 8 mostra os hidrogramas calculados pelos modelos na declividade de 0,0001 m/m. Pode-

se observar que existem diferenças na região do pico do hidrograma entre os modelos MCL, MCT, MCNL3 e MCNL4. O modelo MCL tem uma vazão de pico maior e antecipada com relação às outras versões. Os modelos MCNL3 e MCNL4 têm comportamento semelhante e as vazões de pico são menores. O resultado obtido pelo MCT mostra uma vazão de pico intermediária e com uma ocorrência no mesmo tempo dos modelos não lineares.

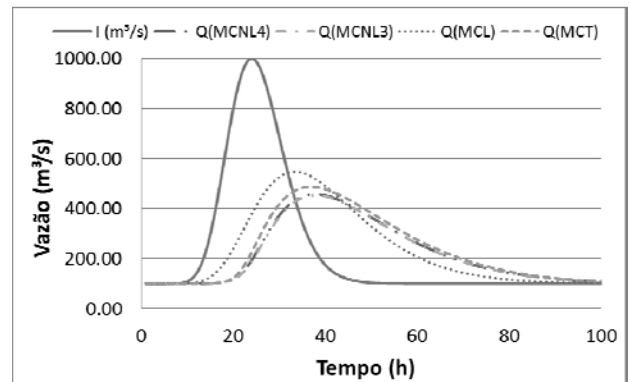


Figura 8 - Hidrogramas resultantes utilizando S0 = 0,0001

Varição da rugosidade da calha

No que diz respeito à rugosidade (Figura 9), MCNL4 e MCNL3 apresentam erros crescentes com o aumento do coeficiente de Manning. Os valores chegam a 1.2% em valor absoluto para o modelo MCNL3 e 0.6% para o MCNL4 em valor absoluto. Apesar dos erros serem bem visíveis no gráfico, deve-se levar em consideração que são erros muito baixos.

Os modelos MCL conserva o volume durante toda a variação desse parâmetro. O modelo MCT apresenta um erro de 0.01%, muito baixo com relação aos outros modelos não lineares e praticamente desprezível.

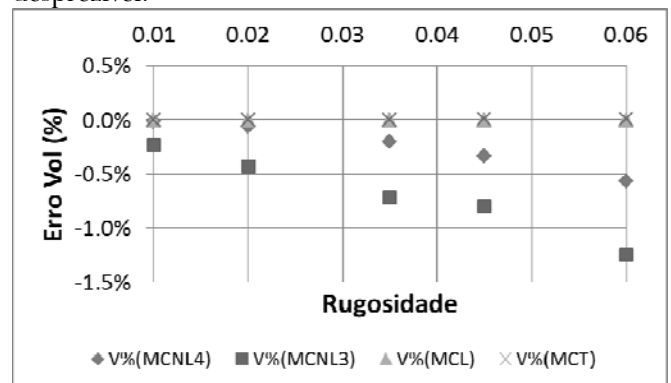


Figura 9 - Erro no volume para diferentes rugosidades do rio

Variação da discretização espacial

Com relação à variação espacial a figura 10 mostra o efeito da variação da discretização espacial sobre a conservação de volume dos modelos. Pode-se perceber que o modelo MCL não perde volume para todos os intervalos espaciais simulados. O modelo MCT apresenta um erro de 0.13% no Δx de 6 km. O modelo MCNL4 obteve erros semelhantes em todas as simulações. Os erros foram da ordem de -0.4%. O MCNL3 apresentou erros maiores na medida em que foi diminuído o intervalo espacial. Para 500 metros de intervalo espacial, o erro no MCNL3 foi de -1%.

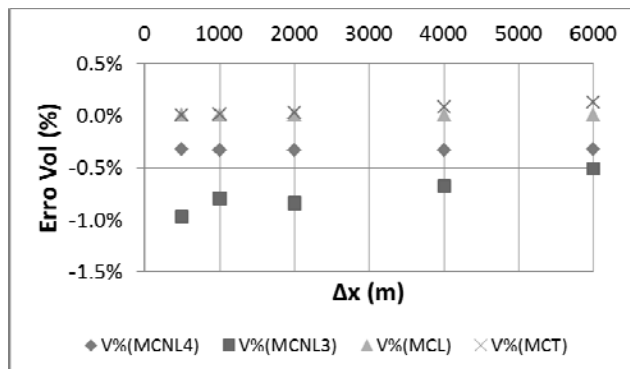


Figura 10 - Erro no volume para diferentes Δx

Variação da discretização temporal

Com relação ao efeito da variação do intervalo temporal sobre a conservação de volume (Figura 11), valores mais baixos de intervalo de tempo causam um erro de volume maior nos algoritmos MCNL3 e MCNL4. Esses modelos tiveram erros na ordem de -3,5% em $\Delta t = 900$ segundos (MCNL3) e -2,74% em $\Delta t = 900$ segundos (MCNL4).

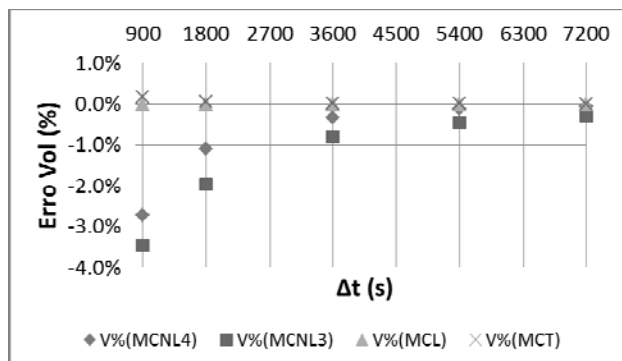


Figura 11 - Erro no volume para diferentes Δt

A variação do intervalo de tempo não interfere na conservação de volume nos algoritmos MCL e interferiu muito pouco no modelo MCT. Esse modelo apresentou um erro muito baixo de 0,16% em $\Delta t = 900$ segundos.

Simulação do trecho a jusante de Três Marias e Pirapora

Os resultados obtidos a partir das simulações foram comparados com a vazão observada na estação de Pirapora nos eventos descritos na metodologia

Evento 1

A figura 12 mostra os hidrogramas observados a jusante de Três Marias, no posto BR040 e na estação de Pirapora. O sistema implementado propaga a vazão da estação a jusante de Três Marias e da estação BR040 somando as vazões na confluência do rio Abaeté com o São Francisco. A vazão resultante por sua vez é propagada até a cidade de Pirapora.

Os hidrogramas desses eventos aparentam ter um formato menos esbelto, assemelhando-se a hidrogramas sintéticos com um valor de beta (β) baixo.

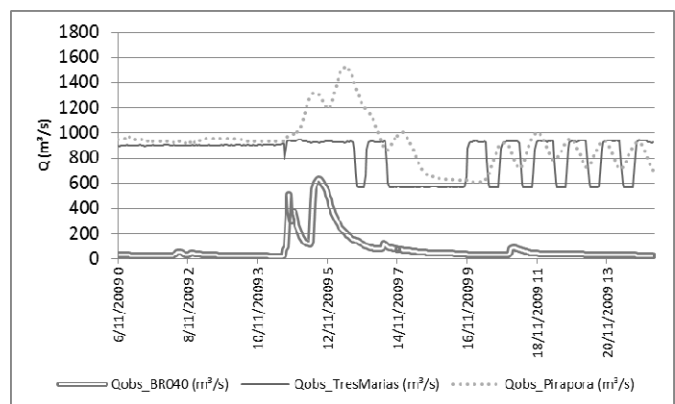


Figura 12 - Hidrogramas observados nos postos BR040, a jusante de Três Marias e na estação Pirapora (Evento 1)

A figura 13 apresenta os hidrogramas observado em Pirapora e o simulado pelo modelo MCT. O gráfico mostra que os picos foram bem representados, havendo uma maior diferença no primeiro pico de vazão. O coeficiente de NS nesse evento foi de 0.929. O erro de volume, comparado o volume em Pirapora e o volume na confluência entre os rios Abaeté e São Francisco foi de 0.5%.

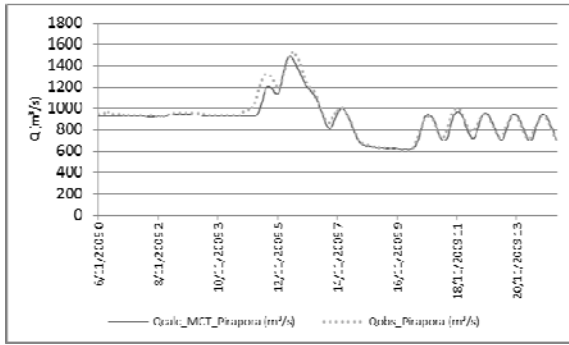


Figura 13 – Hidrograma calculado e observado na estação de Pirapora (Evento 1)

Evento 2

A figura 14 mostra os hidrogramas observados a jusante de Três Marias, no posto BR040 e na estação de Pirapora. Assim como no primeiro evento, os hidrogramas do evento 2 aparentam um formato menos esbelto, assemelhando-se a hidrogramas sintéticos com um valor de beta baixo.

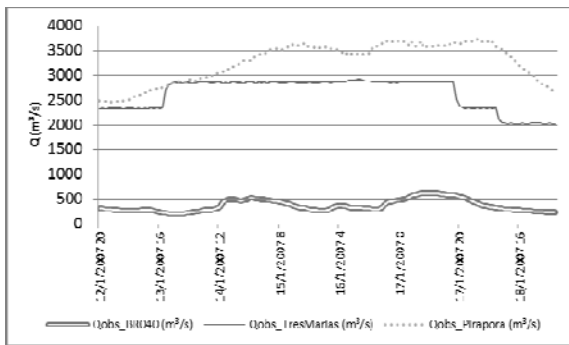


Figura 14 - Hidrogramas observados nos postos BR040, a jusante de Três Marias e na estação Pirapora (Evento 2)

O hidrograma simulado (Figura 15) subestimou minimamente as vazões em Pirapora.

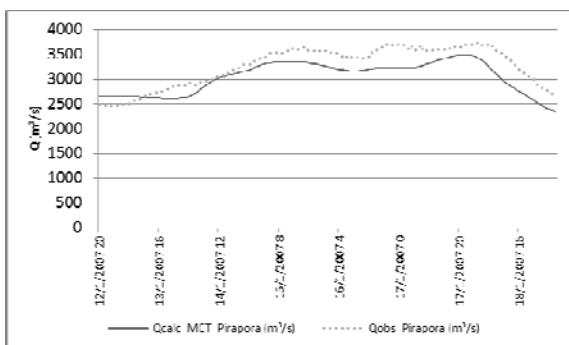


Figura 15 – Hidrograma calculado e observado na estação de Pirapora (Evento 2)

O coeficiente NS nesse evento foi de 0.50. O erro de volume, comparado o volume em Pirapora e o volume na confluência entre os rios Abaeté e São Francisco foi de 0.9%.

Evento 3

A figura 16 mostra os hidrogramas observados a jusante de Três Marias, no posto BR040 e na estação de Pirapora.

A vazão do rio Abaeté, no evento 3, é praticamente desprezível. O hidrograma observado em Pirapora é originado principalmente pela defluência de Três Marias.

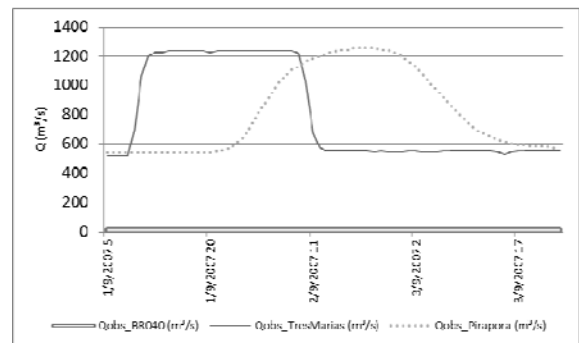


Figura 16 - Hidrogramas observados nos postos BR040, a jusante de Três Marias e na estação Pirapora (Evento 3)

O hidrograma simulado (Pirapora_MCT) apresentado na figura 17 mostra que o tempo de ocorrência da vazão de pico e a vazão de pico são semelhantes aos mesmos valores do hidrograma observado (Pirapora).

O coeficiente NS calculado através das vazões calculadas e observadas na estação de Pirapora é de 0.98. O erro de volume calculado no evento 3 indica que o modelo MCT perdeu 1% do volume inicial durante a propagação.

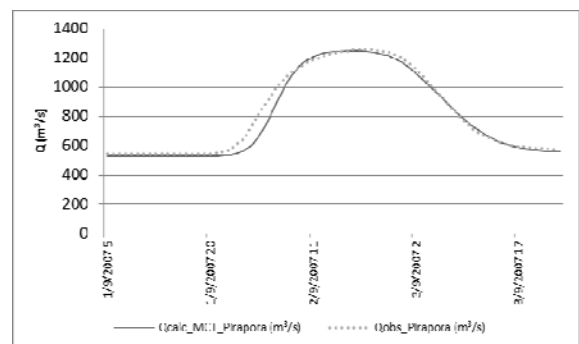


Figura 17 – Hidrograma calculado e observado na estação de Pirapora (Evento 3)

DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

A metodologia proposta por Todini (2007), aqui chamada de MCT, mostrou-se satisfatória nos testes de comparação com outros modelos simplificados e na aplicação real.

Como pôde ser visto no equacionamento, apesar das diferenças entre os modelos simplificados comentados, a metodologia proposta por Todini (2007), com as modificações feitas nesse trabalho (celeridade, nível de água) continua sendo de fácil entendimento e implementação, principalmente quando comparadas a modelos hidrodinâmicos completos. Sendo assim, a metodologia é aconselhada em rios onde possam ser desprezados os efeitos de jusante e termos significativos de pressão.

No exemplo numérico hipotético foram comparados os modelos simplificados. O desempenho dos modelos foi medido através da conservação de volume. O modelo MCL conservou 100% do volume dos hidrogramas propagados, como já era esperado e observados em outros trabalhos (PONTES, 2011; TODINI, 2007). Com relação ao modelo MCT, pode-se afirmar que não houve erros significativos de conservação de volume.

O MCL, apesar da conservação de volume, apresentou hidrogramas com um formato diferente dos hidrogramas calculados pelos modelos não lineares. Isso se deve ao fato do modelo ser linear, ou seja, fixa os parâmetros no início das simulações. Na prática, ele não consegue representar a vazão de pico e o tempo de pico tão bem quanto modelos não lineares. Isso se deve ao fato da celeridade e conseqüentemente a vazão não variarem no tempo. Os modelos MCNL3 e MCNL4 não conservaram o volume, porém representaram melhor os extremos. Este resultado corrobora com os trabalhos de Faillache, Allasia e Collischonn (2004), Pontes (2011), Tang e Samuels (1999) e Todini (2007).

A não conservação de volume e a dificuldade de representar os extremos são fatores negativos dos modelos MCL, MCNL3 e MCNL4. Esse fato mostra a importância do uso do modelo MCT, que contempla tanto a conservação de volume quanto a representatividade dos extremos.

A variação da declividade gerou maiores desvios com relação aos erros de conservação de volume dos modelos. O erro de volume maior em menores declividades é, geralmente, esperado. Nessas declividades os termos da equação de Saint-Venant que foram simplificados passam a fazer mais diferença. Esse resultado está de acordo com traba-

lhos encontrados na literatura (CAPPELAERE 1997; SILVA; MASCARENHAS; MIGUEZ, 2003).

Os erros de conservação de volume dos métodos MCNL3 e MCNL4 também parecem ser sensíveis aos intervalos de discretização adotados no tempo (Δt) e no espaço (Δx). A escolha do Δx e Δt está ligada à estabilidade de modelos simplificados (JONES, 1981; PONTES, 2011). Rios com poucas subdivisões podem apresentar problemas de conservação de volume maiores.

O exemplo numérico hipotético realizado também revela que o modelo MCT parece ter características adequadas para um modelo simplificado de propagação de vazão, com ausência ou diminuição de erros de conservação de volume, e com possíveis vantagens na representação do amortecimento e tempo de viagem do hidrograma.

Os resultados da simulação do sistema real (localizado em Minas Gerais e composto pelos rios Abaeté e São Francisco, a jusante da UHE Três Marias) mostram que o modelo MCT representa satisfatoriamente o processo de propagação de escoamento.

Os valores das duas medidas de desempenho utilizadas para avaliar o modelo mostram que os erros de volume foram menores que 1% e o coeficiente Nash-Sutcliffe foram superiores a 0.9.

Apesar de baixo, os erros de volume originados da simulação no sistema real foram maiores do que os erros de volume originados do sistema hipotético. Essa diferença pode ser atribuída ao fato de não ser considerado o aporte lateral (vazão dos afluentes) entre a confluência do São Francisco e Abaeté e Pirapora. Isto indica a importância da implementação do modelo MCT em um modelo chuva-vazão. A simulação com um modelo chuva-vazão consideraria a vazão das bacias incrementais ao longo do rio São Francisco. Essa consideração poderia eliminar ou diminuir ainda mais os erros de volume.

Em síntese, o MCT permite aliar os benefícios do uso de modelos não lineares, a qualidade de ser simplificado e de fácil implementação além de conservar o volume ou diminuir significativamente os erros. Sendo assim recomenda-se a aplicação desse modelo em outros casos para que possa confirmar suas qualidades.

LIMITAÇÃO DOS MODELOS

Em algumas situações estes modelos apresentam erros que podem ser observados direta-

te nos hidrogramas, como, por exemplo, a uma pequena redução da vazão antes do início da ascensão do hidrograma.

Este efeito, chamado aqui de subida invertida do hidrograma, foi observado por outros autores (PERUMAL, 1992; SZÉL; GÁSPÁR, 2000) e está relacionado à discretização temporal e espacial adotada. Além disso, a avaliação visual também buscou identificar períodos de instabilidade nos picos e na recessão, como ilustrado no exemplo da figura 18.

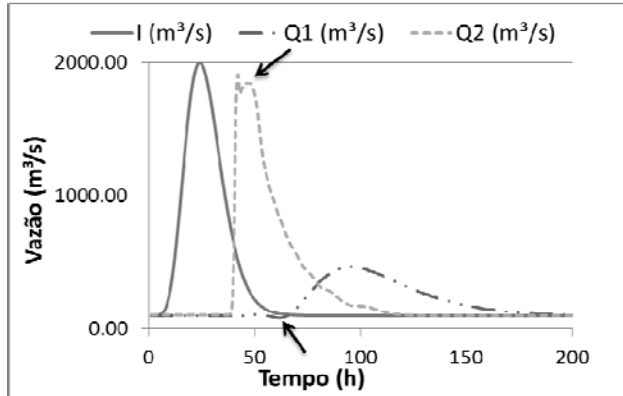


Figura 18 - Erros de instabilidade (hidrograma Q2) e erros de subida invertida do hidrograma (hidrograma Q1)

RECOMENDAÇÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Abaixo são apresentadas algumas recomendações de trabalhos futuros:

1. Implementação da planície de inundação no modelo MCT.
2. Comparação do modelo MCT com um modelo hidrodinâmico completo (HEC-RAS) utilizando batimetria e dados reais em rios com planície de inundação.
3. Análise aprofundada sobre a influência do intervalo espacial e temporal na estabilidade do modelo MCT.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela concessão de bolsa de mestrado ao primeiro autor.

REFERÊNCIAS

- CAPPELAERE, B. Accurate Diffusive Wave Routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 123, n. 3, p. 174-181, 1997.
- CUNGE, J. A.; HOLLY, F. M.; VERNEY, A. Practical aspects of computational river hydraulics. London: Pitman advanced, 1980.
- FAILACHE, N. G.; ALLASIA, D.; COLLISCHONN, W. Avaliação do Método de Muskingum Cunge não linear com conservação de volume para propagação de cheias em rios. *Revista Eletrônica de Recursos Hídricos*, v. 1, n. 1, p. 63-68, 2004.
- JONES, S. B. Choice of space and time steps in the Muskingum-Cunge flood routing method. *ICE Proceedings*, v. 71, n. 3, p. 759-772, 1981.
- Koussis, A.D. (2009). Assessment and review of the hydraulics of storage flood routing 70 years after the presentation of the Muskingum method. *Journal Hydrological Sciences*, 54.
- NASH, J. E.; SUTCLIFFE, J. V. River flow forecasting through conceptual models, Part 1: A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, v. 10, n. 3, p. 282-290, 1970.
- PERUMAL, M. The cause of negative initial outflow with the Muskingum method / Cause d'un débit de sortie négatif obtenu par la méthode de Muskingum'. *Hydrology Science Journal*, v. 37, n. 4, p. 391-401, 1992.
- PERUMAL, M. Hydrodynamic derivation of a variable parameter Muskingum method: 1. Theory and solution procedure. *Hydrology Science Journal*, v. 39, p. 431-442, 1994.
- PERUMAL, M.; O'CONNELL, P. E. O.; RANGA RAJU, K. G. Field applications of a variable-parameter Muskingum Method. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 6, n. 3, p. 196-206, 2001.
- PERUMAL, M.; SAHOO, M. Applicability criteria of the variable parameter Muskingum stage and discharge routing methods. *Water Resources Research*, v. 43, n. W05409, 2007.

PONCE, VM. *Engineering hydrology: principles and practices*. Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall; 1989.

PONTES, P. R. M. *Comparação de modelos hidrodinâmicos simplificados de propagação de vazão em rios e canais*. 2011. Dissertação (Mestrado) - IPH, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PRICE, R. K. Volume-Conservative Nonlinear Flood Routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 135, n. 10, p. 838-845, 2009.

RHAMA. *Desenvolvimento de sistema de previsão de vazões com base na integração de sistema de telemetria a modelos hidrológicos e de previsão climática*. 2012. 44 p. (Relatório técnico; 2).

SILVA, R. C. V.; MASCARENHAS, F. C. B.; MIGUEZ, M. G. *Hidráulica fluvial*. Rio de Janeiro: COPPE/ UFRJ, 2003.

SZÉL, S.; GÁSPÁR, C. On the negative weighting factors in the Muskingum-Cunge scheme. *Journal of Hydraulic Research*, v. 38, n. 4, p. 299-306, 2000.

TANG, X.; SAMUELS, P. G. Variable Parameter Muskingum-Cunge Method for flood routing in a compound channel. *Journal of Hydraulic Research*, v. 37, p. 519-614, 1999.

TODINI, E. A mass conservative and water storage consistent variable parameter Muskingum-Cunge approach. *Hydrology Earth System Sciences*, v. 11, p. 1645-1659, 2007.

TUCCI, C. E. M. *Modelos Hidrológicos*. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS; 2005. Colaboração da Associação Brasileira de Recursos Hídricos/ABRH.

Volume Conservation in Simplified Streamflow Routing Models

ABSTRACT

The Muskingum-Cunge method is widely used to calculate streamflow routing in rivers, especially as a module for more complex hydrological models. In its non-linear form, this method allows representing flood routing in rivers with flood plains and allows estimating the extreme flows more effectively. However, volume conservation problems may occur because of the use of non-linear schemes.

Recent modifications were proposed for the non-linear Muskingum-Cunge method, to compensate or avoid these volume errors. This modification was called Muskingum-Cunge-Todini (method (MCT)). The present paper evaluates the MCT method comparing it to other streamflow routing methods in a hypothetical canal, besides looking at its application in a stretch of River São Francisco, Brazil. To evaluate the results, two performance indicators were used: the Nash-Sutcliffe coefficient and volume error. The comparative application in the hypothetical canal confirmed that the conventional non-linear Muskingum-Cunge model does not conserve the volume adequately, and that this problem is more marked in low slope rivers (error greater than 4% for a 0.0001 m/m slope). Besides, it was observed that the MCT model practically eliminates the conservation errors of volume (error of 0.01% for a slope of 0.0001m/m). The MCT method used for a stretch of the River São Francisco also presented satisfactory results. The Nash-Sutcliffe coefficient achieved a maximum value of 0.98, while the mean volume error was only 0.8%.

Key-words: *Volume conservation, non-linear Muskingum-Cunge, simplified flow models.*