UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Modelo de Gravitação Quântica

2 + 1 Dimensional

Jonier Amaral Antunes

Porto Alegre,RS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Modelo de Gravitação Quântica

2 + 1 Dimensional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Física, do Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Jonier Amaral Antunes

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

2009

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares e amigos, que me apoiaram e auxiliaram durante todo o período de realização deste trabalho.

Em particular aos meus pais, Aristeu e Ana Cristina e ao meu irmão Dinler, que sempre forneceram toda sustentação que necessitei.

Agradeço também aos colegas e amigos inestimáveis Eduardo e Artur pela discussão da maior parte dos tópicos aqui apresentados e pela ajuda que se mostraram dispostos a oferecer.

Por último e provavelmente mais importante, agradeço ao meu orientador, Prof. Luiz Fernando, pela enorme dedicação e paciência que sempre depositou neste projeto e por todo o aprendizado que consegui adquirir com seus ensinamentos.

“The amount of theoretical work one has to cover before being able to solve problems of real practical value is rather large, but this circumstance is likely to become more pronounced in the theoretical physics of the future.”

P.A.M.Dirac

(do prefácio da primeira edição do
The principles of Quantum Mechanics,
Oxford, 1930)

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os dois pilares da física moderna, a teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica, provaram-se incompatíveis e aplicáveis apenas em escalas distintas. A busca por uma teoria mais geral que as englobe, uma teoria quântica da gravitação, data de mais de 70 anos e ainda é uma área de intensa pesquisa com uma grande variedade de abordagens distintas. Muitos dos resultados já obtidos, indicam que dificilmente será possível evitar esse problema, tornando necessária uma teoria geral para explicar a termodinâmica de buracos negros, o desenvolvimento do universo em seus estágios iniciais, a estrutura do espaço tempo na escala de planck e outros fenômenos que apresentem propriedades quânticas e onde não se possa desconsiderar efeitos gravitacionais. Maiores detalhes sobre a história da busca pela Gravitação Quântica pode ser encontrada em [11] e sobre as diferentes abordagens de uma forma geral em [10].

Além de problemas técnicos, como resolver complicadas equações de vínculo em espaços de métricas e lidar com a não-linearidade naturalmente exigida pela relatividade geral, parte da dificuldade em se obter a unificação é conceitual, não se sabe ao certo o que esperar de uma teoria da gravitação quântica ou o que é precisamente quantizar uma teoria clássica. Isso e o fato das teorias serem escritas de formas bem distintas, tratando de diferentes aspectos do espaço-tempo e de campos, estimula o desenvolvimento de novas metodologias e a construção de modelos específicos "menos realistas" aonde testá-las.

Uma das áreas recentes na qual muitos modelos podem ser testados é a de gravitação quântica em 2 + 1 dimensões. Reduzindo o número de dimensões do espaço-tempo de 3 + 1 (3 dimensões espaciais, 1 temporal) para 2 + 1, muitas das equações são simplificadas, algumas até ficando solúveis. Além disso, nesse contexto podem ser mais facilmente aplicados os resultados de geometria diferencial e topologia algébrica de superfícies, áreas que já foram amplamente trabalhadas na matemática e que possuem mais resultados conhecidos. Técnicas e exemplos diversos em 2 + 1 dimensões encontram-se em [1].

O presente trabalho avalia, em um modelo com topologia específica bem definida, o caminho tomado em [1] para a gravitação quântica. Para maior especificação dos objetivos, se faz necessária a introdução de algumas definições e teoremas que serão apresentados nas seções a seguir.

Ao longo do texto será utilizada a convenção de Einstein para soma de índices, isto é, a ocorrência de índices repetidos com um sendo superior (contravariante) e outro inferior (covariante) significará a soma em todos os valores do índice. Para tensores definidos no espaço tempo, índices gregos representarão todas as componentes espaço-temporais, enquanto latinos apenas componentes espaciais. Dessa forma teremos que $A^{\mu}_{\nu} B_{\sigma\mu}$ e $C^{i}_{jk} D^{k}$ significam, respectivamente:

$$A^{\mu}_{\nu} B_{\sigma\mu} = A^{0}_{\nu} B_{\sigma 0} + A^{1}_{\nu} B_{\sigma 1} + A^{2}_{\nu} B_{\sigma 2} + ... + A^{N}_{\nu} B_{\sigma N}$$

e

$$C^{i}_{jk} D^{k} = C^{i}_{j1} D^{1} + C^{i}_{j2} D^{2} + ... + C^{i}_{jN} D^{N}$$

para um espaço-tempo N + 1 dimensonal.

Foi adotado também o sistema de unidades de Planck, isto é: $G = c = \hbar = 1$.

1.1 Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral descreve a geometria de um espaço-tempo. Mais precisamente, o espaço-tempo deve ser uma variedade n-dimensional conexa M, na qual está definida uma métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$, isto é, uma métrica pseudo riemanniana tal que para qualquer $p \in M$ e uma base B ortonormal do espaço tangente $T_p M$ (dados $v_i, v_j \in B$ $|g(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$) existe único $v \in B$ cuja norma (induzida pela métrica) é negativa, $g(v, v) = -1$.

Mais ainda, seja $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momentum, um campo tensorial que descreva o fluxo de energia e momentum em M. A métrica deverá satisfazer as Equações de Campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

com $R_{\mu\nu}$ sendo a curvatura de Ricci da métrica $g_{\mu\nu}$, dada por:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} \tag{1.2}$$

onde usamos os símbolos de Christoffel associados à conexão de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci e Λ a constante cosmológica do universo.

Em particular, no caso do vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$, métrica e curvatura satisfarão:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Dado um ponto da variedade, um vetor tangente X nesse ponto é dito do tipo tempo se $g(X, X) < 0$. Definimos uma relação de equivalência entre vetores tangentes do tipo tempo tal que $X \sim Y \Leftrightarrow g(X, Y) < 0$. Essa relação determina duas classes de equivalência que chamaremos *direção futura* e *direção passada*.

Uma variedade M, com métrica lorentziana g, será chamada de temporalmente orientável se uma designação contínua das direções futura e passada puder ser feita em toda a variedade.

1.1.1 Formulação como teoria de campos

Como visto acima, a variável da Relatividade Geral é a métrica do espaço-tempo. Trata-se de um campo tensorial definido sobre uma variedade. Existe uma particular descrição, dada a seguir, de teoria lagrangiana de campos que será utilizada mais tarde.

Como em todo este trabalho, as variedades são assumidas dotadas de alguma (pseudo)métrica $g_{\mu\nu}$ e a forma de volume com respeito a qual as integrais são calculadas é a naturalmente induzida pela métrica, isto é, aquela que em qualquer sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ vale $\sqrt{|g|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, onde g é o determinante da métrica na base de $(x^1, ..., x^n)$.

Seja ψ um campo tensorial definido sobre um variedade M e S um funcional sobre o espaço de campos tensoriais ao qual ψ pertence. Tomando ψ_λ uma família a um parâmetro de campos tal que existam $d\psi_\lambda/d\lambda$ (que denotaremos por $\delta\psi$) e $dS/d\lambda$ para qualquer possível família. Definimos a derivada funcional de S, caso exista, como o campo tensorial $\delta S/\delta\psi|_{\psi_\lambda}$ que satisfaz

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \frac{\delta S}{\delta\psi}\delta\psi$$

Caso a ψ que satisfaça dada equação de campo seja tal que S é um extremo, isto é

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\psi}\right|_{\psi} = 0 \tag{1.3}$$

então chamamos S de ação para essa teoria de campos.

Para obter as equações de Einstein do vácuo, podemos utilizar como campo a inversa da métrica, $g^{\mu\nu}$ e como ação o funcional

$$S[g^{\mu\nu}] = \int_M \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

O integrando $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \sqrt{-g}(R-2\Lambda)$ é chamado Densidade Lagrangiana. Segue-se, como pode ser visto em [3], que

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

supondo-se que sejam nulas no bordo as derivadas covariantes $\nabla_\rho(\delta g_{\mu\nu})$, ou, alternativamente, somando-se um termo à ação cuja derivada cancele os termos de bordo. Assim, impondo $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$ teremos as equações 1.1.

Para o caso de termos uma distribuição $T_{\mu\nu} \neq 0$ podemos considerar o funcional $S + S_M$, onde S_M seja tal que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

1.2 2 + 1 dimensões

A primeira principal diferença entre a Relatividade Geral em 3 + 1 e 2 + 1 dimensões é a relação entre o tensor de curvatura e o tensor de Ricci. Seja ∇ uma derivada covariante em M (utilizaremos sempre a derivada covariante compatível com a métrica $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$). O tensor de curvatura é definido por:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} v^{\rho} = (\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}) v^{\sigma}$$

a partir do qual usualmente se define o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$, que equivale a 1.2.

Em 2 + 1 dimensões o tensor de curvatura depende linearmente do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R$$

significando que qualquer solução das equações de campo de Einstein para o vácuo e $\Lambda = 0$ é plana e $\Lambda \neq 0$ implica em curvatura constante.

Um dos resultados mais importantes da área é o teorema devido a Mess que garante, caso M seja uma variedade compacta tridimensional, com uma métrica Lorentziana plana, temporalmente orientável e bordo do tipo espaço (a métrica ali induzida é positivo-definida) então M tem necessariamente a topologia

$$M \approx [0, 1] \times \Sigma$$

onde Σ é uma superfície fechada homeomorfa a uma das componentes do bordo de M. Isso significará que a topologia das superfícies espaciais está fixa, não mudando com a passagem do tempo. O próximo passo será a escolha de tal Σ.

1.3 O Toro: Definição e propriedades

Nesta seção definimos a superfície que será utilizada como parte espacial do espaço-tempo: o toro. Apresentamos também suas principais propriedades e espaços relacionados que estarão presentes na dinâmica clássica e na posterior quantização.

Seja $\tau \in \mathbb{C}$ com $\Im m(\tau) > 0$ e considere a relação de equivalência $\sim$ no plano complexo dada por $u \sim v \Leftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $u = v + m + \tau n$. Seja $T = \mathbb{C}/\sim$ o espaço das classes de equivalência por essa relação. T pode ser visualizado pelo paralelogramo no plano complexo determinado pelos segmentos [0, 1] e [0, τ] com as arestas identificadas, como na Figura 1.1. A cada ponto $v \in \mathbb{C}$ dentro do paralelogramo corresponde um ponto em T, e cada ponto fora do paralelogramo mas que possa ser escrito como $v + m + \tau n$ corresponde ao mesmo ponto em T. As arestas do paralelogramo representam curvas fechadas em T.

Naturalmente T é uma variedade diferenciável de dimensão 2 e possui uma métrica riemanniana de curvatura nula induzida pelo plano complexo, por exemplo $\Im m(\tau)^{-1} |dx + \tau dy|^2$. Chamaremos de Toro um espaço com a mesma topologia de T, mais especificamente, qualquer variedade riemanniana homeomorfa a T.

Sejam M e N duas variedades com métricas riemannianas g_M e g_N, respectivamente. Dizemos que (M, g_M) e (N, g_N) são conformemente equivalentes se existe um difeomorfismo $f : M \to N$ e uma função suave $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que o pull-back $f^* g_N$ de g_N por f é $exp(\varphi) g_M$ em M, significando, intuitivamente, que o ângulo entre curvas C_1 e C_2 em M dado por g_M é igual ao ângulo dado por g_N entre as curvas $f(C_1)$ e $f(C_2)$ em N.

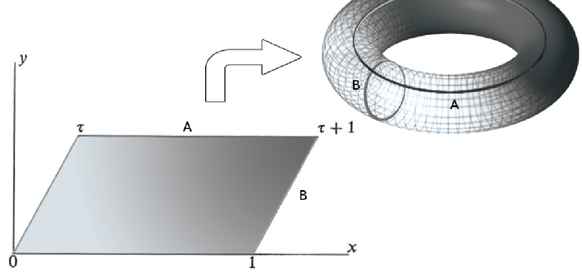

Figura 1.1: Região fundamental para ação do grupo de translações $u \mapsto u+m+\tau n$ no plano. Toro como quociente do plano por essa ação.

Pode ser demonstrado [2] que todo o toro R é conformemente equivalente a outro toro $T_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ definido da maneira acima, como o espaço quociente do plano complexo pela ação do grupo $\{m + \tau n | m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde $\tau \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im m(z) > 0\}$. O conjunto $\mathcal{H}$ é conhecido como espaço de Teichmüller do toro.

Dessa forma, cada classe de equivalência conforme de toro com métricas riemannianas está representada por um elemento do espaço de Teichmüller $\tau \in \mathcal{H}$. Mas essa representação não é única devido ao seguinte teorema cuja demonstração pode ser vista em [2]:

Teorema: Pra cada dois pontos $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$ os dois toros T_τ e $T_{\tau'}$ serão conformemente equivalentes se e somente se existem inteiros a, b, c e d, com $ad - bc = 1$ e

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{1.4}$$

Denomina-se,

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \gamma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

mais conhecido como *grupo modular*, que é um grupo discreto de isometrias do espaço hiperbólico e age sobre $\mathcal{H}$ através de 1.4. Segue que o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as classes de equivalência conforme de toros é identificado como o quociente

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$$

$\mathcal{M}$ é o chamado espaço de módulos do toro (o espaço de todas as classes de equivalência de métricas pela ação de difeomorfismos que preservam a orientação). Devido à relação acima, $\mathcal{M}$ pode ser visualizado através da região fundamental para a ação de $PSL(2, \mathbb{Z})$ em $\mathcal{H}$, fazendo as identificações $z \mapsto z+1$ e $z \mapsto -1/z$ como na figura (1.2). Cada módulo τ nessa região representa uma estrutura riemanniana distinta.

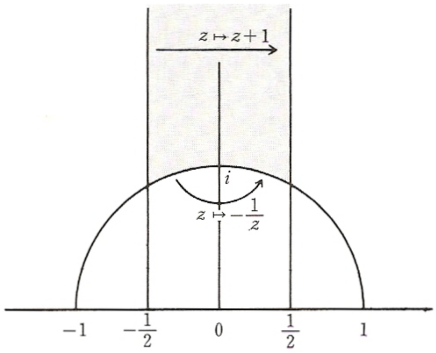

Figura 1.2: Região fundamental para a ação do grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$ em H.

1.4 Objetivos

Chamamos de $\mathcal{N}$ o conjunto mínimo de variáveis (no sentido de não existir redundância) que descrevam a estrutura do espaço-tempo M, cuja dinâmica é consistente com a Relatividade Geral. O candidato usual para tal conjunto é $\mathcal{M}$, o espaço de módulos (apresentado para o toro na seção 1.3) de hipersuperfícies espaciais de M e assim é trabalhado na linha de pesquisa de gravitação quântica. Isso se deve ao fato de que difeomorfismos do espaço-tempo significam meramente mudanças de coordenadas, não representando espaços físicos diferentes. Dessa forma, ao invés de se lidar com o espaço das métricas como sendo o espaço de variáveis físicas, se utiliza o quociente desse espaço pela ação de difeomorfismos. No caso do toro, vimos acima que esse espaço tem dimensão 2, o que auxilia enormemente o desenvolvimento das contas para descrição da dinâmica clássica e a posterior quantização, como será discutido nos próximos capítulos.

Neste trabalho estudamos o caso no qual o espaço-tempo possui topologia $[0,1] \times T$, com T, o toro. Seguindo o trabalho feito no caso geral por Carlip [1], Moncrief [13], entre outros, desenvolvemos a versão hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral e resolvemos equações de vínculos que aparecem naturalmente nesse formalismo para obter uma dinâmica no espaço de módulos. Posteriormente analisaremos uma possibilidade de versão quântica do sistema assim obtido.

Capítulo 2

Dinâmica Clássica

A teoria da Relatividade Geral, brevemente introduzida no capítulo anterior, não está ali descrita como um sistema hamiltoniano. Historicamente, a primeira quantização definida, a quantização canônica, era obtida a partir da formulação hamiltoniana da mecânica clássica. Seguimos, nesse capítulo o procedimento usual [3] [9] [10] de escrever a Relatividade Geral em sua versão hamiltoniana, devido, em sua forma original, a Arnowitt, Deser e Misner, motivo pelo qual foi adotado o nome de formalismo ADM.

2.1 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

A principal característica que distingue a teoria da Relatividade Geral é que ela independe de uma escolha particular de tempo que seja parâmetro para a evolução de quaisquer quantidades. Para realizar sua formulação hamiltoniana precisamos ver as equações de Einstein como um sistema dinâmico.

Uma possibilidade, comumente adotada na literatura, é tomar uma folheação do espaço-tempo $(M, g_{\mu\nu})$ por uma família de hipersuperfícies bidimensionais Σ_t com parâmetro $t : M \to \mathbb{R}$, uma função diferenciável sobre M, tal que a métrica induzida em cada Σ_t é riemanniana, isto é, positivo-definida. A existência de tal folheação no caso geral exige, naturalmente, hipóteses sobre $(M, g_{\mu\nu})$ (a saber *hiperbolicidade global* é condição suficiente), mas aqui usaremos do teorema de Mess, apresentado em 1.2, que já garante a estrutura $\Sigma \times [0, 1]$ para M.

Seja $\vec{n}$ um campo de vetores unitário normal as hipersuperfícies Σ_t e n seu dual, $n(\vec{n}) = -1$. A métrica espacial induzida em cada Σ_t é dada por

$$h = g + n \otimes n$$

Denotando suas componentes por $h_{\mu\nu}$, observamos que h_μ^ν representa a projeção no espaço tangente a Σ_t. Para verificar isso, decompomos um vetor $\vec{v} \in T_pM$, com $p \in \Sigma_t$, em parte tangente e parte normal a Σ_t. Em componentes $v^\nu = v_\perp n^\nu + v_\parallel^\nu$, onde $n_\nu v_\parallel^\nu = 0$ e $v_\perp = -n_\nu v^\nu$. Segue que

$$h_\nu^\mu v^\nu = (g_\nu^\mu + n_\nu n^\mu) v^\nu = v^\mu - v_\perp n^\mu = v_\parallel^\mu$$

Seja $\vec{t}$ o campo de vetores tal que $\nabla t(\vec{t}) = 1$. Podemos interpretar esse campo como representando o fluxo do tempo t através do espaço-tempo. Decompomos $\vec{t}$ em uma parte normal e parte tangente a cada Σ_t, fazendo $\vec{t} = N\vec{n} + \vec{N}$. Ou seja, chamando t^ν e N^μ as componentes de $\vec{t}$ e $\vec{N}$ em algum sistema de coordenadas, definimos:

$$N = -g(\vec{t}, \vec{n}) = n(\vec{t})$$
$$N^\mu = h^\mu_\nu t^\nu$$

N mede a taxa de passagem de tempo próprio em relação a t, para uma trajetória normal às Σ_t. Podemos escrever,

$$\vec{n} = \frac{1}{N}(\vec{t} - \vec{N})$$

e a inversa da métrica fica dada por

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu = h^{\mu\nu} - N^{-2}(t^\mu - N^\mu)(t^\nu - N^\nu)$$

Assim vemos que, dada uma folheação de M, para cada t o conjunto de valores $(h^{\mu\nu}, N, N^\nu)$ determina $g^{\mu\nu}$, o que sugere que escolhamos esse conjunto de parâmetros como variáveis da teoria de campos correspondente. Para obter a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_\mathcal{G} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$ em termos desses valores, primeiramente definimos o tensor curvatura extrínseca das hipersuperfícies Σ_t, pela projeção da derivada covariante aplicada em n:

$$K_{\mu\nu} = h^\sigma_\mu \nabla_\sigma n_\nu$$

Seja ${}^{(2)}\nabla$ a derivada covariante associada à métrica $h_{\mu\nu}$, isto é, a única tal que ${}^{(2)}\nabla_\sigma h_{\mu\nu} = 0$. Da definição de tensor de Riemann temos para a curvatura de Σ_t, dado um vetor arbitrário v^ν no espaço tangente a Σ_t

$${}^{(2)}R^\rho_{\mu\sigma\nu} v^\nu = -{}^{(2)}\nabla^{(2)}_\mu \nabla_\sigma v^\rho +{}^{(2)} \nabla^{(2)}_\sigma \nabla_\mu v^\rho$$

Vale também que ${}^{(2)}\nabla_\alpha v^\beta = h^\beta_\gamma h^\sigma_\alpha \; {}^{(2)}\nabla_\sigma v^\gamma$, ou seja, ${}^{(2)}\nabla$ é a projeção de ∇ ao espaço tangente a Σ_t. Daí que,

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}\nabla^{(2)}_\mu \nabla_\sigma v^\rho &= h^\rho_\eta h^\delta_\sigma h^\gamma_\mu \nabla_\gamma (h^\eta_\alpha h^\beta_\delta \nabla_\beta v^\alpha) \\
&= h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma h^\gamma_\mu \nabla_\gamma \nabla_\beta v^\alpha + h^{\rho\delta} n_\alpha K_{\mu\delta} h^\beta_\sigma \nabla_\beta v^\alpha + h^\delta_\sigma K_{\mu\delta} h^\rho_\alpha n^\beta \nabla_\beta v^\alpha
\end{aligned}$$

O último termo é antissimétrico em μ e σ pois envolve $h^\delta_\sigma K_{\mu\delta} = K_{\mu\sigma}$, logo será eliminado no cálculo de ${}^{(2)}R^\rho_{\mu\sigma\nu}$. Observemos ainda que

$$n_\alpha h^\beta_\sigma \nabla_\beta v^\alpha = h^\beta_\sigma \nabla_\beta (n_\alpha v^\alpha) - h^\beta_\sigma v^\alpha \nabla_\beta n_\alpha = -K_{\sigma\alpha} v^\alpha$$

pois $n_\alpha v^\alpha = 0$. Logo teremos:

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}R^\rho_{\mu\sigma\nu} &= -h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma h^\gamma_\mu (\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) v^\alpha + (K^\rho_\mu K_{\sigma\alpha} - K^\rho_\sigma K_{\mu\alpha}) v^\alpha \\
&= (h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma h^\gamma_\mu h^\delta_\nu R^\alpha_{\gamma\beta\delta} + K^\rho_\mu K_{\sigma\nu} - K^\rho_\sigma K_{\mu\nu}) v^\nu
\end{aligned}$$

De onde sai, denotando $K = K^\nu_\nu$ que

$${}^{(2)}R_{\mu\nu} = h^\beta_\alpha h^\gamma_\mu h^\delta_\nu R^\alpha_{\gamma\beta\delta} + K^\rho_\mu K_{\rho\nu} - K K_{\mu\nu}$$

ou, reescrevendo,

$$^{(2)}R = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu)^{(2)}R_{\mu\nu} = h^\beta_\alpha h^{\delta\gamma} R^\alpha_{\gamma\beta\delta} + K^{\rho\nu}K_{\rho\nu} - K^2$$

onde o primeiro termo no lado direito da equação é dado por

$$(g^{\delta\gamma} + n^\delta n^\gamma)(g_{\alpha\beta} + n_\alpha n^\beta) R^\alpha_{\gamma\beta\delta} = R + 2R_{\gamma\delta}n^\gamma n^\delta$$

Mas o segundo termo do lado direito podemos expressar como

$$\begin{aligned} n^\gamma R^\mu_{\gamma\mu\delta} n^\delta &= -n^\gamma(\nabla_\gamma\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\gamma)n^\mu \\ &= \nabla_\mu(n^\gamma\nabla_\gamma n^\mu) - \nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\mu n^\mu) - \nabla_\mu n^\gamma \nabla_\gamma n^\mu + (\nabla_\gamma n^\gamma)^2 \\ &= \nabla_\mu(n^\gamma\nabla_\gamma n^\mu) - \nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\mu n^\mu) + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \end{aligned}$$

que nos dá, substituindo na equação anterior, a expressão para a curvatura

$$R =^{(2)} R - K^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + \nabla_\mu(n^\gamma\nabla_\gamma n^\mu) - \nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\mu n^\mu)$$

Agora podemos expressar a densidade Lagrangiana em termos de $(h_{\mu\nu}, N, N^\rho)$ e suas derivadas, observando que $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ e que as curvaturas extrínsecas são dadas por

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} -^{(2)} \nabla_\mu N_\nu -^{(2)} \nabla_\nu N_\mu\right)$$

Daí que

$$\mathcal{L}_\mathcal{G} = N\sqrt{h}\left(^{(2)}R - K^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + \nabla_\mu(n^\gamma\nabla_\gamma n^\mu) - \nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\mu n^\mu) - 2\Lambda\right)$$

A passagem de uma teoria de campos lagrangiana para hamiltoniana, dada uma folheação de um espaço-tempo M ocorre naturalmente da seguinte forma geral.

Um funcional $H[q,\pi]$ definido no fibrado cotangente ao espaço dos campos tensoriais ao qual q pertence, será chamado Hamiltoniano, caso a equação de campo 1.3 seja equivalente as equações

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\delta H}{\delta \pi} \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta q} \end{aligned} \tag{2.1}$$

que são as equações de Hamilton. Uma maneira de obter tal funcional é definindo

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Caso seja possível resolver a equação acima para $\dot{q}$ em função de q e π, definimos

$$\mathcal{H}(q,\pi) = \pi\dot{q} - \mathcal{L}$$

e fazemos $H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}$. Para ver a equivalência entre as equações de Hamilton e 1.3, definamos

$$J = \int H dt = \int dt \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}$$

De onde temos

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \int dt \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\delta H}{\delta q} \delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right]$$

Mas também vale que $J = -S + \int dt \int_{\Sigma_t} \pi \dot{q}$, logo

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \int dt \int_{\Sigma_t} \left[-\dot{\pi} \delta q + \dot{q} \delta \pi \right] - \frac{dS}{d\lambda}$$

Fazendo $dS/d\lambda = 0$, obtemos as equações desejadas.

No caso da densidade Lagrangiana da Relatividade Geral, definimos

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{G}}}{\partial \dot{h}_{\mu\nu}} = \sqrt{h}(K^{\mu\nu} - K h^{\mu\nu}) \tag{2.2}$$

que são os momenta canonicamente conjugados aos $h_{\mu\nu}$. Como $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ não depende das derivadas de N e N_μ, seus momenta conjugados são iguais a zero. Invertendo 2.2 obtemos:

$$K^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{h}}(\pi^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\pi) \tag{2.3}$$

que, substituindo na expressão para $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ nos dá

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{G}} &= \pi^{\mu\nu} \dot{h_{\mu\nu}} - \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \\
&= -h^{1/2} N^{(2)} R + N h^{-1/2} \left[\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\pi^2 \right] + 2\pi^{\mu\nu}\ {}^{(2)}\nabla_\mu N_\nu \\
&= h^{1/2} \left\{ N \left[-{}^{(2)}R + h^{-1}\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{-1}\pi^2 \right] - 2N_\mu \left[{}^{(2)}\nabla_\nu (h^{-1/2}\pi^{\mu\nu}) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2{}^{(2)}\nabla_\mu (h^{-1/2} N_\nu \pi^{\mu\nu}) \right\}
\end{aligned}$$

Utilizando essa densidade, a ação fica, a menos de termos de bordo

$$\begin{aligned}
S &= \int dt \int_\Sigma \left(\pi^{\mu\nu} \dot{h_{\mu\nu}} - h^{1/2} \left\{ N \left[-{}^{(2)}R + h^{-1}\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{-1}\pi^2 \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2N_\mu \left[{}^{(2)}\nabla_\nu (h^{-1/2}\pi^{\mu\nu}) \right] \right\} \right) dx^1 \wedge dx^2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

As derivadas de S com respeito a N e N_μ, levam, respectivamente, às equações:

$$-{}^{(2)}R + h^{-1}\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 = 0 \tag{2.5}$$

$${}^{(2)}\nabla_\nu (h^{-1/2}\pi^{\mu\nu}) = 0 \tag{2.6}$$

Como analisado em [3], o primeiro vínculo está relacionado com o fato de que folheamos M. O segundo tem a ver com a condição de que $h_{\mu\nu}$ seja invariante por difeomorfismo, o que sugere que se tome como espaço de configurações o espaço das classes de equivalência por difeomorfismo da métrica induzida $h_{\mu\nu}$, que é o que faremos na próxima seção.

2.2 Espaço de Fases Reduzido

Seguimos aqui o caminho de Moncrief [13], para a passagem ao espaço de fases reduzido. Utilizaremos também, como discutido na seção 1.3, o fato de que toda a métrica h_{ij} no toro é conforme a uma métrica de curvatura nula $h_{ij} = e^{2\lambda}\hat{h}_{ij}$, que pertence a uma classe de equivalência $\tilde{h}_{ij}(\tau_\alpha)$ no espaço de módulos. Aqui, como em 1.3, $\tau_\alpha,\ \alpha = 1, 2$ são coordenadas que parametrizam o espaço de módulos (através do módulo $\tau = \tau_1 + i\tau_2$).

Também é possível decompor os momenta conjugado [8] na forma

$$\pi^{ij} = e^{-2\lambda}\left[p^{ij} + \frac{1}{2}\tilde{h}^{ij}\pi + \sqrt{\tilde{h}}\tilde{h}^{ik}\tilde{h}^{jk}(\tilde{\nabla}_k Y_l + \tilde{\nabla}_l Y_k - \tilde{h}_{kl}\tilde{h}^{mn}\tilde{\nabla}_m Y_n)\right] \quad (2.7)$$

onde Y^i é um campo de vetores, não unicamente determinado pela decomposição, e p^{ij} tem traço nulo com respeito a $\tilde{h}_i j$, isto é

$$\tilde{h}_{ij}p^{ij} = 0$$

e também vale $\tilde{\nabla}_i p^{ij} = 0$.

Com essa decomposição, os vínculos 2.5 e 2.6 ficam, respectivamente:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & -\frac{1}{2\sqrt{\tilde{h}}}e^{-2\lambda}\pi^2 + 2\sqrt{\tilde{h}}\tilde{\Delta}\lambda + 2\sqrt{\tilde{h}}\Lambda e^{2\lambda} \\ & +\frac{1}{\sqrt{\tilde{h}}}e^{-2\lambda}\tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{jl}(p^{ij} + \sqrt{\tilde{h}}\tilde{h}^{im}\tilde{h}^{jn}(\tilde{\nabla}_m Y_n + \tilde{\nabla}_n Y_m - \tilde{h}_{mn}\tilde{h}^{rs}\tilde{\nabla}_r Y_s)) \times \\ & \times(p^{kl} + \sqrt{\tilde{h}}\tilde{h}^{kp}\tilde{h}^{lq}(\tilde{\nabla}_p Y_q + \tilde{\nabla}_q Y_p - \tilde{h}_{pq}\tilde{h}^{tu}\tilde{\nabla}_t Y_u)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\sqrt{\tilde{h}}\tilde{h}^{jl}\tilde{\nabla}_j\tilde{\nabla}_l Y_i + \frac{1}{2}e^{2\lambda}\tilde{\nabla}_i(e^{-2\lambda}\pi) = 0 \quad (2.9)$$

Andersson, Moncrief e Tromba mostraram [12] que, para 2 + 1 dimensões, existe uma função tempo $T : M \to \mathbb{R}$, como descrito na seção anterior, tal que cada superfície espacial possui curvatura extrínseca constante $K = h^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = -T$. Substituindo em 2.3 obtemos $T = \tilde{h}^{-1/2}e^{-2\lambda}\pi$. que implica, junto de 2.9 e 2.7 que

$$\pi^{ij} = e^{-2\lambda}\left[p^{ij} + \frac{1}{2}\tilde{h}^{ij}\pi\right]$$

ou seja, os momenta ficam determinados pela sua parte com traço nulo p^{ij}. Definindo

$$p^\alpha(T) = \int_{\Sigma_T} dx^1 \wedge dx^2 p^{ij}\frac{\partial\tilde{h}_{ij}}{\partial\tau_\alpha}$$

podemos reescrever a ação 2.4 na forma

$$S = \int dT \left\{ p^{\alpha} \frac{d\tau_{\alpha}}{dT} - H_r(\tau, p, T) \right\}$$

tornando-se uma ação no espaço de fases reduzido - o espaço cotangente ao espaço de módulos. Além disso, a equação 2.8 se torna uma equação para o fator λ:

$$\tilde{\nabla}^2 \lambda - \frac{1}{4}(T^2 - 4\Lambda)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}\left[\tilde{h}^{-1}\tilde{h}_{ij}(\tau_{\alpha})\tilde{h}_{kl}(\tau_{\alpha})p^{ik}(p^{\alpha})p^{jl}(p^{\alpha})\right] e^{-2\lambda} \tag{2.10}$$

Que deve ser resolvida para que se possa determinar o hamiltoniano no espaço de fases reduzido

$$H_r(\tau, p, T) = \int_{\Sigma_T} dx^1 \wedge dx^2 \sqrt{\tilde{h}} e^{2\lambda(\tau, p, T)} \tag{2.11}$$

2.3 Evolução temporal

Como em 1.3, tomaremos no toro a métrica plana $\tilde{h}_{ij}$ induzida pelo plano complexo $\tau_2 |dx + \tau dy|^2$, de forma que o paralelogramo na figura 1.1 tenha área 1. Ela pode ser representada matricialmente por

$$\tau_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix}$$

E uma possível parametrização de p^{ij} tal que estejam satisfeitas a condição $\tilde{h}_{ij}p^{ij} = 0$ e também a definição de p^{α} seria

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\tau_1^2 - \tau_2^2)p^2 - 2\tau_1\tau_2 p^1 & \tau_2 p^1 - \tau_1 p^2 \\ \tau_2 p^1 - \tau_1 p^2 & p^2 \end{pmatrix}$$

Como apresentado por Moncrief em [13], toda a métrica no toro é globalmente conforme a uma métrica de curvatura constante, o que implica que a equação 2.10 se reduz a

$$e^{4\lambda} = \frac{2}{T^2 - 4\Lambda} \tilde{h}_{ij}\tilde{h}_{kl} p^{ik} p^{jl}$$

que equivale, utilizando os parâmetros τ_{α} e p^{α}, a

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \tau_2 \left[p_1^2 + p_2^2\right]^{1/2}$$

e, portanto

$$H_r = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \tau_2 \left[p_1^2 + p_2^2\right]^{1/2} \tag{2.12}$$

Para resolver a dinâmica agora, fazemos ainda a mudança de parâmetros

$$T = e^t + \Lambda e^{-t}, \quad \frac{dt}{dT} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}}$$

que implica, pelas equações de Hamilton 2.1, em

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_1}{dt} &= \left(\frac{dt}{dT}\right)^{-1}\frac{d\tau_1}{dT} = \left(\frac{dt}{dT}\right)^{-1}\frac{dH_r}{dp^1} = \tau_2\left[p_1^2+p_2^2\right]^{-1/2}p^1 \\
\frac{d\tau_2}{dt} &= \left(\frac{dt}{dT}\right)^{-1}\frac{dH_r}{dp^2} = \tau_2\left[p_1^2+p_2^2\right]^{-1/2}p^2 \\
\frac{dp_1}{dt} &= \left(\frac{dt}{dT}\right)^{-1}\frac{dH_r}{d\tau^1} = 0 \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\left[p_1^2+p_2^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Com a solução geral, facilmente verificável:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \beta + \alpha\tanh(t-t_0) \\
\tau_2 &= \alpha\mathrm{sech}(t-t_0) \\
p^1 &= \text{constante} \\
p^2 &= -p^1\sinh(t-t_0)
\end{aligned}$$

onde t_0, α, β, p^1 são constantes de integração. Verifica-se também que as trajetórias satisfazem a equação de círculo no plano complexo:

$$(\tau_1-\beta)^2+\tau_2^2=\alpha^2$$

que são geodésicas no plano hiperbólico (o conjunto $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C}|\Im m(z)>0\}$ munido da métrica $ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$) [6]. Fig 2.1.

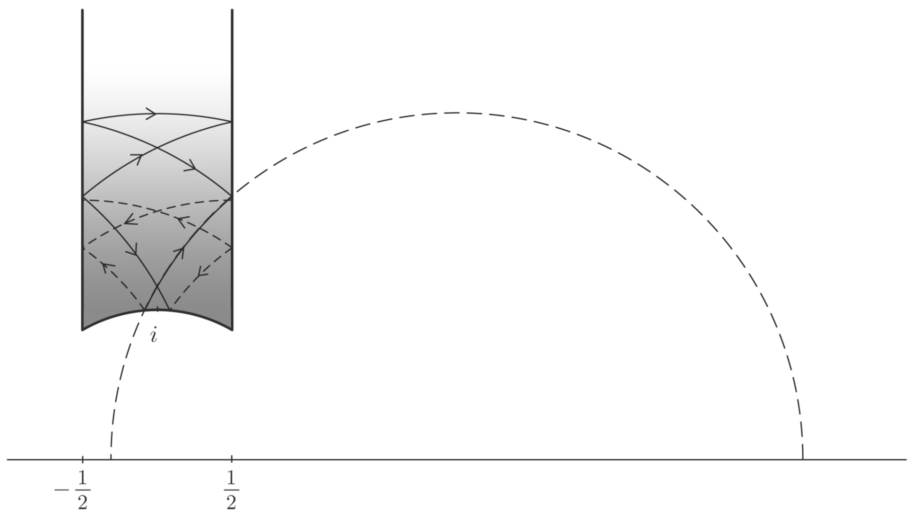

Figura 2.1: Geodésica do plano hiperbólico e sua representação em uma região fundamental para ação do grupo modular.

Capítulo 3

Dinâmica Quântica

Como discutido nos capítulos anteriores, a Relatividade Geral trata-se de uma teoria de campos, pois a sua variável natural é a métrica do espaço tempo, ou alternativamente a métrica das superfícies espaciais de uma folheação, que é um campo tensorial. Desta forma, no caso geral, é difícil que se consiga desvincular possíveis modelos de gravitação quântica de uma teoria quântica de campos que os descreva.

No modelo apresentado no capítulo anterior, para a gravitação em $2 + 1$ dimensões, considerando o modelo particular onde as superfícies espaciais são Tori e o espaço-tempo tem topologia $[0, 1] \times T$, reduzimos a dinâmica a um espaço bidimensional, o espaço de módulos. Dessa forma surge a possibilidade natural de se tentar descrever a dinâmica quântica a partir das variáveis do espaço de fases reduzido, o que, se possível, forneceria uma alternativa para teorias de campo quânticos, conhecidas por singularidades e problemas em sua construção (incluindo em particular o caso da gravitação quântica)

Neste capítulo será feita uma breve retomada da formulação canônica da mecânica quântica, como em [14], e posterior descrição da dinâmica a partir do hamiltoniano H_r do espaço de fases reduzido 2.12.

3.1 Sistemas quânticos

Um sistema, por exemplo uma partícula se movendo no $\mathbb{R}^n$, com dinâmica a ser descrita pela mecânica quântica consistirá de um espaço vetorial complexo de Hilbert (usualmente o espaço das funções módulo quadrado integráveis $L^2(\mathbb{R}^n)$) e de operadores auto-adjuntos que representam os observáveis do sistema. O estado do sistema poderá ser expresso como combinação dos autovetores de dado observável.

Em particular a dinâmica será determinada por um operador auto-adjunto que represente a energia do sistema, o operador hamiltoniano $\hat{H}$, via equação de Schrödinger:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Dada uma teoria clássica, descrita em termos de um hamiltoniano $H(q^i, p_j)$ (função) o problema de se achar um operador $\hat{H}$ tal que o limite clássico da teoria quântica obtida seja essa teoria clássica, é chamado o problema da quantização. No geral, é possível que não exista uma solução, ou que não seja única. A saída usual, amplamente sugerida pelo sucesso de teorias quânticas assim obtidas para diversos sistemas, é definir o operador $\hat{H}(\hat{q}^i, \hat{p}_j)$, com mesma dependência em $\hat{q}^i$ e $\hat{p}_j$ que $H(q^i, p_j)$, sendo os operadores $\hat{q}^i$ multiplicativos e $\hat{p}_j$ diferenciais, isto é

$$\hat{q}^i \psi = q^i \psi$$
$$\hat{p}_j \psi = -i \frac{\partial \psi}{\partial q^i}$$

3.2 O Laplaciano de Maass

Seguindo os resultados obtidos para a dinâmica no espaço de módulos no capítulo 2 e procedendo como descrito na seção anterior, definimos os operadores sobre $L^2(\mathcal{H})$,

$$\hat{p}^\alpha = -i \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}$$

e a partir do hamiltoniano 2.12, escrevemos a equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi(\tau, t)}{\partial t} = \Delta^{1/2} \psi(\tau, t) = \tau_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right)^{1/2} \psi \tag{3.1}$$

Onde Δ é o Laplaciano associado à métrica hiperbólica em $\mathcal{H}$, conhecido como Laplaciano de Maass de peso zero. É sabido [1] que Δ é auto-adjunto, com autovalores positivos. O operador Δ e suas autofunções, chamadas de formas de Maass, são invariantes pela ação do grupo modular, descrito na seção 1.3 o que é consistente com sua aplicação no espaço de módulos.

Um estado $\psi(\tau)$ deve ser invariante pela ação do grupo modular para estar bem definido no espaço de módulos, isto é $\psi(\gamma(\tau)) = \psi(\tau),\ \forall \gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$. Caso satisfaça essa condição poderá ser expandida como

$$\psi(\tau) = \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu(\tau)$$

onde $\varphi_\nu(\tau)$ são as formas de Maass,

$$\Delta \varphi_\nu(\tau) = \lambda_\nu \varphi_\nu(\tau)$$

Como os autovalores são positivos, podemos definir a ação de $\Delta^{1/2}$ em ψ através da expressão

$$\Delta^{1/2} \psi(\tau) = \sum_\nu c_\nu \lambda_\nu^{1/2} \varphi_\nu(\tau) \tag{3.2}$$

de forma que a solução de 3.1 fica dada por

$$\psi(\tau, t) = \sum_\nu c_\nu e^{-i \lambda_\nu^{1/2} t} \varphi_\nu(\tau) \tag{3.3}$$

Uma solução bem definida no espaço de módulos, logo podendo descrever a dinâmica quântica do módulo τ em função do tempo.

Capítulo 4

Análise e perspectivas

O método apresentado nas últimas páginas permitiu a determinação de uma dinâmica no espaço de módulos coerente com a descrição quântica que desejávamos e em particular representa certa aplicabilidade da postura conhecida como "constrain then quantize", que significa resolver as equações de vínculo do formalismo hamiltoniano e depois obter a mecânica quântica a partir da dinâmica resultante. Essa metodologia é apenas uma das diversas empregadas na linha de pesquisa em gravitação quântica, se opondo ao método de quantização de Dirac, por exemplo, "quantize, then constrain ", que se baseia em representar os momenta conjugado π^{ij} como operadores diferenciais sobre algum espaço de Hilbert e depois impor os vínculos a partir de regras de comutação [10].

O procedimento demonstra também a possibilidade de se trabalhar com os graus de liberdade globais da relatividade na quantização. Em 2 + 1 dimensões, não aparecem ondas gravitacionais, logo graus de liberdade locais referentes à métrica não estão presentes [1]. Essa característica pode ser vista como argumentação para se opôr a possível hipótese de que a gravitação quântica deva se basear estritamente em partículas referentes aos quanta de ondas gravitacionais.

Apesar disso, devido às imposições e escolhas feitas, o máximo que se pode dizer sobre o caminho seguido é que se trata de meramente uma face de alguma potencial teoria quântica consistente ainda a aparecer. A começar na definição da ação do operador $\Delta^{1/2}$ na qual fizemos a escolha da raíz positiva dos autovalores, sendo que não tem algum motivo pra se escolher, na teoria quântica, ou um ou outro sinal.

O problema maior, entretanto, tem a ver com a escolha da folheação por curvatura extrínseca constante, que foi o caminho tomado para chegar no espaço de parâmetros bidimensional. Primeiramente, essa escolha se opõe ao principal ganho conceitual introduzido pela Relatividade, que seria a independência que a teoria possui da escolha de um referencial particular, de um tempo específico sobre o espaço-tempo. Além disso, apesar das descrições clássicas a partir de diferentes escolhas de folheação serem equivalentes, tal equivalência não deve se manter na teoria quântica obtida. Por último, o hamiltoniano que descreve a dinâmica clássica depende da curvatura extrínseca, se tornando dependente do tempo nessa descrição e sugerindo o acréscimo de mais uma variável canônica para o desenvolvimento da dinâmica.

Uma alternativa, ainda sendo estudada pelo autor, se baseia em manter a descrição da folheação sem uma escolha particular de função tempo e deixar a dinâmica determinar o módulo e o fator conforme juntamente. Isso parece ser possível de acordo com a formulação desenvolvida por Fischer e Marsden [9], [7] na qual se trabalha com as equações de Lagrange referentes as equações de Hamilton obtidas pelo formalismo ADM. Nessa versão permanecem três parâmetros para a métrica, logo seis graus de liberdade. A projeção do movimento em duas variáveis (no espaço de módulos) deve reproduzir as geodésicas obtidas neste trabalho. Essa mesma metodologia pode ser estendida, em princípio, para o caso de superfícies com genos maior que um, como o bitoro. A análise desses casos faz parte das perspectivas de trabalho futuro.

Referências Bibliográficas

[1] Carlip, S.; *Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] Imayoshi, Y. e Taniguchi, M.; *An Introduction to Teichmüller Spaces.* Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

[3] Wald, R. M.; *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[4] Henneaux, M. e Teitelboim, C.; *Quantization of Gauge Systems.* Princeton University Press, Princeton, 1992.

[5] Carmo, M. P.; *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[6] Katok, S.; *Fuchsian Groups.* The University of Chicago Press, Chicago, 1992.

[7] Abraham, R. e Marsden, J. E.; *Foundations of Mechanics.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[8] Tromba, A. J.; *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[9] Fischer, A. E. e Marsden, J. E.; *The Einstein Equations of Evolution - A Geometric Approach.* J. Math. Phys., Vol. 13, No. 4., 1972.

[10] Carlip, S.; *Quantum Gravity: a Progress Report.* arXiv:gr-qc/0108040v1, 2001.

[11] Rovelli, C.; *Notes for a brief history of quantum gravity.* arXiv:gr-qc/0006061, 2008.

[12] Andersson, L., Moncrief, V. e Tromba, A. J.; *On the Global evolution problem in 2+1 gravity.* J. Geom. Pys. 23, 191-205, 1997.

[13] Moncrief, V.; *Reduction of the Einstein equations in 2 + 1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller Space.* J. Math. Phys. 30, 2907-2914, 1989.

[14] Rovelli, C.; *Quantum Gravity.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.