

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

APLICAÇÃO DE SIMILARIDADE INCOMPLETA NA ANÁLISE DE UM PROBLEMA  
DE IMPACTO

por

Mateus Calixto Redin

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, maio de 2021

## DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Redin, Mateus  
Aplicação de Similaridade Incompleta na Análise de  
Um Problema de Impacto / Mateus Redin. -- 2021.  
15 f.  
Orientador: Ignacio Iturrioz.

Coorientador: Alessandro Sordi.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2021.

1. Análise dimensional. 2. Similaridade incompleta.  
3. Impacto. 4. Dinâmica explícita. 5. Crashworthiness.  
I. Iturrioz, Ignacio, orient. II. Sordi, Alessandro,  
coorient. III. Título.

Mateus Calixto Redin

APLICAÇÃO DE SIMILARIDADE INCOMPLETA NA ANÁLISE DE UM PROBLEMA  
DE IMPACTO

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ignacio Iturrioz

Coorientador: Eng. Alessandro Sordi (Marcopolo S.A.)

Comissão de Avaliação:

Prof. Ignacio Iturrioz

Prof. Felipe Tempel Stumpf

Prof. Herbert Martins Gomes

Porto Alegre, maio de 2021

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os amigos, colegas, e familiares que fizeram parte dessa jornada e me apoiaram através de sua companhia, conversas, risadas e até suas broncas. Sem o apoio de vocês, a conclusão dessa graduação não teria sido possível.

Agradeço ao Departamento de Engenharia Mecânica e todos os seus colaboradores pelo privilégio que me foi dado de estudar e aprender ao longo dos últimos anos aqui. Em especial, apesar de ser difícil de resumir apenas com palavras, expresseo meu profundo agradecimento aos professores pela sua dedicação, profissionalismo, paciência, e comprometimento em transmitir o conhecimento.

*“It should be born in mind that our attempt to formalize the very informal procedure of finding ultimate similarity rules should be considered, naturally, as a general guide only. Here is another example of an attempt to formalize a very informal procedure. [...]*

- 1. Do not hike alone.*
- 2. Keep children close to you.*
- 3. Do not approach the lion.*
- 4. Do not run from the lion.*
- 5. Do all you can to appear larger, and*
- 6. Fight back if attacked.”*

*Grigory Isaakovich Barenblatt*

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2021

APLICAÇÃO DE SIMILARIDADE INCOMPLETA NA ANÁLISE DE UM  
PROBLEMA DE IMPACTO

**Redin, Mateus**

mateusredin@hotmail.com

**Resumo.** *A avaliação da segurança ao impacto dos veículos automotores demanda onerosos ensaios experimentais, como crash-tests e métodos avançados de análise estrutural. O projeto de estruturas de ônibus no Brasil, por exemplo, não conta com cálculos e normas regulamentadoras adequadas, e a segurança é difícil de ser avaliada. Portanto, propõe-se uma metodologia para a realização de ensaios de impacto em modelos de escala reduzida que possuam similaridade incompleta, de forma a facilitar o acesso à dados experimentais acerca do crashworthiness dos veículos. A metodologia é aplicada ao problema simplificado de um drop test sobre uma viga de aço tubular bi-engastada. O ensaio foi simulado numericamente utilizando o software Abaqus, a partir do qual foi possível reproduzir resultados de protótipos e modelos. Através de uma metodologia apresentada por Barenblatt (2003), dois modelos foram usados para corrigir a similaridade incompleta caracterizada pelo parâmetro referente à espessura da viga. Essa abordagem demonstrou boa correlação com os resultados numéricos no intervalo do grupo adimensional da espessura em que os modelos foram realizados, e passou a divergir dos resultados numéricos conforme se afastava desse intervalo. Uma segunda abordagem, com um segundo parâmetro não similar, foi utilizada para comparação com dados experimentais, os quais demonstraram boa correlação.*

**Palavras-chave:** *Similaridade, similaridade incompleta, impacto, dinâmica de corpos deformáveis com integração explícita no tempo*

**Application of incomplete similarity in analysis of an impact problem**

**Abstract.** *The assessment of safety to the impact of motor vehicles requires costly experimental tests, such as crash-tests and advanced methods of structural analysis. The design of bus structures in Brazil, for example, does not have adequate calculations methods and regulatory standards, and safety is difficult to assess. Therefore, a methodology is proposed for conducting impact tests on small scale models that have incomplete similarity, in order to facilitate access to experimental data about vehicle crashworthiness. The methodology is applied to the simplified problem of a drop test on a fully clamped tubular steel beam. The test was numerically simulated using the Abaqus software, from which it was possible to reproduce results from prototypes and models. Through a methodology presented by Barenblatt (2003), two models were used to correct the incomplete similarity characterized by the parameter regarding the beam thickness. This approach demonstrated a good correlation with the numerical results in the range of the dimensionless group in which the models were made, and started to diverge from the numerical results as it moved away from that range. A second approach, with a second non-similar parameter, was used for comparison with experimental data, which demonstrated a good correlation.*

**Keywords:** *Similarity, incomplete similarity, impact, deformable body explicit dynamics*

## Símbolos

$A$	Constante do modelo de Johnson-Cook	[MPa]
$a$	Grandeza física estudada	[-]
$a_k$	Parâmetros governantes de $a$ com dimensões independentes	[-]
$B$	Constante do modelo de Johnson-Cook	[MPa]
$b_m$	Parâmetros governantes de $a$ com dimensões dependentes	[-]
$b$	Largura da seção transversal da viga	[mm]
$C$	Constante do modelo de Johnson-Cook	[adimensional]
$[C]$	Matriz de amortecimento	[-]
$D$	Constante do modelo de Cowper-Symonds	[s <sup>-1</sup> ]
$f$	Função que denota a relação funcional entre $a$ e $a_k$ , $b_m$	[-]
$g$	Aceleração da gravidade	[mm/s <sup>2</sup> ]
$H$	Altura de queda do bloco impactador	[mm]
$h$	Altura da seção transversal da viga	[mm]
$[K]$	Matriz de rigidez	[-]
$L$	Comprimento da viga	[mm]
$M$	Massa do bloco impactador	[ton]
$[M]$	Matriz de massa	[-]
$m$	Constante do modelo de Johnson-Cook	[adimensional]
$n$	Constante do modelo de Johnson-Cook	[adimensional]
$p$	Constante do modelo de Cowper-Symonds	[adimensional]
$p_i, q_i, r_i$	Expoentes dos parâmetros $a_k$ para o $i$ -ésimo grupo pi	[adimensional]
$T, T_0, T_F$	Temperaturas do modelo de Johnson-Cook	[°C]
$t$	Espessura da viga	[mm]
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos	[-]
$\{\dot{U}\}$	Vetor de velocidades	[-]
$\{\ddot{U}\}$	Vetor de acelerações	[-]
$v_0$	Velocidade inicial de impacto	[mm/s]

## Símbolos gregos

$\alpha_i$	Expoentes dos grupos pi fora da relação funcional	[adimensional]
$\beta_i$ e $\delta_i$	Expoentes dos grupos pi dentro da relação funcional	[adimensional]
$\beta$	Fator de escala dimensões geométricas	[adimensional]
$\beta_\delta$	Fator de escala para $\delta$	[adimensional]
$\beta_t$	Fator de escala para o tempo	[adimensional]
$\delta$	Deformação permanente da viga	[mm]
$\Delta L$	Deslocamento arbitrário	[mm]
$\Delta T$	Intervalo de tempo arbitrário	[s]
$\Delta t$	Incremento de tempo	[s]
$\epsilon^{pl}$	Deformação plástica equivalente	[adimensional]
$\dot{\epsilon}^{pl}$	Taxa de deformação plástica	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\epsilon}_0^{pl}$	Taxa de deformação plástica de referência	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
$\Phi$	Função que denota a relação funcional entre grupos pi	[adimensional]

$\Pi$	Grupo pi referente a $a$	[adimensional]
$\Pi_i$	Grupo pi referente a $b_i$	[adimensional]
$\sigma_0$	Tensão de escoamento estática	[MPa]
$\sigma_d$	Tensão de escoamento dinâmica	[MPa]

#### Abreviaturas e acrônimos

MLT	Massa ( <i>mass</i> ), comprimento ( <i>length</i> ), e tempo ( <i>time</i> )
PRF	Polícia Rodoviária Federal

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Considerações iniciais e motivação do trabalho .....	1
1.2. Objetivo .....	2
1.3. Revisão bibliográfica .....	3
2. FUNDAMENTAÇÃO.....	3
2.1. Análise dimensional e teorema dos grupos $\pi$ .....	3
2.2. Similaridade .....	4
2.3. Sensibilidade à taxa de deformação .....	5
2.4. Dinâmica de corpos deformáveis com o método dos elementos finitos .....	6
3. APLICAÇÃO .....	7
3.1. Descrição do problema do <i>drop test</i> sobre a viga bi-engastada.....	7
3.2. Grupos $\pi$ e similaridade incompleta .....	8
3.3. Modelo Numérico .....	10
3.4. Resultados.....	11
3.4.1. Correlação dos resultados dos métodos de similaridade com simulações numéricas.....	11
3.4.2. Comparação com resultados experimentais .....	14
4. CONCLUSÕES .....	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	16
APÊNDICE A – Cálculo dos expoentes dos grupos $\pi$ .....	17
APÊNDICE B – Convergência de malha e validação do modelo numérico.....	18
APÊNDICE C – Parâmetros dos modelos e protótipos da viga bi-engastada utilizados .....	19
ANEXO A – Dados experimentais utilizados para comparação.....	20

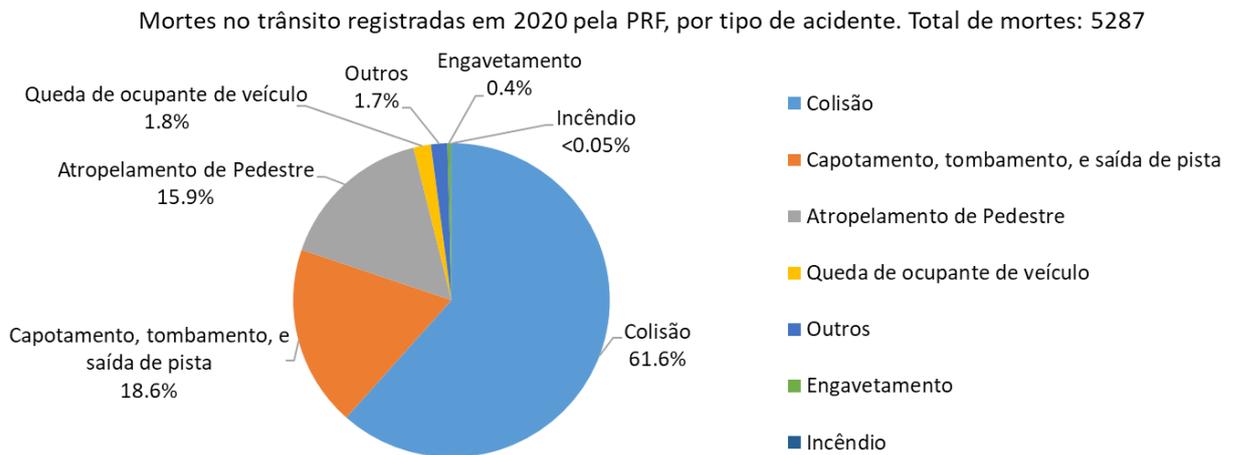
## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. Considerações iniciais e motivação do trabalho

A teoria da análise dimensional é uma ferramenta que nos permite ter uma compreensão melhor de um fenômeno físico antes de realizar uma análise numérica ou experimental sobre o problema (Fox et al, 2006). Ela também permite, a partir do princípio da similaridade, estimar as grandezas físicas que ocorrem em um protótipo (que é como chamamos o objeto de estudo em escala real) a partir de um experimento realizado em um modelo de escala reduzida (ou aumentada). Essa teoria vem sendo utilizada há muitos anos no projeto de aeronaves, embarcações, e edifícios, geralmente para analisar os efeitos físicos associados com a mecânica dos fluídos. No presente trabalho, pretende-se analisar uma abordagem de similaridade incompleta aplicada ao comportamento de uma viga tubular de aço sob um carregamento de impacto, com o propósito de avaliar sua eficácia e correlação com resultados numéricos e experimentais. Tal análise é motivada por contribuir com os estudos para aprimoramento do *crashworthiness* de veículos automotores terrestres de transporte de passageiros. De acordo com Sordi (2020), o *crashworthiness* de um veículo é definido como a sua capacidade de absorver energia proveniente de um impacto e, ao mesmo tempo, manter a integridade no espaço dos ocupantes. Ou seja, quando o veículo é submetido a um impacto, o *crashworthiness* é diretamente responsável pela segurança dos passageiros.

A partir dos dados de acidentes de trânsito registrados e disponibilizados pela PRF – Polícia Rodoviária Federal (2020) pode-se obter informações acerca das fatalidades que acontecem em acidentes veiculares. Na Figura 1, mostra-se a distribuição das fatalidades ocorridas em acidentes de trânsito no Brasil em 2020 de acordo com seu tipo.

Figura 1 – Mortes no trânsito registradas pela PRF em 2020, agrupadas conforme o tipo de acidente.

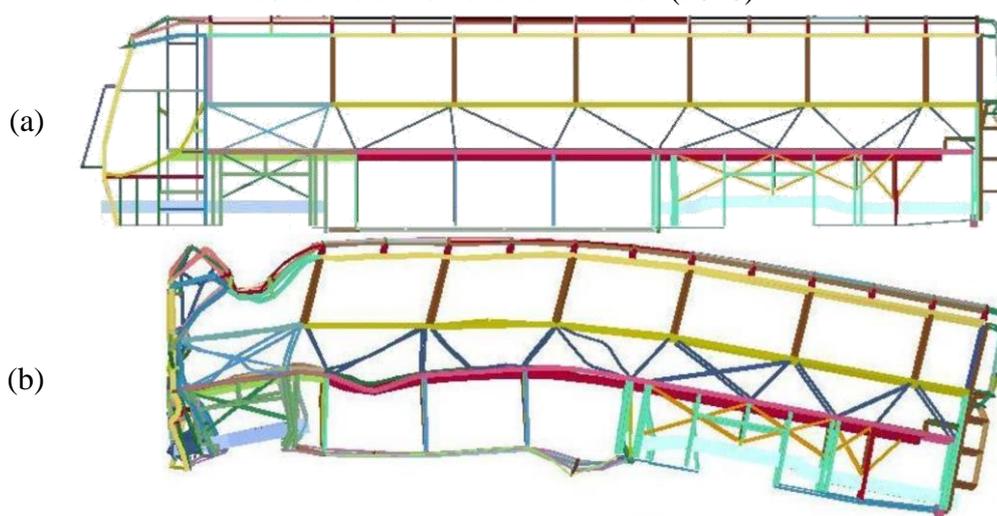


Apesar de ser evidente que melhorias são necessárias na qualidade das rodovias brasileiras, sinalização, educação dos condutores, e leis de trânsito, pode-se observar que, somados, os acidentes do tipo “Colisão”, “Capotamento, tombamento, e saída de pista”, e “Engavetamento” foram responsáveis por 80,6% das mortes. Considerando que, desse grupo de 80,6% das fatalidades, a grande maioria seja de passageiros e condutores de carros, caminhões, e ônibus, o aprimoramento do *crashworthiness* nesses veículos pode desempenhar um papel protagonista na redução das fatalidades no trânsito nos próximos anos.

Particularmente no contexto do projeto estrutural de ônibus, Walber (2009) descreve que a carroceria desses veículos é formada, basicamente, pelo acoplamento de um “casulo” em um

chassi. O chassi é uma estrutura formada por vigas que, através das fixações com os amortecedores e molas, é responsável por transmitir todo o peso do veículo às rodas. O “casulo” é constituído majoritariamente por tubos de aço quadrados ou retangulares de parede fina. Ele é a estrutura responsável por fornecer a forma do veículo, suportar o peso dos passageiros e, em casos de colisões ou tombamentos, será o principal absorvedor das cargas de impacto. A Figura 2(a) mostra o desenho de um “casulo” de ônibus, no qual pode-se observar as suas estruturas de tubos.

Figura 2 – (a) Modelo de barras do “casulo” de uma carroceria de ônibus;  
(b) Simulação da deformação do “casulo” sob ação de impacto frontal a 50 km/h, em escala real. Fonte: Meira Junior (2010).



Meira Junior (2010) avalia que as empresas brasileiras montadoras de carrocerias de ônibus não encontram, nas normas nacionais, um suporte adequado para o projeto estrutural desses componentes. Sordi (2020) cita o exemplo do ensaio de impacto frontal aplicado a um micro-ônibus exigido por uma norma brasileira, no qual uma energia equivalente à 50 kJ é impactada contra o veículo. Isso corresponde a apenas 9% da energia cinética que seria envolvida em um impacto do mesmo veículo a uma velocidade de 40 km/h, portanto, ela não é representativa de tal situação. A Figura 2(b) mostra a simulação da deformação sofrida pela estrutura de um ônibus sob um impacto frontal a 50 km/h e pode-se observar que o espaço ocupado pelo motorista foi invadido.

As situações apresentadas causam preocupação pois sabe-se que os interesses comerciais dos fabricantes e empresas de transporte muitas vezes sobrepõe-se às preocupações quanto à segurança dos passageiros e motoristas, uma vez que essas pessoas não tem os interesses devidamente representados durante o projeto e a comercialização de tais equipamentos (diferentemente do caso de passageiros de veículos particulares, por exemplo). Ao constatarmos que as normas e regulações vigentes não são suficientes para garantir a segurança desses veículos devemos, portanto, direcionar um olhar crítico para a situação e propor novos meios de melhorar as condições de segurança.

## 1.2. Objetivo

Dentro do contexto apresentado na seção anterior, busca-se propor uma metodologia que dê subsídios teóricos para realizar ensaios de modelo reduzido em problemas de impacto em que há similaridade incompleta, de tal forma a permitir a investigação das deformações e acelerações presentes nas estruturas metálicas de veículos com ensaios menos onerosos e mais

simples. No presente trabalho, a aplicação de tal metodologia restringe-se ao caso simplificado de uma viga de aço bi-engastada.

O objetivo do trabalho é avaliar a implementação de uma formulação de similaridade conforme proposta por Barenblatt (2003), na qual um ou mais grupos adimensionais não são iguais entre modelo e protótipo, no problema de uma viga tubular de aço bi-engastada de seção transversal retangular e com parede fina, sob um carregamento de impacto. Deseja-se avaliar a correlação dos resultados gerados por simulações numéricas de dinâmica explícita com os valores previstos por duas abordagens diferentes das equações apresentadas por Barenblatt. Deseja-se, também, avaliar a correlação dessas abordagens com dados experimentais.

### 1.3. Revisão bibliográfica

Jones (2012) enumerou vinte e dois diferentes grupos adimensionais relevantes para o estudo do impacto em estruturas de aço. Foi mostrado que, devido à influência dos efeitos gravitacionais, efeito da sensibilidade à taxa de deformação e fratura, não é possível obter uma similaridade completa conforme esses grupos e, portanto, é necessário realizar correções quando da aplicação de similaridade em problemas de impacto.

Oshiro (2010) realizou um extenso estudo acerca da similaridade incompleta em problemas de impacto. Para possibilitar a correção das distorções na similaridade causadas pela sensibilidade à taxa de deformação foi adotada uma base alternativa (em relação à base MLT) de dimensões físicas para descrever os grupos adimensionais.

Mazzariol (2010) analisou a aplicação de similaridade no caso do impacto axial de um tubo redondo. Ele aplicou modificações às leis de similaridade para contabilizar a diferença entre os materiais. Foi observado que, apesar dessas correções, as leis de escala podem acabar afetando o modo de flambagem e o comprimento final dos tubos.

Sordi (2020) também avaliou a utilização de bases modificadas para a correção do efeito da taxa de deformação na similaridade de problemas de impacto. Foram executados testes experimentais de *drop test* em vigas bi-engastadas e também um ensaio de impacto sobre a estrutura frontal de um micro-ônibus. Constatou-se uma ótima correlação dos resultados obtidos por similaridade com os dados experimentais.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO

### 2.1. Análise dimensional e teorema dos grupos pi

Ao estudarmos um determinado fenômeno físico nos preocupamos em estabelecer relações entre as grandezas que determinam o problema, seja através da aplicação das leis físicas para obtenção de equações fechadas ou através da realização de experimentos nos quais buscamos correlações entre as variáveis estudadas. Em ambos os casos, conforme descrito por Barenblatt (2003), podemos escrever a relação funcional entre uma grandeza estudada com seus parâmetros governantes através da seguinte equação:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \quad (2.1)$$

na qual  $a$  representa a grandeza estudada;  $a_i$  representam os parâmetros governantes com dimensões físicas independentes;  $b_i$  representam os parâmetros governantes com dimensões dependentes, ou seja, suas dimensões podem ser escritas como um produto das potências das dimensões dos parâmetros  $a_i$ ; e a função  $f$  representa a relação funcional que existe entre os parâmetros e a grandeza estudada. Geralmente, para fenômenos físicos de mecânica, as

grandezas físicas são representadas na base MLT: massa, comprimento e tempo. Nesse caso, as dimensões físicas independentes são três, o que implica em  $k = 3$ . Barenblatt (2003) demonstra, através de manipulação matemática, que a Equação 2.1 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_m) \quad (2.2)$$

na qual:

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p \cdots a_k^r} \quad \Pi_i = \frac{b_i}{a_1^{p_i} \cdots a_k^{r_i}}$$

Os expoentes  $p$  até  $r$  de cada grupo  $\Pi$  são determinados de forma que as variáveis  $\Pi$  e  $\Pi_i$  sejam adimensionais. A função  $\Phi$  representa a relação funcional que existe entre essas variáveis.

A Equação 2.2 nos evidencia o teorema dos grupos  $\pi$ , que é um dos teoremas centrais dentro da análise dimensional. Conforme Barenblatt (2003), esse teorema também pode ser descrito da seguinte forma:

Uma relação física entre uma quantidade e seus parâmetros governantes, em alguma unidade física, pode ser reescrita como uma relação entre variáveis adimensionais. O número de argumentos para a relação funcional entre as variáveis adimensionais é igual ao número de parâmetros governantes com dimensões dependentes menos o número de parâmetros governantes com dimensões independente. (BARENBLATT, 2003, p. 24-25).

As importantes constatações desse teorema são que: a redução do número de argumentos da relação funcional nos permite reduzir em  $k$  o número de variáveis necessárias para analisar um determinado fenômeno físico e que essas grandezas observadas não dependem do sistema de unidades físicas, mas sim dos números adimensionais.

## 2.2. Similaridade

Em um estudo físico ou em uma análise de engenharia, frequentemente é necessária a fabricação de protótipos (sistema na mesma escala na qual será fabricado o produto final) de um certo dispositivo para testar, analisar e medir os fenômenos físicos aos quais ele será submetido. Quando da impossibilidade de fabricar um protótipo, é possível realizar testes experimentais em dispositivos com dimensões em escala em relação ao protótipo, que chamaremos de modelo. Para que os resultados obtidos no modelo sejam representativos da resposta física do protótipo, alguns critérios devem ser atendidos.

Para o caso do escoamento de um fluido, Fox et al (2006) estabelece que, para que o modelo e o protótipo sejam fisicamente semelhantes, eles devem possuir semelhança geométrica, cinemática e dinâmica. Essa condição também é citada por Kline (1986), entretanto ele observa que tal condição não é ampla suficiente para abranger todos os problemas. Isso ocorre pois, em problemas que envolvem corrente elétrica e transferência de calor, por exemplo, apenas a semelhança geométrica, cinemática e dinâmica não garante a similaridade física, uma vez que eles dependem do potencial elétrico e da temperatura, respectivamente.

Portanto, um critério de similaridade mais abrangente é citado pelos autores Fox et al (2006), Kline (1986) e Barenblatt (2003): para que modelo e protótipo, representando o mesmo fenômeno físico, sejam similares, eles devem possuir todos os números adimensionais  $\Pi_1$  a

$\Pi_m$  iguais, conforme definidos na Equação 2.2. O tipo de similaridade definido por essa equação é chamado por Barenblatt (2003) de similaridade completa.

Existe uma classe ainda mais abrangente que relaciona os parâmetros adimensionais de um problema. Essa classe é definida, conforme Barenblatt (2003), de acordo com a equação abaixo:

$$\Pi = \Pi_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \dots \Pi_m^{\alpha_m} \Phi_1 \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_{l+1}^{\beta_1} \dots \Pi_m^{\delta_1}}, \dots, \frac{\Pi_l}{\Pi_{l+1}^{\beta_l} \dots \Pi_m^{\delta_l}} \right) \quad (2.3)$$

Os valores de  $\Pi_{l+1}$  a  $\Pi_m$ , particularmente, são caracterizados por diminuir o número de parâmetros da função  $\Phi_1$  em relação à função  $\Phi$  da Equação 2.2, de forma análoga ao papel desempenhado pelos parâmetros  $a_1$  a  $a_k$  dentro da Equação 2.2. Os expoentes  $\alpha_{l+1}$  até  $\alpha_m$  e  $\beta_i$  a  $\delta_i$  são parâmetros da equação que só podem ser descobertos através de dados experimentais ou numéricos, diferentemente dos parâmetros  $p$  até  $r$  da Equação 2.2, os quais são determinados por análise dimensional.

Barenblatt (2003) afirma que há um caso especial da Equação 2.3, que tem aparecido frequentemente na pesquisa científica. Tal caso é mostrado na equação abaixo e ocorre quando  $l+1 = m$  e todos os coeficientes  $\beta_i$  a  $\delta_i$  são iguais a zero.

$$\Pi = \Pi_{l+1}^{\alpha} \Phi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_l) \quad (2.4)$$

Nessa equação, o valor de  $\alpha$  deve ser determinado experimentalmente ou por simulação. Quando algum fenômeno físico se comporta conforme a Equação 2.4, temos a possibilidade de determinar a relação entre modelo e protótipo com similaridade apenas nos valores de  $\Pi_1$  a  $\Pi_l$ , sendo que o parâmetro  $\Pi_{l+1}$  não precisa ser similar, podendo ser apenas corrigido pelo expoente  $\alpha$ , configurando uma similaridade incompleta.

Quando precisamos relacionar grandezas físicas entre protótipo e modelo, utilizamos o fator de escala. Para relacionar o valor numérico de uma determinada grandeza física  $N$ , podemos escrever o fator de escala conforme abaixo:

$$\beta_N = \frac{(N)_M}{(N)_P} \quad (2.5)$$

na qual o subscrito  $N$  denota que o fator de escala  $\beta_N$  se refere àquela grandeza, e os subscritos  $M$  e  $P$  se referem ao modelo e protótipo, respectivamente.

### 2.3. Sensibilidade à taxa de deformação

Alguns metais, particularmente aços de baixo carbono, apresentam comportamento durante o encruamento sensível à taxa de deformação. Jones (2012) nos mostra que essa sensibilidade se evidencia no aumento da tensão de escoamento do material conforme a taxa de deformação aumenta, ou seja, através de um endurecimento.

Johnson e Cook (1983) apresentaram um modelo constitutivo para calcular a tensão de escoamento dinâmica do material em grandes deformações plásticas, em função da taxa de deformação e da temperatura. Tal modelo é dado pela equação a seguir:

$$\sigma_d = \left( A + B (\varepsilon^{pl})^n \right) \left( 1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0^{pl}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_F - T_0} \right)^m \right] \quad (2.6)$$

na qual  $\sigma_d$  é a tensão de escoamento dinâmica, em MPa;  $\varepsilon^{pl}$  é a deformação plástica equivalente;  $\dot{\varepsilon}^{pl}$  é a taxa de deformação plástica, em  $s^{-1}$ ;  $\dot{\varepsilon}_0^{pl}$  é definido como sendo igual a  $1,0 s^{-1}$ ;  $T$  é a temperatura na qual deseja-se avaliar a tensão de escoamento, em  $^{\circ}C$ ;  $T_0$  é uma temperatura de referência, em  $^{\circ}C$ ;  $T_F$  é a temperatura de fusão do material.  $A$  e  $B$ , em MPa, e  $C$ ,  $n$  e  $m$ , adimensionais, são constantes do material.

Cowper e Symonds (1957) apresentaram uma função para o cálculo da tensão de escoamento dinâmica em função apenas da taxa de deformação, definida conforme a equação abaixo:

$$\sigma_d = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{\frac{1}{p}} \right] \quad (2.7)$$

na qual  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento estática, em MPa e  $\dot{\varepsilon}$  é a taxa de deformação, em  $s^{-1}$ . Os parâmetros  $D$ , em  $s^{-1}$ , e  $p$ , adimensional, são constantes do material. Jones (2012) observa que as constantes do material  $D = 40,4 s^{-1}$  e  $p = 5$ , proporcionam um bom ajuste com dados experimentais de vigas de aço com baixo carbono.

## 2.4. Dinâmica de corpos deformáveis com o método dos elementos finitos

No método dos elementos finitos, a equação de movimento que governa a resposta dinâmica de um sistema é dada por:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (2.8)$$

na qual  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente;  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  e  $\{\ddot{U}\}$  são os vetores que representam os deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema, respectivamente. O vetor  $\{R\}$  representa as cargas externas. Para a solução numérica desses sistemas, os deslocamentos e suas derivadas são discretizados no tempo e, para o cálculo do deslocamento em um dado instante, são utilizados métodos de integração numérica. No método conhecido como implícito, os valores de deslocamento em um dado instante  $n+1$  demanda que sejam conhecidas as derivadas do deslocamento também no instante  $n+1$ . A solução de tal método exige iterações para resolver cada equação e pode ser dispendioso computacionalmente. No método conhecido como explícito, para o cálculo do deslocamento em um dado instante  $n+1$ , é necessário conhecer apenas os deslocamentos e derivadas no instante  $n$  e anteriores, porém exige passos de tempo menores. Conforme é mostrado por Sordi (2020), os métodos explícitos são mais adequados para a avaliação de problemas de impacto.

Para a solução de problemas dinâmicos de corpos deformáveis, o software comercial de elementos finitos Abaqus utiliza as seguintes equações de integração explícita:

$$\{\dot{U}\}_{n+\frac{1}{2}} = \{\dot{U}\}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \{\ddot{U}\}_n \quad (2.9)$$

$$\{U\}_{n+1} = \{U\}_n + \Delta t_{n+1} \{\dot{U}\}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

nas quais os subíndices denotam o instante de tempo da análise e  $\Delta t_n$  é o passo de tempo utilizado no instante  $n$ . Para esse método utilizado, o critério de estabilidade é dado conforme a equação abaixo para o  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$$

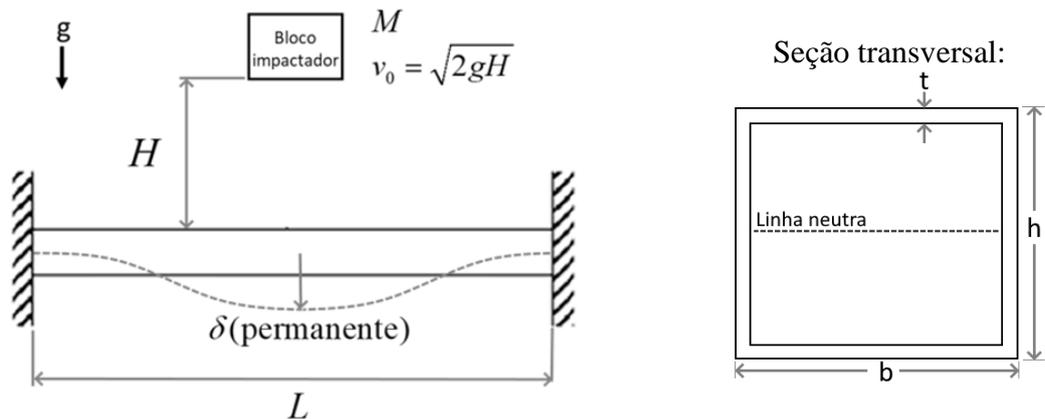
na qual  $\omega_{\max}$  é o maior autovalor no sistema.

### 3. APLICAÇÃO

#### 3.1. Descrição do problema do *drop test* sobre a viga bi-engastada

O problema que será analisado consiste no teste de queda de uma massa contra uma viga bi-engastada, com uma velocidade que é determinada pela altura inicial da queda submetida à aceleração da gravidade. Considera-se uma viga tubular de aço baixo carbono com seção retangular. A grandeza física que se pretende avaliar é o deslocamento permanente na viga após a retirada da massa. Na Figura 3 mostra-se uma figura esquemática do problema considerado, juntamente com os parâmetros relevantes do problema.

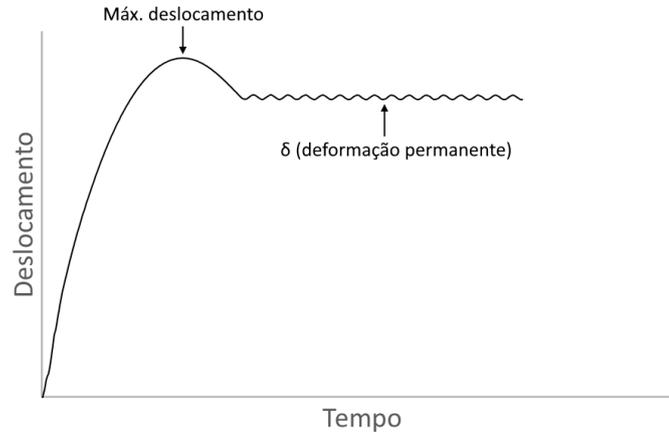
Figura 3 – Figura esquemática do problema do *drop test* da viga.



O parâmetro  $\delta$  representa a deformação permanente, em mm;  $v_0$  é a velocidade do bloco de impacto no instante do impacto em mm/s;  $M$  é a massa do bloco de impacto, em ton;  $h$ ,  $b$  e  $t$  são as dimensões da seção transversal da viga, em mm; A tensão de escoamento estática do material é representada por  $\sigma_0$ , dada em MPa; e  $L$  é o comprimento total, em mm. O valor numérico correspondente à deformação permanente da viga é retirado de um ponto sobre a face superior na metade da largura  $b$  após o impacto. A Figura 4 demonstra a curva de deslocamento exemplificada desse ponto. Pode-se observar que ela alcança um valor máximo devido ao

impacto e após há um retorno para um patamar de deslocamento que permanece constante. Esse patamar é a deformação permanente considerada.

Figura 4 – Método de avaliação do deslocamento permanente após a retirada da massa.



### 3.2. Grupos pi e similaridade incompleta

Levando em consideração que, para todos os modelos avaliados, os valores do módulo de elasticidade do aço e da aceleração da gravidade não mudam, essas variáveis foram omitidas da relação dos parâmetros governantes estabelecidos para o problema. A relação funcional entre a deformação permanente e os parâmetros é mostrada na equação abaixo:

$$\begin{aligned} a &= f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \\ \delta &= f(v_0, M, h, t, \sigma_0, b, L) \end{aligned} \quad (3.1)$$

As variáveis com dimensões independentes escolhidas para representar o problema foram  $v_0$ ,  $M$  e  $h$ . Dessa forma, os grupos  $\Pi$  do problema são os seguintes:

$$\Pi = \frac{\delta}{v_0^p M^q h^r} \quad \Pi_1 = \frac{t}{v_0^{p_1} M^{q_1} h^{r_1}} \quad \Pi_2 = \frac{\sigma_0}{v_0^{p_2} M^{q_2} h^{r_2}} \quad \Pi_3 = \frac{b}{v_0^{p_3} M^{q_3} h^{r_3}} \quad \Pi_4 = \frac{L}{v_0^{p_4} M^{q_4} h^{r_4}}$$

Os expoentes  $p_i$ ,  $q_i$  e  $r_i$  são determinados de forma a fazer com todos os  $\Pi$  sejam adimensionais. No APÊNDICE A mostra-se o cálculo desses expoentes. Os grupos pi, portanto, ficam da seguinte maneira:

$$\Pi = \frac{\delta}{h} \quad \Pi_1 = \frac{t}{h} \quad \Pi_2 = \frac{\sigma_0 h^3}{v_0^2 M} \quad \Pi_3 = \frac{b}{h} \quad \Pi_4 = \frac{L}{h}$$

A fim de avaliar a aplicação da Equação 2.4, foi definida a seguinte relação funcional para os grupos  $\Pi$  definidos, que chamaremos de Abordagem A:

$$\Pi = \Pi_1^\alpha \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \quad (3.2)$$

Para a definição de  $\Pi_1$  como sendo o parâmetro que não apresenta similaridade, levou-se em conta que quando uma estrutura do tipo de um tubo é escalonada geometricamente, nem sempre é possível que a espessura obedeça ao mesmo fator de escala devido às limitações de fabricação. Por isso, trata-se de um caso prático de similaridade incompleta que pode corrigido com o método da similaridade incompleta expressa na Equação 2.4.

Para a aplicação da estratégia de similaridade incompleta da Equação 3.2, deve-se ter um modelo que possua os mesmos valores de  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , e  $\Pi_4$  que o protótipo para que o valor correspondente de  $\Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  também seja igual. Porém, para podermos determinar o valor do expoente  $\alpha$  é necessário preparar um segundo modelo, com um valor de  $\Pi_1$  diferente do primeiro. Equacionando os resultados e os valores de  $\Pi_1$  para os dois modelos (que chamaremos de modelo de referência e modelo auxiliar e que possuem os mesmos valores de  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , e  $\Pi_4$ ), temos:

$$\left. \begin{aligned} (\Pi)_{REF} &= (\Pi_1)_{REF}^\alpha \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \\ (\Pi)_{AUX} &= (\Pi_1)_{AUX}^\alpha \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \ln(\Pi)_{REF} &= \alpha \ln(\Pi_1)_{REF} + \ln \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \\ \ln(\Pi)_{AUX} &= \alpha \ln(\Pi_1)_{AUX} + \ln \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \end{aligned}$$

Ressaltando que  $\Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$ , nesse caso, se trata de uma constante para um determinado valor de  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , e  $\Pi_4$ . O seu valor e o de  $\alpha$  são dados pela solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \ln(\Pi_1)_{REF} & 1 \\ \ln(\Pi_1)_{AUX} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \ln \Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\Pi)_{REF} \\ \ln(\Pi)_{AUX} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Uma vez conhecidos  $\alpha$  e  $\Phi_1(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$ , os resultados de um determinado protótipo podem ser estimados pela simples inserção do seu valor de  $\Pi_1$  na Equação 3.2

Para a comparação com os resultados experimentais, foi considerado um outro caso particular da Equação 2.3 Consideramos aqui que  $l+2=m$ , ou seja, um caso em que há dois parâmetros fora da função  $\Phi_1$ . Considera-se também que todos os expoentes  $\beta_i$  a  $\delta_i$  são nulos e os expoentes  $\alpha_i$  não são nulos. Chamamos esse caso de Abordagem B:

$$\Pi = \Pi_1^{\alpha_1} \Pi_2^{\alpha_2} \Phi_1(\Pi_3, \Pi_4) \quad (3.4)$$

Para esse caso, pode-se utilizar o mesmo formato da Equação 3.3 para a determinação dos expoentes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e do valor de  $\Phi_1$ . Nessa abordagem, o grupo adimensional  $\Pi_2$  também é considerado um valor que não é similar entre modelo e protótipo.

Adicionalmente para a Abordagem B definem-se dois fatores de escala que serão posteriormente usados para relacionar os resultados obtidos por similaridade com os experimentais. De acordo com a definição da Equação 2.5 e substituindo os valores de  $\delta$  com a Equação 3.4, o fator de escala  $\beta_\delta$  é obtido conforme abaixo:

$$\beta_\delta = \frac{(\delta)_M}{(\delta)_P} = \frac{(h)_M}{(h)_P} \left( \frac{(\Pi_1)_M}{(\Pi_1)_P} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{(\Pi_2)_M}{(\Pi_2)_P} \right)^{\alpha_2} \quad (3.5)$$

Define-se também o fator de escala de tempo:

$$(v_0)_P = \frac{(\Delta L)_P}{(\Delta T)_P} = \frac{(\Delta L)_M / \beta}{(\Delta T)_M / \beta_t} = \frac{\beta_t}{\beta} (v_0)_M \rightarrow \beta_t = \beta \frac{(v_0)_P}{(v_0)_M}$$

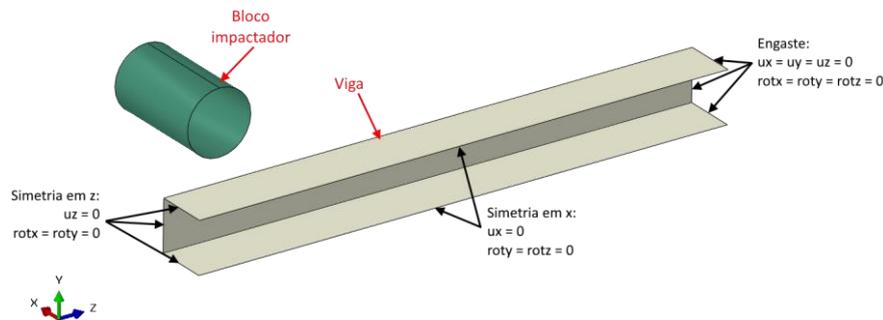
O fator de escala  $\beta$  representa o fator de escala geométrico das dimensões com exceção da espessura;  $\Delta L$  é um deslocamento arbitrário e  $\Delta T$  é um intervalo de tempo arbitrário. Dessa forma, o fator de escala do tempo se transforma em:

$$\beta_t = \frac{(h)_M (v_0)_P}{(h)_P (v_0)_M} \quad (3.6)$$

### 3.3. Modelo Numérico

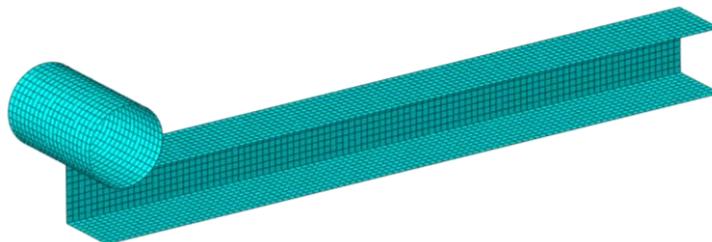
Para representar o problema do *drop test* sobre a viga bi-engastada, um modelo numérico de dinâmica explícita foi desenvolvido e implementado usando o software Abaqus. Na Figura 5, mostra-se as condições de contorno aplicadas em uma geometria representando 1/4 da viga.

Figura 5 – Condições de contorno aplicadas à viga.



Na Figura 6 mostra-se a malha do modelo numérico. Na viga, foram utilizados elementos de casca posicionados na superfície média da espessura do tubo. Os elementos de casca são quadriláteros com 4 nós, três graus de liberdade de translação e três de rotação, com integração completa (tipo S4 na biblioteca do software). As simulações foram resolvidas utilizando o solver de dinâmica explícita do Abaqus, com precisão de ponto flutuante dupla e passo de tempo automático. No APÊNDICE B é apresentado um estudo de convergência de malha e também uma comparação dos resultados do modelo com um resultado experimental para verificação da sua precisão.

Figura 6 – Malha do bloco impactador e da viga.



O bloco impactador é modelado como uma casca rígida acoplada a uma massa pontual que, devido à simetria, é igual a 1/4 da massa total do problema. No início da simulação, o bloco impactador está adjacente à viga, com uma velocidade inicial correspondente à altura de queda. O contato entre o bloco e a viga foi definido como sendo do tipo “hard” e sem atrito. A gravidade é definida como  $9800 \text{ mm/s}^2$ .

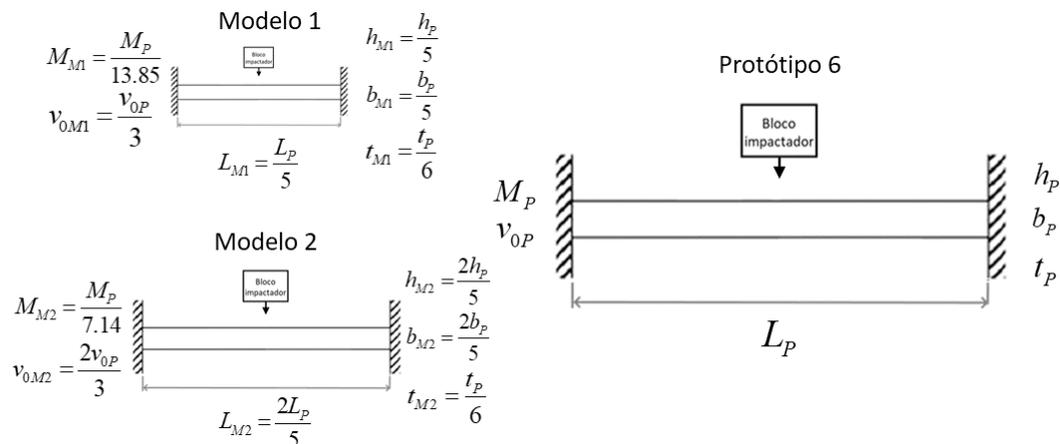
O material da viga foi modelado como sendo um aço com módulo de elasticidade de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. Na porção plástica, uma curva de encruamento foi definida com tensão de escoamento estática inicial em 335 MPa. O encruamento foi definido como sendo sensível à taxa de deformação utilizando a lei de Cowper-Symonds com os coeficientes  $D = 40,4 \text{ s}^{-1}$  e  $p = 5$ . A massa específica foi definida como  $7,85 \times 10^{-9} \text{ ton/mm}^3$ .

### 3.4. Resultados

#### 3.4.1. Correlação dos resultados dos métodos de similaridade com simulações numéricas

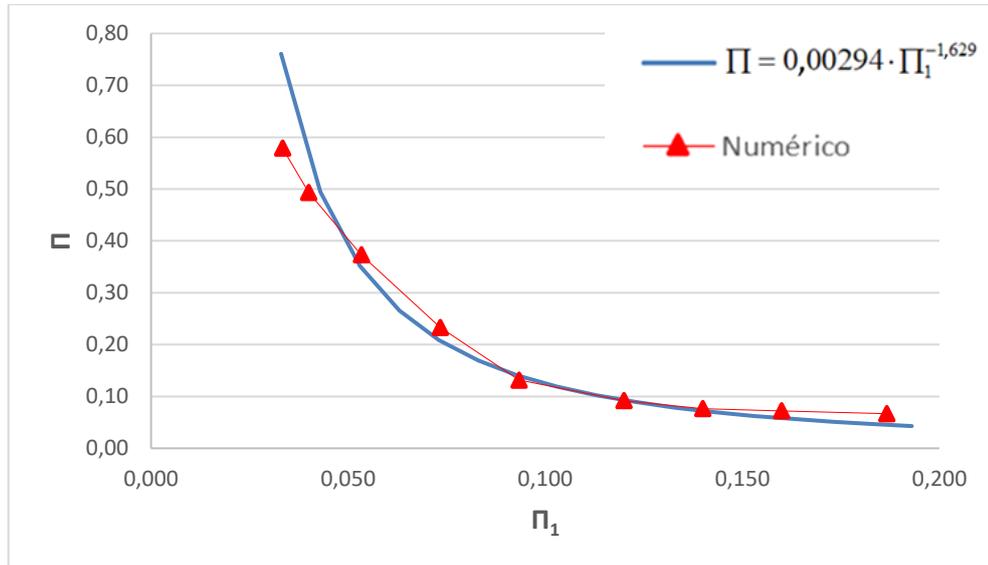
Para a aplicação da Abordagem A, exemplifica-se na Figura 7 as relações de escala entre um protótipo e os dois modelos adotados. A tensão de escoamento estática é a mesma para os modelos e todos os protótipos dessa abordagem.

Figura 7 – Relação de escala geométrica, da velocidade e da massa para os modelos e protótipo 6 da Abordagem A.



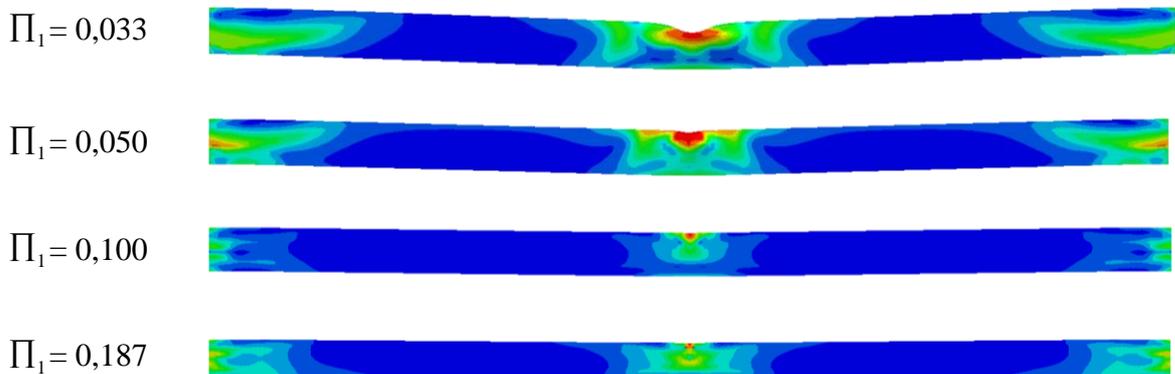
A partir dos resultados gerados pelos dois modelos, aplicando os métodos da seção 3.2 e resolvendo a Equação 3.3, os coeficientes  $\alpha = -1,629$  e  $\Phi_1 (\Pi_2 = 22,6; \Pi_3 = 2; \Pi_4 = 20) = 0,00294$  são encontrados. A função obtida pela inserção desses coeficientes na Equação 3.2 é mostrada na Figura 8 e comparada com os valores numéricos gerados por simulação de nove protótipos com valores de  $\Pi_1$  variando entre 0,040 e 0,187. Os parâmetros do problema da viga considerados para cada modelo e protótipo são detalhados nas tabelas do APÊNDICE C.

Figura 8 – Comparação entre resultados obtidos por similaridade através da abordagem A com resultados numéricos obtidos por simulação.



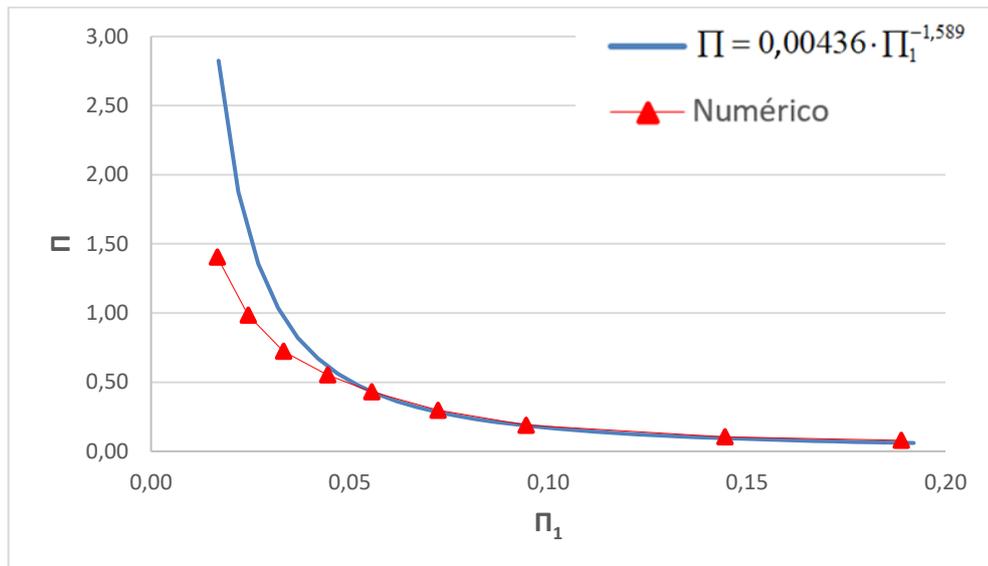
Pode-se observar na figura que para valores de  $\Pi_1$  entre 0,05 e 0,14, há uma proximidade entre os resultados. Para o valor de  $\Pi_1 = 0,073$ , há um desvio de 11,2% do valor obtido por similaridade em relação ao valor numérico. Para valores de  $\Pi_1$  menores do que 0,05 e maiores que 0,14, as duas curvas começam a apresentar uma tendência de divergência, chegando a desvios de 29,2%, quando  $\Pi_1 = 0,033$ , e 32,3%, quando  $\Pi_1 = 0,187$ , dos valores obtidos por similaridade em relação aos modelos numéricos. Levando-se em consideração que os modelos utilizados para o cálculo dos coeficientes da Equação 3.2 foram feitos em  $\Pi_1 = 0,05$  e 0,10 espera-se, naturalmente, que nessa faixa os resultados previstos pela similaridade terão um ajuste mais preciso. Analisando o perfil de deformação das vigas, pode-se observar que boa parte da deformação permanente do protótipo com  $\Pi_1 = 0,033$ , mostrado na Figura 9, é constituída por um amassamento localizado do perfil e demonstra que um fenômeno físico diferente passa a dominar o problema, o que pode justificar a divergência nos valores a partir daí.

Figura 9 – Perfil de deformação permanente da viga para diferentes valores de  $\Pi_1$ .



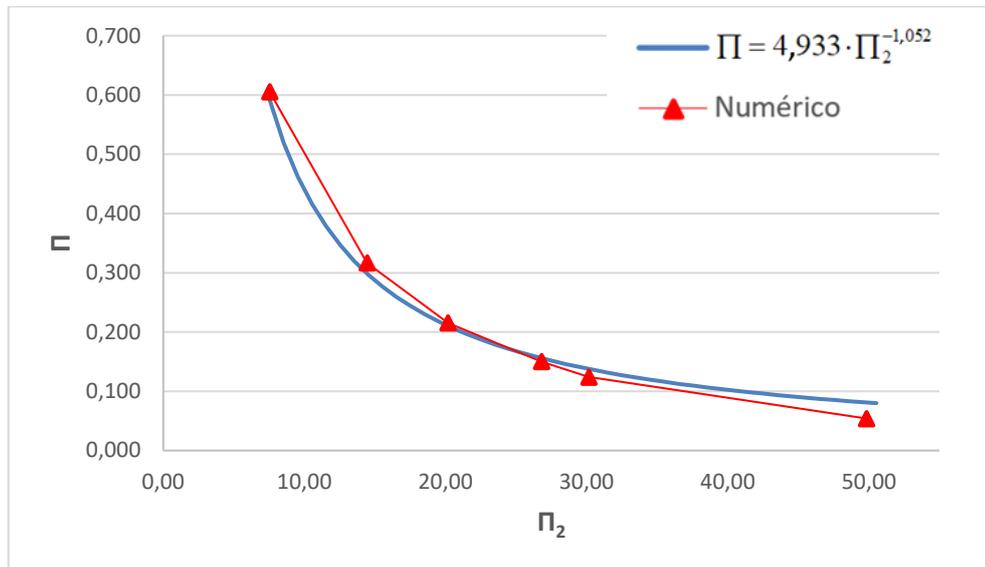
Para a Abordagem B, o processo de escala entre modelo e protótipo é análogo ao da Abordagem A. Foram necessários três modelos para obtenção dos coeficientes da Equação 3.4. Encontrou-se os coeficientes  $\alpha_1 = -1,589$ ,  $\alpha_2 = -1,052$  e  $\Phi_1(\Pi_3 = 2; \Pi_4 = 20) = 0,0857$ , usando metodologia análoga à usada para a Abordagem A. A função obtida pela inserção dos coeficientes na Equação 3.4 é comparada com os valores numéricos gerados por simulação de sete protótipos com valores de  $\Pi_1$  variando entre 0,017 e 0,189, mantendo constante  $\Pi_2 = 16,96$  e outros seis protótipos nos quais se manteve  $\Pi_1 = 0,078$  constante e variou-se  $\Pi_2$  entre 7,54 e 49,84. Os parâmetros do problema da viga considerados para cada modelo e protótipo são detalhados nas tabelas do APÊNDICE C. Na Figura 10 mostra-se a comparação entre os resultados obtidos por similaridade e obtidos numericamente para o caso em que  $\Pi_2$  é constante. Para valores de  $\Pi_1$  menores do que 0,06 a divergência entre as curvas ocorreu da mesma maneira em que ocorre no caso da Abordagem A.

Figura 10 - Comparação entre resultados obtidos por similaridade através da abordagem B com resultados numéricos obtidos por simulação, considerando um valor fixo de  $\Pi_2 = 16,96$



Na Figura 11 mostra-se os resultados do grupo  $\Pi$  para os casos em que se manteve constante  $\Pi_1 = 0,078$  e variou-se o valor de  $\Pi_2$ . Observa-se que, a partir de  $\Pi_2 = 30$ , os resultados começam a apresentar divergência, enquanto valores menores de  $\Pi_2$  tem uma boa correlação. Levando em consideração que o grupo  $\Pi_2$  é proporcional à razão entre a resistência ao escoamento e a energia de impacto, a tendência do resultado numérico é gradualmente chegar a zero conforme esse parâmetro aumenta. Por outro lado, como os coeficientes da abordagem B foram calculados para valores de  $\Pi_2$  entre 10 e 30, a correlação encontrada apresenta uma leve distorção para valores de  $\Pi_2$  fora desse intervalo.

Figura 11 - Comparação entre resultados obtidos por similaridade através da Abordagem A com resultados numéricos obtidos por simulação, considerando um valor fixo de  $\Pi_1 = 0,078$



### 3.4.2. Comparação com resultados experimentais

Uma viga bi-engastada ensaiada experimentalmente por Sordi (2020), de dimensões 80x40x1,95mm, com comprimento de 800mm, foi tomada como sendo o protótipo. No ANEXO A mostra-se o aparato experimental utilizado para o teste. Ela foi submetida a uma carga de impacto de uma massa de 162 kg. A partir de simulação numérica, foram desenvolvidos três modelos de acordo com a Abordagem B. Os parâmetros desses modelos e do protótipo são mostrados no APÊNDICE C.

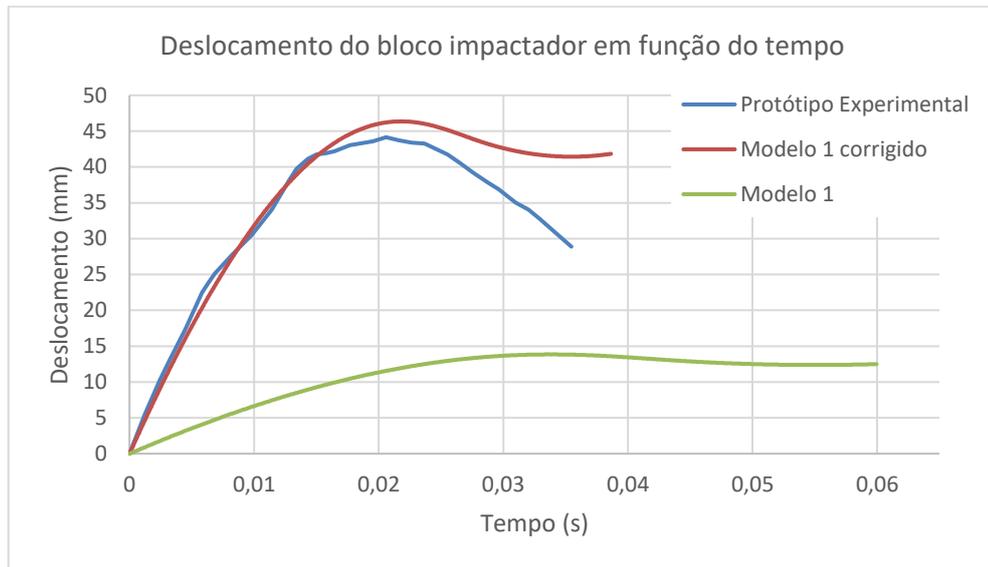
Conforme ensaios de tração feitos por Sordi (2020), o mesmo aço de baixo carbono utilizado nas vigas apresentou tensão de escoamento diferente para diferentes espessuras de tubo. Portanto, essa diferença foi contabilizada considerando tensão de escoamento de 310 MPa para os modelos e 360 MPa para o protótipo, conforme os resultados dos ensaios. A partir dos resultados numéricos dos modelos, encontrou-se coeficientes  $\alpha_1 = -0,193$ ,  $\alpha_2 = -0,467$  e  $\Phi(\Pi_3 = 2; \Pi_4 = 20) = 1,584$  para a Equação 3.4, que configura a Abordagem B. Essa equação fornece um valor de  $\Pi_1 = 1,14$  para o protótipo. O ensaio experimental da viga apresenta um valor de deformação permanente  $\delta = 37,2$  mm, o que corresponde a um valor de  $\Pi_1 = 0,93$ . Comparando os valores, têm-se um erro de 25,8% do resultado obtido por similaridade em relação ao resultado experimental.

A comparação de uma outra variável foi feita na qual analisou-se a curva de deslocamento versus tempo do bloco impactador para o modelo e para o protótipo, logo após o contato com a viga. O deslocamento do bloco impactador do modelo foi corrigido com o fator de escala da deformação  $\delta$ . O modelo utilizado foi o Modelo 1, conforme Tabela 3 do APÊNDICE C. Na Figura 12 mostra-se a comparação entre esses resultados. Utilizando as equações 15 e 16, o deslocamento e o tempo do modelo foram corrigidos da seguinte forma:

$$t_{CORRIGIDO} = \frac{t_{MODELO}}{\beta_t} = 0,6444 \cdot t_{MODELO}$$

$$\delta_{\text{CORRIGIDO}}(0,644 \cdot t_{\text{MODELO}}) = \frac{\delta_{\text{MODELO}}(t_{\text{MODELO}})}{\beta_{\delta}} = 3,3475 \cdot \delta_{\text{MODELO}}(t_{\text{MODELO}})$$

Figura 12 – Curva de deslocamento do bloco impactador para o Modelo 1, protótipo experimental e Modelo 1 corrigido.



Pode-se observar que, para o deslocamento do bloco impactador, o modelo, quando corrigido, apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais. O erro relativo do máximo deslocamento do modelo corrigido é 5% maior do que o máximo deslocamento experimental, o que mostra que há um ajuste mais preciso em relação à variável da deformação permanente.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi explorado a possibilidade de aplicar uma metodologia de similaridade incompleta no contexto de problemas de impacto. Apesar de ter sido aplicada em um problema relativamente simples, é possível estender sua aplicação a problemas com cenário de impacto em ônibus. Foi possível concluir que:

- A aplicação da metodologia proposta se mostrou consistente e permitiu obter expressões analíticas que permitem prever o comportamento da estrutura. Verificou-se também uma boa correlação com resultados experimentais.

- Os parâmetros não similares dos modelos devem ser adotados de tal maneira que, naquele intervalo, possuam os mesmos mecanismos físicos governando a resposta do sistema do que o protótipo. No caso do impacto da viga, quando o parâmetro adimensional referente à espessura se tornou muito baixo, o amassamento local do perfil passou a dominar o problema e pôde-se observar uma clara divergência entres os resultados numéricos e os previstos pela expressão analítica de similaridade.

- Em situações nas quais a fabricação de dois ou mais modelos em escala reduzida se torna mais onerosa do que a fabricação de um protótipo, essa metodologia já não é mais adequada, pois sempre exigirá ao menos dois modelos.

- A fim de testar a robustez da metodologia, é necessário testar sua correlação com mais resultados experimentais de aplicações mais complexas e mais próximas de casos reais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS. **ABAQUS Documentation**, Dassault Systèmes, 2017.

BARENBLATT, G. I. **Scaling**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

COWPER, G. R.; SYMONDS, P. S. **Strain-Hardening and Strain-Rate Effects in the Impact Loading of Cantilever Beams**. Brown University Division of Applied Mathematics Report no. 28, 1957.

FOX, R. W.; McDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

JOHNSON, G. R.; COOK, W. H. **A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures**. Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics, p. 541-547, April 1983.

JONES; N. **Structural Impact**. 2<sup>nd</sup> edition. New York: Cambridge University Press, 2012.

KLINE, S. J. **Similitude and Approximation Theory**. New York: Springer-Verlag, 1986.

MAZZARIOL, L. M.; ALVES, M. **Experimental Study on Scaling of Circular Tubes Subjected to Dynamic Axial Crushing Using Models of Different Materials**. In 22<sup>nd</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Ribeirão Preto, São Paulo, Brazil, 2013

MEIRA JUNIOR, A. G. **Avaliação do Comportamento da Estrutura de Ônibus Rodoviário Solicitado a Impacto Frontal**. 2010. 413p. Tese de Doutorado em Engenharia - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

OSHIRO, R. E. **Estudo da Similaridade Imperfeita em Estruturas Sujeitas a Carregamentos de Impacto**. 2010. 110p. Tese de Doutorado em Engenharia – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2010.

POLÍCIA RODOVIÁRIA FEDERAL. **Dados Abertos – Acidentes**. Disponível em <<https://portal.pr.f.gov.br/dados-abertos-acidentes>>. Acesso em: 18 de março de 2021.

SORDI, A. **Avaliação Numérico-Experimental de Impacto em Estruturas de Ônibus Utilizando Similaridade**. 2020. 101p. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2020.

WALBER, M. **Avaliação dos Níveis de Vibração Existentes em Passageiros de Ônibus Rodoviários Intermunicipais, Análise e Modificação Projetual**. 2009. 199p. Tese de Doutorado em Engenharia - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

## APÊNDICE A – Cálculo dos expoentes dos grupos pi

Nas expressões abaixo, os colchetes denotam as dimensões físicas do parâmetro. A base utilizada é a MLT (massa comprimento e tempo).

$$[v_0] = LT^{-1}, [M] = M, [h] = L$$

$$\Pi = \frac{\delta}{v_0^p M^q h^r}, [\delta] = L$$

$$[\Pi] = \left[ \frac{\delta}{v_0^p M^q h^r} \right] = 1 \rightarrow L^{1-p-r} T^p M^{-q} \rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ -q = 0 \\ 1 - p - r = 0 \rightarrow r = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_1 = \frac{t}{v_0^{p_1} M^{q_1} h^{r_1}}, [t] = L$$

$$[\Pi_1] = \left[ \frac{t}{v_0^{p_1} M^{q_1} h^{r_1}} \right] = 1 \rightarrow L^{1-p_1-r_1} T^{p_1} M^{-q_1} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ -q_1 = 0 \\ 1 - p_1 - r_1 = 0 \rightarrow r_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_2 = \frac{\sigma_0}{v_0^{p_2} M^{q_2} h^{r_2}}, [\sigma_0] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\Pi_2] = \left[ \frac{\sigma_0}{v_0^{p_2} M^{q_2} h^{r_2}} \right] = 1 \rightarrow L^{-1-p_2-r_2} T^{p_2-2} M^{1-q_2} \rightarrow \begin{cases} p_2 - 2 = 0 \rightarrow p_2 = 2 \\ 1 - q_2 = 0 \rightarrow q_2 = 1 \\ -1 - p_2 - r_2 = 0 \rightarrow r_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Pi_3 = \frac{b}{v_0^{p_3} M^{q_3} h^{r_3}}, [b] = L$$

$$[\Pi_3] = \left[ \frac{b}{v_0^{p_3} M^{q_3} h^{r_3}} \right] = 1 \rightarrow L^{1-p_3-r_3} T^{p_3} M^{-q_3} \rightarrow \begin{cases} p_3 = 0 \\ -q_3 = 0 \\ 1 - p_3 - r_3 = 0 \rightarrow r_3 = 1 \end{cases}$$

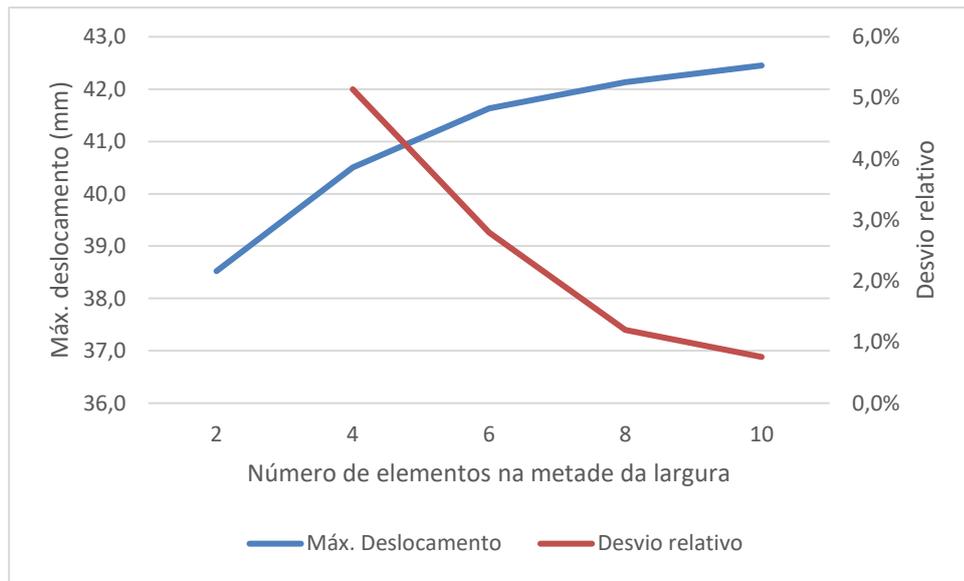
$$\Pi_4 = \frac{L}{v_0^{p_4} M^{q_4} h^{r_4}}, [L] = L$$

$$[\Pi_4] = \left[ \frac{L}{v_0^{p_4} M^{q_4} h^{r_4}} \right] = 1 \rightarrow L^{1-p_4-r_4} T^{p_4} M^{-q_4} \rightarrow \begin{cases} p_4 = 0 \\ -q_4 = 0 \\ 1 - p_4 - r_4 = 0 \rightarrow r_4 = 1 \end{cases}$$

## APÊNDICE B – Convergência de malha e validação do modelo numérico

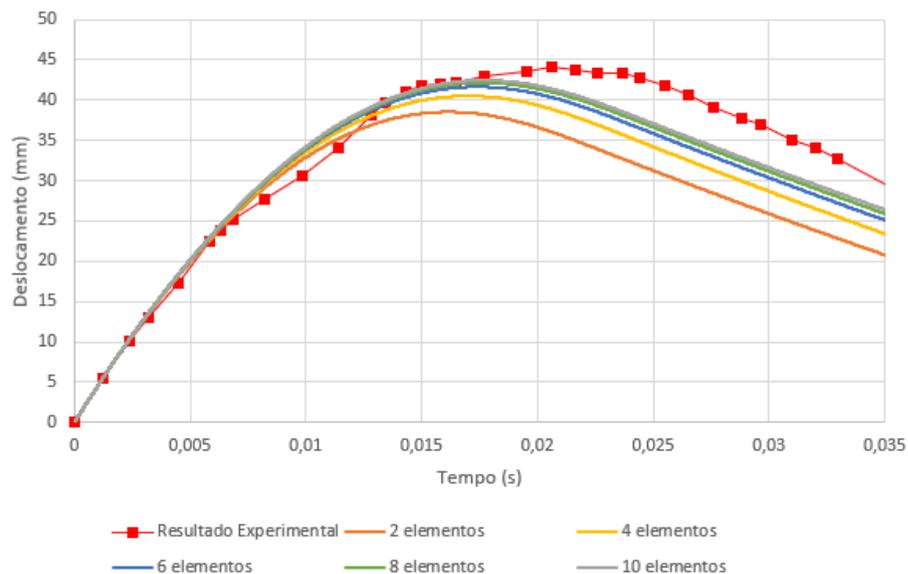
Na Figura 13 mostra-se a convergência de malha realizada para o deslocamento. Conforme o número de elementos na largura da viga aumenta, o desvio relativo para o máximo deslocamento observado diminui, chegando a menos de 1% para 10 elementos na metade da largura.

Figura 13 – Convergência de malha para o modelo numérico da viga.



Na Figura 14 mostra-se como as diferentes malhas tendem a se aproximar do resultado experimental (retirado do trabalho de Sordi, 2020) equivalente à situação da simulação. Essa comparação demonstra que o modelo numérico adotado representa bem os efeitos físicos observados nos experimentos.

Figura 14 – Resultados numéricos das diferentes malhas comparados com o resultado experimental.



## APÊNDICE C – Parâmetros dos modelos e protótipos da viga bi-engastada utilizados

Tabela 1 - Parâmetros dos modelos usados na comparação dos resultados da Abordagem A.

Descrição	L (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)	sigma0 (MPa)	v0 (m/s)	M (ton)	Pi1	Pi numérico	Pi Abordagem A
Modelo 1	300	15,0	30,0	1,5	335	1000,0	0,0500	0,1000	0,125	0,125
Modelo 2	600	30,0	60,0	1,5	335	2030,2	0,0970	0,0500	0,387	0,387
Protótipo 1	1500	75,0	150,0	2,5	335	4196,3	0,3549	0,0333	0,579	0,749
Protótipo 2	1500	75,0	150,0	3,0	335	3507,0	0,5082	0,0400	0,493	0,556
Protótipo 3	1500	75,0	150,0	4,0	335	2835,2	0,7775	0,0533	0,373	0,348
Protótipo 4	1500	75,0	150,0	5,5	335	2669,4	0,8771	0,0733	0,233	0,207
Protótipo 5	1500	75,0	150,0	7,0	335	4469,3	0,3129	0,0933	0,132	0,140
Protótipo 6	1500	75,0	150,0	9,0	335	3004,2	0,6925	0,1200	0,092	0,093
Protótipo 7	1500	75,0	150,0	10,5	335	3230,1	0,5990	0,1400	0,076	0,072
Protótipo 8	1500	75,0	150,0	12,0	335	2157,5	1,3427	0,1600	0,072	0,058
Protótipo 9	1500	75,0	150,0	14,0	335	1640,3	2,3228	0,1867	0,067	0,045

Tabela 2 - Parâmetros dos modelos usados na comparação dos resultados da Abordagem B.

Descrição	L (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)	sigma0 (MPa)	v0 (m/s)	M (ton)	Pi1	Pi2	Pi numérico	Pi Abordagem B
Modelo 1	300	15,0	30,0	1,5	335	1000,0	0,0500	0,1000	22,61	0,125	0,125
Modelo 2	450	22,5	45,0	1,5	335	2800,0	0,0500	0,0667	9,73	0,578	0,578
Modelo 3	600	30,0	60,0	1,5	335	2500,0	0,0500	0,0500	28,94	0,290	0,290
Protótipo 1	1800	90,0	180,0	1,5	335	6000,0	0,4000	0,0167	16,96	1,405	2,915
Protótipo 2	1800	90,0	180,0	2,2	335	6000,0	0,4000	0,0244	16,96	0,986	1,586
Protótipo 3	1800	90,0	180,0	3,0	335	6000,0	0,4000	0,0333	16,96	0,724	0,969
Protótipo 4	1800	90,0	180,0	4,0	335	6000,0	0,4000	0,0444	16,96	0,553	0,614
Protótipo 5	1800	90,0	180,0	5,0	335	6000,0	0,4000	0,0556	16,96	0,430	0,430
Protótipo 6	1800	90,0	180,0	6,5	335	6000,0	0,4000	0,0722	16,96	0,298	0,284
Protótipo 7	1800	90,0	180,0	8,5	335	6000,0	0,4000	0,0944	16,96	0,189	0,185
Protótipo 8	1800	90,0	180,0	13,0	335	6000,0	0,4000	0,1444	16,96	0,104	0,094
Protótipo 9	1800	90,0	180,0	17,0	335	6000,0	0,4000	0,1889	16,96	0,079	0,062
Protótipo 10	1800	90,0	180,0	7,0	335	9000,0	0,4000	0,0778	7,54	0,605	0,592
Protótipo 11	1800	90,0	180,0	7,0	335	6500,0	0,4000	0,0778	14,45	0,317	0,298
Protótipo 12	1800	90,0	180,0	7,0	335	5500,0	0,4000	0,0778	20,18	0,215	0,210
Protótipo 13	1800	90,0	180,0	7,0	335	4500,0	0,4500	0,0778	26,80	0,150	0,156
Protótipo 14	1800	90,0	180,0	7,0	335	4500,0	0,4000	0,0778	30,15	0,124	0,138
Protótipo 15	1800	90,0	180,0	7,0	335	3500,0	0,4000	0,0778	49,84	0,054	0,081

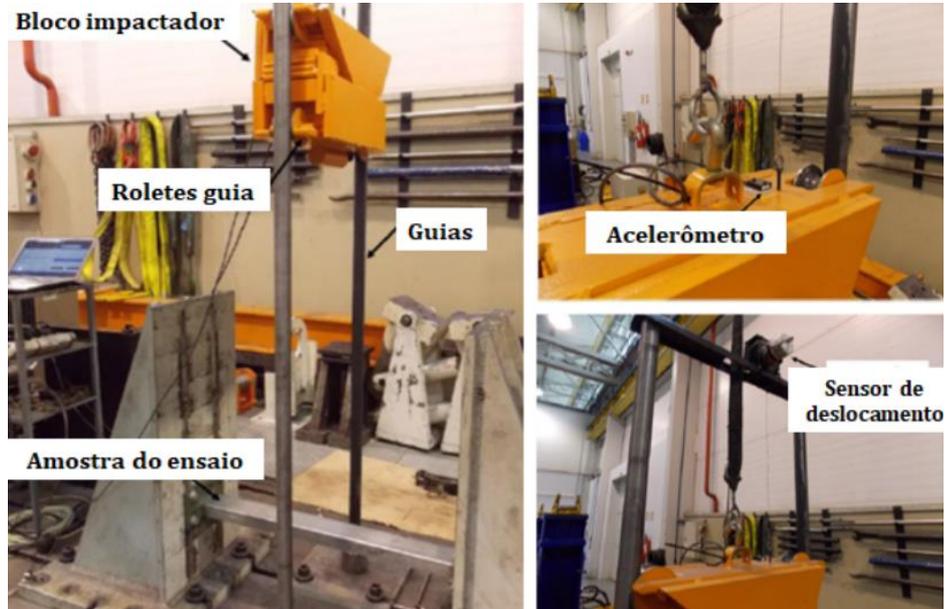
Tabela 3 - Parâmetros dos modelos usados na comparação com experimental.

Descrição	L (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)	sigma0 (MPa)	v0 (m/s)	M (ton)	Pi1	Pi2	Pi experimental	Pi Abordagem B
Modelo 1	200	10,0	20,0	1,0	310	725,0	0,162	0,0950	3,64		
Modelo 2	300	15,0	30,0	1,0	310	1000,0	0,162	0,0633	6,46		
Modelo 3	400	20,0	40,0	1,0	310	1200,0	0,162	0,0475	10,63		
Protótipo experimental	800	40,0	80,0	2,0	360	4500,0	0,162	0,0488	7,02	0,930	1,142

## ANEXO A – Dados experimentais utilizados para comparação

Na Figura 15 mostram-se os dispositivos utilizados por Sordi (2020) para a realização do *drop test* sobre a viga bi-engastada.

Figura 15 – Aparato experimental utilizado para a realização do ensaio. Fonte: Sordi (2020).



Na Figura 16 mostra-se uma vista da configuração deformada da viga após ter recebido o impacto do bloco, para modelo e protótipo experimentais e suas respectivas simulações numéricas realizadas por Sordi (2020).

Figura 16 – Visualização da configuração deformada da viga após impacto para modelos e protótipos experimentais e numéricos. Fonte: Sordi (2020).

