

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT

JULIO CESAR MOHNSAM

GEOMETRIA DOS ESPAÇOS $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

ORIENTADOR:
PROF. DR. ÁLVARO KRÜGER RAMOS

Porto Alegre - RS

Abril de 2021

JULIO CESAR MOHNSAM

GEOMETRIA DOS ESPAÇOS $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Dissertação submetida por Julio Cesar Mohnsam como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Kruger Ramos.

Porto Alegre - RS

Abril de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT

JULIO CESAR MOHNSAM

GEOMETRIA DOS ESPAÇOS $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Comissão Examinadora:

Dr. Álvaro Krüger Ramos (PPGMAT-UFRGS - Orientador)

Dr^a. Miriam Telichevesky (PPGMAT- UFRGS - Membro interno)

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMAT-UFRGS - Membro interno)

Dr^a. Abigail Silva Duarte Folha (UFF - Membro externo ao programa)

Porto Alegre - RS

27 de Abril de 2021

Agradecimentos

Quero agradecer ao meu orientador, professor Álvaro Krüger Ramos, exemplo de dedicação e mestre, que me orientou com dedicação.

Agradeço aos meus amigos do PPGMAT UFRGS e a todos os professores do programa. Obrigado pelos conhecimentos transmitidos.

Resumo

Neste trabalho estudaremos alguns resultados propostos por Eric Toubiana em suas notas “Note sur les variétés homogènes de dimension 3” [Tou07]. Apresentamos a classificação das variedades homogêneas simplesmente conexas tridimensionais pela dimensão do grupo de isotropia. Quando o grupo de isotropia tem dimensão 1, esses espaços são chamados de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Nos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, vamos calcular a curvatura seccional e encontrar as isometrias $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Palavras-chave: 3-variedades homogêneas, classificação, isometrias, campo de Killing, curvatura seccional.

Abstract

In this work, we will study some results proposed by Eric Toubiana in his notes “Note sur les variétés homogènes de dimension 3” [Tou07]. We present the classification of simply connected homogeneous manifolds of dimension three dimensions by the size of the isotropy group. When the isotropy group has dimension 1, these spaces are called $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. In the spaces $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, we will calculate the sectional curvature and find the isometries $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Keywords: homogeneous 3-manifolds, classification, isometries, Killing fields, sectional curvature.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 1 |
| 1 Preliminares | 2 |
| 1.1 Grupos de Lie | 2 |
| 1.2 Submersão Riemanniana | 5 |
| 1.3 Espaços homogêneos e variedades homogêneas | 7 |
| 1.3.1 Variedades homogêneas tridimensionais | 9 |
| 2 Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ | 12 |
| 2.1 Definição | 12 |
| 2.2 Construção do campo vertical unitário V | 14 |
| 2.3 Fibrção Riemanniana | 19 |
| 2.4 Sistema de coordenadas | 20 |
| 2.5 Conexão Riemanniana | 21 |
| 2.6 Estrutura métrica | 26 |
| 2.7 Cálculo das curvaturas seccionais | 35 |
| 3 Isometrias dos Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ | 39 |
| 3.1 Isometrias no caso $\kappa \neq 0$ | 40 |
| 3.2 Isometrias no caso $\kappa = 0$ | 45 |
| 4 Prova de que o campo V é um campo Killing | 48 |
| 4.1 Teorema do Campo de Killing nos Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ | 48 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 60 |
| REFERÊNCIAS | 63 |
| APÊNDICES | 63 |
| A Um pouco mais sobre grupos de Lie | 64 |
| A.1 Outros exemplos | 64 |
| A.2 Translações à esquerda e à direita | 64 |
| A.3 Morfismos | 65 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| A.4 | A Componente conexa da identidade | 69 |
| A.5 | Ações de grupos | 69 |
| A.6 | Campos invariantes | 70 |
| B | Álgebra de Lie | 72 |
| B.1 | Definição | 72 |
| B.2 | Correspondência grupo-álgebra | 73 |
| C | Grupos de Lie métricos | 75 |
| C.1 | Métricas invariantes à esquerda e métricas bi-invariantes | 75 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Submersão | 5 |
| 2.1 | Os espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, de acordo com os parâmetros κ e τ satisfazendo $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Quando $\tau = 0$, temos os produtos Riemannianos $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, quando $\kappa > 0$ e $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, quando $\kappa < 0$. No caso $\tau \neq 0$, temos o grupo de Heisenberg Nil_3 quando $\kappa = 0$, o recobrimento universal do Grupo Especial de matrizes, $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, quando $\kappa < 0$ e finalmente as esferas de Berger $\mathbb{S}_{\text{Berger}}^3$, quando $\kappa > 0$. A curva destacada representa os casos $\kappa - 4\tau^2 = 0$, onde a métrica converge para um espaço homogêneo cujo grupo de isometrias tem dimensão seis, a saber a 3-esfera $\mathbb{S}^3(\kappa)$ de curvatura $\kappa > 0$ ou o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 quando $\kappa = \tau = 0$ | 14 |
| A.1 | A ação do grupo $\text{SO}(3)$ em \mathbb{S}^2 e por meio de rotações de \mathbb{R}^3 em torno da origem 0 , que deixam a esfera \mathbb{S}^2 invariante. | 70 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ | 14 |
| B.1 | Alguns Grupos de Lie importantes ($\pi_1(\mathbf{G})$ é o grupo fundamental). | 74 |

INTRODUÇÃO

Esta dissertação teve como base as notas de Eric Toubiana “Note sur les Varietes Homogenes de Dimension 3” [Tou07]. As variedades homogêneas tridimensionais e simplesmente conexas estão todas classificadas. Essas variedades têm grupo de isometrias de dimensão seis, quatro ou três. No caso em que a dimensão do grupo de isometria é quatro, essas variedades são chamadas de espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Tais variedades são fibrações sobre uma forma espacial bidimensional. As fibras são geodésicas e existe uma família a um parâmetro de translações ao longo das fibras, geradas por um campo de Killing unitário, também chamado de campo vertical. Os $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ são classificados, a menos de isometrias, pela curvatura κ da superfície base da fibração e a curvatura do fibrado τ , onde κ e τ são números reais satisfazendo $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. O principal objetivo do trabalho é encontrar as isometrias dos $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Além disso, também vamos fazer a classificação e encontrar as curvaturas seccionais. Nesse trabalho vamos admitir que o leitor tenha conhecimentos básicos de Topologia, Variedades Diferenciáveis e Geometria Riemanniana. Os capítulos foram organizados da seguinte forma:

O capítulo 1 é uma preliminar, onde vamos listar resultados importantes para a sequência do trabalho. Na primeira seção, iniciaremos com a definição de um grupo de Lie, e depois vamos revisar alguns tópicos de Submersões Riemannianas e Espaços Homogêneos.

No capítulo 2, discutiremos mais a fundo os espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, incluindo a sua estrutura métrica e curvaturas seccionais.

Por fim, no capítulo 3 vamos mostrar como obter as isometrias dos Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, a partir da separação em dois casos: primeiro pra os espaços em que $\tau \neq 0$ e depois para $\tau = 0$.

1 Preliminares

Neste primeiro capítulo, daremos algumas noções e resultados de Grupos de Lie, Fibrções, Submersões Riemannianas e Variedades Riemannianas homogêneas que são importantes para seguimento do trabalho. Vamos admitir que o leitor tenha algum conhecimento de topologia, variedades diferenciáveis e de geometria Riemanniana.

1.1 Grupos de Lie

Um Grupo de Lie é uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo, em que as operações multiplicação e inversão são diferenciáveis.[‡]

Definição 1.1.1 (Grupo de Lie). *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo de modo que as aplicações*

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sejam diferenciáveis.

A seguir vamos adotar a convenção da justaposição $g \cdot h = gh$ da operação do grupo no grupo de Lie, exceto em certos grupos abelianos aditivos, como \mathbb{R}^n . É tradicional denotar o elemento de identidade de um grupo de Lie arbitrário pelo símbolo e , e seguimos esta convenção, exceto em exemplos específicos em que há notações mais comuns (como $\mathbb{1}_n$ para a matriz identidade em um grupo de matrizes, ou $0 = (0, \dots, 0)$ para o elemento identidade em \mathbb{R}^n). Por simplicidade, vamos nos referir aos grupos apenas por G ao invés de $(G, *)$, isso quando os grupos forem bastante conhecidos e não acarretarem ambiguidade da operação $*$.

Exemplo 1.1.2. *O conjunto dos números reais \mathbb{R} é uma variedade suave unidimensional e também um grupo comutativo com respeito a adição. Note dado $a, b \in \mathbb{R}$, as operações $(a, b) \mapsto a + b$ e $a \mapsto -a$ são suaves. Logo \mathbb{R} é um grupo de Lie. Analogamente \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n também são grupos de Lie comutativos. Na verdade todo espaço*

[‡]A menos que indicado de outra forma, quando expressamos que algo é diferenciável, o consideraremos como sendo de classe C^∞ .

vetorial de dimensão finita com sua estrutura de grupo aditivo é um grupo de Lie. Por exemplo, o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, é um espaço vetorial com estrutura de grupo aditivo, sendo isomorfo a \mathbb{R}^{mn} .

Exemplo 1.1.3 (Grupo Linear das matrizes inversíveis reais de ordem $n \times n$). O grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ é uma variedade diferenciável n^2 -dimensional, pois é uma subvariedade aberta de $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$, $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. De fato, se $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função determinante de uma matriz, então $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Assim sendo, como $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é aberto e o determinante é uma função contínua, segue que $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é um aberto de \mathbb{R}^{n^2} , e portanto uma subvariedade de mesma dimensão que \mathbb{R}^{n^2} . Agora note que as operações de multiplicação e inversão abaixo

$$\theta : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}), (A, B) \mapsto AB = C \text{ onde } C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$$

e

$$\Theta : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1} := \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}$$

são diferenciáveis. A multiplicação é suave porque as entradas da matriz $C = AB$ são polinômios nas entradas de A e B , e a inversão é uma aplicação suave, pois as entradas de A^{-1} são funções racionais das entradas da matriz A . Logo, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Com o próximo resultado temos uma maneira prática de encontrar um grupo de Lie.

Teorema 1.1.4 (Teorema do subgrupo fechado de Cartan [Hal15]). Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , então H é uma subvariedade de G e, conseqüentemente, um subgrupo de Lie de G .

Pelo teorema anterior, todo subgrupo fechado de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ também é um grupo de Lie. Disto segue que $\text{SL}(n, \mathbb{K})$, $\text{O}(n, \mathbb{K})$ e $\text{SO}(n, \mathbb{K})$ e suas intersecções são grupos de Lie para todo $n \geq 1$. Assim como o subgrupo fechado \mathbb{Z} do grupo aditivo \mathbb{R} , sendo um grupo discreto. Veremos isso a seguir no caso do grupo linear especial $\text{SL}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.1.5 (O grupo linear especial $\text{SL}(n, \mathbb{R})$). O grupo linear especial $\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ é um grupo de Lie matricial, pois é um subgrupo fechado $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. De fato, pois $f : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$, onde $f(X) = \det X$ é um homomorfismo de grupos de Lie. Note que $\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \ker f$, sendo o núcleo do homomorfismo e, conseqüentemente, um subgrupo mergulhado. Portanto $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão $n^2 - 1$.

Para $n = 2$, podemos escrever $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ da seguinte forma

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ e é um grupo de Lie de dimensão três não compacto. O quociente $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}$ também é um grupo Lie de matriz, denotado por $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ e chamado de **grupo linear especial projetivo**, e pode ser identificado com o grupo das transformações de Möbius do plano complexo com coeficientes reais $\{z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid ad - bc = 1\}$. O subgrupo $\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \cong \mathrm{O}(1)$ é normal e discreto. Assim, tem dimensão zero e, conseqüentemente, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ também tem dimensão 3. O recobrimento universal de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ e de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ será denotado por $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$, que é um grupo de Lie de dimensão 3, simplesmente conexo. O $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$ é uma variedade importante, que será discutida mais adiante.

Exemplo 1.1.6. *O grupo Heisenberg Nil_3 é um grupo de Lie de dimensão 3, munido da operação de multiplicação de matrizes*

$$\mathrm{Nil}_3 = \left\{ A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como Variedade, Nil_3 é difeomorfo ao \mathbb{R}^3 através da função $\phi : \mathrm{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z)$. Note que essa aplicação é bijetiva e suave, pois como a matriz tem entradas suaves sua imagem por ϕ tem entradas suaves. Logo, a aplicação é suave com inversa suave. Assim, $\{(\mathrm{Nil}_3, \phi)\}$ é um atlas para Nil_3 , que define uma estrutura C^∞ em Nil_3 tal que ϕ é um difeomorfismo. Agora note que se

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nil}_3 \quad \text{então} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nil}_3.$$

Além disso, os mapas $\Phi : \mathrm{Nil}_3 \times \mathrm{Nil}_3 \rightarrow \mathrm{Nil}_3$ e $\Psi : \mathrm{Nil}_3 \rightarrow \mathrm{Nil}_3$ dados por $\Phi(X, Y) = XY$ e $\Psi(X) = X^{-1}$ são suaves. De fato, $\phi \circ \Phi \circ (\phi \times \phi)^{-1} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi \circ \Phi \circ (\phi \times \phi)^{-1}((a, b, c); (d, e, f)) = (a + d, ae + c + f, b + e) \in \mathbb{R}^3$$

é C^∞ . Agora $\phi \circ \Psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi \circ \Psi \circ \phi^{-1}((a, b, c)) = (-a, -b, ab - c)$ também é C^∞ . Logo, Nil_3 é um grupo de Lie, matricial que não é abeliano.

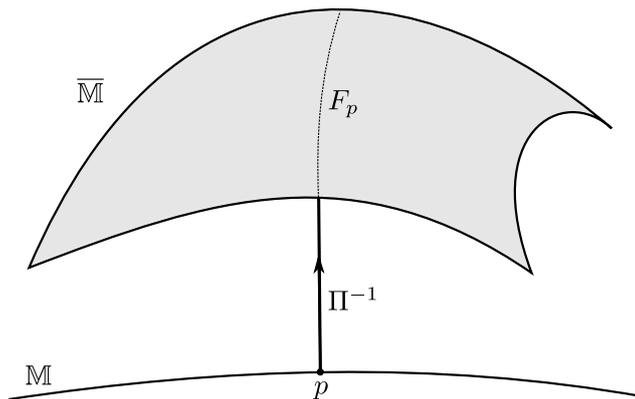


Figura 1.1: Submersão

1.2 Submersão Riemanniana

Nessa seção vamos revisar os conceitos de submersão e de submersão Riemanniana. Sejam \bar{M}^{m+n} e M^n variedades diferenciáveis de dimensões $m+n$ e n , respectivamente. Lembre-se que uma aplicação $\Pi : \bar{M}^{m+n} \rightarrow M^n$ é chamada **submersão** se $d\Pi$ for sobrejetiva (tiver posto n) e em cada ponto $\bar{p} \in \bar{M}$ e $d\Pi$ têm dimensão n . Um dos aspectos mais fundamentais das submersões é o fato que para cada $p \in M$, a fibra $\Pi^{-1}(p) = F_p$ é uma subvariedade mergulhada de \bar{M} .

Seja $\Pi : \bar{M} \rightarrow M$ uma submersão. Um vetor é vertical se for tangente a alguma fibra F_p , $p \in M$. Um vetor ortogonal a uma fibra é horizontal, e um campo horizontal é constituído por vetores horizontais. Se (\bar{M}, \bar{g}) é uma variedade Riemanniana, então $T_{\bar{p}}\bar{M}$ em cada \bar{p} tem a seguinte decomposição em soma direta:

$$T_{\bar{p}}\bar{M} = (T_{\bar{p}}\bar{M})^h \oplus (T_{\bar{p}}\bar{M})^v$$

onde $(T_{\bar{p}}\bar{M})^v = \ker(d\Pi(\bar{p})) = T_{\bar{p}}F_p$ é o **espaço vertical** e $(T_{\bar{p}}\bar{M})^h$ é o complemento ortogonal do espaço vertical, chamado de **espaço horizontal**. Logo, todo vetor $u \in T_{\bar{p}}\bar{M}$ pode ser escrito como

$$u = u^h + u^v \quad u^h \in (T_{\bar{p}}\bar{M})^h \quad u^v \in (T_{\bar{p}}\bar{M})^v$$

Se X é um campo de vetores em M , então existe um único campo de vetores \bar{X} em \bar{M} tal que $\bar{X} \in (T_{\bar{p}}\bar{M})^h$ e $d\Pi(\bar{X}) = X$. Chamamos \bar{X} o levantamento horizontal de X . Dizemos que \bar{p} e p são Π -relacionados assim como \bar{X} e X , se $\Pi(\bar{p}) = p$ e $d\Pi(\bar{X}) = X$.

Definição 1.2.1 (Submersão Riemanniana). *Sejam (\bar{M}, \bar{g}) , (M, g) variedades Riemannianas. Uma submersão $\Pi : \bar{M}^{m+n} \rightarrow M^n$ é chamada uma **submersão Riemanniana** se para todo $\bar{p} \in \bar{M}$ a restrição de $d\Pi$ a vetores horizontais preservar a métrica, isto é, se, $d\Pi|_{(T_{\bar{p}}\bar{M})^h} : (T_{\bar{p}}\bar{M})^h \rightarrow T_{\Pi(\bar{p})}M$ for uma isometria linear.*

Proposição 1.2.2 ([Hel78]). *Uma submersão Riemanniana cujo espaço total uma variedade Riemanniana completa é uma fibração localmente trivial.*

Proposição 1.2.3 ([KN69]). *Se G é um grupo de Lie métrico e H um subgrupo fechado de G . Então existe uma única métrica Riemanniana em G/H (chamada métrica da submersão), tal que o mapa de projeção $\pi : G \rightarrow G/H$ é um submersão riemanniana.*

A seguir vamos apresentar um resultado de submersões Riemanniana que pode ser encontrado em [O'N66].

Proposição 1.2.4 ([O'N66]). *Se $\Pi : \bar{M} \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana e X, Y, Z campos de vetores em M com levantamentos horizontais $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, respectivamente. Então*

1. $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$, onde $[X, Y]^v$ a componente vertical de $[X, Y]$ e $\bar{\nabla}, \nabla$ a conexão de Levi-Civita em \bar{M} , e em M , respectivamente.
2. $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^h = \overline{\nabla_X Y}$ e, conseqüentemente, $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^v = \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v$.
3. $\langle [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z} \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$ e $\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = \langle X, Y \rangle$.
4. $[V, \bar{X}]$ é vertical e $\langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, V \rangle$, onde V é um campo vertical em \bar{M} .
5. $K(X, Y) = \bar{K}(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{3}{4}\|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2$, onde \bar{K} e K denotam a curvatura seccional de \bar{M} e M , respectivamente.
6. $[\bar{X}, \bar{Y}]^h$ é Π -relacionado com $[X, Y]$.

Definição 1.2.5 (Levantamento e Levantamento Horizontal de Curvas). *Seja $c : [a, b] \rightarrow B$ uma curva suave por partes. Uma curva $\bar{c} : [a, b] \rightarrow M$ é um levantamento de c passando por $p \in \Pi^{-1}(c(a))$ quando $\Pi \circ \bar{c} = c$ e $\bar{c}(a) = p$. E se, além disto, \bar{c} é uma curva horizontal (i.e., se $\bar{c}'(t) \in (T_{c(t)}\bar{M})^h$ para todo $t \in [a, b]$), dizemos que \bar{c} é o levantamento horizontal de c partindo de p .*

Observe que se $\Pi : \bar{M} \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana, $c[a, b] \rightarrow M$ é uma curva suave e \bar{c} é um levantamento horizontal de c , então pela **Proposição 1.2.4 Item 1** temos

$$\bar{\nabla}_{\bar{\gamma}'}\bar{\gamma}' = \overline{\nabla_{\gamma'}\gamma'} + \frac{1}{2}[\bar{\gamma}', \bar{\gamma}']^v = \overline{\nabla_{\gamma'}\gamma'}$$

Em particular, fica demonstrada a seguinte proposição:

Proposição 1.2.6 ([CE75]). *Se $\Pi : M \rightarrow \Sigma$ é uma submersão riemanniana, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ e $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ um levantamento horizontal de γ . Então γ é geodésica se, e somente se, $\bar{\gamma}$ for.*

Vamos agora definir a submersão de Killing. Tal submersão é importante pelo fato que os espaços homogêneos com grupo de isometria de dimensão quatro são um caso particular das submersões de Killing.

Definição 1.2.7 (Submersão de Killing [HR10]). *Uma submersão riemanniana $\Pi : (\mathbb{M}^3, g) \rightarrow (\mathbb{M}^2, h)$ tal que:*

1. *cada fibra é uma geodésica completa,*
2. *as fibras são curvas integrais de um campo vetorial unitário Killing em \mathbb{M}^3*

*será chamada de **submersão do Killing**.*

Se V é um campo vertical de Killing então $\bar{\nabla}_V V = 0$ e isso implica que as fibras da submersão são geodésicas de \mathbb{M}^3 , que serão chamadas de geodésicas verticais.

Definição 1.2.8 (Isomorfismo). *Sejam $\Pi : \mathbb{M}^3 \rightarrow \mathbb{M}^2$ e $\Pi' : \mathbb{M}'^3 \rightarrow \mathbb{M}'^2$ duas submersões Killing. Um **isomorfismo de submersões Killing** de Π para Π' é um par (f, h) , onde $h : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{M}'^2$ é uma isometria e $f : \mathbb{M}^3 \rightarrow \mathbb{M}'^3$ é uma isometria, de modo que $\Pi' \circ f = h \circ \Pi$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{M}'^3 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ \mathbb{M}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{M}'^2 \end{array}$$

Observe que se (f, h) é um isomorfismo de submersões Killing, então f mapeia as fibras de \mathbb{M}^3 em fibras de \mathbb{M}'^3 e, se considerarmos um campo vetorial Killing vertical unitário V em \mathbb{M}^3 , então $d_p f(V)$ também é um campo vetorial Killing vertical unitário em \mathbb{M}'^3 .

1.3 Espaços homogêneos e variedades homogêneas

Nesta seção vamos descrever um novo tipo de variedades de maneiras simples e elegantes. Dado um grupo de Lie G e um subgrupo fechado K , é possível construir uma variedade diferenciável no conjunto $G/K = \{gK : g \in G\}$ de todas as classes laterais à esquerda de K em G . Além disso, veremos que o grupo G age de maneira natural e transitiva em G/K . Uma variedade com essa ação será chamada de variedade homogênea.

Definição 1.3.1. *Um **espaço homogêneo** é um espaço topológico X com uma ação transitiva de um grupo topológico[†] G . Se X for uma variedade diferenciável e G for um grupo de Lie, então X é chamada de **variedade homogênea**.*

Os próximos resultados são importantes para o desenvolvimento do trabalho e podem ser encontrada em [Lee13]. Muitas vezes os espaços homogêneos não são grupos de Lie, mas são difeomorfos a quocientes de grupos de Lie.

[†]Um grupo topológico é um espaço topológico que também é grupo, onde as operações do grupo e a inversão são contínuas.

Teorema 1.3.2 (Teorema da construção do espaço homogêneo [Lee13]). *Seja G um grupo de Lie e seja H um subgrupo fechado de G . O espaço G/H é uma variedade topológica de dimensão igual a $\dim G - \dim H$ e tem uma estrutura suave única tal que o mapa de quociente $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão suave. A ação à esquerda de G em G/H , torna G/H um espaço homogêneo.*

Teorema 1.3.3 (Teorema da Caracterização do Espaço Homogêneo [Lee13]). *Seja G um grupo de Lie que age transitivamente sobre um espaço homogêneo M e seja p qualquer ponto de M . O grupo de isotropia G_p é um subgrupo fechado de G , e a aplicação $F : G/G_p \rightarrow M$ definido por $F(gG_p) = g \cdot p$ é um difeomorfismo.*

Com esses resultados podemos construir espaços homogêneos e caracterizá-los em termos de grupos de Lie que atuam sobre M . Também podemos saber mais informações sobre o próprio grupo G que atua transitivamente sobre M .

Proposição 1.3.4 ([War83][GJ10]). *Se M é uma variedade homogênea simplesmente conexa com uma ação transitiva de um grupo de Lie G , então G^0 , a componente conexa da identidade de G , age transitivamente em M .*

O resultado anterior é importante, pois muitas vezes teremos que trabalhar com a componente conexa de G , pois não estamos supondo que G seja conexo. A seguir vamos definir variedade Riemanniana homogênea que são variedades completas conforme [DC15].

Definição 1.3.5. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita homogênea se dados $p, q \in M$ existe uma isometria $\varphi \in \text{Isom}(M, g)$ que leva p em q , isto é, $\varphi(p) = q$.*

Qualquer grupo de Lie métrico $M = (G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade homogênea: se $x, y \in M$ são dois dados elementos, a aplicação $L_{yx^{-1}}$ é uma isometria de M que leva x em y .

A seguir vamos enunciar um teorema clássico que afirma que o grupo de isometria de uma variedade homogênea Riemanniana é um grupo de Lie.

Proposição 1.3.6 (2º Teorema de Myers-Steenrod [MS39]). *O grupo de isometrias G de uma variedade Riemanniana (M, g) é um grupo de Lie de dimensão finita. Além disso, $\text{Isom}(M, g)$ é compacto se M for compacta.*

Conforme [KN69] a dimensão máxima do grupo de isometria de uma variedade Riemanniana homogênea simplesmente M é $\dim \text{Isom}(M, g) = n(n+1)/2$. Nesse caso a variedade M é um espaço forma de curvatura constante.

Proposição 1.3.7 ([GJ10]). *Se M é homogênea, os grupos de isotropia são todos conjugados e isomorfos.*

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{M}$. Então, existe $g \in \mathbf{G} = \text{Isom}(\mathbb{M})$, tal que $y = gx$. Sejam $\text{Isom}_x(\mathbb{M}) = \mathbf{G}_x$ e $\text{Isom}(\mathbb{M})_y = \mathbf{G}_y$, a seguir mostremos que $\mathbf{G}_y = g\mathbf{G}_xg^{-1}$. De fato, se $h \in \mathbf{G}_x$ temos

$$ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}g(x) = gh(x) = g(x) = y,$$

assim, $g\mathbf{G}_xg^{-1} \subseteq \mathbf{G}_y$. Revertendo e com os mesmo argumentos mostramos que $g\mathbf{G}_y g^{-1} \subseteq \mathbf{G}_x$ ou $\mathbf{G}_y \subseteq g\mathbf{G}_xg^{-1}$. Agora, defina $\phi_h : \mathbf{G}_x \rightarrow \mathbf{G}_y$ por $\phi_h(g) = hgh^{-1}$. Note que ϕ_h é um homomorfismo diferenciável, i.e, (homomorfismo de grupos de Lie) e, analogamente, $\psi_h(g) := h^{-1}gh$ é um homomorfismo diferenciável e também é a aplicação inversa de ϕ_h . Portanto, \mathbf{G}_x é isomorfo à \mathbf{G}_y . ■

Teorema 1.3.8 ([KN69]). *Seja (\mathbb{M}, g) uma variedade homogênea. Para um ponto p , o grupo de isotropia de \mathbb{M} é isomorfo a um subgrupo de $\mathbf{O}(n)$, onde $n = \dim(\mathbb{M})$.*

Demonstração. Para uma isometria $\varphi \in \text{Isom}_p(M)$, o mapa diferencial $d\varphi : T_p\mathbb{M} \rightarrow T_p\mathbb{M}$ deve satisfazer $g(X, Y)_p = g(d\varphi X, d\varphi Y)_p$ e é, portanto, uma transformação ortogonal. O mapa $\varphi \mapsto d(\varphi_p)$ é uma imersão suave (representação de isotropia em p) de $\text{Isom}_p(M)$ em $\mathbf{O}(n)$. ■

Uma importante consequência do **Teorema 1.3.8** é o seguinte resultado, que afirma que o grupo de isotropia de qualquer ponto de uma variedade homogênea é compacto.

Corolário 1.3.8.1 ([KN69]). *Seja (\mathbb{M}, g) uma variedade homogênea. Para um ponto p , o grupo de isotropia $\text{Isom}_p(\mathbb{M})$ é compacto.*

1.3.1 Variedades homogêneas tridimensionais

Nessa seção, vamos estudar variedades homogêneas tridimensionais. Primeiramente, observamos que, em dimensão dois, a classificação das variedades homogêneas simplesmente conexas é bem conhecida. Uma variedade homogênea Riemanniana \mathbb{M}^2 possui curvatura de Gauss constante. Portanto, existem apenas três tipos de variedades homogêneas simplesmente conexas: espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , esferas de curvatura seccional constante $\mathbb{S}^2(\kappa)$ e espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^2(\kappa)$. A prova dessa classificação pode ser encontrada em [Thu97] e [Sco83].

As variedades riemannianas homogêneas tridimensionais simplesmente conexas têm um grupo isometria com dimensão 6, 4 ou 3. A lista completa desses espaços é a seguinte:[FM10]

- Os espaços com o grupo de isometria 6-dimensional são os espaços-forma: o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3(\kappa)$ e a esfera padrão $\mathbb{S}^3(\kappa)$. Para simplificar, assumiremos que $\kappa = \pm 1$ e escreveremos $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3(-1)$ e $\mathbb{S}^3 = \mathbb{S}^3(1)$.

- Os espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ com o grupo de isometria de dimensão 4 são fibrações sobre os espaços-forma de espaço dimensão 2. São os espaços produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, as esferas de Berger, o espaço de Heisenberg Nil_3 e a cobertura universal do grupo Lie $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
- Os espaços com grupo de isometria tridimensional são uma certa classe de grupos de Lie dotado de uma métrica invariante esquerda; entre eles citamos especialmente o espaço Sol_3 . O espaço Sol_3 (que é a única geometria de Thurston com grupo de isometrias tridimensional, veja [Thu97]) é um grupo de Lie que possui, uma família a 2-parâmetros de métricas invariantes a esquerda, e cada qual destas métricas possui um grupo de isometrias de dimensão três. Veja também [Mil76, MIP11] para maiores detalhes sobre Sol_3 e sobre outros grupos de Lie com grupo de isometrias de dimensão três.

A partir de agora vamos seguir a construção apresentadas em [Tou07]. No que segue, \mathbb{M}^3 é uma variedade homogênea, simplesmente conexa de dimensão três e seja \mathbf{G} o grupo de isometrias. Então, pelo Teorema 1.3.8 e seu corolário, segue que, para cada $p \in \mathbb{M}^3$ o grupo de isotropia \mathbf{G}_p é um subgrupo compacto de $\mathbf{O}(T_p\mathbb{M}^3) \cong \mathbf{O}(3)$, sendo um subgrupo de Lie de $\mathbf{O}(3)$. Assim, a dimensão máxima do grupo de isotropia é 3. Conseqüentemente, temos $\dim(\mathbf{G}) \in \{3, 4, 5, 6\}$, pois $\dim \mathbb{M}^3 = 3 = \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{G}_p$, mas mas o caso $\dim(\mathbf{G}) = 5$ não acontece, como mostraremos a seguir.

Lema 1.3.9. *O grupo de Lie $\mathbf{O}(3)$ não admite subgrupo bidimensional.*

Demonstração. Suponha que \mathbf{H} seja um subgrupo de Lie de $\mathbf{O}(3)$ de dimensão dois. Portanto, existe uma subálgebra de Lie bidimensional \mathfrak{h} da álgebra de Lie de $\mathbf{O}(3)$. Note que a álgebra de Lie de $\mathbf{O}(3)$ é $\mathfrak{o}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$ o espaço vetorial das matrizes anti-simétricas. Mas $\mathfrak{o}(3)$ é isomorfa a (\mathbb{R}^3, \times) a álgebra de Lie dotada do produto vetorial de vetores do \mathbb{R}^3 , através do mapa $\Theta : (\mathfrak{o}(3), [,]) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \times)$

$$\begin{aligned} A &\mapsto \hat{i} \\ B &\mapsto \hat{j} \\ C &\mapsto \hat{k}, \end{aligned}$$

que é um isomorfismo de álgebra de Lie, ou seja, um isomorfismo linear que preserva colchetes de Lie, onde $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^3 e A, B, C são matrizes dadas por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(3).$$

Portanto, $\Theta(\mathfrak{h})$ seria uma subálgebra de Lie (\mathbb{R}^3, \times) de dimensão 2, que é uma contradição dado que para quaisquer dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ linearmente independentes

$u \times v$ é ortogonal ao espaço gerado por $\{u, v\}$. ■

No que segue chamamos de H a componente conexa da identidade de G e $K = (G_x)^0$ a componente conexa da identidade do subgrupo de isotropia de G no ponto x . Note que K é isomorfo a algum subgrupo de $SO(3)$. Assim podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.3.10 ([Tou07]). *Então existem três casos possíveis para K :*

- (1) $\dim K = 3$ e, então, $K \simeq SO(3)$.
- (2) $\dim K = 1$ e, portanto, $K \simeq SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$.
- (3) $\dim K = 0$ e, portanto, $K = \{\text{Id}\}$, em que Id é a aplicação identidade de \mathbb{M}^3 .

Demonstração. Se $\dim K = 3$, como K é conexo, basta olhar para sua álgebra de Lie, que tem que ser $\mathfrak{so}(3)$ (matrizes anti-simétricas) que é a mesma álgebra de Lie de $SO(3)$. Se $\dim K = 0$, então $K = \{\text{Id}\}$. Se $\dim K = 1$, então K é um grupo de Lie compacto e conexo de dimensão 1. Portanto, deve ser abeliano e conseqüentemente isomorfo a \mathbb{S}^1 . ■

Pelos [Teorema 1.3.2](#), [Teorema 1.3.3](#) e [Proposição 1.3.4](#), temos que $\dim H - \dim K = 3$ e assim, com os últimos resultados, podemos deduzir o seguinte resultado.

Proposição 1.3.11 ([Tou07]). *Existem três possibilidades para H :*

1. $\dim H = 6$ e, neste caso, $\dim K = 3$ e $K \simeq SO(3)$.
2. $\dim H = 4$ e, neste caso, $\dim K = 1$ e $K \simeq SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$.
3. $\dim H = 3$ e, neste caso, $K = \{\text{Id}\}$, onde Id é a identidade de \mathbb{M}^3 .

A seguir, vamos comentar algumas das características de \mathbb{M}^3 para cada uma das possíveis dimensões de H . Se $\dim H = 6$, então $\dim K = 3$ e daí $K \simeq SO(3)$. Em particular, para qualquer $p \in \mathbb{M}^3$, dados dois planos $U, V \subset T_p \mathbb{M}^3$ existe uma isometria em K que leva U em V . Isso mostra que a curvatura seccional de \mathbb{M}^3 é uma constante κ , e portanto, como \mathbb{M}^3 é simplesmente conexa, temos três possibilidades:

1. (\mathbb{M}^3, g) é isométrico à \mathbb{R}^3 se $\kappa = 0$.
2. (\mathbb{M}^3, g) é isométrico à $\mathbb{H}^3(\kappa)$ se $\kappa < 0$.
3. (\mathbb{M}^3, g) é isométrico à $\mathbb{S}^3(\kappa)$ se $\kappa > 0$.

Se $\dim H = 3$, então K é trivial. Nesse caso, temos $\mathbb{M} = G^0$ e, portanto, \mathbb{M}^3 é um grupo de Lie de dimensão 3, simplesmente conexo.

Por fim, quando $\dim H = 4$, $\dim K = 1$ e $K \cong SO(2)$. Esses espaços são de interesse desta dissertação, e serão mais bem descritos na Seção 2.3. Eles são comumente classificados a partir de dois parâmetros reais κ e τ que satisfazem $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ e usualmente denotados por espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

2 Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Nesse capítulo, estudaremos alguns aspectos dos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, apresentando sua definição e mostrando que toda variedade homogênea, simplesmente conexa, cujo grupo de isometrias possui dimensão 4 é isométrica a um desses espaços. Um ponto crucial nessa demonstração é o fato que toda variedade que cumpre essas hipóteses possui um campo de Killing invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias.

2.1 Definição

Sejam $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ dados satisfazendo $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. O espaço $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é o espaço total de uma fibração Riemanniana $\Pi : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ sobre uma superfície Σ^2 , simplesmente conexa de curvatura constante κ , com curvatura de fibrado τ . As fibras são geodésicas e existe uma família a um parâmetro de translações ao longo das fibras, gerada por um campo de Killing V , também chamado de campo vertical. As translações ao longo das fibras são isometrias. Portanto, o campo Killing V gera um subgrupo de $G = \text{Isom}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$. Além disso, se τ denota a curvatura do fibrado de Π , vale a relação $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$.

Observamos que, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ fica unicamente determinada, a menos de isometrias, por κ e τ e veremos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3)$ temos $\bar{\nabla}_X V = \tau(X \wedge V)$, onde \wedge representa o produto vetorial em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (conforme [Lema 2.6.2](#)), cujo sinal depende da orientação escolhida. Agora, dado $p \in \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, podemos utilizar a estrutura da submersão $\Pi : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ para decompor $T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ em suas partes horizontal e vertical. Primeiramente, observamos que $(T_p \mathbb{E}^3)^v = \ker(d\pi_p) = \text{span}\{V\}$ e

$$(T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau))^h = \{v \in T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) : \langle v, V(p) \rangle = 0\}.$$

Se $\kappa > 0$, então $\Sigma^2(\kappa)$ é topologicamente S^2 , em particular a base é compacta e \mathbb{E}^3 pode ser difeomorfa a S^3 (quando $\tau \neq 0$, cada fibra é difeomorfa a S^1 e $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é isométrico às esferas de Berger) ou topologicamente um produto $S^2 \times \mathbb{R}$ (quando $\tau = 0$), com fibra \mathbb{R} . Quando κ se aproxima de $4\tau^2$ as métricas das esferas de Berger se aproximam da métrica redonda de S^3 com curvatura constante κ .

Se $\kappa \leq 0$, então a base é sempre difeomorfa a \mathbb{R}^2 e as fibras difeomorfas a \mathbb{R} , de modo que o espaço $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é topologicamente \mathbb{R}^3 . Quando $\tau = 0$ e $\kappa \leq 0$ obtemos um

produto Riemanniano $\Sigma^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ e quando (κ, τ) se aproximam de $(0, 0)$, a métrica de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ converge para a métrica plana do \mathbb{R}^3 .

Explicitamente, podemos definir os espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ da seguinte forma:

Definição 2.1.1. *Os espaços $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), g)$ são o espaço total de uma submersão de Killing sobre uma forma espacial $(\Sigma^2(\kappa), ds^2)$ de curvatura constante κ . Mais especificamente, sejam*

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{1+\kappa(x^2+y^2)} & \text{se } \kappa \neq 0, \\ 1 & \text{se } \kappa = 0. \end{cases}$$

e

$$\Sigma^2(\kappa) = \begin{cases} (D(1/\sqrt{-\kappa}), \lambda^2(dx^2 + dy^2)) & \text{se } \kappa < 0, \\ (\mathbb{R}^2, \lambda^2(dx^2 + dy^2)) & \text{se } \kappa \geq 0, \end{cases}$$

onde denotamos, $R > 0$, $D(R)$ o disco de raio R .

Então se $\kappa \leq 0$ ou se $\tau = 0$, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = (\Sigma^2(\kappa) \times \mathbb{R}, g)$, com

$$g = \begin{cases} \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\tau\lambda(y dx - x dy) + dt)^2 & \text{se } \kappa \neq 0, \\ dx^2 + dy^2 + (\tau(y dx - x dy) + dt)^2 & \text{se } \kappa = 0, \end{cases}$$

no caso $\kappa > 0$, $\tau \neq 0$ o espaço $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é difeomorfo a \mathbb{S}^3 e $(\Sigma^2(\kappa) \times \mathbb{R}, g)$ é um sistema de coordenadas para o complemento de um ponto.

Definição 2.1.2 (Curvatura do Fibrado). *Seja $\Pi : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ uma fibração riemanniana com fibras geodésicas. Sua curvatura do fibrado τ é um aplicação $\tau : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\tau(y) := \frac{1}{2} \langle [X, RX], V \rangle$$

onde $[X, RX]^v = 2\tau(y)V$, X é um campo unitário horizontal arbitrário ao longo de $\pi^{-1}(y)$ e R é uma rotação de $\pi/2$ em $(T_p\mathbb{E}^3)^h$.

Observação 2.1.3. *Como Σ^2 é orientado, existe uma rotação de ângulo $\pi/2$ em $T_y\Sigma^2$, e isso induz uma rotação R de $\pi/2$ em $(T_p\mathbb{E}^3)^h$.*

Vamos mostrar mais adiante que se M é uma variedade homogênea, tridimensional, simplesmente conexa com grupo de isometria com dimensão 4, que cumpre essas hipóteses então M é isométrica a um dos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Antes disso, na próxima seção vamos mostrar como obter um campo de vetores V (que mostraremos ser um campo de Killing no **Capítulo 4** do trabalho) que é crucial para obtermos a estrutura de espaço total de um fibração Riemanniana $\Pi : \mathbb{M}^3 \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ em uma superfície simplesmente conexa de curvatura constante κ , $\Sigma^2(\kappa)$.

Tabela 2.1: Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

| curv. | $\kappa < 0$ | $\kappa = 0$ | $\kappa > 0$ |
|---------------|--|----------------|----------------------------------|
| $\tau = 0$ | $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ | — | $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ |
| $\tau \neq 0$ | $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ | Nil_3 | $\mathbb{S}_{\text{Berger}}^3$ |

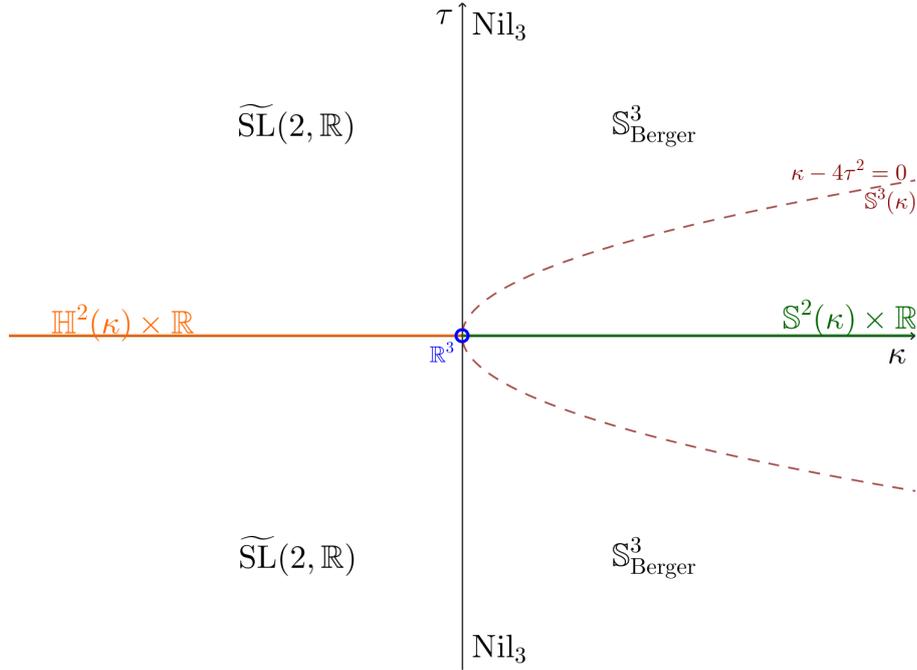


Figura 2.1: Os espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, de acordo com os parâmetros κ e τ satisfazendo $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Quando $\tau = 0$, temos os produtos Riemannianos $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, quando $\kappa > 0$ e $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, quando $\kappa < 0$. No caso $\tau \neq 0$, temos o grupo de Heisenberg Nil_3 quando $\kappa = 0$, o recobrimento universal do Grupo Especial de matrizes, $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, quando $\kappa < 0$ e finalmente as esferas de Berger $\mathbb{S}_{\text{Berger}}^3$, quando $\kappa > 0$. A curva destacada representa os casos $\kappa - 4\tau^2 = 0$, onde a métrica converge para um espaço homogêneo cujo grupo de isometrias tem dimensão seis, a saber a 3-esfera $\mathbb{S}^3(\kappa)$ de curvatura $\kappa > 0$ ou o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 quando $\kappa = \tau = 0$.

2.2 Construção do campo vertical unitário V

Seja M uma variedade homogênea simplesmente conexa cujo grupo de isometrias $G = \text{Isom}(M)$ tenha dimensão 4. Ao longo da seção, assim como fizemos no final do capítulo 1, vamos chamar de H a componente conexa da identidade de G e $K = (G_p)^0$ a componente conexa da identidade do subgrupo de isotropia de G no ponto p .

Lema 2.2.1. *Se $\dim H = 4$ ou seja, $K \simeq \text{SO}(2)$, então existe um campo unitário $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$d_p g V_p = V_p.$$

$\forall g \in K.$

Demonstração. Seja $g \in \mathbf{K}$, $g \neq \text{Id}$. Observe que $(g)_*$, a aplicação linear tangente de g em p é uma isometria de $T_p M$ em si mesmo, com uma rotação em torno de uma reta passando pela origem em \mathbb{R}^3 , que é um elemento de $\mathbf{SO}(3)$. Além disso, o determinante dessa aplicação é 1 e, como, estamos na dimensão 3, um dos autovalores é 1, em virtude das propriedades de $\mathbf{SO}(3)$. Assim, existe um autovetor $V_p \in T_p M$ associado a 1: $d_p g(V_p) = (V_p)$, cujo o auto-espaço denotamos por $\mathcal{L}_p = \{tV_p \in M : t \in \mathbb{R}\}$. Considere agora outra isometria h no estabilizador de p , $h \in \mathbf{K}$. Como $\mathbf{K} \simeq \mathbf{SO}(2)$ deduzimos que o grupo \mathbf{K} é comutativo, portanto $g \circ h = h \circ g$. Isso nos dá

$$d_p g(d_p h(V_p)) = d_p (g \circ h)(V_p) = d_p (h \circ g)(V_p) = d_p h(d_p g(V_p)) = d_p h(V_p).$$

Assim, $d_p h(V_p)$ também é um autovetor de $d_p g$ e $\|d_p h V_p\| = 1$, pois h é uma isometria. Assim, $\|V\| = 1$. Deduzimos que $d_p h(V_p) = \pm V_p$. Como g e h pertencem $\mathbf{K} \simeq \mathbf{SO}(2)$, que é conexo por caminhos, isso nos permite tomar um caminho contínuo α , que leve g a h , ou seja, um mapa

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] \times \mathbf{K} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (t, y) &\longmapsto \alpha_t(y) \end{aligned}$$

que satisfaz

$$\alpha_t(y) = \begin{cases} g, & \text{se } t = 0; \\ h, & \text{se } t = 1; \\ p, & \text{se } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Note que $d_p \alpha_0 V_p = d_p g V_p = V_p$, assim, pela continuidade e pela conectividade, temos que $d_p \alpha_t V_p = V_p$ para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, deduzimos que $d_p h(V_p) = V_p$, $\forall h \in \mathbf{K}$. ■

Lema 2.2.2 ([Tou07]). *Para todo $g \in \mathbf{G}$ e V como obtido no Lema anterior, temos:*

$$d_p g(V_p) = \pm V_{g(p)}, \forall p \in M.$$

Além disso, para todo $g \in \mathbf{G}^0 = \mathbf{H}$, temos:

$$d_p g(V_p) = V_{g(p)}, \forall p \in M.$$

Demonstração. Sejam $g \in \mathbf{G}$, $p \in M$ e $f \in \mathbf{G}_{g(p)}^0$. Como $\mathbf{G}_{g(p)} = g\mathbf{G}_p g^{-1}$, existe $h \in \mathbf{G}_p$ de tal forma que $f = ghg^{-1}$. Como f pertence à componente conexa da identidade de $\mathbf{G}_{g(p)}$, a isometria h deve estar na componente conexa da identidade de \mathbf{G}_p . Então pelo

Lema 2.2.1, $h \in \mathbf{G}_p^0$ implica $d_p h(V_p) = V_p$. Assim temos:

$$\begin{aligned} d_p(f \circ g)(V_p) &= d_p(g \circ h)(V_p) \\ &= (d_{h(p)}g \circ d_p h)(V_p) \\ &= d_p g(V_p). \end{aligned}$$

Deduzimos, portanto:

$$d_{g(p)}f(d_p g(V_p)) = d_p g(V_p).$$

Como resultado, $d_p g(V_p)$ é um autovetor de $d_{g(p)}f$ associado ao autovalor 1. Ao escolher $f \neq \text{Id}$, concluímos que $d_p g(V_p) = \pm V_{g(p)}$. Agora, se $g \in \mathbf{G}^0$, existe um caminho contínuo que liga g a Id em \mathbf{G}^0 . Portanto, devemos ter $d_p g(V_p) = V_{g(p)}$, que encerra a prova. ■

Agora como o campo unitário V é invariante à esquerda por \mathbf{H} , ele é completo e gera um fluxo global φ em M

$$\begin{cases} \varphi_0(x) := x \\ \frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) = V_{\varphi_t(x)} \end{cases} \quad (2.1)$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$. Esse fluxo determina uma folheação \mathcal{F} unidimensional (co-dimensão 2). Cada folha dada por $\mathcal{F}_x := \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma variedade unidimensional conexa, e portanto, é difeomorfa a \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 . A saber, a aplicação $t \rightarrow \varphi_t(x)$ é uma curva integral para V_x passando por x . Uma propriedade útil desse fluxo é apresentada abaixo:

Lema 2.2.3 ([GJ10]). *A ação de \mathbf{H} sobre M comuta com o fluxo (2.1). Mais explicitamente*

$$\varphi_t \circ g(x) = g \circ \varphi_t(x) \quad (2.2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $g \in \mathbf{H}$ e todo $x \in M$.

Demonstração. Vamos mostrar que dados $x \in M$ e $g \in \mathbf{H}$ a aplicação $t \mapsto g\varphi_t(x)$ é uma curva integral para V_{gx} passando por x . Agora, aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(x)) \right|_{t=0} &= dg_{\varphi_0(x)} \left(\left. \frac{d}{dt}\varphi_t(x) \right|_{t=0} \right) \\ &= dg_x \varphi_0'(x) \\ &= dg_x V_x \\ &= V_{gx}. \end{aligned}$$

agora para $t = s$, temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(x)) \right|_{t=s} &= \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(\varphi_s(x))) \right|_{t=s} \\ &= V_{g\varphi_s(x)}. \end{aligned}$$

Note que a última igualdade é garantida pela \mathbf{H} -invariância do fluxo. Pela unicidade da curva integral, o resultado segue. \blacksquare

Decorre do lema acima que o fluxo preserva as folhas.

Observação 2.2.4. *O subgrupo de isotropia de um elemento na submersão é igual ao longo de toda fibra, portanto fixa toda a fibra.*

De fato, dado $g \in \mathbf{H}_x$ tem-se $gx = x$, por definição. Pelo [Lema 2.2.3](#), temos $g\varphi_t(x) = \varphi_t(gx) = \varphi_t(x)$, o que implica em $g \in \mathbf{H}_{\varphi_t(x)}$. Portanto, $\mathbf{H}_x \subseteq \mathbf{H}_{\varphi_t(x)}$ e trocando x por $\varphi_t(x)$ temos $\mathbf{H}_x \supseteq \mathbf{H}_{\varphi_t(x)}$ e, enfim, $\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_{\varphi_t(x)}$.

Definição 2.2.5. *Um **campo de 2-planos** sobre M é uma aplicação, $P : x \mapsto P_x$, que a cada ponto $x \in M$ da variedade corresponde um plano seccional, P_x , isto é, um subespaço vetorial de T_xM bidimensional.*

Um campo de 1-plano é também chamado de **campo de retas**. No início da seção vimos que o campo unitário V determina um campo de retas $\mathcal{L} : x \rightarrow \mathcal{L}_x$, onde $\mathcal{L}_x := \{kV_x : k \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço unidimensional de T_xM , que é o mesmo que $T_x\mathcal{F}$. Considere o complemento ortogonal de \mathcal{L}_x em T_xM , que é dado por $P_x = \{v \in T_xM : \langle v, V_x \rangle = 0\} = (\mathcal{L}_x)^\perp$, onde podemos induzir um produto interno e uma norma em cada \mathcal{L}_x e P_x .

Proposição 2.2.6 ([\[Alm03\]](#)). *A folheação \mathcal{F} é invariante pela ação de \mathbf{H} .*

Demonstração. Sejam $v \in T_x\mathcal{F} = \mathcal{L}_x = \{kV_x : k \in \mathbb{R}\}$ e $g \in \mathbf{H}$, basta mostrar que $dg(v) \in T_{g(x)}\mathcal{F}$. Observe que se $h_{gx} \in \mathbf{H}_{gx}$, existe um elemento $h_x \in \mathbf{H}_x$ tal que $h_{gx} = gh_xg^{-1}$ e como $v \in T_x\mathcal{F} = \mathcal{L}_x = \{kV_x : k \in \mathbb{R}\}$ temos $dh_x(v) = v$ para todo $h_x \in \mathbf{H}_x$. Agora note que

$$dh_{gx}(dg(v)) = d(gh_xg^{-1})(dg(v)) = dg(dh_x(v)) = dg(v)$$

Logo, $dg(v)$ fica fixo pela ação de \mathbf{H}_{gx} e portanto pertence a $T_{gx}\mathcal{F}$. \blacksquare

Seja P um campo de plano de dimensão 2, ortogonal a \mathcal{F} em algum ponto de \mathbb{M}^3 (ou ortogonal ao campo de reta L). Observe que P é invariante pela ação de \mathbf{H} , já que \mathcal{F} e a métrica riemanniana são.

Lema 2.2.7 ([\[GJ10\]](#)). *O campo de planos P é \mathbf{H} -invariante, i.e., $d_xg(P_x) = P_{gx}$ para todo g em \mathbf{H} e todo $x \in M$.*

Demonstração. De fato, dados g em H , $x \in M$ e $v \in T_{gx}M$, temos que $v = d_x g(u) \in d_x g(P_x)$. Por definição, u pertence a P_x se, e somente se, $\langle u, V_x \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle d_x g(u), d_x g(V_x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle d_x g(u), V_{gx} \rangle = 0$ se, e somente se, $d_x g(u)$ pertence a P_{gx} . Portanto, $d_x g(P_x) = P_{gx}$. ■

Lema 2.2.8 ([GJ10]). *Sejam o fluxo φ_t , \mathcal{L} e P , como vimos acima. Então, o fluxo preserva*

- i) o campo de retas \mathcal{L} , i.e., $d_x \varphi_t(v) \in \mathcal{L}_{\varphi_t(x)}$ para todo $v \in \mathcal{L}_x$,
- ii) o campo de planos P , i.e., $d_x \varphi_t(u) \in P_{\varphi_t(x)}$ para todo $u \in P_x$,
- iii) e o fluxo preserva a ortogonalidade entre \mathcal{L} e P , i.e., e $u \perp V_x$ implica $d_x \varphi_t(u) \perp d_x \varphi_t(V_x)$.

Demonstração. i) Primeiramente, observe que o fluxo preserva o campo de retas \mathcal{L} , pois o fluxo é uma curva integral desse campo.

iii) Tome g em $H_{\varphi_t(x)}$, tal que $d_y g$ seja uma rotação de ângulo π em torno de $V_y = V_{\varphi_t(x)}$. Pela **Observação 2.2.4**, temos que g pertence a H_x , uma rotação de ângulo π em torno de V_x , logo $d_x g(u) = -u$. Como o fluxo comuta com a ação de H

$$\begin{aligned} d_y \varphi_t^{-1} \cdot (d_y g \cdot d_x \varphi_t \cdot u) &= d_x (\varphi_t^{-1} g \varphi_t) \cdot u \\ &= d_x g \cdot u = -u \end{aligned}$$

Logo, devemos ter $d_x \varphi_t \cdot u \perp V_{\varphi_t(x)}$, $v = d_x \varphi_t \cdot u$.

ii) Seja v um vetor em $P_x \subset T_x M$, onde x é um ponto de M , e seja $y = \varphi_t(x)$, para um $t \in \mathbb{R}$. Escreva $w = d_x \varphi_t(v) \in T_y M$ como $w = w_{\mathcal{F}} + w_P$, onde $w_{\mathcal{F}} \in T_y \mathcal{F}$ e $w_P \in P_y$. Suponha por absurdo que $w_{\mathcal{F}}$ seja não nulo. Nesse caso, o vetor $(d_x \varphi_t)^{-1}(w_{\mathcal{F}})$ seria um vetor não nulo de $T_y \mathcal{F}$, já que φ_t é um difeomorfismo que preserva $T\mathcal{F}$. Mas isso seria um absurdo porque $(d_x \varphi_t)^{-1}(w) = v$. Logo, $w_{\mathcal{F}}$ é nulo, ou seja, $w \in P_y$. ■

Proposição 2.2.9 ([GJ10]). *O fluxo φ age por isometrias sobre as folhas \mathcal{F}_x , ou seja, sobre o campo de retas L_x .*

Demonstração. Fixando $x \in \mathbb{M}^3$, $v \in T_x \mathcal{F} = L_x$, $t \in \mathbb{R}$ e $d_x \varphi_t(x)V_x = V_{\varphi_t(x)}$ temos:

$$\begin{aligned} \langle d_x(\varphi_t(x))v, d_x(\varphi_t(x))v \rangle &= \langle d_x(\varphi_t(x))kV_x, d_x(\varphi_t(x))kV_x \rangle \\ &= \langle kd_x(\varphi_t(x))V_x, kd_x(\varphi_t(x))V_x \rangle \\ &= \langle kV_x, kV_x \rangle \\ &= k^2 = \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

■

A seguir vamos enunciar um resultado importante sobre o campo vetorial V , mas por enquanto vamos adiar essa prova, deixando isso para o final do trabalho, no [Capítulo 4](#).

Proposição 2.2.10 ([Ple12],[eBK10]). *Seja $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ uma submersão Riemanniana com fibras geodésicas, então o campo vetorial V é um campo Killing.*

2.3 Fibrção Riemanniana

Nesta seção, vamos demonstrar que M é isométrica a algum espaço $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ como definidos na [Seção 2.1](#). O primeiro ponto, crucial na argumentação, é o de utilizar o campo V e as suas principais propriedades apresentadas na [Seção 2.2](#) para mostrar que existe $\kappa \in \mathbb{R}$ e uma submersão Riemanniana $\Pi : M \rightarrow \Sigma(\kappa)$, onde $\Sigma(\kappa)$ e a superfície simplesmente conexa de curvatura constante κ .

Tendo definido o campo V , obtemos uma folheação \mathcal{F} de M em que as folhas são variedades unidimensional conexas, e portanto, todas difeomórfas a \mathbb{R} ou a \mathbb{S}^1 . Seja $x \in M$ e seja $h \in \mathbf{K}$ (componente conexa da identidade do grupo de isotropia \mathbf{G}_x), observe que h fixa cada ponto de \mathcal{F}_x . Além disso, h atua próximo a x como uma rotação em torno de \mathcal{F}_x , portanto, a folha \mathcal{F}_x não pode acumular (\mathcal{F} é $\mathbf{SO}(2)$ -invariante).

Por outro lado, V é um campo de Killing, conforme o [Teorema 4.1.1](#) e também em [Tou07] e [Thu97]. Conseqüentemente, o fluxo de difeomorfismos gerados por V consiste em isometrias de M . Isso mostra que duas folhas separadas não podem se acumular (se mantém a uma distância positiva). Logo para cada duas folhas dadas, existe uma isometria g que leva uma folha na outra, levando-se em conta que g já é uma isometria e também uma isometria com a métrica induzida nas folhas. Por conseguinte, todas as folhas são isométricas a \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{R} . Além disso, \mathcal{F} são grupos de Lie com ação transitiva e livre sobre cada folha. Portanto, o quociente de M por essa foliação nos fornece uma superfície $\Sigma^2(\kappa) : \Sigma^2 = M/\mathcal{F}$.

Nessas condições podemos fornecer a Σ^2 uma métrica que faça da projeção $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa) = M/\mathcal{F}$ uma submersão riemanniana. Seja F uma isometria de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, e seja f a isometria de Σ^2 induzida por F , como dado pelo [Lema 3.0.4](#). Assim as isometrias preservam as fibras.

Como \mathcal{F} atua transitivamente em $\Sigma^2(\kappa)$ e o espaço total M é simplesmente conexo e as fibras são conexas temos uma estrutura de fibrado principal $(\Pi, M, \Sigma, \mathcal{F})$. Assim podemos mostrar que Σ^2 também é homogênea e simplesmente conexa, uma vez que M é seu recobrimento e Π é um mapa de cobertura. Logo, temos que a curvatura de Gauss de Σ^2 é constante, portanto Σ^2 é isométrica a \mathbb{R}^2 , $\mathbb{H}^2(\kappa)$ com $\kappa < 0$ ou $\mathbb{S}^2(\kappa)$ com $\kappa > 0$. Com isso fica demonstrado o próximo resultado.

Teorema 2.3.1. *Seja M uma variedade homogênea, simplesmente conexa de dimensão três cujo grupo de isometrias tenha dimensão quatro. Então existe uma submersão*

Riemanniana $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ de M para uma superfície simplesmente conexa $\Sigma^2(\kappa)$ de curvatura constante κ .

2.4 Sistema de coordenadas

A partir de agora o nosso norte é obter as conexões em M e depois a estrutura métrica. Sendo assim, para todos os casos possíveis de Σ^2 , consideramos as **coordenadas isotermiais*** (x, y) de Σ^2 , portanto, a métrica ds^2 de Σ^2 tem a seguinte expressão:

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2), \quad \text{com} \quad \lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{1+\kappa(x^2+y^2)} & \text{se } \kappa \neq 0 \\ 1 & \text{se } \kappa = 0 \end{cases}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no caso $\kappa = 0$, $(x, y) \in \mathbb{S}^2$ no caso $\kappa > 0$ e $(x, y) \in \mathbb{D}^2(1/\sqrt{-\kappa})$ no caso $\kappa < 0$, onde, para cada $r > 0$, $\mathbb{D}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$.

Observe que se Σ^2 é isométrica a \mathbb{R}^2 ou a $\mathbb{H}^2(-\kappa)$, existe um campo global em Σ^2 de vetores ortonormais (E_1, E_2) , tais que

$$E_1 = \frac{1}{\lambda} \partial_x \quad E_2 = \frac{1}{\lambda} \partial_y. \quad (2.3)$$

No caso em que Σ^2 é isométrica a $\mathbb{S}^2(\kappa)$, este campo é definido como \mathbb{S}^2 sem um ponto, por exemplo o Polo Norte, ou seja M , sem uma fibra. (Considerando a projeção estereográfica)

Agora pela **Proposição 1.2.2** a submersão $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ é Localmente trivial. Portanto, podemos considerar em cada ponto de M uma carta local \bar{U} no formato $U \times I$ em que $U \subset \Sigma^2(\kappa)$ é simplesmente conexo e aberto de $\Sigma^2(\kappa)$ e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de \mathbb{R} . Ao chamar (x, y) , as coordenadas de U e z , de I , a projeção Π tem a expressão:

$$\Pi(x, y, z) = (x, y), \quad \forall (x, y, z) \in \bar{U}.$$

Podemos encontrar um referencial associado à trivialização local anterior (E_1, E_2) em U e um campo de dois vetores horizontais (\bar{E}_1, \bar{E}_2) em \bar{U} de maneira única ($d\Pi(\bar{E}_i) = E_i, i = 1, 2$). Observe que, pela construção \bar{E}_1 e \bar{E}_2 são unitários, ortogonais e ambos ortogonais a V (pois, $\text{Span}(V)^\perp = \text{Span}\{\bar{E}_1, \bar{E}_2\}$), o campo unitário tangente às folhas de \mathcal{F} , isto é, as fibras da fibração $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$. Portanto, $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, V)$ é um referencial ortonormado em $\bar{U} \subset M$.

*são coordenadas locais em que a métrica é conforme à métrica euclidiana.

2.5 Conexão Riemanniana

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana em M . Temos para todos os campos \bar{X}, \bar{Y} de \bar{U} horizontais ([CE75]):

$$\begin{aligned} \langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, V \rangle \\ &= \bar{X} \langle \bar{Y}, V \rangle - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} V \rangle - \bar{Y} \langle \bar{X}, V \rangle + \langle \bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} V \rangle \\ &= \langle \bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} V \rangle - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} V \rangle \end{aligned}$$

Como $\bar{X} \langle \bar{Y}, V \rangle = 0 = \bar{Y} \langle \bar{X}, V \rangle$, temos:

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle = \langle \bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} V \rangle - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} V \rangle$$

Como V é um campo Killing de M , então para todos os campos A, B de $\mathfrak{X}(M)$:

$$\langle \bar{\nabla}_A V, B \rangle + \langle A, \bar{\nabla}_B V \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \langle A, \bar{\nabla}_B V \rangle = -\langle B, \bar{\nabla}_A V \rangle$$

Assim

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle = 2 \langle \bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} V \rangle \quad (2.4)$$

Por outro lado, a componente vertical de $[\bar{X}, \bar{Y}]$ para um ponto $p \in M$ depende apenas do valor dos campos \bar{X} e \bar{Y} em p e não da extensão em torno de p . Além disso, para todos os pontos $p, q \in M$, existe uma isometria positiva (preserva a orientação) $f \in \mathbf{G}^0$ tal que

$$f(p) = q \quad \text{e} \quad d_p f(\bar{E}_1(p)) = \bar{E}_1(f(p)) = \bar{E}_1(q).$$

pois $df_p \bar{E}_1(p)$ também é horizontal. Agora como V é \mathbf{G}^0 -invariantes e por **Definição 2.1.2** temos:

$$\langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle(p) = 2\tau$$

assim, temos

$$\langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle(q) = \langle [df(\bar{E}_1), df(\bar{E}_2)], df(V) \rangle(p) = \langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle(p) = 2\tau \quad (2.5)$$

Logo a componente vertical de $[\bar{E}_1, \bar{E}_2]$ denotada por $[\bar{E}_1, \bar{E}_2]^v$ é $2\tau V$ em todos os lugares.

Sendo κ e τ definidos, os próximos argumentos são para encontrar a estrutura métrica de M , demonstrando que M é de fato isométrica ao espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Proposição 2.5.1 ([CE75]). *Sejam campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e sejam $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ suas*

leituras horizontais respectivamente em \bar{U} . Então temos:

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle \quad (2.6)$$

onde ∇ é a conexão de $\Sigma^2(\kappa)$.

Demonstração. Usando que \bar{Z} é horizontal e pelos item 2) e 3) da [Proposição 1.2.4](#) temos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle &= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^h + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^v, \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y} + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^v, \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^v, \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + 0 \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle \end{aligned}$$

■

Proposição 2.5.2. *Seja $\{\partial_x, \partial_y\}$ referencial ortonormal na base do fibrado $\Sigma^2(\kappa)$ e seja ∇ a conexão Riemanniana em $\Sigma^2(\kappa)$, segue que*

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_x &= \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x - \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_x &= \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_y &= -\frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y. \end{aligned}$$

Demonstração. Como $\Sigma^2(\kappa)$ admite coordenadas isotérmicas, temos que a métrica é:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2),$$

podemos encontrar as conexões da seguinte forma:

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = a \partial_x + b \partial_y \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\langle \nabla_{\partial_x} \partial_x, \partial_x \rangle = \langle a \partial_x + b \partial_y, \partial_x \rangle = a \langle \partial_x, \partial_x \rangle = a \lambda^2$$

pois pela matriz g_{ij} temos $\langle \partial_x, \partial_x \rangle = \lambda^2$, $\langle \partial_y, \partial_y \rangle = \lambda^2$ e $\langle \partial_x, \partial_y \rangle = \langle \partial_y, \partial_x \rangle = 0$. Agora, usando a fórmula de Koszul temos:

$$\langle \nabla_{\partial_x} \partial_x, \partial_x \rangle = a \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \partial_x \langle \partial_x, \partial_x \rangle = a \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \partial_x (\lambda^2) = a \lambda^2 \Leftrightarrow a = \lambda_x / \lambda$$

Temos ainda que $\langle \nabla_{\partial_x} \partial_x, \partial_y \rangle = b \lambda^2$, usando Koszul novamente chegamos em $b =$

$-\lambda_y/\lambda$. Logo para $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, temos

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = a \partial_x + b \partial_y \Rightarrow a = \frac{\lambda_x}{\lambda} \text{ e } b = -\frac{\lambda_y}{\lambda}$$

$$\nabla_{\partial_x} \partial_y = c \partial_x + d \partial_y \Rightarrow c = \frac{\lambda_y}{\lambda} \text{ e } d = \frac{\lambda_x}{\lambda}$$

$$\nabla_{\partial_y} \partial_y = e \partial_x + f \partial_y \Rightarrow e = -\frac{\lambda_x}{\lambda} \text{ e } f = \frac{\lambda_y}{\lambda}.$$

Assim, as conexões são:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_x &= \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x - \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_x &= \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_y &= -\frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y. \end{aligned}$$

■

Usando (2.3) temos:

$$\nabla_{E_1} E_1 = \frac{1}{\lambda} \nabla_{\partial_x} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_x \right) = \frac{1}{\lambda^2} \nabla_{\partial_x} \partial_x - \frac{\lambda_x}{\lambda^3} \partial_x = -\frac{\lambda_y}{\lambda^3} \partial_y.$$

Assim, da mesma forma, podemos encontrar todas as conexões:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_2 & \nabla_{E_2} E_1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 & \nabla_{E_2} E_2 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_1. \end{aligned}$$

Agora fazendo $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i} \bar{E}_j, E_k \rangle$, com a troca $E_3 = V$ e com (2.6), podemos encontrar:

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, \bar{E}_1 \rangle = \langle \nabla_{E_1} E_1, E_1 \rangle = 0 \quad (2.7)$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle = \langle \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle = -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \quad (2.8)$$

em seguida, usando que V é Killing temos

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, V \rangle = \bar{E}_1 \langle \bar{E}_1, V \rangle - \langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V \rangle = -\langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V \rangle = \langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V \rangle$$

o que implica

$$2\langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V \rangle = 0 \Rightarrow \bar{\Gamma}_{11}^3 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, V \rangle = 0 \quad (2.9)$$

Consequentemente, usando (2.7), (2.8) e (2.9) obtemos:

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1 = (0) \cdot \bar{E}_1 - \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \cdot \bar{E}_2 + (0) \cdot V = -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_2. \quad (2.10)$$

De forma análoga, usando (\star), temos

$$\bar{\Gamma}_{22}^1 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle = \langle \nabla_{E_2} E_2, E_1 \rangle = -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \quad (2.11)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle = \langle \nabla_{E_2} E_2, E_2 \rangle = 0 \quad (2.12)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^3 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2, V \rangle = 0 \quad (2.13)$$

que implica

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2 = -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_1. \quad (2.14)$$

Agora novamente usando (2.6), temos

$$\bar{\Gamma}_{21}^1 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, \bar{E}_1 \rangle = \langle \nabla_{E_2} E_1, E_1 \rangle = 0 \quad (2.15)$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle = \langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle = \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \quad (2.16)$$

assim

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, V \rangle &= \bar{E}_2 \langle \bar{E}_1, V \rangle - \langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} V \rangle = -\langle \bar{E}_1, \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} V \rangle \\ &= \langle \bar{E}_2, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, V \rangle \end{aligned}$$

que implica

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, V \rangle &= -\langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2] + \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, V \rangle \\ &= -\langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, V \rangle \end{aligned}$$

isso é:

$$\bar{\Gamma}_{21}^3 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, V \rangle = -\frac{1}{2} \langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle = -\tau \quad (2.17)$$

assim por (2.15), (2.16) e (2.17) temos

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_2 - \tau V. \quad (2.18)$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^1 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \quad (2.19)$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_2 \rangle = 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, V \rangle &= \frac{1}{2} \{ \bar{E}_1 \langle \bar{E}_2, V \rangle + \bar{E}_2 \langle \bar{E}_1, V \rangle - V \langle \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle \\ &\quad + \langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle - \langle [\bar{E}_1, V], \bar{E}_2 \rangle - \langle [\bar{E}_2, V], \bar{E}_1 \rangle \} \end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^3 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, V \rangle = \frac{1}{2} \langle [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle = \tau \quad (2.21)$$

logo

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_2 + \tau V. \quad (2.22)$$

Pela **Proposição 1.2.4** item 4, o campo $[\bar{X}, V]$ de M é vertical e, assim, deduzimos que $\langle [\bar{E}_1, V], \bar{E}_2 \rangle = 0$, portanto, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_V \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V + [\bar{E}_1, V], \bar{E}_2 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, \bar{E}_2 \rangle \\ &= \bar{E}_1 \langle V, \bar{E}_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, V \rangle = \\ &= -\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, V \rangle \\ &= -(\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 + [\bar{E}_1, \bar{E}_2], V \rangle) \\ &= -(-\tau + 2\tau) = -\tau. \end{aligned}$$

isso é $\bar{\Gamma}_{31}^2 = -\tau$. Como $\bar{\Gamma}_{31}^1 = 0$ e $\bar{\Gamma}_{31}^3 = 0$ temos:

$$\bar{\nabla}_V \bar{E}_1 = -\tau \bar{E}_2. \quad (2.23)$$

Usando o fato da conexão ser simétrica, subtraindo $\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V$ em ambos lados de (2.23) temos

$$\bar{\nabla}_V \bar{E}_1 - \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V = [V, \bar{E}_1] = -\tau \bar{E}_2 - \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V$$

que implica em

$$0 = \langle [V, \bar{E}_1], \bar{E}_2 \rangle = -\tau \langle \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, \bar{E}_2 \rangle \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, \bar{E}_2 \rangle = -\tau$$

Logo

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V = -\tau \bar{E}_2. \quad (2.24)$$

de forma análoga, chegamos em $\langle \bar{\nabla}_V \bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle = \tau$ e assim

$$\bar{\nabla}_V \bar{E}_2 = \tau \bar{E}_1 = \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} V. \quad (2.25)$$

por fim, utilizando as equações de Killing e o fato que $\langle V, V \rangle$ é constante. Seja X qualquer campo de vetores. Então

$$\langle \bar{\nabla}_V V, X \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X V, V \rangle = -\frac{1}{2} X \langle V, V \rangle = 0$$

Logo,

$$\bar{\nabla}_V V = 0. \quad (2.26)$$

Confirmado o fato das fibras serem geodésicas. Portanto, podemos reunir todas as conexões encontradas

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_2 & \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_2 - \tau V & \bar{\nabla}_V \bar{E}_1 &= -\tau \bar{E}_2 \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2 &= \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_1 + \tau V & \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_1 & \bar{\nabla}_V \bar{E}_2 &= \tau \bar{E}_1 \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V &= -\tau \bar{E}_2 & \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} V &= \tau \bar{E}_1 & \bar{\nabla}_V V &= 0 \end{aligned}$$

Como a conexão é simétrica, podemos calcular os comutadores da seguinte forma $\mathcal{L}_{\bar{X}} \bar{Y} = [\bar{X}, \bar{Y}] = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}$

$$[\bar{E}_1, \bar{E}_2] = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_1 - \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_2 + 2\tau V \quad [\bar{E}_1, V] = 0 \quad [\bar{E}_2, V] = 0.$$

onde $\frac{\lambda_x}{\lambda^2} = -\kappa x$, $\frac{\lambda_y}{\lambda^2} = -\kappa y$.

2.6 Estrutura métrica

Agora com a carta $\bar{U} = U \times I$ de M e a projeção $\Pi : M \rightarrow \Sigma^2(\kappa)$ tal que $\Pi(x, y, z) = (x, y)$, temos, em todo ponto de \bar{U} :

$$d\Pi(\partial_x) = \partial_x \quad d\Pi(\partial_y) = \partial_y \quad V = \partial_z$$

Isso mostra que ∂_x (respectivamente ∂_y) é uma combinação linear de ∂_x e V (respectivamente ∂_y e V). Vamos chamar $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ de **referencial adaptado**.

Assim como $d\Pi(\bar{E}_1) = E_1 = (1/\lambda)\partial_x$ e da mesma forma para \bar{E}_2 , encontramos:

$$\begin{cases} \partial_x = \lambda\bar{E}_1 + cV = \lambda\bar{E}_1 + c\partial_z \\ \partial_y = \lambda\bar{E}_2 + dV = \lambda\bar{E}_2 + d\partial_z \end{cases} \quad (2.27)$$

onde c e d são funções em \bar{U} .

Para todos os campos A, B em M e para todas as funções f, g em M , pelo comutador temos:

$$[fA, gB] = fg[A, B] + fA(b)B - gB(f)A.$$

Lembre-se de que λ não depende de z e, portanto, $V(\lambda) = 0$. Então temos:

$$\begin{aligned} [\partial_x, V] &= [\lambda\bar{E}_1 + cV, V] \\ &= [\lambda\bar{E}_1, V] + [cV, V] \\ &= \lambda[\bar{E}_1, V] + c[V, V] - V(c)V \\ &= -V(c)V \end{aligned}$$

Como $[\partial_x, V] = 0$ (porque (x, y, z) são coordenadas e $V = \partial_z$) deduzimos que $V(c) = 0$, isto é, digamos que c depende apenas de (x, y) e não de z . Da mesma forma, como $[\partial_y, V] = 0$ deduzimos que d é independente de z . Também temos:

$$\begin{aligned} [\partial_x, \partial_y] &= [\lambda\bar{E}_1 + cV, \lambda\bar{E}_2 + dV] \\ &= [\lambda\bar{E}_1, \lambda\bar{E}_2] + [\lambda\bar{E}_1, dV] + [cV, \lambda\bar{E}_2] + [cV, dV] \\ &= \lambda^2[\bar{E}_1, \bar{E}_2] + \lambda\bar{E}_1(\lambda)\bar{E}_2 - \lambda\bar{E}_2(\lambda)\bar{E}_1 + \lambda\bar{E}_1(d)V - \lambda\bar{E}_2(c)V \\ &= \lambda_y\bar{E}_1 - \lambda_x\bar{E}_2 + 2\lambda^2\tau V + (\partial_x - cV)(\lambda)\bar{E}_2 - (\partial_y - dV)(\lambda)\bar{E}_1 \\ &\quad + (\partial_x - cV)(d)V - (\partial_y - dV)(c)V \\ &= \lambda_y\bar{E}_1 - \lambda_x\bar{E}_2 + 2\lambda^2\tau V + \lambda_x\bar{E}_2 - \lambda_y\bar{E}_1 + d_xV - c_yV \\ &= (d_x - c_y + 2\lambda^2\tau)V. \end{aligned}$$

Novamente, como $[\partial_x, \partial_y] = 0$, pois são campos coordenados, obtemos:

$$d_x - c_y = -2\tau\lambda^2 \quad (2.28)$$

Além disso, vamos expressar a métrica $ds^2 = g$ de M nas coordenadas (x, y, z) a carta

$\bar{U} = U \times I$ de M . Assim temos:

$$\begin{aligned} g(\partial_x, \partial_x) &= g(\lambda\bar{E}_1 + cV, \lambda\bar{E}_1 + cV) = \lambda^2 + c^2 \\ g(\partial_x, \partial_y) &= dc \\ g(\partial_y, \partial_y) &= \lambda^2 + d^2 \\ g(\partial_x, \partial_z) &= g(\partial_x, V) = c \\ g(\partial_y, \partial_z) &= g(\partial_y, V) = d \\ g(\partial_z, \partial_z) &= 1 \end{aligned}$$

A métrica de M , portanto, tem a expressão:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\lambda^2 + c^2) dx^2 + (\lambda^2 + d^2) dy^2 + dz^2 + 2dc dx dy + 2c dx dz + 2d dy dz \\ &= \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (c dx + d dy + dz)^2 \end{aligned}$$

a matriz de (g_{ij}) é dada por:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + c^2 & cd & c \\ cd & \lambda^2 + d^2 & d \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz inversa é

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -d \\ -c & -d & \lambda^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Verificamos que, começando pela métrica e definindo \bar{E}_1 e \bar{E}_2 usando (2.27), depois calculando as derivadas covariantes $\bar{\nabla}_{\bar{E}_i} \bar{E}_j$ e $\bar{\nabla}_{\bar{E}_i} V$ restauramos as expressões esperadas se, e somente se, as funções d e c satisfizerem (2.28).

Agora seja $\tilde{d}, \tilde{c} : U \subset \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções (de x, y) satisfazendo (2.28):

$$\tilde{d}_x - \tilde{c}_y = -2\tau\lambda^2.$$

Então temos:

$$(d - \tilde{d})_x = (c - \tilde{c})_y$$

Vamos colocar $f := d - \tilde{d}$ e $g := c - \tilde{c}$, temos:

$$f_x = g_y$$

A métrica se torna:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tilde{c} dx + \tilde{d} dy + dz + g dx + f dy)^2$$

Além disso:

$$d(g dx + f dy) = d(g) dx + d(f) dy = g_y dy \wedge dx + f_x dx \wedge dy = (g_y - f_x) dx \wedge dy = 0$$

a última igualdade deve-se a (2.28). Deduzimos que a forma $g dx + f dy$ é fechada em U . Como U é simplesmente conexo, essa forma é exata: existe uma função ψ em U tal que $g dx + f dy = d\psi$. Observe que a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = (x, y, z + \psi(x, y))$$

é um difeomorfismo que preserva as fibras (x, y, \cdot) . Existe, portanto, um intervalo real J tal que $F(U \times I) = U \times J$. Seja $t = z + \psi(x, y)$, nas novas coordenadas (x, y, t) a métrica é escrita:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tilde{c} dx + \tilde{d} dy + dt)^2.$$

Observe finalmente que, no caso $\kappa \neq 0$, as funções definidas em U por

$$d(x, y) = -2\tau x \lambda(x, y)$$

$$c(x, y) = 2\tau y \lambda(x, y)$$

são soluções de (2.28). De fato:

$$\begin{aligned} d_x - c_y &= -4\tau\lambda - 2\tau(x\lambda_x - y\lambda_y) \\ &= -4\tau\lambda - 2\tau \left(\frac{-4\kappa x^2 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \right) \\ &= -4\tau\lambda + 8\tau \left(\frac{\kappa(x^2 + y^2)}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \right) \\ &= -4\tau\lambda + 8\tau \left(\frac{1 + \kappa(x^2 + y^2)}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} - \frac{1}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \right) \\ &= -4\tau\lambda + 4\tau \frac{2}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))} - 2\tau \frac{4}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \\ &= -4\tau\lambda + 4\tau\lambda - 2\tau\lambda^2 \\ &= -2\tau\lambda^2 \end{aligned}$$

No caso em que $\kappa = 0$, temos $\lambda \equiv 1$ e escolhemos as funções $d(x, y) = -\tau x$ e $c(x, y) = \tau y$. Claramente (2.28) também está satisfeito.

Com essa escolha, as métricas se tornam:

$$ds^2 = \begin{cases} \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\tau\lambda(y dx - x dy) + dz)^2 & \text{se } \kappa \neq 0 \\ dx^2 + dy^2 + (\tau(y dx - x dy) + dz)^2 & \text{se } \kappa = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Com isso, acabamos de demonstrar que M é isométrica a um dos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. A partir de agora, vamos usar a notação $M = \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Assim, podemos voltar a [Tabela 2.1](#) e ver que no caso em que $\tau = 0$ temos que $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \Sigma^2 \times \mathbb{R}$ e a métrica em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é a métrica produto $ds^2 = ds_\Sigma^2 + dt^2$. Quando $\kappa \leq 0$ e τ qualquer, temos uma fibração trivial e $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é topologicamente uma variedade produto e difeomorfa a \mathbb{R}^3 .

No caso que $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$ $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é compacta e não é topologicamente um produto de variedades. Sobre esse último caso vamos apresentar o seguinte resultado.

Lema 2.6.1 ([[Tou07](#)]). *Suponha $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$. Nessas condições, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é homeomorfo a \mathbb{S}^3 , mas $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ fibra em círculos acima de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ e cada fibra tem um comprimento igual a $\frac{4\tau}{\kappa}(2\pi)$. Portanto, se (x, y) for uma carta de $\mathbb{S}^2(\kappa)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ os pontos (x, y, t) e $(x, y, t \pm 4\frac{\tau}{\kappa}2\pi)$ são identificados. Em particular, se $\kappa - 4\tau^2 = 0$, então \mathbb{E}^3 é a esfera de raio $1/\tau = 2/\kappa$ e encontramos a fibração de Hopf. Se $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, encontramos as esferas de Berger.*

Vamos justificar a primeira parte do lema e deixar a discussão da segunda parte para próxima seção. Vamos considerar $\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{C}P^1$ pois precisamos de uma variedade base com curvatura positiva. Primeiro considere as projeções estereográficas Π_N e Π_S de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ em \mathbb{C} com relação ao polo norte e sul, que escreveremos respectivamente $\Pi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{Rx_1}{R-x_3}, \frac{Rx_2}{R-x_3}\right)$ (respectivamente $\Pi_S(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{Rx_1}{R+x_3}, \frac{Rx_2}{R+x_3}\right)$). Ao definir $R = 1/\sqrt{\kappa}$, podemos encontrar os mapas inversos para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\Pi_N^{-1} = \frac{(2R^2\mathcal{R}e z, 2R^2\mathcal{I}m z, R(|z|^2 - R^2))}{|z|^2 + R^2}$$

$$\Pi_S^{-1} = \frac{(2R^2\mathcal{R}e z, 2R^2\mathcal{I}m z, R(R^2 - |z|^2))}{|z|^2 + R^2}$$

Escolhemos os seguintes mapas de $\mathbb{S}^2(\kappa)$: $\psi_1(z) = \Pi_N^{-1}(z)$ e $\psi_2(z) = \Pi_S^{-1}(\bar{z})$ para todos os $z \in \mathbb{C}$. Portanto, as mudanças de cartas são suaves e dadas por:

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \mapsto \frac{R^2}{z}$$

e

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \mapsto \frac{R^2}{z}$$

Chame respectivamente (u, v) e (x, y) as coordenadas de $(\mathbb{C}, \mathbb{S}^2(\kappa) - \{N\})$ e $(\mathbb{C}, \mathbb{S}^2(\kappa) - \{S\})$. Vamos chamar w (resp. t) a coordenada de \mathbb{R} no espaço aberto $(\mathbb{S}^2(\kappa) - \{N\}) \times \mathbb{R}$ (resp. $(\mathbb{S}^2(\kappa) - \{S\}) \times \mathbb{R}$). Nas coordenadas (u, v, w) , a métrica de \mathbb{E}^3 é dada por:

$$ds_1^2 = du^2 + dv^2 + (\tau(v du - u dv) + dw)^2$$

e nas coordenadas (x, y, t) :

$$ds_2^2 = dx^2 + dy^2 + (\tau(y dx - x dy) + dt)^2$$

Observe que as alterações de coordenadas trocam essas duas métricas. Além disso, elas têm a forma $(x+iy, t) \mapsto \left(\frac{R^2}{x+iy}, g(x, y, t)\right) = (u, v, w)$, onde g é uma função tal que para todos os x, y, t_1, t_2 , devemos ter $g(x, y, 0) = f(x, y) \in \mathbb{C}$ e $g(x, y, t_2) - g(x, y, t_1) = t_2 - t_1$. Como resultado, g tem a forma $g(x, y, t) = t + f(x, y)$. Assim calculando podemos obter os seguintes resultados:

$$u = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \quad (2.30)$$

$$v = -\frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2.31)$$

$$du = R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - 2R^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad (2.32)$$

$$dv = 2R^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad (2.33)$$

$$du^2 + dv^2 = \frac{R^4}{(x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2) \quad (2.34)$$

Como $R = 1/\sqrt{-\kappa}$, temos que

$$du^2 + dv^2 = \frac{1}{\kappa^2(x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2) \quad (2.35)$$

com o fator conforme λ definido anteriormente, temos

$$\lambda(u, v) = \kappa(x^2 + y^2)\lambda(x, y) \quad (2.36)$$

Por causa disso multiplicando ambos os lados de (2.35) por $\lambda^2(u, v)$ e usando (2.36) temos:

$$\lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2) = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$$

Agora por (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e $w = g = t + f$ temos:

$$2\tau\lambda(u, v)(v du - u dv) + dw = 2\frac{\tau}{\kappa}\lambda(x, y) \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) + f_x dx + f_y dy + dt$$

Então, gostaríamos de ter $ds_1^2 = ds_2^2$

$$\begin{cases} f_x - 2\tau\lambda(x, y) \frac{y}{\kappa(x^2 + y^2)} = 2\tau y \lambda(x, y) \\ f_y + 2\tau\lambda(x, y) \frac{x}{\kappa(x^2 + y^2)} = -2\tau x \lambda(x, y) \end{cases}$$

isto é:

$$\begin{cases} f_x = \frac{4\tau y}{\kappa(x^2 + y^2)} \\ f_y = -\frac{4\tau x}{\kappa(x^2 + y^2)} \end{cases} \quad (2.37)$$

Considerando que a coordenada complexa $\zeta = x + iy$, (2.37) é equivalente a:

$$\begin{cases} f_\zeta = 2i \frac{\tau}{\kappa \zeta} \\ f_{\bar{\zeta}} = -2i \frac{\tau}{\kappa \bar{\zeta}} \end{cases} \quad (2.38)$$

note que obtemos (2.38) usando $f_\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$ e $f_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$. Logo além de uma constante aditiva, temos que a solução de (2.38) é[†]:

$$f(\zeta) = 2i \frac{\tau}{\kappa} \log \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} = 2i \frac{\tau}{\kappa} \left(\log \left| \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right| + i \arg \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right) = -4 \frac{\tau}{\kappa} \arg \zeta.$$

Vamos definir a faixa do valor principal como estando no intervalo aberto-fechado $[0, 2\pi)$. Isso mostra que, para todos os (x, y, t) , os pontos (x, y, t) e $(x, y, t \pm 4\frac{\tau}{\kappa} 2\pi)$ são identificados em \mathbb{E}^3 . Logo, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ fibra em círculos acima de $\mathbb{S}^2(\kappa)$ e cada fibra tem um comprimento igual a $\frac{4\tau}{\kappa}(2\pi)$. Além disso, topologicamente, \mathbb{E}^3 é a união disjunta de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ com a fibra passando pelo polo norte de \mathbb{S}^2 (isto é, um círculo homeomorfo a \mathbb{S}^1). Note que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ pode ser deformado continuamente para $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo-z}\}$ que é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ via projeção estereográfica. Logo, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \setminus \pi^{-1}(N)$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$. Isso mostra que reunindo a fibra, \mathbb{E}^3 é homeomorfa a \mathbb{S}^3 , sendo uma variedade compacta, conhecida como esfera de Berger $\mathbb{S}_{\text{Berger}}^3(\kappa, \tau)$. Como estamos na dimensão 3, podemos afirmar que a esfera de Berger tridimensional é difeomorfa à \mathbb{S}^3 . Note que a última declaração do lema segue do cálculo das curvaturas seccionais de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, que faremos na próxima seção, considerando que os estabilizadores de um ponto x tem dimensão 1 e não 3, sendo assim, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ não é isotrópica.

[†]usando também que $\log f(\zeta) = \log |f(\zeta)| + i \arg f(\zeta)$ e $\arg \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right) = 2\theta = 2 \arg(\zeta)$

Assim considerando todas as possibilidades para τ e κ deduzimos o seguinte resultado:

1. Se $\tau = 0$, a fibração é metricamente trivial, com a fibra é $F = \mathbb{R}$, pois caso contrário $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ não seria simplesmente conexo. Logo temos, a menos de isometria:
 - a) $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ no caso $\kappa > 0$ e $G = \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \mathbf{Isom}(\mathbb{R})$.
 - b) $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ no caso em que $\kappa < 0$ e $G = \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \mathbf{Isom}(\mathbb{R})$.

Observe que, no caso em que $\kappa = 0$, teríamos $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{E}^3(0, 0) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica canônica do \mathbb{R}^3 , mas o grupo de isometrias de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ não é máximo, porque está contido (estritamente) no grupo de isometria do \mathbb{R}^3 que tem dimensão 6, conforme já discutimos no capítulo anterior. Logo teríamos isometrias de $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}^3)$ que não estariam em $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$, assim este caso não nos interessa.

2. Se $\tau \neq 0$, a fibração não é metricamente trivial e nós temos, a menos de isometrias:
 - a) Se $\kappa < 0$, então \mathbb{E}^3 fibra acima de $\mathbb{H}^2(\kappa)$ em retas e temos \mathbb{E}^3 é difeomorfo a \mathbb{R}^3 com a métrica (2.29), ou seja:

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\tau\lambda(y dx - x dy) + dt)^2.$$

$\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ também pode ser visto como o recobrimento universal de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$, ou seja, o recobrimento universal do fibrado tangente unitário (em círculos) de $\mathbb{H}^2(\kappa)$, $\widetilde{\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})} \simeq \widetilde{U\mathbb{H}^2}$. Sabemos que $U\mathbb{H}^2 = \{(p, v) \in T\mathbb{H}^2 : |v| = 1\}$ é difeomorficamente um fibrado trivial $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$, mas a cobertura universal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ é $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, logo $\widetilde{\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})} \simeq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ do ponto de vista do difeomorfismo e não métrico. Logo $\pi : \widetilde{\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma submersão Riemanniana.

- b) Se $\kappa = 0$, então $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ fibra acima de \mathbb{R}^2 , com fibras que são linhas retas $F = \mathbb{R}$, pois F não pode ser \mathbb{S}^1 em virtude \mathbb{R}^2 ser contrátil e assim o grupo fundamental de \mathbb{E}^3 seria isomorfo ao grupo fundamental de \mathbb{S}^1 , que seria um absurdo em virtude de \mathbb{E}^3 ser simplesmente conexo. Logo temos $\mathbb{E}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ (difeomorfo a \mathbb{R}^3). Assim consideramos \mathbb{E}^3 com a métrica

$$g = dx^2 + dy^2 + (\tau(y dx - x dy) + dt)^2.$$

como (\mathbf{Nil}_3, g_τ) , com $\Pi : (\mathbf{Nil}_3, g_\tau) \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde \mathbf{Nil}_3 é chamado de *espaço Heisenberg*.

Observe que, se $\kappa > 0$, então $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é a esfera de berger e é difeomorfo à esfera \mathbb{S}^3 com a métrica (2.29), com fibra em um círculo acima de $\mathbb{S}^2(\kappa)$, em virtude da

fibra não poder ser \mathbb{R} em vista que obteríamos $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ como um recobrimento do fibrado tangente unitário.

A esfera \mathbb{S}^3 é o recobrimento universal de $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$, o qual pode ser identificado com US^2 o fibrado tangente unitário à esfera \mathbb{S}^2 . De fato, o grupo de isometria $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ age transitivamente em US^2 , enquanto o estabilizador de qualquer ponto em US^2 é o trivial. O fibrado tangente unitário US^2 pode ser dotado com a métrica canônica induzida no fibrado TS^2 . De fato, é sabido que há um difeomorfismo entre $\widetilde{US^2}$ e \mathbb{S}^3 que envia a projeção $\widetilde{US^2} \rightarrow \mathbb{S}^2$ para a fibração Hopf. A identificação $\mathbb{S}^3 \simeq \widetilde{US^2}$ envia a métrica de \mathbb{S}^3 redimensionando a métrica de $\widetilde{US^2}$ por um fator na direção as fibras, para que as fibras agora tenham um comprimento de $8\pi\tau/\kappa$.

Mas, nesse caso, o grupo de isometrias \mathbf{G} de $\mathbb{S}_{\text{Berger}}$ fornecido com essa métrica g está contido (estritamente) no grupo de isometrias de \mathbb{S}^3 com a métrica canônica (redonda). De fato, nesse caso, \mathbf{G} é o grupo de isometrias das esferas de Berger é $\mathbf{G} = \mathbf{U}(2) = \{A \in \mathbf{O}(4) : AJ = \pm JA\}$, onde $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$ e $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(2)$ diefo. $\mathbf{U}(2)$). Essas variedades são obtidas deformando a métrica da esfera redonda de maneira que a fibração de Hopf seja preservada, mas modifique o comprimento das fibras. Note que $\mathbb{S}_{\text{Berger}}$ não é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (não é simplesmente conexa), logo a fibração $\Pi : \mathbb{S}_{\text{Berger}} \rightarrow \mathbb{S}^2(1/\sqrt{\kappa})$ não é trivial.

Esses espaços são de grande interesse na geometria riemanniana e fornecem bons exemplos. Por exemplo, eles serviram como contra-exemplos de uma conjectura de Klingenberg sobre geodésica fechada e das conjecturas do primeiro autovalor do Laplaciano nas esferas.

O próximo lema nos trás uma forma de obter a derivada covariante do campo V na direção de um campos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$.

Lema 2.6.2. *Suponha que a dimensão dos estabilizadores seja 1. Para qualquer vetor tangente $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$, temos:*

$$\bar{\nabla}_X V = \tau(X \wedge V).$$

onde \wedge é o produto vetorial de $T\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Demonstração. Por linearidade, basta mostrar o enunciado para os campos unitários \bar{E}_1, \bar{E}_2 e V . Observe que temos:

$$\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 = V, \quad \bar{E}_1 \wedge V = -\bar{E}_2, \quad \bar{E}_2 \wedge V = \bar{E}_1.$$

Usando as relações (2.27), obtemos:

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V = -\tau \bar{E}_2 = \tau(\bar{E}_1 \wedge V)$$

em seguida

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_2} V = \tau \bar{E}_1 = \tau(\bar{E}_2 \wedge V)$$

Finalmente temos

$$\bar{\nabla}_V V = \tau(V \wedge V) = 0$$

que termina a prova. ■

O Lema anterior torna natural a definição de submersão de Killing onde as fibras são geodésicas. Por um lado, as geodésicas de \mathbb{E}^3 podem ser divididas em três tipos diferentes: verticais, horizontais (que são elevações horizontais das geodésicas de Σ^2) e aquelas que não são verticais nem horizontais, cada uma das quais forma um ângulo constante com a vertical direção.

Lema 2.6.3. *As Geodésicas em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ fazem um ângulo constante com o campo vetorial vertical de Killing.*

Demonstração. Dada uma geodésica γ em \mathbb{E}^3 , podemos computar

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma', V \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma', V \rangle + \langle \gamma', \bar{\nabla}_{\gamma'} V \rangle$$

O primeiro termo do lado direito é nulo por γ ser geodésica, e o segundo também zero pelo lema anterior. ■

2.7 Cálculo das curvaturas seccionais

Nosso objetivo agora é calcular a curvatura seccional $\bar{K}(P)$ de qualquer plano gerado por $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$. Como $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é homogênea, basta calcular $\bar{K}(P)$ em um ponto escolhido.

Fixe um ponto $p \in \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ e considere um plano $P \subset T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, suponha que P não seja horizontal. Como as rotações em torno do eixo vertical (o eixo gerado pelo campo vertical \mathbb{E}^3) são isometrias, podemos supor que, a interseção entre P e o plano horizontal passando por $p \in \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (que é o plano gerado por $\bar{E}_1(p) \in T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ e $\bar{E}_2(p) \in T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$) é o eixo gerado pelo campo \bar{E}_1 .

Assim, podemos supor que P seja gerado pelo vetor $\bar{E}_1(p) \in T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ e $a\bar{E}_2(p) + b\bar{E}_3(p) \in T_p \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, onde $a^2 + b^2 = 1$ por $\bar{K}(P)$ a curvatura seccional (conforme a [DC15]) em relação a P . Assim, vamos provar o seguinte resultado:

Lema 2.7.1. *Seguindo as notações acima, temos:*

$$\bar{K}(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1) = a^2(\kappa - 3\tau^2) + b^2\tau^2.$$

Em particular $\bar{K}(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = \kappa - 3\tau^2$ e $\bar{K}(\bar{E}_1, V) = \tau^2$. Além disso, como $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ a curvatura seccional não é constante.

Demonstração. Pela definição de curvatura seccional, temos:

$$\begin{aligned}\bar{K}(P) &= \bar{K}(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1) \\ &= \langle R(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1)(a\bar{E}_2 + bV), \bar{E}_1 \rangle\end{aligned}$$

porque $(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1)$ é uma base ortonormal de P , e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar fornecido pela métrica g . Por linearidade obtemos:

$$\begin{aligned}\langle R(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1)(a\bar{E}_2 + bV), \bar{E}_1 \rangle &= a^2 \langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle \\ &\quad + ab(\langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle + \langle R(V, \bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle) \\ &\quad + b^2 \langle R(V, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle \\ &= a^2 \langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle + 2ab \langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle \\ &\quad + b^2 \langle R(V, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle\end{aligned}$$

pois

$$\langle R(V, \bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle = \langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle.$$

Assim, obtemos que

$$\bar{K}(P) = a^2 \bar{K}(E_1, E_2) + b^2 \bar{K}(V, E_1) + 2ab \langle R(E_2, E_1)V, E_1 \rangle. \quad (2.39)$$

Usando, por um lado, o fato de V ser um campo Killing e, por outro lado, o cálculo das derivadas covariantes dos vetores \bar{E}_1 , \bar{E}_2 e V entre eles para obter:

$$\begin{aligned}\langle R(\bar{E}_2, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2 V, \bar{E}_1 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 V, \bar{E}_1 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\bar{E}_2, \bar{E}_1]} V, \bar{E}_1 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \tau \bar{E}_1, \bar{E}_1 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} (-\tau \bar{E}_2), \bar{E}_1 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, [\bar{E}_2, \bar{E}_1] \rangle \\ &= -\tau \frac{\lambda_x}{\lambda^2} + \tau \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\bar{K}(V, \bar{E}_1) &= \langle R(V, \bar{E}_1)V, \bar{E}_1 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{\nabla}_V V, \bar{E}_1 \rangle - \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, \bar{E}_1 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[V, \bar{E}_1]} V, \bar{E}_1 \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_V (-\tau \bar{E}_2), \bar{E}_1 \rangle - \langle \bar{E}_1 V, [V, \bar{E}_1] \rangle \\ &= \tau^2,\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\bar{K}(\bar{E}_1, \bar{E}_2) &= \langle R(\bar{E}_1, \bar{E}_2)\bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\bar{E}_1, \bar{E}_2]} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_2 \right), \bar{E}_2 \right\rangle - \left\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_2 - \tau V \right), \bar{E}_2 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \bar{\nabla} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \bar{E}_1 - \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \bar{E}_2 + 2\tau V \right) \bar{E}_1, \bar{E}_2 \right\rangle \\
&= -\bar{E}_2 \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right) \langle \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle - \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle \\
&\quad - \bar{E}_1 \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right) \langle \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle - \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2, \bar{E}_2 \rangle + \tau \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} V, \bar{E}_2 \rangle \\
&\quad + \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle - \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle + 2\tau \langle \bar{\nabla}_V \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle \\
&= -\bar{E}_2 \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right) - \bar{E}_1 \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right) - \tau^2 - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right)^2 - 2\tau^2 \\
&= -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right) - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right)^2 - 3\tau^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}(\bar{E}_1, \bar{E}_2) &= -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda_{yy}}{\lambda^2} - \frac{2\lambda_y^2}{\lambda^3} + \frac{\lambda_{xx}}{\lambda^2} - \frac{2\lambda_x^2}{\lambda^3} \right) - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda^2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda^2} \right)^2 - 3\tau^2 \\
&= -\frac{\lambda_{xx} + \lambda_{yy}}{\lambda^3} + \frac{\lambda_x^2}{\lambda^4} + \frac{\lambda_y^2}{\lambda^4} - 3\tau^2 \\
&= -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} - 3\tau^2 \\
&= \kappa - 3\tau^2.
\end{aligned}$$

Note que $\kappa = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = -\frac{\lambda_{xx} + \lambda_{yy}}{\lambda^3} + \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{\lambda^4}$, é a curvatura de $\Sigma^2(\kappa)$.

Assim, a curvatura seccional de um plano de $P = \text{span}(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1)$ é:

$$\bar{K}(a\bar{E}_2 + bV, \bar{E}_1) = a^2(\kappa - 3\tau^2) + b^2\tau^2.$$

■

Na demonstração do **Lema 2.6.1**, vimos que a curvatura de um plano vertical é τ^2 e a curvatura do plano horizontal é $\kappa - 3\tau^2$, portanto, com $a = 1$ e $b = 0$, encontramos a fórmula de O'Neill ([CE75] página 66):

$$\bar{K}(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = K(E_1, E_2) - \frac{3}{4} \|[\bar{E}_1, \bar{E}_2]^v\|^2$$

porque $K(E_1, E_2) = \kappa$ e $\|[\bar{E}_1, \bar{E}_2]^v\| = 2\tau$.

Portanto, esses resultados mostram que a curvatura seccional é constante se, e somente se, $\kappa - 4\tau^2 = 0$, mas neste caso o estabilizador é de dimensão 3 e não 1.

3 Isometrias dos Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Nesta seção, trataremos das isometrias dos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, seguindo os passos de [Tou07] na seção 4 de suas notas. Primeiramente vamos lembrar alguns resultados importantes:

Proposição 3.0.1. *Seja F uma isometria de \mathbb{E}^3 . Se $u \in T_x\mathbb{E}^3$ é um vetor vertical, então $d_xF(u) \in T_{F(x)}\mathbb{E}^3$ também é vertical.*

Demonstração. Seja u um vetor vertical, logo $u = \lambda V_x \in T_x\mathbb{E}^3$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} d_xF(u) &= d_xF(\lambda V_x) = \lambda d_xF(V_x) \\ &= \lambda(\pm V_{F(x)}) = \pm \lambda V_{F(x)}, \end{aligned}$$

logo $d_xF(u)$ é vertical. ■

Proposição 3.0.2. *Seja F um isometria de \mathbb{E}^3 . Se v é horizontal $v \in (T_x\mathbb{E}^3)^h$, então $dF_x(v) \in T_{F(x)}\mathbb{E}^3$ também o é.*

Essa proposição é uma consequência direta do fato de que isometrias também preservam vetores horizontais.

Proposição 3.0.3. *Seja F uma isometria de \mathbb{E}^3 . Então se $x, y \in \mathbb{E}^3$ satisfazem que $\Pi(x) = \Pi(y)$, também temos $\Pi(F(x)) = \Pi(F(y))$. Em outras palavras, toda isometria de \mathbb{E}^3 preserva a estrutura das fibras de Π .*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ como acima e $z = \Pi(x) = \Pi(y)$. Então, $\gamma_1 = \Pi^{-1}(z)$ é uma geodésica em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Seja $\gamma_2 = \Pi^{-1}(F(x))$. Então, γ_2 é a geodésica de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ passando por $F(x)$ com vetor tangente $V_{F(x)}$, tal que $d_xF(V_x) = \pm V_{F(x)}$. Observe que $F(\gamma_1) = \gamma_2$, pois são duas geodésicas com mesmas condições iniciais. Agora, como $y \in \gamma_1$, $F(y) \in \gamma_2$ então, $\Pi(F(y)) = \Pi(F(x))$. ■

Lema 3.0.4. *Toda isometria F em \mathbb{E}^3 induz uma isometria $f : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$, de modo que o diagrama a seguir seja comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3 & \xrightarrow{F} & \mathbb{E}^3 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \Sigma^2 & \xrightarrow{f} & \Sigma^2 \end{array}$$

Ou seja, existe uma isometria f de Σ^2 em Σ^2 tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.

Demonstração. Defina $f(z) = \Pi(F(x))$ onde $x \in \Pi^{-1}(z)$. Pelo **Proposição 3.0.3** f está bem definida e satisfaz $\Pi \circ F = f \circ \Pi$. Assim basta mostrar que f é uma isometria de Σ^2 .

Fixe $z \in \Sigma^2$, $u, v \in T_z \Sigma^2$, queremos mostrar que $\langle u, v \rangle_z = \langle d_z f u, d_z f v \rangle_{f(z)}$. Primeiramente escolha $x \in \Pi^{-1}(z)$ e escreva $u = d_x \Pi(\tilde{u})$, $v = d_x \Pi(\tilde{v})$, com $\tilde{u}, \tilde{v} \in (T_x E^3)^h$. Então, como Π é uma submersão Riemanniana e F é uma isometria, temos que $\langle u, v \rangle_z = \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_x = \langle d_x F \tilde{u}, d_x F \tilde{v} \rangle_{F(x)}$. Mas observe que, pelo **Proposição 3.0.2**, temos que os vetores $d_x F \tilde{u}$ e $d_x F \tilde{v}$ são horizontais, e então:

$$\langle d_x F \tilde{u}, d_x F \tilde{v} \rangle_{F(x)} = \langle d_{F(x)} \Pi(d_x F \tilde{u}), d_{F(x)} \Pi(d_x F \tilde{v}) \rangle_{\Pi(F(x))} = \langle d_x(\Pi \circ F) \tilde{u}, d_x(\Pi \circ F) \tilde{v} \rangle_{f(\Pi(x))}$$

Porem, por definição, $\Pi \circ F = f \circ \Pi$, e então

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_z &= \langle d_x(f \circ \Pi) \tilde{u}, d_x(f \circ \Pi) \tilde{v} \rangle_{f(z)} \\ &= \langle d_{\Pi(x)} f(d_{\Pi_x} \tilde{u}), d_{\Pi(x)} f(d_{\Pi_x} \tilde{v}) \rangle_{f(z)} \\ &= \langle d_z f u, d_z f v \rangle_{f(z)} \end{aligned}$$

mostrando que f é uma isometria. ■

Vamos identificar o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 com o conjunto de números complexos \mathbb{C} , mais precisamente $z = x + iy \approx (x, y)$ (são coordenadas conformes em Σ^2). Logo podemos escrever F da seguinte forma:

$$F(z, t) = (f(z), h(z, t)),$$

onde $f : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$, $F : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ e $h : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$. Como f é uma isometria de $\Sigma^2(\kappa)$ nas suas coordenadas conformes, temos que ou $f = (f_1, f_2)$ é conforme[†] ou $\bar{f} = (f_1, -f_2)$ é conforme.

A partir de agora vamos dividir o problema em dois casos quando $\kappa \neq 0$ e quando $\kappa = 0$.

3.1 Isometrias no caso $\kappa \neq 0$

Suponha inicialmente que $\kappa \neq 0$, vamos enunciar o primeiro teorema da seção, com $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ com a seguinte métrica:

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 + (i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt)^2.$$

[†]Uma função conforme é uma função que preserva localmente os ângulos, mas não necessariamente comprimentos. Equivalentemente, dizemos que uma função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme se é holomorfa e sua derivada não é nula num aberto U em \mathbb{C} .

Teorema 3.1.1 (Isometrias de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, $\kappa \neq 0$). *Seja f uma isometria de $\Sigma^2(\kappa)$, então $F = (f, h) : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é uma isometria se:*

$$h(z, t) = \begin{cases} t + \frac{2\tau}{\kappa} \arg f'(z) + c, & \text{se } f \text{ preserva a orientação,} \\ -t - \frac{2\tau}{\kappa} \arg f'(z) + c, & \text{se } f \text{ reverte a orientação,} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde c é uma constante real. Além disso, toda isometria de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ é produzida dessa forma.

Demonstração. A função $h : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, portanto, precisamos determinar a função h e verificar se ela satisfaz o teorema.

Seja $F : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow (\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), ds^2)$, sabemos que F é uma isometria da forma $F(z, t) = (f(z), h(z, t)) = ((f_1, f_2), h)$ onde f é uma isometria de $\Sigma^2(\kappa)$. Então, com o pullback da métrica temos:

$$F^*(ds^2) = ds^2. \quad (3.2)$$

$$F^*(\lambda^2|dz|^2 + (i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt)^2) = \lambda^2|dz|^2 + (i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt)^2$$

como f é isometria de Σ^2 , e portanto

$$F^*(\lambda^2|dz|^2) = \lambda^2|dz|^2.$$

Então:

$$F^*(i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt) = \pm(i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt).$$

Suponha primeiro que:

$$F^*(i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt) = i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt. \quad (3.3)$$

Assim, se f preserva a orientação (sendo holomorfa), e os diferenciais são $df(z) = f'dz$, $d\bar{f}(z) = \bar{f}'d\bar{z}$ e $dh = h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z} + h_t dt$, então temos:

$$\begin{aligned} (3.3) &\iff i\tau\lambda(f(z))(\bar{f}df - f\bar{d}\bar{f}) + dh = i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\ &\iff i\tau\lambda(f(z))(\bar{f}f'dz - f\bar{f}'d\bar{z}) + h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z} + h_t dt = i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\ &\iff \begin{cases} i\tau\lambda(f(z))\bar{f}f' + h_z = i\tau\lambda(z)\bar{z} \\ i\tau\lambda(f(z))f\bar{f}' - h_{\bar{z}} = i\tau\lambda(z)z \\ h_t = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} i\tau\lambda(f(z))\bar{f}f' + h_z = i\tau\lambda(z)\bar{z} \\ h_t = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, h é uma função da forma $h(z, t) = \varphi(z) + t$ onde φ é uma função real, em virtude de $t \in \mathbb{R}$ e $h(z, t)$ toma imagem em \mathbb{R} . Assim temos:

$$\varphi_z = i\tau(\lambda(z)\bar{z} - \lambda(f(z))\bar{f}f'). \quad (3.4)$$

assim, temos

$$\begin{aligned} (3.4) \iff \varphi_z &= i\tau \left(\frac{2\bar{z}}{1 + \kappa z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f'}{1 + \kappa f\bar{f}} \right) \\ &\iff \varphi_z = i\frac{2\tau}{\kappa} (\log(1 + \kappa z\bar{z}) - \log(1 + \kappa f\bar{f}))_z \\ &\iff \varphi = -i\frac{2\tau}{\kappa} \log \left(\frac{1 + \kappa f\bar{f}}{1 + \kappa z\bar{z}} \right) + \bar{\psi}, \end{aligned}$$

onde $\bar{\psi}$ é uma função holomorfa ($\bar{\psi}_z = 0$). Por outro lado, as isometrias positivas de $\Sigma^2(\kappa)$ para $\kappa \neq 0$ têm a forma

$$f(z) = \frac{az - \bar{c}/\kappa}{cz + \bar{a}}, \quad (3.5)$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ verifica $a\bar{a} + c\bar{c}/\kappa = 1$, $|z| < 1/\sqrt{-\kappa}$ se $\kappa < 0$ e $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se $\kappa > 0$.

Verificamos que, para todo z , temos:

$$\frac{1 + \kappa f\bar{f}}{1 + \kappa z\bar{z}} = \frac{1}{|cz + \bar{a}|^2} = |f'(z)|,$$

assim,

$$(3.4) \iff \varphi = -i\frac{2\tau}{\kappa} \log |f'(z)| + \bar{\psi},$$

e

$$\varphi + i\frac{2\tau}{\kappa} \log |f'(z)| = \bar{\psi}, \quad (3.6)$$

temos que $\bar{\psi}$ é holomorfa, φ é real, $\log f'(z) = \log |f'(z)| + i \arg f'(z)$ é holomorfa e $\log |f'(z)|$ é a harmônica conjugada de $-\arg f'(z)$. Como a harmônica conjugada é única a menos de adição de uma constante, concluímos que:

$$\varphi(z) = \frac{2\tau}{\kappa} \arg f'(z) + c,$$

onde c é uma constante real. Portanto

$$h(z, t) = t + \frac{2\tau}{\kappa} \arg f'(z) + c.$$

Se agora f é uma isometria negativa de $\Sigma^2(\kappa)$ (anti-holomorfa[‡]), então $f = \bar{g}$ em que g é uma isometria positiva (holomorfa). Temos:

$$\begin{aligned}
(3.3) \iff & i\tau\lambda(f(z))(\bar{f}df - f\bar{d}\bar{f}) + dh = i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - z\bar{d}\bar{z}) + dt \\
\iff & i\tau\lambda(g(z))(g\bar{d}\bar{g} - \bar{g}dg) + dh = i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - z\bar{d}\bar{z}) + dt \\
\iff & i\tau\lambda(g(z))(g\bar{g}'d\bar{z} - \bar{g}g'dz) + h_z dz + h_{\bar{z}}d\bar{z} + h_t dt = i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - z\bar{d}\bar{z}) + dt \\
\iff & \begin{cases} -i\tau\lambda(g(z))\bar{g}g' + h_z = i\tau\lambda(z)\bar{z} \\ i\tau\lambda(g(z))g\bar{g}' + h_{\bar{z}} = -i\tau\lambda(z)z \\ h_t = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} h_z = i\tau(\lambda(g(z))\bar{g}g' + \lambda(z)\bar{z}) \\ h_t = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Novamente, h tem, portanto, a forma $h(z, t) = \varphi(z) + t$, onde φ é uma função real que satisfaz:

$$\varphi_z = i\tau(\lambda(g(z))\bar{g}g' + \lambda(z)\bar{z}).$$

Como g cumpre (3.5), temos:

$$\varphi_z = i\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa z\bar{z}) + \log(1 + \kappa g\bar{g}))_z.$$

Portanto, φ satisfaz:

$$\varphi(z) = i\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa z\bar{z}) + \log(1 + \kappa g\bar{g})) + \bar{\psi},$$

reescrevendo em termos de g' como anteriormente, temos

$$\varphi(z) = i\underbrace{\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa z\bar{z})^2 + \log|g'(z)|)}_{\in \mathbb{R}} + \bar{\psi},$$

logo,

$$\bar{\psi} = u(x, y) + iv(x, y) = \varphi(z) - i\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa z\bar{z})^2 + \log|g'(z)|).$$

Como $\log|g'(z)|$ é uma função harmônica, φ é real e $\bar{\psi}$ é holomorfa, implica na função $\log(1 + \kappa z\bar{z})^2$ ser harmônica, o que é falso, pois: $P = \log(1 + \kappa z\bar{z})^2 = 2\log(1 + \kappa|z|^2)$, e $|z|^2 = x^2 + y^2$, assim teremos $P_{xx} + P_{yy} \neq 0$. Isso mostra que na condição (3.3), a função f deve ser uma isometria positiva de $\Sigma^2(\kappa)$, com isso, temos a primeira parte do teorema.

[‡]Dizemos que uma função é anti-holomorfa se ela for derivável com respeito a \bar{z} . Ou seja, se $f(\bar{z})$ for holomorfa.

Suponha agora que:

$$F^*(i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt) = -i\tau\lambda(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt. \quad (3.7)$$

Assim, se f é uma isometria negativa de $\Sigma^2(\kappa)$, então $f = \bar{g}$ onde g esteja no formato (3.5) (positiva). Temos:

$$\begin{aligned} (3.7) &\iff i\tau\lambda(f(z))(\bar{f}df - f\bar{d}\bar{f}) + dh = -i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) - dt \\ &\iff i\tau\lambda(g(z))(gd\bar{g} - \bar{g}dg) + dh = -i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) - dt \\ &\iff i\tau\lambda(g(z))(gg'd\bar{z} - \bar{g}g'dz) + h_z dz + h_{\bar{z}}d\bar{z} + h_t dt = -i\tau\lambda(z)(\bar{z}dz - zd\bar{z}) - dt \\ &\iff \begin{cases} -i\tau\lambda(g(z))\bar{g}g' + h_z = -i\tau\lambda(z)\bar{z} \\ i\tau\lambda(g(z))gg' + h_{\bar{z}} = i\tau\lambda(z)z \\ h_t = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h_z = i\tau(\lambda(g(z))\bar{g}g' - \lambda(z)\bar{z}) \\ h_t = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, h tem a forma $h(z, t) = \varphi(z) - t$, onde φ é uma função real, que satisfaz:

$$\varphi_z = i\tau(\lambda(g(z))\bar{g}g' - \lambda(z)\bar{z}).$$

Como g cumpre (3.5), temos:

$$\varphi_z = i\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa g\bar{g}) - \log(1 + \kappa z\bar{z}))_z,$$

assim,

$$\varphi(z) = i\frac{2\tau}{\kappa}(\log(1 + \kappa g\bar{g}) - \log(1 + \kappa z\bar{z})) + \bar{\psi},$$

$$\varphi(z) = i\frac{2\tau}{\kappa} \log |g'(z)| + \bar{\psi},$$

onde $\bar{\psi}$ é holomórfa. Por outro lado, fazendo os mesmos cálculos, obtemos

$$h(z, t) = -t - \frac{2\tau}{\kappa} \arg g' + c,$$

onde c é uma constante real.

Portanto, f não pode ser uma isometria positiva de $\Sigma^2(\kappa)$, o que prova a segunda parte. ■

3.2 Isometrias no caso $\kappa = 0$

Agora vamos estudar o caso que $\kappa = 0$ e $\tau \neq 0$, lembrando que $\mathbb{E}^3(0, \tau)$ é o grupo de Heisenberg Nil_3 , com a métrica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\tau(ydx - xdy) + dt)^2 = |dz|^2 + \left(i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt\right)^2.$$

Da mesma forma que na [Seção 3.1](#), qualquer isometria de $\mathbb{E}^3(0, \tau)$ tem a forma

$$F(z, t) = (f(z), h(z, t))$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria. Portanto, f tem uma das duas formas:

$$f(z) = e^{i\theta}z + a + ib \quad \text{ou} \quad f(z) = e^{i\theta}\bar{z} + a + ib,$$

onde $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. Isso nos permitirá determinar as isometrias de $\mathbb{E}^3(0, \tau)$.

Teorema 3.2.1. *As isometrias dos espaços de Heisenberg (Nil_3), $\mathbb{E}^3(0, \tau)$, têm a forma:*

$$F(z, t) = (e^{i\theta}z + a + ib, t + \tau \text{Im}\left((a - ib)e^{i\theta}z\right) + c) \quad (3.8)$$

ou então

$$G(z, t) = (e^{i\theta}\bar{z} + a + ib, -t - \tau \text{Im}\left((a + ib)e^{-i\theta}z\right) + c) \quad (3.9)$$

com $a, b, c, \theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se F é uma isometria de $\mathbb{E}^3(0, \tau)$, então:

$$i\frac{\tau}{2}(\bar{f}df - fd\bar{f}) + dh = \pm \left(i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt\right).$$

Suponhamos primeiro que f seja uma isometria positiva de \mathbb{R}^2 . Temos:

$$i\frac{\tau}{2}(\bar{f}df - fd\bar{f}) + dh = i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
(3.10) &\iff i\frac{\tau}{2}(\bar{f}df - f\bar{d}\bar{f}) + dh = i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\
&\iff i\frac{\tau}{2}(\bar{f}f'dz - f\bar{f}'d\bar{z}) + dh = i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\
&\iff i\frac{\tau}{2}((e^{-i\theta}\bar{z} + a - ib)e^{i\theta}dz - (e^{i\theta}z + a + ib)e^{-i\theta}d\bar{z}) \\
&\quad + h_z dz + h_{\bar{z}}d\bar{z} + h_t dt = i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\
&\iff \begin{cases} i\frac{\tau}{2}e^{i\theta}(e^{-i\theta}\bar{z} + a - ib) + h_z = i\frac{\tau}{2}\bar{z} \\ h_t = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} h_z = -i\frac{\tau}{2}e^{i\theta}(a - ib) \\ h_t = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

O que mostra que h tem o formato $h(t, z) = t + \varphi(z)$, onde φ é uma função real que verifica

$$\varphi = -i\frac{\tau}{2}e^{i\theta}(a - ib)z + \bar{\psi},$$

com $\bar{\psi}$ holomorfa. Com argumentos análogos aos usados para a prova do [Teorema 3.1.1](#), temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} = u(x, y) + iv(x, y) &= \varphi(z) - \frac{\tau}{2}\text{Im}\left(e^{i\theta}(a - ib)z\right) + \frac{i\tau}{2}\text{Re}\left(e^{i\theta}(a - ib)z\right) \\
\varphi(z) &= \tau\text{Im}\left(e^{i\theta}(a - ib)z\right) + c \\
h(z, t) &= t + \tau\text{Im}\left(e^{i\theta}(a - ib)z\right) + c.
\end{aligned}$$

Assim, F é da primeira forma declarada no teorema.

Agora, se f é uma isometria negativa de \mathbb{R}^2 , temos

$$\begin{aligned}
(3.10) &\iff i\frac{\tau}{2}((e^{-i\theta}z + a - ib)e^{i\theta}dz - (e^{i\theta}\bar{z} + a + ib)e^{-i\theta}d\bar{z}) \\
&\quad + h_z dz + h_{\bar{z}}d\bar{z} + h_t dt = i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt \\
&\iff \begin{cases} -i\frac{\tau}{2}(\bar{z} + e^{-i\theta}(a + ib)) + h_z = i\frac{\tau}{2}\bar{z} \\ h_t = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} h_z = i\tau\bar{z} + i\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}(a + ib) \\ h_t = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

O que mostra que h tem o formato $h(t, z) = t + \varphi(z)$, onde φ é uma função real que verifica

$$\varphi(z) = i\tau z\bar{z} + i\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}(a + ib)z + \bar{\psi},$$

com $\bar{\psi}$ holomorfa. Isso causaria, por exemplo, que a função $z\bar{z}$ fosse harmônica, o que é falso. Deduzimos que, no caso (3.10), as isometrias são da primeira forma declarada.

Finalmente assumimos que:

$$i\frac{\tau}{2}(\bar{f}df - f d\bar{f}) + dh = -\left(i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) + dt\right). \quad (3.11)$$

Mostraremos que, neste caso, f deve ser uma isometria negativa de \mathbb{R}^2 . Então, temos:

$$\begin{aligned} (3.11) &\iff i\frac{\tau}{2}((e^{-i\theta}z + a - ib)e^{i\theta}dz - (e^{i\theta}\bar{z} + a + ib)e^{-i\theta}d\bar{z}) \\ &\quad + h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z} + h_t dt = -i\frac{\tau}{2}(\bar{z}dz - zd\bar{z}) - dt \\ &\iff \begin{cases} -i\frac{\tau}{2}(\bar{z} + e^{-i\theta}(a + ib)) + h_z = -i\frac{\tau}{2}\bar{z} \\ h_t = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h_z = i\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}(a + ib) \\ h_t = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, h tem a forma $h(t, z) = -t + \varphi(z)$, onde φ é uma função real que verifica

$$\varphi(z) = i\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}(a + ib)z + \bar{\psi},$$

em que $\bar{\psi}$ é holomorfa. Portanto, devemos ter:

$$\varphi(z) = -\tau \operatorname{Im}\left(e^{-i\theta}(a + ib)z\right) + c$$

onde c é uma constante real. A isometria F é, portanto, da forma:

$$F(z, t) = (e^{i\theta}\bar{z} + a + ib, -t - \tau \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}(a + ib)z\right) + c),$$

que termina a prova. ■

Observação 3.2.2. *Conhecendo todas as isometrias de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, podemos montar o grupo $G = \operatorname{Isom}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$ e verificar que essas variedades são homogêneas.*

4 Prova de que o campo V é um campo Killing

A seguir vamos mostrar que V é um campo de Killing, seguindo os passos da prova de Eric Toubiana em [Tou07].

4.1 Teorema do Campo de Killing nos Espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Teorema 4.1.1. *Seja \mathbb{M}^3 uma variedade simplesmente conexa da dimensão 3 com uma métrica ds^2 . Seja J um grupo de Lie agindo transitivamente em \mathbb{M}^3 por isometrias (assim (\mathbb{M}^3, ds^2) é homogênea). Assumimos que exista um campo vetorial unitário V em \mathbb{M}^3 , de modo que, para todo $g \in J$, tenhamos $d_x g(V_x) = V_{g(x)}$ para todos os $x \in \mathbb{M}^3$. Supomos ainda que, para todo $x \in \mathbb{M}^3$, exista um subgrupo $H_x \subset \text{Stab}(x) \subset J$ isomorfo a $SO(2)$ e contido no estabilizador de x . Nessas condições, temos uma e apenas uma das seguintes possibilidades:*

1. V é um campo Killing.
2. V não é um campo Killing e (\mathbb{M}^3, ds^2) é de curvatura seccional constante e negativa. Portanto (\mathbb{M}^3, ds^2) é isométrica a um espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3(-\mu^2)$, $\mu > 0$.

Em particular, se $J = \text{Isom}(\mathbb{M}^3)$ é o grupo de isometrias de \mathbb{M}^3 e se $\dim \text{stab}(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{M}^3$ (onde $\text{Stab}(x) = \text{Isom}_x(\mathbb{M}^3)$ é o estabilizador de x em J), então V é um campo Killing.

Demonstração. As hipóteses nos indicam que $\dim H_x = 1$ e que existe $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^3)$, unitário que é invariante a esquerda pela ação de J . Logo V gera um fluxo que determina uma folheação de \mathcal{F} de \mathbb{M}^3 definido pelas curvas integrais de V . Observe que nessa situação as hipóteses mostram que qualquer isometria $g \in J$ preserva \mathcal{F} , conforme mostrado na [Proposição 2.2.6](#).

Para todo $x \in \mathbb{M}^3$, chamamos $\mathcal{F}_x \subset \mathbb{M}^3$ a folha (curva integral) passando por x . Em particular, se $h \in H_x$, temos $h(\mathcal{F}_x) = \mathcal{F}_x$. Seja ϕ_t o fluxo de V . Como o campo V é unitário, o comprimento da curva \mathcal{F}_x , entre x e $\phi_t(x)$ é $|t|$. Ao orientar cada folha \mathcal{F}_x por V , temos $g(\mathcal{F}_x) = \mathcal{F}_{g(x)}$ e a orientação de $\mathcal{F}_{g(x)}$ induzida por V é a mesma que induzida pela orientação de \mathcal{F}_x e g , para todo o $g \in J$.

Seja $x \in \mathbb{M}^3$ e seja $g \in J$, para todo $t \geq 0$ o ponto $g(\phi_t(x))$ é o ponto na folha $\mathcal{F}_{g(x)}$ tal que o comprimento do arco desta folha delimitado por $g(x)$ e $g(\phi_t(x))$ seja t e a orientação dada por $g(x) \rightarrow g(\phi_t(x))$ é igual à orientação de $\mathcal{F}_{g(x)}$ fornecida por V . Portanto, temos $g(\phi_t(x)) = \phi_t(g(x))$ para todos os $x \in \mathbb{M}^3$ e todos os $t \geq 0$. Mostramos que isso também é válido para todos os $t < 0$ da mesma maneira. Então temos:

$$g \circ \phi_t = \phi_t \circ g$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $g \in J$.

Em particular, se $h \in \mathbf{H}_x$, teremos $h(y) = y$ para todos os $y \in \mathcal{F}_y$. Isso mostra que as folhas de \mathcal{F} são todas geodésicas.

Agora seja \mathcal{F} qualquer folha, ou $x \in \mathcal{F}$ e $h \in \mathbf{H}_x$. Infinitesimalmente temos $D_x h(V_x) = V_x$ e para qualquer vetor $U_x \in T_x \mathbb{M}^3$ ortogonal a V_x , a imagem vetorial $D_x h(U_x) \in T_x \mathbb{M}^3$ ainda é ortogonal a V_x . Assim, h se comporta próximo a x como uma rotação de eixo $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$. Assim, h se comporta próximo a x como uma rotação de eixo $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$. Como cada ponto de \mathcal{F} é fixado em h , isso mostra que \mathcal{F} não pode acumular-se quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Proposição 4.1.2. *Seja $x \in \mathbb{M}^3$, $t \in \mathbb{R}$ e seja $g_t \in \mathbf{G}$ de modo que $g_t(\phi_t(x)) = x$. Para todo $h \in \mathbf{H}_x$, temos:*

$$\begin{aligned} h \circ g_t &= g_t \circ h \\ h \circ (g_t \circ \phi_t) &= (g_t \circ \phi_t) \circ h \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim, o diferencial $d_x(g_t \circ \phi_t)$ comuta com todas as rotações do eixo $T_x \mathcal{F}_x = V_x \mathbb{R} = L_x$ (campo de retas). Consequentemente, $d_x(g_t \circ \phi_t)$ é ele próprio uma rotação do mesmo eixo, seguido, possivelmente, por uma homotetia na direção ortogonal a V_x .

Nota: Se um elemento de \mathbf{J} leva um ponto x em outro ponto y , então este elemento comuta com todo elemento de $\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_y$. Note $g_t \circ \phi_t$ fixa x de modo que sua derivada em x é um automorfismo de $T_x \mathbb{M}^3$. Assim a derivada é a identidade ao longo do eixo de rotação da ação de \mathbf{H}_x e comuta com os elementos de \mathbf{H}_x . Logo, a derivada deve ser uma rotação longo deste eixo possivelmente composta com uma expansão ou contração.

Demonstração. Agora seja $f := g_t^{-1} \circ h \circ g_t \in \mathbf{H}_x$, ou seja, $h \circ g_t = g_t \circ f$. Deduzimos que:

$$h \circ (g_t \circ \phi_t) = g_t \circ f \circ \phi_t = (g_t \circ \phi_t) \circ f \tag{4.2}$$

Mostraremos que $f = h$, isso mostrará as relações (4.1) e, portanto, que h e g_t comutam.

Vamos escolher um mapa $\tilde{\Omega}$ de \mathbb{M}^3 em torno de x , de modo que, chamando (u, v, t) das coordenadas de $\tilde{\Omega}$. O campo V corresponde ao campo ∂_t e, no ponto

$x = (u_0, v_0, t_0)$, a família $(\partial_u, \partial_y, \partial_t)$ é uma base ortonormal de $T_x\mathbb{M}^3$. Como $d_x(g_t \circ \phi_t)V_x = V_x$, deduzimos que, no ponto x , a matriz \mathbf{M} do diferencial $d_x(g_t \circ \phi_t)$ na base $(\partial_u, \partial_v, \partial_t)$ está no formato:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & p & 0 \\ b & q & 0 \\ c & r & 1 \end{pmatrix}$$

chamando $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}$) o argumento da rotação $d_x h$ (resp. $d_x f$), a matriz \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) de $d_x h$ (resp. $d_x f$) está no formato:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$. A relação (4.2) mostra que temos:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{B}$$

Ao equalizar os coeficientes dessas duas matrizes, obtemos seis equações que apresentamos em três sistemas de duas equações.

$$(S_1) = \begin{cases} a \cos \theta + p \sin \theta = a \cos \alpha - b \sin \alpha \\ p \cos \theta - a \sin \theta = p \cos \alpha - q \sin \alpha \end{cases}$$

$$(S_2) = \begin{cases} b \cos \theta + q \sin \theta = a \sin \alpha + b \cos \alpha \\ q \cos \theta - b \sin \theta = p \sin \alpha + q \cos \alpha \end{cases}$$

$$(S_3) = \begin{cases} (1 - \cos \theta)c - \sin \theta r = 0 \\ \sin \theta c + (1 - \cos \theta)r = 0 \end{cases}$$

Considere (S_3) como um sistema em que as incógnitas são c e r . O determinante é $(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$. Observe que, se $h \neq \text{Id}$, teremos $f \neq \text{Id}$. Supondo que $h \neq \text{Id}$ temos que $(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \neq 0$. Portanto, deduzimos que a única solução de (S_3) é $c = r = 0$.

Vamos resolver (S_1) em $\cos \theta$ e $\sin \theta$. O determinante é $-(a^2 + p^2)$, é diferente de zero porque \mathbf{M} é uma matriz invertível. Então temos:

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha - \frac{(ab+pq)}{a^2+p^2} \sin \alpha \\ \sin \theta = \frac{(aq-bp)}{a^2+p^2} \sin \alpha \end{cases}$$

Da mesma forma, resolvemos (S_2) em $\cos \theta$ e $\sin \theta$. O determinante é $-(b^2 + q^2)$ e é

diferente de zero porque \mathbf{M} é invertível. Temos:

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha + \frac{(ab+pq)}{a^2+p^2} \sin \alpha \\ \sin \theta = \frac{(aq-bp)}{a^2+p^2} \sin \alpha \end{cases}$$

Observe que $aq - bp \neq 0$ porque $\det(\mathbf{M}) \neq 0$. Ao equalizar os dois valores do seno encontrados, obtemos $a^2 + p^2 = b^2 + q^2$. Portanto, existem reais $p > 0$ e y, z tais que

$$\begin{cases} a = \rho \cos y & q = \rho \cos z \\ p = \rho \sin y & b = \rho \sin z \end{cases}$$

Ao igualar os dois valores de $\cos \theta$, obtemos $ab + pq = 0$, ou seja, substituindo acima chegamos em: $\sin(z + y) = 0$ e, portanto, $z + y = k\pi$ para um número inteiro k . Pela conexidade do fluxo ϕ_t , cada ϕ_t preserva a orientação, o mesmo ocorre para $g_t \circ \phi_t$. Portanto, temos $\det(\mathbf{M}) > 0$, ou seja, $aq - bp > 0$. Ao substituir, obtemos $\cos(y + z) > 0$. Portanto, temos $z = -y + 2k\pi$ para um número inteiro k . Deduzimos que $\cos \theta = \cos \alpha$ então $\sin \theta = \sin \alpha$, ou seja, $f = h$ e, conseqüentemente, $h \circ (g_t \circ \phi_t) = (g_t \circ \phi_t) \circ h$.

Finalmente, a matriz \mathbf{M} tem a forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho \cos z & -\rho \sin z & 0 \\ \rho \sin z & \rho \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conseqüentemente, $d_x(g_t \circ \phi_t)$ é da forma anunciada. \square

Observação 4.1.3. *Seja $x \in \mathbb{E}^3$ ou $h \in \mathbf{H}_x$ e $g \in \mathbf{G}$ de modo que $g(x) \in \mathcal{F}_x$ (e, portanto, $g(\mathcal{F}_x) = \mathcal{F}_x$). Observe que a proposição anterior mostra que g e h comutam:*

$$g \circ h = h \circ g.$$

Afirmção 1. Existe um μ real tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ e para qualquer vetor $U_x \in T_x \mathbb{M}^3$ ortogonal a V_x temos:

$$\|d_x(g_t \circ \phi_t)(U_x)\| = e^{\mu t} \|U_x\|$$

e portanto:

$$\|d_x \phi_t(U_x)\| = e^{\mu t} \|U_x\|$$

Demonstração. Como \mathbb{M}^3 é homogênea, deduzimos do exposto que para todo $x \in \mathbb{M}^3$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $U_x \in T_x \mathbb{M}^3$ ortogonal a V_x existe um real $\alpha(t)$ tal que

$$\|d_x \phi_t(U_x)\| = \alpha \|U_x\|.$$

Para todos os reais $t_0, t \in \mathbb{R}$, temos, portanto:

$$\|d_x \phi_{t_0+t}(U_x)\| = \alpha(t+t_0)\|U_x\|.$$

Além disso:

$$\|d_x \phi_{t_0+t}(U_x)\| = \|d_{\phi_{t_0}(x)} \phi_t(d_x \phi_{t_0}(U_x))\| = \alpha(t)\|d_x \phi_{t_0}(U_x)\| = \alpha(t)\alpha(t_0)\|U_x\|.$$

Portanto, temos $\alpha(t+t_0) = \alpha(t)\alpha(t_0)$ para todo reais t e t_0 . Definindo $\mu = \log \alpha(1)$ e observando que α é contínuo, deduzimos que $\alpha(t) = e^{\mu t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que mostra a afirmação. \square

Agora considere um sistema de coordenadas $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbb{M}^3 de tal forma que, chamando x, y, t como as coordenadas de Ω , o campo V seja ∂_t . Podemos supor que $\Omega = D \times I$ em que $D \subset \mathbb{R}^2$ seja o disco unitário aberto e $I \subset \mathbb{R}$ seja um intervalo aberto centrado em 0. A métrica ds^2 lida em Ω tem a forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Adx^2 + Bdy^2 + dt^2 + 2\alpha dxdt + 2\beta dydt + 2\gamma dx dy \\ &= (A - \alpha^2)dx^2 + (B - \beta^2)dy^2 + 2(\gamma - \alpha\beta)dxdy + (\alpha dx + \beta dy + dt)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Onde $A, B, \alpha, \beta, \gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Na carta Ω , o fluxo local ϕ_t tem a expressão: $\phi_t(p) = p + (0, 0, t)$ para todos os $p \in \Omega$ e todos os t em que isso está definido.

Observação 4.1.4. *Observe que V é um campo Killing se, e somente se, o fluxo ϕ_t for formado por isometrias, ou seja, se, e somente se, $\mu = 0$.*

Afirmação 2. As funções α e β são independentes de t e, portanto, dependem apenas de x e y .

Demonstração. Para mostrar isso, lembremos que as curvas integrais de V são geodésicas. Como o campo V é unitário, temos, portanto, $\bar{\nabla}_V V = 0$ onde $\bar{\nabla}$ é a conexão riemanniana de (\mathbb{M}^3, ds^2) . Na carta Ω , temos, portanto, $\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$. Como x, y e t são coordenadas que temos $\bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_t = \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x$. Então temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_x \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \partial_t, \partial_x \rangle - \langle \partial_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \alpha - \langle \partial_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \alpha \end{aligned}$$

que mostra que α não depende de t . Mostramos de maneira análoga que β não depende de t . \square

Afirmção 3. Para todo $p_0 = (x_0, y_0, t_0) \in \Omega$ e todo t , como $p_0 + t \in \Omega$ (onde, por simplicidade, $p_0 + t$ representa $p_0 + (0, 0, t)$), temos:

$$(A - \alpha^2)(p_0 + t) = 2^{2\mu t}(A - \alpha^2)(p_0)$$

$$(B - \beta^2)(p_0 + t) = 2^{2\mu t}(B - \beta^2)(p_0)$$

$$(\gamma - \alpha\beta)(p_0 + t) = 2^{2\mu t}(\gamma - \alpha\beta)(p_0)$$

Demonstração. A qualquer momento $p \in \Omega$, a métrica ds^2 nas coordenadas (x, y, t) é dada pela matriz:

$$G(p) := \begin{pmatrix} A & \gamma & \alpha \\ \gamma & B & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, para todos os vetores $\vec{u} = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_t$ e $\vec{v} = a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_1\partial_t$ em $T_p\mathbb{M}^3$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \vec{u}^T G(p) \vec{v} = (a, b, c) \cdot G(p) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \\ &= (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} Aa_1 + \gamma b_1 + \alpha c_1 \\ \gamma a_1 + Bb_1 + \beta c_1 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1 \end{pmatrix} (p) \\ &= a(Aa_1 + \gamma b_1 + \alpha c_1) + b(\gamma a_1 + Bb_1 + \beta c_1) + c(\alpha a_1 + \beta b_1 + c_1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Lembre-se de que para qualquer vetor $U \in T_p\Omega$ ortogonal a ∂_t , temos:

$$\|d_p(\phi_t)U\|_{p+t}^2 = e^{2\mu t} \|U\|_p^2 \quad (4.5)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, como $p + t \in \Omega$.

Aplicaremos essa propriedade aos campos vetoriais:

$$U_1 := \partial_x - \alpha\partial_t$$

$$U_2 := \partial_y - \beta\partial_t$$

$$U_3 := (\gamma - \alpha\beta)\partial_x - (A - \alpha^2)\partial_y + (\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta))\partial_t$$

Podemos verificar facilmente usando (4.4) se os campos vetoriais U_1 , U_2 e U_3 são ortogonais a $V = \partial_t$. Além disso, para todos os $t \in \mathbb{R}$ como $p_0 + t \in \Omega$, temos

$d_{p_0}(\phi_t)\partial_x(p_0) = \partial_x(p_0 + t)$ e o mesmo para campos ∂_y e ∂_t . Então temos:

$$\begin{aligned} d_{p_0}(\phi_t)U_1 &= \partial_x(p_0 + t) - \alpha(x_0, y_0)\partial_t(p_0 + t) \\ d_{p_0}(\phi_t)U_2 &= \partial_y(p_0 + t) - \beta(x_0, y_0)\partial_t(p_0 + t) \\ d_{p_0}(\phi_t)U_3 &= ((\gamma - \alpha\beta)\partial_x - (A - \alpha^2)\partial_y + (\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta))\partial_t)(p_0 + t) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|d_{p_0}(\phi_t)U_1\|_{p+t}^2 &= \langle d_{p_0}(\phi_t)U_1, d_{p_0}(\phi_t)U_1 \rangle_{p_0+t} \\ &= (1, 0, -\alpha)(p_0) \cdot \begin{pmatrix} A(p_0 + t) - \alpha(p_0 + t)\alpha(p_0) \\ \gamma(p_0 + t) - \beta(p_0 + t)\alpha(p_0) \\ \alpha(p_0 + t) - \alpha(p_0) \end{pmatrix} \\ &= (1, 0, -\alpha)(p_0) \cdot \begin{pmatrix} (A - \alpha^2)(p_0 + t) \\ (\gamma - \alpha\beta)(p_0 + t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (A - \alpha^2)(p_0 + t) \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que α e β não dependem de t . Aplicando a propriedade (4.5), obtemos:

$$(A - \alpha^2)(p_0 + t) = e^{2\mu t}(A - \alpha^2)(p_0) \quad (4.6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, como $p + t \in \Omega$.

Aplicando a propriedade (4.5) ao campo U_2 , obtemos da mesma maneira:

$$(B - \beta^2)(p_0 + t) = e^{2\mu t}(B - \beta^2)(p_0) \quad (4.7)$$

Por fim, aplique a propriedade (4.5) ao campo U_3 , obtemos:

$$\begin{aligned} \|d_{p_0}(\phi_t)U_3\|_{p+t}^2 &= \langle d_{p_0}(\phi_t)U_3, d_{p_0}(\phi_t)U_3 \rangle_{p_0+t} \\ &= ((\gamma - \alpha\beta), -(A - \alpha^2), (\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta)))(p_0) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} A(p_0 + t)(\gamma - \alpha\beta) - \gamma(p_0 + t)(A - \alpha^2) + \alpha(p_0 + t)(\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta)) \\ \gamma(p_0 + t)(\gamma - \alpha\beta) - B(p_0 + t)(A - \alpha^2) + \beta(p_0 + t)(\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta)) \\ \alpha(p_0 + t)(\gamma - \alpha\beta) - \beta(p_0 + t)(A - \alpha^2) + (\beta(A - \alpha^2) - \alpha(\gamma - \alpha\beta)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Continuando esse cálculo, após a simplificação e o usando novamente do fato de que α e β são independentes de t , obtemos:

$$\begin{aligned} \|d_{p_0}(\phi_t)U_3\|_{p+t}^2 &= \\ &= (A - \alpha^2)(p_0 + t)(\gamma - \alpha\beta)^2 - 2(\gamma - \alpha\beta)^2(p_0 + t)(A - \alpha^2) + (B - \beta^2)(p_0 + t)(A - \alpha^2)^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde as funções são avaliadas no ponto p_0 quando nada é indicado. Usando a propriedade (4.5) e as relações (4.6) e (4.7), obtemos:

$$(\gamma - \alpha\beta)(p_0 + t) = e^{2\mu t}(\gamma - \alpha\beta)(p_0) \quad (4.9)$$

para todos os $t \in \mathbb{R}$, como $p_0 + t \in \Omega$, que mostra a asserção. \square

Além disso, um cálculo análogo ao que fornece a relação (4.8) fornece:

$$\|d_{p_0}(U_3)\|_{p_0}^2 = (A - \alpha^2)(p_0)((A - \alpha^2)(B - \beta^2) - (\gamma - \alpha\beta)^2)(p_0)$$

isso mostra que

$$((A - \alpha^2)(B - \beta^2) - (\gamma - \alpha\beta)^2)(p_0) > 0 \quad (4.10)$$

para todos os $p_0 \in \Omega$. Além disso, o resultado anterior mostra que a métrica ds^2 , ver (4.3), tem a seguinte forma:

$$ds^2(x, y, t) = e^{2\mu t}(\tilde{a}(x, y)dx^2 + \tilde{b}(x, y)dy^2 + 2\tilde{c}(x, y)dxdy) + (\alpha dx + \beta dy + dt)^2 \quad (4.11)$$

onde $\tilde{a}(x, y) := (A - \alpha^2)(x, y, 0)$, $\tilde{b}(x, y) := (B - \beta^2)(x, y, 0)$ e $\tilde{c}(x, y) := (\gamma - \alpha\beta)(x, y, 0)$.

Deduzimos de (4.10) que $\tilde{a}(x, y)dx^2 + \tilde{b}(x, y)dy^2 + 2\tilde{c}(x, y)dxdy$ é uma métrica em $D \subset \mathbb{R}^2$. Com uma mudança de parâmetros fechados de D , pode-se supor que essa métrica seja conforme. Nessas novas coordenadas, que continuamos chamando de x e y (t não mudou), a métrica ds^2 tem a forma:

$$ds^2(x, y, t) = e^{2\mu t}\lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2) + (\alpha dx + \beta dy + dt)^2 \quad (4.12)$$

onde α, β e λ são apenas funções de x e y e mais $\lambda > 0$.

Afirmação 4. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \langle \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_x \rangle = e^{2\mu t} \lambda \lambda_x + \alpha \alpha_x & \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle = e^{2\mu t} \lambda \lambda_y + \alpha \alpha_y & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x, \partial_x \rangle = e^{2\mu t} \lambda^2 \\ \langle \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_y \rangle = (\alpha \beta)_x - e^{2\mu t} \lambda \lambda_y - \alpha \alpha_y & \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle = e^{2\mu t} \lambda \lambda_x + \beta \beta_x & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x, \partial_y \rangle = \frac{1}{2}(\beta_x - \alpha_y) \\ \langle \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_t \rangle = \alpha_x - e^{2\mu t} \lambda^2 & \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_x, \partial_t \rangle = \frac{1}{2}(\alpha_y + \beta_x) & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x, \partial_t \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_y, \partial_x \rangle = (\alpha\beta)_y - e^{2\mu t} \lambda \lambda_x - \beta \beta_x & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_y, \partial_x \rangle = -\frac{1}{2}(\beta_x - \alpha_y) \\ \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_y, \partial_y \rangle = e^{2\mu t} \lambda \lambda_y + \beta \beta_y & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_y, \partial_y \rangle = e^{2\mu t} \lambda^2 \\ \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_y, \partial_t \rangle = \beta_y - e^{2\mu t} \lambda^2 & \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_y, \partial_t \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Portanto, temos:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda} + \mu\alpha \right) \partial_x + \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda} + \mu\beta + \alpha \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_y \\ \quad + \left(\alpha\beta \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{e^{2\mu t} \lambda^2} + \beta \frac{\lambda_y}{\lambda} - \alpha \frac{\lambda_x}{\lambda} + \alpha_x - \mu(e^{2\mu t} \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2) \right) \partial_t \\ \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_x = \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_y = \left(\frac{\lambda_y}{\lambda} + \frac{\alpha}{2} \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_x + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda} + \frac{\beta}{2} \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_y \\ \quad + \left(\frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} - \alpha \frac{\lambda_y}{\lambda} - \beta \frac{\lambda_x}{\lambda} + \frac{1}{2}(\alpha_y + \beta_x) \right) \partial_t \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_x = \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_t = \mu \partial_x + \frac{1}{2} \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \partial_y - \left(\mu\alpha + \frac{\beta}{2} \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_t \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_y = \left(-\frac{\lambda_x}{\lambda} + \beta \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_x + \left(\frac{\lambda_y}{\lambda} + \mu\beta \right) \partial_y \\ \quad + \left(\alpha\beta \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{e^{2\mu t} \lambda^2} + \alpha \frac{\lambda_x}{\lambda} - \beta \frac{\lambda_y}{\lambda} + \beta_y - \mu(e^{2\mu t} \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2) \right) \partial_t \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_y = \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_t = \frac{1}{2} \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \partial_x + \mu \partial_y - \left(\beta\mu + \frac{\alpha}{2} \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{e^{2\mu t} \lambda^2} \right) \partial_t \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

As relações de (4.13) e (4.14) são mostradas usando a métrica. Por exemplo

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_y \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \langle \partial_x, \partial_y \rangle - \langle \partial_x, \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_x \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \langle \partial_x, \partial_y \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \langle \partial_x, \partial_x \rangle \\ &= (\alpha\beta)_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (e^{2\mu t} \lambda^2 + \alpha^2) \\ &= (\alpha\beta)_x - e^{2\mu t} \lambda \lambda_y - \alpha \alpha_y \end{aligned}$$

A métrica ds^2 é dada pela matriz:

$$G = \begin{pmatrix} e^{2\mu t} \lambda^2 + \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & e^{2\mu t} \lambda^2 + \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz inversa é

$$G^{-1} = \frac{1}{e^{2\mu t} \lambda^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & e^{2\mu t} \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, para qualquer vetor $\vec{u} = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_t$, temos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \partial_x \rangle \\ \langle \vec{u}, \partial_y \rangle \\ \langle \vec{u}, \partial_t \rangle \end{pmatrix}$$

As fórmulas (4.15) e (4.16) são mostradas usando essas identidades e as relações (4.13) e (4.14).

Agora

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \partial_x - \frac{\alpha}{e^{\mu t \lambda}} \partial_t \\ \bar{E}_2 = \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \partial_y - \frac{\beta}{e^{\mu t \lambda}} \partial_t \end{cases} \quad (4.17)$$

Observe que $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \partial_t)$ é um campo de referências ortonormais em $\Omega = D \times I$.

Afirmção 5. Temos:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1 &= \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\mu\beta - \frac{\lambda_y}{\lambda} \right) \bar{E}_2 - \mu\partial_t, & \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2 &= \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda} - \mu\beta \right) \bar{E}_1 + \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{2e^{2\mu t \lambda^2}} \partial_t \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 &= \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda} - \alpha\mu \right) \bar{E}_2 + \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{2e^{2\mu t \lambda}} \partial_t, & \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_2 &= \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\mu\alpha - \frac{\lambda_x}{\lambda} \right) \bar{E}_1 - \mu\partial_t \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{E}_1 &= \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{2e^{2\mu t \lambda^2}} \bar{E}_2, & \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{E}_2 &= \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{2e^{2\mu t \lambda^2}} \bar{E}_1 \\ \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \partial_t &= \mu\bar{E}_1 + \frac{(\beta_x - \alpha_y)}{2e^{2\mu t \lambda^2}} \bar{E}_2, & \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \partial_t &= \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{2e^{2\mu t \lambda^2}} \bar{E}_1 + \mu\bar{E}_2, & \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} [\bar{E}_1, \bar{E}_2] &= \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda} - \mu\beta \right) \bar{E}_1 - \frac{1}{e^{\mu t \lambda}} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda} - \alpha\mu \right) \bar{E}_2 + \frac{(\alpha_y - \beta_x)}{e^{2\mu t \lambda^2}} \partial_t \\ [\bar{E}_1, \partial_t] &= \mu\bar{E}_1 \\ [\bar{E}_2, \partial_t] &= \mu\bar{E}_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

As fórmulas (4.18) são mostradas usando as relações (4.15) e (4.16). As relações (4.19) são deduzidas diretamente de (4.18).

Agora vamos calcular em cada ponto de Ω a curvatura seccional do 2-plano horizontal P gerado por $\text{span}(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$.

Afirmção 6. Temos:

$$K(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = -3e^{-4\mu t} \left(\frac{\alpha_y - \beta_x}{2\lambda^2} \right)^2 + e^{-2\mu t} \left(\kappa + \frac{\mu}{\lambda^2} (\alpha_x + \beta_y) \right) - \mu^2 \quad (4.20)$$

em que κ denota a curvatura gaussiana de Σ^2 fornecida com a métrica em conformidade $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$, isto é (Δ é o Laplaciano euclidiano):

$$\kappa = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = -\frac{\lambda_{xx} + \lambda_{yy}}{\lambda^3} + \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{\lambda^4}.$$

De fato, por definição, temos:

$$K(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1 - \bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{\nabla}_{\bar{E}_2} \bar{E}_1 + \bar{\nabla}_{[\bar{E}_1, \bar{E}_2]} \bar{E}_1, \bar{E}_2 \rangle.$$

O resultado de (4.20) é obtido usando a fórmula acima e as relações (4.18) e (4.19).

Agora podemos concluir a prova do teorema. Por suposição, para todos os pontos $p_1 = (x_1, y_1, t_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, t_2)$ de Ω , existe uma isometria $g \in \mathbf{J}$, tal que $g(p_1) = p_2$ e $d_{p_1}g(V(p_1)) = V(p_2)$, lembre-se de que na carta Ω temos $V = \partial_t$. Portanto, temos $d_{p_1}gP(\bar{E}_1, \bar{E}_2)(p_1) = P(\bar{E}_1, \bar{E}_2)(p_2)$. Como g é uma isometria, deduzimos que a curvatura seccional do 2-plano horizontal $P(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$ é independente de ponto. Em particular $K(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$ é independente de t em Ω , pois a curvatura seccional é constante ao longo do campo de planos. Deduzimos de (4.20) (Derivada em relação a t é zero) que temos:

$$\mu = 0 \quad \text{ou} \quad (*) \quad \begin{cases} \alpha_y - \beta_x = 0 \\ \kappa + \frac{\mu}{\lambda^2} (\alpha_x + \beta_y) = 0 \end{cases}$$

Se $\mu = 0$, o campo vetorial V é, portanto, um campo Killing.

Agora suponha que $\mu \neq 0$, usando (*) e (4.20), tenhamos $K(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = -\mu^2$ em cada ponto de Ω . Portanto

$$K(\bar{E}_1, \partial_t) = \left(\frac{\alpha_y - \beta_x}{2e^{2\mu t} \lambda^2} \right)^2 - \mu^2.$$

Novamente, usando (*), deduzimos que $\kappa(\bar{E}_1, \partial_t)$ é constante e igual a $-\mu^2$ em cada ponto de Ω .

Finalmente, em uma isometria de H_x , em cada ponto de Ω , todos os 2-planos

terão a forma $\text{span}(a\bar{E}_2 + b\partial_t\bar{E}_1)$ com $a^2 + b^2 = 1$. Logo:

$$\begin{aligned} K(a\bar{E}_2 + b\partial_t\bar{E}_1) &= a^2\kappa(\bar{E}_2, \bar{E}_1) + b^2\kappa(\partial_t\bar{E}_1) + 2ab\langle R(\partial_t\bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle \\ &= -a^2\mu^2 - b^2\mu^2 + 2ab\langle R(\partial_t\bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle \\ &= -\mu^2 + 2ab\langle R(\partial_t\bar{E}_1)\bar{E}_2, \bar{E}_1 \rangle \end{aligned}$$

Usando (*), calculamos facilmente que $R(\partial_t\bar{E}_1)\bar{E}_2 = 0$. Isso mostra que em Ω e, portanto, em \mathbb{M}^3 , a curvatura seccional é constante e igual a $-\mu^2$, portanto \mathbb{M}^3 é isométrica a $\mathbb{H}^3(-\mu^2)$. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conhecendo a estrutura métrica, a curvatura seccional e as isometrias dos espaços $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ podemos obter outros resultados e outras aplicações. Uma outra abordagem pode ser dada, analisando a imersão $I : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Benôit Daniel obteve uma condição necessária e suficiente para uma superfície \mathbb{M}^2 ser localmente imersa isometricamente em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ [Dan05]. Essa abordagem tem sido muito estudada nos últimos anos e é um tema quente em geometria diferencial. Um outro tema importante é a busca de superfícies mínimas em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Nos últimos anos, o interesse em superfícies com Curvatura Média Constante (CMC) está crescendo especialmente em espaços homogêneos tridimensionais. Existem vários trabalhos que tratam de sua representação, como, por exemplo em Abresch e Rosenberg [AR05].

Referências Bibliográficas

- [AB15] M.M. Alexandrino and R.G. Bettiol. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. Citado na página 69.
- [Alm03] Sérgio Moura Almaraz. *Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert*. Dissertação de Mestrado PUC-Rio, 2003. Citado na página 17.
- [AR05] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. *Generalized Hopf differentials*. *Mat. Contemp.* 28 (2005), 2005. Citado na página 60.
- [CE75] J. Cheeger and D. G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland Publishing Company, 1975. Citado nas páginas 6, 21, 37 e 76.
- [Dan05] Benoît Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. 2005. Citado na página 60.
- [DC15] M. P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, 2015. Citado nas páginas 8, 35 e 76.
- [eBK10] Karsten Große Brauckmann and Robert B. Kusner. Conjugate plateau constructions for homogeneous 3-manifolds. *preprint*, 2010. Citado na página 19.
- [FM10] Isabel Fernández and Pablo Mira. Constant mean curvature surfaces in 3-dimensional thurston geometries. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010, ICM 2010*, 04 2010. Citado na página 9.
- [GJ10] José Lisboa Gondin Júnior. *Classificação de algumas geometrias sem quociente compacto*. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2010. Citado nas páginas 8, 16, 17 e 18.
- [Hal15] Brian Hall. Lie groups, lie algebras, and representations. *Graduate Texts in Mathematics*, 222, 01 2015. Citado nas páginas 3 e 74.
- [Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric Spaces*. 2nd edn. Academic Press. New York, 1978. Citado nas páginas 6, 71 e 74.

- [HR10] E. Toubiana H. Rosenberg, R. Souam. General curvature estimates for stable h-surfaces in 3-manifold. *Journal of Differential Geometry*, 2010. Citado na página 7.
- [KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley (Interscience), New York, Vol. I and II, 1963/1969. Citado nas páginas 6, 8 e 9.
- [Laf15] Jacques Lafontaine. *An Introduction to Differential Manifolds*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. Citado na página 65.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2013. Citado nas páginas 7, 8, 65, 66 e 67.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2018. Citado na página 75.
- [Mil76] J. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on lie groups. *Advances in Mathematics*, (21):293–329, 1976. Citado na página 10.
- [MIP11] William H. Meeks III and Joaquin Pérez. Constant mean curvature surfaces in metric lie groups. *Contemporary Mathematics*, 2011. Citado na página 10.
- [MS39] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a riemannian manifold. *Annals of Mathematics*, 40(2):400–416, 1939. Citado na página 8.
- [O’N66] Barrett O’Neill. The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J.*, 13(4):459–469, 12 1966. Citado na página 6.
- [Ple12] Julia Plehnert. *Constant Mean Curvature Surfaces in Homogeneous Manifolds*. Logos Verlag Berlin, 2012. Citado na página 19.
- [Sco83] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. 59(15):401–487, 1983. Citado na página 9.
- [Sha01] B. N. Shapukov. *Grupos y álgebras de Lie en ejercicios y problemas*. Editorial Mir URSS Moscú, 2001. Citado na página 68.
- [Sti08] John Stillwell. *Naive Lie Theory*. Springer-Verlag New York, 2008. Citado na página 69.
- [Tap16] Kristopher Tapp. *Matrix Groups for Undergraduates*. American Mathematical Society, Series: Student mathematical library ; volume 79, 2016. Citado na página 66.

- [Thu97] W. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton, 1997. Citado nas páginas 9, 10 e 19.
- [Tou07] E. Toubiana. *Note sur les Varietes Homogenes de Dimension 3*. preprint, 2007. Citado nas páginas vi, vii, 1, 10, 11, 15, 19, 30, 39 e 48.
- [War83] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983. Citado na página 8.

A Um pouco mais sobre grupos de Lie

Neste apêndice vamos lembrar alguns resultados e exemplos para um melhor entendimento do trabalho.

A.1 Outros exemplos

Exemplo A.1.1. O grupo \mathbb{C}^* com a multiplicação de números complexos $\mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie de dimensão 2. Note que as operações são suaves: dado $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos que as aplicações $z_1 \cdot z_2 \mapsto x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ temos $z^{-1} \mapsto \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ são diferenciáveis. O círculo (ou complexos unitários) $\mathbb{S}^1 = \text{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ é uma variedade diferenciável compacta de dimensão 1 e, com a operação de multiplicação de números complexos induzida por \mathbb{C}^* é um grupo de Lie.

Exemplo A.1.2. O produto cartesiano de dois grupos de Lie é também um grupo de Lie, ou seja, se G e H são grupos de Lie, então $G \times H$ é um grupo de Lie, pois o produto cartesiano $G \times H$ admite a estrutura de variedade produto e a estrutura de grupo com a operação do grupo sendo o produto direto que é suave $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$. O n -torus, \mathbb{T}^n , é um grupo de Lie formado pelo produto cartesiano de \mathbb{S}^1 por si, n vezes. Também \mathbb{R}^n é o produto de n cópias de \mathbb{R} .

Exemplo A.1.3. O recobrimento universal de um grupo de Lie conexo é um grupo de Lie.

A.2 Translações à esquerda e à direita

Fixando um elemento $y \in G$ dado. Definimos, respectivamente, as translações à esquerda e à direita por y , por

$$\begin{aligned} L_y : G &\rightarrow G & R_y : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto yx & x &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Esses mapas são suaves de G a G e, portanto, difeomorfismos de G , pois $L_{y^{-1}}$ e $R_{y^{-1}}$ são C^∞ e $L_x \circ L_y = L_{xy}$, $L_x \circ L_{x^{-1}} = L_e = \text{Id}_G$. Se U for um conjunto, denotamos por gU o conjunto $L_g(U)$. Se U é aberto, gU também o é, uma vez que L_g é um homeomorfismo.

A.3 Morfismos

Definição A.3.1 (Morfismos [Laf15]). *Sejam G e H grupos de Lie. Um mapa f de G para H é chamado de **homomorfismo** de grupo de Lie se:*

1. *é um homomorfismo de grupo; e*
2. *é um mapa C^∞ de variedades diferenciáveis.*

*Se, além disso, f for um isomorfismo de grupos e um difeomorfismo de variedades diferenciáveis, então é chamado de **isomorfismo** de grupo de Lie, que denotaremos \cong .*

Proposição A.3.2 ([Lee13]). *Todo homomorfismo de grupo de Lie tem posto constante.*

Em geral, define-se um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G como um subgrupo $H \subset G$ que também é um subconjunto fechado. É possível mostrar que tal subgrupo fechado H herda uma estrutura variedade diferenciável do grupo de Lie G e, portanto, ele próprio se torna um grupo de Lie.

Definição A.3.3. *Um subgrupo de Lie H de um grupo de Lie G é um subgrupo abstrato de G que tem uma estrutura suave e é uma subvariedade de G .*

Proposição A.3.4 ([Lee13]). *Se $F : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupo, então o $\ker(F) \subseteq G$ é um subgrupo de Lie mergulhado de G , com codimensão igual ao posto de F .*

Proposição A.3.5 ([Lee13]). *Se $F : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupo de Lie injetivo, a imagem de F tem uma estrutura única de variedade diferenciável tal que $F(G)$ é um subgrupo de Lie de H e $F : G \rightarrow F(G)$ é um isomorfismo de grupos de Lie.*

Proposição A.3.6. *Todo subgrupo aberto de um grupo Lie é fechado.*

Demonstração. Uma classe lateral gH de H é obtida de H por uma translação à esquerda. Portanto, se H é aberto, o mesmo ocorre com gH . Mas o grupo G é a união de H com as classes laterais gH , $g \notin H$. Isso significa que o complementar de H em G é uma união de abertos, e, a partir disso, segue que H é fechado. ■

Note que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, o círculo unitário \mathbb{S}^1 é um subgrupo fechado de \mathbb{C}^* que não é aberto (conforme [Exemplo A.1.1](#)), pois, seu complementar não é fechado.

Definição A.3.7. *Um grupo de matriz G é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.*

Observação A.3.8. *Conforme o Teorema 2.1[[Tap16](#)], qualquer grupo de matrizes pode ser visto como um grupo de matrizes real. Por exemplo, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$. Daqui, resulta que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathrm{GL}(4n, \mathbb{R})$. A justificativa vem da construção dos homomorfismos injetivos: $\rho_n : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ e $\Psi_n : \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \rightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$.*

Note que $\rho_1 : \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ e $\Psi_1 : \mathrm{GL}(1, \mathbb{H}) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

$q = x + iy + jz + kw \mapsto \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix}$, onde $v_1 = x + iy$ e $v_2 = z + iw$. Considerando os subgrupos $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1 \subset \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SO}(2)$, a aplicação ρ_1 é um isomorfismo de grupos. De forma análoga, considerando subgrupos, a aplicação Φ_1 é um isomorfismo de grupos dos quatérnios unitário para $\mathrm{SU}(2)$.

Exemplo A.3.9 (Homomorfismo de grupos de Lie). *Seja \mathbb{R} o grupo de Lie aditivo de números reais e \mathbb{S}^1 o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto f(t) = e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ é um homomorfismo de grupos de Lie.*

O mapa f é um homomorfismo de grupos pois,

$$f(t_1 + t_2) = e^{2\pi i(t_1 + t_2)} = e^{2\pi it_1} e^{2\pi it_2} = f(t_1)f(t_2)$$

e f é um mapa C^∞ de variedades diferenciáveis, pois as coordenadas \sin e \cos são suaves. Note que f é sobrejetiva, pois se $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ então:

$$e^{i\theta} = e^{i2\pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)} = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right).$$

No entanto, f não é injetiva, pois $\ker(f) = \mathbb{Z}$, logo não temos um isomorfismo de grupos e, conseqüentemente, esses grupos não são isomorfos como grupos de Lie. A função f^{-1} também não é contínua, pois para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno, os pontos $2\pi - \varepsilon$ e $2\pi + \varepsilon$ são levados em pontos distantes por f^{-1} . Logo, as variedades são diferentes, não sendo homeomorfas[†].

Proposição A.3.10 ([[Lee13](#)]). *O quociente de um grupo de Lie por um subgrupo normal fechado é um grupo de Lie.*

[†]Note ainda que \mathbb{S}^1 é compacto e \mathbb{R} não é.

Pelo 1º teorema dos isomorfismo, temos $G/\ker f \simeq \text{Im} f = \mathbb{S}^1$. Assim \mathbb{R}/\mathbb{Z} e \mathbb{S}^1 são isomorfos como grupos. Seja $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[t] : t \in \mathbb{R}\}$ com a topologia quociente induzida pelo mapa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $g(t) = [t]$ (g é um mapa quociente, pois é contínua sobrejetiva). Então o mapa f induz um homeomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $[t] \mapsto e^{2i\pi t}$ caracterizado por $f = \tilde{f} \circ g$. Como estamos na dimensão 1[‡], $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um difeomorfismo e, conseqüentemente, \mathbb{R}/\mathbb{Z} e \mathbb{S}^1 são grupos de Lie isomorfos.

Proposição A.3.11 ([Lee13]). *Se G é um grupo de Lie conexo e Γ é um subgrupo discreto, então G/Γ é uma variedade suave e a aplicação de quociente $f : G \rightarrow G/\Gamma$ é um mapa de cobertura suave.*

Exemplo A.3.12. *O grupo \mathbb{R} é o recobrimento universal do grupo circular \mathbb{S}^1 .*

A seguir veremos um outro exemplo importante de isomorfismo de grupos Lie envolvendo \mathbb{S}^1 e um grupo de matrizes.

Exemplo A.3.13 ($\text{SO}(2) \cong \mathbb{S}^1$). *O grupo ortogonal especial $\text{SO}(2)$ e \mathbb{S}^1 são isomorfos como grupos de Lie.*

De fato, por definição, $\text{SO}(2) = \{M \in \text{O}(2) \mid \det(M) = 1\}$. Então, como $M \in \text{O}(2)$ se, e somente se, suas colunas são vetores ortonormais de \mathbb{R}^2 . Para cada $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$ existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ e obtemos que

$$\begin{aligned} \text{SO}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0, ad - bc = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\} \cong \text{O}(2) \cap \text{SL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{GL}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^* \cong \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

Agora considere a representação real de $\text{GL}(1, \mathbb{C})$

$$\rho : \text{GL}(1, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R}), \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

A aplicação ρ é um homomorfismo de grupos (conforme a **Observação A.3.8**) e também um mapa suave entre duas variedades diferenciáveis.

[‡]Nas dimensões 1, 2, 3, qualquer par de variedades diferenciáveis homeomorfas são difeomorfas. Para dimensões maiores que 3 é possível encontrar um par de variedades homeomórficas que não sejam difeomorfas. John Milnor ganhou a Medalha Fields em 1962, em parte, por dar o primeiro exemplo de um par de variedades diferenciáveis que são homeomorfas, mas não difeomorfas.

Lema A.3.14 ([Sha01]). *Seja um mapa suave de variedades $\phi : M \rightarrow N$. M_0 e N_0 são subvariedades em M e N , respectivamente, e $\phi(M_0) \subset N_0$. Então, o mapa induzido $\phi|_{M_0}$ é suave.*

Assim $\rho|_{\mathbb{S}^1}$ também é suave. Além disso a aplicação $\rho|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{SO}(2)$, $(\cos \theta + i \sin \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ é uma bijeção e, conseqüentemente, um isomorfismo de grupos.

Por fim, temos que a inversa também é suave, pois considerando a aplicação $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z, w) = (x, y)$ que é suave, um vez que suas coordenadas o são. Como $\mathbb{S}^1 \subset \text{GL}(1, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e $\text{SO}(2) \subset \text{GL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, sendo subvariedades de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^4 respectivamente. Logo definido a inversa como $g|_{\text{SO}(2)} : \text{SO}(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$, temos uma aplicação suave entre essas subvariedades. Portanto $\text{SO}(2)$ e \mathbb{S}^1 são difeomorfos e isomorfos como grupos de Lie.

Note que $\mathbb{T}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 \cong \text{SO}(2)$ e $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{\text{SO}(2) \times \cdots \times \text{SO}(2)}_{n \text{ vezes}}$. A seguir veremos um outro isomorfismo de grupos de Lie importante no trabalho.

Exemplo A.3.15. *O grupo unitário $U(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A = \bar{A}^T\}$ e o grupo especial unitário $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ são subgrupos de Lie de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Podemos representar $SU(2)$ da seguinte maneira*

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Considere o homomorfismo de grupos $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$. Assim como o exemplo anterior, se considerarmos a restrição de Φ aos quatérnios unitários, temos que Φ é um isomorfismo de grupos de $\mathbb{S}^3 \cong \{q \in \mathbb{H} \text{ (quatérnios unitários)} : |q| = 1\}$ para $SU(2)$, pois a aplicação $\Phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SU(2)$, tal que

$$\Phi(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

está bem definida e é uma bijeção, que satisfaz $\Phi(q_1q_2) = \Phi(q_1)\Phi(q_2)$. Agora considere

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^8, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

e

$$g : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

que são suaves. Com isso podemos considerar Φ e sua inversa como as restrições de f e g as subvariedades $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, $SU(2) \subset \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$, sendo elas por conta disso suaves. Logo $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

Aqui estão alguns isomorfismos de esferas com grupos de Lie de matriz: $O(1) \cong \mathbb{S}^0$, $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ e $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

A.4 A Componente conexa da identidade

A **Componente conexa da identidade** G^0 de um grupo G refere-se ao subgrupo conexo de G que contém o elemento identidade. Ela tem propriedades bastantes significativas, G^0 é um subgrupo normal e fechado de G e consequentemente é um grupo de Lie. Os outros componentes conexos são todos classe laterais deste subgrupo.

Proposição A.4.1 ([Sti08]). *Se G é um grupo de Lie, a componente conexa da identidade G^0 de G é um subgrupo normal de G .*

Corolário A.4.1.1 ([AB15]). *As componentes conexas de G têm a forma gG^0 , para $g \in G$. Além disso, para qualquer vizinhança aberta U de e , $G^0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, onde $U_n := \{g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1} : g_i \in U\}$.*

A prova da primeira parte do corolário decorre do fato que as translações à esquerda em G são homeomorfismos e levam conexos em conexos, preservando as componentes conexas. A segunda parte decorre de que G^0 é um subgrupo normal, aberto e fechado em G .

Exemplo A.4.2. *Se $G = O(2)$, então $G^0 = SO(2)$.*

Observe que se G é um grupo de Lie, então a única componente conexa de G que é um subgrupo é G^0 . Para ver esse fato, basta observar que se $g \notin G^0$, então $e \notin gG^0$.

A.5 Ações de grupos

As ações dos grupos produzem resultados importantes, em virtude disso, vamos revisar alguns aspectos importantes para o futuro. Sejam G um grupo e \mathcal{M} uma variedade diferenciável. Uma **ação à esquerda** de G sobre \mathcal{M} é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \psi : G \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tal que, para todos $g_1, g_2 \in G$ e para todo $x \in \mathcal{M}$, temos $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ e $e \cdot x = x$, onde e é o elemento neutro do grupo G .

Quando um grupo G age sobre uma variedade \mathcal{M} , definimos a **órbita** de um elemento x como o conjunto

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

A ação é **transitiva** se para cada par $x, y \in \mathcal{M}$ existir um $g \in G$ tal que $gx = y$, isso é equivalente a $G \cdot x = \mathcal{M}$, para todo $x \in \mathcal{M}$.

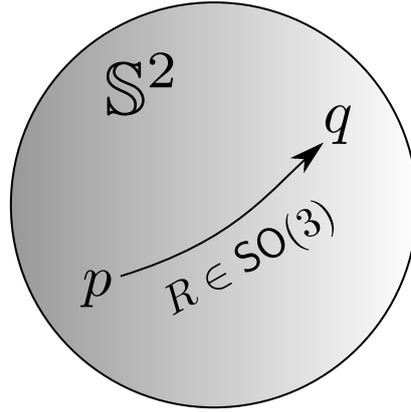


Figura A.1: A ação do grupo $\text{SO}(3)$ em S^2 e por meio de rotações de \mathbb{R}^3 em torno da origem 0, que deixam a esfera S^2 invariante.

Dada a ação de um grupo G em algum espaço \mathcal{M} e dado um ponto $x \in \mathcal{M}$, o grupo **estabilizador** ou **grupo de isotropia** de x é o subgrupo de G que deixa x invariante.

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Dizemos que a ação de G em \mathcal{M} é **livre** se todos os estabilizadores forem triviais. E se $\bigcap_{x \in \mathcal{M}} G_x = e_G$ a ação é **efetiva**.

Exemplo A.5.1. O grupo $\text{SO}(3)$ atua transitivamente sobre a esfera S^2 . O grupo de isotropia de cada ponto $p \in S^2$ é o grupo de rotações de \mathbb{R}^3 que deixam a reta ligando p a $-p$ fixa. Assim, para cada $p \in S^2$, $\text{SO}(3)_p$ é isomorfo a $\text{SO}(2)$, portanto a ação não é livre. Porém, podemos ver que a ação é efetiva, dado que se $q \in S^2/\{p, -p\}$ temos $\text{SO}(3)_p \cap \text{SO}(3)_q = \{e\}$.

Definição A.5.2. Uma ação de um grupo G em uma variedade \mathcal{M} é **propriamente descontínua** se todo $p \in \mathcal{M}$ possui uma vizinhança $U \subset \mathcal{M}$ tal que $U \cap g(U) = \emptyset$, para todo $g \in G$, com $g \neq e$.

Quando G age em \mathcal{M} , a ação determina uma relação de equivalência \sim em \mathcal{M} , onde $p \sim q$ se, e só se, $p = gq$, para algum $g \in G$. Equivalentemente, $p \sim q$ se $q \in Gp$.

A.6 Campos invariantes

A seguir, denotaremos por $\mathfrak{X}(G)$ o conjunto de campos vetoriais em G . Para cada ponto $x \in G$, definimos a aplicação linear $d(L_y) : T_x(G) \rightarrow T_{yx}(G)$ como aquela que envia um vetor tangente em $x \in G$ para um vetor tangente $yx \in G$. Chamaremos essa aplicação de mapa diferencial ou **push-forward** da translação à esquerda, que mapeia o espaço tangente $T_x G$ para o espaço tangente $T_{yx} G$. Em particular, dL_y mapeia um vetor qualquer $u \in T_x G$ para o vetor $d(L_y)u \in T_{yx} G$, dando origem ao campo vetorial

$\tilde{u}_y = d(L_y)u$. A aplicação $d(L_y) : T_e\mathbf{G} \rightarrow T_y\mathbf{G}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Em seguida, veremos que o campo \tilde{u}_y é o que chamamos de invariante à esquerda.

Definição A.6.1 (Campos vetoriais invariantes à esquerda). *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ em um grupo de Lie \mathbf{G} é dito invariante à esquerda se for invariante por translações à esquerda, i.e., se $(L_a)_*X_h = X_{ah}$ para todo $a, h \in \mathbf{G}$. Ou se $X(f \circ L_a) = X(f) \circ L_a$, $f \in C^\infty$. Vamos denotar o conjunto dos campos invariantes à esquerda em um grupo de Lie por $\mathfrak{X}(\mathbf{G})^L$.*

Um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e , isto é, seu valor na identidade de \mathbf{G} , pois $X_a = d(L_a)X_e$. Logo, dado um vetor $u \in T_e\mathbf{G}$, podemos definir o campo invariante à esquerda \tilde{u} através de

$$d(L_g)(\tilde{u})_h = d(L_g) \circ d(L_h)u = d(L_g \circ L_h)u = d(L_{gh})u = \tilde{u}_{gh}.$$

Chamamos \tilde{u} de campo vetorial invariável à esquerda de \mathbf{G} gerado por $u \in T_e\mathbf{G}$.

Observação A.6.2. *Como observado acima, todo grupo de Lie vai admitir um campo de vetores tangente globalmente definido e sem singularidades. Em particular, isso nos permite demonstrar que \mathbb{S}^2 (e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ entre outros exemplos) não é um grupo de Lie.*

Proposição A.6.3 ([Hel78]). *Se E_1, E_2 são dois campos invariantes à esquerda em um grupo de Lie \mathbf{G} , então o seu colchete $[E_1, E_2]$ é também invariante à esquerda.*

Exemplo A.6.4. *Seja grupo de Lie aditivo \mathbb{R}^n . Os campos vetoriais invariantes à esquerda são simplesmente os campos vetoriais constantes $X = \sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. O colchete de quaisquer dois de tais campos vetoriais é nulo.*

B Álgebra de Lie

Neste apêndice, vamos associar a cada grupo de Lie uma única álgebra de Lie. Inicialmente, apresentaremos a definição abstrata de uma álgebra de Lie.

B.1 Definição

Definição B.1.1. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{F} junto com um mapa $[\cdot, \cdot] : V \times V$ de tal modo que para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e $a, b \in \mathbb{K}$ valha:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$, (anti-comutatividade)
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, (identidade de Jacobi)
3. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$. (\mathbb{K} -bilinearidade)

Exemplo B.1.2. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita. O conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis $\mathfrak{X}(M)$ em M , junto com o colchete de Lie sobre \mathbb{R} , constituem uma álgebra de Lie, cuja dimensão é infinita.

Definição B.1.3. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma **subálgebra** de \mathfrak{g} é um subespaço vetorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, se $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Note que o conjunto $\mathfrak{X}(\mathbb{G})^L$ dos campos invariantes pela esquerda é um subespaço vetorial real de dimensão finita de $\mathfrak{X}(\mathbb{G})$, com as operações de soma e produto por escalar usuais. De fato, seja $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})^L \subset \mathfrak{X}(\mathbb{G})$, então, para $g, h \in \mathbb{G}$

$$d(L_g)(aA + bB)_h = (aA + bB)_{gh} = aA_{gh} + bB_{gh} = d(L_g)(A)_h + d(L_g)(B)_h$$

Pela [Proposição A.6.3](#), temos que, se $A, B \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})^L$, então $[A, B] \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})^L$. Portanto, uma combinação linear de campos vetoriais invariantes à esquerda ainda é invariante à esquerda, e o colchete dos campos vetoriais invariantes à esquerda ainda é invariante à esquerda. Com essas duas propriedades, $\mathfrak{X}(\mathbb{G})^L$ torna-se uma subálgebra de Lie de dimensão finita dos campos vetoriais em $\mathfrak{X}(\mathbb{G})$.

Definição B.1.4. A **álgebra de Lie** de um grupo de Lie \mathbb{G} é o conjunto \mathfrak{g} de todos os campos invariante à esquerda por translação no grupo \mathbb{G} junto com a operação do colchete de Lie.

Como um campo invariante à esquerda fica unicamente determinado pelo seu valor em um dado ponto, existe uma identificação canônica entre a álgebra de Lie de G e $T_e G$, dada pela aplicação $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ tal que $\alpha(X) = X_e$ que é um isomorfismo de espaços vetoriais, assim $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$. Assim, a álgebra de Lie pode ser pensada como o espaço tangente na identidade munido do colchete de Lie em $T_e G$.

Exemplo B.1.5. A álgebra de Lie do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é também \mathbb{R}^n com colchete de Lie nulo, i.e., $[X, Y] = 0$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^d$.

Exemplo B.1.6. A álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de tamanho $n \times n$ com coeficientes reais, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, com a operação $[A, B] = AB - BA$ para todo $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Em particular, se G é um grupo de matrizes, \mathfrak{g} é uma álgebra de matrizes, i.e., uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo B.1.7. Seja $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ e considere $[x, y] = x \times y$ o produto vetorial de \mathbb{R}^3 . Então $(\mathfrak{g}, [,])$ é uma \mathbb{R} -álgebra de Lie.

Exemplo B.1.8. Algumas subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$:

$$(A) \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$$

$$(B) \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

$$(C) \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0\}, \text{ onde } X^\dagger \text{ significa a transposta conjugada da matriz } X.$$

$$(D) \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{tr}(X) = 0\}$$

Exemplo B.1.9. Existe um campo vetorial unitário tangente T em S^1 que é positivamente orientado em relação à orientação induzida pelo normal externo em cada ponto de S^1 . Como as translações esquerdas são rotações que preservam T , então T é invariante à esquerda e T gera $\mathfrak{g}(S^1)$. A álgebra de Lie é unidimensional e abeliana $\Rightarrow \mathfrak{g}(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Proposição B.1.10. Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 as álgebras de Lie de dois grupos de matrizes. Uma transformação linear $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ é chamada homomorfismo de álgebra de Lie se para todos $A, B \in \mathfrak{g}_1$,

$$f([A, B]) = [f(A), f(B)].$$

Se f também é bijetiva, então f é chamada isomorfismo de álgebras de Lie.

B.2 Correspondência grupo-álgebra

Os próximos resultados são conhecidos como teoremas da correspondência entre o grupo de Lie e a álgebra de Lie. A correspondência entre o grupo de Lie e a álgebra de Lie permite estudar grupos de Lie, em termos de álgebras de Lie, que são objetos lineares.

Teorema B.2.1 (Teorema do Homomorfismo [Hal15]). *Se $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebra de Lie e se G for simplesmente conexo, então existe um único homomorfismo de grupo de Lie $f : G \rightarrow H$ de tal modo que $\phi = df$.*

Teorema B.2.2 (Teorema do subgrupo-subálgebra de Lie [Hal15, Hel78]). *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} , e \mathfrak{h} seja uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Então, existe um único subgrupo de Lie conexo H de G com álgebra de Lie \mathfrak{h} .*

Teorema B.2.3 (Terceiro Teorema de Lie [Hal15]). *Toda álgebra de Lie real de dimensão finita é a álgebra de Lie de algum grupo de Lie simplesmente conexo.*

Alguns Grupos de Lie importantes

| G | Abeliano | $\pi_1(G)$ | Compacto | dim G | \mathfrak{g} |
|--|----------|----------------|----------|---------|--------------------------------|
| $(\mathbb{R}, +)$ | Sim | Trivial | Não | 1 | \mathbb{R} |
| $\mathbb{S}^1 \cong \text{SO}(2)$ | Sim | \mathbb{Z}_2 | Sim | 1 | \mathbb{R} |
| $\text{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ | Não | Trivial | Sim | 3 | $\mathfrak{su}(2)$ |
| Nil_3 | Não | Trivial | Não | 3 | $\cong (\mathbb{R}^3, \times)$ |
| $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ | Não | Trivial | Não | 3 | $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ |

Tabela B.1: Alguns Grupos de Lie importantes ($\pi_1(G)$ é o grupo fundamental).

C Grupos de Lie métricos

Como um grupo de Lie \mathbf{G} é uma variedade diferenciável e um grupo, é habitual usar métricas Riemannianas que vinculam a geometria de \mathbf{G} à sua estrutura de grupo. A seguir vamos mostrar como transformar um grupo de Lie em uma variedade Riemanniana.

C.1 Métricas invariantes à esquerda e métricas bi-invariantes

Uma métrica g que tem a propriedade de que as translações à esquerda $L_a : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ são isometrias $(L_a)^*g = g$ para todos os $a \in \mathbf{G}$ é chamada de invariante à esquerda.[†]

Definição C.1.1. *Uma métrica riemanniana em um grupo de Lie \mathbf{G} é chamada de **invariante à esquerda** se $\langle u, v \rangle_x = \langle d(L_a)u, d(L_a)v \rangle_x$ para todos os $a, x \in \mathbf{G}$ e $u, v \in T_x\mathbf{G}$.*

Para introduzir em \mathbf{G} uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ em \mathfrak{g} e defina

$$\langle u, v \rangle_x := \langle (dL_{x^{-1}})_x u, (dL_{x^{-1}})_x v \rangle_e. \quad (\text{C.1})$$

Também observamos que toda métrica invariante à esquerda em um grupo \mathbf{G} satisfaz (C.1), de modo que esta equação é condição necessária e suficiente para que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seja invariante à esquerda.

Um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda é chamado de **grupo de Lie métrico**.

Definição C.1.2. *Uma métrica em \mathbf{G} que é invariante à esquerda e invariante à direita é denominada **bi-invariante**.*

Proposição C.1.3 ([Lee18]). *Todo grupo de Lie compacto admite uma métrica Riemanniana bi-invariante.*

[†]Da mesma forma, g é invariante à direita se for invariante em todas as translações à direita e bi-invariante se for invariante à esquerda e à direita.

A seguir vamos lembrar de duas definições da geometria Riemanniana.

Definição C.1.4. *O tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa à cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

Definição C.1.5 (Curvatura seccional). *Se M é uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$ são vetores ortogonais e unitários, $K(X, Y)$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\{X, Y\}$, definida por*

$$K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle.$$

Pode-se mostrar (veja, por exemplo, [DC15]) que $K(X, Y)$ independe da base escolhida para o plano gerado em $T_p M$. Mais precisamente, se \tilde{X} e \tilde{Y} são outros vetores ortogonais e unitários que geram o mesmo espaço que X e Y , vale que $K(\tilde{X}, \tilde{Y}) = K(x, y)$.

A próxima proposição apresenta alguns resultados geométricos dos grupos de Lie com métrica bi-invariante.

Proposição C.1.6 ([CE75]). *Seja G seja um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante. Então para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*

1. $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
2. A conexão riemanniana é dada por $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.
3. A geodésicas de G começando na identidade são os subgrupos de um parâmetro de G .
4. $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.
5. Se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional do plano gerado é $K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2$.