

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Homogeneização da equação de difusão  
com fluxo não linear e energia limitada em  
meios microperiódicos**

por

Marcos Pinheiro de Lima

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen  
Orientador

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez-Fernández  
Co-orientador

Porto Alegre, 10 de Novembro de 2020.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Lima, Marcos Pinheiro de

Homogeneização da equação de difusão com fluxo não linear e energia limitada em meios microperiódicos / Marcos Pinheiro de Lima.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2020.

186 p.: il.

Tese (doutorado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2020.

Orientador: Ruiz Claeysen, Julio Cesar; Co-orientador: Pérez-Fernández, Leslie Darien

Tese: Matemática Aplicada

Palavras-chave: Periodicidade, heterogeneidade, homogeneização, convergência em duas escalas, solução assintótica formal, expansão assintótica, proximidade, corretor

# Homogeneização da equação de difusão com fluxo não linear e energia limitada em meios microperiódicos

por

Marcos Pinheiro de Lima

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada  
do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Co-orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez-Fernández

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Molter  
PPGMMat/UFPel

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Julián Bravo Castellero  
IIMAS/UNAM

Tese apresentada em  
10 de Novembro de 2020.

Prof. Dr. Esequia Sauter  
Coordenador

## AGRADECIMENTOS

À família que sempre está me apoiando e incentivando.

Ao meu orientador Dr. Julio, pelo ajuda e confiança.

Ao meu co-orientador Dr. Leslie, pela orientação, paciência, confiança e apoio.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada que me oportunizou esta experiência.

À CAPES e CNPq que subsidiaram esta pesquisa.

E a Deus, por despertar me força, serenidade e sabedoria para encarar os momentos de dificuldade.

# Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xvi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 <b>Formulação do problema motivador</b> . . . . .	7
1.2 <b>Objetivos do trabalho</b> . . . . .	23
1.3 <b>Contribuições da tese</b> . . . . .	24
1.4 <b>Organização do trabalho</b> . . . . .	24
<b>2 PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>26</b>
2.1 <b>Dualidade</b> . . . . .	26
2.2 <b>Espaços de Lebesgue</b> . . . . .	27
2.2.1 <b>Definição e Propriedades de Espaços <math>L^p</math></b> . . . . .	28
2.2.2 <b>Espaço das Funções Contínuas</b> . . . . .	33
2.3 <b>Espaços de Sobolev e Distribuição</b> . . . . .	34
2.3.1 <b>Distribuições vetoriais</b> . . . . .	38
<b>3 HOMOGENIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO</b> . . . . .	<b>42</b>
3.1 <b>Método de Homogenização Assintótica - MHA</b> . . . . .	42
3.1.1 <b>Formalismo matemático do MHA</b> . . . . .	44
3.1.2 <b>Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo</b> . . . . .	61
3.1.3 <b>Proximidade</b> . . . . .	65
3.2 <b>Método de Convergência em Duas Escalas - MCDE</b> . . . . .	69
3.2.1 <b>Formalismo matemático do MCDE</b> . . . . .	71

3.2.2	Resultado de Corretor . . . . .	81
<b>4</b>	<b>HOMOGENIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NÃO LINEAR . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1	Existência e Unicidade . . . . .	83
4.2	Método de Homogeneização Assintótica Não Linear . . . . .	99
4.2.1	Preservação das propriedades do fluxo . . . . .	107
4.2.2	Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo . . . . .	109
4.2.3	Proximidade . . . . .	111
4.3	Método de Convergência em Duas Escalas Não Linear . . . . .	114
4.3.1	Preservação das propriedades do fluxo . . . . .	121
4.3.2	Resultado de Corretor . . . . .	123
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS . . . . .</b>	<b>125</b>
5.1	Exemplos Lineares . . . . .	125
5.1.1	Construção da solução assintótica do problema linear unidimensional . . . . .	125
5.1.2	Tratamento numérico para o problema original linear unidimensional . . . . .	126
5.1.3	Exemplo 1 - Material funcionalmente graduado . . . . .	132
5.1.4	Exemplo 2 - Compósito bifásico . . . . .	139
5.2	Exemplos Não Lineares . . . . .	148
5.2.1	Construção da solução assintótica do problema não linear unidimensional . . . . .	149
5.2.2	Exemplo 3 - Compósito bifásico (relação constitutiva não linear sem limitador para energia) . . . . .	149
5.2.3	Exemplo 4 - Compósito bifásico (relação constitutiva não linear com limitador para energia) . . . . .	155
5.2.4	Tratamento numérico para o problema original não linear unidimensional . . . . .	161
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>172</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>175</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Exemplo de materiais heterogêneos naturais. . . . .	2
Figura 1.2	Exemplo de materiais heterogêneos manufaturados. . . . .	2
Figura 1.3	Homogenização. . . . .	4
Figura 1.4	Difusão do corante roxo na água. . . . .	8
Figura 1.5	Ilustração da primeira lei de Fick. . . . .	9
Figura 1.6	Elemento representativo de volume infinitesimal. A entrada e saída do fluxo difusivo na direção $x_2$ estão indicadas pela flecha. A ilustração para as outras direções é análoga. . . . .	10
Figura 1.7	Material laminado. . . . .	15
Figura 1.8	Material fibroso com fibras cilíndricas unidirecionais. . . . .	15
Figura 1.9	Seção de um material fibroso com fibras unidirecionais. . . . .	16
Figura 1.10	Esboço de um meio poroso/particulado. . . . .	16
Figura 1.11	Funções de energia tradicional, crítica e com limitador. . . . .	21
Figura 3.1	Compósito bifásico unidimensional de comprimento unitário e $\mathcal{Y}$ -periódico para $\varepsilon \leq 1$ . . . . .	46
Figura 5.1	Solução exata e numérica obtida pelo FEM para $\Delta x = 1/32$ e diferentes valores de $\varepsilon$ . . . . .	127
Figura 5.2	Esquema da malha bidimensional. . . . .	129
Figura 5.3	Alguns resultados numéricos. . . . .	135
Figura 5.4	Resultados da homogeneização - Exemplo 1. . . . .	137
Figura 5.5	Perfis da solução exata, assintótica e assintótica corrigida em $x = 0.1$ e $\varepsilon = 1/2$ . . . . .	138
Figura 5.6	Proximidades. . . . .	139
Figura 5.7	Esboço do comportamento rapidamente oscilante do coeficiente constante por partes unidimensional, para diferentes valores de $\varepsilon$ . . . . .	140
Figura 5.8	Solução do problema local - Compósito bifásico. . . . .	146
Figura 5.9	Convergência da solução exata para homogeneizada quando $\varepsilon$ tende a zero. . . . .	147

Figura 5.10	Perfis das soluções exata, assintótica e assintótica corrigida para $\varepsilon = 1/2$ e $x = 0.2$ fixados, assim como o esboço dos curtos efeitos do termo corretivo $u_c^{(1)}$ . . . . .	148
Figura 5.11	Ponto de ruptura. . . . .	157
Figura 5.12	Erros entre a solução exata e homogeneizada, exata e assintótica, com e sem limitador para energia, para $\varepsilon = 1/2, 1/4$ e $1/16$ . . . . .	168
Figura 5.13	Tempos de simulação das soluções homogeneizada, exata, assintótica corrigida e tradicional do Exemplo 3. . . . .	169
Figura 5.14	Tempos de simulação das soluções exata, homogeneizada, assintótica tradicional e corrigida do Exemplo 4. . . . .	170
Figura 5.15	Perfis das soluções exata e assintótica corrigida sem limitador para energia, em $x = 0.1$ , para $\varepsilon = 1/2$ . Erros absolutos dos perfis em $x = 0.1$ entre as soluções exata, assintótica e assintótica corrigida. . . . .	171

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon$	parâmetro geométrico pequeno
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_+^*$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais $\{1, 2, \dots\}$
$\Omega$	um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$ , $N \in \mathbb{N}$
$\partial\Omega$	contorno de $\Omega$
$\bar{\Omega}$	fecho de $\Omega$ , isto é, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$\mathbf{x}$	ponto de $\Omega$ , variável global (macroscópica)
$\mathbf{y}$	variável local (microscópica), $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$
$\mathcal{Y} = \varepsilon Y, Y$	região ocupada pela célula de periodicidade em $x$ e $y$ , respectivamente
$ \Omega $	medida de $\Omega$
$u^{(\infty)}$	solução assintótica formal
$u^\varepsilon$	solução exata do problema
e.a.	expansão assintótica
s.a.f.	solução assintótica formal
MHA	método de homogeneização assintótica
MCDE	método de convergência em duas escalas
$\langle \cdot \rangle$	média integral sobre $Y$ , isto é, $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{ Y } \int_Y (\cdot) dy$

$X$	espaço de Banach
$X'$	espaço dual de $X$
$C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$	espaço das funções contínuas definidas em $\Omega$
$C^k(\Omega)$	espaço das funções $k$ vezes continuamente diferenciáveis definidas em $\Omega$ , $k \in \mathbb{N}$
$C^k_{\#}(\Omega)$	espaço das funções $C^k(\mathbb{R}^N)$ , $N \in \mathbb{N}$ , $\Omega$ -periódicas
$C^\infty(\Omega)$	espaço das funções infinitamente continuamente diferenciáveis definidas em $\Omega$ , ou ainda, $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$
$C^\infty_{\#}(\Omega)$	espaço das funções $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , $\Omega$ -periódicas
$C_c^\infty(\Omega)$	espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ , com suporte compacto em $\Omega$
$C_0^\infty(\Omega)$	fecho de $C_c^\infty(\Omega)$
$C^k(\Omega; X)$	espaço das funções $C^k(\Omega)$ , tais que $u : \Omega \rightarrow X$
$L^p(\Omega)$	espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com $u^p$ integrável e norma $\ u\ _{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ , $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com norma $\ u\ _{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C,  u  \leq C, \text{ em quase todo } \Omega\}$
$L^p_{\#}(\Omega)$	o subespaço de $L^p(\Omega)$ , $1 \leq p \leq \infty$ , das funções $\Omega$ -periódicas
$L^p(0, T; X)$	espaço das funções mensuráveis $u : ]0, T[ \rightarrow X$ , tais que $\ u\ _{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \ u(t)\ _X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ , $1 \leq p \leq \infty$
$L^\infty(0, T; X)$	espaço das funções mensuráveis $u : ]0, T[ \rightarrow X$ , tais que $\ u\ _{L^\infty(0, T; X)} = \text{ess sup}_{x \in ]0, T[} \ u\ _X$
$L^p(]0, T[ \times \Omega)$	equivalente à $L^p(0, T; L^p(\Omega))$

$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev $\{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega),  \alpha  \leq m, 1 \leq p \leq \infty\}$ , onde as derivadas são entendidas no sentido de distribuição. Aqui $\alpha \in \mathbb{N}^N$ denota o multi-índice usual, onde $ \alpha  = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ e $D^\alpha$ o operador diferencial correspondente
$W^{-m,q}(\Omega)$	espaço dual de $W^{m,p}(\Omega)$
$W_{\#}^{m,p}(Y)/\mathbb{R}$	espaço das funções de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ , $Y$ -periódicas, que diferem por uma constante real
$W_0^{m,p}(\Omega)$	fecho em $\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}$ de $C_c^\infty(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $W^{m,2}(\Omega)$ com norma $\ u\ _{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{0 \leq  \alpha  \leq m} \ D^\alpha u\ _{L^2(\Omega)}^2$
$H_0^m(\Omega)$	espaço das funções $W_0^{m,2}(\Omega)$
$H_{\#}^m(\Omega)$	fecho de $C_{\#}^\infty(\Omega)$ com a norma de $H^m(\Omega)$
$H_{\#}^m(Y)/\mathbb{R}$	espaço de funções $u \in W_{\#}^{m,2}(Y)/\mathbb{R}$
$H^{-m}(\Omega)$	espaço dual de $H_0^m(\Omega)$
$D(\Omega)$	espaço das funções $C_c^\infty(\Omega)$
$D'(\Omega)$	espaço de distribuições em $\Omega$
$D(\Omega; X)$	espaço das funções $C_c^\infty(\Omega)$ tais que $u : \Omega \rightarrow X$
$\mathcal{W}_p$	espaço das funções $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ , tal que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ com norma $\ u\ _{\mathcal{W}_p} = \ u\ _{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \left\  \frac{\partial u}{\partial t} \right\ _{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}$
$\langle u, v \rangle$	pareamento da dualidade entre $u \in X'$ e $v \in X$
$(u, v)$	produto interno de $u$ e $v$ em um espaço de Hilbert $H$
$[X]^m$	$X \times X \times \dots \times X$

$\rightarrow$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\xrightarrow{*}$	convergência fraca*
$\xrightarrow{2e}$	convergência em 2 escalas
$\hookrightarrow$	Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. A notação $E \hookrightarrow F$ significa que $E \subset F$ e existe uma constante $K > 0$ tal que $\ u\ _F \leq K\ u\ _E, \forall u \in E$
$\Gamma$	conjunto de pontos/curvas/superfícies de descontinuidade de $\Omega$
$\Gamma_0$	conjunto de pontos/curvas/superfícies de descontinuidade de $Y$
$[[\cdot]]_\Gamma$	condição de salto nos(as) pontos/curvas/superfícies do conjunto $\Gamma$
$[[\cdot]]_{\Gamma, \Gamma_0}$	condição de salto nos(as) pontos/curvas/superfícies dos conjuntos $\Gamma$ e $\Gamma_0$
FEM	método de elementos finitos
MsFEM	método de elementos finitos multiescala
GDM	método de Galerkin descontínuo
$u_0 \equiv u_0(t, x)$	primeiro coeficiente da s.a.f. fornecido pelo problema homogeneizado
$N_1(y)$	solução local linear
$u_1 \equiv u_1(t, x, y)$	segundo coeficiente da s.a.f., tal que $u_1 = N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ (linear) e $u_1 = \mathcal{N}_1\left(y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$ (não linear)
$\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$	$u_1(t, x, y)$ para $t$ e $x$ fixados, em que $\bar{\epsilon}_0 = u_0$ e $\bar{\epsilon}_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ são parâmetros

$u^{(1)} \equiv u^{(1)}(t, x, \varepsilon)$	solução assintótica de primeira ordem (tradicional): $u^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon u_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$
$u_1^* \equiv u_1^*(t, \tau, x, y)$	termo de correção da solução assintótica de primeira ordem, $u_1^* \equiv N_1^*(\tau, y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ (linear) e $u_1^* \equiv \mathcal{N}_1^*\left(\tau, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$ (não linear)
$\mathcal{N}_1^*(\tau, y, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1)$	$u_1^*$ para $t$ e $x$ fixados
$u_c^{(1)} \equiv u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon)$	$u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon \left( u_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + u_1^*\left(t, \frac{t}{\varepsilon^2}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right)$
$\mathcal{L}_{\alpha\beta}$	operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( a(y) \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$ , $\alpha, \beta \in \{x, y\}$
$\mathcal{T}$	operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t}$
$\mathcal{L}^\varepsilon$	operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x} \left( a^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$
$\chi_r$	função indicadora com suporte em $\Omega_r \subset \Omega$
$ \mathbf{x} $	módulo do vetor $\mathbf{x}$
$\sum_i x_i$	soma dos elementos $x_i$ de um conjunto finito
$\sum_K \int_K$	soma finita das integrais definidas nos subconjuntos $K$ que estão contidos em algum outro conjunto
$\mathbf{A}$	matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$
$\Phi$	função de energia crítica

## RESUMO

O presente trabalho apresenta a aplicação de duas técnicas de homogeneização, comumente utilizadas em problemas sob meio periódico, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) e o Método de Convergência em Duas Escalas (MCDE). Técnicas de homogeneização têm como intuito estudar ou resolver problemas que ocorrem em meios heterogêneos, determinísticos ou aleatórios, periódicos ou não. Os fenômenos que ocorrem nestes meios geralmente são descritos por equações diferenciais com coeficientes que variam rapidamente com relação à posição. Em particular, são estudados fenômenos de transporte modelados pela equação da difusão com fluxo linear e não linear, com coeficientes periódicos e que variam na microescala de forma determinística. A escolha das duas técnicas se dá pelas abordagens diferentes e resultados similares, senão idênticos. Na teoria do MHA, o problema linear é bem consolidado pois, além do desenvolvimento, se estima a proximidade entre as soluções exata e homogeneizada, na norma do espaço que elas pertencem, o que justifica matematicamente o método. Para problemas não lineares esta justificativa não está evidente, o que nos motivou a obter a proximidade para um problema difusivo com fluxo não linear. Além disso, é garantida a preservação das propriedades originais do fluxo quando homogeneizado, o que permitiu garantir a existência e unicidade da solução do problema homogeneizado, conseqüentemente, a existência e unicidade do problema local não linear. Por outro lado, para o MCDE, a teoria é mais consolidada em ambos os casos linear e não linear, isto significa que, além de obter o comportamento efetivo, o processo é justificado matematicamente através do resultado de corretor. Ainda, neste trabalho, se apresenta e aplica uma abordagem, originada da mecânica da fratura, que permite obter resultados realistas quando assumido grandes deformações. Esta abordagem consiste em formular uma expressão da energia de deformação que impõe o amolecimento da relação tensão/deformação. O uso desta abordagem, juntamente aos métodos de homogeneização apresentados neste trabalho, se mostrou possível. Sob as hipóteses de separação de escalas e do contínuo, podem-se especificar dois usos da homogeneização: a obtenção de uma boa aproximação da solução do problema original e obtenção do comportamento efetivo do meio heterogêneo. Para a pri-

meira, em geral, pelas técnicas aqui apresentadas, se contrói a solução assintótica de primeira ordem  $u^{(1)}$ , porém, essa aproximação apresenta um erro de ordem  $\varepsilon$  nas condições de contorno e inicial. Para corrigi-lá, é proposta uma abordagem pós métodos de homogeneização, para construir um termo corretivo desses pontos na  $u^{(1)}$ . Por fim, foram resolvidos quatro exemplos numéricos mediante técnicas numéricas (Método dos Elementos Finitos Clássico, Galerkin Descontínuo e Multiescala; Método da Quadratura Adaptativa; Diferenças Finitas; Método do Ponto Fixo), para ilustrar os resultados apresentados.

## ABSTRACT

The present work presents the application of two homogenization techniques, normally used in problems with periodic medium, the Asymptotic Homogenization Method (MHA) and the Two-Scale Convergence Method (MCDE). Homogenization techniques has as intention to study or solve problems that occur in a heterogeneous environment, deterministic or random, periodic or not. Phenomena which occur in this environment, generally are described by differential equations with quickly oscillate coefficients related to position. In particular, are studied transport phenomena modeled by the diffusion equation with linear and non-linear flow, with periodic coefficients that vary in the microscale in a deterministic way. The choice of the two techniques is due to different approaches and similar, if not identical, results. In MHA theory, the linear problem is well consolidated because, in addition to development, the proximity between the exact and homogenized solutions is estimated, in the norm of the space they belong to, which mathematically justify the method. For non-linear problems, this justification is not evident, which motivated us to obtain proximity to a diffusive problem with a non-linear flow. In addition, is guaranteed the preservation of the original properties of the flow when homogenized, which allow to guarantee the solution existence and unity for the homogenized problem, consequently, the non-linear local problem existence and unity as well. On the other hand, the MCDE theory is more consolidated in linear and non-linear cases, this means that, in addition to obtaining the effective behavior, the process is mathematically justified through the corrector result. Still, in this work, an approach, originated from the mechanic fracture, presented and applied, which allows to obtain realistic results when assumed great strains. This approach consists on formulating an strain energy expression that imposes softness to the stress/strain relationship. This approach with the homogenization methods presented in this work, proved to be possible. Under the assumptions of separation and continuous scale , two uses of homogenization can be specify: to obtain a good approximation of the solution to the original problem and to obtain the effective behavior of the heterogeneous environment. For the first, in general, using the techniques presented here, the asymptotic first order solution  $u^{(1)}$  is built, however, this

approximation presents an error of order  $\varepsilon$  in the boundary and initial conditions. To correct it, an approach is proposed after the homogenization methods, to construct a corrective term of these points in  $u^{(1)}$ . Finally, four numerical examples were solved upon numerical techniques (Classical Finite Element Method, Discontinuous Galerkin and Multiscale; Adaptive Quadrature Method; Finite Differences; Fixed Point Method), to illustrate the results presented.

# 1 INTRODUÇÃO

*Heterogeneidade e homogeneidade* são conceitos comumente usados na ciência que estão relacionados à uniformidade de uma substância ou organismo. O termo *homogêneo* segue de uniformidade em composição ou característica como cor, forma, tamanho, peso, altura, distribuição, textura, linguagem, renda, doença, temperatura, radioatividade, etc. Já algo *heterogêneo* é não uniforme em uma dessas descrições. Várias áreas compreendem a heterogeneidade de maneira diferente. Por exemplo, em química, uma mistura pode ser classificada como homogênea ou heterogênea, e a diferença entre elas é que a mistura homogênea é uma solução que apresenta uma única fase enquanto a heterogênea pode apresentar duas ou mais fases. Fase é cada porção que apresenta aspecto visual microscopicamente uniforme. Na geologia, por exemplo, as rochas são inerentemente heterogêneas, geralmente na micro-, mini- ou macro-escala. Na física, *heterogêneo* significa ter propriedades físicas que variam dentro do meio. Na sociologia, *heterogêneo* pode se referir a uma sociedade ou grupo que inclui indivíduos de diferentes etnias, origens culturais, sexos ou idades. Em um sentido geral, o termo *meio heterogêneo* é caracterizado por uma distribuição de domínios ocupados:

- (a) por diferentes materiais homogêneos chamados de fases: Compósito;
- (b) do mesmo material em diferentes estados: policristal [98];
- (c) por um material que apresenta características não uniformes, ou ainda, funcionalmente graduadas [89].

Meios heterogêneos abundam na natureza e em produtos manufaturados. Por exemplo: dentre os meios naturais que apresentam heterogeneidade estão o osso - Figura 1.1(a)<sup>1</sup>, a atmosfera - Figura 1.1(b)<sup>2</sup>, o solo - Figura 1.1(c)<sup>3</sup>, o arenito, a madeira, os pulmões, os tecidos vegetais e animais, os agregados celulares, tumores; e dentre os feitos pelo homem

---

<sup>1</sup>Fonte:<https://eugraph.com/histology/crtbone/compon.html>

<sup>2</sup>Fonte:<https://www.capasdelatierra.org/termosfera/>

<sup>3</sup>Fonte:<https://www.ambientalengenharia.com.br/investigacao-detalhada/investigacao-detalhada-para-empresa/onde-fazer-investigacao-detalhada-cetesb-ponte-rasa>

destacam-se os diferentes tipos de compósito (laminados - Figura 1.2(a)<sup>4</sup>, granulares ou particulados - Figura 1.2(b)<sup>5</sup>, fibrosos, e combinações destes), sólidos celulares, géis, espumas, ligas metálicas, microemulsões, cerâmica - Figura 1.2(c)<sup>6</sup> e copolímeros em bloco [98].

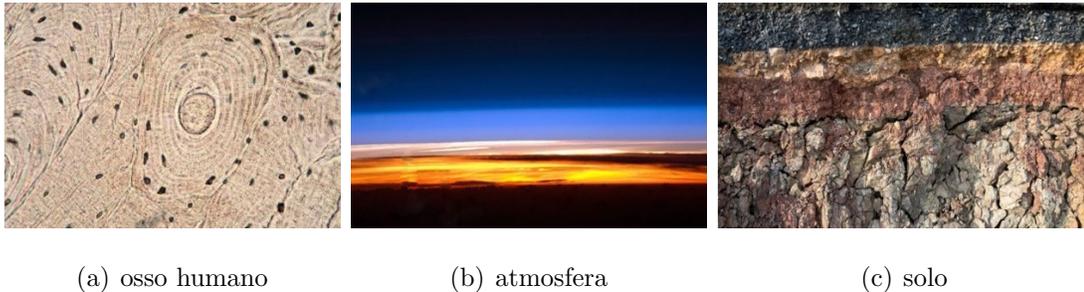


Figura 1.1: Exemplo de materiais heterogêneos naturais.

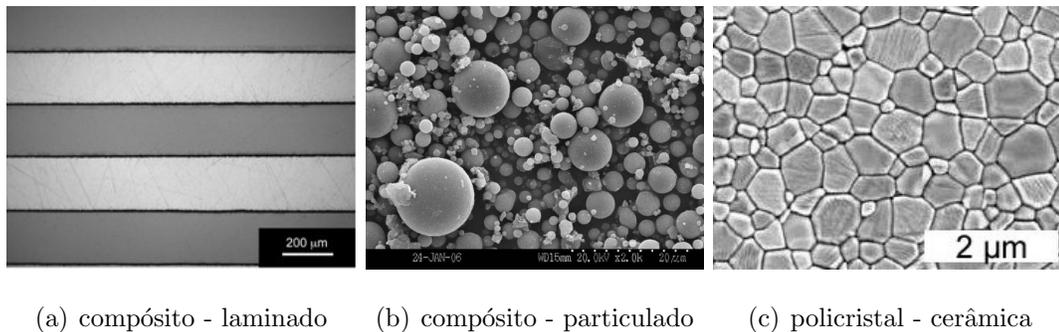


Figura 1.2: Exemplo de materiais heterogêneos manufaturados.

Os fenômenos de interesse associados a tais características ocorrem na “micro-escala”, chamada genericamente assim, pois pode ser da ordem de décimos de nanômetros (géis) até da ordem de metros (processos geológicos). Em muitos casos, a microestrutura, ou seja, a estrutura na microescala só pode ser caracterizada estatisticamente e, portanto, é referida como material heterogêneo aleatório [98]. Assim, assume-se que o comprimento característico  $l$  desta escala “microscópica” (aquela em que os domínios estão distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade) é muito maior que aquele da escala molecular,

<sup>4</sup>Fonte:<https://www.epfl.ch/labs/lmm/research/concluded-projects/laminated-composites/>

<sup>5</sup>Fonte:<https://nhsjs.com/2012/development-of-a-novel-hybrid-polymer-composite-with-coir-dust-and-fly-ash-reinforcements-and-investigation-of-its-dielectric-nature/>

<sup>6</sup>Fonte:[https://www.ikts.fraunhofer.de/en/departments/structural\\_ceramics/oxide\\_ceramics/materials\\_synthesis\\_development/medical\\_applications.html](https://www.ikts.fraunhofer.de/en/departments/structural_ceramics/oxide_ceramics/materials_synthesis_development/medical_applications.html)

mas muito menor que o comprimento  $L$  característico da escala macroscópica,  $l \ll L$ . Em tais situações, se diz que o material heterogêneo apresenta separação das escalas estruturais (caracterizada pelo parâmetro geométrico  $\varepsilon = l/L$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), que suas propriedades apresentam variação rápida com relação à posição e que cumpre a hipótese do contínuo, ou seja, ele pode ser visto como um contínuo na escala microscópica e, portanto, o meio pode ser idealizado como sendo efetivamente ou equivalentemente homogêneo e o problema submetido a ação de influências externas pode ser resolvido usando propriedades médias associadas, também chamadas de *efetivas* ou *macroscópicas*. Mais precisamente, a hipótese de homogeneidade equivalente estabelece que, na macroescala, o material heterogêneo é fisicamente equivalente a certo material homogêneo, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo [76]. Por propriedades efetivas ou macroscópicas, se quer dizer uma medida média da propriedade do material, levando em conta as propriedades de todas as fases do meio heterogêneo e sua interação [34]. O processo do qual se obtém tais propriedades efetivas e o comportamento efetivo do meio heterogêneo, chama-se “homogeneização”. A ideia principal de *homogenizar* é postular que um material heterogêneo na escala microscópica pode ser considerado na escala macroscópica como um material homogêneo (ver Figura 1.3). Para entender este processo, do ponto de vista matemático, é preciso entender o que é convergência de operadores. Para isso, considere uma sequência de equações da forma

$$\mathcal{A}^\varepsilon u^\varepsilon = f \tag{1.1}$$

indexada pelo parâmetro  $\varepsilon > 0$ , com solução  $u^\varepsilon$  pertencente a algum espaço de função  $X$ . Para uma sequência de operadores  $\mathcal{A}^\varepsilon$ , se obtém uma sequência correspondente de soluções  $\{u^\varepsilon\}$  para estas equações. Olhando de um ângulo diferente, isto significa que se tem uma sequência de operadores  $\{\mathcal{A}^\varepsilon\}$  que determina uma sequência de funções  $\{u^\varepsilon\}$  tal que a mesma imagem  $f$  é obtida. Se a sequência  $\{u^\varepsilon\}$  tende para um limite  $u^0 \in X$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja, se

$$u^\varepsilon \rightarrow u^0$$

em algum sentido razoável, pode-se questionar se existe um operador  $\mathcal{A}^0$  que produza a mesma imagem  $f$  desta função limite  $u^0$ , ou seja, se para algum  $\mathcal{A}^0$

$$\mathcal{A}^0 u^0 = f. \quad (1.2)$$

Se este é o caso com o mesmo  $\mathcal{A}^0$  para qualquer  $f$  definida,  $\mathcal{A}^0$  poderia ser visto como o limite de  $\{\mathcal{A}^\varepsilon\}$  em relação a capacidade de transformar funções em  $X$ , isto é, no sentido de operadores. Ao procurar por uma equação limite, que tem por solução a função limite  $u^0$ , se tem que lidar com dois problemas. A primeira é encontrar condições sob as quais existe um limite  $\mathcal{A}^0$ , com propriedades tais que (1.2) tenha uma única solução. A segunda dificuldade é a da determinação de  $\mathcal{A}^0$ , e tem sido estudada principalmente para problemas periódicos. Além disso, no fim do processo, deve-se provar que a solução do problema (1.1) tende para a solução do problema (1.2), quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , na norma do espaço que elas são procuradas. É este o sentido da palavra “equivalente” do meio homogêneo obtido. Esse último processo constitui a justificativa matemática do processo de homogeneização.

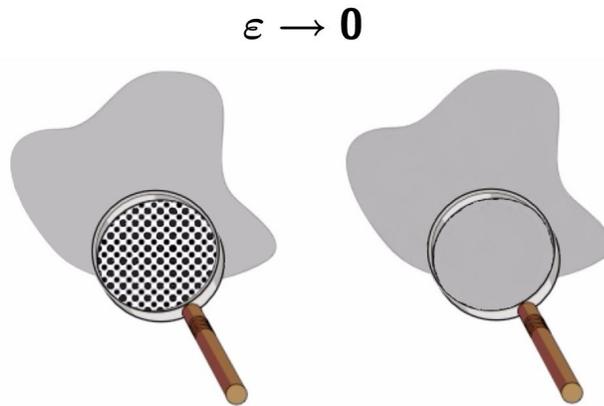


Figura 1.3: Homogeneização.

Nas décadas de 60 e 70 apareceram as primeiras teorias matemáticas de homogeneização. A ideia inicial destas teorias era encontrar uma solução assintótica das equações em derivadas parciais dependentes do parâmetro pequeno  $\varepsilon$  e com coeficientes rapidamente oscilantes que modelam o comportamento constitutivo do meio heterogêneo. Assim, a hipótese de homogeneidade equivalente seria válida se  $u^\varepsilon$ , a solução das equações para o material heterogêneo (problema original), sujeitas a certas condições de contorno e/ou iniciais, fosse de

$u_0$ , a solução das equações com coeficientes constantes (problema homogeneizado) que descrevem o comportamento do material homogêneo equivalente, sujeito às mesmas condições do anterior,  $\varepsilon$ -próxima para alguma norma [76], ou seja,

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_X = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.3)$$

Sob as hipóteses de separação de escalas e do contínuo, podem-se especificar dois usos da homogeneização: a obtenção de uma boa aproximação da solução do problema original e a obtenção do comportamento efetivo do meio heterogêneo. O primeiro, é o estudo da resposta do meio quando submetido à ação de influências externas que podem ser de natureza mecânica (carregamentos, trações), térmicas (fonte de calor), eletromagnéticas (campos elétricos ou magnéticos aplicados); enquanto o segundo é a obtenção das propriedades intrínsecas do meio heterogêneo, ou seja, suas características próprias independentes das influências externas e que serão as responsáveis em estabelecer a resposta do meio a estas determinadas influências. Alguns dos trabalhos pioneiros na história da homogeneização são os de Sanchez-Palencia [91, 92], De Giorgi e Spagnolo [37], Marchenko e Khruslov [63], Bakhvalov [13, 14, 15], Oleinik [73], Berdichevsky [21], Babuska [10, 11, 12], Bensoussan, Lions e Papanicolau [19], Christensen [34] e, Bakhvalov e Panasenko [16]. Desde então, devido à riqueza e diversidade de problemas fundamentais, assim como às múltiplas aplicações tecnológicas, o número de publicações nesta área tem crescido enormemente, por exemplo, Oleinik, Shamaev e Yosifian [74], Jikov, Kozlov e Oleinik [56], Murat e Tartar [68], Cioranescu e Donato [35], Cherkaev [33], Milton [66], Torquato [98], Sahimi [90], Panasenko [75], Pavliots e Stuart [78]. Dentre as diversas aplicações da homogeneização, podem-se citar, por exemplo: obtenção de propriedades acopladas inexistentes nos constituintes (magnetoelétrica [20]; piroelétrica e piromagnética [27]); otimização topológica [18]; projeto ótimo de materiais heterogêneos [99]; biomecânica do osso [77]; predição de falhas estruturais [79]; propagação de ondas sísmicas [31, 32]; física de reatores nucleares [4]; transporte de uma espécie química [70].

Neste trabalho são considerados dois métodos de homogeneização, o método de homogeneização assintótica (MHA) e o método de convergência em duas escalas (MCDE). Ambos os métodos permitem obter uma aproximação da solução exata do problema original e o comportamento efetivo do meio heterogêneo. O primeiro método baseia-se na proposta de

solução para o problema original na forma de uma série assintótica em duas escalas. A série é composta por termos em potências do parâmetro geométrico  $\varepsilon$  cujos coeficientes são funções incógnitas que dependem da microescala. Assim, do problema original é desacoplado em uma sequência recorrente de problemas, dos quais são obtidas cada uma das funções incógnitas que formam a série assintótica. Na sua formulação clássica, o MHA fornece soluções que são válidas somente em regiões afastadas do contorno e valor inicial. Ainda, na prática, é usual considerar somente os dois primeiros termos da série assintótica (comportamento macroscópico mais uma correção que descreve o comportamento microscópico), obtendo-se os problemas correspondentes (o problema macroscópico ou homogeneizado para o primeiro termo, e o microscópico ou local para o segundo termo) constituindo assim a aproximação de primeira ordem da solução exata do problema original. Além disso, o MHA permite obter propriedades efetivas através do problema local, ou seja, características próprias independentes das influências externas. Por exemplo: Bravo-Castillero et al. [25], Guinovart-Díaz et al. [47], Rodríguez-Ramos et al. [84] e Sabina et al. [88] obtiveram fórmulas fechadas para os coeficientes efetivos de compósitos reforçados por fibras cilíndricas com periodicidade quadrada e hexagonal, e fases transversalmente isotrópicas no contexto da elasticidade e a piezoeletricidade; Sabina et al. [87] e Bravo-Castillero et al. [26] obtiveram fórmulas fechadas para as propriedades efetivas de compósitos elásticos com fases isotrópicas, reforçadas por fibras circulares distribuídas em esquemas quadrados e hexagonais, incluindo os casos limite de fibras vazias ou infinitamente rígidas e se prova que estão contidas no intervalo definido pelas cotas lineares de Bruno [30]. Uma vez que a homogeneidade equivalente seja válida, ou seja, demonstrada a estimativa (1.3), o MHA é rigoroso do ponto de vista matemático, pois caso contrário, o método se torna heurístico, isto é, ele nos fornece o comportamento efetivo mas não justifica o processo de homogeneização. Geralmente, essa justificativa, pelo menos para a equação linear, é possível ser feita a partir de princípios do máximo, por outro lado, para equações não lineares, o uso destes princípios ainda não tem sido estudado. No entanto, para o problema não linear proposto neste trabalho, a justificativa é realizada graças às hipóteses feitas para o termo de fluxo e estimativas deduzidas no processo de existência.

Como alternativa ao MHA, considera-se o MCDE. Em suma, o MCDE estuda a convergência da formulação variacional de (1.1) assumindo uma função teste suave, periódica e que depende da microescala. Após algumas integrações por partes, passamos ao limite em duas escalas e, mediante um teorema de compacidade, se obtém uma formulação variacional para o limite em duas escalas. A equação diferencial correspondente é chamada de equação em duas escalas do problema homogenizado. Ela é usualmente do mesmo tipo que a do problema original (1.1), mas envolve duas variáveis espaciais  $x$  e  $y$ , de onde desacoplam-se os problemas homogenizado (1.2) e local. Além desse processo, prova-se a convergência forte da sequência de soluções  $u^\varepsilon$  para o limite  $u_0$  na norma do espaço que elas pertencem, o chamado *resultado de corretor*. Ao contrário do MHA, o MCDE é autocontido, ou seja, no processo se encontram as equações homogeneizada, local e se prova a convergência da solução exata para a homogeneizada na norma do espaço em que elas pertencem. O MCDE tem sido usado em diversas campos da ciência, por exemplo, no estudo: do fluxo de fluídos através de meios porosos não homogêneos [36, 51]; do transporte com campos de velocidade incompressíveis [52, 113]; da corrosão por sulfato em tubos de esgoto feitos de concreto [41]; a transferência iônica e efeitos eletrocapilares na escala macroscópica para meios porosos saturados [44]; da convecção e a difusão de um soluto em meio poroso na presença de uma reação química linear de absorção/segregação nas superfícies dos poros [6]; de vibrações em placas finas não lineares excitadas por atuadores feitos de cerâmica piezoelétrica [48]; da lubrificação de superfícies segundo modelo de Elrod-Adams [17]; e da condução elétrica em tecido biológico [7], dentre outros [24, 42, 43, 54, 64, 65, 82, 94, 110, 116]. É notável sua popularidade atualmente, porém, percebeu-se que ainda não há indícios do uso dele combinado à abordagem de Volokh [102] usando o limitador para a energia. Os detalhes sobre essa abordagem serão descritos abaixo. Em vista disso, propõe-se fazer uso desta combinação aqui.

## 1.1 Formulação do problema motivador

*Difusão* é o processo pela qual a matéria é transportada de uma parte do sistema, onde há maior concentração, à outra, com menor concentração, um resultado do movimento

aleatório e as colisões das moléculas. Um exemplo, é a difusão do corante roxo na água como ilustra a Figura 1.4.



Figura 1.4: Difusão do corante roxo na água.

Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion#/media/File:Blausen\\_0315\\_Diffusion.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion#/media/File:Blausen_0315_Diffusion.png)

O conceito de difusão é amplamente utilizado em muitos campos, incluindo física (difusão de partículas), química (difusão de gases), biologia (difusão de insetos), sociologia (difusão de pessoas), economia e finanças (difusão de preços). A ideia central de difusão, no entanto, é comum a todos eles: um objeto (por exemplo: partícula, inseto, etc.) que sofre difusão se espalha a partir de um ponto ou local em que há maior concentração desse objeto para outro local de menor concentração. As equações que governam os processos de difusão são as leis de Fick.

### Primeira lei de Fick

A primeira lei de Fick em três dimensões pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = -D\nabla C, \quad (1.4)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  é o fluxo de difusão e  $C$  a concentração. O sinal negativo na equação (1.4) indica direções opostas do fluxo de difusão e gradiente da concentração, isto é, da concentração mais alta para a concentração mais baixa, ver Figura 1.1.

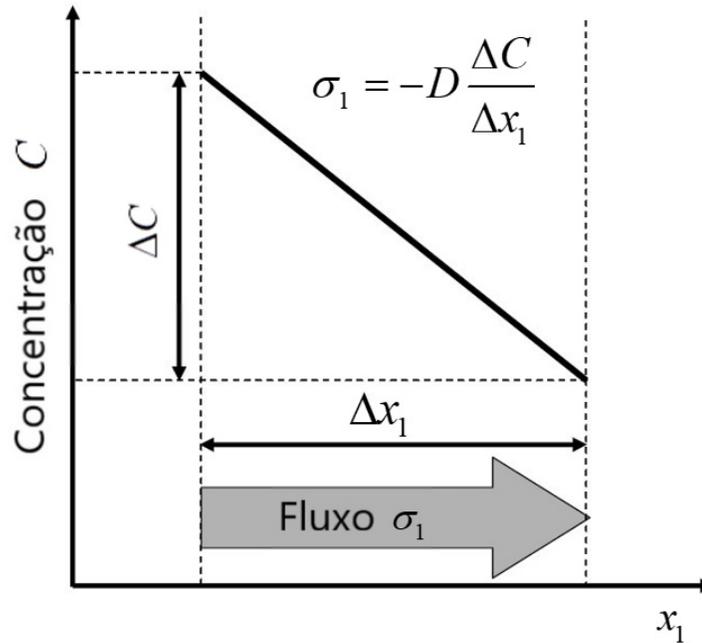


Figura 1.5: Ilustração da primeira lei de Fick.

Difusão é um processo o qual busca uma equalização de concentração. O fator de proporcionalidade,  $D$ , é denotado como um *coeficiente difusivo* ou como a *difusividade* dos objetos considerados. O fluxo de difusão é expressado em número de partículas que atravessam uma área unitária por unidade de tempo e a concentração em números de partículas por unidade de volume. Assim a difusividade  $D$  tem a dimensão de *comprimento<sup>2</sup> tempo<sup>-1</sup>* e assume as unidades  $[\text{cm}^2\text{s}^{-1}]$  ou  $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$ .

### Equações análogas

A primeira lei de Fick é formalmente equivalente a lei de Fourier do fluxo de calor

$$\sigma_c = -\kappa \nabla T,$$

onde  $\sigma_e$  é o fluxo de calor,  $T$  o campo de temperatura, e  $\kappa$  a condutividade térmica. É também análoga a lei de Ohm

$$\sigma_e = -\gamma \nabla V,$$

onde  $\sigma_e$  é a densidade de corrente elétrica,  $V$  o potencial eletrostático, e  $\gamma$  a condutividade elétrica. A lei de Fick descreve o transporte de partículas, lei de Fourier o transporte de calor, e lei de Ohm o transporte de carga elétrica.

### Equação de continuidade

Naturalmente, em processos difusivos a quantidade de partículas é conservada. Para um objeto que obedece uma lei de conservação, uma equação de continuidade pode ser formulada. Para isso, tome um ponto arbitrário  $P$  localizado em  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e um volume representativo com dimensões  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$  (ver Figura 1.1).

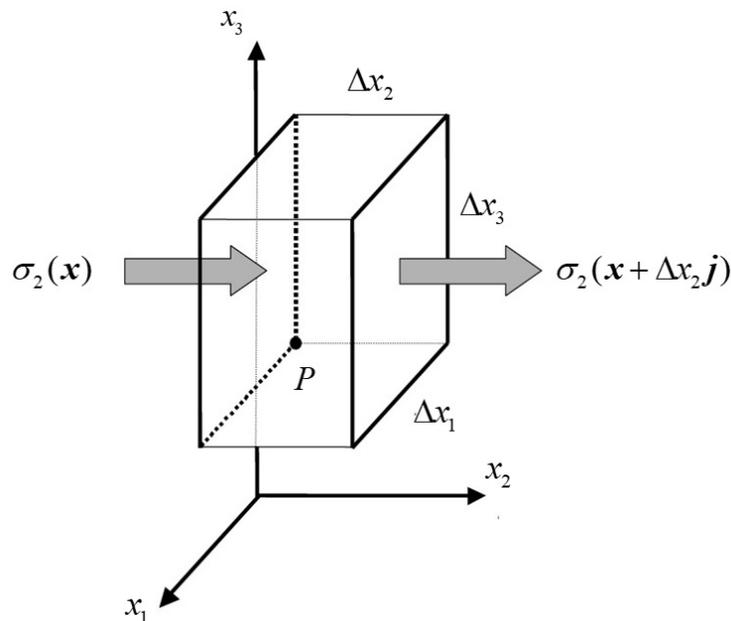


Figura 1.6: Elemento representativo de volume infinitesimal. A entrada e saída do fluxo difusivo na direção  $x_2$  estão indicadas pela flecha. A ilustração para as outras direções é análoga.

O fluxo de difusão  $\boldsymbol{\sigma}$  e suas componentes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  variam no volume representativo. Se a soma dos fluxos saindo e entrando do volume representativo não se equilibra, uma acumulação (ou perda) deve ocorrer. Esse saldo pode ser expressado como

fluxo que entra - fluxo que sai = taxa de acumulação (ou perda).

Os componentes do fluxo podem ser substituídas nesta equação resultando

$$-\left[\sigma_1(\mathbf{P}) - \sigma_1(\mathbf{P} + \Delta x_1 \mathbf{i})\right] \Delta x_2 \Delta x_3 - \left[\sigma_2(\mathbf{P}) - \sigma_2(\mathbf{P} + \Delta x_2 \mathbf{j})\right] \Delta x_1 \Delta x_3 - \left[\sigma_3(\mathbf{P}) - \sigma_3(\mathbf{P} + \Delta x_3 \mathbf{k})\right] \Delta x_1 \Delta x_2 = \text{taxa de acumulação (ou perda)}.$$

Usando as componentes até o termo linear da expansão de Taylor, as expressões dentro dos colchetes podem ser substituídas por  $-\Delta x_1 \partial \sigma_1 / \partial x_1$ ,  $-\Delta x_2 \partial \sigma_2 / \partial x_2$ , e  $-\Delta x_3 \partial \sigma_3 / \partial x_3$ , respectivamente. Isto resulta

$$\left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \right] \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \frac{\partial C}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \quad (1.5)$$

onde a taxa de acumulação (ou perda) no volume representativo é expressado em termos da derivada parcial da concentração no tempo. Para tamanho infinitesimal do volume representativo, a equação (1.5) pode ser escrita na forma compacta introduzindo o vetor operador divergente  $\nabla \cdot$ , que atua sobre o vetor do fluxo de difusão:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) é denotada como a equação de continuidade. Pode-se ainda, incluir um termo  $f$  que denota uma taxa especificada na qual a quantidade é gerada ou destruída em  $P$  no tempo  $t$ . A função  $f$  é chamada de termo *fonte* se for positiva e *sumidouro* se for negativa. Logo, (1.6) pode ser reformulada como

$$f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (1.7)$$

## Segunda lei de Fick - A Equação de Difusão

A equação (1.4) da primeira lei de Fick e a equação de continuidade (1.6) podem ser combinadas para dar uma equação a qual é chamada de segunda lei de Fick ou as vezes

também a equação de difusão:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla C). \quad (1.8)$$

### Meio Isotrópico

Meio isotrópico tem a mesma propriedade em diferentes direções. Isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = D \mathbf{I}. \quad (1.9)$$

em que  $\mathbf{I}$  denota a matriz identidade  $3 \times 3$  e  $D$  uma propriedade constante.

### Meio Anisotrópico

Meio anisotrópico tem diferentes propriedades de difusão em diferentes direções.

Isto significa que (1.4) deve ser substituída por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_1 = D_{11} \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{13} \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ -\sigma_2 = D_{21} \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{22} \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{23} \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ -\sigma_3 = D_{31} \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{32} \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{33} \frac{\partial C}{\partial x_3} \end{array} \right. ,$$

se os  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , são considerados como constantes. A extensão pra  $D_{ij}$  não constante é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_1 = D_{11}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{12}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{13}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ -\sigma_2 = D_{21}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{22}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{23}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ -\sigma_3 = D_{31}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_1} + D_{32}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_2} + D_{33}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_3} \end{array} \right. .$$

O mesmo vale para o caso isotrópico em (1.9), no qual  $D$  é substituído por  $D(t, \mathbf{x})$ .

## Não linearidade

Podemos ainda, estender a lei (1.4) onde a propriedade depende da concentração  $C$  ou até mesmo do seu gradiente  $\nabla C$ , obtendo assim, a partir da segunda lei de Fick (1.8) um modelo de difusão não linear para um meio heterogêneo

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}(t, \mathbf{x}, C, \nabla C) \nabla C). \quad (1.10)$$

## Condições de contorno e iniciais

As equações de difusão (1.10) são geralmente acompanhadas por condições inicial e de contorno que especificam a concentração no tempo inicial  $t = 0$  a todos os pontos do domínio espacial, bem como condições de contorno que especificam condições sobre a concentração nas fronteiras do domínio para todo tempo. Neste trabalho, consideramos apenas difusão dentro de um meio finito  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Uma condição inicial tem a forma

$$C(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

onde  $g$  é uma concentração inicial definida sobre todo o meio. Condições de contorno clássicas em problemas físicos são:

- Condição de Dirichlet: a concentração no contorno é especificada para todo tempo

$$C|_{\partial\Omega} = h_1(t).$$

- Condição de Newmann: o gradiente da concentração na direção normal ao contorno é especificado para todo tempo

$$\nabla C \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = h_2(t),$$

onde  $n$  é um vetor unitário normal à superfície do contorno.

- Condição de Robin: é a combinação das condições de Dirichlet e Newmann

$$c_1 C|_{\partial\Omega} + c_2 \nabla C \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = h_3(t),$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes definidos.

## Meio composto bifásico e condições de contato

Considere um meio composto por duas substâncias homogêneas (materiais / gases / líquidos / etc.) distintas. Suponha que a região  $\Omega_1$  esteja ocupada por uma substância na qual o seu coeficiente de difusão é  $D_1\mathbf{I}$ , e na região  $\Omega_2$  por uma substância com coeficiente de difusão  $D_2\mathbf{I}$ , de modo que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  e existe uma superfície  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  de *contato* que delimita as duas regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , assim a região material é definida como  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ . Denota-se por  $[[\Psi]]_\Gamma$  a condição de contato da grandeza (escalar ou vetorial)  $\Psi = \{C, \boldsymbol{\sigma}\}$  nos pontos  $\mathbf{x}_c \in \Gamma$ . A grandeza é definida por

$$\Psi(\mathbf{x}) = \chi_1(\mathbf{x})\Psi_1 + \chi_2(\mathbf{x})\Psi_2$$

com

$$\chi_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_r \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_r \end{cases},$$

uma função indicadora da fase  $r = 1, 2$  e  $\Psi_r$  é a restrição de  $\Psi$  a  $\Omega_r$ . A hipótese física usual é a continuidade para a concentração  $C$  e o fluxo  $\boldsymbol{\sigma}$  no contato dos dois materiais, ou seja,

$$\begin{cases} C_1 = C_2 & \text{em } \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_2 & \text{em } \Gamma \end{cases},$$

onde  $n_{i_k}$  é o cosseno do ângulo entre a normal sobre a superfície de descontinuidade  $\Gamma$  e a  $k$ -ésima direção coordenada,  $i = 1, 2$ . Note que  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  em  $\Gamma$ . Levando em consideração estas condições de contato, se definirmos

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{cases} D_1\mathbf{I} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ D_2\mathbf{I} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases},$$

a concentração  $C$  é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla C), & t > 0, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \\ [[C]]_\Gamma = 0, \\ [[\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla C \cdot \mathbf{n}]]_\Gamma = 0, \\ c_1 C(t, \mathbf{x}) + c_2 \nabla C(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = h(t), & t > 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ C(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

para  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  e  $h(t)$  dados.

## Periodicidade e micro-heterogeneidade

Define-se aqui um meio com estrutura periódica como aquele constituído pela replicação periódica de um elemento recorrente, chamado de célula básica. Vários materiais compósitos tem esta estrutura. Por exemplo, um compósito laminado (ver Figura 1.7), que consiste de lâminas sobrepostas, das quais o material 1 (cor clara) tem duas das suas dimensões idênticas a do material 2 (cor escura);

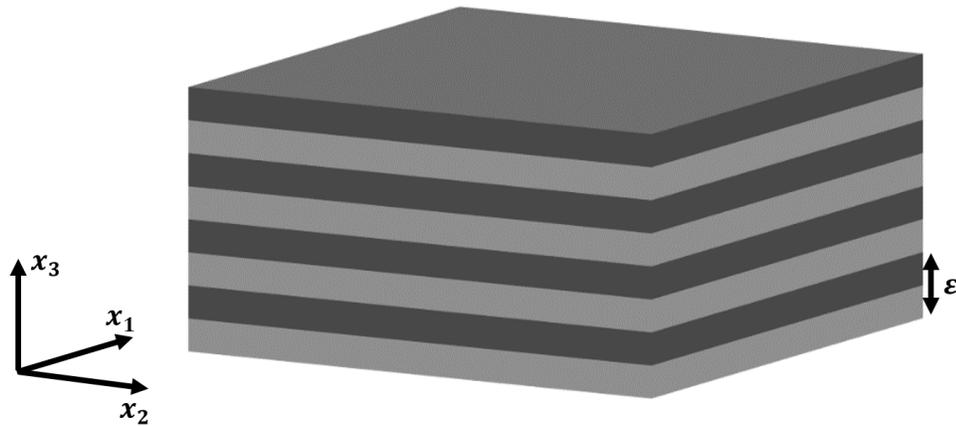


Figura 1.7: Material laminado.

um compósito fibroso reforçado unidirecionalmente (ver Figura 1.8), consiste de um sistema de fibras unidirecionais (material 1) e matriz (material 2) que preenche o espaço entre as fibras.

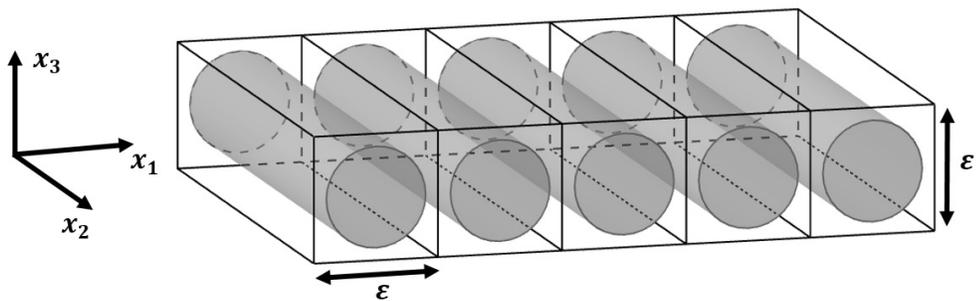


Figura 1.8: Material fibroso com fibras cilíndricas unidirecionais.

A Figura 1.9 mostra a estrutura de um corte do compósito fibroso (as fibras estão destacadas).

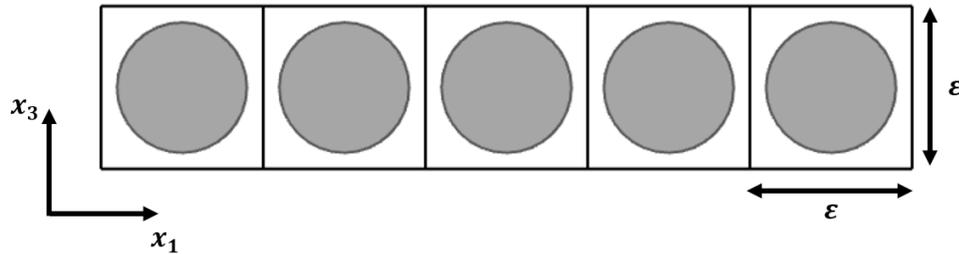


Figura 1.9: Seção de um material fibroso com fibras unidirecionais.

Outro exemplo de estrutura periódica é um compósito particulado (ver Figura (1.10)) que consiste de um sistema periódico tridimensional de grãos (material 1), regulares ou não, e uma matriz (material 2) que preenche o espaço entre os grãos.

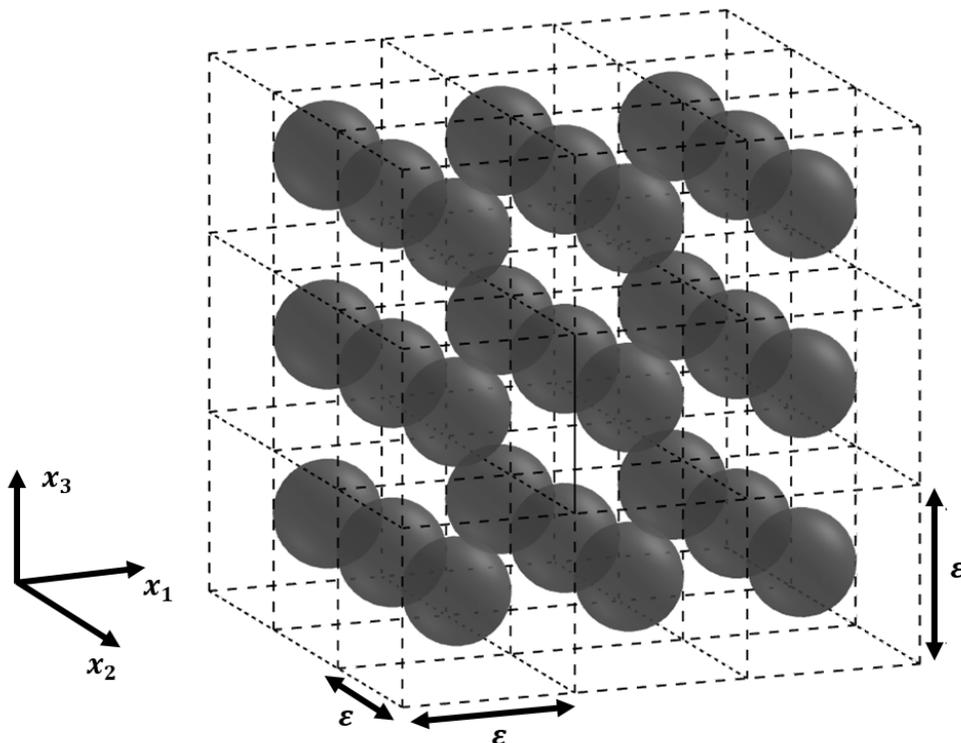


Figura 1.10: Esboço de um meio poroso/particulado.

Consideramos  $\varepsilon$  um parâmetro pequeno  $0 < \varepsilon \ll 1$ , o qual especifica globalmente as dimensões do elemento recorrente e indica a existência de duas escalas estruturais (micro e macroescala). Pela replicação periódica deste elemento constitui-se uma estrutura de volume  $|\Omega|$  e  $\mathcal{Y} = \varepsilon Y$ -periódica. Define-se assim, uma nova variável,  $\varepsilon^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ , onde  $\mathbf{y} \in Y$  é chamada de variável microscópica, rápida ou local, que define o comportamento local do meio, em contraste com a variável  $\mathbf{x} \in \Omega$  que é chamada de macroscópica, lenta ou global. Fenômenos que ocorrem em meios micro-heterogêneos e periódicos são geralmente modelados por equações diferenciais parciais com coeficientes rapidamente oscilantes e periódicos obtidas a partir de leis de conservação, relações constitutivas ou de fechamento, que satisfazem certas condições de contorno, inicial, de contato e/ou periodicidade. Um exemplo, é o campo de temperatura em um compósito laminado, como mostrado na Figura 1.7, para o caso estacionário ( $\partial T^\varepsilon / \partial t = 0$ ), descrito pela equação

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(x_3)\nabla T^\varepsilon) = f(\mathbf{x})$$

definida em  $\Omega \setminus \Gamma$ , onde  $\Gamma$  denota a união de todas as superfícies de contato em  $\Omega$ . Aquí  $\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(x_3) = \boldsymbol{\kappa}(x_3/\varepsilon) = \boldsymbol{\kappa}(y_3)$  é a condutividade térmica no ponto  $\mathbf{x}$ ,  $\varepsilon$ -periódico na variável  $x_3$ , 1-periódico na variável  $y_3$ , isto é,  $\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(x_3) = \boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(x_3 + \varepsilon) = \boldsymbol{\kappa}(y_3) = \boldsymbol{\kappa}(y_3 + 1)$ . Em geral, numa configuração periódica a representação da condutividade do compósito bifásico seria

$$\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \kappa_1 \mathbf{I} \chi_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \kappa_2 \mathbf{I} \chi_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

em que as funções indicadoras  $\chi_i(\mathbf{x}/\varepsilon)$  são rapidamente oscilantes, logo

$$\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa_1 \mathbf{I}, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \kappa_2 \mathbf{I}, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Em particular a periodicidade pode ocorrer em algumas direções apenas. Neste caso do compósito laminado, a propriedade é periódica em uma única direção; no caso fibroso, a propriedade é periódica em duas direções; e no particulado em três direções.

A função  $f(\mathbf{x})$  é a densidade de fonte/sumidouro de calor no compósito e  $T^\varepsilon(\mathbf{x})$  é a temperatura no ponto  $\mathbf{x}$ . Assume-se condições de contato perfeito ( $[[\cdot]] = 0$ ) para temperatura nas superfícies de contato entre as fases constituintes do meio:

$$[[T^\varepsilon]]_\Gamma = 0,$$

para a densidade do fluxo de temperatura

$$[[\boldsymbol{\kappa}^\varepsilon \nabla T^\varepsilon \cdot \mathbf{n}]]_\Gamma = 0$$

e condições de contorno apropriadas. E por fim, a condição de periodicidade para a temperatura

$$T^\varepsilon(x_3) = T^\varepsilon(x_3 + \varepsilon) = T(y_3) = T(y_3 + 1).$$

### Generalidade das propriedades físicas

Em geral, as propriedades de um material real podem apresentar algumas flutuações não lineares e assim, por exemplo,  $\mathbf{D}$  (difusividade) deve ser expressada como

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \delta\mathbf{D}(\nabla C)$$

para  $\mathbf{D}^0$  independente de  $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \nabla C$ , enquanto  $\delta\mathbf{D}(\nabla C)$  é a flutuação não linear.

Em particular, assumiremos neste trabalho o termo flutuante não linear da forma  $\delta\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{D}^1 |\boldsymbol{\epsilon}|^{p-2}$ , para  $p \in ]1, \infty[$ . Assim, podemos reescrever o fluxo  $\boldsymbol{\sigma}$  em termos do gradiente da concentração  $\boldsymbol{\epsilon}$ , como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = (\mathbf{D}^0 + \mathbf{D}^1 |\boldsymbol{\epsilon}|^{p-2})\boldsymbol{\epsilon}, \quad p \in ]1, \infty[.$$

Tal relação constitutiva pode ser obtida da função de energia

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T \left( \mathbf{D}^0 + \frac{2}{p}\mathbf{D}^1 |\boldsymbol{\epsilon}|^{p-2} \right) \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}^0 \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{p}\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}^1 |\boldsymbol{\epsilon}|^{p-2} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.11)$$

mediante diferenciação:  $\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\partial W}{\partial \epsilon_1}, \frac{\partial W}{\partial \epsilon_2}, \frac{\partial W}{\partial \epsilon_3} \right)$ . Este comportamento constitutivo não linear modela diversas situações físicas, como por exemplo:

- No contexto da condução térmica,  $\mathbf{D}^0$  e  $\mathbf{D}^1$  são as condutividades térmicas linear e não linear,  $C$  é a temperatura,  $\boldsymbol{\epsilon}$  é o gradiente de temperatura,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o fluxo de calor (com  $p = 4$ , ver [45, 72, 112],  $p = \frac{4}{3}$ , ver [93]).
- No contexto da condução elétrica,  $\mathbf{D}^0$  e  $\mathbf{D}^1$  são as condutividades elétricas linear e não linear,  $C$  é o potencial elétrico,  $-\boldsymbol{\epsilon}$  é o campo elétrico,  $\boldsymbol{\sigma}$  é a corrente elétrica (com  $p = 4$ , ver [22, 58, 61]).

- No contexto da eletrostática,  $\mathbf{D}^0$  e  $\mathbf{D}^1$  são a permissividade linear e a susceptibilidade não linear,  $C$  é o potencial elétrico,  $-\boldsymbol{\epsilon}$  é o campo elétrico,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o deslocamento elétrico (com  $p = 4$ , ver [46, 53, 81, 96, 97]).
- No contexto da magnetostática,  $\mathbf{D}^0$  e  $\mathbf{D}^1$  são a permeabilidade linear e a susceptibilidade magnética não linear,  $C$  é o potencial magnético,  $-\boldsymbol{\epsilon}$  é o campo magnético,  $\boldsymbol{\sigma}$  é a indução magnética (com  $p = 4$ , ver [55, 111]).
- No contexto elasto-plástico, temos  $\mathbf{D}^0 = \frac{1}{\mathcal{E}}$  e  $\mathbf{D}^1 = \frac{K}{\mathcal{E}^{p-1}}$ , em que  $\mathcal{E}$  é o módulo de elasticidade do material,  $K$  e  $p$  são constantes associadas às propriedades físicas do material,  $\boldsymbol{\epsilon}$  representa a tensão,  $\boldsymbol{\sigma}$  a deformação no modelo de Ramberg-Osgood (ver [59, 69, 80]).

Este modelo produz resultados realistas para valores moderados de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Por outro lado, admite o crescimento ilimitado da energia  $W$  quando  $\boldsymbol{\epsilon}$  cresce, ou seja, que o meio poderia armazenar ou dissipar energia infinitamente sem sofrer mudanças irreversíveis. Para modelar de maneira realista situações em que  $\boldsymbol{\epsilon}$  é grande, no contexto da hiperelasticidade, se propôs a introdução de limitadores para a energia. Detalhes dessa abordagem serão apresentados a seguir, e ainda, é formulado o problema geral do trabalho, que tem como casos particulares o problema de difusão com fluxo não linear sem limitador e com limitador.

## Energia limitada e o problema geral

Segundo Volokh [102], na teoria da mecânica de dano se introduz um parâmetro de dano, que descreve a degradação das propriedades do material durante o carregamento mecânico. Porém, diz ser difícil de medir o parâmetro de dano diretamente através de experimentos. Ele, portanto, apresenta uma abordagem fenomenológica de hiperelasticidade com amolecimento para modelagem de falhas de materiais. A idéia básica da abordagem é formular uma expressão da energia de deformação, que impõe o amolecimento na relação tensão/deformação. No entanto, a expressão de energia de deformação, considerada em [101, 102], é específica do material e não é facilmente estendida a outros materiais. Em [103], abrange-se a abordagem de amolecimento da hiperelasticidade para um nível de generalidade

e se introduz uma fórmula universal para o tratamento da falha de material. O amolecimento é controlado pela constante  $\Phi$  da energia de falha crítica, indicando a energia de deformação máxima que o volume infinitesimal de material pode sustentar sem falhar. Essa constante pode ser interpretada de maneira análoga à taxa crítica de liberação de energia na abordagem clássica da mecânica de fratura. Desde então, esta abordagem com limitadores para energia tem sido usada em diversas aplicações, como: na propagação de falhas em materiais frágeis [100]; no estudo do crescimento e ruptura de um aneurisma na aorta abdominal [108]; no estudo da falha em borracha [105] e materiais emborrachados [9, 60, 106, 107]; na predição de falha em artérias baseando-se em um modelo microestrutural bifásico [104]. Por fim [79], além de aplicar o desenvolvimento de Volokh para a detecção de falhas em um cabo umbilical, resolve-se o modelo por MHA, o que não havia sido feito até então.

Na prática introduz-se a função de energia

$$\psi = \Phi - \Phi \exp \left\{ -\frac{W}{\Phi} \right\} \quad (1.12)$$

onde  $\Phi$  é a energia crítica do meio. A relação constitutiva correspondente é

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{\epsilon}} \psi = \nabla_{\boldsymbol{\epsilon}} W \exp \left\{ -\frac{W}{\Phi} \right\},$$

em que  $\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}} = \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon_1}, \frac{\partial}{\partial \epsilon_2}, \frac{\partial}{\partial \epsilon_3} \right)$ . Observa-se, a partir da Figura 1.11, que a função de energia (1.12) (versão unidimensional), reproduz o comportamento tradicional predito por (1.11) para valores *moderados* do gradiente  $\boldsymbol{\epsilon}$ , enquanto estabelece o limite  $\Phi$  para a energia armazenada para valores grandes de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . O termo *moderado* está relacionado aos parâmetros  $D^0$ ,  $D^1$  e  $p$ .

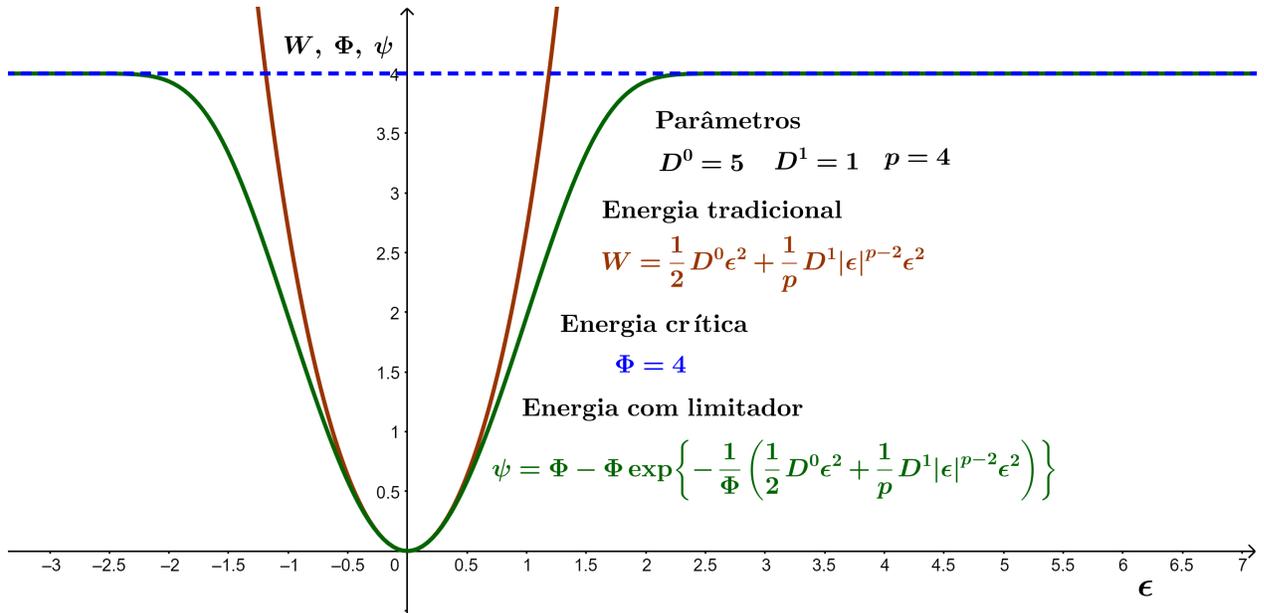


Figura 1.11: Funções de energia tradicional, crítica e com limitador.

Com estas considerações, temos a equação de difusão

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \nabla_{\epsilon} W \exp \left\{ -\frac{W}{\Phi} \right\} \right) = f$$

ou, especificamente,

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot \left( (D^0 + D^1 |\epsilon|^{p-2}) \epsilon \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi} \left( \frac{1}{2} \epsilon^T D^0 \epsilon + \frac{1}{p} \epsilon^T D^1 |\epsilon|^{p-2} \epsilon \right) \right\} \right) = f.$$

Logo, para um meio micro-heterogêneo e periódico fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{\epsilon}}{\partial t} - \nabla \cdot \left( (D^{0,\epsilon} + D^{1,\epsilon} |\epsilon^{\epsilon}|^{p-2}) \epsilon^{\epsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi^{\epsilon}} \left( \frac{1}{2} (\epsilon^{\epsilon})^T D^{0,\epsilon} \epsilon^{\epsilon} + \frac{1}{p} (\epsilon^{\epsilon})^T D^{1,\epsilon} |\epsilon^{\epsilon}|^{p-2} \epsilon^{\epsilon} \right) \right\} \right) \\ = f(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1.13}$$

em que as componentes da matriz  $D^{i,\epsilon} = D^{i,\epsilon}(t, \mathbf{x})$ ,  $i = 0, 1$ , são funções  $\mathcal{Y}$ -periódicas com relação a variável espacial, positivas, limitadas e continuamente diferenciáveis por partes.

Finalmente, o problema que se deseja explorar nesta tese, em particular, é a da difusão de algum fluido bifásico, distribuído periodicamente, com concentração e fluxo contínuo entre as fases, com fonte/sumidouro e fronteiras mantidas a zero (Condições de Dirichlet nula). Além disso, analisar os casos

- sem limitador para energia

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right) = (\mathbf{D}^{0,\varepsilon} + \mathbf{D}^{1,\varepsilon} |\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon|^{p-2}) \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon \quad (1.14)$$

- com limitador para energia

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right) = (\mathbf{D}^{0,\varepsilon} + \mathbf{D}^{1,\varepsilon} |\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon|^{p-2}) \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon \exp\left\{-\frac{1}{\Phi^\varepsilon} \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon)^T \mathbf{D}^{0,\varepsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon + \frac{1}{p} (\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon)^T \mathbf{D}^{1,\varepsilon} |\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon|^{p-2} \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right)\right\}. \quad (1.15)$$

Nesta trabalho, supõe-se um fluxo mais geral, isto é,

$$\boldsymbol{\sigma}\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, C^\varepsilon, \nabla C^\varepsilon\right)$$

o qual tem como casos particulares (1.14) e (1.15). A partir disso, se modela o seguinte problema norteador (ou motivador)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, C^\varepsilon, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right) = f(t, \mathbf{x}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket C^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, C^\varepsilon, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma = 0, \\ C^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ C^\varepsilon(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Formalmente, é possível reescrever este sistema na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, C^\varepsilon, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon\right) = f(t, \mathbf{x}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ C^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ C^\varepsilon(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Observe que a partir das condições de continuidade (1.16) segue que o gradiente de  $C^\varepsilon$  é descontínuo. Além disso, em geral, o fluxo  $\boldsymbol{\sigma}$  não é diferenciável. Levando em conta estas descontinuidades, a questão é: qual é a formulação matemática apropriada deste problema e em qual espaço funcional pode-se ter uma solução? Uma resposta para estas questões podem ser dadas introduzindo uma noção fraca de solução. Ela é construída sobre a noção de derivada fraca, a chamada derivada no sentido de distribuição. Esta noção é definida

no Capítulo seguinte, assim como introduzido os espaços de Sobolev que constituem uma estrutura funcional natural para soluções fracas [35].

Na definição de uma solução fraca, o problema (1.17) (ou (1.16)) é substituído por uma formulação variacional, isto é,

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \int_0^T C^\varepsilon(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial t} dt d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \int_0^T \boldsymbol{\sigma} \left( t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, C^\varepsilon, \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon \right) \cdot \nabla \phi dt d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \int_0^T f(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x}) dt d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(x) \phi(0, \mathbf{x}) dx, \quad \forall \phi \in H, \end{cases} \quad (1.18)$$

onde  $\phi$  é alguma função teste, pertencente ao espaço de Sobolev  $H$ , considerando as condições de contorno e inicial sobre  $C^\varepsilon$ . Em (1.18), as derivadas são tomadas no sentido de distribuições. A prova de existência e unicidade de uma solução fraca para (1.18) é realizada no Capítulo 4.

## 1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho utiliza técnicas de homogeneização para obtenção do comportamento aproximado e efetivo de meios micro-periódicos com e sem limitador para energia. De maneira específica, são considerados os seguintes termos:

- Abordar os problemas linear e não linear, para o meio micro-heterogêneo, periódico, com e sem limitador para energia, via MHA.
- Abordar os problemas linear e não linear, para o meio micro-heterogêneo e periódico, com e sem limitador para energia, via MCDE e comparar resultados obtidos pelo MHA.
- Investigar a partir do MHA e MCDE a proximidade entre as soluções exata e, respectiva, homogeneizada, linear e não linear.
- Estudar exemplos realísticos ou próximo da realidade, unidimensionais, os quais podem ser modelados por (1.13), de modo à ilustrar e comprovar os resultados teóricos.

### 1.3 Contribuições da tese

- Enuncia-se um caso particular de difusão não linear e prova-se a existência e unicidade da solução através do método de Faedo-Galerkin.
- Enuncia-se e prova-se o lema que garante a existência e unicidade da solução do problema local desacoplado no desenvolvimento da homogeneização não linear.
- Garantida a existência e unicidade do problema local, mostra-se que o fluxo efetivo preserva as propriedades do fluxo original via MHA e MCDE, o que garante a existência e unicidade do problema homogeneizado.
- Propõe-se uma abordagem pós homogeneização para corrigir a assintótica no contorno e na condição inicial.
- Realiza-se a análise matemática dos resultados obtidos pelos MHA e MCDE não linear através de estimações para a solução, obtidas na prova de existência de solução do problema na norma do espaço em que são procuradas. Especificamente, se obtém a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado, processo também conhecido como resultado de corretor.
- Homogeniza-se mediante o MCDE o problema motivador com fluxo limitado.
- Mostra-se a equivalência entre as relações efetivas para o coeficiente deduzidas nos métodos de homogeneização.

### 1.4 Organização do trabalho

**Capítulo 2:** Neste capítulo são enunciadas definições e resultados pertinentes de Análise Funcional, Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais. As demonstrações serão omitidas por se tratarem de resultados conhecidos.

**Capítulo 3:** Formula-se o problema de difusão com fluxo linear e se estabelece uma estimativa para a solução na norma do espaço que pertence. Desenvolvem-se os

formalismos dos MHA e MCDE sobre o problema difusivo linear. Justificam-se os processos de homogeneização através da proximidade e resultado de corretor. Propõe-se uma correção para solução assintótica de primeira ordem.

**Capítulo 4:** Formula-se o problema de difusão com fluxo não linear e prova-se a existência e unicidade da solução. Desenvolvem-se os formalismos do MHA e MCDE sobre o problema de difusão não linear. Prova-se a existência e unicidade do problema local desacoplado no processo de homogeneização pelo MHA. Mostra-se que o fluxo efetivo não linear preserva as propriedades do fluxo original, o que garante a existência e unicidade do problema homogeneizado. Justificam-se o processo de homogeneização através das proximidade e resultado de corretor. Propõe-se uma correção para solução assintótica de primeira ordem.

**Capítulo 5:** Resolvem-se numericamente quatro exemplos, dois lineares e dois não lineares.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo são enunciadas algumas definições e propriedades de espaços funcionais utilizados nos capítulos seguintes. As principais referências são [23, 28, 35, 118]. Os espaços considerados neste trabalho são todos espaços de Banach reais.

### 2.1 Dualidade

A seguir  $f$  denota uma aplicação  $f : E \mapsto F$  entre dois espaços de Banach  $E$  e  $F$  com normas  $\|x\|_E$  e  $\|x\|_F$ , respectivamente. A aplicação  $f$  é dita linear quando para todo  $x, y \in E$  e para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ . A continuidade de uma aplicação linear é caracterizada por sua limitação.

**Definição 1.** *Uma aplicação linear  $f : E \mapsto F$  é dita limitada quando satisfaz*

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

**Proposição 1.** *Seja  $\mathcal{L}(E, F)$  o espaço linear de todas as aplicações lineares e limitadas de  $E$  para  $F$ . A quantidade*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, \quad (2.1)$$

*define uma norma sobre  $\mathcal{L}(E, F)$ , o qual é um espaço de Banach para esta norma. Então tem-se*

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\|_E, \quad (2.2)$$

*onde  $\|f\|_{\mathcal{L}(E, F)}$  é o menor valor para o qual (2.2) vale.*

*Além disso, a linearidade implica que*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E \setminus \{0\} \\ \|x\|_E \leq 1}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F,$$

*para  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

*Demonstração.* [35], p. 10. ■

**Teorema 1.** *Seja  $f$  uma aplicação linear de  $E$  para  $F$ . Então as três afirmações seguintes são equivalentes:*

i)  $f$  é limitada,

ii)  $f$  é contínua,

iii)  $f$  é contínua no ponto  $x_0 \in E$ .

*Demonstração.* [35], p. 11. ■

**Definição 2.** *Se  $E$  é um espaço de Banach, o conjunto das aplicações lineares e contínuas de  $E$  em  $\mathbb{R}$  é chamado o **espaço dual** de  $E$  e é denotado por  $E'$ . Se  $f \in E'$ , a imagem  $f(x)$  de  $x \in E$  é denotada por  $\langle f, x \rangle_{E', E}$ . Dizemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um pareamento da dualidade entre  $E'$  e  $E$ . O espaço dual  $E'' = (E')'$  de  $E'$  é chamado o **bidual** de  $E$ .*

**Corolário 1.** *O espaço dual  $E'$  é caracterizado como segue:*

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}),$$

e ele é um espaço de Banach para a norma

$$\|x'\|_{E'} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|\langle x', x \rangle_{E', E}|}{\|x\|_E}, \quad \forall x' \in E'.$$

Além disso, tem-se

$$|\langle x', x \rangle_{E', E}| \leq \|x'\|_{E'} \|x\|_E, \quad \forall x \in E \text{ e } \forall x' \in E'. \quad (2.3)$$

*Demonstração.* [35], p. 11. ■

## 2.2 Espaços de Lebesgue

Nesta seção definimos o espaço de Lebesgue, denotado por  $L^p(\Omega)$ , onde  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto aberto. Nesta seção, a integral sempre se refere à medida de Lebesgue. Destacamos que os espaços considerados neste trabalho são todos reais.

### 2.2.1 Definição e Propriedades de Espaços $L^p$

**Definição 3 (Espaços  $L^p$ ).** Para  $1 \leq p < \infty$ , dizemos que  $u \in L^p(\Omega)$  se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável e

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

Além disso, denotamos  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$ .

**Definição 4 (Espaços  $L^\infty$ ).** Dizemos que  $u \in L^\infty(\Omega)$  se  $u$  é mensurável e existe um  $M \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $|u(x)| \leq M$  em quase todo  $\Omega$ . Definimos  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{M > 0 \mid |u(x)| \leq M, \text{ em quase todo } \Omega\}.$$

Para  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos  $q$  pelas relações

$$q = \begin{cases} \infty, & \text{se } p = 1, \\ \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < \infty, \\ 1, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

de modo que simbólicamente temos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Teorema 2.** Assuma  $1 \leq p \leq \infty$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p) \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Se  $p = 1$  temos a desigualdade triangular. Para  $p > 1$  segue da convexidade de  $|x|^p$ , isto é,

$$\left| \frac{x + y}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p \Rightarrow |x + y|^p \leq 2^{p-1} (|x|^p + |y|^p).$$

■

**Teorema 3 (Desigualdade de Young).** Seja  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ para } a, b > 0. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* [40], p. 622. ■

**Teorema 4 (Desigualdade de Hölder).** *Considere  $u(x) \in L^p(\Omega)$  e  $v(x) \in L^q(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $uv \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.6)$$

*Demonstração.* [40], p. 623. ■

**Teorema 5 (Desigualdade de Minkowski).** *Assuma  $1 \leq p \leq \infty$  e  $u(x), v(x) \in L^p(\Omega)$ . Então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* [40], p. 623. ■

**Teorema 6.**  *$L^p(\Omega)$  é um espaço vetorial e  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  é norma para todo  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Demonstração.* [23], p. 176. ■

**Teorema 7.**  *$L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach para qualquer  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Demonstração.* [23], p. 177. ■

**Teorema 8.** *Sejam  $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$  e  $u \in L^p(\Omega)$ , tais que  $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Então, existe uma subsequência  $\{u_{n_k}\}$  e uma função  $h \in L^p(\Omega)$  tal que*

*i)  $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$  em quase todo  $\Omega$ ,*

*ii)  $|u_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$  em quase todo  $\Omega$ .*

*Demonstração.* [23], p. 178. ■

**Teorema 9.**  *$L^p(\Omega)$  é reflexivo para todo  $p$  tal que  $1 < p < \infty$ .*

*Demonstração.* [23], p. 178. ■

**Teorema 10 (Teorema da Representação de Riesz).** *Seja  $1 < p < \infty$  e  $f$  um funcional linear contínuo em  $L^p(\Omega)$ . Então, existe uma única  $u_0 \in L^q(\Omega)$  tal que*

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle_{L^q(\Omega), L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in L^p(\Omega).$$

*Além disso,*

$$\|f\|_{[L^p(\Omega)]'} = \|u_0\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demonstração.* [23], p. 179. ■

**Definição 5.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Dizemos que  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$  se  $\chi_K u \in L^p(\Omega)$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ .*

**Definição 6.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Uma seqüência  $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$  é dita convergir fortemente para  $u \in L^p(\Omega)$  se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

*Esta convergência forte é denotada por:  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L^p(\Omega)$ .*

**Definição 7.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Uma seqüência  $\{u_n\}$  é dita convergir fracamente para  $u$  em  $L^p(\Omega)$  se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

*Esta convergência fraca é denotada por:  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $L^p(\Omega)$ .*

**Proposição 2.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L^p(\Omega)$  então  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $L^p(\Omega)$ .*

*Demonstração.* [35], p. 12. ■

**Proposição 3.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência fracamente convergente para  $u \in L^p(\Omega)$ . Então*

*i)  $\{u_n\}$  é uma seqüência limitada em  $L^p(\Omega)$ , ou seja, existe uma constante  $C$  independente de  $n$  tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

ii) a norma sobre  $L^p(\Omega)$  é semi-contínua com respeito a convergência fraca, ou seja,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Demonstração.* [28], p. 58. ■

**Teorema 11** (Eberlein-Shmulyan). *Seja  $1 < p < \infty$ . Assuma que  $\{u_n\}$  seja uma sequência limitada em  $L^p(\Omega)$ . Então*

i) *existe uma subsequência  $\{u_{n_k}\}$  de  $\{u_n\}$  e  $u \in L^p(\Omega)$  tal que, quando  $k \rightarrow \infty$ ,*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^p(\Omega).$$

ii) *se cada subsequência fracamente convergente de  $\{u_n\}$  tem o mesmo limite  $u$ , então toda sequência  $\{u_n\}$  converge para  $u$ , isto é,*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^p(\Omega).$$

*Demonstração.* [35], p. 15. ■

**Proposição 4.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Sejam  $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$  e  $\{v_n\} \subset L^q(\Omega)$  tais que*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^p(\Omega) \\ v_n \rightarrow v \text{ fortemente em } L^q(\Omega). \end{cases}$$

*Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n v_n dx = \int_{\Omega} u v dx.$$

*Demonstração.* [35], p. 16. ■

**Definição 8.** *Uma sequência  $\{u_n\}$  é dita convergir fracamente\* para  $u$  em  $L^\infty(\Omega)$  se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x)v(x)dx = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega).$$

*Esta convergência é denotada por:  $u_n \xrightarrow{*} u$  em  $L^\infty(\Omega)$ .*

**Proposição 5.** *Seja  $\{x_n\}$  uma sequência fracamente\* convergente para  $x$  em  $L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]'$ . Então*

i)  $\{x_n\}$  é uma sequência em  $L^\infty(\Omega)$ , ou seja, existe uma constante  $C$  independente de  $n$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

ii) a norma é semi-contínua inferior com respeito a convergência fraca\*, ou seja,

$$\|x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Demonstração.* [28], p. 63. ■

**Definição 9.** O espaço de Banach  $E$  é **separável** se ele possuir um subconjunto enumerável e denso.

**Teorema 12.** Seja  $L^1(\Omega)$  um espaço de Banach separável e  $L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]'$ . Se  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência limitada em  $L^\infty(\Omega)$ , então

i) existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  e  $x \in L^\infty(\Omega)$  tal que, quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente}^* \text{ em } L^\infty(\Omega).$$

ii) se cada subsequência convergente fracamente\* de  $\{x_n\}$  tem o mesmo limite  $x$ , então toda sequência  $\{x_n\}$  converge fracamente\* para  $x$ , ou seja,

$$x_n \rightharpoonup x \text{ fracamente}^* \text{ em } L^\infty(\Omega).$$

*Demonstração.* [28], p. 76. ■

Uma classe de funções frequentemente neste trabalho é das periódicas integráveis. A seguir define-se uma função periódica e enuncia-se um resultado importante no estudo de convergência fraca das funções rapidamente oscilantes, as quais são de grande interesse aqui. Para isso, definimos  $Y$  como um hiper-retângulo em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , definido por

$$Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_N[, \tag{2.8}$$

onde  $l_1, \dots, l_N$  são números positivos dados. Iremos nos referir a  $Y$  como o período (2.8) e  $f$  um função definida em quase todo  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição 10.** A função  $f$  é chamada  $Y$ -periódica se, e somente se,

$$f(x + kl_i e_i) = f(x), \text{ em quase todo } \mathbb{R}^N, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

onde  $\{e_1, \dots, e_N\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^N$ . Para  $N = 1$ , simplesmente dizemos que  $f$  é  $l_1$ -periódica.

**Teorema 13.** Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $f$  uma função  $Y$ -periódica em  $L^p(Y)$ . Considere

$$f^\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ em quase todo } \mathbb{R}^N.$$

Então, se  $p < \infty$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$f^\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \text{ fracamente em } L^p(\Omega),$$

para qualquer subconjunto aberto e limitado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Se  $p = \infty$ , tem-se

$$f^\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \text{ fracamente}^* \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

*Demonstração.* [35], p. 33. ■

## 2.2.2 Espaço das Funções Contínuas

Primeiramente, lembramos que por domínio, queremos dizer um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$ . Logo para um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e para qualquer inteiro não negativo  $m$  definimos por  $C^m(\Omega)$  o conjunto de todas as funções  $u$  das quais suas derivadas  $D^\alpha u$  são contínuas sobre  $\Omega$  para qualquer  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq m$ , onde se  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_N^{\alpha_N}$ , temos  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ . Definimos  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$  e denote  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ . Dada uma função  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , seu suporte, denotado por

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}.$$

$C_c^\infty(\Omega)$  denota o conjunto das funções de  $C^\infty(\Omega)$  com suporte compacto contido em  $\Omega$ .

Os conjuntos  $C_0(\Omega)$  e  $C_0^\infty(\Omega)$  consistem do fecho de  $C_c(\Omega)$  (que é o conjunto das funções  $C(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ ) e  $C_c^\infty(\Omega)$ , respectivamente.

**Teorema 14.** *O espaço  $C_0(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ , para  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* [23], p. 181. ■

**Teorema 15.**  *$L^p(\Omega)$  é **separável** para qualquer  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* [23], p. 182. ■

## 2.3 Espaços de Sobolev e Distribuição

Grande parte dos resultados que serão apresentados neste trabalho compreende uma configuração funcional que envolve a teoria de distribuições e espaços de Sobolev. Iremos citar apenas os principais resultados que serão usados posteriormente.

**Definição 11.** *Seja  $\{\varphi_n\}$  uma sequência de  $C_0^\infty(\Omega)$ . Dizemos que  $\varphi_n$  converge para um elemento  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , se e somente se,*

- i) existe um conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{supp } \varphi_n \subset K$ ,*
- ii) para qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ ,  $D^\alpha \varphi_n$  converge uniformemente para  $D^\alpha \varphi$  em  $K$ .*

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , com essa noção de convergência, denomina-se **espaço das funções teste** e é representado por  $D(\Omega)$ .

**Definição 12.** *Uma aplicação  $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada uma **distribuição** em  $\Omega$  se, e somente se,*

- i)  $T$  é linear, ou seja,*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega), \quad T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2),$$

- ii)  $T$  é contínua em sequências, ou seja,*

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \in D(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi).$$

Denotamos por  $D'(\Omega)$  o conjunto de distribuições em  $\Omega$ .

**Definição 13.** Uma sequência  $\{T_n\}$  de  $D'(\Omega)$  é dita convergir (no sentido de distribuições) para um elemento  $T \in D'(\Omega)$  se, e somente se,

$$\langle T_n, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} \rightarrow \langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Denotamos esta convergência por

$$T_n \rightarrow T \quad \text{em } D'(\Omega).$$

**Definição 14 (Derivada de uma distribuição).** Considere  $T \in D'(\Omega)$ . Para qualquer  $i = 1, \dots, N$ , a derivada  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  de  $T$  com respeito a  $x_i$  é definida por

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

*Observação 1.* Logo temos que  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , também é uma distribuição. Além disso, se  $T_n$  converge para  $T$  no sentido de distribuições, então  $\frac{\partial T_n}{\partial x_i}$  converge para  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  no sentido de distribuição para qualquer  $i = 1, \dots, N$ .

**Definição 15 (Espaço de Sobolev).** Espaços de Sobolev são denotados por  $W^{m,p}(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo  $\alpha$  tal que  $0 \leq |\alpha| \leq m$ , onde as derivadas são entendidas no sentido de distribuição.

O caso particular  $p = 2$  será útil neste trabalho. Neste caso, o espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é representado por  $H^m(\Omega)$ . O espaço  $H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

para todo  $u$  e  $v \in H^m(\Omega)$ , onde  $(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$ . Além disso, a norma associada a este produto interno é

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

**Definição 16.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert.

i) Dois elementos  $x, y \in H$  são ortogonais se  $(x, y)_H = 0$ .

ii) Uma base enumerável  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  é chamada ortonormal se

$$\begin{cases} (w_k, w_l)_H = 0 \quad (k, l = 1, \dots; k \neq l) \\ \|w_k\|_H = 1 \quad (k = 1, \dots). \end{cases}$$

Se  $x \in H$  e  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  é uma base ortonormal, podemos escrever

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)_H w_k,$$

com a série convergindo em  $H$ . Além disso,

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)_H^2.$$

**Definição 17.** Definimos a norma  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  para  $W^{m,p}(\Omega)$ , onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , como

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Teorema 16.**  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* [23], p. 183. ■

**Corolário 2.**  $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$

*Demonstração.* [23], p. 184. ■

**Teorema 17.**  $W^{m,p}(\Omega)$  é separável se  $1 \leq p < \infty$  e é reflexivo e uniformemente convexo se  $1 < p < \infty$ . Em particular,  $W^{m,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável.

*Demonstração.* [23], p. 184. ■

**Definição 18.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio. Para  $m$  um inteiro positivo e  $1 \leq p < \infty$ , define-se  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como o fecho em  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  de  $C_c^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 18.**  $D(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ , para  $1 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* [28], p. 110. ■

**Teorema 19 (Desigualdade de Poincaré).** *Suponha que  $1 \leq p < \infty$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto limitado. Então existe uma constante  $C$  (dependendo de  $\Omega$  e  $p$ ) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

*Demonstração.* [28], p. 290. ■

**Proposição 6 (Desigualdade de Poincaré-Wirtinger).** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto e conexo de classe  $C^1$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então, existe uma constante  $C$  tal que*

$$\|u - \langle u \rangle\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

onde  $\langle u \rangle$  denota a média integral de  $u$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* [28], p. 312. ■

**Definição 19.** *Para  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $W^{-m,q}$  o espaço de Banach definido por*

$$W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))',$$

*equipado com a norma*

$$\|f\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{x \in W_0^{m,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, x \rangle_{W^{-m,q}(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega)}|}{\|x\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}}.$$

**Proposição 7.** *Seja  $F \in W^{-1,q}(\Omega)$ . Então existem  $N + 1$  funções  $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^q(\Omega)$  tais que*

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{2.9}$$

*no sentido de distribuições. Além disso,*

$$\|F\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^q = \inf \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^q(\Omega)}^q,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os vetores  $(f_0, f_1, \dots, f_N) \in [L^q(\Omega)]^{N+1}$  tal que (2.9) vale.

Reciprocamente, se  $(f_0, f_1, \dots, f_N)$  é um vetor de  $[L^q(\Omega)]^{N+1}$ , então (2.9) define um elemento  $F \in W^{-1,q}(\Omega)$  que satisfaz

$$\|F\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^q \leq \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad (2.10)$$

*Demonstração.* [1], p. 50. ■

**Definição 20.** *Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach. A notação  $E \hookrightarrow F$  significa que  $E \subset F$  e existe uma constante  $K > 0$  tal que*

$$\|u\|_F \leq K\|u\|_E, \forall u \in E.$$

*Se ainda, o encaixe é compacto, então para qualquer sequência limitada  $\{u_n\} \subset E$  existe uma subsequência convergente  $\{u_{n_k}\}$ , que converge para algum  $u$  na norma  $\|\cdot\|_F$ .*

**Definição 21.** *Seja  $C_{\#}^{\infty}(Y)$  o subconjunto de  $C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$  das funções  $Y$ -periódicas. Denotamos por  $H_{\#}^1(Y)$  o fecho de  $C_{\#}^{\infty}(Y)$  para a norma de  $H^1$ .*

**Definição 22.** *O espaço quociente  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$  é definido como o espaço de classes equivalentes com respeito à relação*

$$u \simeq v \iff u - v \text{ é uma constante, } \forall u, v \in H_{\#}^1(Y).$$

### 2.3.1 Distribuições vetoriais

O conceito de distribuição pode ser generalizado para espaços vetoriais reais como segue:

**Definição 23.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . A aplicação  $T : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto X$  é chamada uma distribuição em  $\Omega$  com valores em  $X$  se, e somente se,*

*i)  $T$  é linear, ou seja,*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1T(\varphi_1) + \lambda_2T(\varphi_2).$$

ii)  $T$  é contínua em seqüências, ou seja,

$$(\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \Rightarrow (T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi) \in X).$$

Denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega; X)$  o conjunto das distribuições em  $\Omega$  com valores em  $X$ .

Se  $\Omega = ]a, b[$ ,  $\mathcal{D}'(a, b; X)$  denota o conjunto de distribuições em  $]a, b[$  com valores em  $X$ .

Analogamente, pode-se definir os espaços  $L^p$  para funções vetoriais reais.

**Definição 24.** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ . Denotamos por  $L^p(\Omega; X)$  o conjunto de funções mensuráveis  $u : x \in \Omega \rightarrow u(x) \in X$  tais que  $\|u(x)\|_X \in L^p(\Omega)$ . A norma em  $L^p(\Omega; X)$ , para  $1 \leq p < \infty$ , é definida por*

$$\|u\|_{L^p(\Omega; X)} = \left( \int_{\Omega} \|u(x)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.11)$$

Quando  $p = \infty$ , define-se o espaço  $L^\infty(\Omega; X)$ , como sendo o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow X$  mensuráveis e essencialmente limitadas em  $X$ , ou seja,

$$\text{ess sup } \|u\|_X < \infty.$$

A norma em  $L^\infty(\Omega; X)$  é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega; X)} = \text{ess sup } \|u\|_X.$$

**Definição 25.** *Define-se o espaço  $C(\Omega; X)$  como sendo o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow X$ , tais que  $x \mapsto \|u(x)\|_X$  é contínua em  $\Omega$ . A norma em  $C(\Omega; X)$  é definida por*

$$\|u\|_{C(\Omega; X)} = \max_{x \in \Omega} \|u(x)\|_X.$$

**Proposição 8.** *A quantidade (2.11) define uma norma em  $L^p(\Omega; X)$ , o qual é um espaço de Banach. Se  $X$  é reflexivo e  $1 < p < \infty$ , o espaço  $L^p(\Omega; X)$  é reflexivo também. Além disso, se  $X$  é separável e  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(\Omega; X)$  é separável.*

*Demonstração.* [35], p. 60. ■

*Observação 2.* O mesmo resultado vale para  $\Omega = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ .

**Definição 26.** Seja  $u \in L^p(a, b; X)$ . A derivada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  é a distribuição em  $D'(a, b; X)$  definida por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = - \int_a^b u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt, \quad \forall \varphi \in D(a, b).$$

**Definição 27 (Evolução Tripla).** Entendemos por evolução tripla

$$V \subseteq H \subseteq V'$$

o seguinte

- (i)  $V$  é um espaço de Banach real, reflexivo e separável.
- (ii)  $H$  é um espaço de Hilbert separável.
- (iii) o encaixe  $V \subseteq H$  é contínuo, ou seja,

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

onde  $C$  é uma constante e  $V$  é denso em  $H$ .

**Definição 28.** Definimos para  $1 < p < \infty$ ,  $0 \leq a < b < \infty$ ,

$$W_p = \left\{ u \mid u \in L^p(a, b; V), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(a, b; V') \right\}.$$

**Proposição 9.** Seja  $V \subseteq H \subseteq V'$  uma evolução tripla e  $1 < p < \infty$ . Então os seguintes itens são válidos:

- (i) O conjunto de todas as função  $u \in L^p(a, b; V)$ , que tem derivadas generalizadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(a, b; V')$$

formam um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W_p} = \|u\|_{L^p(a, b; V)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^q(a, b; V')}.$$

Denotamos este espaço por  $W_p$ .

(ii) O encaixe

$$W_p \subseteq C([a, b]; H)$$

é contínuo. Mais precisamente, temos o seguinte. Se  $u \in W_p$ , então existe uma função contínua unicamente determinada  $u_1 : [a, b] \rightarrow H$  a qual coincide em quase todo  $[a, b]$  com a função função inicial  $u$ . Daqui em diante, escrevemos  $u$  ao invés de  $u_1$ . Além disso, neste sentido,

$$\max_{a \leq t \leq b} \|u\|_H \leq C \|u\|_{W_p},$$

onde  $C$  é uma constante.

(iii) O conjunto de todos os polinômios  $w : [a, b] \rightarrow V$ , isto é

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i a_i, \text{ com } a_i \in V, \forall i,$$

é denso nos espaços  $W_p$ ,  $L^p(a, b; H)$  e  $L^p(a, b; H)$ .

(iv) Para todas  $u$  e  $v \in W_p$  e arbitrários  $t, s, a \leq s \leq t \leq b$ , a seguinte fórmula para integrais por partes generalizada vale:

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, v(\tau) \right\rangle_V + \left\langle u(\tau), \frac{\partial v}{\partial \tau} \right\rangle_V d\tau.$$

Aqui, os valores  $u(t), v(t), u(s), v(s)$  são os valores das funções contínuas  $u, v : [a, b] \rightarrow H$  no sentido de (ii).

*Demonstração.* [118], p. 422. ■

### 3 HOMOGENIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Geralmente, as equações que descrevem fenômenos sob meios micro-heterogêneos e periódicos apresentam variação rápida com relação a posição e/ou no tempo. Problemas envolvendo este tipo de equações são difíceis, senão impossíveis de resolver analiticamente. Do ponto de vista numérico, a busca da solução através dos métodos clássicos, requer uma discretização muito fina para capturar a rápida oscilação dos coeficientes, o que se traduz num alto custo computacional com comprometimento da convergência do método numérico empregado. Para obter problemas mais simples de serem resolvidos neste contexto, normalmente se utilizam técnicas de homogeneização. Matematicamente, homogeneização é a obtenção, a partir de um problema com coeficientes rapidamente oscilantes (chamado problema original), de um problema com coeficientes constantes (chamado problema homogeneizado), equivalente ao original em certo sentido. O uso da homogeneização se faz relevante pois a obtenção de uma solução, tanto analítica, como numérica desse problema equivalente, é mais simples, uma vez que, geralmente, os coeficientes são constantes e/ou contínuos. Além disso, porque as propriedades do meio homogêneo equivalente são as propriedades efetivas do meio micro-heterogêneo fornecidas em termos de suas características físicas e geométricas locais.

Nas próximas seções serão apresentadas duas técnicas de homogeneização, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) e o Método de Convergência em Duas Escalas (MCDE), as quais são específicas para meios micro-heterogêneos e periódicos. Neste capítulo, especificamente, ambas técnicas serão desenvolvidas para o caso em que a equação de difusão unidimensional apresenta fluxo linear.

#### 3.1 Método de Homogeneização Assintótica - MHA

O MHA consiste em aproximar a solução exata  $u^\varepsilon$ , por exemplo, da equação

$$\frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

por uma série assintótica  $u^{(\infty)}$  em duas escalas e potências de  $\varepsilon$  denominada solução assintótica formal (s.a.f.):

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

em que  $u_k$  são funções limitadas e 1-periódicas, com relação à variável  $y$ . Substituindo (3.2) em (3.1), aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \left( \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \quad (3.3)$$

agrupando as potências de  $\varepsilon$ , e igualando a zero seus coeficientes, obtém-se uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} & : \begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \\ u_0 \quad 1\text{-periódica} \end{cases} \\ \varepsilon^{-1} & : \begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0, \\ u_1 \quad 1\text{-periódica} \end{cases} \\ \varepsilon^0 & : \begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 + f(x), \\ u_2 \quad 1\text{-periódica} \end{cases} \\ \varepsilon^1 & : \begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_3 = -\mathcal{L}_{xy}u_2 - \mathcal{L}_{yx}u_2 - \mathcal{L}_{xx}u_1, \\ u_3 \quad 1\text{-periódica} \end{cases} \\ \vdots & : \vdots \\ \varepsilon^n & : \begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_{n+2} = -\mathcal{L}_{xy}u_{n+1} - \mathcal{L}_{yx}u_{n+1} - \mathcal{L}_{xx}u_n, \\ u_{n+2} \quad 1\text{-periódica} \end{cases} \\ \vdots & : \vdots \end{aligned}$$

com o operador diferencial definido por

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( a(y) \frac{\partial}{\partial\beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (3.4)$$

A partir destes problemas, de modo recorrente obtém-se a equação do problema homogeneizado, o coeficiente efetivo e a solução do problema local, sendo estes, resultados fundamentais para a construção da s.a.f., o qual será descrito em mais detalhes a seguir.

### 3.1.1 Formalismo matemático do MHA

A seguir descreveremos o formalismo do MHA, isto é, como se obtém matematicamente um problema homogeneizado e os resultados relacionados. Antes disso, as definições de *ordem*, *expansão assintótica* e *solução assintótica formal* são enunciadas.

**Definição 29** (Ordem). *Seja uma função  $\varphi : \Omega \times \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\varphi^\varepsilon = \varphi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ , sendo  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $\varepsilon \in \Sigma \subset \mathbb{R}_+^*$ . Considere ainda que  $\varphi^\varepsilon$  pertence a um espaço normado  $B_\varepsilon(\Omega)$ , definida para cada  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. A notação  $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\psi(\mathbf{x}, \varepsilon))$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  na norma de  $B_\varepsilon(\Omega)$ , significa que existem constantes  $M, \varepsilon_0 > 0$ , independentes de  $\varepsilon$ , tais que  $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\|\psi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)}$ , para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Em particular,  $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^J)$  é equivalente à  $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\varepsilon^J$  para  $\varepsilon > 0$  suficiente pequeno.*

**Definição 30** (Expansão assintótica e solução assintótica formal). *Sejam a função  $\varphi^\varepsilon$  e uma série da forma  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(\mathbf{x}, \varepsilon)$ , não necessariamente convergente. Diz-se que esta série é uma expansão assintótica (e.a.) da função  $\varphi^\varepsilon$  se para todo  $J$  existe um  $M_0$ , tal que para cada  $m \geq M_0$  cumpre-se, na norma de  $B_\varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que*

$$\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i g_i(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^J).$$

*Isto é, tem-se a igualdade assintótica  $\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .*

*Agora, considere, para cada  $\varepsilon > 0$  fixo, a equação diferencial (3.1) com  $\mathcal{L}^\varepsilon : B_{1\varepsilon} \rightarrow B_{2\varepsilon}$ ,  $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$  e  $f \in B_{2\varepsilon}$ , sendo  $B_{1\varepsilon}, B_{2\varepsilon}$  espaços normados e  $\mathcal{L}^\varepsilon$  um operador diferencial. Chama-se de solução assintótica formal (s.a.f.) de (3.1) a assintótica*

$$u^{(\infty)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, \varepsilon),$$

*com  $u_i \in B_{1\varepsilon}$ , tal que para todo  $J \in \mathbb{N}$ , existe um  $M$  para que a relação*

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^J), \tag{3.5}$$

*seja satisfeita para todo  $m \geq M$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$  na norma de  $B_{2\varepsilon}$ , em que  $u^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i$ .*

Se  $\mathcal{L}^\varepsilon$  é um operador linear e existe uma estimativa  $\|u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} \leq c_1\varepsilon^{c_2}\|f\|_{B_{2\varepsilon}}$ , sendo  $c_1 > 0$  e  $c_2$  constantes independentes de  $\varepsilon$ , então segue a partir de (3.5) que para todo  $J \in \mathbb{N}$  existe um  $M$  tal que  $\|u^{(m)} - u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^J)$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para todo  $m \geq M$ , e conseqüentemente, a s.a.f.  $u^{(\infty)}$  é uma e.a. da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema:  $u^\varepsilon \sim u^{(\infty)}$  [16].

*Exemplo:* Para se compreender a definição de s.a.f. acima enunciada, considera-se uma versão unidimensional da equação (1.7) considerando o seguinte fluxo linear

$$\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x},$$

que configura a seguinte equação

$$\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon - f = (\mathcal{T} - \mathcal{L}^\varepsilon) u^\varepsilon - f = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) - f(t, x). \quad (3.6)$$

Propõe-se a solução de (3.6) na forma de uma série assintótica de potências de  $\varepsilon$ , idêntica a (3.2). Mas para construir uma s.a.f. considera-se uma soma finita de  $m + 1$  termos, ou seja,

$$u^\varepsilon(t, x) \sim u^{(m)}(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i(t, x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

que corresponde a considerar  $u_i \equiv 0$  para  $i > m$  em (3.2). Logo, substituindo (3.7) na equação de (3.6), aplicando a regra da cadeia (3.3) e utilizando a notação (3.4) na forma operacional, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\varepsilon u^{(m)} - f(t, x) &= -\varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{yy} u_0 - \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{yy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_0) \\ &\quad - \varepsilon^0 (-\mathcal{T} u_0 + \mathcal{L}_{yy} u_2 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_0 + f(t, x)) \\ &\quad - \dots - \varepsilon^i (-\mathcal{T} u_i + \mathcal{L}_{yy} u_{i+2} + \mathcal{L}_{yx} u_{i+1} + \mathcal{L}_{xy} u_{i+1} + \mathcal{L}_{xx} u_i) \\ &\quad - \dots - \varepsilon^{m-2} (-\mathcal{T} u_{m-2} + \mathcal{L}_{yy} u_m + \mathcal{L}_{yx} u_{m-1} + \mathcal{L}_{xy} u_{m-1} + \mathcal{L}_{xx} u_{m-2}) \\ &\quad - \varepsilon^{m-1} (-\mathcal{T} u_{m-1} + \mathcal{L}_{yx} u_m + \mathcal{L}_{xy} u_m + \mathcal{L}_{xx} u_{m-1}) - \varepsilon^m (-\mathcal{T} u_m + \mathcal{L}_{xx} u_m) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{M}^\varepsilon u^{(m)} - f(t, x) = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}),$$

em que os termos de ordens  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\dots$ , e  $\varepsilon^{m-2}$  devem ser nulos para que  $u^{(m)}$  seja uma s.a.f.. Portanto, pela definição tem-se que  $J = m - 1$  e  $m = J + 1 \Rightarrow M(J) = J + 1$ . Assim,

$$\forall J \in \mathbb{N}, \exists M = J + 1 : \forall m \geq J + 1 \Rightarrow \mathcal{M}^\varepsilon u^{(m)} - f(t, x) = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}).$$



Para realizar o formalismo do MHA, considera-se um compósito bifásico - Figura 3.1 em que  $\Omega_1 = \cup_{i=0}^{n-1} \Omega_1^{(i)}$  (cor clara) e  $\Omega_2 = \cup_{i=0}^{n-1} \Omega_2^{(i)}$  (cor escura) denotam os materiais 1 e 2, respectivamente. O compósito ocupa o intervalo  $\Omega = ]0, 1[$ , de comprimento  $|\Omega| = 1$ , em que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,$$

com fronteira  $\partial\Omega = \{0, 1\}$ . O conjunto dos pontos de descontinuidades de primeira espécie é definido por

$$\Gamma = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left( \partial\Omega_1^{(i)} \cap \partial\Omega_2^{(i)} \right)$$

ou ainda,  $\Gamma = \cup_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( i + \frac{c_1}{2} \right) \varepsilon, \left( i + c_2 + \frac{c_1}{2} \right) \varepsilon \right\}$ , onde  $n$  é o número de células básicas que compõem o material  $\Omega$  e os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  denotam as concentrações do material 1 e 2, respectivamente. Este compósito é obtido da replicação periódica de uma célula básica  $\mathcal{Y} \subset \Omega$  (elemento representativo do material) em que as fases da célula são ocupadas pelos subdomínios  $\Omega_r^{(0)}$ ,  $r = 1, 2$  onde  $\mathcal{Y} = \varepsilon Y = \Omega_1^{(0)} \cup \Omega_2^{(0)} \cup \varepsilon\Gamma_0$  e  $\varepsilon\Gamma_0 = \partial\Omega_1^{(0)} \cap \partial\Omega_2^{(0)} = \left\{ \frac{c_1}{2} \varepsilon, \left( c_2 + \frac{c_1}{2} \right) \varepsilon \right\}$ .

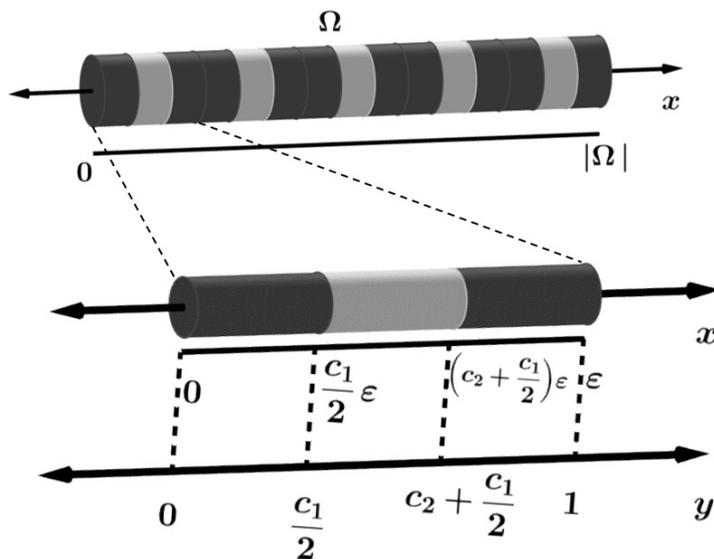


Figura 3.1: Compósito bifásico unidimensional de comprimento unitário e  $\mathcal{Y}$ -periódico para  $\varepsilon \leq 1$ .

Assim, considerando a equação (3.6) definida em  $x \in \Omega \setminus \Gamma$ ,  $t \in ]0, T[$ , para  $T > 0$ , com condições

$$\text{Contorno: } u^\varepsilon(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega = \{0, 1\}, \quad \forall t \in ]0, T[, \quad (3.8)$$

$$\text{Inicial: } u^\varepsilon(0, x) = g(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.9)$$

$$\text{Contato: } \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \quad (3.10)$$

$$\left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0. \quad (3.11)$$

se produz para cada  $\varepsilon$  fixo, um caso particular do problema motivador (1.16). Para este problema, o termo fonte/sumidouro  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  e o estado inicial  $g(x) \in L^2(\Omega)$  são informações dadas. Assume-se ainda, que o coeficiente  $a^\varepsilon$  é uma função  $\varepsilon$ -periódica em  $x$ , 1-periódica em  $y$  e estritamente limitada, ou seja, existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  tais que

$$0 < \alpha \leq a^\varepsilon(x) \leq \beta < \infty, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.12)$$

A partir dessas hipóteses, para  $\varepsilon$  fixo, tem-se a seguinte formulação fraca do problema original

$$\begin{cases} - \int_\Omega \int_0^T u^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \int_\Omega \int_0^T a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dt dx = \int_\Omega g(x) \phi(0, x) dx \\ + \int_\Omega \int_0^T f(t, x) \phi(t, x) dt dx, \end{cases} \quad (3.13)$$

para  $\phi \in D(]0, T[ \times \Omega)$  tal que  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\phi(T, x) = 0$ . A prova de existência e unicidade da solução para (3.13) é realizada em [35]. Logo, sabe-se que existe uma única solução  $u^\varepsilon \in \mathcal{W}_2 \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  para o problema (3.6), (3.8)-(3.12), além disso,  $u^\varepsilon$  satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_2} + \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c (\|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \quad (3.14)$$

em que  $c$  depende de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Omega$  e  $T$ . Como caso particular da Definição 28 tem-se

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

que é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}_2} = \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}.$$

Finalmente, o MHA consiste inicialmente em propor como solução de (3.6) a soma

$$u^{(2)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x, y) + \varepsilon u_1(t, x, y) + \varepsilon^2 u_2(t, x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

em que  $u_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , são funções limitadas e 1-periódicas em  $y$ . Ao substituir (3.15) na equação (3.6), fazendo uso da regra da cadeia (3.3), agrupando em potências de  $\varepsilon$  se obtém

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon) &= -\varepsilon^{-2} [\mathcal{L}_{yy}u_0] - \varepsilon^{-1} [\mathcal{L}_{xy}u_0 + \mathcal{L}_{yx}u_0 + \mathcal{L}_{yy}u_1] \\ &\quad - \varepsilon^0 [-\mathcal{T}u_0 + \mathcal{L}_{xx}u_0 + \mathcal{L}_{xy}u_1 + \mathcal{L}_{yx}u_1 + \mathcal{L}_{yy}u_2 + f(t, x)]. \end{aligned}$$

Para que  $u^{(2)}$  seja uma s.a.f., devem-se obter  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$  de tal maneira que seja satisfeita a seguinte sequência recorrente de equações:

$$\varepsilon^{-2} : -\mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon^{-1} : -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0 - \mathcal{L}_{yy}u_1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{T}u_0 - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{yy}u_2 - f(t, x) = 0, \quad (3.18)$$

as quais correspondem aos termos que não se anulam quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esta afirmação é justificada pelo conceito de s.a.f. visto anteriormente.

Note que a escolha de uma assintótica de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ ,  $m > 2$ , para esta ser uma s.a.f., não só devem anular-se os termos que não tendem a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , senão também, aqueles até a ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^{m-2})$  que resultam da substituição da assintótica na equação do problema original.

Considere agora que as variáveis  $x$  e  $y$  nas equações (3.16)-(3.18) são independentes. As equações (3.16)-(3.18) são complementadas pelas condições de contorno determinadas a partir da aplicação de (3.15) nas condições (3.8). Assim, as condições de contorno para (3.16)-(3.18), respectivamente, são:

$$u_0(t, 0, 0) = u_0\left(t, 1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.19)$$

$$u_1(t, 0, 0) = u_1\left(t, 1, \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.20)$$

$$u_2(t, 0, 0) = u_2\left(t, 1, \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.21)$$

Devido à 1-periodicidade de  $u_i(t, x, y)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , com relação à variável  $y$ , é correto dizer que  $u_i\left(t, 1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = u_i(t, 1, n) = u_i(t, 1, 0)$ , para  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $1 < n \in \mathbb{N}$ . A condição inicial é determinada a partir de (3.9), de onde se obtém apenas que

$$u_0(0, x, y) = g(x). \quad (3.22)$$

As condições iniciais  $u_i(0, x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , não estão definidas, assim como as de contorno (3.20) e (3.21). Avaliando (3.15) nas condições de contato (3.10) e (3.11), exigindo que os três termos de maior ordem sejam nulos, se deduz que

$$\begin{cases} \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

e

$$\begin{cases} \left[ \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

respectivamente. Essa exigência é necessária para que seja possível construir a s.a.f.. Será verificado que para obter o comportamento efetivo, as condições “naturais” (deduzidas diretamente das condições do problema original) são necessárias, contudo, para obter a aproximação assintótica, condições “artificiais” (deduzidas indiretamente ou por imposição) devem ser empregadas. Por exemplo, a primeira condição de (3.23), a primeira e segunda de (3.24) são naturais, as demais de (3.23)-(3.24) são artificiais.

A partir das equações (3.16)-(3.18) complementadas com as condições (3.19)-(3.21), (3.23)-(3.24), estabelece-se os seguintes problemas recorrentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_0, \text{ 1 - periódica em } y, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0, \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_1, \text{ 1 - periódica em } y, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yy}u_2 = \mathcal{T}u_0 - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - f(t, x), \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_2, \text{ 1 - periódica em } y. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Note que, para cada  $x$  e  $t$  fixos, os problemas (3.25)-(3.27) são da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yy}N = F_0(y) + \frac{dF_1}{dy}, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket N \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ N(y), \text{ 1 - periódica,} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

onde  $N \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}^1$ . A existência e a unicidade das funções  $u_k$ , soluções 1-periódicas em  $y$  de (3.25)-(3.27) são garantidas mediante o seguinte Lema:

---

<sup>1</sup>Por definição, funções  $u \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ , são funções pertencentes à  $H_{\#}^1(Y)$  que diferem por uma constante, com traços não nulos e com média integral nula  $\langle u \rangle = 0$ . A escolha da média nula tem um papel importante no desenvolvimento da teoria de homogenização em meios periódicos, uma vez que estabelece uma condição para unicidade das soluções locais (3.28). Além disso, para essas funções a desigualdade de Poincaré é satisfeita, conseqüentemente, a equivalência  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}$ , mesmo que o traço seja não nulo. Assim, os problemas relacionados estão bem definidos. Uma discussão mais profunda, pode ser encontrada em [35].

**Lema 1.** *Sejam  $F_0(y)$ ,  $F_1(y)$  e  $a(y)$  funções 1-periódicas, continuamente diferenciáveis em  $Y \setminus \Gamma_0$ , sendo  $a(y)$  positiva e limitada. Então, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica do problema (3.28) é que  $\langle F_0(y) \rangle \equiv \int_Y F_0(y) dy = 0$ , em que  $\langle \cdot \rangle$  denota a média integral. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , 1-periódica, onde  $\tilde{N}(y)$  é uma solução que  $\tilde{N}(0) = 0$  e  $C$  é uma constante arbitrária.*

*Demonstração: Necessidade:* Seja  $N(y)$  solução 1-periódica da equação

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) = F_0(y). \quad (3.29)$$

De aplicar a média integral em ambos os lados de (3.29), observando os pontos de descontinuidade  $\Gamma_0 = \left\{ y_1 \equiv \frac{c_1}{2}, y_2 \equiv c_2 + \frac{c_1}{2} \right\}$ , segue

$$\begin{aligned} & \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0}^{y=y_1^-} + \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=y_1^+}^{y=y_2^-} + \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=y_2^+}^{y=1} \\ & = \langle F_0(y) \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pela segunda condição de contato de (3.28) segue que

$$\left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \langle F_0(y) \rangle. \quad (3.31)$$

Logo, da 1-periodicidade de  $a(y)$ ,  $N(y)$  (consequentemente da derivada) e  $F_1(y)$ , segue que  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ .

**Suficiência:** Seja  $F_0$  tal que  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ . De integrar (3.29) de 0 a  $y$  teremos três situações:

*Primeira:* quando  $y \in [0, y_1[$

$$\left( a(s) \frac{dN}{ds} - F_1(s) \right) \Big|_{s=0}^{s=y} = \int_0^y F_0(s) ds,$$

resultando

$$a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) = \int_0^y F_0(s) ds + C_1,$$

onde

$$a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} + F_1(0) = C_1.$$

Disso, portanto, isolando  $N$  se obtém

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(s)} \left( \int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right) ds + C_2,$$

*Segunda:* quando  $y \in ]y_1, y_2[$

$$\left( a(s) \frac{dN}{ds} - F_1(s) \right) \Big|_{s=0}^{s=y_1^-} + \left( a(s) \frac{dN}{ds} - F_1(s) \right) \Big|_{s=y_1^+}^{s=y} = \int_0^y F_0(s) ds,$$

resultando pela segunda condição de contato (3.28) que

$$a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) = \int_0^y F_0(s) ds + C_1.$$

Portanto, isolando  $\frac{dN}{dy}$  segue

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F_0(s) ds + C_1 + F_1(y) \right). \quad (3.32)$$

Integrando (3.32) de 0 a  $y$ , considerando a primeira condição de contato (3.28)

$$N(y) - N(y_1^+) + N(y_1^-) - N(0) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + C_1 + F_1(t) \right) dt,$$

resulta que

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + C_1 + F_1(t) \right) dt + C_2.$$

*Terceira:* quando  $y \in ]y_2, 1]$  a verificação é análoga à *Segunda*, que resulta em

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + C_1 + F_1(t) \right) dt + C_2. \quad (3.33)$$

Sendo  $a(y)$ ,  $F_0$  e  $F_1$  funções limitadas e contínuas em  $Y \setminus \Gamma_0$ , a existência das integrais em (3.33) são garantidas. Logo, existe solução para o problema (3.28).

A fim de garantir que  $N(y)$  seja 1-periódica, impõe-se que  $N(y+1) - N(y) = 0$ .

Assim, para  $N(y+1)$  tem-se

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + C_1 + F_1(t) \right) dt + C_2. \quad (3.34)$$

Logo, da subtração das expressões (3.33) e (3.34) se obtém

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + C_1 + F_1(t) \right) dt.$$

Observe que  $\int_0^t F_0(s)ds$  é 1-periódica, assim como  $1/a(t)$  e  $C_1$ . Logo, para qualquer  $y \in Y \setminus \Gamma_0$  vale

$$\begin{aligned} \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s)ds + C_1 + F_1(t) \right) dt &= \left\langle \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F_0(s)ds \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{F_1(y)}{a(y)} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

de onde

$$C_1 = - \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F_0(s)ds + F_1(y) \right) \right\rangle. \quad (3.35)$$

Portanto, de (3.33) e (3.35) segue que  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , onde  $\tilde{N}(0) = 0$ ,  $C \equiv C_2$  e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s)ds - \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(y)} \int_0^t F_0(s)ds + F_1(y) \right\rangle + F_1(y) \right) dt. \quad (3.36)$$

■

*Nota 1.* A definição de contato perfeito ou de continuidade para  $u_1$  faz sentido graças a hipótese de periodicidade. Isto é, suponha  $N = u_1$  para  $x$  e  $t$  fixos em (3.28) e que  $\llbracket N \rrbracket_{c_1/2} = s_1$ ,  $\llbracket N \rrbracket_{c_2+c_1/2} = s_2$ . Ao resolver para  $\frac{dN}{dy}$  resulta (3.32) para  $y \in Y \setminus \Gamma_0$ . Pelo cálculo da média, segue da periodicidade

$$N(1) - s_1 - s_2 - N(0) = 0 \Rightarrow s_1 + s_2 = 0,$$

ou seja,  $s_1 = -s_2$  ou  $s_1 = s_2 = 0$ . O primeiro caso, ocorre devido a configuração da célula básica (material 1/material 2/material 1). Se a configuração fosse (material 1/material 2) resultaria que  $s_1 = 0$ . Logo, faz sentido assumir  $s_1 = s_2 = 0$  e portanto  $\llbracket N \rrbracket_{\Gamma_0} = 0$ .

Cada problema da sequência (3.25)-(3.27) fornece um termo da s.a.f.  $u^{(2)}$ . Do primeiro problema (3.25), segue a equação

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.37)$$

para a qual o Lema 1 garante a existência de solução  $u_0$  1-periódica em  $y$ . De integrar (3.37) se obtém

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = p(t, x), \quad (3.38)$$

onde  $p(t, x)$  é constante para todo  $y \in Y$  devido a segunda condição de contato (3.25). Pela positividade do coeficiente  $a(y)$ , pode-se isolar a derivada de  $u_0$ :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{p(t, x)}{a(y)}. \quad (3.39)$$

Para obter  $p(t, x)$ , aplica-se em (3.39) o operador da média  $\langle \cdot \rangle$ . Disso, pela periodicidade de  $u_0$  com respeito a  $y$  e sua condição de contato (3.25) nula segue de (3.39)

$$0 = p(t, x) \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle.$$

A partir disso, conclui-se que

$$p(t, x) = 0, \quad (3.40)$$

pois  $\langle a(y)^{-1} \rangle > 0$ . Substituindo (3.40) em (3.38) se obtém

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0,$$

e isto implica que  $u_0$  não depende da variável rápida  $y$ , ou seja,

$$u_0(t, x, y) = u_0(t, x). \quad (3.41)$$

Note que (3.41) também pode ser obtida diretamente do Lema 1. Com efeito, sejam  $x \in \Omega$ ,  $t \in ]0, T[$  fixos e  $N(y) = u_0(t, x, y)$ . Ao aplicar o Lema 1 em (3.37) segue que existe  $u_0(t, x, y)$  solução 1-periódica em  $y$ , única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $u_0(t, x, y) = \tilde{u}_0(t, x, y) + C(t, x)$ , com  $\tilde{u}_0(t, x, 0) = 0$ . Em particular, observe que  $\tilde{u}_0 \equiv 0$  é solução de (3.37). Logo,  $u_0(t, x, y) = C(t, x)$ , ou seja,  $u_0$  não depende de  $y$ .

Na sequência das resoluções dos problemas recorrentes, ao substituir (3.41) em (3.26), se obtém uma versão atualizada do problema, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{yx} u_0, \text{ para } x, t \text{ fixos} \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_1, \quad 1 - \text{periódica em } y, \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Note que a partir do problema (3.42) se obtém uma solução  $u_1$  em termos de  $u_0$ , mas deve-se garantir que esta solução seja 1-periódica com respeito a variável  $y$  e, para isso, o Lema 1 deve ser aplicado.

Relacionando os elementos do Lema 1 à equação de (3.42) tem-se que  $N = u_1$ ,  $F_0(y) = 0$  e  $F_1 = -a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ . Disso,  $\langle F_0 \rangle = 0$  e portanto, existe a solução  $u_1$  de (3.42) 1-periódica com respeito à variável  $y$ .

Pela forma de  $F_1$  e da equação do problema (3.42), pode-se aplicar o método de separação de variáveis. Supondo assim a solução  $u_1$  da forma separável  $N_1(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ . Substituindo essa forma separável na equação de (3.42) resulta que

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \quad (3.43)$$

Levando em consideração que  $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$ , (3.43) será satisfeita se

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, \quad (3.44)$$

sendo esta a chamada equação do problema local, cuja solução 1-periódica existe e é garantida pelo Lema 1 com  $F_0(y) = 0$ ,  $F_1 = -a(y)$ , e reescrita como  $\mathcal{L}_{yy}N_1 = -\frac{da}{dy}$ . Assim, para obter  $u_1$  é necessário encontrar um  $N_1(y)$  1-periódico que satisfaça (3.44). A equação (3.44) complementada com as condições desacopladas do problema (3.42) após avaliar a forma separável  $N_1(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ , estabelece-se o seguinte problema local

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket N_1 \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( 1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ N_1, \text{ 1 - periódica em } y, \end{cases} \quad (3.45)$$

Integrando a equação do problema (3.45), com respeito a variável  $y$ , resulta

$$a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) = C_1, \quad (3.46)$$

válida  $\forall y \in Y$  devido a condição de continuidade para o fluxo em (3.45). Isolando a derivada de  $N_1(y)$  e levando em consideração que  $a(y) > 0$ , tem-se

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{C_1}{a(y)} - 1. \quad (3.47)$$

Pelo cálculo da média integral em ambos os lados de (3.47), considerando as hipóteses de continuidade para  $N_1$  e sua periodicidade, obtém-se o valor de  $C_1$ , ou seja,

$$C_1 = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{a}. \quad (3.48)$$

O termo  $\hat{a}$  denota o chamado coeficiente efetivo, isto é, a propriedade macroscópica do meio homogêneo equivalente. Da substituição de (3.48) em (3.47) e integrando ambos os lados da mesma se obtém

$$N_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds + N_1(0) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds + \tilde{N}_1(0) + C = \tilde{N}_1(y) + C,$$

onde

$$\tilde{N}_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.49)$$

A constante arbitrária  $C$  de  $N_1(y) = \tilde{N}_1(y) + C$  pode ser determinada pela  $\langle \cdot \rangle = 0$ , uma vez que  $N_1 \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ , assim,  $C = -\langle \tilde{N}_1 \rangle$ . Portanto, a solução  $u_1$  é determinada como

$$u_1(t, x, y) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \left( \tilde{N}_1(y) - \langle \tilde{N}_1 \rangle \right). \quad (3.50)$$

Por fim, se obtém o último termo  $u_2$  da s.a.f. proposta. Atualizando a equação do problema (3.27) substituindo (3.41) e (3.50), considerando (3.46) e (3.48), resulta que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(t, x). \quad (3.51)$$

Aplicando-se o Lema 1 na equação (3.51) se garante a existência da solução  $u_2$ , 1-periódica com relação a  $y$ . De fato, relacionando os elementos de (3.51) ao Lema 1, tem-se  $N = u_2$ ,  $F_0(y) = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(t, x)$  e  $F_1(y) = -a(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ , concluí-se que para  $u_2$  ser 1-periódica com relação a variável  $y$ , a seguinte equação deve ser satisfeita

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(t, x). \quad (3.52)$$

A equação é (3.52) é chamada de equação homogeneizada e a partir dela que se determina o primeiro termo  $u_0$  da assintótica (3.15), cuja obtenção ainda não tinha sido definida explicitamente, e conseqüentemente  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  para  $u_1$ . Assim, a equação (3.52), complementada pelas condições (3.19) e (3.22), considerando (3.41) se estabelece o chamado problema homogeneizado

$$\mathcal{P}_H : \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega, \\ u_0(t, 0) = 0, \quad u_0(t, 1) = 0, & t \in ]0, T[, \\ u_0(0, x) = g(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.53)$$

A solução do problema homogeneizado descreve o comportamento do meio homogêneo equivalente ao micro-heterogêneo modelado, ou seja, problema original. O coeficiente efetivo é a propriedade efetiva do meio equivalente e nele contém as informações físicas (propriedades) e geométricas (concentrações de fase) do meio. Além disso, a partir de  $u_0$  se determinam os demais coeficientes da s.a.f., os quais detêm informações da heterogeneidade microscópica do meio, por exemplo,  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  de  $u_1$  e  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$  para  $u_2$ , como será apresentado.

Substituindo (3.52) em (3.51), se obtém

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = - \frac{d}{dy} \left( a(y) N_1(y) \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad (3.54)$$

e portanto, o problema (3.27) atualizado por (3.54) fica

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \right] = 0, & y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_2, \quad 1 - \text{periódica em } y. \end{cases} \quad (3.55)$$

A equação de (3.55) é resolvida da mesma maneira que (3.44). Primeiramente, propõe-se que a solução  $u_2$  seja da forma separável  $N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ . De substituí-la na equação e condições de

(3.55) se desacopla um segundo problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a(y) \left( \frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] = 0, & y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket N_2 \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ N_2, \quad 1 - \text{periódica em } y. \end{cases}$$

cuja solução 1-periódica é garantida pelo Lema 1. Realizando os mesmos passos feitos em (3.45)-(3.49), se obtém a constante

$$C_1 = \langle N_1(y) \rangle \hat{a},$$

obtida do cálculo da média integral  $\langle \cdot \rangle$ . Assim,  $\tilde{N}_2$  é dada por

$$\tilde{N}_2(y) = \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds \quad (3.56)$$

e, portanto,  $u_2$  será da forma

$$u_2(t, x, y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \left( \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds + C \right),$$

onde  $C = -\langle \tilde{N}_2 \rangle$ . Note que (3.49) e (3.56) podem ser obtidos diretamente de (3.65) identificando apropriadamente os termos  $F_0$  e  $F_1$  do Lema 1.

O formalismo do MHA para meios com propriedades continuamente diferenciáveis é análogo. Contudo, usa-se o seguinte Lema 2 para garantir a existência e unicidade de soluções 1-periódicas dos problemas recorrentes da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) = F(y), & y \in Y, \\ N, \quad 1 - \text{periódica em } y. \end{cases} \quad (3.57)$$

que desacoplam.

**Lema 2.** *Sejam  $F(y)$  e  $a(y)$  funções diferenciáveis e 1-periódicas, sendo  $a(y)$  positiva e limitada. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica  $N$  (3.57) é que  $\langle F(y) \rangle = 0$ . Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , sendo  $\tilde{N}$  uma solução 1-periódica de (3.57) tal que  $\tilde{N}(0) = 0$ , e  $C$  é uma constante arbitrária [16].*

*Demonstração: Necessidade:* Seja  $N(y)$  solução 1-periódica da equação

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) = F(y). \quad (3.58)$$

De aplicar a média integral em ambos os lados de (3.58), ou seja,

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) \right\rangle = \langle F(y) \rangle, \quad (3.59)$$

tem-se, do lado esquerdo, levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$  e  $N(y)$ , que

$$\left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = a(0) \left( \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \quad (3.60)$$

Logo, segue de (3.59) e (3.60) que  $\langle F(y) \rangle = 0$ .

**Suficiência:** Seja  $F$  tal que  $\langle F(y) \rangle = 0$ . De integrar (3.58), ou seja,

$$\int_0^y \frac{d}{ds} \left( a(s) \frac{dN}{ds} \right) ds = \int_0^y F(s) ds,$$

se obtém

$$a(y) \frac{dN}{dy} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = \int_0^y F(s) ds,$$

onde

$$a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = C_1$$

é uma constante aditiva. Logo,

$$a(y) \frac{dN}{dy} = \int_0^y F(s) ds + C_1 \Rightarrow \frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F(s) ds + C_1 \right). \quad (3.61)$$

Assim, de integrar a segunda igualdade em (3.61) tem-se que

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.62)$$

A fim de se construir  $N(y)$  1-periódica, impõe-se que  $N(y+1) - N(y) = 0$ . Assim, para  $N(y+1)$  tem-se

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.63)$$

Logo, da subtração das expressões (3.63) e (3.62) se obtém

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt.$$

Observe que  $\int_0^t F(s)ds$  é 1-periódica, assim como  $1/a(t)$  e  $C_1$ . Logo,

$$\int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds + C_1 \right) dt = \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle = 0,$$

de onde

$$C_1 = - \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(y)} \int_0^y F(s)ds \right\rangle. \quad (3.64)$$

Portanto, de (3.62) e (3.64) segue que  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , onde  $C \equiv C_2$  e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds - \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(y)} \int_0^y F(s)ds \right\rangle \right) dt. \quad (3.65)$$

■

Essencialmente a construção de uma s.a.f. (linear) é realizada dessa maneira vista até aqui. A construção de outras soluções assintóticas  $u^{(m)}$ , para  $m > 2$ , seriam feitas de modo similares, porém, agora com  $m + 1$  problemas recorrentes para serem resolvidos. A s.a.f. para  $m = 2$  é uma boa aproximação da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original. De fato, a seguir, pela relação de proximidade, verifica-se formalmente que a assintótica de primeira ordem  $u^{(1)}$  e a solução homogeneizada  $u_0$  estão  $\varepsilon$ -próximas da solução exata  $u^\varepsilon$ . Além disso, este resultado justifica matematicamente o processo de homogeneização realizado, ou seja, que  $u^{(\infty)}$  é uma s.a.f. e uma e.a. da solução exata  $u^\varepsilon$ . Essa proximidade mostra ainda, que o meio homogêneo obtido no processo é equivalente ao heterogêneo inicial. Ao expressar a solução do problema original da forma de uma série infinita  $u^{(\infty)}$ , definida em  $]0, T[ \times \Omega \times \mathbb{R}_+^*$ , nota-se que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  a solução  $u^{(\infty)} \rightarrow u_0$ , ou seja, a s.a.f.  $u^{(\infty)}$  do problema original tende para a solução  $u_0$  do problema homogeneizado. Neste caso, é possível estabelecer a seguinte relação de proximidade entre a solução  $u^\varepsilon$  do problema original e a solução  $u_0$  do problema homogeneizado:

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.66)$$

Para mostrar que (3.66) é válida, é utilizada a estimativa (3.14) obtida no processo de existência e unicidade. Para isso, considera-se uma e.a. da solução de (3.6) da forma

$$u^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon u_1(t, x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

para estimar

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Estima-se ainda

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

e assim se deduz pela desigualdade de Minkowski (2.7) a relação (3.66).

Contudo, as estimativas não podem ser deduzidas na norma  $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$  pois, em geral,  $u_1$  não se anula no contorno e, conseqüentemente,  $u^{(1)}$ . Precisamente,  $u^{(1)}$  é de ordem  $\varepsilon$  no contorno  $\partial\Omega$ . Em [38], para o caso estático multidimensional, a estimativa (3.66) é obtida. Para isso, se introduziu uma função de corte  $\kappa(x)$ , infinitamente diferenciável, com suporte contido no interior da  $\varepsilon$ -vizinhança do contorno de  $\Omega$ , em que  $\kappa|_{\partial\Omega} = 1$ ,  $|\kappa| \leq 1$ ,  $\left\| \varepsilon \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c$ , onde  $c$  é uma constante independente de  $\varepsilon$ . Assim, multiplicando  $\varepsilon u_1$  por  $\kappa$ , de modo que  $\tilde{u}^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u^{(1)}(t, x, \varepsilon) - \varepsilon u_1(t, x, y)\kappa(x)$  cumpra as condições de contorno, se estimou

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^{(1)}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Analogamente,

$$\|\tilde{u}^{(1)} - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

e portanto (3.66).

Para a prova de (3.66) verificou-se acima, que basta uma correção nas condições de contorno da assintótica de primeira ordem  $u^{(1)}$ . Porém, essa assintótica também apresenta um erro de ordem  $\varepsilon$  no valor inicial. E como se deseja, além de provar a proximidade (3.66), obter uma boa aproximação para a solução exata, propõe-se a seguir uma abordagem que corrige ambas condições de contorno e inicial dessa assintótica de primeira ordem.

### 3.1.2 Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo

Como mencionado acima, a solução assintótica de primeira ordem  $u^{(1)}$ , em geral, não satisfaz exatamente as condições de contorno e inicial da solução exata  $u^\varepsilon$ . Especifica-

mente, há um erro de ordem  $\varepsilon$  no contorno e valor inicial de  $u^{(1)}$ , ou seja,

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|_{t=0} \neq 0 \Rightarrow u_1(0, x, y) \neq 0$$

e

$$\begin{cases} u_1(t, 0, 0) = \left( \tilde{N}_1(0) - \langle \tilde{N}_1 \rangle \right) \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|_{x=0} \neq 0, \\ u_1(t, \varepsilon, 1) = \left( \tilde{N}_1(1) - \langle \tilde{N}_1 \rangle \right) \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|_{x=\varepsilon} \neq 0. \end{cases}$$

Teoricamente, o uso da função de corte  $\kappa$  utilizada em [38] para obter a proximidade é útil, porém, do ponto de vista prático não. A questão é: que função poderia ser? [67] apresenta uma abordagem que inclui um corretor de ordem  $\varepsilon$  na prova da proximidade entre a soluções exata e assintótica, uma vez que a diferença não satisfazia a condição homogênea no contorno. É um processo similar ao que realizado anteriormente, com a função corte, porém este corretor é solução de um problema determinado para o processo. Mais precisamente, inclui-se o termo  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i^{c,\varepsilon}(x)$ <sup>1</sup> na série assintótica (3.2), onde  $u_i^{c,\varepsilon}$  é solução do problema

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_i^{c,\varepsilon}}{\partial x} \right) = 0, \\ u_i^c|_{\partial\Omega} = -u_i \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \Big|_{\partial\Omega}. \end{cases}$$

Portanto os termos da série de ordem maior ou igual a  $\varepsilon$  irão se anular no contorno. Observe que  $u_i^{c,\varepsilon}(x)$  depende de  $\varepsilon$ , mas não é uma função de  $(x, x/\varepsilon)$ , periódica com relação ao segundo argumento.

Outro ponto importante é a definição da condição inicial para o termo de ordem  $\varepsilon$  da e.a.  $u^{(1)}$ . Teoricamente, a imprecisão desta condição não impossibilita a obtenção dos resultados de proximidade desejados. Porém, quando construída a e.a., para ter precisão na condição inicial, é necessária uma correção em  $u_1$ . [8] apresenta uma abordagem que corrige o termo  $u^{(1)}$  através de uma função em duas escalas no tempo  $\varepsilon u_1^{et}(t, \tau, x, y)$ <sup>2</sup>,  $\tau = \frac{t}{\xi}$ , para  $\xi = \varepsilon^2$ , chamando de correção dos *curtos efeitos do tempo*. A função  $u_1^{et}$  pode ser definida de forma separável, assim como para  $u_1 = N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ . De fato, assumindo

$$u_1^{et}(t, \tau, x, y) = N_1^*(y, \tau) \frac{\partial u_0}{\partial x},$$

<sup>1</sup>sobrescrito  $c$  indica do termo que corrige o contorno

<sup>2</sup>sobrescrito  $et$  indica do termo que corrige o curto efeito do tempo

se deduz que  $N_1^*$  é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \right) = 0, \\ N_1^*(y, 0) = -N_1(y), \\ N_1^*, \quad 1 - \text{periódica.} \end{cases}$$

Naturalmente, isso implica que  $u_1 + u_1^{e^t} = 0$  em  $t = 0$ , logo  $\tau = 0$ , como desejado.

O objetivo aqui é usar as duas abordagens para obter um único corretor com ambas finalidades, as correções do contorno e dos curtos efeitos do tempo. E ainda, estender para o caso em que os coeficientes são descontínuos. Para isso, se define a e.a. da solução exata  $u^\varepsilon$  como

$$\begin{aligned} u_c^{(\infty)}(t, x, \varepsilon) = & u_0(t, x) + \varepsilon u_1 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1^* \left( t, x, \frac{t}{\xi}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ & + \varepsilon^2 u_2^* \left( t, x, \frac{t}{\xi}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \dots, \quad \xi = \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde  $u_i^*$ ,  $i \geq 1$  são funções infinitamente diferenciáveis,  $\varepsilon$ -periódicas na variável  $x$  e 1-periódicas em  $y$ , e ainda, soluções da equação

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.68)$$

Substituindo a série (3.67) truncada até o termo de  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  na equação (3.6) obtém-se a seguinte seqüência recorrente de equações

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} : & -\mathcal{L}_{yx}u_0 - \mathcal{L}_{yy}u_1 - \mathcal{L}_{yy}u_1^* + \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} = 0, \\ \varepsilon^0 : & \frac{\partial u_0}{\partial t} - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{xy}u_1^* - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1^* + \frac{\partial u_2^*}{\partial \tau} - f - \mathcal{L}_{yy}u_2 - \mathcal{L}_{yy}u_2^* = 0, \\ \varepsilon^1 : & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1^*}{\partial t} - \mathcal{L}_{xx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_1^* - \mathcal{L}_{xy}u_2 - \mathcal{L}_{xy}u_2^* - \mathcal{L}_{yx}u_2 - \mathcal{L}_{yx}u_2^* = 0. \end{aligned}$$

Do primeiro problema ( $\varepsilon^{-1}$ ) conclui-se que  $u_1^*$  deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - \mathcal{L}_{yy}u_1^* = 0, \quad \text{em } ]0, T[ \times \Omega \setminus \Gamma \times Y \setminus \Gamma_0 \times ]0, T[,$$

e que similarmente à  $u_1$ , ao propor

$$u_1^*(t, \tau, x, y) = N_1^*(\tau, y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

se desacopla uma equação local

$$\frac{\partial N_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \right) = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0.$$

Para deduzir as condições que  $N_1^*$  deverá satisfazer, considere

$$u_1(t, x, y) + u_1^*(t, \tau, x, y) = (N_1(y) + N_1^*(\tau, y)) \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

O objetivo é que  $u_1^* + u_1$  se anule no contorno  $\partial\Omega$  e no tempo inicial  $t = 0$ . Para isso, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned} u_1^*|_{\partial\Omega} = -u_1|_{\partial\Omega} &\Rightarrow N_1^*(\tau, 0) = N_1^*(\tau, 1) = \langle \tilde{N}_1 \rangle, \\ u_1^*(0, x, 0, y) = -u_1(0, x, y) &\Rightarrow N_1^*(0, y) = -N_1(y), \end{aligned}$$

- Condições de contato

$$\begin{aligned} \llbracket u_1^* + u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0 &\Rightarrow \llbracket N_1^* \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0 &\Rightarrow \left[ \left[ a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned}$$

Logo o problema que fornece a correção  $u_1^*$  é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \right) = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket N_1^* \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ N_1^*(\tau, 0) = N_1^*(\tau, 1) = \langle \tilde{N}_1 \rangle, \quad \tau \in ]0, T[, \\ N_1^*(0, y) = -N_1(y), \quad y \in Y \setminus \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (3.69)$$

Caso fosse de interesse obter  $u_2^*$ , deve-se propôr

$$u_2^*(t, \tau, x, y) = N_2^*(\tau, y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.$$

Da segunda equação recorrente ( $\varepsilon^0$ ), se obtém que

$$-L_{xy}u_1^* - L_{yx}u_1^* + \frac{\partial u_2^*}{\partial \tau} - L_{yy}u_2^* = 0, \quad (3.70)$$

pois o restante dos termos é zero pelo desenvolvimento do MHA. A partir da equação (3.70), condições de contorno e inicial nulas para  $u_2^* + u_2$  e condições de contato perfeito, se deduz o seguinte problema para  $N_2^*$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_2^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial N_2^*}{\partial y} \right) = a(y) \frac{\partial N_1^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (a(y) N_1^*(\tau, y)), \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket N_2^* \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \\ \left[ \left[ a(y) \frac{\partial N_2^*}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \\ N_2^*(\tau, 0) = N_2^*(\tau, 1) = \langle \tilde{N}_2 \rangle, \quad \tau \in ]0, T[, \\ N_2^*(0, y) = -N_2(y), \quad y \in Y \setminus \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Finalmente, se construiu uma aproximação da solução exata através da assintótica

$$u_c^{(2)} = u_0 + \varepsilon(u_1^* + u_1) + \varepsilon^2(u_2^* + u_2),$$

que satisfaz todas as condições do problemas original. Esse processo de correção, que foi realizado, é feito de forma análoga para o caso com coeficientes continuamente diferenciáveis. Observe que corrigir uma expansão de maior ordem se tornaria mais complexo do ponto de vista numérico, sendo assim, será dedicada atenção na correção da aproximação ou s.a.f. de primeira ordem. Para atacar analiticamente ou numericamente os problemas, para obter  $u_c^{(1)}$ , devem-se resolver (3.45), (3.48), (3.53) e (3.69), respectivamente. Na subseção seguinte, será demonstrado que essa assintótica de primeira ordem corrigida  $u_c^{(1)}$  é uma boa aproximação da exata.

### 3.1.3 Proximidade

Para estimar  $\|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$  consideram-se dois problemas: o problema original (3.6), (3.8)-(3.11) e sobre o mesmo problema supondo  $u_c^{(1)}$  como solução. Assim,

reescrevendo este problema na forma operacional, configura-se o seguinte problema  $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon = f(t, x), t \in ]0, T[, x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(t, 0) = u^\varepsilon(t, 1) = 0, t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

e da mesma maneira para  $u_c^{(1)}$ , o problema  $\mathcal{P}_2$  como

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \mathcal{M}^\varepsilon u_c^{(1)} = f(t, x) - F(t, x, \varepsilon), t \in ]0, T[, x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u_c^{(1)} \rrbracket_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ u_c^{(1)}(t, 0, \varepsilon) = u_c^{(1)}(t, 1, \varepsilon) = 0, t \in ]0, T[, \\ u_c^{(1)}(0, x, \varepsilon) = g(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

em que  $F(t, x, \varepsilon)$  é a função que descreve o erro incorrido ao considerar  $u_c^{(1)}$  como solução de (3.6), (3.8)-(3.11).

Subtraindo  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathcal{P}_1$ , obtém-se o problema  $\mathcal{P}_3$ :

$$\mathcal{P}_3 : \begin{cases} \mathcal{M}^\varepsilon (u^\varepsilon - u_c^{(1)}) = F(t, x, \varepsilon), t \in ]0, T[, x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon - u_c^{(1)} \rrbracket_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{\partial (u^\varepsilon - u_c^{(1)})}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0, t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(t, 0) - u_c^{(1)}(t, 0, \varepsilon) = 0, t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(t, 1) - u_c^{(1)}(t, 1, \varepsilon) = 0, t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(0, x) - u_c^{(1)}(0, x, \varepsilon) = 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.71)$$

Aplicando a estimativa (3.14) ao problema (3.71), obtém-se:

$$\|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq c (\|F\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}) \quad (3.72)$$

sendo  $c > 0$  uma constante, independente do parâmetro  $\varepsilon$ . Logo, para estimar  $u^\varepsilon - u_c^{(1)}$  é preciso obter uma expressão para  $F(t, x, \varepsilon)$  a partir de  $\mathcal{M}^\varepsilon u_c^{(1)} - f(t, x)$  considerando (3.68),

de onde resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\varepsilon u_c^{(1)} - f &= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_0 + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) - f. \end{aligned}$$

Considerando  $\hat{a} = a(y) + a(y) \frac{dN_1}{dy}$  de (3.49), se obtém após aplicação da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\varepsilon u_c^{(1)} - f(t, x) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \\ &\quad - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(t, x). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por outro lado, considere a equação (3.18). Ao admitir inicialmente que a solução assintótica é  $u_c^{(1)}$ , é evidente que  $u_2 + u_2^*$  será nulo. Logo, de (3.18)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - f(t, x), \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - f(t, x), \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - a(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - a(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(t, x), \\ &= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Substituindo (3.52) e (3.74) em (3.73):

$$\mathcal{M}^\varepsilon u_c^{(1)} - f(t, x) = \varepsilon N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},$$

ou seja, o termo de erro  $F$  é definido por

$$F(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} + \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}.$$

Lembrando de (2.10), segue que

$$\|F\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega} \int_0^T \left[ \left( a(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 \right] dt dx. \quad (3.75)$$

Pela regularidade<sup>2</sup> da solução do problema homogeneizado (3.53) tem-se que  $u_0(t, \cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ , para todo  $t \in [0, T]$  e que  $u_0(\cdot, x) \in C^1([0, T])$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , logo pelo Teorema de Weierstrass [57] existem constantes  $A_1, A_2 > 0$  tais que

$$\left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right| \leq A_1 \text{ e } \left| \frac{\partial u_0}{\partial t} \right| \leq A_2.$$

Adotando  $A = \max\{A_1, A_2\}$  obtém-se

$$\begin{aligned} \left( a(y)N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 &\leq A^2 (|a(y)N_1(y)|^2 + |N_1(y)|^2) \\ &= A^2 N_1^2(y) (a(y) + 1)^2. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Assim, avaliando (3.76) em (3.75) resulta que

$$\|F\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq \varepsilon^2 A^2 T \int_{\Omega} N_1^2(y) (a(y) + 1)^2 dx. \quad (3.77)$$

Agora, pela regularidade da solução do problema local (3.45) e a hipótese (3.12), tem-se  $N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in C([0, \varepsilon^{-1}])$ , e portanto, novamente pelo Teorema de Weierstrass, que existem  $B_1, B_2 > 0$  tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ , tem-se

$$\left| N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq B_1, \quad \left| a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq B_2 = \beta.$$

Considerando  $B = \max\{B_1, B_2, 1\}$ , segue de (3.77) que

$$\|F\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \varepsilon 2A \sqrt{T|\Omega|} B^2. \quad (3.78)$$

Logo de (3.72) e (3.78) segue que

$$\|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.79)$$

ou seja,  $u_c^{(1)}$  é uma solução assintótica formal, uma expansão assintótica da solução exata, e ainda, está  $\varepsilon$ -próxima dela. De modo análogo é possível deduzir que a solução assintótica de primeira ordem corrigida está  $\varepsilon$ -próxima da solução homogeneizada, isto é,

$$\|u_c^{(1)} - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.80)$$

---

<sup>2</sup>Regularidade: grau de diferenciabilidade da função.

Assim, de (3.79) e (3.80), com o uso da desigualdade de Minkowski (2.7), segue que

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &= \|u^\varepsilon - u_c^{(1)} + u_c^{(1)} - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_c^{(1)} - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Com este resultado, se justifica o processo de homogeneização realizado através do MHA, isto é, o meio homogenêneo é equivalente ao micro-heterogêneo e o problema homogeneizado obtido descreve de fato o comportamento efetivo desse meio. Além disso, mostra que a solução homogeneizada também é uma boa aproximação da solução exata. Para fins de desenvolvimento teórico, o erro na condição inicial em  $u^{(1)}$  não originaria nenhuma dificuldade na dedução da proximidade.

Na próxima seção é apresentada uma segunda técnica de homogeneização que contempla, tanto o desenvolvimento da homogeneização, isto é, obtenção do comportamento efetivo ou limite, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , quanto a justificativa matemática do método, ou como declarado aqui, a proximidade das soluções exata e homogeneizada. No contexto do seguinte método, chamado de Convergência em Duas Escalas, a justificativa matemática do processo de homogeneização denomina-se *resultado de corretor* [19].

### 3.2 Método de Convergência em Duas Escalas - MCDE

Em 1989, Nguetseng [71] apresenta um novo conceito relacionado à teoria de homogeneização, sendo ele o pilar para o chamado Método de Convergência em Duas Escalas desenvolvido por Allaire [3] em 1992. Para ser mais exato, Nguetseng desenvolveu o estudo da convergência, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de funcionais do tipo

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \psi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}$$

associado a uma função dada  $u^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$  com suporte em um conjunto compacto fixo, onde  $\psi$  são funções teste contínuas em  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  e periódica em  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ . Allaire, então, seguindo as ideias de Nguetseng, ainda para funções  $u^\varepsilon$  limitadas em  $L^2$ , define convergência em duas escalas, estabelece um teorema de tipo corretor [19], estende a classe de funções teste admissíveis, e ainda, prova que o método é aplicável a problemas de homogeneização linear e não linear. Allaire ainda, estende a teoria para problemas envolvendo múltiplas escalas em [5]. No mesmo ano, Holmbom [49] estende o conceito de convergência em duas escalas, agora para  $u^\varepsilon$  limitadas em  $L^p$  e realiza uma generalização adicional do MCDE que é baseado em classes de funções teste não periódicas. Porém, neste trabalho, usaremos a definição original de convergência em duas escalas, baseada nas funções teste periódicas. A definição original segue para  $\Omega \subset \mathbb{R}$ :

**Definição 31.** *Uma sequência  $u^\varepsilon \in L^p(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $p \in ]1, \infty]$  é dita convergente em duas escalas para um limite  $u_0(t, x, y) \in L^p(]0, T[ \times \Omega \times Y)$  se*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u^\varepsilon(t, x) \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \int_Y u_0(t, x, y) \phi(t, x, y) dy dx dt \quad (3.81)$$

para qualquer  $\phi(t, x, y) \in D(]0, T[ \times \Omega; C_\#^\infty(Y))$ . Ocasionalmente, escreveremos (3.81) como

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2e} u_0 \in L^p(]0, T[ \times \Omega \times Y).$$

*Observação 3.* A seguir, o espaço de funções teste que nos permitem obter o limite em duas escalas (3.81) será melhor caracterizado.

Em suma, o objetivo principal do MCDE é passar o limite, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , na formulação variacional do problema (3.6), (3.8)-(3.11), isto é, o limite de

$$\int_0^T \int_\Omega \left[ -u^\varepsilon(t, x) \frac{\partial \phi}{\partial t} + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - f(t, x) \phi(t, x) \right] dx dt - \int_\Omega g(x) \phi(0, x) dx = 0, \quad (3.82)$$

para  $\phi(t, x) \in D(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\phi(T, x) = 0$ . Contudo, para isso, o ponto inicial é garantir a existência de  $u^\varepsilon$  limitada, para a qual  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  existe e é limitada, que resolve (3.82).

Isso permite a aplicação do seguinte teorema de compacidade:

**Teorema 20.** *Assuma que a sequência  $\{u^\varepsilon(t, x)\}$  é limitada em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $]1, \infty]$  e que  $B$  é um subespaço separável de  $L^q(]0, T[ \times \Omega \times Y)$  tal que, para qualquer  $\phi(t, x, y) \in B$ ,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^q(]0, T[ \times \Omega)} = \|\phi(t, x, y)\|_{L^q(]0, T[ \times \Omega \times Y)} \quad (3.83)$$

e

$$\left\| \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^q([0, T] \times \Omega)} \leq C \|\phi(t, x, y)\|_B. \quad (3.84)$$

Então, pode-se extrair uma subsequência convergente para  $u_0(t, x, y) \in L^p([0, T] \times \Omega \times Y)$  que satisfaz (3.81) para todo  $\phi \in B$ .

*Demonstração.* [50]. ■

**Definição 32.** Diz-se que  $\phi \in L^q([0, T] \times \Omega \times Y)$ ,  $q \in [1, \infty[$ , é uma função teste admissível se ela cumpre com (3.83) e (3.84).

*Observação 4.* Exemplos importantes de funções teste admissíveis são  $L^q([0, T] \times \Omega; C_{\#}(Y))$ ,  $L^q_{\#}(Y, C([0, T] \times \bar{\Omega}))$  e  $C([0, T] \times \bar{\Omega}; C_{\#}(Y))$ .

### 3.2.1 Formalismo matemático do MCDE

Considere o problema original (3.6), (3.8)-(3.11), com as mesmas hipóteses sobre a fonte  $f$ , condição inicial  $g$  e o coeficiente  $a^\varepsilon$ . Sabe-se, pela estimativa (3.14), que o problema (3.13) admite uma única solução  $u^\varepsilon$  no espaço  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e satisfaz a estimativa

$$\|u^\varepsilon(t, x)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq c (\|g(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t, x)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}), \quad (3.85)$$

para  $c > 0$  independente de  $\varepsilon$ . Logo segue da norma (3.85) que

$$\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq c (\|g(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t, x)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}).$$

A partir dessas estimativas, para  $u^\varepsilon$  e  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  em  $L^2([0, T] \times \Omega)$  e do Teorema 20, existe uma subsequência  $u^{\varepsilon_k}$  convergente em duas escalas para um certo  $u_0 \in L^2([0, T] \times \Omega \times Y)$ , assim como existe uma subsequência de  $\frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x}$  convergente em duas escalas para um certo  $\gamma \in L^2([0, T] \times \Omega \times Y)$ . Isto é, pela Definição 31, para toda função  $\phi(t, x, y) \in D([0, T] \times \Omega; C_{\#}^\infty(Y))$  tem-se

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \phi(t, x, y) dy dx dt \quad (3.86)$$

e

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \gamma(t, x, y) \phi(t, x, y) dy dx dt \quad (3.87)$$

A equação (3.86), a princípio, não fornece informações, ao contrário da equação (3.87). Observe que ao integrar por partes em  $x$  o lado esquerdo de (3.87) se obtém

$$\varepsilon_k \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \left( \varepsilon_k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dt. \quad (3.88)$$

Assim, quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , (3.88) converge para

$$0 = - \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} dy dx dt. \quad (3.89)$$

Ao integrar por partes (3.89) com relação a  $y$  se obtém

$$0 = \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \frac{\partial u_0}{\partial y} \phi(t, x, y) dy dx dt, \quad \forall \phi \in D(]0, T[ \times \Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)).$$

Supondo que  $u_0 \neq 0$ , tem-se que  $\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$ . Perante isto, conclui-se que  $u_0(t, x, y) \equiv u_0(t, x)$ . Agora, para  $u_0$  independente de  $y$ , (3.89) é zero pela periodicidade de  $\phi$ . Da equação (3.87) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt &= - \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt \\ &\text{pela integral por partes} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \gamma(t, x, y) \phi(t, x, y) dy dx dt, \quad (3.90) \\ &\text{pelo limite em duas escalas} \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x) \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x, y) dy dx dt, \\ &\text{pelo limite em duas escalas da primeira linha} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \frac{\partial u_0}{\partial x} \phi(t, x, y) dy dx dt, \quad (3.91) \\ &\text{pela integral por partes da terceira linha.} \end{aligned}$$

Portanto, pela igualdade de (3.90) e (3.91) segue

$$\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \gamma(t, x, y) - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \phi(t, x, y) dy dx dt = 0. \quad (3.92)$$

A aplicação do Lema 3 [50] em (3.92) para  $N = 1$ ,  $p = 2$  e  $F(y) = \gamma(t, x, y) - \frac{\partial u_0}{\partial x}$  implica que existe uma única função  $u_1 \in L^2(]0, T[ \times \Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ , tal que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \gamma(t, x, y) - \frac{\partial u_0}{\partial x} \Rightarrow \gamma(t, x, y) = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Logo, obtém-se o seguinte limite em duas escalas para a subsequência da derivada

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \phi(t, x, y) dy dx dt.$$

**Lema 3.** *Seja  $\mathbf{F} \in [L^p_{\#}(Y)]^N$ ,  $p \geq 2$ , e assumamos que  $\int_Y \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} dy = 0$  para todo  $\boldsymbol{\varphi} \in [C^{\infty}_{\#}(Y)]^N$  com divergência nula. Então existe uma única  $u \in W^{1,p}_{\#}(Y)/\mathbb{R}$  tal que  $\nabla u = \mathbf{F}$ .*

Em suma, até agora, pelo MCDE se verificou que

$$u^{\varepsilon_k}(t, x) \xrightarrow{2e} u_0(t, x) \in L^2([0, T[ \times \Omega) \quad (3.93)$$

e

$$\frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \xrightarrow{2e} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \in L^2([0, T[ \times \Omega \times Y). \quad (3.94)$$

E ainda,

$$u^{\varepsilon_k}(t, x) \rightharpoonup u_0(t, x) \text{ fracamente em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

pelo Teorema 11. De fato, considerando  $\phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \varphi(t, x)$  na Definição 31, se obtém que

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup \int_Y u_0(t, x, y) dy = u_0(t, x), \text{ quando } \varepsilon_k \rightarrow 0,$$

ou seja, a convergência em duas escalas coincide com a convergência fraca perante essa escolha da função teste.

Agora, como será o limite da equação de (3.6) quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ? Obtido o problema limite, será  $u_0$  sua única solução? E ainda, a solução deste problema irá satisfazer as mesmas condições do problema (3.6), (3.8)-(3.11)?

Conhecida a estimativa (3.14), conclui-se que a sequência de soluções  $\{u^{\varepsilon}\} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{W}_2$  é limitada. Logo, ao aplicar o Teorema 20, se garante a existência de uma subsequência, de modo que, (3.93) e (3.94) são válidas. Em vista dos limites (3.93) e (3.94), se espera que  $u^{\varepsilon_k}$  tenha o seguinte comportamento  $u_0(t, x) + \varepsilon_k u_1 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k} \right)$ . Interessante esse comportamento, não é mesmo? Já que relembra a solução assintótica de primeira ordem construída no MHA.

Em vista desse comportamento da solução, para se obter a convergência de (3.82) quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , se propõe uma função teste  $\phi$ , com estrutura similar à de  $u^{\varepsilon_k}$ , definida por

$\phi \equiv \varphi^{\varepsilon_k}(t, x) = \varphi_0(t, x) + \varepsilon_k \varphi_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right)$ , em que  $\varphi^{\varepsilon_k}(T, x) = 0$ ,  $\varphi_0(t, x) \in D([0, T[ \times \Omega)$  e  $\varphi_1(t, x, y) \in D([0, T[ \times \Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ , que certamente pertence a  $\mathcal{W}_2$ , logo da formulação (3.82) segue

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \frac{\partial \varphi^{\varepsilon_k}}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \frac{\partial \varphi^{\varepsilon_k}}{\partial x} dx dt &= \int_{\Omega} g(x) \varphi^{\varepsilon_k}(0, x) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi^{\varepsilon_k}(t, x) dx. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ao aplicar a regra da cadeia em (3.95) resulta

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt - \varepsilon_k \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} a\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) dx dt + \varepsilon_k \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} a\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \left[\varphi_0(t, x) + \varepsilon_k \varphi_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right)\right] dx dt + \int_{\Omega} g(x) [\varphi_0(0, x) + \varepsilon_k \varphi_1(0, x)] dx. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Deseja-se agora passar  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  em (3.96), porém, é preciso garantir a convergência de todos os termos. Para isso, serão aplicados os dois seguintes teoremas. Tais resultados apresentam funções testes em diferentes espaços que satisfazem a Definição 31.

**Teorema 21.** *Seja  $\{u^{\varepsilon}\}$  uma sequência em  $L^p([0, T[ \times \Omega)$  que converge em duas escalas para  $u_0$ . Então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(t, x) \psi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \psi(t, x, y) dy dx dt, \quad (3.97)$$

para toda  $\psi \in L^q_{\#}(Y; C(\overline{\Omega} \times [0, T]))$ .

*Demonstração.* Fixe  $\psi \in L^q_{\#}(Y; C([0, T] \times \overline{\Omega}))$ . Seja  $\{\psi_m\}$  uma sequência em  $D([0, T[ \times \Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$  tal que  $\psi_m \rightarrow \psi$  em  $L^q([0, T[ \times \Omega \times Y)$ . Assim, de (3.97) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(t, x) \psi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(t, x) \left[\psi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_m\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] dx dt \\ &+ \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(t, x) \psi_m\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Uma vez que  $u^\varepsilon$  converge em duas escalas para  $u_0$  e  $\psi_m$  converge em  $L^q([0, T[ \times \Omega \times Y)$  do segundo termo de (3.98) é obtido que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \psi_m \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \psi_m(t, x, y) dy dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \psi(t, x, y) dy dx dt. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (2.6) e o fato da sequência  $\{u^\varepsilon\}$  ser limitada em  $L^p([0, T[ \times \Omega)$  (consequentemente,  $\{u^\varepsilon\}$  converge em duas escalas) se obtém do primeiro termo de (3.98) que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \left[ \psi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_m \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx dt &\leq \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c \left( \int_0^T \int_{\Omega} \left| \psi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_m \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| dx dt \right)^{\frac{1}{q}} &. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Note que  $\psi - \psi_m \in L^q_{\#}(Y; C([0, T] \times \overline{\Omega}))$ , então por aplicar o Teorema 20 e usando a hipótese que  $\psi_m \rightarrow \psi \in L^q([0, T[ \times \Omega \times Y)$ , respectivamente, se obtém de (3.99) que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \left[ \psi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_m \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx dt &\leq \\ \lim_{m \rightarrow \infty} c \left( \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y |\psi(t, x, y) - \psi_m(t, x, y)| dy dx dt \right)^{\frac{1}{q}} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue a igualdade (3.97). ■

**Proposição 10.** *Suponha que  $\phi(t, x, y) = \phi_1(t, x)\phi_2(y)$ ,  $\phi_1 \in L^{sp}([0, T[ \times \Omega)$ ,  $\phi_2 \in L^{rp}_{\#}(Y)$  com  $1 \leq s, r \leq \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ , e ainda,*

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1.$$

Então  $\phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^p([0, T[ \times \Omega)$  e

$$\phi \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \rightharpoonup \phi_1(t, x) \int_Y \phi_2(y) dy \text{ em } L^p([0, T[ \times \Omega).$$

*Demonstração.* Considere as funções  $\phi_1 \in L^{sp}([0, T[ \times \Omega)$  e  $\phi_2 \in L^{rp}_{\#}(Y)$ , disso

$$\|\phi_1\|_{L^{sp}([0, T[ \times \Omega)} \|\phi_2\|_{L^{rp}_{\#}(Y)} < \infty. \quad (3.100)$$

O produto (3.100) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\|\phi_1\|_{L^{sp}([0,T[\times\Omega])}\|\phi_2\|_{L^{\frac{r}{\#}}(Y)} = \frac{1}{T|\Omega||Y|}\|\phi_1\|_{L^{sp}([0,T[\times\Omega\times Y])}\|\phi_2\|_{L^{rp}([0,T[\times\Omega\times Y])}. \quad (3.101)$$

Assumindo  $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$  se obtém que

$$\frac{1}{sp} + \frac{1}{rp} = \frac{1}{p}.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder (2.6), estima-se de (3.101) que

$$\|\phi_1\|_{L^{sp}([0,T[\times\Omega\times Y])}\|\phi_2\|_{L^{rp}([0,T[\times\Omega\times Y])} \geq \|\phi_1\phi_2\|_{L^p([0,T[\times\Omega\times Y])}.$$

Considere uma  $\phi$  que satisfaz (3.83). Logo, existe uma constante  $c$ , independente de  $\varepsilon$ , tal que

$$c\|\phi_1(t,x)\phi_2(y)\|_{L^p([0,T[\times\Omega\times Y])} \geq \left\| \phi_1(t,x)\phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^p([0,T[\times\Omega])},$$

isto é,  $\phi \in L^p([0,T[\times\Omega])$ . Assim, pelo Teorema 13

$$\phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y \phi(t,x,y)dy = \phi_1(t,x) \int_Y \phi_2(y)dy \text{ em } L^p([0,T[\times\Omega])$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para todo  $1 \leq p < \infty$ . ■

**Teorema 22.** *Seja  $\{u^\varepsilon\}$  uma seqüência em  $L^p([0,T[\times\Omega])$  que converge em duas escalas para  $u_0$ . Então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u^\varepsilon(t,x)\phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) dxdt = \int_0^T \int_\Omega \int_Y u_0(t,x,y)\phi(t,x,y)dydxdt, \quad (3.102)$$

para toda  $\phi$  na forma  $\phi(t,x,y) = \phi_1(t,x)\phi_2(y)$ ,  $\phi_1 \in L^{sq}([0,T[\times\Omega)$ ,  $\phi_2 \in L^{\frac{r}{\#}}(Y)$  com  $1 \leq s, r \leq \infty$  em que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ .

*Demonstração.* Fixe  $\phi$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Seja  $\{\alpha_m\}$  uma seqüência em  $D([0,T[\times\Omega)$  que converge para  $\phi_1 \in L^{sq}([0,T[\times\Omega)$  e  $\{\beta_m\}$  uma seqüência em  $C^\infty_\#(Y)$  que converge para  $\phi_2 \in L^{\frac{r}{\#}}(Y)$ .

Assim, segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u^\varepsilon(t,x)\phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) dxdt = \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u^\varepsilon(t,x) \left[ \phi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha_m(t,x)\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dxdt \\ & + \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u^\varepsilon(t,x)\alpha_m(t,x)\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dxdt. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Uma vez que  $u^\varepsilon$  converge em duas escalas para  $u_0$  e  $\alpha_m \beta_m$  converge para  $\phi \in L^q([0, T[ \times \Omega \times Y)$ , se obtém que o segundo termo de (3.103) é

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \alpha_m(t, x) \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \alpha_m(t, x) \beta_m(y) dy dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(t, x, y) \phi(t, x, y) dy dx dt. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (2.6), o fato de  $\{u^\varepsilon\}$  ser limitada em  $L^p([0, T[ \times \Omega)$  e a desigualdade (2.4) se obtém que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \left[ \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha_m(t, x) \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dx dt \right| \\ & \leq c \left( \int_0^T \int_{\Omega} \left| \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha_m(t, x) \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq 2^{q-1} c \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\phi_1(t, x) - \alpha_m(t, x)|^q \left| \phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^q + |\alpha_m(t, x)|^q \left| \phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Pela Proposição 10 resulta de (3.104)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \left[ \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha_m(t, x) \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dx dt \right| \\ & \leq 2^{q-1} c \left( \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y |\phi_1(t, x) - \alpha_m(t, x)|^q |\phi_2(y)|^q + |\alpha_m(t, x)|^q |\phi_2(y) - \beta_m(y)|^q dy dx dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder (2.6) junto com o fato de que  $\alpha_m \rightarrow \phi_1 \in L^{sq}([0, T[ \times \Omega)$  e  $\beta_m \rightarrow \phi_2 \in L_{\#}^{rq}(Y)$  resulta

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^\varepsilon(t, x) \left[ \phi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha_m(t, x) \beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dx dt = 0,$$

e portanto, segue a igualdade (3.102). ■

Uma vez que os termos

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx < \infty$$

e

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt < \infty$$

em (3.96), segue pelos Teoremas 21 e 22, quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , o limite de (3.96), isto é,

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) dy dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi_0(t, x) dx dt + \int_{\Omega} g(x) \varphi_0(0, x) dx. \end{aligned} \quad (3.105)$$

O próximo passo é verificar se a solução dessa forma variacional limite satisfaz a mesma condição inicial (3.9).

Seja  $v(t, x) = \phi(x)\varphi(t)$  a função teste na formulação (3.82), onde  $\phi \in D(\Omega)$  e  $\varphi(t) \in C_0^\infty([0, T])$  tal que  $\varphi(T) = 0$  e  $\varphi(0) = 1$ . Logo, se obtém

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u^{\varepsilon_k}(t, x) \phi(x) \frac{d\varphi}{dt} dx dt - \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} a \left( \frac{x}{\varepsilon_k} \right) \frac{d\phi}{dx} \varphi(t) dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx dt. \end{aligned}$$

Quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , segue

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \phi(x) \frac{d\varphi}{dt} dx dt - \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) a(y) \frac{d\phi}{dx} \varphi(t) dy dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Observe que a primeira integral da esquerda de (3.106) é

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \phi(x) \frac{d\varphi}{dt} dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} u_0(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx \right) dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi(x) \varphi(t) dx dt - \int_{\Omega} u_0(0, x) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (3.107)$$

Substituindo (3.107) em (3.106) resulta

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) a(y) \frac{d\phi}{dx} \varphi(t) dy dx dt \\ = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi(x) \varphi(t) dx dt - \int_{\Omega} u_0(0, x) \phi(x) dx + \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Implicando que

$$u_0(0, x) = g(x).$$

Note que (3.105) é a forma variacional de um sistema de equações diferenciais com soluções  $\{u_0, u_1\}$ . Para desacoplar as equações que compõem o sistema, se escolhe

primeiramente  $\varphi_0 \equiv 0$  e, em seguida,  $\varphi_1 \equiv 0$ , gerando as seguintes formulações

$$\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy dx dt = 0 \quad (3.108)$$

e

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} dy dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi_0(t, x) dx dt + \int_{\Omega} g(x) \varphi_0(0, x) dx. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Ao propôr  $u_1(t, x, y) = N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$  em (3.108) e (3.109) se desacoplam as seguintes formulações local

$$\int_Y a(y) \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy = 0 \quad (3.110)$$

e homogeneizada

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y a(y) \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) dy \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi_0(t, x) dx dt + \int_{\Omega} g(x) \varphi_0(0, x) dx. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Tais formulações variacionais (3.110)-(3.111) representam tanto os problemas com coeficientes continuamente diferenciáveis, como os com coeficientes continuamente diferenciáveis por partes. Ambas consideram as condições do tipo Dirichlet nula e de continuidades. Conclui-se, neste sentido, que esse desenvolvimento feito no MCDE é mais geral do apresentado no MHA. Além disso, observe a partir das formulações (3.110) e (3.111) que o coeficiente efetivo da formulação homogeneizada (3.111) é dado por

$$\hat{a} = \left\langle a(y) \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \right\rangle \quad (3.112)$$

constante. Disso, se conclui que a formulação homogeneizada (3.111) tem uma única solução, portanto, não apenas uma subsequência  $\{u^{\varepsilon_k}\}$ , senão todas as subsequências de  $\{u^{\varepsilon}\}$  convergem para o mesmo limite  $u_0$ .

Fazendo uma comparação com o MHA, se observa que os problemas que fornecem  $u_0$  e  $N_1$ , conseqüentemente  $u_1$ , deduzidos das formulações (3.111) - (3.110) são os mesmos obtidos pelo MHA. Além disso, é possível afirmar que as relações (3.48) e (3.112) são equivalentes:

**Proposição 11.** *Sejam  $u^\varepsilon \in L^\infty(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{W}_2$  solução de (3.6), (3.8)-(3.11),  $u^{(1)}$  uma e.a. de  $u^\varepsilon$ , com  $u_0$  solução do problema homogeneizado (3.53). Então, tem-se*

$$\langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} = \left\langle a(y) \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \right\rangle, \quad (3.113)$$

em que  $N_1$  é a solução do problema local (3.45) com  $\langle N_1 \rangle = 0$ , tal que

$$N_1(y) = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} \int_0^y \frac{1}{a(s)} ds - y + C \quad (3.114)$$

onde  $C$  é a constante para a qual  $\langle N_1 \rangle = 0$ .

*Demonstração.* A partir de (3.45), se tem

$$a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) = C_0, \quad \forall y \in Y,$$

onde  $C_0$  é uma constante a determinar por pela média, isto é,

$$\left\langle a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right\rangle = C_0. \quad (3.115)$$

Assim

$$N_1(y) = C_0 \int_0^y \frac{1}{a(s)} ds - y + C, \quad \forall y \in Y$$

onde  $C$  também é uma constante a determinar. Por outro lado, a condição de periodicidade, também fornece o valor de  $C_0$ , isto é,

$$N_1(1) - N_1(0) = C_0 \int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy - 1 = 0,$$

tal que  $C_0 = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1}$ , e assim, a solução  $N_1$  de (3.45) é dada por (3.114), e  $C$  determinada pela condição  $\langle N_1 \rangle = 0$ . Então (3.113) é satisfeita. ■

*Observação 5.* A diferença entre essas relações é que a obtida por MHA, a constante  $C_0$  é fornecida pela condição de periodicidade, enquanto, a fornecida pela média contém informação do comportamento local. Isso só ocorre no caso unidimensional. Em problemas multidimensionais, as relações obtidas para o coeficiente efetivo, em ambos os métodos são idênticas, e portanto, a forma de calcular é a mesma, através de (3.115).

### 3.2.2 Resultado de Corretor

Na abordagem tradicional, a justificativa matemática do processo de homogeneização é realizada através da estimativa do erro entre as soluções exata  $u^\varepsilon$  e homogeneizada  $u_0$ . Pelo Teorema 11 a sequência de soluções de (3.13) converge fracamente para  $u_0$  em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e a sequência de  $\left\{ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\}$  converge para  $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ , onde  $(u_0, u_1)$  é a única solução em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(]0, T[ \times \Omega; H_{\#}^1(\Omega)/\mathbb{R})$  da formulação limite (3.105). Como a inclusão de  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  é compacta em  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$ , temos que  $u^\varepsilon$  converge fortemente para  $u_0$  em  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Para a derivada segue a convergência fraca para  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  em  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Para melhorar essa convergência deve-se adicionar um termo *corretor*  $\theta^\varepsilon$  que corrige as rápidas oscilações de  $u^\varepsilon - u_0$ . Em vista dos resultados obtidos no MCDE se espera que  $u^\varepsilon$  tenha o comportamento  $u_0 + \varepsilon u_1$ . Disso, portanto, uma escolha natural para o corretor é  $\theta^\varepsilon = \varepsilon u_1 \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$ , que implicará na convergência

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \rightarrow 0$$

em  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A estimativa ou convergência do erro na literatura, muitas vezes é denominado de “resultado de corretor”. Para mais detalhes sobre corretores, sugere-se a consulta de [19]. Uma vez que já se sabe que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u_0\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)} = 0, \quad (3.116)$$

basta, portanto, provar o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\|_{L^2(]0, T[ \times \Omega)} = 0. \quad (3.117)$$

Do caráter limitado de  $a(y)$  definido em (3.12), se deduz que

$$\begin{aligned}
\alpha \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\|_{L^2(]0,T[ \times \Omega)}^2 &\leq \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} dxdt \\
&\quad - 2 \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dxdt \\
&= - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} u^\varepsilon dxdt + \int_0^T \int_\Omega f(t,x) u^\varepsilon dxdt \\
&\quad - 2 \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dxdt.
\end{aligned}$$

Assim, considerando a admissibilidade da  $a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que

$$\begin{aligned}
\alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\|_{L^2(]0,T[ \times \Omega)}^2 &\leq - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial t} u_0(t,x) dxdt + \int_0^T \int_\Omega f(t,x) u_0(t,x) dxdt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega \int_Y a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dy dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (3.105) segue o limite (3.117).

O resultado (3.116) é equivalente à estimativa de proximidade (3.1.3), quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e ainda, é interpretado da mesma forma. Isto é, como a justificativa matemática do processo de homogeneização.

## 4 HOMOGENIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NÃO LINEAR

Neste capítulo, buscam-se garantir a existência e unicidade do problema de difusão (1.17) unidimensional com fluxo não linear. As condições para o fluxo geral  $\sigma$  serão definidas de modo que exista uma única solução para o problema não linear. Ainda, neste capítulo, se apresentam os processos de homogeneização por MHA e MCDE; prova-se no MHA o lema que garante a existência e unicidade do problema local desacoplado; demonstra-se (sob as perspectivas do MHA e MCDE) que o fluxo efetivo deduzido preserva as propriedades do fluxo original que combinado ao lema do problema local implicará na existência e unicidade da solução homogeneizada; apresenta-se a abordagem não linear de correção no contorno e curtos efeitos do tempo para assintótica de primeira ordem; através dessa assintótica corrigida estima-se a proximidade entre as soluções exata e homogeneizada; por fim, na seção do MCDE o resultado de corretor é demonstrado.

### 4.1 Existência e Unicidade

O objetivo nesta seção é encontrar para cada  $\varepsilon$  fixado, a solução  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$  do problema (equivalente àquele com condições de contato perfeito)

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ u^\varepsilon(t, x) = 0, & t \in ]0, T[, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

no espaço  $W_p$

$$W_p = \left\{ u \mid u \in L^p(0, T; V), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; V') \right\}, \quad (4.2)$$

com relação à norma

$$\|u\|_{W_p} = \|u\|_{L^p(0, T; V)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^q(0, T; V')},$$

onde a derivada no tempo (4.2) se entende no sentido generalizado,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ ,  $\Gamma \subset \Omega$  é um conjunto de pontos de descontinuidade de primeira espécie,  $0 < T < \infty$ , a fonte/sumidouro

$f \in L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$  e o estado inicial  $g(x) \in L^2(\Omega)$  são informações dadas. A escolha da condição inicial neste espaço implica que  $u \in C([0, T], H)$  devido a inclusão  $W_p \subseteq C([0, T]; H)$  quando  $2 \leq p < \infty$ . Isto implica, em particular que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varepsilon. \quad (4.3)$$

As informações do termo de fluxo geral aqui considerado, foram extraídas do artigo [115] e adaptadas. De um modo antecipado afirma-se que a família de problemas (4.1) tem soluções uniformemente limitadas e únicas em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{W}_p$ ,  $\mathcal{W}_p = \left\{ u \mid u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \right\}$  se para  $\varepsilon$  fixado,  $\sigma$  satisfaz as seguintes hipóteses da classe  $\mathcal{S}_{\#, Y}$  definida abaixo:

**Definição 33.** *Seja  $2 \leq p < \infty$ . Denota-se por  $\mathcal{S}_{\#, Y} = \mathcal{S}_{\#, Y}(c_1, c_2, c_3)$ ,  $c_i > 0$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ , a classe de funções*

$$\sigma : [0, T] \times \bar{\Omega} \times Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que

- i) *para quase todo  $x \in \Omega$  e  $t \in ]0, T[$ , todo  $\xi$  e  $\psi \in \mathbb{R}$  fixos, a função  $y \mapsto \sigma(t, x, y, \psi, \xi)$  (denotado por  $\sigma(t, x, \cdot, \psi, \xi)$ ), de  $Y$  para  $\mathbb{R}$ , é mensurável e 1-periódica.*
- ii)  *$\sigma(\cdot, \cdot, y, \psi, \xi)$  é contínua para quase todo  $y \in Y$  e quaisquer  $\psi, \xi \in \mathbb{R}$ .*
- iii)  *$\sigma(t, x, y, \cdot, \cdot)$  é contínua para quase todo  $t \in ]0, T[$ ,  $x \in \Omega$  e  $y \in Y$ .*
- iv)  *$\sigma(t, x, y, \psi, 0) = 0$ .*
- v) *existe uma constante  $c_1 > 0$  tal que  $|\sigma(t, x, y, \psi, \xi)| \leq c_1(1 + |\psi|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$  para quase todo  $t \in ]0, T[$ ,  $x \in \Omega$  e  $y \in Y$ , e quaisquer  $\psi \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .*
- vi) *existe uma constante  $c_2 > 0$  tal que  $(\sigma(t, x, y, \psi_1, \xi_1) - \sigma(t, x, y, \psi_2, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq c_2|\xi_1 - \xi_2|^p$  para quase todo  $t \in ]0, T[$ ,  $x \in \Omega$  e  $y \in Y$ , e quaisquer  $\psi \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_1 \neq \xi_2$ .*
- vii) *existe uma constante  $c_3 > 0$  e um módulo de continuidade  $\nu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tais que  $|\sigma(t_1, x_1, y, \psi_1, \xi_1) - \sigma(t_2, x_2, y, \psi_2, \xi_2)| \leq \nu(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + |\psi_1 - \psi_2|)(1 +$*

$$|\psi_1|^{p-1} + |\xi_1|^{p-1} + |\psi_2|^{p-1} + |\xi_2|^{p-1}) + c_3|\xi_1 - \xi_2| (1 + |\psi_1| + |\xi_1| + |\psi_2| + |\xi_2|)^{p-2},$$

para todos  $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$  e  $(\psi_1, \xi_1), (\psi_2, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

*Observação 6.* Denota-se por  $\nu$  o módulo de continuidade, isto é, uma função contínua não decrescente definida sobre  $\mathbb{R}_+$  tal que  $\nu(0) = 0$ ,  $\nu(r) > 0$  se  $r > 0$ , e  $\nu(r) = 1$  se  $r > 1$ . As hipóteses acima possibilitam o estudo do comportamento assintótico de  $u^\varepsilon$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , onde algumas desempenham papéis no processo de existência de solução do problema. O item *vi*), significa que  $\sigma$  é fortemente monótona com relação ao último argumento. A partir do item *iv*),  $\sigma$  pode ser definido da seguinte forma:  $\sigma = a(t, x, y, \psi, \xi)\xi$ .

O problema (4.1) é equivalente à formulação

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi(x) dx + \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \frac{d\phi}{dx} dx \\ \quad = \int_{\Omega} f(t, x) \phi(x) dx, \quad D'(0, T), \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Para provar a existência e unicidade da solução do problema (4.4), será usado o método de Faedo-Galerkin [40]. A prova é feita de acordo com os seguintes seis passos:

1. Constroem-se subespaços  $V^{(m)}$  com dimensão finita  $m$ , de  $V$ , gerados por uma base de  $m \in \mathbb{N}$  funções linearmente independentes  $v_i \in V$ , tal que, a sequência  $\{V^{(m)}\}$  converge para  $V$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Isto é, aproxima-se o espaço  $V$  que tem dimensão infinita, por um subespaço  $V^{(m)}$  de dimensão finita;
2. Para qualquer  $m \in \mathbb{N}$  formula-se uma aproximação de (4.4) e mostra-se que ela tem uma única solução  $u_m$ ;
3. Obtém-se estimativas em norma para  $u_m$ , independentes de  $m$ , isto é, válidas  $\forall m$ ;
4. Quando  $m \rightarrow \infty$ , prova-se que  $u_m$  converge num sentido para uma solução  $u \in \mathcal{W}_p$  de (4.4);
5. Estabelecem-se estimativas para  $u$ ;

6. Prova-se a unicidade da solução  $u$ ;

**Primeiro passo:** Para se construir o espaço de dimensão finita  $V^{(m)}$ , precisa-se do seguinte resultado:

**Lema 4.** *Se  $s > \bar{s} \equiv N \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + 1$  em que  $N = \dim(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então  $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

*Demonstração.* [95]. ■

*Observação 7.* Para fins de desenvolvimento considera-se  $s^* = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > \bar{s}\}$ .

Assim, considere  $\{v_i(x)\}_{i=1,\dots,m}$  uma base de  $V^{(m)} \subset H_0^{s^*}(\Omega) \equiv V$ , ortonormal em  $L^2(\Omega) \equiv H$  e ortogonal em  $H_0^{s^*}(\Omega)$ . Denota-se por  $V^{(m)}$  o subespaço  $m$ -dimensional de  $H_0^{s^*}(\Omega)$ , gerado por  $v_1, \dots, v_m$ , de modo que,  $V^{(m)} \subset V^{(m+1)}$  e  $\overline{\cup_{i=1}^{\infty} V^{(i)}} = H_0^{s^*}(\Omega)$ , onde a linha sobreposta denota o fecho. Logo  $u_m \in V^{(m)}$ .

Introduz-se o operador projeção  $P_m : L^2(\Omega) \rightarrow V^{(m)} \subset L^2(\Omega)$  definido por

$$P_m v(x) = \sum_{i=1}^m (v, v_i) v_i, \forall v \in L^2(\Omega). \quad (4.5)$$

De resultados clássicos relacionados ao espaço de Hilbert [117], tem-se que

$$P_m v(x) \rightarrow v, \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \text{ quando } m \rightarrow \infty, \forall v \in L^2(\Omega),$$

e ainda,

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))} \leq 1,$$

em que  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$  denota o conjunto de aplicações lineares e limitadas de  $L^2(\Omega)$  para  $L^2(\Omega)$ , com norma (2.1).

A restrição de  $P_m$  para  $H_0^{s^*}(\Omega)$ ,

$$P_m v(x) = \sum_{i=1}^m (v, v_i) v_i, \forall v \in H_0^{s^*}(\Omega),$$

pertence a  $\mathcal{L}(H_0^{s^*}(\Omega); H_0^{s^*}(\Omega))$  e satisfaz

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H_0^{s^*}(\Omega); H_0^{s^*}(\Omega))} \leq 1. \quad (4.6)$$

De fato, pela norma de  $H_0^{s^*}$

$$\|v\|_{H_0^{s^*}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{s^*} \left\| \frac{d^k v}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

segue para  $v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(x)$ , com  $c_i = (v, v_i)$ , e a ortogonalidade de  $v_i$  em  $H_0^{s^*}(\Omega)$  que

$$\begin{aligned} \|P_m v(x)\|_{H_0^{s^*}(\Omega)}^2 &= \sum_{k=0}^{s^*} \left\| \frac{d^k P_m v}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{s^*} \left\| \sum_{i=1}^m (v, v_i) \frac{d^k v_i}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{s^*} \sum_{i=1}^m \left\| (v, v_i) \frac{d^k v_i}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{s^*} \sum_{i=1}^m (v, v_i)^2 \left\| \frac{d^k v_i}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{s^*} \sum_{i=1}^{\infty} (v, v_i)^2 \left\| \frac{d^k v_i}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{s^*} \left\| \frac{d^k v}{dx^k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v(x)\|_{H_0^{s^*}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A desigualdade (4.6) segue de (4.7) em (2.1). Além disso,

$$P_m v(x) \rightarrow v(x) \text{ fortemente em } H_0^{s^*}(\Omega), \text{ quando } m \rightarrow \infty, \forall v \in H_0^{s^*}(\Omega). \quad (4.8)$$

Observe agora que  $P_m$  pode ser estendido para  $H^{-s^*}(\Omega)$  definindo

$$P_m v(x) = \sum_{i=1}^m (v, v_i) v_i, \quad \forall v \in H^{-s^*}(\Omega),$$

ainda para  $v_i \in H_0^{s^*}(\Omega)$ . Deseja-se agora mostrar que

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H^{-s^*}(\Omega); H^{-s^*}(\Omega))} \leq 1. \quad (4.9)$$

Para isso, observe que para qualquer  $q \in H_0^{s^*}(\Omega)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
|(P_m v, q)| &= \left| \left( \sum_{i=1}^m (v, v_i) v_i, q \right) \right| \\
&= \left| \left( v, \sum_{i=1}^m (q, v_i) v_i \right) \right| \\
&= |(v, P_m q)| \\
&\leq \|v\|_{H^{-s^*}(\Omega)} \|q\|_{H_0^{s^*}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, por (2.3), obtém-se

$$\|P_m v\|_{H^{-s^*}(\Omega)} \leq \|v\|_{H^{-s^*}(\Omega)}, \quad (4.10)$$

e, portanto, segue (4.9).

**Segundo passo:** Sendo  $g(x) \in L^2(\Omega)$ , se considerar  $G_m = P_m g(x) \in V^{(m)} \hookrightarrow H_0^{s^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , a partir de (4.5) se obtém

$$G_m \rightarrow g(x) \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \text{ quando } m \rightarrow \infty, \forall v \in L^2(\Omega).$$

Introduz-se agora, para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , o problema aproximado de dimensão finita

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) v_i(x) \in \mathcal{W}_p^{(m)} \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} \phi(x) dx + \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \frac{d\phi}{dx} dx \\ \quad = \int_{\Omega} f(t, x) \phi(x) dx, \quad D'(0, T), \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_m(0, x) = G_m(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

em que

$$\mathcal{W}_p^{(m)} = \left\{ u_m \mid u_m \in L^p(0, T; V^{(m)}), \frac{\partial u_m}{\partial t} \in L^q(0, T; [V^{(m)}]') \right\}.$$

A partir de (4.5) e a condição inicial de (4.11), tem-se

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(0) v_i(x) = u_m(0, x) = G_m(x) = \sum_{i=1}^m (g, v_i) v_i, \quad (4.12)$$

o que implica  $\alpha_i(0) = (g, v_i)$ . Isto é, ao multiplicar (4.12) por  $v_l$  e integrar sobre  $\Omega$ , assim, pela ortonormalidade da base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  as condições são obtidas para cada  $l$  fixo.

Considerando  $\phi = v_k(x)$ , a equação de (4.11) se transforma em

$$\sum_{i=1}^m \frac{d\alpha_i}{dt} \int_{\Omega} v_i(x)v_k(x)dx + a \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v_i(x), v_k(x) \right) = \int_{\Omega} f(t, x)v_k(x)dx, \quad (4.13)$$

com

$$a \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v_i(x), v_k(x) \right) = \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v_i(x), \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \frac{dv_i}{dx} \right) \frac{dv_k}{dx} dx.$$

Pela ortonormalidade da base  $\{v_i\}$  em  $L^2(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , de (4.13) se obtém um sistema de equações diferenciais ordinárias não linear

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = F(t, \alpha(t)), \\ \alpha(0) = (\alpha_k(0))_{k=1, \dots, m}, \end{cases} \quad (4.14)$$

com

$$F(t, \alpha(t)) = \left( \int_{\Omega} f(t, x)v_k(x)dx - a \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v_i(x), v_k(x) \right) \right)_{k=1, \dots, m} \quad (4.15)$$

e

$$\alpha_k(0) = \int_{\Omega} g(x)v_k(x)dx.$$

A existência e unicidade de (4.14) é garantida pelo teorema de Carathéodory (Teorema 1.1, Capítulo 2 em [2]), isto é, é preciso garantir que (4.15) seja mensurável em  $t$  para cada  $\alpha$  fixado, contínua em  $\alpha$  para cada  $t$  fixado e que existe uma função  $M(t)$  mensurável, tal que

$$|F(t, \alpha)| \leq M(t) \quad \text{em } (t, \alpha) \in R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Antes de realizar essa verificação, se define

$$\begin{aligned} A1 &= \int_{\Omega} f(t, x)v_k(x)dx. \\ A2 &= -a \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v_i(x), v_k(x) \right). \end{aligned}$$

1. *Mensurabilidade:* O termo  $A1$ , evidentemente é mensurável em  $t$  já que  $f \in L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ . O termo  $A2$ , para  $\alpha$  fixo, é mensurável em  $t$  pelo item *ii*) da Definição 33. Logo  $F(t, \alpha)$  para  $\alpha$  fixo é mensurável.

2. *Continuidade:*  $A_1$  para  $t$  fixo é constante, logo contínuo em  $\alpha$ . Para se garantir a continuidade de  $A_2$  observe que para  $t$  fixo o funcional

$$-\frac{\partial}{\partial x}\sigma\left(t, x, (\cdot), \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}\right) : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega),$$

que para  $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$u_m \mapsto -\frac{\partial}{\partial x}\sigma\left(t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Considere as aplicações, para  $t$  fixo:

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(y) = \sum_{i=1}^m y_i v_i(x) = u_m$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Então  $T$  é contínua.
  - Pelo item *iii*) da Definição 33,  $\sigma(t, x, \cdot, \cdot)$  é contínua para quase todo  $t$  e  $x$ . Assim define-se  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(y) = -a(u_m, v_k)$ . Disso, portanto,  $\varphi$  é contínua com respeito a  $y$ , uma vez que é composta de funções contínuas. De fato,  $\varphi(y) = -a(T(y), v_k)$ . Enfim,  $F$  é contínua em  $\alpha$  para  $t$  fixo.
3. Dado um compacto  $B$  de  $\mathbb{R}^m$ , e como  $a(u_m, v_k)$  é contínua em  $\alpha$ , existe uma função  $M_1(t)$  tal que

$$|a(u_m, v_k)| \leq M_1(t),$$

além disso, pela desigualdade (2.3) se tem

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(t, x) v_k(x) dx \right| &\leq \|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \|v_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{q} \|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^q + \frac{1}{p} \|v_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \\ &\leq M_2(t) + M_0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(t, \alpha)| \leq M_0 + M_1(t) + M_2(t) = M(t),$$

onde  $M(t)$  é mensurável.

Logo, o sistema (4.14) satisfaz as condições do teorema de existencia de Carathéodory e portanto, existe uma única  $u_m \in C([0, T]; V^{(m)})$ , satisfazendo (4.14).

**Terceiro passo:** Prova-se agora que  $u_m$  satisfaz algumas estimativas. Para isto, multiplica-se a  $k$ -ésima equação de (4.11), considerando  $\phi = v_k(x)$ , por  $\alpha_k$ . Somando sobre  $k$  de 1 a  $m$  obtém-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} u_m(t, x) dx + a(u_m(t, x), u_m(t, x)) = \int_{\Omega} f(t, x) u_m(t, x) dx. \quad (4.16)$$

Reescrevendo (4.16), usando uma derivação com relação à variável  $t$  na esquerda e aplicando a desigualdade (2.3) no lado direito, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_m, u_m) \leq \|f(t, x)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Pela desigualdade de Young (2.5), obtém-se na direta de (4.17) que

$$\|f(t, x)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{qc_2^{q/p}} \|f(t, x)\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^q + \frac{c_2}{p} \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (4.18)$$

Integrando com relação à variável temporal de 0 a  $t$ , para  $t \in ]0, T]$ , obtém-se após substituir (4.18) em (4.17) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t a(u_m(s, x), u_m(s, x)) ds &\leq \frac{1}{qc_2^{q/p}} \|f(t, x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}^q \\ &+ \frac{c_2}{p} \|u_m(t, x)\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p + \frac{1}{2} \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Agora, pelas condições *iv*) e *vi*) da Definição 33, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds &\leq \frac{1}{qc_2^{q/p}} \|f(t, x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}^q \\ &+ \frac{c_2}{p} \|u_m(t, x)\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p + \frac{1}{2} \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Como esta relação vale para todo  $t \in ]0, T]$ , então vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(p-1)c_2}{p} \|u_m(t, x)\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p &\leq \frac{1}{qc_2^{q/p}} \|f(t, x)\|_{L^q(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^q \\ &+ \frac{1}{2} \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

e disso segue

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_m(t, x)\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p \leq c \left( \|f(t, x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}^q + \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (4.19)$$

onde  $c = \frac{k_2}{k_1}$  para  $k_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{(p-1)c_2}{p} \right\}$  e  $k_2 = \max \left\{ \frac{1}{qc_2^{q/p}}, \frac{1}{2} \right\}$ , é uma constante independente de  $m$ . Observe que a desigualdade (4.19) vale para quaisquer  $p$  e  $q$  conjugados. Em particular, para expoentes  $p = 2 \Rightarrow q = 2$  a desigualdade ainda é válida, e portanto, se deduz

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_m(t,x)\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq 2c^{\frac{1}{2}} \left( \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))} + \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (4.20)$$

Para estimar  $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ , observe que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} \phi(x) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \phi(x) dx = \int_{\Omega} f(t,x) \phi(x), \quad \forall \phi \in V^{(m)}.$$

implica que

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - P_m \left[ \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right] = P_m f(t,x),$$

com o operador  $P_m$  definido em (4.5). Assim, por (4.10), o fato de  $W^{-1,q} \hookrightarrow H^{-s^*}$  obtém-se

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;H^{-s^*}(\Omega))} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) + f(t,x) \right\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}.$$

Logo, pela relação (2.10) segue a estimativa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;H^{-s^*}(\Omega))} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))} + \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}, \\ &\leq \left\| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(0,T[\times\Omega])} + \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além disso, a estimativa para  $\sigma$  pode ser obtida. De fato, a partir do item  $v$ ) da Definição 33 segue

$$\left| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right| \leq c_1 \left( 1 + |u_m|^{p-1} + \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^{p-1} \right)$$

e assim

$$\left| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right|^q \leq c_1^q \left( 1 + |u_m|^{p-1} + \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^{p-1} \right)^q. \quad (4.22)$$

Pela desigualdade (2.4) segue de (4.22) que

$$\begin{aligned} \left| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right|^q &\leq c(q) \left( 1 + |u_m|^{q(p-1)} + \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^{q(p-1)} \right), \\ &= c(q) \left( 1 + |u_m|^p + \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^p \right), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left\| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(]0, T[ \times \Omega)}^q \leq c^*(q) \left( 1 + \|u_m\|_{L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))}^p \right), \quad (4.23)$$

com  $c(q) = c_1^q 2^{q-1} \max \{2^{q-1}, 1\}$  e  $c^*(q) = c(q) \max \{T|\Omega|, 1\}$ . Observe ainda, se considerar o expoente  $p = 2$  logo  $q = 2$ , a desigualdade (4.23) é válida, logo se deduz

$$\left\| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(]0, T[ \times \Omega)} \leq c^*(q)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \|u_m\|_{L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))} \right). \quad (4.24)$$

**Quarto passo:** Obtidas as estimativas (4.20), (4.21) e (4.24), é possível passar ao limite quando  $m \rightarrow \infty$  em (4.11). De fato, pode-se extrair uma subsequência (denotada pelo índice  $m_k$ ), de modo que

$$\begin{cases} u_{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ em } L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \text{ em } L^q(0, T; H^{-s^*}(\Omega)), \\ \sigma \left( t, x, u_{m_k}, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) \rightharpoonup \rho \text{ em } L^q(]0, T[ \times \Omega). \end{cases} \quad (4.25)$$

Com efeito,  $u_m \in \mathcal{W}_p^{(m)}$ , que está contida em  $C(]0, T[; L^2(\Omega))$ , ou ainda,  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , com dual  $[L^1(0, T; L^2(\Omega))]' = L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Assim, já que  $u_m$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$  é separável, pode-se dizer que existe uma subsequência  $u_{m_k}$  que converge fracamente\* em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  [35]. As duas posteriores convergências seguem do fato que  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $H^{-s^*}(\Omega)$  serem reflexivos, isto é, como  $W_0^{1,p}(\Omega)$  é reflexivo, o espaço  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  também é reflexivo, o mesmo vale para  $H^{-s^*}(\Omega)$ . Logo, pelo Teorema 11, garante-se a existência de subsequências convergentes nos respectivos espaços,  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  e  $L^q(0, T; H^{-s^*}(\Omega))$ .

Agora, considere  $\varphi \in D'(]0, T[)$  e  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Multiplique a equação de (4.11), para  $\phi = v_k(x)$ , por  $\int_\Omega v(x)v_k(x)dx\varphi(t)$  e some sobre  $k$  de 1 a  $m$ . Segue da integração em  $t$  sobre  $]0, T[$  que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t} \varphi(t) P_m v(x) dx dt + \int_0^T a(u_m, \varphi(t) P_m v) dt = \int_0^T \int_\Omega f(t, x) \varphi(t) P_m v(x) dx dt. \quad (4.26)$$

Fazendo  $m_k \rightarrow \infty$ , certamente todos os termos convergem para algum limite graças às convergências (4.25) e (4.8), isto é, para

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(t) v(x) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \rho(t, x) \varphi(t) \frac{dv}{dx} dx dt = \int_0^T \int_\Omega f(t, x) \varphi(t) v(x) dx dt.$$

Deseja-se, agora, estudar a convergência de  $\sigma$ , ou seja, determinar  $\rho$ . Conjectura-se que  $\rho(t, x) = \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ . Para mostrar isso, se consideram  $\lambda_m \in D(]0, T[ \times \Omega)$ , tal que  $\lambda_m \rightarrow \lambda$  fortemente em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , e  $\psi_i \in D(]0, T[ \times \Omega)$  tal que  $\psi_i \rightarrow u$  fortemente em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Considere também a diferença

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sigma\left(t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \lambda_m dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda dx dt \quad (4.27)$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sigma\left(t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) - \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right] \lambda_m dx dt \quad (4.28)$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) - \sigma\left(t, x, \psi_i, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right] \lambda_m dx dt \quad (4.29)$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} \sigma\left(t, x, \psi_i, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \lambda_m dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda dx dt \quad (4.30)$$

Primeiro, será analisado o limite de (4.28) quando  $m \rightarrow \infty$ . Pela condição *vii*) da Definição 33 segue que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sigma\left(t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) - \sigma\left(t, x, u, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right] \lambda_m dx dt \right| \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} \nu(|u - u_m|) \left[ 1 + |u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + 2 \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^{p-1} \right] |\lambda_m| dx dt. \end{aligned}$$

Seja  $Q_m = \left[ 1 + |u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + 2 \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^{p-1} \right] |\lambda_m|$ . É fácil verificar que  $Q_m \in L^1(]0, T[ \times \Omega)$  e converge fracamente em  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Por outro lado, segue de (4.20) que  $u_m$  é limitada em  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ , assim, pelo Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov [28] (p.285) existe uma subsequência  $U_{m_k} = u_{m_k} - u \rightarrow 0$  fortemente em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  quando  $m_k \rightarrow \infty$ . Além disso, pelo Teorema 8 existe uma função  $h \in L^p(]0, T[ \times \Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} & U_{m_k} \rightarrow 0, \text{ (portanto } |U_{m_k}| \rightarrow 0 \text{) em quase todo } ]0, T[ \times \Omega, \text{ quando } m_k \rightarrow \infty, \\ & |U_{m_k}| \leq h \text{ em quase todo } ]0, T[ \times \Omega, \forall m_k. \end{aligned}$$

Sendo  $\nu$  contínua (em particular em 0 com  $\nu(0) = 0$ ), se tem que  $\nu(|U_{m_k}|) \rightarrow 0$ , quando  $|U_{m_k}| \rightarrow 0$ . A hipótese de  $\nu$  ser não decrescente nos fornece que  $\nu(|U_{m_k}|) \leq \nu(h)$ , para todo  $m_k$ . Observe ainda que, para  $U_{m_k}$  mensurável temos  $|U_{m_k}|$  mensurável, logo  $\nu \circ |U_{m_k}| = \nu(|U_{m_k}|)$  é mensurável para todo  $m_k$ . Como  $\nu$  é contínua e  $h$  é mensurável,  $\nu(h) = \nu \circ h$  é

mensurável e essencialmente limitada em  $]0, T[ \times \Omega$ , ou seja,  $\nu(h) \in L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ . Logo, a sequência  $\nu(|U_{m_k}|)$  é equilimitada e

$$\nu(|U_{m_k}|) \rightarrow \nu(0) = 0 \text{ fortemente em quase todo } ]0, T[ \times \Omega \text{ quando } m_k \rightarrow \infty.$$

**Lema 5.** *Seja  $\{f_m\}_{m>0}$  uma sequência de funções de  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $T > 0$ , que converge fracamente em  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$  para  $f$  e  $\{g_m\}_{m>0}$  uma sequência de funções equilimitada e mensurável de  $L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$  que converge em quase todo  $]0, T[ \times \Omega$  para  $g$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . Então,*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega f_m g_m dx dt = \int_0^T \int_\Omega f g dx dt$$

*Demonstração.* Para provar este Lema, basta concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |f_m g_m - f g| dx dt = 0. \quad (4.31)$$

Ao somar e subtrair  $f_m g$  na equação (4.31), se obtém

$$\int_0^T \int_\Omega |f_m g_m + f_m g - f_m g - f g| dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega |f_m| |g_m - g| dx dt \quad (4.32)$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega |g| |f_m - f| dx dt. \quad (4.33)$$

O termo da direita em (4.32), pela desigualdade de Hölder (2.6) e as hipóteses de que  $f_m \in L^1(]0, T[ \times \Omega)$  e  $g_m$  converge em  $L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$  para  $g$ , resulta quando  $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |f_m| |g_m - g| dx dt \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{L^1(]0, T[ \times \Omega)} \|g_m - g\|_{L^\infty(]0, T[ \times \Omega)} = 0. \quad (4.34)$$

No termo (4.33), pelas hipóteses que  $g_m$  é equilimitada, isto é,  $|g_m| \leq p \in L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ , para todo  $m > 0$ , e  $f_m$  convergir fracamente em  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$ , resulta que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |g| |f_m - f| dx dt \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega p (f_m - f) dx dt = 0. \quad (4.35)$$

Portanto, de (4.34) e (4.35) se conclui (4.31). ■

Assim, pelo do Lema 5, segue o limite

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \nu(|u - u_{m_k}|) \left[ 1 + |u_{m_k}|^{p-1} + |u|^{p-1} + 2 \left| \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right|^{p-1} \right] |\lambda_{m_k}| dx dt = 0. \quad (4.36)$$

Considere agora o termo (4.30). Como  $\frac{\partial u_{m_k}}{\partial x}$  converge fracamente em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , e  $\sigma$  é uniformemente contínua com relação ao seu último argumento e limitada em  $L^q(]0, T[ \times \Omega)$ , pode-se dizer, pelo Teorema 11, que existe uma subsequência de  $\sigma$ , com relação a  $m$ , que converge fracamente em  $L^q(]0, T[ \times \Omega)$ . Ainda, como o limite do produto de duas sequências, uma fracamente e outra fortemente, é o produto dos limites, segue que

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, \psi_i, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) \lambda_{m_k} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, \psi_i, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \lambda dx dt.$$

Assim, de (4.30),

$$\begin{aligned} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, \psi_i, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) \lambda_{m_k} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \lambda dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sigma \left( t, x, \psi_i, \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \lambda dx dt \equiv C_i \end{aligned}$$

Mas

$$|C_i| \leq \int_0^T \int_{\Omega} \nu(|\psi_i - u|) \left[ 1 + |\psi_i|^{p-1} + |u|^{p-1} + 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \right] |\lambda| dx dt$$

pelo item *vi*) da Definição 33. E pelos mesmos argumentos anteriormente realizados para obtenção de (4.36) segue que, para uma subsequência  $C_{i_{k_1}}$ ,

$$\lim_{i_{k_1} \rightarrow \infty} |C_{i_{k_1}}| = 0. \quad (4.37)$$

Por fim, para o segundo termo (4.29), de uma análise similar à realizada nos termos anteriores (4.28) e (4.30), segue que

$$\lim_{i_{k_1} \rightarrow \infty} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, \psi_{i_{k_1}}, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) \right] \lambda_{m_k} dx dt \right| = 0. \quad (4.38)$$

Portanto, obtém-se a partir de (4.36), (4.37) e (4.38) o limite de (4.27) quando  $m_k \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u_{m_k}, \frac{\partial u_{m_k}}{\partial x} \right) \lambda_{m_k} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \lambda dx dt = 0.$$

Disso, conclui-se que

$$\rho = \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Logo, quando  $m_k \rightarrow \infty$ , o limite da equação variacional (4.26) é

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(t) v(x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi(t) \frac{dv}{dx} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(t) v(x) dx dt, \quad (4.39)$$

para  $\varphi \in D'([0, T[)$  e  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Finalmente, resta mostrar-se que  $u$  satisfaz a condição inicial  $u(0, x) = g(x)$ . Para isso, observe que sendo  $u_m \in \mathcal{W}_p^{(m)}$ , a equação (4.26) ainda vale se  $\varphi \in C_0^\infty([0, T])$ . Escolhe-se uma  $\varphi$  tal que  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ . Então, integrando por partes com respeito a variável  $t$  em (4.26), tem-se

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_m \frac{d\varphi}{dt} P_m v(x) dx dt + \int_0^T a(u_m, \varphi(t) P_m v) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(t) P_m v(x) dx dt \\ &+ \int_{\Omega} G_m(x) P_m v(x) dx. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Quando  $m_k \rightarrow \infty$ , todos os termos de (4.40) convergem, resultando na formulação limite

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{d\varphi}{dt} v(x) dx dt + \int_0^T a(u, \varphi(t) v(x)) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(t) v(x) dx dt \\ &+ \int_{\Omega} g(x) v(x) dx. \end{aligned} \quad (4.41)$$

O primeiro termo da equação (4.41) pode ser expressado como

$$- \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{d\varphi}{dt} v(x) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u(0, x) v(x) dx.$$

Portanto, de (4.41) se obtém

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi(t) v(x) dx dt + \int_{\Omega} u(0, x) v(x) dx + \int_0^T a(u, \varphi(t) v(x)) dt &= \int_{\Omega} g(x) v(x) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi(t) v(x) dx dt. \end{aligned}$$

Como (4.39) é válida para  $\varphi \in C_0^\infty([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(T) = 0$ , encontra-se que

$$\int_{\Omega} u(0, x) v(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v(x) dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

que implica na igualdade  $g(x) = u(0, x)$ .

**Quinto passo:** A norma sobre  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $L^q(0, T; H^{-s^*}(\Omega))$  e  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  são semicontínuas inferiormente com relação às convergências fraca e fraca\*, isto é, por (4.20),

(4.21) e (4.24), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;H^{-s^*}(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
& \quad + \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \liminf_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;H^{-s^*}(\Omega))} \\
& \leq c \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \|G_m(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))} \right) \\
& = c \left( 1 + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,p}(\Omega))} \right), \quad (4.42)
\end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante independente de  $m$ . Disso, portanto, as estimativas para  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  seguem de (4.42). Já para  $\sigma$ , de (4.24) e (4.42), tem-se

$$\begin{aligned}
\left\| \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(]0,T[ \times \Omega)} & \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left\| \sigma \left( t, x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right\|_{L^q(]0,T[ \times \Omega)} \\
& \leq c_0 \left( 1 + \|u_m\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \right) \\
& \leq c_1 \left( 1 + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t,x)\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))} \right), \quad (4.43)
\end{aligned}$$

onde  $c_1$  é uma constante independente de  $m$ .

**Sexto passo:** Seja  $w = u_1 - u_2$ , com  $u_1$  e  $u_2$  soluções do problema limite

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v(x) dx + \int_{\Omega} \sigma \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dv}{dx} dx \\ \quad = \int_{\Omega} f(t,x) v(x) dx, \quad D'([0, T[), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u(0, x) = g(x). \end{cases}$$

Logo  $w$  é solução do problema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} v(x) dx + \int_{\Omega} \left[ \sigma \left( t, x, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \frac{dv}{dx} dx \\ \quad = 0, \quad D'([0, T[), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ w(0, x) = 0. \end{cases}$$

Assumindo  $w$  como função teste na formulação acima se obtém que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t,x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} \left[ \sigma \left( t, x, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \frac{dw}{dx} dx \leq 0,$$

e isso implica que  $w = u_1 - u_2 = 0$ . Portanto (4.4) terá uma única solução para todo  $\varepsilon$  fixado.

## 4.2 Método de Homogeneização Assintótica Não Linear

Como na Seção 3.1, busca-se construir uma solução assintótica formal, porém, agora para o problema não linear (4.1). Precisamente, da forma

$$u^{(2)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x, y) + \varepsilon u_1(t, x, y) + \varepsilon^2 u_2(t, x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4.44)$$

sendo  $u_k \equiv u_k(t, x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , funções 1-periódicas com relação à variável  $y$  e continuamente diferenciáveis. No problema (4.1), o fluxo  $\sigma$  é não linear e impossibilita a realização do mesmo desenvolvimento feito. Para o formalismo, segue-se um caminho muito comum em problemas não lineares, o da linearização. A linearização é realizada sobre  $\sigma$  com relação às incógnitas  $u^\varepsilon$  e  $\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  na vizinhança dos termos de ordem  $\mathcal{O}(1)$  da assintótica (4.44) e de sua derivada com relação à variável global  $x$ . Tem-se então a seguinte forma linearizada

$$\begin{aligned} \sigma \left( t, x, y, u^{(2)}, \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) &\approx \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &+ [\varepsilon u_1(t, x, y) + \varepsilon^2 u_2(t, x, y)] \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\varepsilon)} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &+ \left[ \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ao substituir (4.44) na equação de (4.1), levando em conta a linearização de  $\sigma$ , obtém-se uma igualdade assintótica, no sentido da Definição 30, que para ser satisfeita, os coeficientes das potências  $\varepsilon^{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , devem ser nulos. Isto fornece equações recorrentes que permitem obter os coeficientes  $u_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , de (4.44), ou seja,

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.45)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ u_1(t, x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\varepsilon)} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - f(t, x) = 0, \quad (4.47) \end{aligned}$$

sujeitas às condições

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0, \text{ 1 - periódica em } y, \\ u_0(t, x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_0(0, x, y) = g(x), \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \end{array} \right. \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1, \text{ 1 - periódica em } y, \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \end{array} \right. \quad (4.49)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2, \text{ 1 - periódica em } y, \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0. \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Inicialmente resolve-se o problema para  $u_0$ , isto é, equação (4.45) e condições (4.48). A partir da equação (4.45) e condições de continuidade (ou contato perfeito) da (4.48) obtemos que

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = K(t, x), \quad \forall y \in Y.$$

Pelo item *vi*) da Definição 33 podemos dizer que  $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) > 0$  para quase todo  $t \in ]0, T[$ ,  $x \in \Omega$  e  $y \in Y$ . Assim a derivada de  $u_0$  com relação a  $y$  pode ser expressada como

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = K(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1}. \quad (4.51)$$

Com intuito de obter  $K$  aplica-se a média integral  $\langle \cdot \rangle$  em ambos os lados de (4.51), observando a 1-periodicidade em  $y$  e continuidade para todo  $y \in Y$  de  $u_0$ . Assim,

$$0 = K(t, x) \int_0^1 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} dy,$$

e, pela positividade do segundo fator, segue que

$$K(t, x) = 0. \quad (4.52)$$

Logo, ao substituir (4.52) em (4.51) tem-se que  $u_0$  não depende da variável  $y$ , ou seja,

$$u_0(t, x, y) = u_0(t, x), \quad (4.53)$$

o qual faz com que (4.45) seja satisfeita identicamente. Disso tudo, é possível ter uma breve ideia do comportamento da solução homogenizada  $u_0$ , isto é, ele descreve a resposta macroscópica num meio que sofre ações externas  $f$ , contínua em  $]0, T[ \times \Omega$ , que satisfaz uma  $g$  no tempo inicial e tem concentração nula no contorno  $\partial\Omega$ . Por enquanto só foram obtidas essas informações para  $u_0$ .

Na sequência, serão apontadas algumas relações importantes na construção da solução assintótica formal  $u^{(2)}$ , as quais permitirão obter expressões explícitas para  $u_1$  e  $u_2$ .

Da substituição de (4.53) em (4.46) se obtém

$$\frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (4.54)$$

chamada, quando fixados  $t$  e  $x$ , de equação do problema local, a qual fornecerá o segundo coeficiente  $u_1$  da s.a.f. (4.44).

A equação (4.47) fornecerá o terceiro coeficiente  $u_2$  da s.a.f. (4.44). Para melhor entendimento, se reescreve a equação (4.47) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] &= f(t, x) - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \quad (4.55) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ u_1(t, x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

a qual assume a mesma estrutura, para  $t$  e  $x$  fixos, da equação em (3.28), supondo conhecidas  $u_0$  e  $u_1$ , onde

$$F_0(y) = f(t, x) - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

e

$$F_1(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1(t, x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

Para garantir a existência de uma solução  $u_2$  1-periódica de (4.55) aplica-se o Lema 1 para cada  $x$  e  $t$  fixos, de onde segue que a condição necessária e suficiente para a existência é a equação

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = f(t, x). \quad (4.56)$$

A equação (4.56) é chamada de equação do problema homogeneizado, a qual fornece o primeiro termo  $u_0$  da solução assintótica. A equação homogeneizada (4.56) deve ser complementada pelas condições atualizadas de (4.48), sendo

$$\begin{cases} u_0(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_0(0, x) = g(x), \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Note que a equação (4.56) contém informações de  $u_1$ , assim como (4.54) tem informação de  $u_0$ . Assim o par  $(u_0, u_1)$  é solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = f(t, x), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma} = 0, \\ u_0(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_0(0, x) = g(x), \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left\| \left\| \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\| \right\|_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ u_1, 1\text{-periódica.} \end{cases} \quad (4.58)$$

Observe que (4.58) é um problema apenas para  $y$ , considerando  $x$  e  $t$  fixos. Definindo  $\bar{\epsilon}_0 = u_0(t, x)$  e  $\bar{\epsilon}_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$  como parâmetros, segue de (4.58) uma família biparamétrica de problemas com parâmetros  $\bar{\epsilon}_0$  e  $\bar{\epsilon}_1$ , para a qual a existência de solução 1-periódica em  $y$  é garantida pelo seguinte lema:

**Lema 6.** *Sejam  $\bar{\epsilon}_0 = u_0(t, x)$ ,  $\bar{\epsilon}_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$  dois parâmetros e  $\sigma(t, x, y, \psi, \xi)$  diferenciável por partes em  $\xi$ . Então, para todo  $x$  e  $t$  fixos, existe uma única função  $u_1(t, x, y)$ , 1-periódica em  $y$ , solução de (4.58). Precisamente, existem funções  $\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$ , 1-periódicas em  $y$ , únicas salvo uma constante aditiva, ou seja,  $\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \tilde{\mathcal{N}}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) + C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$ , sendo  $\tilde{\mathcal{N}}_1$  soluções da família biparamétrica de problemas  $\mathcal{P}_L^{(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)}$  com parâmetros  $\bar{\epsilon}_0$  e  $\bar{\epsilon}_1$  definida por*

$$\mathcal{P}_L^{(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = 0, & y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \llbracket \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \tilde{\mathcal{N}}_1(0, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = 0, & 1\text{-periódica} \end{cases} \quad (4.59)$$

e  $C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração:* Seja  $\epsilon = \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$ . Ao integrar a equação em (4.59) com respeito a  $y$ , segue da hipótese de continuidade que

$$\sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) = \bar{\sigma} \quad \forall y \in Y, \quad (4.60)$$

em que  $\bar{\sigma}$  é uma constante com relação a  $y$ . Seja

$$F(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) = \sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) - \bar{\sigma} = 0,$$

cujas derivadas com relação a  $\epsilon$  é

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon^i} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^i} \neq 0, \quad i = 1, 2,$$

em que  $i$  denota a indicadora da fase. Logo  $F$  satisfaz as condições do Teorema da Função Implícita [85] (p. 224) por fase. A partir disso, existe a função  $\epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) = \chi_1(y)\epsilon^1(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) + \chi_2(y)\epsilon^2(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma})$ , 1-periódica em  $y$ , inversa de  $\sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon)$  com relação a  $\epsilon$ :

$$\epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) = \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}.$$

Assim, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}_1,$$

que, ao integrá-la em  $y$ , considerando a hipótese de continuidade, obtém-se

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \int_0^y (\epsilon(t, x, s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}_1) ds + C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1), \quad \forall y \in Y, \quad (4.61)$$

em que  $\tilde{\mathcal{N}}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \int_0^y (\epsilon(t, x, s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}_1) ds$ .

Agora, para garantir que  $\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$  seja 1-periódica, deve cumprir-se a relação  $\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = 0$ . De fato, a diferença

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)|_{s=y}^{s=y+1} &= \int_y^{y+1} (\epsilon(t, x, s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}_1) ds \quad \forall y \in Y, \\ &= \int_0^1 (\epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}_1) dy \\ &= \langle \epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) \rangle - \bar{\epsilon}_1. \end{aligned}$$

Logo, para que  $\mathcal{N}_1$  seja 1-periódica, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\langle \epsilon(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\sigma}) \rangle = \bar{\epsilon}_1. \quad \blacksquare$$

A partir dessa demonstração, pode-se observar na equação (4.60) que  $\sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon)$ , avaliada em  $\epsilon = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ , independe explicitamente da variável  $y$ . Assim, denota-se por

$$\hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \left\langle \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma} \quad (4.62)$$

o chamado fluxo efetivo, que satisfaz a condição de contato

$$\left[ \left[ \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0.$$

Além disso, garantida a existência e unicidade de solução  $\mathcal{N}_1$ , deve-se verificar a existência e unicidade da solução homogeneizada  $u_0$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\Gamma} = 0, \\ \left[ \left[ \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0, \\ u_0(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_0(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (4.63)$$

Para isso, devemos verificar se o fluxo efetivo (4.62) preserva as propriedades do fluxo original. Tal verificação é feita na subseção seguinte. Antes disso, será obtida a solução  $u_2$  1-periódica em  $y$  de (4.47). Fixando  $x$  e  $t$  em (4.47) e (4.50), busca-se uma  $\mathcal{N}_2 \left( y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)$ , solução 1-periódica do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right. \\ \left. + \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right], \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \llbracket \mathcal{N}_2 \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) + \mathcal{N}_1 \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \tilde{\mathcal{N}}_2(0, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = 0, \quad 1 - \text{periódica.} \end{array} \right. \quad (4.64)$$

A aplicação do Lema 1 determina a condição necessária e suficiente para a existência da solução  $\mathcal{N}_2$  1-periódica, a equação do problema homogeneizado (4.56). Ao resolver a equação (4.64) para a derivada de  $\mathcal{N}_2$ , considerando a condição de continuidade do fluxo, existe uma constante  $C$  para todo  $y \in Y$  tal que

$$\frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \left[ C + \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}. \quad (4.65)$$

Como  $\mathcal{N}_2(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$  é 1-periódica em  $y$ , o cálculo da média integral  $\langle \cdot \rangle$  em (4.65) permite obter  $C$ , ou seja,

$$C = - \left\langle \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) \right]^{-1} \left[ \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} (t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \epsilon) \right] + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right\rangle, \quad (4.66)$$

com  $\epsilon = \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$ . Integrando novamente (4.65), agora de 0 a  $y$ , considerando a continuidade de  $\mathcal{N}_2$ , se obtém

$$\mathcal{N}_2(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = - \int_0^y \left\{ \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left( t, x, s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) \right]^{-1} \left[ \mathcal{N}_1(s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\epsilon)} \left( t, x, s, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) \right] + C \right\} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} ds,$$

onde  $C$  é dado por (4.66).

Note que o espaço que melhor caracteriza as soluções  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  é  $W_{\#}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$  para  $t$  e  $x$  fixos. A partir disso, determina-se unicamente as constantes arbitrárias a partir de  $\langle \mathcal{N}_1 \rangle$  e  $\langle \mathcal{N}_2 \rangle$ . Assim,

$$\mathcal{N}_i(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \tilde{\mathcal{N}}_i(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) - \langle \tilde{\mathcal{N}}_i \rangle, \quad i = 1, 2.$$

A unicidade de  $\mathcal{N}_i$  depende da unicidade de  $u_0$ , portanto se faz relevante garantir sua existência e unicidade. Essa garantia é dada na subseção seguinte quando se mostra a preservação das propriedades do fluxo (Definição 33) para o efetivo.

O processo descrito acima, portanto, é a forma de como se constrói a solução assintótica formal  $u^{(2)}$  para o problema (4.1), assumindo agora a seguinte configuração

$$u^{(2)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon \mathcal{N}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right).$$

*Nota 2.* Você deve estar se perguntando: por que o problema homogeneizado (4.63), ainda se entende como “heterogêneo”? Isso porque a homogeneização foi feita sobre a escala microscópica. O fluxo geral definido contempla uma generalidade de situações devido às variáveis explícitas  $t$ ,  $x$ ,  $\frac{x}{\varepsilon}$ ,  $u^\varepsilon$  e  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$ . Por exemplo, pode-se estudar um laminado bifásico obtido pela replicação periódica de uma célula básica composta por três lâminas onde a central pode apresentar propriedades funcionalmente graduadas, logo o fluxo pode ser expresso por

$$a\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$$

com  $a\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) a_1(t) + \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) a_2(t, x)$ , em que sua forma efetiva assumiria

$$\hat{a}(t, x) \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\text{com } \hat{a}(t, x) = \left( \frac{c_1}{a_1(t)} + \frac{c_2}{a_2(t, x)} \right)^{-1}.$$

Outro questionamento que merece ser esclarecido é o seguinte: O meio, para o qual se deseja homogeneizar, necessariamente precisa ser periódico? Não. É possível estudar ou homogeneizar um compósito laminado apenas com três lâminas homogêneas, por exemplo. Este é um exemplo não periódico, porém heterogêneo. Para se homogeneizar,

fixa-se o volume do meio e idealiza-se uma partição de  $n$  elementos recorrentes (células básica) idênticas ao material original, mas numa escala menor. Configurando assim um material que é microperiódico. Isto é, o problema original que não apresenta coeficientes rapidamente oscilantes passa a apresentar, que pode ser caracterizado por

$$a(x) \Rightarrow a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Portanto podem-se aplicar as técnicas aqui apresentadas. Obviamente, a solução homogeneizada não será tão próxima da exata, mas uma aproximação pode ser obtida através da s.a.f..

#### 4.2.1 Preservação das propriedades do fluxo

Nesta subseção se provam algumas propriedades do operador homogeneizado que são preservadas do original ( $S_{\#,Y}$ ). Este resultado se faz relevante pois implica, em particular, na existência e unicidade da solução do problema homogeneizado (4.63). O objetivo é garantir os itens *iv*), *vi*) e *vii*) da Definição 33 para  $\hat{\sigma}$  de (4.62). Evidentemente,  $\hat{\sigma}$  satisfaz os itens *ii*) e *iii*), considerando todos argumentos de  $\sigma$  independentes. A seguir, verificam-se os demais itens:

*Item iv*). Se

$$\sigma(t, x, y, \bar{\varepsilon}_0, 0) = 0,$$

então

$$\hat{\sigma}(t, x, \bar{\varepsilon}_0, 0) = \langle \sigma(t, x, y, \bar{\varepsilon}_0, 0) \rangle = \langle 0 \rangle = 0.$$

■

*Item v*). Considere que para  $x$  e  $t$  fixados, podemos obter uma relação do tipo

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2(y) = (1 + \omega(y, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1))\bar{\varepsilon}_1, \quad (4.67)$$

para  $0 < \gamma_1 \leq \omega(y, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1) \leq \gamma_2 < \infty$ , e ainda, existem  $h^s(y) \in L^p(Y)$  e o compacto  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , tais que para quaisquer  $(\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1) \in Q$

$$|1 + \omega(y, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1)| \leq h^s(y), \quad \forall (\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1) \in Q. \quad (4.68)$$

Assim, do item *v*) da Definição 33 segue

$$|\widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)|^q \leq M(c_1)^q (1 + |\bar{\epsilon}_0|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1|^{p-1})^q,$$

logo

$$|\widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)| \leq c_4 (1 + |\bar{\epsilon}_0|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1|^{p-1}),$$

em que  $c_4 = c_1 M^{\frac{1}{q}}$ ,  $\|h^s\|_{L^p(Y)}^p = M \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $2 \leq p < \infty$ . ■

*Item vi*). Para  $x$  e  $t$  fixos, sabe-se pelo item *vi*) da Definição 33

$$\begin{aligned} (\widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1) - \widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2)) (\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2) &\geq c_2 \langle |\bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1 - \bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_2^2|^p \rangle \\ &\quad + \langle (\sigma(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1) - \sigma(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2 + \bar{\epsilon}_2^2)) (\bar{\epsilon}_2^1 - \bar{\epsilon}_2^2) \rangle \end{aligned} \quad (4.69)$$

Define-se  $\bar{\epsilon}_2^i = \frac{\partial \mathcal{N}_1^{\{\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^i\}}}{\partial y}$ . Observando (4.59) e a periodicidade de  $\mathcal{N}_1$ , se obtém para o segundo termo da direita em (4.69) que

$$\left\langle \left[ \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1^{\{\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1\}}}{\partial y} \right) - \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2 + \frac{\partial \mathcal{N}_1^{\{\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2\}}}{\partial y} \right) \right] \left( \frac{\partial \mathcal{N}_1^{\{\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1\}}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{N}_1^{\{\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2\}}}{\partial y} \right) \right\rangle = 0.$$

Agora, para o primeiro termo da direita de (4.69), existe  $h^i(y) \in L^p(Y)$ , independente de  $(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^j) \in Q$ ,  $j = 1, 2$ , tal que  $\|h^i\|_{L^p(Y)}^p = P \in \mathbb{R}_+^*$  e ainda,

$$h^i(y) \leq |1 + w(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)|, \quad \forall (\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) \in Q. \quad (4.70)$$

Logo, usando (4.70) no primeiro termo da direita de (4.69) se obtém

$$\langle |\bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1 - \bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_2^2|^p \rangle \geq P |\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2|^p.$$

Portanto

$$(\widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^1) - \widehat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^2)) (\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2) \geq c_5 |\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2|^p,$$

onde  $c_5 = c_2 P$ . ■

*Item vii*). Do item *vii*) da Definição 33 e desigualdade de Jensen [86] (p. 62), segue

$$|\widehat{\sigma}(t_1, x_1, \bar{\epsilon}_0^1, \bar{\epsilon}_1^1) - \widehat{\sigma}(t_2, x_2, \bar{\epsilon}_0^2, \bar{\epsilon}_1^2)|^q \leq \langle g_1(y) \rangle + \langle g_2(y) \rangle.$$

onde

$$\langle g_1(y) \rangle = \langle \nu(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + |\bar{\epsilon}_0^1 - \bar{\epsilon}_0^2|)^q (1 + |\bar{\epsilon}_0^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_0^2|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1^2 + \bar{\epsilon}_2^2|^{p-1})^q \rangle \quad (4.71)$$

e

$$\langle g_2(y) \rangle = (c_3)^q \langle (1 + |\bar{\epsilon}_0^1| + |\bar{\epsilon}_0^2| + |\bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1| + |\bar{\epsilon}_1^2 + \bar{\epsilon}_2^2|)^{q(p-2)} |\bar{\epsilon}_1^1 + \bar{\epsilon}_2^1 - \bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_2^2|^q \rangle. \quad (4.72)$$

Pela relação (4.67) e estimativa (4.68) se obtém para (4.71) e (4.72), respectivamente, que

$$\langle g_1(y) \rangle \leq M\nu(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + |\bar{\epsilon}_0^1 - \bar{\epsilon}_0^2|)^q (1 + |\bar{\epsilon}_0^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_0^2|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1^2|^{p-1})^q,$$

$$\langle g_2(y) \rangle \leq M(c_3)^q (1 + |\bar{\epsilon}_0^1| + |\bar{\epsilon}_0^2| + |\bar{\epsilon}_1^1| + |\bar{\epsilon}_1^2|)^{q(p-2)} |\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2|^q.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\widehat{\sigma}(t_1, x_1, \bar{\epsilon}_0^1, \bar{\epsilon}_1^1) - \widehat{\sigma}(t_2, x_2, \bar{\epsilon}_0^2, \bar{\epsilon}_1^2)| &\leq M^{\frac{1}{q}} \nu(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + |\bar{\epsilon}_0^1 - \bar{\epsilon}_0^2|) (1 + |\bar{\epsilon}_0^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_0^2|^{p-1} \\ &\quad + |\bar{\epsilon}_1^1|^{p-1} + |\bar{\epsilon}_1^2|^{p-1}) + c_3 M^{\frac{1}{q}} (1 + |\bar{\epsilon}_0^1| + |\bar{\epsilon}_0^2| + |\bar{\epsilon}_1^1| + |\bar{\epsilon}_1^2|)^{p-2} |\bar{\epsilon}_1^1 - \bar{\epsilon}_1^2|, \end{aligned} \quad (4.73)$$

■

Assim, garantida a preservação dessas propriedades,  $\widehat{\sigma}$  pertence a classe  $S_{\#}$ , e portanto, existe uma única solução  $u_0$  para o problema homogeneizado (4.63) em que  $u_1$  é solução do problema local (4.58).

#### 4.2.2 Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo

Nesta subseção propõe-se a mesma correção no contorno e nos curtos efeitos do tempo realizada para o caso linear. Como mencionado, em geral, a solução assintótica de primeira ordem  $u^{(1)}$  não satisfaz exatamente as condições de contorno e iniciais. Tendo isso em vista, apresenta-se a abordagem de correção não linear para se obter uma solução assintótica de primeira ordem  $u_c^{(1)}$  corrigida.

A ideia dessa abordagem é construir uma e.a. da solução exata  $u^\varepsilon$  da forma

$$\begin{aligned} u^{(\infty)}(t, x, \varepsilon) &= u_0(t, x) + \varepsilon \mathcal{N}_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon \mathcal{N}_1^* \left( \frac{t}{\xi}, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2 \left( \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2^* \left( \frac{t}{\xi}, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde  $u_0, \mathcal{N}_i, i \geq 1$ , são conhecidas, e  $\mathcal{N}_i^* = \mathcal{N}_i^* \left( \frac{t}{\xi}, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$ ,  $\xi = \varepsilon^2, i \geq 1$ , são funções infinitamente diferenciáveis a determinar. Tendo como intenção a construção de uma e.a. de primeira ordem, será corrigido apenas o termo  $\mathcal{N}_1$ . A dedução da relação que fornece este termo corretivo é feita de maneira análoga à construção da solução assintótica tradicional  $u^{(1)}$ . Ao substituir a série truncada até o termo de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  de (4.74) no problema linearizado de (4.1), aplicar as regras da cadeia em  $t$  e  $x$ , respectivamente,

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y},$$

se obtém uma igualdade assintótica, que segundo a Definição 30, para  $u_c^{(2)}$  ser uma s.a.f., as seguintes relações devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} : & \quad \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) = 0, \\ \varepsilon^0 : & \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{N}_2^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mathcal{N}_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mathcal{N}_1^* \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}_2^*}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right] = f. \end{aligned}$$

Além disso, se deduz as seguintes condições de contato

$$\llbracket \mathcal{N}_1^* \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \quad \llbracket \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \quad (4.75)$$

e

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{N}_2^* \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, & \quad \llbracket \left( \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. \left( \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_2^*}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right]_{\Gamma, \Gamma_0} = 0. \end{aligned}$$

A partir da relação  $(\varepsilon^{-1})$  se determina  $\mathcal{N}_1^*$ . Para  $x$  e  $t$  fixados, a equação  $(\varepsilon^{-1})$  é do tipo parabólico e para que exista uma única solução, devem-se definir as condições inicial, contorno e de contatos. Para isso, define-se  $\tau = t/\varepsilon^2$ , logo para  $t = 0$  tem-se  $\tau = 0$ . Como se deseja que a solução assintótica satisfaça a condição inicial  $g(x)$ , impõe-se que  $\mathcal{N}_1^*$  seja

em  $\tau = 0$ ,  $-\mathcal{N}_1$ . Agora para que a s.a.f. satisfaça a condição de contorno nula, define-se como condição para os contornos a constante  $\langle \tilde{\mathcal{N}}_1 \rangle$ . Assim, complementadas pelas condições deduzidas (4.75), configura-se o seguinte problema local de correção,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) = 0, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \quad \tau \in ]0, T[, \\ \llbracket \mathcal{N}_1^* \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \mathcal{N}_1^*(0, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = -\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1), \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \\ \mathcal{N}_1^*(\tau, 0, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \mathcal{N}_1^*(\tau, 1, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \langle \tilde{\mathcal{N}}_1 \rangle, \quad \tau \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Portanto, resolvendo (4.56), (4.59) e (4.76) obtém-se a solução assintótica de primeira ordem  $u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon \mathcal{N}_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon \mathcal{N}_1^* \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$  com os curtos efeitos do tempo e o contorno corrigidos.

Além de fornecer uma melhor aproximação da solução exata, é possível provar que  $u_c^{(1)}$  é uma s.a.f. e usá-la para demonstrar que  $u_0$  é  $\varepsilon$ -próxima da exata na norma do espaço que pertencem, isto é, mostrar que o meio homogêneo obtido é equivalente ao heterogêneo.

### 4.2.3 Proximidade

A proximidade entre as soluções homogeneizada e exata não lineares, agora serão estimadas na norma do espaço de  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ . Para isso, definem-se os problemas  $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_c^{(1)}, \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right) = f(t, x) - F(t, x, \varepsilon), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u_c^{(1)} \rrbracket_{\Gamma} = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_c^{(1)}, \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0, \\ u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon) = 0, \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_c^{(1)}(0, x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

$\mathcal{P}_2$  como o problema (4.1)

$$\mathcal{P}_2 \equiv \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \right] \right]_\Gamma = 0, \\ u^\varepsilon(t, x) = 0, & t \in ]0, T[, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

e  $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  como

$$\mathcal{P}_3 \equiv \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_c^{(1)}, \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right) = F(t, x, \varepsilon), \\ t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon - u_c^{(1)} \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_c^{(1)}, \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right) \right] \right]_\Gamma = 0, \\ u^\varepsilon(t, x) - u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon) = 0, & t \in ]0, T[, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(t, x) - u_c^{(1)}(0, x, \varepsilon) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Em virtude da não linearidade de  $\sigma$  não pode-se estimar diretamente a solução do problema  $\mathcal{P}_3$  pela estimativa (4.42). Isso, só poderia ser realizado se o problema da diferença  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  tivesse a seguinte formulação

$$\mathcal{P}_4 \equiv \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon - u_c^{(1)}, \frac{\partial}{\partial x} (u^\varepsilon - u_c^{(1)}) \right) = F_0(t, x, \varepsilon), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon - u_c^{(1)} \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left[ \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon - u_c^{(1)}, \frac{\partial}{\partial x} (u^\varepsilon - u_c^{(1)}) \right) \right] \right]_\Gamma = 0, \\ u^\varepsilon(t, x) - u_c^{(1)}(t, x, \varepsilon) = 0, & t \in ]0, T[, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(t, x) - u_c^{(1)}(0, x, \varepsilon) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

De fato, não se tem como garantir que  $\mathcal{P}_3$  possa ser reescrita da forma  $\mathcal{P}_4$  devido à não linearidade de  $\sigma$ . Além disso, determinar  $F_0$  ou uma estimativa para ele não seria simples, pois não temos uma expressão definida para  $\sigma$ . Como alternativa, será usado o problema  $\mathcal{P}_3$  e as propriedades da Definição 33 para estimar  $u^\varepsilon - u_c^{(1)}$ .

A partir da formulação variacional de  $\mathcal{P}_3$ , assumindo uma função teste  $w = u^\varepsilon - u_c^{(1)}$ , seguido do item *vi*) da Definição 33, se deduz que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^p dx \leq \int_{\Omega} F w dx. \quad (4.77)$$

Pela equivalência  $\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)}$ , seguida das desigualdades (2.3) e (2.5) no termo da direita de (4.77), segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \leq \frac{1}{qc_2^{q/p}} \|F\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^q + \frac{c_2}{p} \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p,$$

de onde se obtém ao integrar em  $t$

$$\|w\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p \leq \frac{1}{c_2^q} \|F\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}^q.$$

Observe nos expoentes que se  $p = 2 \Rightarrow q = 2$ , a desigualdade acima ainda é válida, portanto, segue que

$$\|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq c_3 \|F\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))}.$$

O objetivo agora é determinar  $F$ , ou uma aproximação dela, a qual será fornecida pelo  $\mathcal{P}_1$ . Para isto, expande-se em série de Taylor o termo  $\sigma$  com relação à  $u_c^{(1)}$  e sua derivada  $\frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x}$  na vizinhança de  $u_0$  e  $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y}$ , respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} -F &= \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_c^{(1)}, \frac{\partial u_c^{(1)}}{\partial x} \right) - f(t, x) = \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) - f(t, x) \\ &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial(u^\varepsilon)} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1^* \frac{\partial \sigma}{\partial(u^\varepsilon)} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_1^*}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

e, por (4.56) e (4.62), segue que

$$\begin{aligned} F &= -\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \\ &+ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial(u^\varepsilon)} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1^* \frac{\partial \sigma}{\partial(u^\varepsilon)} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_1^*}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Pela regularidade de  $u_1 + u_1^*$  e  $\sigma$ , através da estimativa (2.10) pode-se afirmar que  $\|F\|_{L^q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Disso segue que

$$\|u^\varepsilon - u_c^{(1)}\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

De forma análoga, obtém-se

$$\|u_c^{(1)} - u_0\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

e, assim, pela desigualdade (2.7) segue a estimativa

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

### 4.3 Método de Convergência em Duas Escalas Não Linear

Nesta seção, o formalismo do MCDE é apresentado para o problema não linear (4.1), o qual é similar ao realizado na Seção 3.2. Será visto que a diferença está na determinação do limite em duas escalas do termo genérico do fluxo.

Para a Definição 31 ser aplicada, é necessário garantir que as sequências  $\{u^\varepsilon\}$ ,  $\left\{\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right\}$  e  $\{\sigma^\varepsilon\}$  sejam limitadas nas suas respectivas normas, por constantes independentes do parâmetro  $\varepsilon$ . Com efeito, a partir da prova de existência e unicidade para  $u^\varepsilon$ , para  $\varepsilon$  fixado, solução de (4.1), foram estabelecidas as estimativas (4.42) e (4.43), garantindo assim a finitude de  $u^\varepsilon$  na norma de  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ ,  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  e  $\sigma^\varepsilon$  em  $L^q(]0, T[ \times \Omega)$ . Garantidas tais estimativas, o Teorema 20 pode ser aplicado. Assim, quando a subsequência  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , a formulação variacional de (4.1)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial t} \phi(x) \varphi(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k}, \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \right) \frac{d\phi}{dx} \varphi(t) dx dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega f(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx dt, \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \in D(]0, T[), \end{aligned} \quad (4.78)$$

converge fracamente para

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_0(t, x) \phi(x) \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_0^T \int_\Omega \int_Y \sigma^0(t, x, y) dy \frac{d\phi}{dx} \varphi(t) dx dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega f(t, x) \phi(x) \varphi(t) dx dt + \int_\Omega g(x) \phi(x) dx, \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde  $\sigma^0$  é o limite em duas escalas de  $\sigma$ .

Inicialmente, se deseja estudar o comportamento limite da diferença entre (4.78) e (4.79) para  $\phi(x) = \varepsilon^{-1}\phi_1(x)\phi_2(x/\varepsilon)$  com  $\phi_1 \in D(\Omega)$ ,  $\phi_2 \in C_{\#}^{\infty}(Y)/\mathbb{R}$ . A escolha da função  $\phi$  é conveniente pois mapeia informações da microescala e permite obter o limite de  $\sigma^{\varepsilon_k}$  com informações microscópicas. Logo,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{u^{\varepsilon_k}(t, x) - u_0(t, x)}{\varepsilon_k} \right) \phi_1(x) \phi_2 \left( \frac{x}{\varepsilon_k} \right) \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_Y \sigma^0(t, x, y) dy \right. \\ & \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k}, \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \right) \right) \left( \frac{d\phi_1}{dx} \phi_2 \left( \frac{x}{\varepsilon_k} \right) + \frac{1}{\varepsilon_k} \phi_1(x) \frac{d\phi_2}{dy} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon_k}} \right) \frac{\varphi(t)}{\varepsilon_k} dx dt = 0. \end{aligned}$$

De multiplicar por  $\varepsilon_k^2$  segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \varepsilon_k \int_0^T \int_{\Omega} (u^{\varepsilon_k}(t, x) - u_0(t, x)) \phi_1(x) \phi_2 \left( \frac{x}{\varepsilon_k} \right) \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_Y \sigma^0(t, x, y) dy \right. \\ & \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k}, \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial x} \right) \right) \left( \varepsilon_k \frac{d\phi_1}{dx} \phi_2 \left( \frac{x}{\varepsilon_k} \right) + \phi_1(x) \frac{d\phi_2}{dy} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon_k}} \right) \varphi(t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Note que  $\phi_1(x)\phi_2(y) \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\frac{d\phi_1}{dx} \phi_2(y) \varphi(t)$ ,  $\phi_1(x) \frac{d\phi_2}{dy} \varphi(t)$  são funções teste admissíveis. Assim, quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , tem-se

$$\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \int_Y \sigma^0(t, x, y) dy - \sigma^0(t, x, y) \right) \phi_1(x) \frac{d\phi_2}{dy} \varphi(t) dy dx dt = 0,$$

e pela periodicidade de  $\phi_2$ , segue que

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_Y \sigma^0(t, x, y) \frac{d\phi_2}{dy} dy \right) \phi_1(x) \varphi(t) dx dt = 0.$$

Isto implica que

$$- \int_Y \sigma^0(t, x, y) \frac{d\phi_2}{dy} dy = 0, \quad \forall \phi_2 \in C_{\#}^{\infty}(Y)/\mathbb{R}$$

para  $t$  e  $x$  fixos. Agora, com intuito de identificar uma lei para o limite  $\sigma^0$ , define-se a sequência  $\{v^{l,\varepsilon}\}$  de funções teste perturbadas por

$$v^{l,\varepsilon}(t, x) = v_0^l(t, x) + v_1^l \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + s v_2 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (4.80)$$

com  $v_0^l \in D(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $v_1^l, v_2 \in D(]0, T[ \times \Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$  e  $s > 0$ .

Assume-se ainda que

$$v_0^l \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x} \text{ fortemente em } L^p(]0, T[ \times \Omega) \quad (4.81)$$

e

$$v_1^l \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial y} \text{ fortemente em } L^p(]0, T[ \times \Omega; L^p_{\#}(Y)) \quad (4.82)$$

quando  $l \rightarrow \infty$ .

Note que  $\{v^{l,\varepsilon}\}$  é uma sequência de funções teste admissíveis e, portanto, converge em duas escalas para  $v^l(t, x, y) = v_0^l(t, x) + v_1^l(t, x, y) + sv_2(t, x, y)$ . Define-se ainda a função teste  $w^l \in D(\Omega)$  que converge fortemente para  $u_0(x, T) \in L^p(\Omega)$ , quando  $l \rightarrow \infty$ .

A condição  $vi)$  da Definição 33 fornece que

$$0 \leq \left( \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) \right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - v^{l,\varepsilon} \right)$$

e que ao adicionar o termo positivo  $\frac{1}{2} (u^\varepsilon(T, x) - w^l(x))^2$  resulta

$$0 \leq \left( \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) \right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - v^{l,\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} (u^\varepsilon(T, x) - w^l(x))^2 \quad (4.83)$$

De acordo com a formulação variacional (4.78) em (4.83) obtém-se

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_0^T \int_\Omega \left[ -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} u^\varepsilon(t, x) + f(t, x) u^\varepsilon(t, x) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right. \\ & \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) v^{l,\varepsilon} + \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) v^{l,\varepsilon} \right] dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega (u^\varepsilon(T, x)^2 - 2u^\varepsilon(T, x)w^l(x) + w^l(x)^2) dx. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Agora, pela relação

$$\int_0^T \int_\Omega -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} u^\varepsilon(t, x) dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u^\varepsilon(t, x)^2 dx dt = -\frac{1}{2} \int_\Omega (u^\varepsilon(T, x)^2 - g(x)^2) dx \quad (4.85)$$

se obtém de (4.84) que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_0^T \int_\Omega \left[ f(t, x) u^\varepsilon(t, x) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right. \\ & \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) v^{l,\varepsilon} + \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon} \right) v^{l,\varepsilon} \right] dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega (g(x)^2 - 2u^\varepsilon(T, x)w^l(x) + w^l(x)^2) dx. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Para tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ , os limites para  $\sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  e  $\sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon}\right) v^{l,\varepsilon}$  devem existir e identificados.

Para isso será utilizado o seguinte resultado de Woukeng [115].

**Teorema 23.** *Sejam  $\psi_0 \in D(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $\psi_1 \in D(]0, T[ \times \Omega; C_\#^\infty(Y))$ ,  $\sigma \in S_{\#, Y}$ . Para  $\varepsilon > 0$ , considere*

$$\Phi^\varepsilon = \psi_0 + \varepsilon\psi_1,$$

ou seja,  $\Phi^\varepsilon(t, x) = \psi_0(t, x) + \varepsilon\psi_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  para  $(t, x) \in ]0, T[ \times \Omega$ . Seja  $\{u^\varepsilon\}$  uma seqüência em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , tal que  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , em que  $u_0 \in L^p(]0, T[ \times \Omega)$ . Então, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x}\right) \xrightarrow{2e} \sigma\left(t, x, y, u_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) \text{ em } L^q(]0, T[ \times \Omega).$$

Além disso, se  $\{v^\varepsilon\}$  é uma seqüência em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  tal que  $v^\varepsilon \xrightarrow{2e} v_0$  em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , em que  $v_0 \in L^p(]0, T[ \times \Omega \times Y)$ . Então, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^T \int_\Omega \sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x}\right) v^\varepsilon dxdt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega \int_Y \sigma\left(t, x, y, u_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) v_0 dydxdt.$$

*Demonstração.* [115]. ■

De (4.43) pode-se afirmar que a seqüência  $\left\{\sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon}\right)\right\}$  é uniformemente limitada na norma de  $L^q(]0, T[ \times \Omega)$  e, portanto, converge em duas escalas. Segue das hipóteses que  $v^{l,\varepsilon}$  é uma função teste admissível. E ainda, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov [40], existe uma subseqüência  $u^{\varepsilon_k} \rightarrow u_0$  em  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ . A partir dessas considerações e do Teorema 23 segue os limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} dxdt = \int_0^T \int_\Omega \int_Y \sigma\left(t, x, y, u_0, v^l\right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) dydxdt$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \sigma\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, v^{l,\varepsilon}\right) v^{l,\varepsilon} dxdt = \int_0^T \int_\Omega \int_Y \sigma\left(t, x, y, u_0, v^l\right) v^l(t, x, y) dydxdt.$$

Logo, quando  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  se obtém em (4.86)

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ f(t, x) u_0(t, x) - \sigma(t, x, y, u_0, v^l) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. - \sigma^0(t, x, y) v^l(t, x, y) + \sigma(t, x, y, u_0, v^l) v^l(t, x, y) \right] dy dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g(x)^2 - 2u_0(T, x)w^l(x) + w^l(x)^2) dx.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Conhecida a relação (4.85) para  $u_0(t, x)$  e a formulação limite (4.79) se deduz a relação

$$\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ f(t, x) u_0(t, x) - \sigma^0(t, x, y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] dy dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0(T, x)^2 - g(x)^2) dx,$$

que ao considerá-la em (4.87) fica

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ -\sigma(t, x, y, u_0, v^l) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \sigma^0(t, x, y) \left( v^l - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + \sigma(t, x, y, u_0, v^l) v^l(t, x, y) \right] dy dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0(T, x)^2 - 2u_0(T, x)w^l(x) + w^l(x)^2) dx.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Além disso, de acordo com as hipóteses (4.81)-(4.82), quando  $l \rightarrow \infty$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
v^l & \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \text{ fortemente em } L^p(]0, T[ \times \Omega \times Y), \\
\sigma(t, x, y, u_0, v^l) & \rightarrow \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right),
\end{aligned}$$

e

$$\sigma(t, x, y, u_0, v^l) v^l(t, x, y) \rightarrow \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right),$$

em quase todo  $]0, T[ \times \Omega \times Y$ . Verifiquemos a seguir as duas últimas convergências:

Da condição de crescimento  $v$ ) da Definição 33, segue que

$$|\sigma(t, x, y, u_0, v^l)| \leq c_1 \left( 1 + |u_0|^{p-1} + |v^l(t, x, y)|^{p-1} \right)$$

e

$$|\sigma(t, x, y, u_0, v^l) v^l(t, x, y)| \leq c_1 (|v^l(t, x, y)| + |v^l(t, x, y)| |u_0|^{p-1} + |v^l(t, x, y)|^p).$$

Assim, como  $v^l$  é uniformemente convergente (convergência forte  $\Rightarrow$  de Cauchy  $\Leftrightarrow$  convergência uniforme), quando  $l \rightarrow \infty$ , se obtém que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( 1 + |u_0|^{p-1} + |v^l(t, x, y)|^{p-1} \right) dy dx dt & \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y (1 + |u_0|^{p-1} \\
& + \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right|^{p-1}) dy dx dt < \infty
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \int_{\Omega} \int_Y (|v^l(t, x, y)| + |u_0|^{p-1} |v^l(t, x, y)| + |v^l(t, x, y)|^p) dy dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left( \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right| + |u_0|^{p-1} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2(t, x, y) \right|^p \right) dy dx dt < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema de convergência dominada de Lebesgue [28], segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \sigma(t, x, y, u_0, v^l) v^l(t, x, y) dy dx dt \\ & \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2 \right) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2 \right] dy dx dt, \end{aligned}$$

quando  $l \rightarrow \infty$ .

Além disso,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0(T, x)^2 - 2u_0(T, x)w^l(x) + w^l(x)^2) dx \rightarrow 0,$$

e portanto, de (4.88) e (4.80) segue que

$$0 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ -\sigma^0(t, x, y) sv_2 + \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2 \right) sv_2 \right] dy dx dt.$$

Dividindo por  $s$  fica

$$0 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ -\sigma^0(t, x, y) v_2 + \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + sv_2 \right) v_2 \right] dy dx dt.$$

Fazendo  $s \rightarrow 0$  resulta

$$0 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \left[ -\sigma^0(t, x, y) v_2 + \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) v_2 \right] dy dx dt,$$

para todo  $v_2 \in D(]0, T[ \times \Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ . Isso implica que  $\sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \sigma^0(t, x, y)$  para quase todo  $]0, T[ \times \Omega \times Y$ .

Portanto o limite em duas escalas de (4.78) propondo uma função teste da forma

$\varphi^{\varepsilon}(t, x) = \varphi_0(t, x) + \varepsilon \varphi_1 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$  resulta

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u_0(t, x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} dy dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) \varphi_0(t, x) dx dt \\ & \quad \quad \quad + \int_{\Omega} g(x) \varphi_0(0, x) dx. \end{aligned}$$

Tal formulação é equivalente ao sistema de equações diferenciais parciais

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \int_Y \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dy = f(t, x), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma \quad (4.89)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0, \quad (4.90)$$

sob as condições inicial  $u_0(0, x) = g(x)$ , de contorno  $u_0(t, x) = 0$  para  $x \in \partial\Omega$  e continuidades

$$\begin{cases} \llbracket u_0 \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \\ \left\| \left[ \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right\|_{\Gamma, \Gamma_0} = 0, \end{cases}$$

para  $u_1$  1-periódica em  $y$ .

Para resolver o sistema (4.89) - (4.90) deve-se verificar se o mesmo terá uma única solução  $\{u_0, u_1\}$ . De fato, para  $x$  e  $t$  fixos provou-se no Lema 6, a existência e unicidade de  $\mathcal{N}_1$  1-periódica. Além disso, (4.90) fornece a informação de que

$$\sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \int_Y \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dy \equiv \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$$

isto é, ela independe da variável local  $y$  e portanto

$$\left\| \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\|_\Gamma = 0.$$

Agora, se for verificado que  $\hat{\sigma}$  satisfaz as propriedades de  $S_\#$ , é possível concluir que toda subsequência da sequência  $\{u^\varepsilon\}$  converge para o limite  $u_0$ , solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f(t, x), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u_0 \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left\| \hat{\sigma} \left( t, x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\|_\Gamma = 0 \\ u_0(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u_0(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.91)$$

De fato, na subseção 4.2.1, a preservação das propriedades da classe  $S_\#$  através do MHA foi garantida. Na seguinte subseção, motivado pelo desenvolvimento realizado em [109], será mostrado através da convergência em duas escalas, que o fluxo efetivo  $\hat{\sigma}$  preserva as propriedades de  $S_{\#, Y}$  para o fluxo original.

### 4.3.1 Preservação das propriedades do fluxo

Nesta seção, assim como na seção 4.2.1, são provadas algumas propriedades do operador homogeneizado que são preservadas do original. Este resultado garantirá a existência e unicidade da solução do problema homogeneizado. Para isso, basta garantir os itens *iv*), *vi*) e *vii*) da Definição 33.

*Item iv*). Se

$$\sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, 0) = 0,$$

então

$$\hat{\sigma}(t, x, \bar{\epsilon}_0, 0) = \int_Y \sigma(t, x, y, \bar{\epsilon}_0, 0) dy = 0$$

■

*Item vi*). Para  $x$  e  $t$  fixos, defina  $\omega_i(y, \varepsilon) = \bar{\epsilon}_1^i y + \varepsilon \mathcal{N}_1\left(\frac{y}{\varepsilon}, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^i\right)$ , limitada em  $W^{1,p}(\Omega)$ , para  $y \in \Omega$  e  $z = \frac{y}{\varepsilon}$  tal que, pela periodicidade de  $\mathcal{N}_1$  temos que

$$\omega_i(y, \varepsilon) \rightharpoonup \bar{\epsilon}_1^i y \text{ em } L^p(\Omega),$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial y} \rightharpoonup \bar{\epsilon}_1^i \text{ em } L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\sigma\left(t, x, \frac{y}{\varepsilon}, \bar{\epsilon}_0, \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right) \rightharpoonup \int_Y \sigma(t, x, z, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1^i) dz \text{ em } L^q(\Omega).$$

Para fins de desenvolvimento se declara o seguinte resultado.

**Teorema 24.** *Seja  $1 < p < \infty$ . Considere  $\{q_m\}$  uma sequência fracamente convergente para  $q$  em  $L^q(\Omega)$ ,  $\{-\nabla \cdot q_m\}$  que fracamente convergente para  $-\nabla \cdot q$  em  $W^{-1,q}(\Omega)$ , e ainda, uma sequência  $\{p_m\}$  que converge fracamente para  $p$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ . Então*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (q_m \cdot \nabla p_m) v dx = \int_{\Omega} (q \cdot \nabla p) v dx,$$

para qualquer  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* [109].

■

O item *vi*) da Definição 33 implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \sigma \left( t, x, \frac{y}{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_0, \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) - \sigma \left( t, x, \frac{y}{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_0, \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right] v(y) dy \\ \geq c_2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right|^p v(y) dy \end{aligned} \quad (4.92)$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $v \geq 0$ . Observe que  $q_m \equiv \sigma^{\varepsilon_m}$  e  $p_m \equiv \omega_i(y, \varepsilon_m)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 24. Logo, tomando  $m \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$  em ambos os lados de (4.92), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y [\sigma(t, x, z, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1^1) - \sigma(t, x, z, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1^2)] [\bar{\varepsilon}_1^1 - \bar{\varepsilon}_1^2] v(y) dz dy \\ \geq c_2 \int_{\Omega} \int_Y |\bar{\varepsilon}_1^1 - \bar{\varepsilon}_1^2|^p v(y) dz dy \end{aligned}$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Portanto,

$$\left[ \int_Y \sigma(t, x, z, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1^1) dz - \int_Y \sigma(t, x, z, \bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1^2) dz \right] [\bar{\varepsilon}_1^1 - \bar{\varepsilon}_1^2] \geq c_2 |\bar{\varepsilon}_1^1 - \bar{\varepsilon}_1^2|^p$$

■

*Item vii*). A prova é feita identicamente a do MHA, de onde se obtém (4.73). ■

Portanto, através dessas propriedades, garante-se a existência e unicidade do problema homogeneizado (4.91).

### 4.3.2 Resultado de Corretor

A prova do resultado de corretor, neste caso, é muito similar à realizada para o problema linear. A partir do item *vi*) da Definição 33, segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_2 \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\|_{L^p([0, T] \times \Omega)}^p \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_2 \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^p dx dt \\
&\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] dx dt \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \left[ \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] dx dt \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \left[ -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} u^\varepsilon(t, x) + f(t, x) u^\varepsilon(t, x) - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. - \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] dx dt. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Seja  $\left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \in L^q([0, T] \times \Omega) \times L^q([0, T] \times \Omega; L^\infty_\#(Y))$ , assim pelos item *i*), *ii*), *iii*) e *vii*) da Definição 33 conclui-se que  $(t, x, y) \mapsto \sigma \left( t, x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \in L^q([0, T] \times \Omega; L^\infty_\#(Y))$ , logo admissível segundo a Definição 32 e Observação 4. Portanto pela admissibilidade de  $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$  e  $\sigma \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de (4.93) obtém-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_2 \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\|_{L^p([0, T] \times \Omega)}^p = 0.$$

Isto mostra, portanto, uma convergência forte da derivada  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  para  $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ , no que se traduz numa  $u^\varepsilon$  com comportamento  $u_0(t, x) + \varepsilon u_1 \left( t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$ , como esperado. Pelo desenvolvimento realizado nesta seção, comparado ao linear, o contraste foi na especificação do limite em duas escalas do termo implícito  $\sigma$ , na demonstração de que este limite preserva as propriedades do termo original e na apresentação do resultado de corretor.

No capítulo seguinte, exemplos serão expostos com intuito de apresentar as peculiaridades dos problemas com propriedades rapidamente oscilantes, algumas abordagens numéricas úteis para resolver os problemas originais e homogeneizados, assim como, ilustrar os resultados apresentados até aqui.

## 5 EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados quatro exemplos unidimensionais, dos quais, dois são casos particulares, lineares, do problema (1.16) e dois não lineares do mesmo problema. Através dos lineares, um com coeficiente continuamente diferenciável e outro continuamente diferenciável por partes, ilustram-se os resultados numéricos da homogeneização obtidos no Capítulo 3, isto é, o comportamento efetivo, assintótico, exato e a proximidade entre eles, assim como a aplicação das correções do contorno e curtos efeitos do tempo na solução assintótica. Nos demais, não lineares, primeiramente são apresentados os resultados da homogeneização obtidos no Capítulo 4. No primeiro, se estuda o comportamento efetivo do problema difusivo em um compósito bifásico com relação constitutiva não linear obtida de uma função de energia ilimitada e no segundo, obtido de uma função de energia limitada. Isto é, para o segundo exemplo não linear, no mesmo modelo do primeiro, é introduzido um limitador para função de energia. É descrito na sequência o tratamento numérico para os resultados e finalmente desenvolvida as correções da solução assintótica não linear no contorno e nos curtos efeitos do tempo.

### 5.1 Exemplos Lineares

Antes dos exemplos serem definidos e apresentados os resultados numéricos, abaixo são dadas algumas orientações importantes, como a ordem dos passos para construção da solução assintótica do problema original linear e quais técnicas numéricas serão empregadas.

#### 5.1.1 Construção da solução assintótica do problema linear unidimensional

O processo para construir a solução assintótica  $u^{(1)}$  se resume nestes quatro passos:

1. Resolver o problema local (3.45).

2. Calcular o coeficiente efetivo a partir da relação (3.48) no MHA ou (3.112) no MCDE.
3. Resolver o problema homogeneizado (3.53).
4. Resolver o problema (3.69) que corrige o contorno e os curtos efeitos do tempo.

*Observação 8.* No caso unidimensional, a ordem entre o primeiro e o segundo é trocada, pois uma relação explícita para a solução do problema local pode ser obtida, a qual depende do coeficiente efetivo, que é obtido explicitamente. As abordagens tradicionais consistem em seguir apenas os três primeiros itens, contudo, neste trabalho, o quarto passo é incluído no contexto do MHA.

### 5.1.2 Tratamento numérico para o problema original linear unidimensional

Resolver o problema original (3.6), (3.8)-(3.11), pelos Métodos de Elementos Finitos (FEM) ou de Galerkin Descontínuo (GDM) clássicos produzem soluções imprecisas. Especificamente, pelo FEM, a aproximação da solução exata converge, mas a taxa de convergência depende de  $\varepsilon$  [62]. Para ilustrar isso, foi considerado o caso estacionário e contínuo de (3.6), (3.8)-(3.11) para

$$f(x) = 1, \quad a^\varepsilon(x) = \frac{3}{2} + \text{sen} \left( \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right).$$

Dessa sequência de problemas estacionários, via FEM são obtidas as soluções aproximadas para cada  $\varepsilon = 1/4, 1/8, 1/32, 1/64$ , fixado. Tais soluções aproximadas são confrontadas com as respectivas exatas na Figura 5.1.

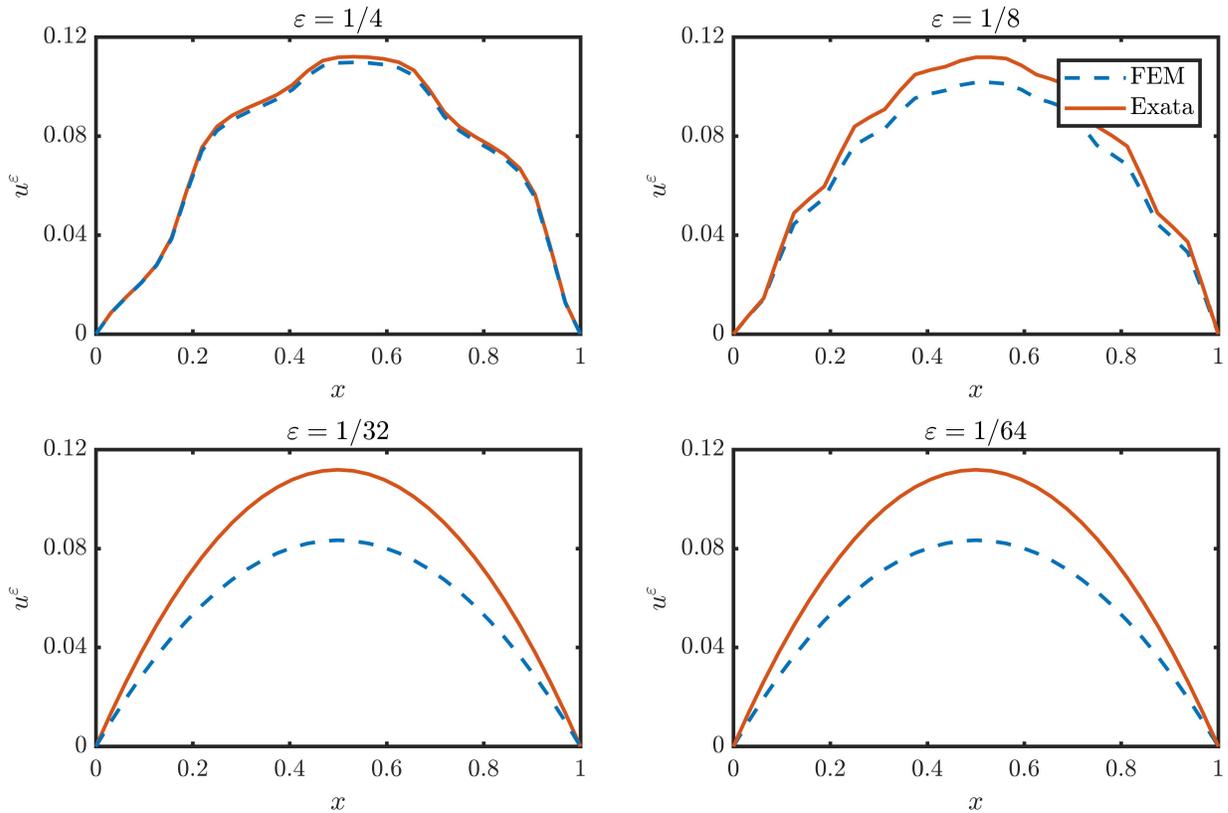


Figura 5.1: Solução exata e numérica obtida pelo FEM para  $\Delta x = 1/32$  e diferentes valores de  $\varepsilon$ .

Quando  $\varepsilon$  (comprimento da célula periódica) é menor que  $\Delta x$  (comprimento da malha grossa), as funções base usuais em elementos finitos não capturam a rápida oscilação dos coeficientes o que implica na imprecisão da solução, ou seja, a solução converge, mas não para a exata do problema original. Quando  $\varepsilon$  é muito maior que  $\Delta x$  ocorre o efeito contrário, a aproximação por elementos finitos é relativamente boa, porém isso, pode ter um custo computacional muito alto, pensando em problemas de maior dimensão e com separação de escalas. Efendiev e Hou [39] propõem para este tipo de problema aproximar a solução usando funções base multiescala, as quais são soluções, em geral, de equações com mesmo operador ao do problema original e definidas localmente na malha grossa. Esta abordagem denominada Método de Elementos Finitos Multiescala (MsFEM) apresenta uma taxa de convergência que independente da escolha de  $\varepsilon$ , isto é, para qualquer  $\varepsilon$  definido, a aproximação converge para

a solução exata. Além disso, é possível verificar que ao tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a solução exata tende para a solução do problema homogenizado.

A seguir, são apresentados resumidamente os principais pontos do MsFEM para um problema elíptico e em seguida estendido para um problema parabólico.

### *Método de Elementos Finitos Multiescala*

Considere o problema elíptico linear

$$Lu = f \text{ em } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ),  $Lu := -\nabla \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u)$ , e  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é um campo heterogêneo variando continuamente sobre múltiplas escalas. Assume-se que o tensor  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$  é simétrico e definido positivo ( $\alpha|\boldsymbol{\xi}|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \beta|\boldsymbol{\xi}|^2$ , para todo  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$  e com  $0 < \alpha < \beta < \infty$ ). E ainda, assume-se o somatório sobre índices repetidos (Notação de Einstein). O MsFEM consiste de duas peças principais: *funções base multiescala* e a *formulação numérica global* que acopla essas funções base multiescala. As funções base são projetadas para capturar as características multiescala da solução. Uma formulação global acopla essas funções base para fornecer uma aproximação precisa da solução.

- *Função base*: Seja  $\Psi_h$  uma partição usual de  $\Omega$  em elementos finitos (segmento, triângulo, quadrilátero, e assim por diante). Define-se essa partição de malha grossa e assumo que ela pode ser refinada para uma resolução menor, chamada de malha fina. Para ilustrar, na Figura 5.2 foram esboçadas as malhas grossa e fina bidimensional.

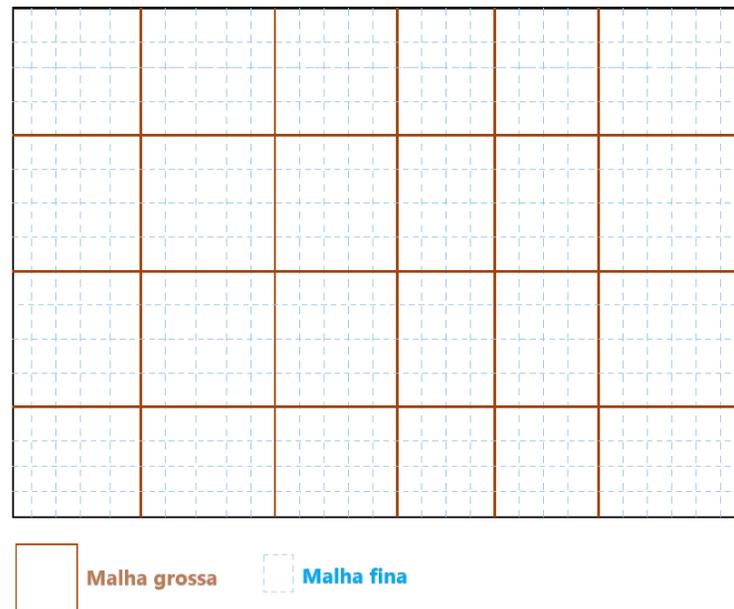


Figura 5.2: Esquema da malha bidimensional.

Seja  $\mathbf{x}_i$  o nó interior da malha  $\Psi_h$  e  $\phi_i^0$  uma base nodal do espaço de elemento finito padrão  $W_h = \text{span}\{\phi_i^0\}$ . Por simplicidade, pode-se assumir que  $W_h$  consiste de funções linear por partes se  $\Psi_h$  é uma partição triangular, por exemplo. Denote por  $S_i = \text{supp}(\phi_i^0)$  (suporte de  $\phi_i^0$ ) e defina  $\phi_i$  com suporte em  $S_i$  como segue

$$L\phi_i = 0 \text{ em } K, \phi_i = \phi_i^0 \text{ em } \partial K, \forall K \in \Psi_h, K \subset S_i; \quad (5.1)$$

isto é, funções base multiescala que coincidem com as funções base padrão nos contornos de um bloco da malha grossa  $K$ , e são oscilatórias no interior de cada bloco da malha grossa.

- *Formulação Global:* A representação da solução exata (escala fina) através das funções base multiescala permite reduzir a dimensão do cálculo. Quando a aproximação da solução  $u_h = \sum_i u_i \phi_i(\mathbf{x})$  ( $u_i$  são os valores aproximados da solução nos pontos nodais da malha grossa) é substituída na equação do problema original (escala fina), o sistema resultante é projetado sobre o espaço dimensionalmente finito na malha grossa para encontrar  $u_i$ . Isto pode ser feito pela multiplicação da equação na escala fina com funções teste da malha grossa. No

caso de método de elementos finitos de Galerkin, quando as funções base são conformes ( $\mathcal{P}_h \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{P}_h = \text{span}\{\phi_i\}$ ), o MsFEM busca  $u_h \in \mathcal{P}_h$  tal que

$$\sum_K \int_K \mathbf{A} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v_h d\mathbf{x}, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_h. \quad (5.2)$$

Pode-se escolher a função teste de  $W_h$  (ao invés de  $\mathcal{P}_h$ ) e chegar na versão de Petrov-Galerkin do MsFEM. Neste caso, busca-se  $u_h \in \mathcal{P}_h$  tal que (5.2) vale  $\forall v_h \in W_h$ . Observe que em ambas formulações de Galerkin e Petrov-Galerkin, o sistema na escala fina é multiplicada por funções teste na malha grossa e, portanto, o sistema resultante é dimensionalmente finito na malha grossa. Qualquer formulação escolhida, obtém-se um sistema linear de equações para encontrar os valores da solução nos nós da malha grossa. Para mostrar isto, por simplicidade, considere a formulação de Petrov-Galerkin do MsFEM. Representando a solução em termos das funções base multiescala,  $u_h = \sum_i u_i \phi_i$ , se obtém

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_{nodal} = \mathbf{d},$$

onde  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} = \sum_K \int_K k \nabla \phi_i \nabla \phi_j^0 d\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}_{nodal} = (u_1, \dots, u_i, \dots)$  são os valores nodais da solução na escala grossa, e  $\mathbf{d} = (d_i)$ ,  $d_i = \int_{\Omega} f \phi_i^0 d\mathbf{x}$ . Nesta formulação, não está sendo considerado a discretização das condições de contorno.

A extensão do MsFEM para problemas parabólicos segue da seguinte forma.

Considere a equação parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \nabla u) = f(t, \mathbf{x}), \quad t \in ]0, T[, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.3)$$

com condições de contorno apropriadas no intervalo de tempo finito  $[0, T]$  e condição inicial suave. Em geral, quando há heterogeneidade no espaço e tempo, as funções de base são as soluções das equações parabólicas (5.3) homogêneas ( $f = 0$ ). Para introduzir MsFEM, por simplicidade, se assume que o intervalo  $[0, T]$  é dividido em  $M$  partes iguais  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{M+1} = T$ , em que  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ . As funções base são construídas em  $[t_n, t_{n+1}]$  como solução de

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \nabla \phi_i) = 0$$

em cada  $K$  tal que  $\phi_i = \phi_i^0$  em  $\partial K$  e  $\phi_i(t = t_n, \mathbf{x}) = \phi_i^0$ . Aqui,  $\phi_i^0 \in W_h$  são funções base padrão (por exemplo, funções linear por partes). Busca-se uma aproximação

$$u_h^{n+1}(t, \mathbf{x}) = \sum_i u_i^{n+1} \phi_i(t, \mathbf{x}), \quad (5.4)$$

da solução em  $[t_n, t_{n+1}]$ , onde  $u_i^{n+1}$  (solução dos valores nodais aproximado) serão determinados. Para isso, se substituí a série finita (5.4) na equação original (5.3), multiplica a equação por  $\phi_i^0$  (como na formulação de Petrov-Galerkin), integra sobre o espaço  $\Omega$  e tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , isto é,

$$\begin{aligned} & u_i^{n+1} \int_{\Omega} \phi_i(t_{n+1}, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - u_i^n \int_{\Omega} \phi_i(t_n, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \nabla u_h(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

onde  $u_h(t, \mathbf{x}) = \sum_i u_i(t) \phi_i(t, \mathbf{x})$ . O terceiro termo do lado esquerdo pode ser tratado explicitamente ou implicitamente. Em particular, o método implícito é dado por

$$\begin{aligned} & u_i^{n+1} \int_{\Omega} \phi_i(t_{n+1}, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - u_i^n \int_{\Omega} \phi_i(t_n, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + u_i^{n+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \nabla \phi_i(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}) \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Se o terceiro termo é avaliado explicitamente, ele é trocado por

$$u_i^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \nabla \phi_i(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt.$$

Observe que se não há heterogeneidade temporal ( $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ), as funções base podem ser as soluções de equações elípticas (5.1).

### 5.1.3 Exemplo 1 - Material funcionalmente graduado

Para a equação (3.6) considere as seguintes informações dadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tempo final: } T = 5, \\ \text{Domínio espacial: } \bar{\Omega} = [0, 1], \\ \text{Coeficiente: } k^\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right), \\ \text{Termo fonte/sumidouro: } f(t, x) = e^{-t}, \\ \text{Condições de contato: Não há, pois } \Gamma = \emptyset, \\ \text{Condição inicial: } g(x) = 0, \\ \text{Condições de contorno: } u^\varepsilon(t, 0) = u^\varepsilon(t, 1) = 0. \end{array} \right.$$

A partir disso, configura-se o seguinte problema original

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = e^{-t}, t \in ]0, 5[, x \in ]0, 1[, \\ u^\varepsilon(t, 0) = u^\varepsilon(t, 1) = 0, t \in ]0, 5[, \\ u^\varepsilon(0, x) = 0, x \in ]0, 1[. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

A solução do problema original (5.5) será obtida via MsFEM. A seguir, o processo realizado para implementação do método será descrito.

Por simplicidade, o intervalo  $[0, 1]$  é dividido em  $N = 50$  segmentos uniformes  $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N+1} = 1$ ,  $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{N} \forall i = 1, \dots, N+1$ , e o intervalo de tempo  $[0, 5]$  em  $M = 100$  segmentos uniformes  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{M+1} = 5$ ,  $\Delta t = t_{n+1} - t_n = \frac{5}{M} \forall n = 1, \dots, M+1$ . Observe que  $k^\varepsilon$  independe de  $t$  (isto é, não há heterogeneidade temporal), logo as funções base multiescala são fornecidas do problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( k^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) \right) = 0, \text{ em } \cup_{j=2}^{N+1} [x_{j-1}, x_j], \\ \phi_i^\varepsilon(x_j) = \delta_{ij}, i = 1, \dots, N+1. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

A partir disso, a aproximação da solução buscada é da forma

$$u_{\varepsilon, h} = \sum_{i=1}^{N+1} u_i(t) \phi_i^\varepsilon(x). \quad (5.7)$$

Substituindo (5.17) na equação parabólica (5.5), multiplicando pela função base multiescala e integrando sobre  $[0, 1]$  (formulação de Galerkin) se obtém

$$\sum_{i=1}^{N+1} \frac{du_i}{dt} \int_0^1 \phi_i^\varepsilon \phi_j^\varepsilon dx + u_i(t) \int_0^1 k^\varepsilon(x) \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \frac{d\phi_j^\varepsilon}{dx} dx = \int_0^1 f(t, x) \phi_j^\varepsilon(x) dx, \quad (5.8)$$

$j = 1, \dots, N + 1$ . A partir de (5.6) segue que

$$k^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) = c(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}),$$

onde

$$c(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} c(x_{i-1}, x_i) = \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_{i-1}, x_i], \\ c(x_i, x_{i+1}) = - \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Logo

$$\frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{k^\varepsilon(x)} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

e por conseguinte

$$\phi_i^\varepsilon = \begin{cases} \left( \int_{x_{i-1}}^x \frac{1}{k^\varepsilon(z)} dz \right) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_{i-1}, x_i], \\ - \left( \int_x^{x_{i+1}} \frac{1}{k^\varepsilon(z)} dz \right) \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{k^\varepsilon(x)} dx \right)^{-1} + 1, & \text{em } [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

A formulação (5.8) consiste no seguinte sistema de EDO's

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ,  $\mathbf{g} = (g_j)$

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i^\varepsilon)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i^\varepsilon)^2 dx, \\ a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^\varepsilon \phi_{i-1}^\varepsilon dx, & a_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^\varepsilon \phi_{i+1}^\varepsilon dx, \\ b_{ii} &= c(x_{i-1}, x_i) - c(x_i, x_{i+1}), \\ b_{i,i-1} &= -c(x_{i-1}, x_i), & b_{i,i+1} &= c(x_i, x_{i+1}), \\ g_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \phi_j^\varepsilon dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi_j^\varepsilon dx, \end{aligned}$$

para  $i, j = 2, \dots, N$ . Para resolver (5.9) usa-se o método de Crank-Nicolson, isto é, resolver o seguinte sistema

$$\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} = \left( \mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{u}^{n+1} = \left( \mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{g}^{n+1} + \mathbf{g}^n) = \mathbf{h},$$

sucessivamente, para cada  $n = 1, 2, \dots, M$ . Este sistema, após aplicação das condições de contorno ( $d_{11} = 1$ ,  $d_{12} = 0$ ,  $d_{N+1,N+1} = 1$ ,  $d_{N+1,N} = 0$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_{N+1} = 0$ ) e inicial, resolve-se pelo TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm).

Na coluna 1 da Figura 5.3 pode-se observar o caráter rapidamente oscilante do coeficiente  $k^\varepsilon$  para  $\varepsilon = 1/2$ ,  $1/4$  e  $1/128$ . A solução exata, em  $t = 5$ , correspondente ao coeficiente da linha estão na coluna 3. Na coluna 2 podem-se visualizar as funções base multiescala e suas diferentes configurações com relação à escolha de  $\varepsilon$ . Por exemplo, na linha 3, o valor do parâmetro geométrico  $\varepsilon$  é menor que o espaçamento da malha grossa  $\Delta x$ , o que gera funções base oscilantes por partes. Por outro lado, quando  $\varepsilon$  é muito maior que  $\Delta x$  as funções base são lineares por partes como pode se observar nas linhas 1 e 2. Isso justifica porque o FEM aproxima bem a solução exata quando  $\varepsilon$  é maior que  $\Delta x$ , no entanto, apresentaria um alto custo computacional para problemas em mais dimensões e com separação de escalas.

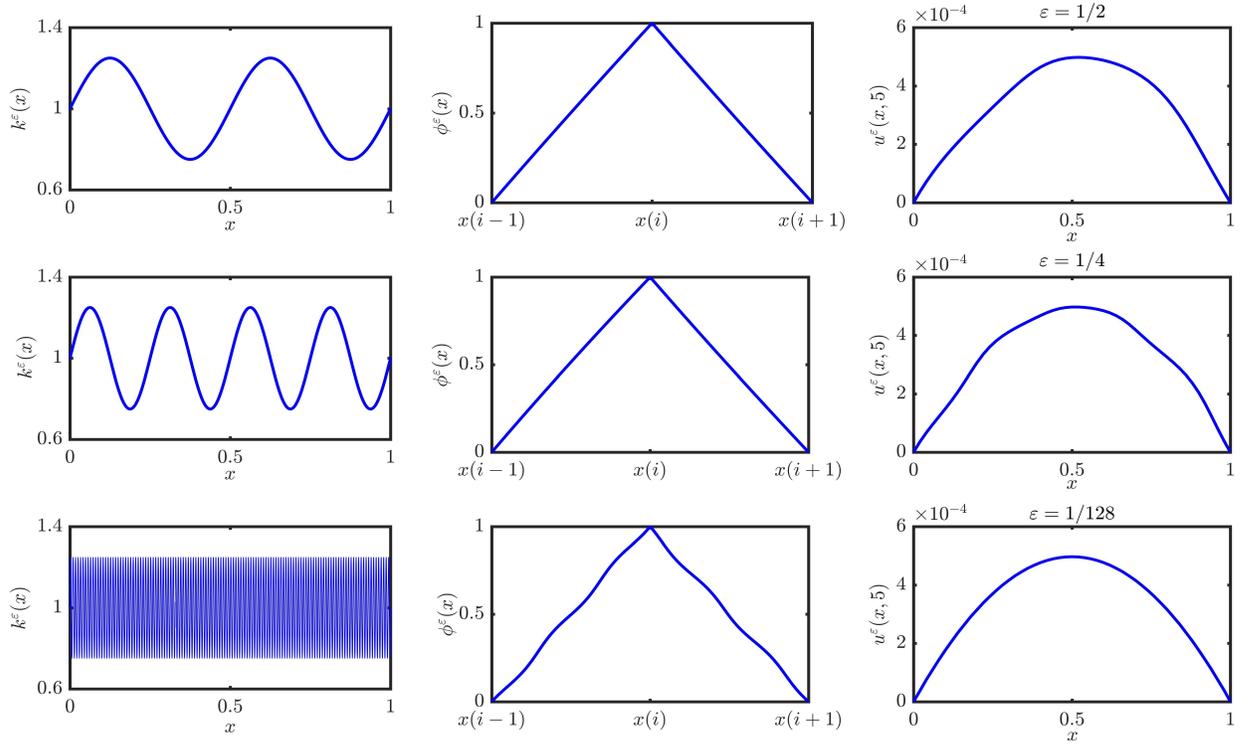


Figura 5.3: Alguns resultados numéricos.

Para a construção da solução assintótica seguem-se os processos descritos na subseção 5.1.1, obtendo assim os seguintes resultados.

### 1. Coeficiente Efetivo

O coeficiente efetivo é o coeficiente da equação do problema homogeneizado e é determinado por (3.48). Em particular, de (3.48) segue a expressão

$$\widehat{k} = \left[ \int_0^1 \left( 1 + \frac{1}{4} \text{sen}(2\pi y) \right)^{-1} dy \right]^{-1},$$

que é resolvida pelo método da quadratura adaptativa, resultando:  $\widehat{k} = 0.9682$ . Na linha 1 da Figura 5.4 pode-se observar o caráter rapidamente oscilante do coeficiente para  $\epsilon = 1/2, 1/4, 1/8$  e o coeficiente efetivo  $\widehat{k}$  constante.

## 2. Problema Local

A fórmula (3.49) fornece a solução  $N_1(y)$  do problema local, em que

$$\tilde{N}_1(y) = \int_0^y \left[ \hat{k} \left( 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi s) \right)^{-1} - 1 \right] ds$$

e  $C = -\langle \tilde{N}_1 \rangle$ . Como a solução local  $N_1$  (linha 2 na Figura 5.4) está definida no intervalo  $[0, 1]$ , então, para cada ponto fixo  $y_i \in [0, 1]$ , calculam-se numericamente  $\tilde{N}_1(y_i)$  e  $\langle \tilde{N}_1 \rangle$  pelo método da quadratura adaptativa. Decidiu-se fazer uso desse método de integração devido ao comportamento do coeficiente. O uso de técnicas usuais de integração numérica requerem uma discretização muito fina para capturar variações abruptas do coeficiente e essa técnica refina a malha até que um erro determinado seja satisfeito. Isto é, onde tem alta variação, se refina mais e onde não tem, menos.

## 3. Problema homogeneizado

Obtido o coeficiente efetivo  $\hat{k}$ , o problema homogeneizado se configura como

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = e^{-t}, & t \in ]0, 5[, \quad x \in ]0, 1[, \\ u_0(t, 0) = 0, \quad u_0(t, 1) = 0, & t \in ]0, 5[, \\ u_0(0, x) = 0, & x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (5.10)$$

Este problema tem solução analítica (ver [38]), porém se optou por utilizar o FEM clássico para resolvê-lo. Na linha 3 da Figura 5.4 é possível observar a  $\varepsilon$ -proximidade entre as soluções exata e homogeneizada.

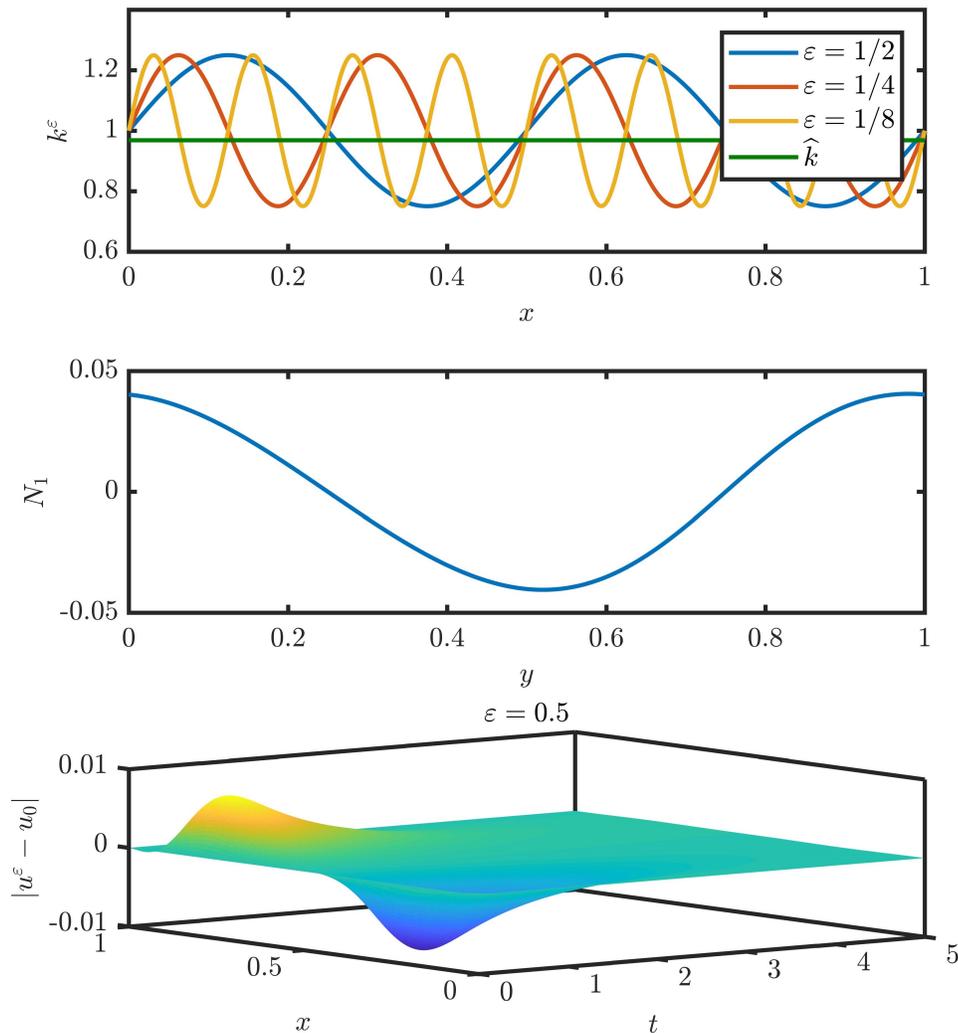


Figura 5.4: Resultados da homogeneização - Exemplo 1.

#### 4. Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo

O termo de correção  $u_1^*$  para a solução assintótica  $u^{(1)}$  é composto pela solução  $N_1^*$  do problema (3.69) (sem as condições de contato, pois não há descontinuidade) e a solução do problema homogeneizado (5.10). O problema (3.69) foi resolvido pelo FEM clássico (já que o coeficiente é contínuo e não é rapidamente oscilante) usando uma malha uniforme de 201 pontos no espaço e 501 no tempo. Através das imagens inferiores da Figura 5.5 pode-se visualizar que a solução assintótica corrigida  $u_c^{(1)} = u_0 + \varepsilon(u_1 + u_1^*)$ , realmente cumpre com a condição

inicial. Além disso, pelas imagens da coluna 2 da Figura 5.5, percebe-se que  $u_c^{(1)}$  está mais próxima que  $u^{(1)}$  da solução exata. Obviamente, neste exemplo particular, no qual a condição inicial  $g(x) = 0$ , a solução assintótica  $u^{(1)}$  satisfaz a condição inicial, porém gera uma aproximação menos precisa comparada à  $u_c^{(1)}$ . Essas convergências confirmam os resultados estabelecidos nas subseções sobre “Resultado de corretor” e “Proximidade”.

Na Figura 5.6 reveja na primeira linha o erro de aproximação entre exata e homogeneizada, agora numa perspectiva de superfície. Na segunda linha apresenta-se o erro entre exata e solução assintótica de primeira ordem, na qual temos o comportamento efetivo  $u_0$  adicionado ao comportamento local  $\varepsilon u_1$ . Comparando os gráficos da linha 1 e 2, percebe-se que o comportamento local corrige o comportamento efetivo dentro da região do contorno e acentua próximo a ele. Na terceira linha, a abordagem de correção do contorno e curtos efeitos do tempo apresenta uma melhora significativa desta solução assintótica.

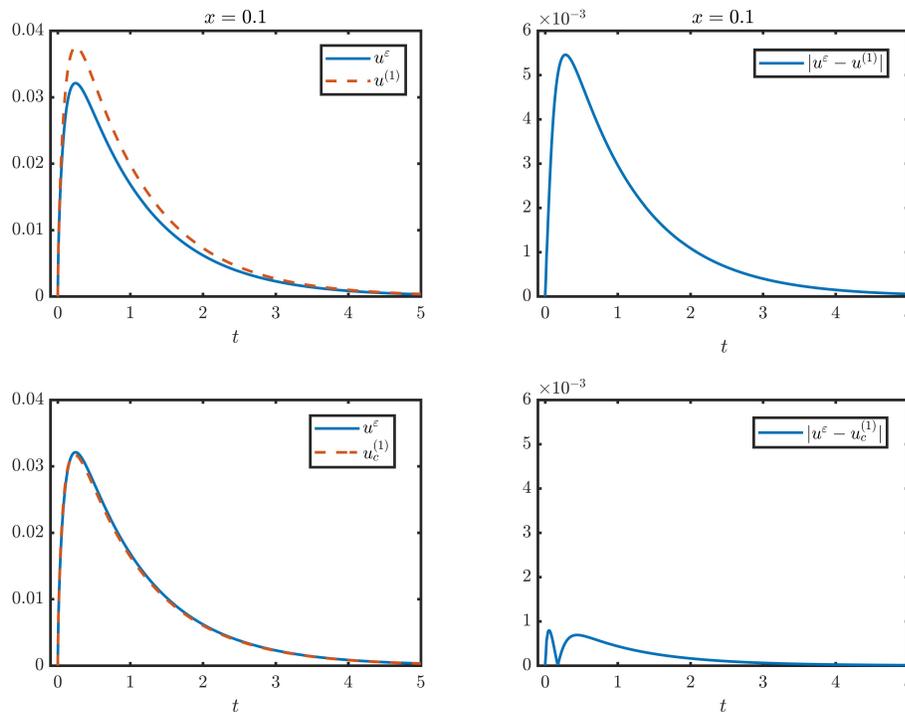


Figura 5.5: Perfis da solução exata, assintótica e assintótica corrigida em  $x = 0.1$  e  $\varepsilon = 1/2$ .

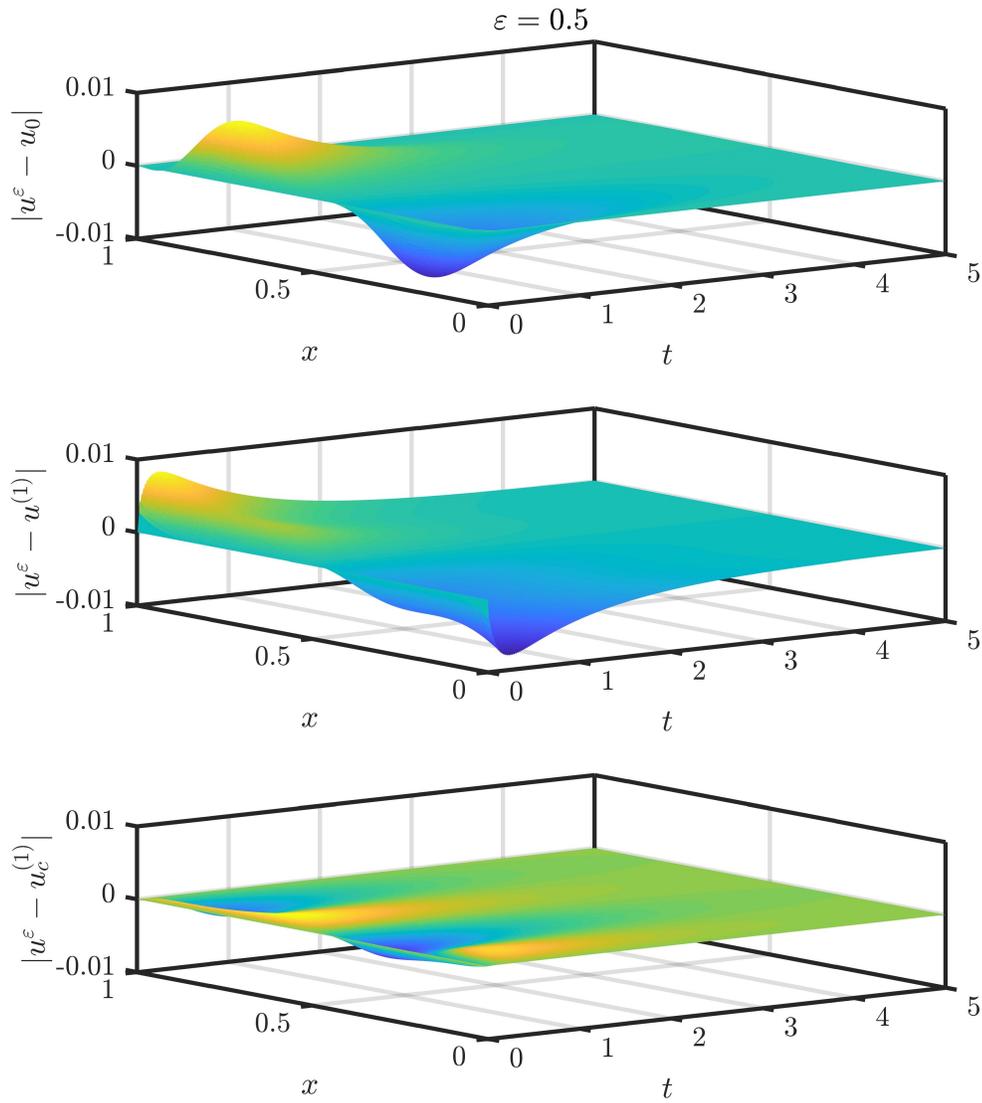


Figura 5.6: Proximidades.

#### 5.1.4 Exemplo 2 - Compósito bifásico

É considerado para o segundo exemplo, o mesmo compósito bifásico da Figura 3.1 descrito na Subseção 3.1.1. Em particular se assume que o compósito obedece à seguinte lei constitutiva

$$\sigma_r(\epsilon) = k_r \epsilon,$$

em que  $k_r$ , denota o coeficiente de difusividade, constante, na fase constituinte  $r = 1, 2$ . Para se representar graficamente o comportamento da propriedade, em particular, são considerados os coeficientes  $k_1 = 2$  e  $k_2 = 3$ , com concentrações de fase  $c_1 = 0.5$  e  $c_2 = 0.5$ , respectivamente. Assim, pela da Figura 5.7, podem-se visualizar, considerando um compósito de comprimento unitário  $|\Omega| = 1$ , composto por  $2^n$  células básicas de comprimento  $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ , o caráter rapidamente oscilante do coeficiente  $k^\varepsilon$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ .

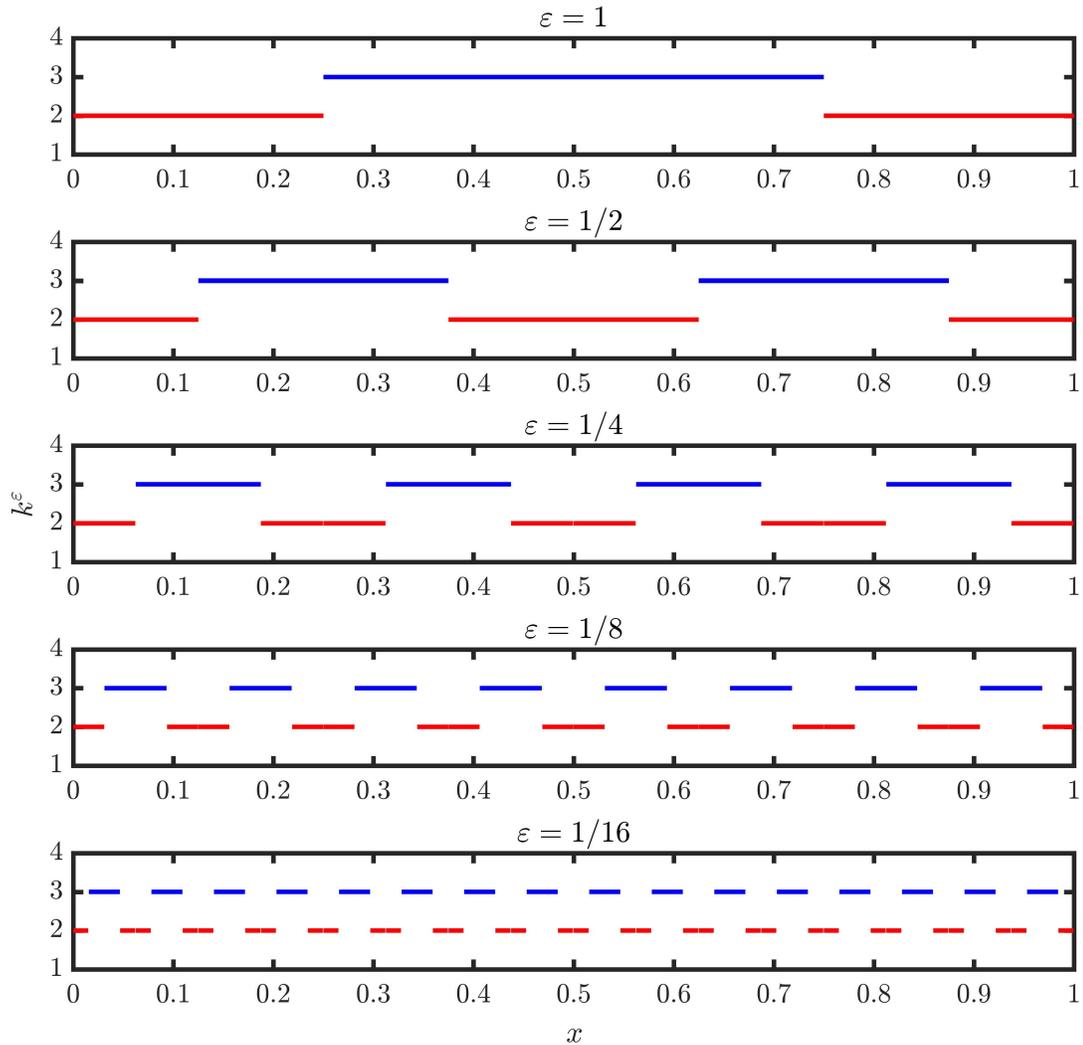


Figura 5.7: Esboço do comportamento rapidamente oscilante do coeficiente constante por partes unidimensional, para diferentes valores de  $\varepsilon$ .

Para estudar a difusão neste compósito, é considerado o mesmo modelo apresentado no formalismo do MHA linear, isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = 0, & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left[ \left[ k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0, \\ u^\varepsilon(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

A partir da Nota 2 feita na Seção 4.2 é possível interpretar esta modelagem de duas formas. A primeira é que este modelo estuda comportamento de um compósito não periódico, mas que usando as ideias de homogenização periódica, idealiza-se um material microperiódico. E a segunda é que este modelo, de fato, descreve o fenômeno num compósito microperiódico.

Antes dos resultados da homogeneização serem apresentados, será descrita a abordagem numérica usada para resolver o problema original (5.11), neste caso o Método de Galerkin Descontínuo juntamente com o princípio do MsFEM. Tendo isso em vista, considere que o intervalo  $\bar{\Omega} = [0, L]$  será dividido em  $N$  segmentos uniformes  $I_n = ]x_n, x_{n+1}[$ , de comprimento  $\Delta x = \frac{L}{N}$ , e o intervalo de tempo  $[0, T]$  por  $M$  segmentos uniformes de comprimento  $\Delta t = \frac{T}{M}$ . Assim como foi realizado no exemplo 1 para o caso contínuo, busca-se uma solução para a formulação fraca do problema original, nesse caso do problema (5.11), ou seja:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi^\varepsilon dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} dx - \sum_{i=2}^N \left[ \left[ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \phi^\varepsilon \right] \right]_{x_i} - k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \phi^\varepsilon \Big|_0^L \\ = \int_0^L f \phi^\varepsilon dx, \\ \forall \phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad u^\varepsilon(0, x) = g(x). \end{cases}$$

Introduz-se as seguintes notações

$$\phi^+(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n^+} \phi(x) \quad \text{e} \quad \phi^-(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} \phi(x)$$

e ainda,

$$\{\phi\}_{x_n} = \frac{\phi^+(x_n) + \phi^-(x_n)}{2}, \quad n = 2, \dots, N.$$

A partir disso, a seguinte relação é verificada

$$\left[ \left[ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \phi^\varepsilon \right] \right]_{x_n} = \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_n} \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_{x_n} + \left[ \left[ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right]_{x_n} \{\phi^\varepsilon\}_{x_n} \quad (5.12)$$

*Demonstração.* Considere a seguinte igualdade algébrica

$$ab - cd = \frac{1}{2}(a + c)(b - d) + \frac{1}{2}(b + d)(a - c). \quad (5.13)$$

Relacionando os termos da igualdade (5.13) com os da (5.12), tem-se que:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow x_n^+} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}, & b &= \lim_{x \rightarrow x_n^+} \phi^\varepsilon, \\ c &= \lim_{x \rightarrow x_n^-} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}, & d &= \lim_{x \rightarrow x_n^-} \phi^\varepsilon. \end{aligned}$$

Disso, segue a igualdade (5.12). ■

Pelas condições em (5.11) e  $\phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  segue

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi^\varepsilon dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} dx - \sum_{i=2}^N \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_i} \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_{x_i} - k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \phi^\varepsilon \Big|_0^L \\ & = \int_0^L f \phi^\varepsilon dx, \quad \forall \phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ & u^\varepsilon(0, x) = g(x). \end{aligned} \right. \quad (5.14)$$

Agora, se  $u^\varepsilon$  satisfaz (5.14), então satisfaz  $\forall \delta \in \mathbb{R}$  que

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi^\varepsilon dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_i} \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_{x_i} \\ & + \delta \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_i} \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_{x_i} = \int_0^L f \phi^\varepsilon dx + \delta k^\varepsilon \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} u^\varepsilon \Big|_0^L, \\ & \forall \phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad u^\varepsilon(0, x) = g(x), \end{aligned} \right. \quad (5.15)$$

uma vez que o quarto termo da equação é intrinsecamente zero. Na formulação (5.15) se estende a definição de salto e média para os pontos de fronteira:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_0 &= \phi^+(0), & \llbracket \phi \rrbracket_0 &= -\phi^+(0), \\ \{\phi\}_L &= \phi^-(L), & \llbracket \phi \rrbracket_L &= \phi^-(L). \end{aligned}$$

Fazendo uso do Método de Galerkin Descontínuo [29, 83], restringindo às variantes  $\delta = \{-1, 0, 1\}$  segue a formulação

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi^\varepsilon dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_i} \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_{x_i} \\ + \delta \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ k^\varepsilon \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} \right\}_{x_i} \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_{x_i} + J_0(u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) = \int_0^L f \phi^\varepsilon dx, \\ \forall \phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad u^\varepsilon(0, x) = g(x), \end{array} \right.$$

onde  $J_0(u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$  é um termo de salto, também conhecido como termo de penalidade da solução, definido por:

$$J_0(u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) = \frac{\delta_0}{\Delta x} \sum_{i=1}^{N+1} \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_{x_i} \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_{x_i}$$

onde  $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$ . Em particular, o problema apresenta contato perfeito e a função base é contínua  $\forall x \in \bar{\Omega}$ , logo o problema se resume em encontrar a solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \phi^\varepsilon dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} dx = \int_0^L f \phi^\varepsilon dx, \\ \forall \phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad u^\varepsilon(0, x) = g(x), \end{array} \right. \quad (5.16)$$

para qualquer das variantes  $\delta$  e  $\delta_0$  definidas. Esta é uma formulação fraca similar a do exemplo 1. Assim, usando a abordagem do MsFEM, busca-se aproximar  $u^\varepsilon$  por

$$u_{\varepsilon,h} = \sum_{i=1}^{N+1} u_i(t) \phi_i^\varepsilon(x). \quad (5.17)$$

com  $\phi_i^\varepsilon$  solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( k^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) \right) = 0, \quad \text{em } \cup_{j=2}^{N+1} ]x_{j-1}, x_j[ \setminus \Gamma, \\ \llbracket \phi^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \left[ \left[ k^\varepsilon(x) \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \right] \right]_\Gamma = 0, \\ \phi_i^\varepsilon(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N+1. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Observe que o suporte das funções  $\phi^\varepsilon$  agora podem apresentar pontos de descontinuidade devido ao coeficiente  $k^\varepsilon$ . Isso segue do fato que a aproximação (5.17) e o fluxo devem satisfazer as condições de contato perfeito

$$\llbracket u_{\varepsilon,h} \rrbracket_\Gamma = \sum_{i=1}^{N+1} u_i(t) \llbracket \phi_i^\varepsilon(x) \rrbracket_\Gamma = 0$$

$$\left[ \left[ k^\varepsilon(x) \frac{\partial u_{\varepsilon,h}}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = \sum_{i=1}^{N+1} u_i(t) \left[ \left[ k^\varepsilon(x) \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \right] \right]_\Gamma = 0$$

e conseqüentemente, o problema elíptico (5.18) deve satisfazer a condições

$$\left[ \left[ \phi_i^\varepsilon(x) \right] \right]_\Gamma = 0 \text{ e } \left[ \left[ k^\varepsilon(x) \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \right] \right]_\Gamma = 0, \forall i = 1, \dots, N + 1.$$

Substituindo (5.17) na formulação (5.16) obtém-se

$$\sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^{N+1} \frac{du_i}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^\varepsilon \phi_j^\varepsilon dx + u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} k^\varepsilon \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \frac{d\phi_j^\varepsilon}{dx} dx = \int_0^L f \phi_j^\varepsilon dx, \quad (5.19)$$

$j = 1, \dots, N + 1$ . A formulação (5.19) consiste no seguinte sistema de EDO's

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (5.20)$$

onde  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, N + 1$ , são matrizes tridiagonais como no primeiro exemplo,  $\mathbf{g} = (g_j)$  é um vetor,  $j = 1, \dots, N + 1$ . Para resolver (5.20) o método de diferenças finitas implícito foi empregado, isto é, se resolveu o seguinte sistema

$$\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbf{A} + \Delta t \mathbf{B}) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{h},$$

sucessivamente, para cada  $n = 1, 2, \dots, M$ . Este sistema, após aplicação das condições de contorno ( $d_{11} = 1$ ,  $d_{12} = 0$ ,  $d_{N+1,N+1} = 1$ ,  $d_{N+1,N} = 0$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_{N+1} = 0$ ) e inicial, resolve-se pelo TDMA. A solução  $u^{n+1}$  portanto, fornece uma aproximação da solução exata  $u^\varepsilon$ , para um  $\varepsilon$  definido, no tempo  $t_{n+1}$ .

A partir disso, busca-se agora resolver o problema original considerando as seguintes informações dadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parâmetro geométrico: } \varepsilon = \frac{1}{2^n} \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ definido} \\ \text{Tempo final: } T = 1, \\ \text{Domínio espacial: } \bar{\Omega} = [0, 1], \\ \text{Coeficiente: } k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 2, & x \in \Omega_1 \\ 3, & x \in \Omega_2 \end{cases}, \\ \text{Concentrações de fase: } \begin{cases} c_1 = 0.5 \\ c_2 = 0.5 \end{cases}, \\ \text{Termo fonte/sumidouro: } f(t, x) = 0, \\ \text{Pontos de descontinuidade: } \Gamma = \cup_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( i + \frac{c_1}{2} \right) \varepsilon, \left( i + c_2 + \frac{c_1}{2} \right) \varepsilon \right\}, \\ \text{Condição inicial: } g(x) = \text{sen}(\pi x), \\ \text{Condições de contorno: } u^\varepsilon(t, 0) = u^\varepsilon(t, 1) = 0. \end{array} \right.$$

Tal solução exata será apresentada juntamente aos resultados de homogeneização. Portanto, abaixo, seguem na ordem de resolução os resultados da homogeneização:

### 1. Coeficiente Efetivo

O coeficiente efetivo é obtido pela relação (3.48), isto é,

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \left[ \int_0^1 \frac{1}{\chi_1(y)2 + \chi_2(y)3} dy \right]^{-1} \\ &= \left[ \int_0^{0.25} \frac{1}{2} dy + \int_{0.25}^{0.75} \frac{1}{3} dy + \int_{0.75}^1 \frac{1}{2} dy \right]^{-1} \\ &= \left[ \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} \right]^{-1} \\ &= 2.4. \end{aligned} \tag{5.21}$$

### 2. Problema Local

A solução local  $\tilde{N}_1(y)$  é dada por (3.49). Assim,

$$\tilde{N}_1(y) = \int_0^y \left[ \frac{2.4}{2\chi_1(s) + 3\chi_2(s)} - 1 \right] ds = \begin{cases} 0.2y, & y \in [0, 0.25] \\ 0.1 - 0.2y, & y \in [0.25, 0.75] \\ -0.2 + 0.2y, & y \in [0.75, 1] \end{cases}$$

e  $\langle \tilde{N}_1 \rangle = 0$ . Através da Figura 5.8 o comportamento da solução  $N_1$  do problema local pode ser observado.

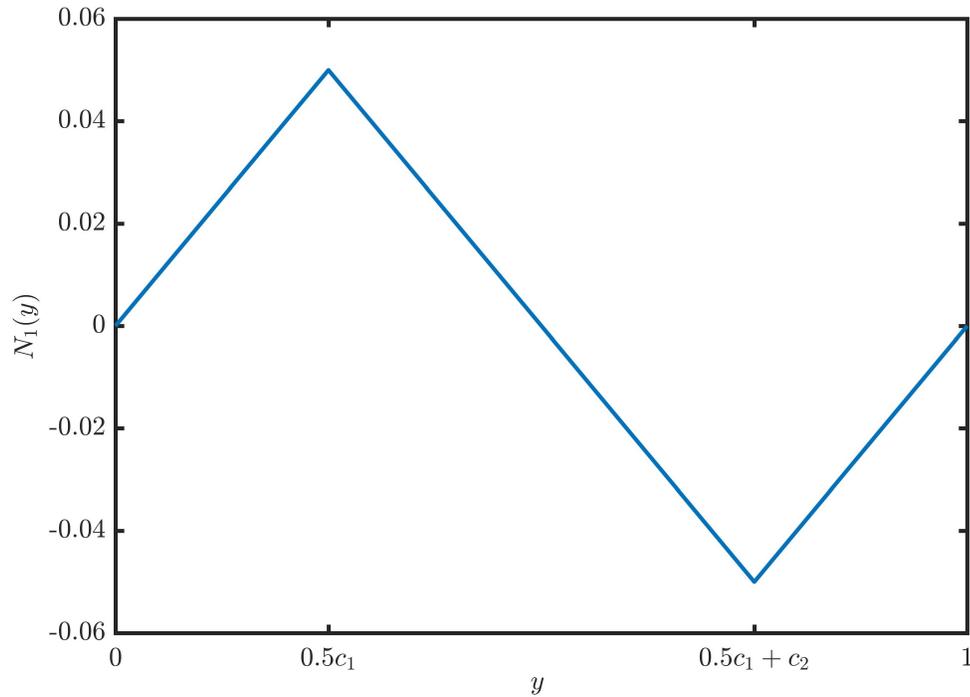


Figura 5.8: Solução do problema local - Compósito bifásico.

### 3. Problema homogeneizado

Pelas informações dadas para (5.11), o problema homogeneizado se estabelece como

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \widehat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, & t \in ]0, 1[, \quad x \in ]0, 1[, \\ u_0(t, 0) = 0, \quad u_0(t, 1) = 0, & t \in ]0, 1[, \\ u_0(0, x) = \text{sen}(\pi x), & x \in ]0, 1[, \end{cases}$$

onde  $\widehat{k}$  é definido em (5.21). Na Figura 5.9 observa-se a tendência dos perfis das soluções exata para a homogeneizada em  $t = 0.1$ , quando  $\varepsilon$  diminui.

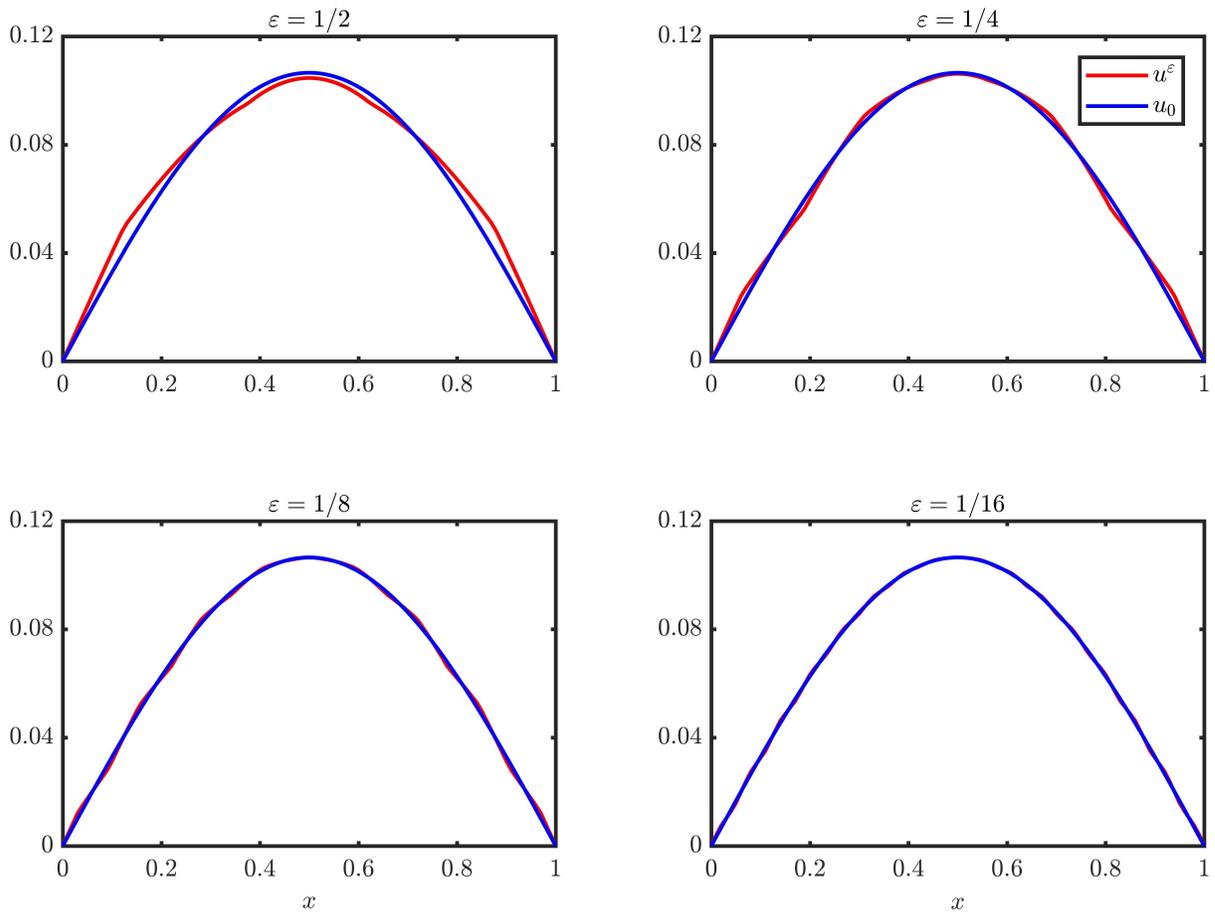


Figura 5.9: Convergência da solução exata para homogeneizada quando  $\epsilon$  tende a zero.

#### 4. Correção no contorno e dos curtos efeitos do tempo

O termo de correção  $u_1^*$  para a solução assintótica  $u^{(1)}$  também é fornecido do problema (3.69). No entanto, como o coeficiente é descontínuo, o problema (3.69) foi resolvido pelo MsFEM pois ele captura as variações do coeficiente, isto é, as funções base são construídas a partir desse coeficiente. Além disso, o fato das gradezas serem contínuas, o uso do MsFEM não apresenta nenhuma complicação, porém sob hipóteses de contato imperfeito  $[[\cdot]] \neq 0$  deve-se utilizar algoritmos multiescala adaptativos [39]. Na Figura 5.10 (primeira imagem) a correção da solução assintótica na condição inicial, além do seu curto efeito sobre a assintótica (segunda imagem) podem ser observadas.

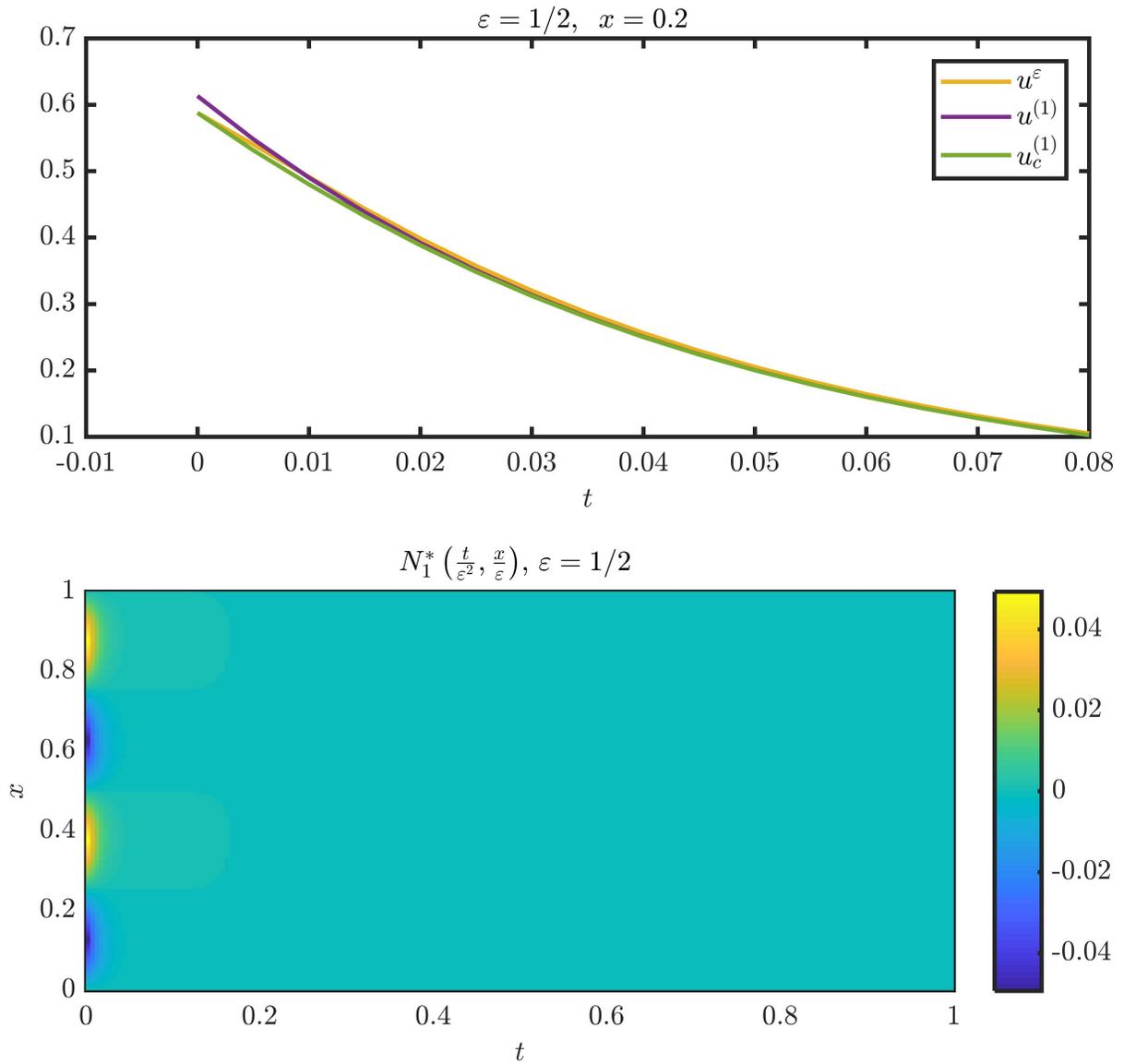


Figura 5.10: Perfis das soluções exata, assintótica e assintótica corrigida para  $\varepsilon = 1/2$  e  $x = 0.2$  fixados, assim como o esboço dos curtos efeitos do termo corretivo  $u_c^{(1)}$ .

## 5.2 Exemplos Não Lineares

Na introdução, se destaca que os desenvolvimentos realizados nesta tese têm como um dos objetivos possibilitar a homogeneização de problemas difusivos (1.16) com fluxos não lineares do tipo (1.14) e (1.15). Além disso, são apontadas algumas situações físicas, as

quais podem ser modeladas por essas relações constitutivas para  $p \in [1, \infty[$ . Logo, nesta seção, serão apresentados, resolvidos e homogeneizados dois casos particulares, o primeiro de (1.14) e o segundo de (1.15). Antes disso, é descrito abaixo o processo para construção da solução assintótica não linear.

### 5.2.1 Construção da solução assintótica do problema não linear unidimensional

Naturalmente, o processo para construir a solução assintótica  $u^{(1)}$  ou  $u_c^{(1)}$  não linear difere do feito para o linear. Desse modo, a seguir são listados os passos para construção de  $u_c^{(1)}$ :

1. Através do problema local (4.59), se deduz a lei efetiva e também uma relação para  $\mathcal{N}_1$  que depende dos parâmetros  $\bar{\epsilon}_0 = u_0(t, x)$  e  $\bar{\epsilon}_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$  para  $t$  e  $x$  fixados.
2. A partir da lei efetiva (4.62) deduzida no item 1. se formula e resolve o sistema não linear desacoplado (4.57)-(4.58) para obter  $u_0$  e  $\mathcal{N}_1$ .
3. Resolve o problema (4.76) para fornecer  $\mathcal{N}_1^*$  que corrige o contorno e os curtos efeitos do tempo.

### 5.2.2 Exemplo 3 - Compósito bifásico (relação constitutiva não linear sem limitador para energia)

Para elucidar o caso não linear, o mesmo compósito bifásico periódico - Figura 3.1 do Exemplo 2 é considerado. Assume-se que o compósito obedece a lei

$$\sigma_r(\epsilon) = k_r \epsilon,$$

em que  $k_r$ ,  $r = 1, 2$ , são os coeficientes de difusividade constantes nas fases constituintes. Contudo, os coeficientes  $k_r$  podem ter algumas flutuações e devem ser expressadas como  $k_r = a_r + \delta a(\epsilon)$ , onde  $a_r$  são as difusividades lineares que independem de  $\epsilon$ , enquanto  $\delta a(\epsilon)$  é o termo flutuante não linear que depende do gradiente da concentração. Em particular, considere que o termo flutuante seja  $\delta a(\epsilon) = b_r |\epsilon|^{p-2}$ , para  $p \in [2, \infty[$ . Assim,  $\sigma$  pode ser

reescrito como

$$\sigma(y, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(y) a_r \epsilon + b_r |\epsilon|^{p-2} \epsilon. \quad (5.22)$$

Para os resultados descritos no capítulo 4 serem utilizados, o termo de fluxo  $\sigma$  definido em (5.22) deve satisfazer as hipóteses da Definição 33. Em vista disso, observe  $\sigma$  pode ser visto como a soma de dois termos,  $\sigma_L$  (*Linear*) e  $\sigma_{NL}$  (*Não Linear*), onde

$$\sigma_L(y, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(y) a_r \epsilon \quad (5.23)$$

$$\sigma_{NL}(y, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(y) b_r |\epsilon|^{p-2} \epsilon. \quad (5.24)$$

Evidentemente, (5.23) é uma caso particular de (5.24) para  $p = 2$ . Uma verificação separada dos termos não apresenta nenhuma complicação no processo de existência e unicidade da solução do problema não linear devido a linearidade dos funcionais. A seguir, verifica se que (5.22) satisfaz as propriedades da Definição 33:

*Demonstração.* i)-iii) Evidentes, assumindo todos os argumentos de  $\sigma$  como independentes.

iv) Segue diretamente de avaliar:

$$\sigma(y, 0) = 0 \Rightarrow \sigma_r(0) = 0, \quad r = 1, 2.$$

v) Ao considerar o valor absoluto de  $\sigma$ , existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|\sigma(y, \epsilon)| \leq \left| \sum_{r=1}^2 \chi_r(y) (a_r + b_r |\epsilon|^{p-2}) \epsilon \right| \leq c(|\epsilon| + |\epsilon|^{p-1}),$$

e como  $|\epsilon| \leq 1 + |\epsilon|^{p-1}$ , segue

$$|\sigma(y, \epsilon)| \leq 2c(1 + |\epsilon|^{p-1}) \quad (5.25)$$

e, portanto (5.25) satisfaz o item *v*) da Definição 33.

vi) Note que

$$\begin{aligned} (\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2)) (\epsilon_1 - \epsilon_2) &= (\sigma_L(y, \epsilon_1) - \sigma_L(y, \epsilon_2)) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ &\quad + (\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)) (\epsilon_1 - \epsilon_2). \end{aligned}$$

e, evidentemente, para o termo envolvendo  $\sigma_L$ , existe uma constante positiva  $c_0$  tal que

$$(\sigma_L(y, \epsilon_1) - \sigma_L(y, \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_2)) \geq c_0 |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2. \quad (5.26)$$

Agora, para o termo envolvendo  $\sigma_{NL}$ , existe uma constante positiva  $c_1$  tal que

$$\begin{aligned} (\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)) (\epsilon_1 - \epsilon_2) &\geq c_1 (|\epsilon_1|^{p-2} \epsilon_1 - |\epsilon_2|^{p-2} \epsilon_2) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ &= c_1 (|\epsilon_1|^{p-2} |\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2} |\epsilon_2|) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|) \\ &\quad + c_1 (|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (|\epsilon_1| |\epsilon_2| - \epsilon_1 \epsilon_2). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para fins de desenvolvimento, será mostrado que

$$(|\epsilon_1|^{p-2} |\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2} |\epsilon_2|) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|) \geq c_3 (|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2. \quad (5.28)$$

Para isso, basta garantir a existência de uma constante positiva  $c_3$  tal que

$$\frac{(|\epsilon_1|^{p-2} |\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2} |\epsilon_2|) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)}{(|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2} \geq c_3.$$

De fato, para  $0 < |\epsilon_2| < |\epsilon_1| < \infty$ , existe  $\gamma \in ]0, 1[$  tal que  $1 - \gamma \leq |\epsilon_2|/|\epsilon_1| < 1$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{(|\epsilon_1|^{p-2} |\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2} |\epsilon_2|) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)}{(|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2} &= \frac{|\epsilon_1|^{p-2} - |\epsilon_2|^{p-2} \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|}}{(|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) \left(1 - \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|}\right)} \\ &\geq \frac{|\epsilon_2|^{p-2} \left(1 - \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|}\right)}{(|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) \left(1 - \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|}\right)} \\ &\geq \frac{|\epsilon_2|^{p-2}}{2|\epsilon_1|^{p-2}} \\ &\geq \frac{(1 - \gamma)^{p-2}}{2} = c_3. \end{aligned}$$

Portanto, usando (5.28) em (5.27) resulta

$$\begin{aligned} (\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)) (\epsilon_1 - \epsilon_2) &\geq c_4 (|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2 \\ &\quad + |\epsilon_1| |\epsilon_2| - \epsilon_1 \epsilon_2, \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde  $c_4 = \min\{c_1 c_3, c_1\}$ . Pela desigualdade de Young (2.5), usando  $p = q = 2$ , segue

$$(|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2 + |\epsilon_1||\epsilon_2| - \epsilon_1\epsilon_2 \geq \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2$$

e portanto (5.29) resulta

$$(\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2))(\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq \frac{c_4}{2} (|\epsilon_1|^{p-2} + |\epsilon_2|^{p-2}) (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2.$$

Para  $p \in [2, \infty)$ , segue da desigualdade (2.4) que

$$(\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2))(\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq 2^{2-p} c_4 |\epsilon_1 - \epsilon_2|^p.$$

Como  $c_0 |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 > 0$  em (5.26) conclui-se que

$$(\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2))(\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq c_5 |\epsilon_1 - \epsilon_2|^p,$$

onde  $c_5 = 2^{2-p} c_4$ .

vii) Analogamente ao item *vi*), a propriedade *vii*) pode ser verificada separadamente, isto é,

$$|\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2)| \leq |\sigma_L(y, \epsilon_1) - \sigma_L(y, \epsilon_2)| + |\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)|.$$

Evidentemente o termo envolvendo  $\sigma_L$  resulta

$$|\sigma_L(y, \epsilon_1) - \sigma_L(y, \epsilon_2)| \leq c_0 |\epsilon_1 - \epsilon_2|.$$

Para fins de desenvolvimento, com o termo envolvendo  $\sigma_{NL}$ , se deseja deduzir a seguinte estimativa para  $p \in [2, \infty[$ :

$$|\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)| \leq c_1 |\epsilon_1 - \epsilon_2| (1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}. \quad (5.30)$$

Pela definição de  $\sigma_{NL}$ , existe uma constante positiva  $c_2$  tal que

$$|\sigma_{NL}(y, \epsilon_1) - \sigma_{NL}(y, \epsilon_2)| \leq c_2 ||\epsilon_1|^{p-2}\epsilon_1 - |\epsilon_2|^{p-2}\epsilon_2|. \quad (5.31)$$

Para verificar (5.31), observe que

$$||\epsilon_1|^{p-2}\epsilon_1 - |\epsilon_2|^{p-2}\epsilon_2|^2 = (|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2}|\epsilon_2|)^2 + 2|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_2|^{p-2}(|\epsilon_1||\epsilon_2| - \epsilon_1\epsilon_2). \quad (5.32)$$

Para o primeiro termo de (5.32), assumindo  $0 < |\epsilon_2| < |\epsilon_1| < \infty$ , existem as constantes  $1 > \kappa > 0$  tais que  $0 < \kappa \leq 1 - |\epsilon_2|/|\epsilon_1| < 1$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2}|\epsilon_2|}{(|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}} &= \frac{|\epsilon_1|^{p-2} - |\epsilon_2|^{p-2} \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|}}{(1 - \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|})(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}} \\ &\leq \frac{|\epsilon_1|^{p-2}}{(1 - \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1|})(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}} \\ &\leq \frac{1}{\kappa} = c_4. \end{aligned}$$

Logo

$$|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_1| - |\epsilon_2|^{p-2}|\epsilon_2| \leq c_4(|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}. \quad (5.33)$$

Usando as relações

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \|x\|\|y\| \leq (\|x\| + \|y\|)^2, \quad 2(\|x\|\|y\| - xy) \leq \|x - y\|^2,$$

com  $x, y \in \mathbb{R}$  e (5.33) em (5.32) obtém-se

$$\begin{aligned} \left| |\epsilon_1|^{p-2}\epsilon_1 - |\epsilon_2|^{p-2}\epsilon_2 \right|^2 &\leq c_4^2(|\epsilon_1| - |\epsilon_2|)^2(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{2(p-2)} \\ &\quad + 2|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_2|^{p-2}(|\epsilon_1||\epsilon_2| - \epsilon_1\epsilon_2) \\ &\leq c_4^2|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{2(p-2)} \\ &\quad + 2|\epsilon_1|^{p-2}|\epsilon_2|^{p-2}(|\epsilon_1||\epsilon_2| - \epsilon_1\epsilon_2) \\ &\leq c_4^2|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{2(p-2)} \\ &\quad + 2(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{2(p-2)}(|\epsilon_1||\epsilon_2| - \epsilon_1\epsilon_2) \\ &\leq c_5^2(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{2(p-2)}(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2. \quad (5.34) \end{aligned}$$

Assim, quando substituir (5.34) em (5.31) obtém-se (5.30). Logo, da soma das equações (5.30) e (5.26) resulta

$$|\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2)| \leq c_7(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}|\epsilon_1 - \epsilon_2|$$

e portanto o item *vii*) é satisfeito. ■

Em particular, será considerado o caso de um compósito com comportamento constitutivo linear na fase 1 (matriz) e não linear na fase 2 (inclusão), as quais são descritas pelas seguintes leis, respectivamente,

$$\begin{cases} \sigma_1(\epsilon) = a_1\epsilon, \\ W_1(\epsilon) = \frac{a_1}{2}\epsilon^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2(\epsilon) = a_2\epsilon + b_2|\epsilon|^{p-2}\epsilon, \\ W_2(\epsilon) = \frac{a_2}{2}\epsilon^2 + \frac{b_2}{p}\epsilon^p, \end{cases} \quad \text{com } p = 4. \quad (5.35)$$

Na prática, em ambos desenvolvimentos, MHA e MCDE, busca-se a lei efetiva  $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon}_1)$  do problema local (4.59), onde para  $t$  e  $x$  fixados se tem

$$\left\langle \epsilon = \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right\rangle = \bar{\epsilon}_1.$$

Para ser mais preciso, ao integrar a equação (4.59) sobre  $Y \setminus \Gamma_0$ , considerando as leis (5.35), segue que

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = a_1 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right), & y \in Y_1 \\ \bar{\sigma} = a_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^3, & y \in Y_2 \end{cases}$$

onde  $\bar{\sigma}$  é constante para  $x$  e  $t$  fixados. Isolando o termo  $\bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$  obtém-se

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \frac{\bar{\sigma}}{a_1} & y \in Y_1, \\ \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \frac{\bar{\sigma}}{a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2}, & y \in Y_2. \end{cases}$$

Assim,  $\epsilon$  pode ser reescrito como

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \frac{\bar{\sigma}}{\chi_1(y)a_1 + \chi_2(y) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right]}, \quad y \in Y \setminus \Gamma_0.$$

Ao calcular a média integral de  $\epsilon$  segue

$$\langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon}_1 = \left\{ \frac{d_1}{a_1} + \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2} + d_2} \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1} ds \right\} \bar{\sigma},$$

em que  $\langle \chi_r \rangle = d_r$ ,  $r = 1, 2$ , e  $d_1 + d_2 = 1$ . Disso, portanto, resulta a lei efetiva

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon}_1) = \hat{k}(\bar{\epsilon}_1) \bar{\epsilon}_1,$$

onde

$$\widehat{k}(\bar{\epsilon}_1) = \left\{ \frac{d_1}{a_1} + \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2} + d_2} \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1} ds \right\}^{-1} \quad (5.36)$$

denota o coeficiente efetivo. Note que o coeficiente efetivo (5.36) é variável, em virtude da sua dependência de  $\bar{\epsilon}_1$ , contudo, não apresenta uma variação rápida como o coeficiente original.

Das relações (4.61) e da condição de unicidade em (4.59) se conclui que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) &= \int_0^y \left\{ \frac{\widehat{k}(\bar{\epsilon}_1)}{\chi_1(s)a_1 + \chi_2(s) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right]} - 1 \right\} \bar{\epsilon}_1 ds + C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1), \\ &= \widetilde{\mathcal{N}}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) + C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1), \quad y \in Y, \end{aligned}$$

onde  $C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = -\langle \widetilde{\mathcal{N}}_1 \rangle$ . Logo, a solução assintótica de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  é definida por

$$u^{(1)}(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) + \varepsilon \mathcal{N}_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad (5.37)$$

onde  $u_0$  é solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{k} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega, \\ u_0(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \\ u_0(t, 0) = 0, \quad u_0(t, 1) = 0, & t \in ]0, T[. \end{cases}$$

Como mencionado, em geral, a solução assintótica (5.37) não satisfaz exatamente a condição inicial e de contorno, logo se constrói o termo  $\mathcal{N}_1^*(\tau, y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$  que corrige (5.37) no contorno e nos curtos efeitos do tempo. Este termo corretivo é fornecido do problema (4.76).

### 5.2.3 Exemplo 4 - Compósito bifásico (relação constitutiva não linear com limitador para energia)

A lei não linear (5.22) pode, dependendo do fenômeno, não descrever de forma realista o comportamento constitutivo do meio por ser ilimitado. Diante disso, na introdução é apresentada a abordagem de Volokh que limita a energia constitutiva do meio. Agora, com o fluxo limitado para  $p = 4$  segue a seguinte lei constitutiva

$$\sigma \left( \frac{x}{\varepsilon}, \epsilon^\varepsilon \right) = \sum_{r=1}^2 \chi_r \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( a_r \epsilon^\varepsilon + b_r |\epsilon^\varepsilon|^2 \epsilon^\varepsilon \right) \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2} a_r (\epsilon^\varepsilon)^2 + \frac{1}{4} b_r (\epsilon^\varepsilon)^4 \right) \right\}. \quad (5.38)$$

Portanto, para (5.38) configura-se o seguinte problema original:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^\varepsilon \right) = f(t, x), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ \llbracket \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^\varepsilon \right) \rrbracket_\Gamma = 0, \\ u^\varepsilon(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Para o problema (5.39) ser homogenizado, deve-se verificar se o fluxo (5.38) satisfaz as propriedades da Definição 33. Para isso, considere o fluxo

$$\sigma(y, \varepsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(y) (a_r \varepsilon + b_r |\varepsilon|^{p-2} \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2} a_r \varepsilon^2 + \frac{1}{p} b_r \varepsilon^p \right) \right\} \quad (5.40)$$

para  $2 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* i)-iii) Evidentes, assumindo todos os argumentos de  $\sigma$  como independentes.

iv) Segue diretamente de avaliar

$$\sigma_r(0) = (a_r \varepsilon + b_r |\varepsilon|^{p-2} \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2} a_r \varepsilon^2 + \frac{1}{p} b_r \varepsilon^p \right) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \text{para } r = 1, 2.$$

v) Usando propriedades de valor absoluto, segue que:

$$|\sigma_r| \leq |a_r \varepsilon + b_r |\varepsilon|^{p-2} \varepsilon| \left| \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2} a_r \varepsilon^2 + \frac{1}{4} b_r \varepsilon^4 \right) \right\} \right| \leq c_r (|\varepsilon| + |\varepsilon|^{p-1}),$$

com  $c_r = \max\{a_r, b_r\}$ ,  $r = 1, 2$ . Logo

$$|\sigma(y, \varepsilon)| \leq c(1 + |\varepsilon|^{p-1}),$$

para  $c = 2 \max\{c_1, c_2\}$

vi) Define-se  $P_r(\varepsilon) = -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2} a_r \varepsilon_j^2 + \frac{1}{p} b_r \varepsilon_j^p \right)$ ,  $j = 1, 2$ . Disso, segue que

$$\begin{aligned} (\sigma_r(\varepsilon_1) - \sigma_r(\varepsilon_2)) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= [a_r (\varepsilon_1 \exp \{P_r(\varepsilon_1)\} - \varepsilon_2 \exp \{P_r(\varepsilon_2)\}) \\ &\quad + b_r (|\varepsilon_1|^{p-2} \varepsilon_1 \exp \{P_r(\varepsilon_1)\} \\ &\quad - |\varepsilon_2|^{p-2} \varepsilon_2 \exp \{P_r(\varepsilon_2)\})] (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Pela relação da energia com limitadores um valor  $\epsilon^*$  pode ser extraído, sendo ele entendido como um ponto de ruptura, ou seja, a deformação que ocorre a tensão de ruptura, como ilustra a Figura 5.11.

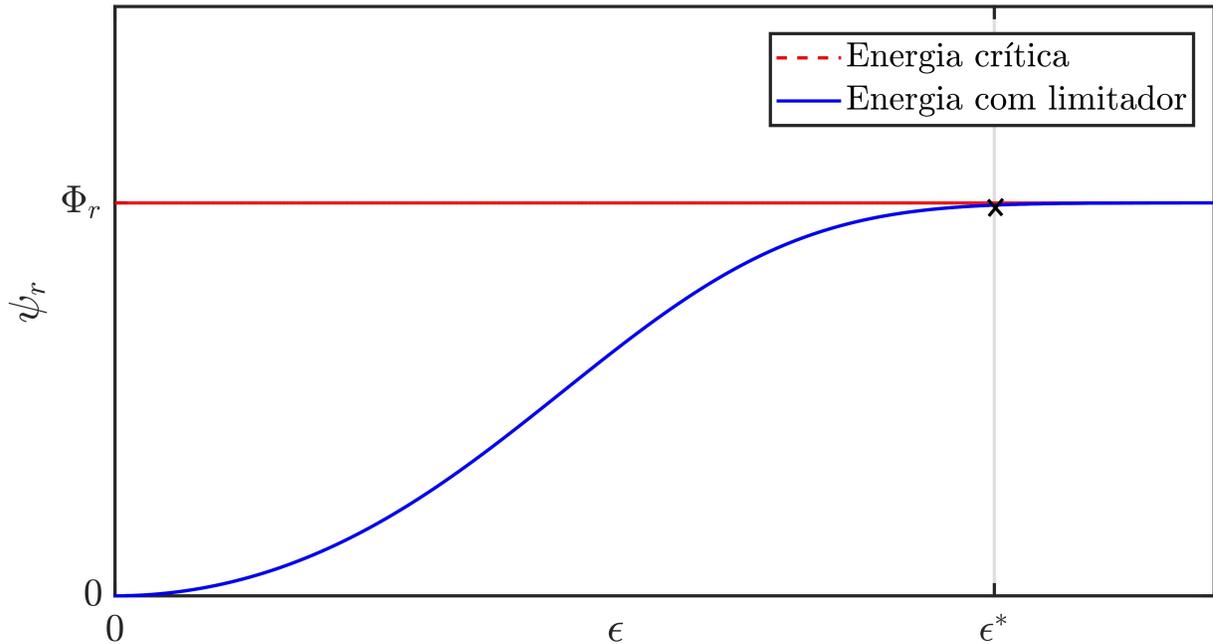


Figura 5.11: Ponto de ruptura.

Para ser mais preciso, considere  $\psi$  a energia limitada definida em (1.12), e  $\Phi$  a energia crítica do meio. Assim, dado  $\gamma > 0$  suficientemente pequeno, existirá um  $\epsilon^* \in \mathbb{R}$  tal que  $|\psi(\epsilon) - \Phi| \leq \gamma$ , e este ponto  $\epsilon^*$  será entendido como ponto de ruptura. Observe que o ponto de ruptura fornece uma energia constitutiva aproximadamente crítica, implicando num fluxo (ou tensão) aproximadamente nulo. A partir disso, obtém-se as seguintes estimativas para os termos da direita de (5.41):

$$a_r (\epsilon_1 \exp \{P_r(\epsilon_1)\} - \epsilon_2 \exp \{P_r(\epsilon_2)\}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq a_r \exp \{P_r(\epsilon^*)\} |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 \quad (5.42)$$

e

$$b_r (|\epsilon_1|^{p-2} \epsilon_1 \exp \{P_r(\epsilon_1)\} - |\epsilon_2|^{p-2} \epsilon_2 \exp \{P_r(\epsilon_2)\}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq b_r \exp \{P_r(\epsilon^*)\} |\epsilon_1 - \epsilon_2|^p. \quad (5.43)$$

Logo, de (5.41), (5.42) e (5.43) segue que

$$(\sigma_r(\epsilon_1) - \sigma_r(\epsilon_2))(\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq c(|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^p) \geq c|\epsilon_1 - \epsilon_2|^p,$$

para  $r = 1, 2$ , em que  $\epsilon^*$  depende das propriedades do material, da energia crítica e do parâmetro definido  $\gamma$ . Logo

$$(\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2))(\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq 2c(|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^p) \geq 2c|\epsilon_1 - \epsilon_2|^p,$$

e portanto, o item *vi*) da Definição (33) é satisfeito.

vii) Pelas propriedades de valor absoluto, o caráter limitado da exponencial e da estimativa (5.32) segue que

$$\begin{aligned} |\sigma_r(\epsilon_1) - \sigma_r(\epsilon_2)| &= |a_r(\epsilon_1 \exp\{P_r(\epsilon_1)\} - \epsilon_2 \exp\{P_r(\epsilon_2)\}) \\ &\quad + b_r(|\epsilon_1|^{p-2}\epsilon_1 \exp\{P_r(\epsilon_1)\} - |\epsilon_2|^{p-2}\epsilon_2 \exp\{P_r(\epsilon_2)\})| \\ &\leq a_r|\epsilon_1 - \epsilon_2| + b_r||\epsilon_1|^{p-2}\epsilon_1 - |\epsilon_2|^{p-2}\epsilon_2| \\ &\leq c_3(|\epsilon_1 - \epsilon_2| + |\epsilon_1 - \epsilon_2|(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}) \\ &\leq 2c_3|\epsilon_1 - \epsilon_2|(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}, \end{aligned}$$

para  $r = 1, 2$ . E portanto existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|\sigma(y, \epsilon_1) - \sigma(y, \epsilon_2)| \leq c|\epsilon_1 - \epsilon_2|(1 + |\epsilon_1| + |\epsilon_2|)^{p-2}.$$

■

Finalmente, garantidas as propriedades da Definição 33 para o fluxo (5.40), o caminho está livre para usar os resultados do Capítulo 4. Além disso, a existência e unicidade de solução para (5.39) é assegurada. Vejamos a seguir a construção da solução assintótica de (5.39).

Para  $x$  e  $t$  fixados, segue da equação e condição de contato perfeito em (4.59), após integrar com relação a variável  $y$ , que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \chi_1(y) \left[ a_1 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \\ & + \chi_2(y) \left[ a_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^3 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^4 \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{\sigma}$  é constante  $\forall y \in Y$ . Isolando o termo  $\bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$  obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = & \bar{\sigma} \left\{ \chi_1(y) a_1 \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & + \chi_2(y) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^4 \right] \right\} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Após integrar na variável  $y$  de 0 a 1 segue da condição de contato perfeito e periodicidade de  $\mathcal{N}_1$  que

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 = & \bar{\sigma} \int_0^1 \left\{ \chi_1(y) a_1 \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & + \chi_2(y) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^4 \right] \right\} \right\}^{-1} dy. \end{aligned}$$

Portanto a lei efetiva é expressa por

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon}_1) = \hat{k}(\bar{\epsilon}_1) \bar{\epsilon}_1,$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{k}(\bar{\epsilon}_1) = & \left\{ \int_0^1 \left\{ \chi_1(y) a_1 \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & + \chi_2(y) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^4 \right] \right\} \right\}^{-1} dy \right\}^{-1} \end{aligned}$$

denota o coeficiente efetivo. Em seguida, para se obter  $\mathcal{N}_1$ , da relação (5.44) se deduz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = & \left\{ \widehat{k}(\bar{\epsilon}_1) \left[ \chi_1(y) a_1 \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & + \chi_2(y) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^4 \right] \right\} \right]^{-1} - 1 \right\} \bar{\epsilon}_1. \end{aligned}$$

Ao integrar, segue pela condição de contato perfeito que  $\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = \widetilde{\mathcal{N}}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) + C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1)$ , tal que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{N}}_1(y, \bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = & \int_0^y \left\{ \widehat{k}(\bar{\epsilon}_1) \left[ \chi_1(s) a_1 \exp \left\{ -\frac{a_1}{2\Phi_1} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & + \chi_2(s) \left[ a_2 + b_2 \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_2} \left[ \frac{a_2}{2} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \frac{b_2}{4} \left( \bar{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right)^4 \right] \right\} \right]^{-1} - 1 \right\} \bar{\epsilon}_1 ds \end{aligned}$$

e  $C(\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1) = -\langle \widetilde{\mathcal{N}}_1 \rangle$ . Observe que a homogeneização forneceu uma lei efetiva contínua, porém, heterogênea. Isso não quer dizer que a homogeneização foi inútil, pelo contrário, ela forneceu um problema equivalente que pode ser resolvido por técnicas usuais e com menor custo computacional.

### 5.2.4 Tratamento numérico para o problema original não linear unidimensional

Naturalmente, o MsFEM será base para resolver o problema original não linear, já que envolve coeficientes rapidamente oscilantes. Por simplicidade, será formulado um único problema não linear que contemple os exemplos 3 e 4. Para isso, se considera o fluxo da forma (5.38). Reescrevendo (5.38) da forma  $\sigma(y, \epsilon) = a(y, \epsilon)\epsilon$  obtém-se

$$a(y, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(y)(a_r + b_r|\epsilon|^2) \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi_r} \left( \frac{1}{2}a_r\epsilon^2 + \frac{1}{4}b_r\epsilon^4 \right) \right\}. \quad (5.45)$$

Como casos particulares, seguem os Exemplos 3 ( $a_r > 0$ ,  $b_r \geq 0$  e  $\Phi_r = \infty$ ) e 4 ( $a_r > 0$ ,  $b_r > 0$  e  $0 < \Phi_r < \infty$ ). Logo, o problema original para cada  $\epsilon$  fixado é definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a \left( \frac{x}{\epsilon}, \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right) = f(t, x), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \left[ \left[ a \left( \frac{x}{\epsilon}, \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right] \right]_\Gamma = 0, \\ \llbracket u^\epsilon \rrbracket_\Gamma = 0, \\ u^\epsilon(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u^\epsilon(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Assume-se que  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  é dividido em  $N$  segmentos uniformes

$$0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{N+1} = 1$$

com  $\Delta x = \frac{1}{N} \forall i = 1, \dots, N+1$ , e o intervalo de tempo  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , é dividido em  $M$  segmentos uniformes

$$0 = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t_{M+1} = T$$

com  $\Delta t = \frac{T}{M} \forall n = 1, \dots, M+1$ . Para resolver (5.46) será empregado o Método do Ponto Fixo usando uma formulação implícita no tempo, isto é, conhecida a solução  $u^{(k)}$  da iteração  $k$  será obtida a próxima  $k+1$  através da equação

$$\frac{\partial u^{\epsilon, (k+1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a \left( \frac{x}{\epsilon}, \frac{\partial u^{\epsilon, (k)}}{\partial x} \right) \frac{\partial u^{\epsilon, (k+1)}}{\partial x} \right) = f(t, x). \quad (5.47)$$

Visto que já se conhece a solução da  $k$ -ésima iteração, usando diferenças finitas no tempo em (5.47), a seguinte formulação por Galerkin Descontínuo é obtida usando funções base

multiescala

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \left( \frac{u_i^{n+1,(k+1)} - u_i^{n,(k+1)}}{\Delta t} \right) \int_0^1 \phi_i^\varepsilon \phi_j^\varepsilon dx + u_i^{n+1,(k+1)} \int_0^1 a \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{u_{i+1}^{n+1,(k)} - u_{i-1}^{n+1,(k)}}{2\Delta x} \right) \frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} \frac{d\phi_j^\varepsilon}{dx} dx \\ = \int_0^1 f^{n+1}(x) \phi_j^\varepsilon(x) dx \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde, para  $t = t_{n+1}$  fixado,  $\phi_i^\varepsilon$  é solução do problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{u_{i+1}^{n+1,(k)} - u_{i-1}^{n+1,(k)}}{2\Delta x} \right) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) \right) = 0, \text{ em } ]x_{j-1}, x_j[ \setminus \Gamma, j = 2, \dots, N+1, \\ \left[ \left[ a \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{u_{i+1}^{n+1,(k)} - u_{i-1}^{n+1,(k)}}{2\Delta x} \right) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) \right] \right]_{\Gamma} = 0, \\ \llbracket \phi_i^\varepsilon \rrbracket_{\Gamma} = 0, \\ \phi_i^\varepsilon(x_j) = \delta_{ij}, i = 1, \dots, N+1. \end{array} \right. \quad (5.49)$$

A partir de (5.49) segue que

$$a \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{u_{i+1}^{n+1,(k)} - u_{i-1}^{n+1,(k)}}{2\Delta x} \right) \frac{d}{dx} \phi_i^\varepsilon(x) = c(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}),$$

tal que

$$c(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} c(x_{i-1}, x_i) = \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} dx \right)^{-1}, & \text{em } ]x_{i-1}, x_i[, \\ c(x_i, x_{i+1}) = - \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} dx \right)^{-1}, & \text{em } ]x_i, x_{i+1}[, \end{cases}$$

onde

$$a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right) = a \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{u_{i+1}^{n+1,(k)} - u_{i-1}^{n+1,(k)}}{2\Delta x} \right).$$

Consequentemente, seguem

$$\frac{d\phi_i^\varepsilon}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} dx \right)^{-1}, & \text{em } ]x_{i-1}, x_i[ \setminus \Gamma, \\ -\frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a^\varepsilon \left( x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)} \right)} dx \right)^{-1}, & \text{em } ]x_i, x_{i+1}[ \setminus \Gamma, \end{cases}$$

e

$$\phi_i^\varepsilon = \begin{cases} \left( \int_{x_{i-1}}^x \frac{1}{a^\varepsilon(z, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)})} dz \right) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a^\varepsilon(x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)})} dx \right)^{-1}, & \text{em } [x_{i-1}, x_i], \\ - \left( \int_{x_i}^x \frac{1}{a^\varepsilon(z, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)})} dz \right) \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a^\varepsilon(x, u_{i-1}^{n+1,(k)}, u_{i+1}^{n+1,(k)})} dx \right)^{-1} + 1, & \text{em } [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

A formulação (5.48) consiste no seguinte sistema

$$(\mathbf{A}^{n+1} + \Delta t \mathbf{B}^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1,(k+1)} = \Delta t \mathbf{g}^{n+1} + \mathbf{A}^{n+1} \mathbf{u}^{n,(k+1)}, \quad (5.50)$$

onde  $\mathbf{A}^{n+1} = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{B}^{n+1} = (b_{ij})$ ,  $\mathbf{g}^{n+1} = (g_j)$

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i^\varepsilon)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i^\varepsilon)^2 dx, \\ a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^\varepsilon \phi_{i-1}^\varepsilon dx, & a_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^\varepsilon \phi_{i+1}^\varepsilon dx, \\ b_{ii} &= c(x_{i-1}, x_i) - c(x_i, x_{i+1}), \\ b_{i,i-1} &= -c(x_{i-1}, x_i), & b_{i,i+1} &= c(x_i, x_{i+1}), \\ g_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{n+1} \phi_j^\varepsilon dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{n+1} \phi_j^\varepsilon dx, \end{aligned}$$

para  $i, j = 2, \dots, N$ . Para obter  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  deve-se resolver o sistema (5.50) para todo  $n = 1, \dots, M$ , após aplicação das condições de contorno, pelo TDMA. O processo iterativo encerra quando é satisfeita a condição  $|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}| < \kappa$ , para um  $\kappa > 0$  definido.

### Soluções Local e Homogeneizada

Para o fluxo  $\sigma(y, \epsilon) = a(y, \epsilon)\epsilon$  com  $a(y, \epsilon)$  definido em (5.45), deduz-se de (4.59) a seguinte lei efetiva

$$\hat{\sigma} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \hat{a} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

onde

$$\hat{a} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \left[ \int_0^1 \frac{1}{a \left( y, \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} dy \right]^{-1}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \left[ \frac{\hat{a} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}{a \left( y, \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} - 1 \right] \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (5.51)$$

Logo, o problema homogeneizado de (5.39) é formulado como

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{a} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f, & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega \\ u_0(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u_0(0, x) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.52)$$

Infelizmente, obter uma solução direta para o problema (5.52) não é possível, pois depende de (5.51), assim como (5.51) depende de  $u_0$ . Para resolver este sistema propõe-se utilizar um algoritmo de ponto fixo, onde  $u_0^{(k+1)}$  é obtido de

$$\frac{\partial u_0^{(k+1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0^{(k+1)}}{\partial x} \right) = f, \quad k \geq 0$$

onde

$$\hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} \right) = \left[ \int_0^1 \frac{1}{a \left( y, \frac{\partial \mathcal{N}_1^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} \right)} dy \right]^{-1},$$

e

$$\hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial x} \right) = \left[ \int_0^1 \frac{1}{a \left( y, \frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_0^{(k-1)}}{\partial x} \right)} dy \right]^{-1}, \quad k \geq 1.$$

E, a partir de  $u^{(k+1)}$  se atualiza

$$\frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k+1)}}{\partial y} = \left[ \frac{\hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(k+1)}}{\partial x} \right)}{a \left( y, \frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_0^{(k+1)}}{\partial x} \right)} - 1 \right] \frac{\partial u_0^{(k+1)}}{\partial x}, \quad k \geq 0.$$

O termo  $u_0^{(0)}$  é solução do problema linear ( $p = 2$  e  $\Phi_1 = \Phi_2 = \infty$ ), com coeficiente efetivo  $\hat{a} = \left( \frac{d_1}{a_1 + b_1} + \frac{d_2}{a_2 + b_2} \right)^{-1}$  e  $\frac{\partial \mathcal{N}_1^{(0)}}{\partial y} = \left( \frac{\hat{a}}{\sum_{r=1}^2 \chi_r(y)(a_r + b_r)} - 1 \right) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}$ . Disso, portanto, se estabelece o seguinte algoritmo:

1º) Calcule

$$\hat{a} = \left( \frac{d_1}{a_1 + b_1} + \frac{d_2}{a_2 + b_2} \right)^{-1}.$$

2º) Obtenha  $u_0^{(0)}$ , solução do problema homogeneizado linear

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial t} - \hat{a} \frac{\partial^2 u_0^{(0)}}{\partial x^2} = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega, \\ u_0^{(0)}(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \\ u_0^{(0)}(t, x) = 0, & \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[. \end{cases}$$

3º) Defina  $\frac{\partial \mathcal{N}_1^{(0)}}{\partial y} = \left( \frac{\hat{a}}{\sum_{r=1}^2 \chi_r(y)(a_r + b_r)} - 1 \right) \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x}$ .

4º) Defina  $\hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} \right)$ .

Faça  $k = 0$ .

5º) Resolva

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right) = f(t, x), & t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega, \\ u_0^{(1)}(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \\ u_0^{(1)}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in ]0, T[. \end{cases}$$

6º) Atualiza  $\hat{a} \left( \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right)$ .

7º) Atualiza  $\frac{\partial \mathcal{N}_1^{(1)}}{\partial y}$ .

Faça  $k = 1$ .

8º) Resolva para  $u_0^{(2)}$ .

E assim por diante, até que para alguma tolerância  $\delta > 0$ , sejam satisfeitas

$$\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \leq \delta \text{ e } \left\| \frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k+1)}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k)}}{\partial y} \right\| \leq \delta.$$

Observe que os problemas homogeneizados para obtenção de  $u_0^{(k+1)}$  consistem em resolver as equações lineares com coeficientes constantes, logo empregar o FEM clássico é suficiente para resolvê-los. Como há uma relação explícita para  $\frac{\partial \mathcal{N}_1^{(k+1)}}{\partial y}$ , obtê-la não apresenta muita complicação. Para o cálculo de  $\hat{a}$  se faz necessário o uso do método de quadratura adaptativa para o cálculo da integral.

## Correções do contorno e curtos efeitos do tempo

Na descrição do processo de construção da solução assintótica do problema não linear, o último passo consiste em corrigir o contorno e os curtos efeitos do tempo, pois dos passos anteriores, já conhecemos  $u_0 + \varepsilon \mathcal{N}_1$  e sabemos que em geral essa assintótica não satisfaz exatamente as condições do problema original. Para corrigi-las, o problema (4.76) deve ser resolvido. Para isso, se fez uso dos MsFEM e ponto fixo, assim como no problema original (5.47), porém agora, nas variáveis  $\tau$  e  $y$ .

Definiu-se, para  $x$  e  $t$  fixos,  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1^* + \mathcal{N}_1 + \bar{\varepsilon}_1 y$ , logo o problema (4.76) é equivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \left( y, \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in ]0, 1[ \setminus \Gamma_0, \\ \left[ \left[ a \left( y, \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \mathcal{M}_1(0, y, \bar{\varepsilon}_1) = \bar{\varepsilon}_1 y, \quad y \in ]0, 1[, \\ \mathcal{M}_1(\tau, 0, \bar{\varepsilon}_1) = 0, \quad \mathcal{M}_1(\tau, 1, \bar{\varepsilon}_1) = \bar{\varepsilon}_1, \quad \tau \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Para simplificar a implementação, se define ainda,  $\bar{\varepsilon}_1 \mathcal{M}_1^* = \mathcal{M}_1$ , logo o problema (5.53) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{M}_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \left( y, \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^*}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1^*}{\partial y} \right) = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in ]0, 1[ \setminus \Gamma_0, \\ \left[ \left[ a \left( y, \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^*}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1^*}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \llbracket \mathcal{M}_1^* \rrbracket_{\Gamma_0} = 0, \\ \mathcal{M}_1^*(0, y, \bar{\varepsilon}_1) = y, \quad y \in ]0, 1[, \\ \mathcal{M}_1^*(\tau, 0, \bar{\varepsilon}_1) = 0, \quad \mathcal{M}_1^*(\tau, 1, \bar{\varepsilon}_1) = 1, \quad \tau \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Através do método de ponto fixo, obtém-se  $\mathcal{M}_1^*$  de (5.54) a partir da equação recursiva

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k+1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a \left( y, \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k+1)}}{\partial y} \right] = 0, \quad (5.55)$$

onde, para  $k = 0$ , se considera  $\mathcal{M}_1^{*(0)} = y$ . Assim obtemos o seguinte problema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k+1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \left( y, \bar{\epsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k+1)}}{\partial y} \right) = 0, \quad \tau \in ]0, T[, \quad y \in ]0, 1[ \setminus \Gamma_0, \\ \left[ \left[ a \left( y, \bar{\epsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k+1)}}{\partial y} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \left[ \left[ \mathcal{M}_1^{*(k+1)} \right] \right]_{\Gamma_0} = 0, \\ \mathcal{M}_1^{*(k+1)}(0, y, \bar{\epsilon}_1) = y, \quad y \in ]0, 1[, \\ \mathcal{M}_1^{*(k+1)}(\tau, 0, \bar{\epsilon}_1) = 0, \quad \mathcal{M}_1^{*(k+1)}(\tau, 1, \bar{\epsilon}_1) = 1, \quad \tau \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (5.56)$$

Pela positividade de  $a(y, \epsilon)$  para todo  $y \in Y$  e  $\bar{\epsilon}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1^{*(k)}}{\partial y} \in \mathbb{R}$ , o problema (5.56) se resolve pelo MsFEM. Obtido  $\mathcal{M}_1^*$ , basta calcular

$$\bar{\epsilon}_1 (\mathcal{M}_1^* - y) = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1^*,$$

para obter o termo de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  da assintótica corrigida  $u_c^{(1)}$ .

Pela Figura 5.12, pode-se observar a convergência da solução exata com e sem fluxo limitado para a homogeneizada, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Se assumiu como condição inicial  $g(x) = x(1 - x)$ , fonte/sumidouro  $f = e^{-t}$ , tempo final  $T = 1$ , propriedades  $a_1 = 7$ ,  $b_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\Phi_1 = 4$  e  $\Phi_2 = 2$ . As imagens na primeira linha da Figura 5.12, ilustram a solução exata sem limitador para energia  $u_{SL}^\varepsilon$ , convergindo para a solução homogeneizada sem limitador para energia  $u_{0,SL}$ . Na segunda linha, é ilustrada a convergência da solução exata com limitador para energia  $u_{CL}^\varepsilon$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para a solução homogeneizada com limitador para a energia  $u_{0,CL}$ . Nas terceira e quarta linha, similarmente, observam-se as convergências das soluções exata para as soluções assintótica corrigida com  $u_{c,CL}^{(1)}$  e sem  $u_{c,SL}^{(1)}$  limitador para energia, respectivamente.

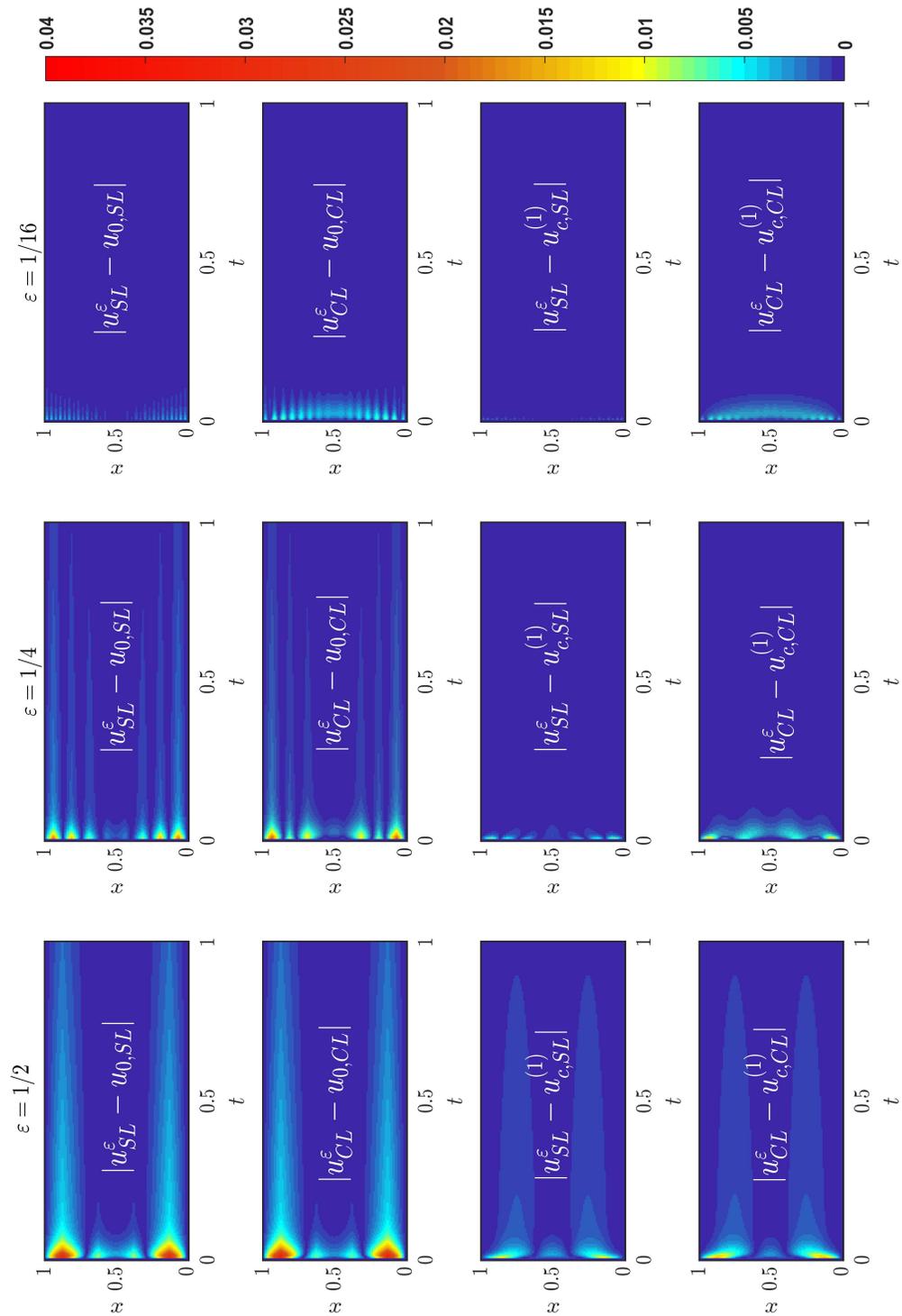


Figura 5.12: Erros entre a solução exata e homogenizada, exata e assintótica, com e sem limitador para energia, para  $\epsilon = 1/2, 1/4$  e  $1/16$ .

Para gerar tais resultados usou-se uma discretização de  $N = 160$  elementos no espaço e  $M = 200$  no tempo. A tolerância para as condições de convergência foi de  $\delta = 10^{-6}$ . Na Figura 5.13 é possível comparar o tempo (tempo da máquina definido em segundos (s)) de simulação entre as soluções homogeneizada, exata, assintótica corrigida e tradicional para diferentes valores de  $\varepsilon$  fixados:

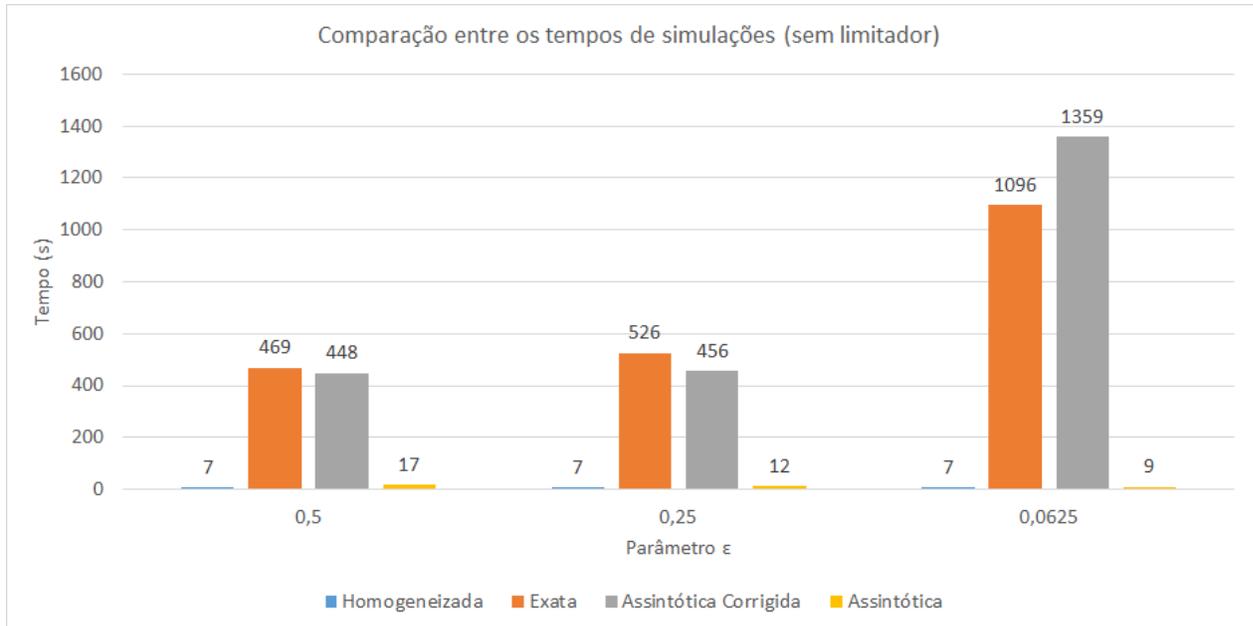


Figura 5.13: Tempos de simulação das soluções homogeneizada, exata, assintótica corrigida e tradicional do Exemplo 3.

No gráfico, as colunas azuis indicam os tempos de simulação para as soluções homogeneizadas. Observa-se que o tempo se mantém em 7s para todos os valores de  $\varepsilon$ . O que é natural, uma vez que o problema homogeneizado não depende do parâmetro. O tempo de simulação das exatas, indicadas pelas colunas laranjas, apresentam um crescimento conforme o parâmetro  $\varepsilon$  diminui, assim como o tempo da assintótica corrigida. Já o tempo de simulação da assintótica tradicional diminuiu conforme o  $\varepsilon$  diminuí. Esse é um efeito do algoritmo, já que para cada  $\varepsilon$  a malha, usada na resolução dos problemas locais, variava conforme o valor de  $\varepsilon$  mudava, isto é, quando  $\varepsilon = 1/2$ , a malha usada para resolver o problema local apresentava 80 elementos. Quando  $\varepsilon = 1/4$ , a malha apresentava 40 elementos e por fim, quando  $\varepsilon = 1/16$ , a malha apresentava 10 elementos, o que resultou nessa diminuição do tempo de simulação.

No Exemplo 4, a partir da Figura 5.14, é possível visualizar que o tempo de simulação da homogeneizada, novamente manteve estabilidade no tempo, porém houve um aumento no tempo de simulação. Da primeira e segunda simulação da exata houve uma queda no tempo, porém ela se justifica pela redução no número de iterações realizadas pelo método de ponto fixo. Como no exemplo anterior, o tempo de simulação da assintótica tradicional teve queda pelos mesmos motivos.

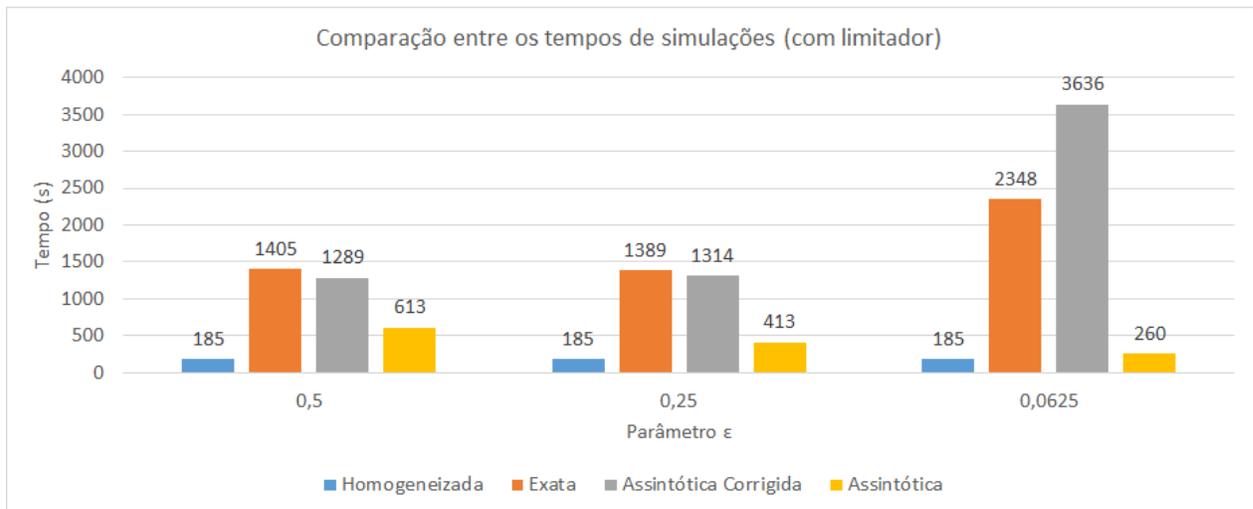


Figura 5.14: Tempos de simulação das soluções exata, homogeneizada, assintótica tradicional e corrigida do Exemplo 4.

A partir desses dados, notou-se um aumento no tempo de simulação das soluções com limitador, comparados às sem. A implementação e o tempo de simulação para a solução homogeneizada é significativamente mais simples e rápida. Obter uma solução assintótica corrigida pode ser uma alternativa para obtenção de uma aproximação da solução exata, porém a implementação pode se tornar trabalhosa e o tempo de simulação longo.

Comprovando o que foi apresentado na seção sobre a correção dos curtos efeitos do tempo, na Figura 5.15 para  $\epsilon = 1/2$  verifica-se a correção da assintótica no perfil para  $x = 0.1$ . Ainda, na mesma figura, verifica-se que o erro absoluto, em perfil, entre as soluções exata e assintótica corrigida no valor inicial é zero, diferentemente do erro absoluto entre as exata e assintótica tradicional que é não nulo.

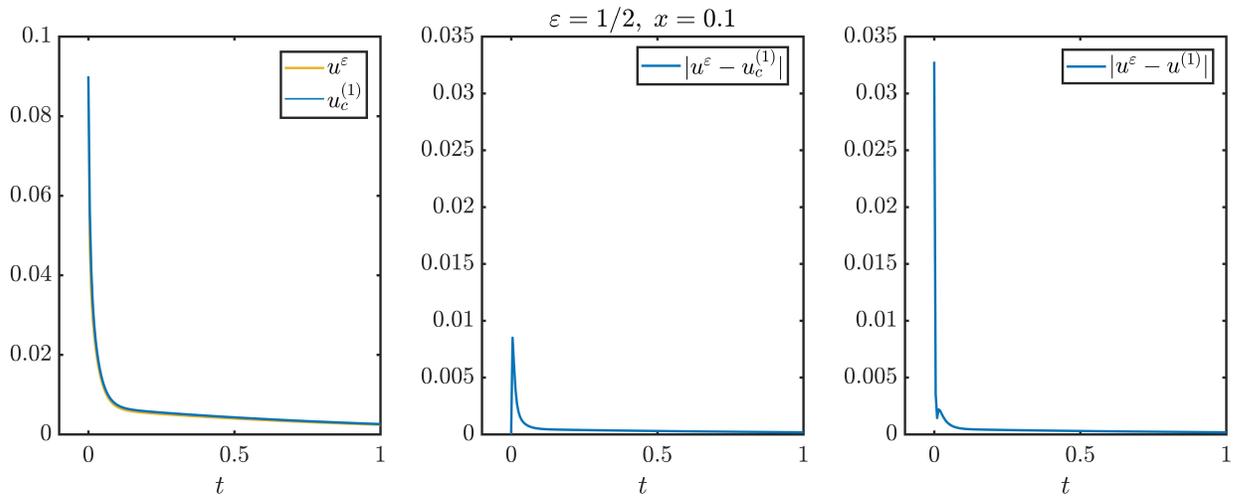


Figura 5.15: Perfis das soluções exata e assintótica corrigida sem limitador para energia, em  $x = 0.1$ , para  $\varepsilon = 1/2$ . Erros absolutos dos perfis em  $x = 0.1$  entre as soluções exata, assintótica e assintótica corrigida.

## 6 CONCLUSÕES

A prova de existência e unicidade da solução do problema de difusão não linear colaborou em diversos pontos deste trabalho. Inicialmente, as estimativas deduzidas, permitiram deduzir que a sequência de soluções exata, indexada por  $\varepsilon$ , era limitada em norma por uma constante independente do parâmetro  $\varepsilon$ . Sendo essa, uma hipótese necessária para o emprego do MCDE. Permitiu ainda, garantir a existência e unicidade de solução para o problema homogeneizado, quando garantida a preservação das propriedades do fluxo original para o efetivo. Consequentemente, a unicidade de  $\mathcal{N}_1$ , solução do problema local biparamétrico.

As estimativas obtidas do problema não linear não foram aplicáveis na obtenção da proximidade entre as soluções exata e homogeneizada, uma vez que o operador é não linear. Porém, fazendo uso das propriedades do fluxo original, foi possível demonstrar a proximidade entre as soluções exata e homogeneizada, justificando todo o processo de homogeneização realizado, além de, é claro, mostrar que a solução homogeneizada é  $\varepsilon$ -próxima da exata na norma do espaço que elas pertencem.

A ideia de homogeneização é importante quando encaramos problemas multi-escala. Os métodos de homogeneização oferecem ferramentas que simplificam o modelo de maneira rigorosa, possibilitando o estudo do fenômeno numa precisão aceitável. Isto foi corroborado após a aplicação dos métodos MHA e MCDE sob os modelos iniciais multiescala com coeficientes rapidamente oscilantes (problemas originais). Os problemas homogeneizados apresentam coeficientes constantes ou sem a rápida oscilação. A preservação das propriedades do fluxo foi importante para este estudo, já que ela permitiu garantir a existência e unicidade do problema homogeneizado não linear com/sem fluxo limitado.

No exemplo 1 do Capítulo 5, a solução homogeneizada apresenta um comportamento  $\varepsilon$ -próximo da solução exata. Para se obter uma aproximação mais precisa da exata, é preciso adicionar ao comportamento efetivo (macroscópico)  $u_0$ , o termo que contém a formação local (microscópica) do meio, isto é,  $\varepsilon u_1$ . Tradicionalmente, esta soma fornece um comportamento impreciso no contorno e no valor inicial e, portanto, se propôs acrescentar

um termo corretivo  $\varepsilon u_1^*$ . Este termo corretivo é fornecido através de uma abordagem pós método de homogeneização. Esta abordagem de correção se mostrou útil para aproximar a solução assintótica da exata, tanto linear, quanto não linear, a qual, até então, não se tinha registros.

Na simulação numérica dos exemplos, destaca-se a importância do Método de Elementos Finitos Multiescala (MsFEM) e o Método da Quadratura Adaptativa. O MsFEM por permitir resolver os problemas com coeficientes rapidamente oscilantes e mesmo não oscilante (como no problema local não linear, com coeficiente descontínuo), e a eficiência do Método de Quadratura Adaptativa para o cálculo das integrais envolvidas no MsFEM.

## Trabalhos Futuros

A seguir são apontados alguns tópicos que dão continuidade a este trabalho:

1. Como este trabalho está voltado para meios heterogêneos que apresentam separação de escalas estruturais, suas propriedades apresentam variação rápida com relação à variável espacial apenas. Porém, a relação do fluxo não linear ainda poderia ser estendida para

$$\sigma \left( t, x, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right), \quad r > 0,$$

isto é, um fluxo envolvendo coeficientes rapidamente oscilantes também com relação à variável temporal e hipóteses de periodicidade no tempo e espaço. O limite, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , do problema de difusão original envolvendo este fluxo, obtido pelo MCDE, pode ser encontrado no artigo [115]. Foi encontrado também o limite para o fluxo

$$\sigma \left( x, \frac{t}{\varepsilon^r}, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right), \quad r > 0, \quad (6.1)$$

em [114]. Neste, além da homogeneização, o resultado de corretor é desenvolvido. Em ambos os trabalhos [114, 115], se deduz os problemas limites para três casos  $0 < r < 2$ ,  $r = 2$  e  $r > 2$ . Destaca-se aqui o segundo caso, quando  $r = 2$ .

Quando  $r = 2$ , se deduz para um problema difusivo envolvendo o fluxo (6.1) os seguintes problemas homogeneizado e local, respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \widehat{\sigma} \left( x, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f(t, x), & x \in \Omega, \quad t \in ]0, T[, \\ u_0(0, x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_0(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \quad t \in ]0, T[, \end{cases}$$

onde

$$\widehat{\sigma} \left( x, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \int_0^1 \int_Y \sigma \left( x, \tau, y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dy d\tau$$

e

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left( x, y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Com estes resultados, conjectura-se a construção de uma solução assintótica, agora, corrigida no contorno e nos curtos efeitos do tempo, assim como realizado no MHA.

2. Estender os resultados existência, unicidade e homogeneização via MHA aqui apresentados para funções  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .
3. Para o item anterior, desenvolver usando condições de contorno do tipo Neumann ou Robin.
4. Desenvolver a homogeneização via MHA e MDCE não linear supondo condições de contato imperfeito.
5. Estabelecer hipóteses para o fluxo não linear  $\sigma$  quando  $p \in [1, 2]$  e assim desenvolver os resultados de existência, unicidade e homogeneização para este caso.

## Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] R. P. Agarwall and D. O'Regan. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 2008.
- [3] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [4] G. Allaire and G. Bal. Homogenization of the criticality spectral equation in neutron transport. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(4):721–746, 1999.
- [5] G. Allaire and M. Briane. Multiscale convergence and reiterated homogenisation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 126A:297–342, 1996.
- [6] G. Allaire and H. Hutridurga. Homogenization of reactive flows in porous media and competition between bulk and surface diffusion. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 77:788–815, 2012.
- [7] M. Amar, D. Andreucci, P. Bisegna, and R. Gianni. A hierarchy of models for the electrical conduction in biological tissues via two-scale convergence: the nonlinear case. *Differential and Integral Equations*, 26(9-10):885–912, 2013.
- [8] A.Matine, N.Boyard, G.Legrain, Y.Jarny, and P.Cartraud. Transient heat conduction within periodic heterogeneous media: A space-time homogenization approach. *International Journal of Thermal Sciences*, 92:217–229, 2015.
- [9] D. Aranda-Iglesias, G. Vadillo, J. A. Rodríguez-Martínez, and K.Y. Volokh. Modeling deformation and failure of elastomers at high strain rates. *Mechanics of Materials*, 104:85–92, 2017.
- [10] I. Babuska. Solutions of interface problems by homogenization, part 1. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 7(5):603–634, 1976a.

- [11] I. Babuska. Solutions of interface problems by homogenization, part 2. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 7(5):635–645, 1976b.
- [12] I. Babuska. Solutions of interface problems by homogenization, part 3. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 8(6):923–937, 1976c.
- [13] N. S. Bakhvalov. Averaged characteristics of bodies with periodic structure. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 218(5):1046–1048, 1974.
- [14] N. S. Bakhvalov. Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 224(2):351–355, 1975a.
- [15] N. S. Bakhvalov. Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 225(2):249–252, 1975b.
- [16] N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [17] G. Bayada, S. Martin, and C. Vázquez. Two-scale homogenization of a hydrodynamic Elrod-Adams model. *Asymptotic Analysis*, 44(1-2):75–110, 2005.
- [18] M. P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [19] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolau. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [20] Y. Benveniste. Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *Physical Review B*, 51:16424–16427, 1995.
- [21] V. L. Berdichevsky. Spatial homogenization of periodic structures. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 222(3):565–567, 1975.
- [22] D. J. Bergman. Anisotropic nonlinear response of periodic square or cubic composites. *Physica A*, 270(1-2):8–14, 1999.

- [23] F. Botelho. *Functional Analysis and Applied Optimization in Banach Spaces: Applications to Non-Convex Variational Models*. Springer, New York, 2014.
- [24] A. Bourgeat, S. Luckhaus, and A. Mikelic. Convergence of the homogenization process for a double-porosity model of immiscible two-phase flow. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(6):1520–1543, 1996.
- [25] J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, F. J. Sabina, and R. Rodríguez-Ramos. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - ii. piezoelectric and square symmetry. *Mechanics of Materials*, 33:237–248, 2001.
- [26] J. Bravo-Castillero, F. J. Sabina, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, O. V. Mijangos, and J. C. Sabina de Lis. Effective elastic properties of periodic fibrous composites. limit cases. applications to porous and nonlinear materials. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Systems*, 13:305–322, 2006.
- [27] J. Bravo-Castillero, L. M. Sixto-Camacho, R. Brenner, R. Guinovart-Díaz, L. D. Pérez-Fernández, and F. J. Sabina. Temperature-related effective properties and exact relations for thermo-magneto-electro-elastic fibrous composites. *Computers and Mathematics with Applications*, 69:980–996, 2015.
- [28] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [29] F. Brezzi and L.D. Marini. A quick tutorial on dg methods for elliptic problems. In *Recent Developments in Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, volume 157, pages 1–24. Springer, 2012.
- [30] O. P. Bruno. The effective conductivity of strongly heterogeneous composites. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 433:353–381, 1991.
- [31] Y. Capdeville, L. Guillot, and J. J. Marigo. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 181:897–910, 2010a.

- [32] Y. Capdeville, L. Guillot, and J. J. Marigo. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-SV waves. *Geophysical Journal International*, 182:903–922, 2010b.
- [33] A. V. Cherkaev. *Variational Methods for Structural Optimization*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [34] R. M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley, New York, 1979.
- [35] D. Cioranescu and P. Donato. *An Introduction to Homogenization*. University Press, Oxford, 1999.
- [36] C. W. Clark. Derivation of microstructure models of fluid flow by homogenization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 226(3):364–376, 1998.
- [37] E. De Giorgi and S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell’energia per operatori ellittici del secondo ordine. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, 8:391–411, 1973.
- [38] M. P. de Lima. Homogeneização assintótica de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.
- [39] Y. Efendiev and T. Y. Hou. *Multiscale Finite Element Methods: theory and applications*. Springer, New York, 2008.
- [40] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, New York, 2010.
- [41] T. Fatima and A. Muntean. Sulfate attack in sewer pipes: Derivation of a concrete corrosion model via two-scale convergence. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 15:326–344, 2014.
- [42] D. Felbacq, G. Bouchitté, B. Guizal, and A. Moreau. Two-scale approach to the homogenization of membrane photonic crystals. *Journal of Nanophotonics*, 2(023501):261–286, 2008.

- [43] E. Frénod, F. Salvarani, and E. Sonnendrücker. Long time simulation of a beam in a periodic focusing channel via a two-scale PIC-method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(2):175–197, 2009.
- [44] G. Gagneux and O. Millet. Homogenization of the nernst-planck-poisson system by two-scale convergence. *Journal of Elasticity*, 114:64–84, 2014.
- [45] L. Gao and Z. Li. Nonlinear thermal conductivity of granular composite medium. *Solid State Communications*, 100(1):53–56, 1996.
- [46] S. Giordano and W. Rocchia. Predicting the dielectric nonlinearity of anisotropic composite materials via tensorial analysis. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 18(47):10585–10599, 2006.
- [47] R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, and F. J. Sabina. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. i: elastic and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:1445–1462, 2001.
- [48] K. H. Hoffmann and N. D. Botkin. Homogenization of von Kármán plates excited by piezoelectric patches. *ZAMM – Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 80(9):579–590, 2000.
- [49] A. Holmbom. *Some Modes of Convergence and Their Application to Homogenization and Optimal Composites Design*. PhD thesis, Lulea University of Technology, Lulea, 1996.
- [50] A. Holmbom. Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results. *Applications of Mathematics*, 42(5):321–343, 1997.
- [51] U. Hornung. *Homogenization and Porous Media*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [52] T. Y. Hou and X. Xin. Homogenization of linear transport equations with oscillatory vector fields. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(1):34–45, 1992.

- [53] P. M. Hui, P. Cheung, and D. Stroud. Theory of third harmonic generation in random composites of nonlinear dielectrics. *Journal of Applied Physics*, 84(7):3451–3458, 1998.
- [54] M. Jai. Homogenization and two-scale convergence of the compressible Reynolds lubrication equation modelling the flying characteristics of a rough magnetic head over a rough rigid-disk surface. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 29(2):199–233, 1995.
- [55] Z. Jia, W. Liu, Y. Zhang, F. Wang, and D. Guo. A nonlinear magnetomechanical coupling model of giant magnetostrictive thin films at low magnetic fields. *Sensors and Actuators A*, 128(1):158–164, 2006.
- [56] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of Partial Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [57] L. D. Kudriavtsev. *Curso de Análisis Matemático: Tomo I*. Mir, Moscou, 1983.
- [58] A. M. León-Mecías, J. Bravo-Castillero, A. Mesejo-Chiong, L. D. Pérez-Fernández, and F. J. Sabina. Improved bounds for the effective energy of nonlinear 3d conducting composites. *Revista Mexicana de Física*, 53(3):164–170, 2007.
- [59] A. M. León-Mecías, L. D. Pérez-Fernández, J. Bravo-Castillero, and F. J. Sabina. Tight bounds for three-dimensional nonlinear incompressible elastic composites. *International Journal of Engineering Science*, 46(11):1087–1097, 2007.
- [60] Y. Lev, A. Faye, and K. Y. Volokh. Thermoelastic deformation and failure of rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 122:538–554, 2019.
- [61] O. Levy and D. J. Bergman. Series expansion for a weakly nonlinear conductivity of random composites. *Physica A*, 191(1-4):475–478, 1992.
- [62] A. L. Madureira. *Numerical methods and analysis of multiscale problems*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, 1 edition, 2017.

- [63] V. A. Marchenko and E. Ya. Khruslov. *Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grained Boundary*. Naukova Dumka, Kiev, 1974.
- [64] S. A. Meier and A. Muntean. A two-scale reaction-diffusion system with micro-cell reaction concentrated on a free boundary. *Comptes Rendus Mécanique*, 336:481–486, 2008.
- [65] A. M. Meirmanov. Nguetseng’s two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media. *Siberian Mathematical Journal*, 48(3):519–538, 2007.
- [66] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. University Press, Cambridge, 2002.
- [67] S. Moskov and M. Vogelius. First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. a convergence proof. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 127(6):1263–1299, 1997.
- [68] F. Murat and L. Tartar. H-convergence. In A. Cherkaev and R. Kohn, editors, *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [69] P. Ponte-Castaneda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34:171–302, 1998.
- [70] Chiu-On Ng. Dispersion in steady and oscillatory flows through a tube with reversible and irreversible wall reactions. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2066):481–515, 2006.
- [71] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3):608–623, 1989.
- [72] F. Ni, G. Q. Gu, and K. M. Chen. Effective thermal conductivity of nonlinear composite media with contact resistance. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(4):943–949, 1997.

- [73] O. A. Oleinik. On convergence of solutions of elliptic and parabolic equations when coefficients weakly converge. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 30(4):257–258, 1975.
- [74] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [75] G. P. Panasenko. *Multi-scale Modelling for Structures and Composites*. Springer, Dordrecht, 2005.
- [76] G. P. Panasenko. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. *Physics of Atomic Nuclei*, 71:681–694, 2008.
- [77] W. J. Parnell and Q. Grimal. The influence of mesoscale porosity on cortical bone anisotropy. *Journal of the Royal Society Interface*, 6:97–109, 2009.
- [78] G. A. Pavliotis and A. M. Stuart. *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Springer, New York, 2008.
- [79] L. D. Pérez-Fernández and A. T. Beck. Failure detection in umbilicals via electroactive elements - a mathematical homogenization approach. *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, 8(1):34–39, 2014.
- [80] L. D. Pérez-Fernández, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, and F. J. Sabina. Estimation of very narrow bounds to the behavior of nonlinear incompressible elastic composites. *Archives of Applied Mechanics*, 77(4):229–239, 2007.
- [81] L. D. Pérez-Fernández, A. M. León-Mecías, and J. Bravo-Castillero. About the improvement of variational bounds for nonlinear composite dielectrics. *Materials Letters*, 59(12):1552–1557, 2005.
- [82] M. Ptashnyk. Two-scale convergence for locally periodic microstructures and homogenization of plywood structures. *Multiscale Modeling and Simulation*, 11(1):92–117, 2013.
- [83] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*. SIAM, Houston, 2008.

- [84] R. Rodríguez-Ramos, F. J. Sabina, J. Bravo-Castillero, and R. Guinovart-Díaz. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - i. elastic and square symmetry. *Mechanics of Materials*, 33:223–235, 2001.
- [85] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1976.
- [86] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 3 edition, 1987.
- [87] F. J. Sabina, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Ramos, and O. C. Valdiviezo-Mijangos. Overall behavior of two-dimensional periodic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 39:483–497, 2002.
- [88] F. J. Sabina, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, and R. Guinovart-Díaz. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. ii: piezoelectric and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:1463–1479, 2001.
- [89] M. H. Sadd. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier Academic Press, Oxford, 2005.
- [90] M. Sahimi. *Heterogeneous Materials I: Linear Transport and Optical Properties*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [91] E. Sanchez-Palencia. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Série A - Sciences Mathématiques*, 271:1129–1132, 1970.
- [92] E. Sanchez-Palencia. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [93] E. Senger. *Modelagem Matemática e Métodos Numéricos para Simulação da Condução do Calor no Hélio Líquido*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2008.

- [94] S. Shkoller and G. Hegemier. Homogenization of plain weave composites using two-scale convergence. *Int. J. Solids Structures*, 32(6-7):783–794, 1995.
- [95] A. F. S. Siqueira. Soluções fracas para um sistema não-linear envolvendo o operador p-laplaciano. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.
- [96] D. Stroud. Giant enhancement of cubic nonlinearity in a polycrystalline quasi-one-dimensional conductor. *Physicals Review B*, 54(5):3295–3299, 1996.
- [97] D. R. S. Talbot. Bounds which incorporate morphological information for a nonlinear composite dielectric. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455:3617–3628, 1999.
- [98] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [99] S. Torquato. Optimal design of heterogeneous materials. *Annual Review of Materials Research*, 40:101–129, 2010.
- [100] P. Trapper and K.Y. Volokh. Elasticity with energy limiters for modeling dynamic failure propagation. *International Journal of Solids and Structures*, 47:3389–3396, 2010.
- [101] K. Y. Volokh. Nonlinear elasticity for modeling fracture of isotropic brittle solids. *Journal of Applied Mechanics*, 71:141–143, 2004.
- [102] K. Y. Volokh. Hyperelasticity with softening for modeling materials failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(2007):2237–2264, 2007.
- [103] K. Y. Volokh. Softening hyperelasticity for modeling material failure: Analysis of cavitation in hydrostatic tension. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5043–5055, 2007.
- [104] K. Y. Volokh. Prediction of arterial failure based on a microstructural bi-layer fiber–matrix model with softening. *Journal of Biomechanics*, 41:447–453, 2008.

- [105] K. Y. Volokh. Review of the energy limiters approach to modeling failure of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 86(3):470–487, 2013.
- [106] K. Y. Volokh. Non-linear thermoelasticity with energy limiters. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76:169–175, 2015.
- [107] K. Y. Volokh. Corrigendum to “Nonlinear thermoelasticity with energy limiters” [International Journal of Non-Linear Mechanics. 76 (2015) 169–175]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 86:7, 2016.
- [108] K. Y. Volokh and D. A. Vorp. A model of growth and rupture of abdominal aortic aneurysm. *Journal of Biomechanics*, 41:1015–1021, 2008.
- [109] P. Wall. Some homogenization and corrector results for nonlinear monotone operators. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 5(3):331–348, 1998.
- [110] P. Wall. Homogenization of Reynolds equation by two-scale convergence. *Chinese Annals of Mathematics*, 28B(3):363–374, 2007.
- [111] G. Wang and J. P. Huang. Nonlinear magnetic susceptibility of ferroids. *Chemical Physics Letters*, 421(4-6):544–548, 2006.
- [112] E. B. Wei and Y. M. Poon. Effective thermal conductivity of graded nonlinear composites with heat contact resistance. *Physics Letters A*, 359(6):685–692, 2006.
- [113] E. Weinan. Homogenization of linear and nonlinear transport equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 45:301–326, 1992.
- [114] N. Wellander. *Homogenization of some linear and nonlinear partial differential equations*. PhD thesis, Lulea University of Technology, Lulea, 1998.
- [115] J. L. Woukeng. Periodic homogenization of nonlinear non-monotone parabolic operators with three time scales. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 189:357–379, 2010.
- [116] S. Wright. On the steady-state flow of an incompressible fluid through a randomly perforated porous medium. *Journal of Differential Equations*, 146:261–286, 1998.

- [117] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 6 edition, 1980.
- [118] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A: Nonlinear Monotone Operators*. Springer, New York, 1990.