

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

UM ESTUDO SOBRE A OTIMALIDADE ESTRUTURAL DE CALOTAS  
SUPERELIPSOIDAIAS SUBMETIDAS À PRESSÃO EXTERNA

por

Victor Felipe de Oliveira Korb

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2020.

CIP - Catalogação na Publicação

Korb, Victor Felipe de Oliveira  
Um Estudo Sobre a Otimalidade Estrutural de Calotas  
Superelipsoidais Submetidas à Pressão Externa / Victor  
Felipe de Oliveira Korb. -- 2020.  
29 f.  
Orientador: Rogério José Marczak.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2020.

1. superelipsoides. 2. vasos de pressão. 3. cascas  
finas. 4. equipamentos submersos. I. Marczak, Rogério  
José, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os  
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Victor Felipe de Oliveira Korb

UM ESTUDO SOBRE A OTIMALIDADE ESTRUTURAL DE CALOTAS  
SUPERELIPSOIDAIAS SUBMETIDAS À PRESSÃO EXTERNA

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Felipe Tempel Stumpf

Prof. Ignácio Iturrioz

Prof. Rogério José Marczak

Porto Alegre, Novembro de 2020.

## DEDICATÓRIA

Para Ivone e Bruno.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em especial meus pais, Sidbert e Nilza, por todo o apoio e exemplo. Agradeço, também, à Elisa, minha namorada, por todo incentivo e companheirismo ao longo dessa jornada.

Korb, Victor Felipe de Oliveira. **Um Estudo Sobre a Otimalidade Estrutural de Calotas Superelipsoidais Submetidas à Pressão Externa**. 2020. 20. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

## RESUMO

O trabalho a seguir compreende um estudo de superelipsoides atuando como geometrias de vasos de pressão. Este estudo tem como objetivo descobrir quais os valores ótimos para os parâmetros que formam a equação governante dessa geometria quando utilizada para essa aplicação, seja do ponto de vista de rigidez como do de resistência, e como seu desempenho se compara com o de geometrias utilizadas atualmente. Para isso, são analisados três casos onde diversas superfícies geradas passam por uma simulação com uma condição similar à sua aplicação real. Os resultados obtidos permitem realizar uma comparação direta entre as superelipsoides geradas e as geometrias utilizadas como referência, nesse caso uma casca esférica e uma placa retangular. Ao fim do trabalho, conclui-se que para todos os casos estudados que existem geometrias alternativas com desempenho melhor do que aquelas utilizadas atualmente.

**PALAVRAS-CHAVE:** superelipsoide, vasos de pressão, cascas finas, escotilha.

Korb, Victor Felipe de Oliveira. **A Study on the Structural Optimality of Superellipsoid Caps Under External Pressure.** 2020. 20. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

## ABSTRACT

The following work consists of a study of superellipsoids acting as pressure vessels geometries. This study's goal is to find out what are the optimal values for this geometry's governing equation parameters, when used for this application, considering stiffness or mechanical resistance as a point of view, and how its performance is compared to the currently used geometries. For this, three cases will be analyzed where several generated surfaces are simulated with conditions similar to those obtained in reality. The obtained results allow a direct comparison between the generated superellipsoids and the reference geometries, in this case a spheric shell and a rectangular plate. The conclusion is that for all the cases studied, alternative geometries with better performance than those currently used exist.

**KEYWORDS:** superellipsoid, pressure vessels, thin shells, hatch.

## NOMENCLATURA

### Símbolos

$A$	Parâmetro de entrada	[mm]
$B$	Parâmetro de entrada	[mm]
$C$	Parâmetro de entrada	[mm]

### Símbolos gregos

$\xi_1$	Parâmetro de entrada	
$\xi_2$	Parâmetro de entrada	
$\phi_1$	Parâmetro de entrada	[rad]
$\phi_2$	Parâmetro de entrada	[rad]
$u_z$	Deslocamento no eixo $z$	[mm]
$\sigma_m$	Tensão de Von Mises	[MPa]

### Abreviaturas e acrônimos

ASME	American Society of Mechanical Engineers
------	---

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO .....	2
3. SUPERELIPSOIDE .....	3
4. GEOMETRIAS DO PROBLEMA .....	4
5. RESULTADOS .....	6
5.1 CASO 1 .....	7
5.2 CASO 2 .....	8
5.3 CASO 3 .....	10
5.4. DEMAIS CASOS .....	12
6. CONCLUSÃO .....	13
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
APÊNDICE A.....	15

## 1. INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As superfícies delgadas, também chamadas de cascas, são amplamente utilizadas na engenharia como elementos estruturais, muitas vezes como vasos de pressão. Uma das aplicações exploradas nesse meio são as janelas, escotilhas e calotas de material não ferroso para equipamentos de inspeção, como por exemplo equipamentos de ultrassom para a inspeção de soldas. Atualmente algumas das geometrias mais utilizadas nesse meio são a geometria esférica e a geometria plana retangular. Esse estudo busca explorar novas alternativas para esse campo de aplicação, uma vez que se entende que a constante busca pelo conhecimento é essencial para a engenharia, que deve sempre almejar a inovação. Assim, o presente trabalho compreende um estudo de diversas superfícies superelipsoides atuando como vasos de pressão submersos no oceano e a comparação de suas reações em relação às geometrias utilizadas para essa aplicação na maioria dos casos.

Como estudo já realizado nesse campo de aplicação pode se citar Baličević et al (2008). A publicação compreende o detalhamento de um método para análise de tensão em vasos de pressão cilíndricos e com tampos elipsoidais, baseado na teoria de superfícies delgadas axissimétricas. O trabalho foi desenvolvido a partir das soluções aproximadas do sistema de equações diferenciais, resultando na obtenção de expressões matemáticas utilizadas para determinar esforços internos, momentos e deslocamentos nos vasos de pressão. Por fim, o trabalho conclui que o método descrito é válido, comparando os resultados obtidos através dele com os obtidos por uma análise computacional.

Outro exemplo de trabalho com escopo similar a este é Zheng et al (2020). O trabalho busca desenvolver uma fórmula para calcular a deformação plástica devido à pressão em tampos elipsoidais. O estudo propõe uma fórmula para prever esta deformação e compara os resultados analíticos com resultados obtidos através de ensaios mecânicos em escala real, compreendendo diversas geometrias, materiais e formas de fabricação. Como conclusão, o trabalho entende que a fórmula proposta fornece boas previsões de deformação plástica em tampos elipsoidais quando submetidos a pressões internas.

Por fim, tem-se como referência Daghighi et al (2020). Nesse estudo, é desenvolvida uma família de superelipsoides de revolução, de forma a ter estados sem deformações quando submetida a pressão interna. Para o seu desenvolvimento, foram elaboradas novas equações governantes representando os estados livres de deformações, sendo posteriormente resolvidas analiticamente. Também é realizado um estudo referente à orientação da fibra do material, investigando qual a melhor opção a ser utilizada nesse cenário. Concluiu-se que dependendo das propriedades do material e dos limites impostos pela situação estudada, existe um valor mínimo para razão de aspecto da superfície abaixo da qual o estado sem deformações não pode ser alcançado.

Apesar dos trabalhos citados abordarem assuntos semelhantes ao desse trabalho, todos os trabalhos acima utilizam o método analítico para resolução dos problemas, utilizando o método computacional apenas para conferência. Para esse trabalho, será utilizado o método computacional, de forma a garantir uma maior velocidade na resolução dos casos, possibilitando o estudo de um maior número de superfícies, tendo por consequência mais alternativas como solução. Outra diferença é que os dois primeiros trabalhos citados, (BALIČEVIĆ; KOZAK; MRČELA, 2008) e (ZHENG; ZHANG; LI; YU; GU, 2020), não buscam os parâmetros ótimos para as superfícies superelipsoides, apenas métodos de resolução para esforços internos. A última publicação citada (DAGHIGHI; ZUCCO; ROUHI; WEAVER, 2020), por sua vez busca um estado livre de deformações, o que não é desejado no presente trabalho.

Atualmente, o projeto de vasos de pressão é conduzido pela norma ASME BPVC.VIII.1-2019, que descreve diversas condições para a construção dos vasos de pressão, detalhando materiais, projeto, aberturas e reforços, fabricação, inspeção, entre outros aspectos do projeto.

Dado que esse trabalho tem como objeto de estudo superfícies superelipsoides, as quais podem variar de uma geometria retangular até uma geometria esférica, procura-se identificar se existem geometrias ótimas entre esses dois extremos para aplicação em tampos e outros equipamentos submersos, uma vez que a geometria esférica e a plana retangular podem não representar as geometrias ideais para essas aplicações.

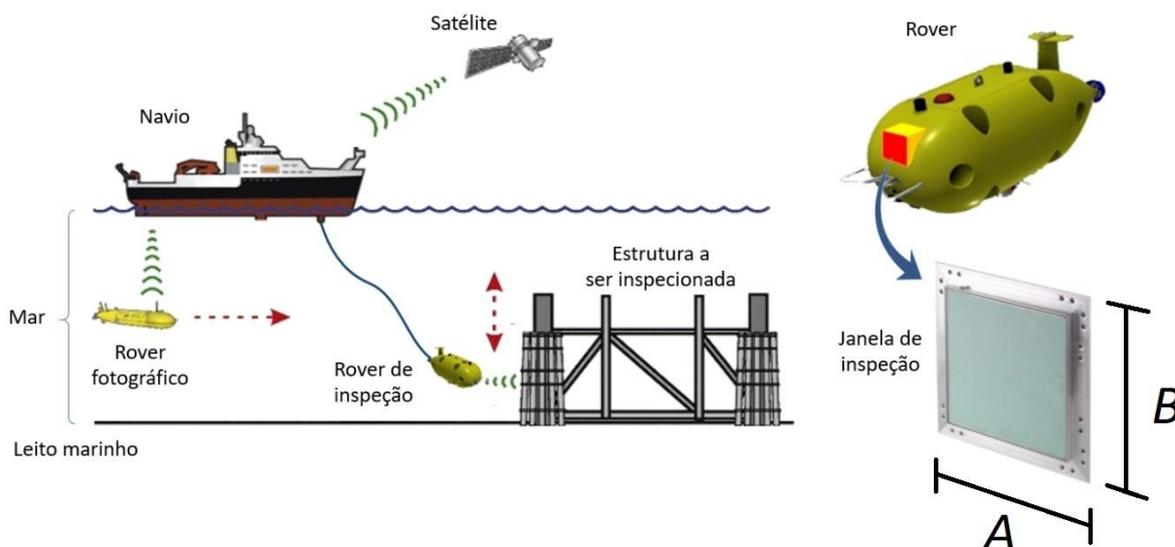
Nesse trabalho serão geradas diversas geometrias superelipsoides, que posteriormente serão submetidas a uma simulação através do método dos elementos finitos, avaliando resultados como tensão máxima e deslocamento máximo. Por fim, as superfícies terão seus resultados comparados a duas referências, uma casca esférica e uma placa retangular.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO

O estudo de vasos de pressão realizado é governado pela teoria de cascas e placas finas. Como proposto por Reddy (2006), considerando um regime linear elástico, todas as superfícies estudadas têm a sua espessura muito pequena quando comparada ao seu raio de curvatura. Outra hipótese adotada é a da ocorrência apenas de pequenos deslocamentos e pequenas deformações nas superfícies. Também deve ser citado que efeitos das tensões cisalhantes transversais não serão considerados. Dessa forma, todas as regiões da superfície são válidas para análise e interpretação dos dados.

Sabe-se que na literatura existem soluções analíticas para tampos semiesféricos e planos através de equações desenvolvidas para vasos de pressão. Entretanto, deseja-se obter resultados para superfícies alternativas a essas já utilizadas, e para isso será utilizado um *software* de elementos finitos. Com o intuito de ilustrar melhor o problema, a figura 1 representa exemplos de utilização para um *rover* submarino.

Figura 1 – Aplicação de trabalho de um *rover* fotográfico.



Imagina-se que para o *rover* apresentado na figura 1, é necessária a instalação de uma janela metálica de inspeção, localizada na área destacada em vermelho. Como condições limitantes, a

geometria dessa janela deve possuir uma largura  $A$ , uma altura  $B$  e uma projeção para fora da superfície externa do *rover*  $C$ , normal ao plano  $A \times B$ . Com base nessas informações, é possível gerar diversas superelipsóides, com variados raios de curvatura, permitindo a realização de uma análise a fim de definir qual possui o melhor desempenho, considerando os critérios escolhidos.

Deve-se comentar que para esse tipo de aplicação, não são recomendados materiais ferrosos, logo para esse trabalho será considerada a utilização do alumínio 6061. Conforme Popov (1978), essa liga, se extrudada, possui um limite de escoamento de 24,6 kgf/mm<sup>2</sup>, aproximadamente 240 MPa, e um módulo de elasticidade igual a 7031 kgf/mm<sup>2</sup>, aproximadamente 68950 MPa.

### 3. SUPERELIPSOIDE

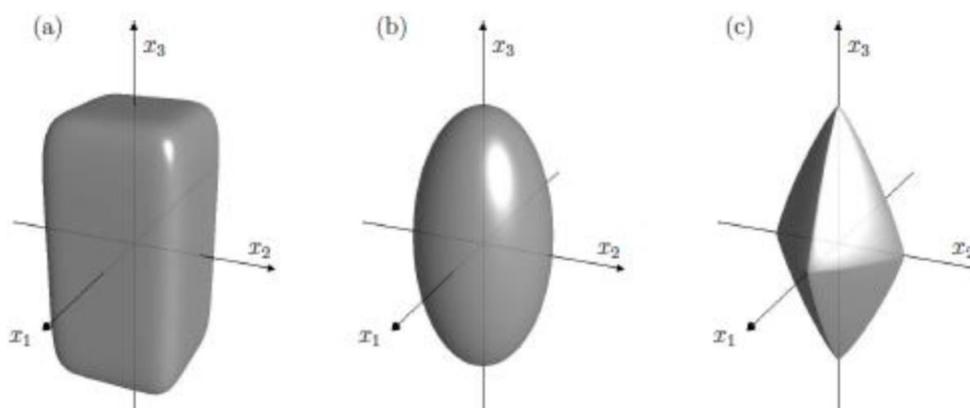
Superelipsóides são geometrias que possuem elipses em seus planos de corte transversais. A equação governante dessa geometria é constituída por cinco parâmetros, sendo três utilizados para definir seus limites dimensionais e dois definindo a sua curvatura.

Uma superelipsóide é definida pelo conjunto de pontos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  que resultam  $F = 1$  na equação 1:

$$F(x) = \left( \left| \frac{x_1}{A} \right|^{\frac{2}{\xi_1}} + \left| \frac{x_2}{B} \right|^{\frac{2}{\xi_1}} \right)^{\xi_1/\xi_2} + \left| \frac{x_3}{C} \right|^{\frac{2}{\xi_2}} \quad (1)$$

De acordo com Sampaio (2017), em (1)  $A$ ,  $B$  e  $C$ , definem os valores limites da geometria nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  respectivamente. Os parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  definem a curvatura da geometria no plano  $x_1, x_2$  e na direção  $x_3$  respectivamente. A figura 2 ilustra que  $\xi_i < 1$  gera geometrias mais quadradas,  $\xi_i \sim 1$  define superfícies que convergem para uma casca esférica e  $\xi_i \sim 2$  define formas de bisel. Para este trabalho,  $\xi_i \in (0,5; 1,5)$ .

Figura 2 – Superelipsóides com  $A = B = C/2$  sendo: (a)  $\xi_i = 0,3$ ; (b)  $\xi_i = 1$ ; (c)  $\xi_i = 1,7$ .  
(WELLMANN; LILLIE; WRIGGERS, 2008)



Para a obtenção de pontos presentes na superfície da geometria, pode ser utilizado o conjunto de equações (2), descrito em coordenadas curvilíneas.

$$x(\phi_1, \phi_2) = \begin{bmatrix} \text{sgn}(\cos \phi_1)A|\cos \phi_1|^{\xi_1}|\cos \phi_2|^{\xi_2} \\ \text{sgn}(\sin \phi_1)B|\sin \phi_1|^{\xi_1}|\cos \phi_2|^{\xi_2} \\ \text{sgn}(\sin \phi_2)C|\sin \phi_2|^{\xi_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Tal que  $-\pi \leq \phi_1 \leq \pi$  e  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ . Para esse trabalho,  $\phi_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

#### 4. GEOMETRIAS DO PROBLEMA

Como o objetivo deste estudo está diretamente ligado à aplicação de tampos submersos, foi gerado apenas um octante para cada superfície estudada. O fato de que a força distribuída e a geometria das superfícies são simétricas em relação aos planos cartesianos também permite essa abordagem. De forma a obter diferentes geometrias para as superfícies superelipsoides, foram gerados diversos arquivos com os pontos constituintes de cada superfície com auxílio de um *script* no *software* Matlab, sempre variando os valores assumidos pelos parâmetros da equação governante. Esses arquivos foram exportados para o *software* Solid Works, no qual as superfícies foram construídas e posteriormente encaminhadas para o Ansys Mechanical APDL para a simulação de elementos finitos.

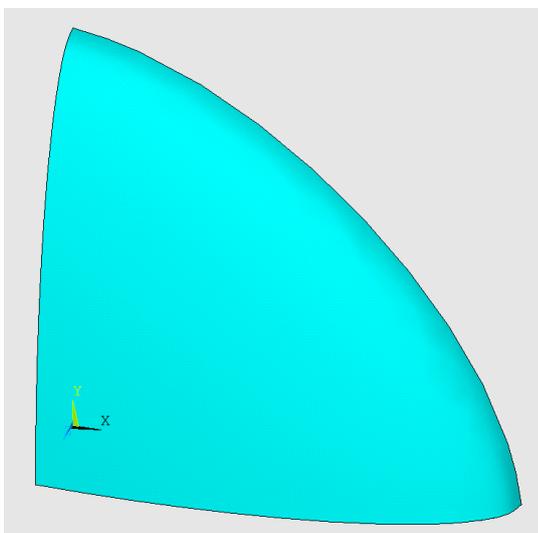
Para a confecção das superfícies, foram utilizadas todas as combinações existentes entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , que assumiram valores entre 0,5 e 1,5, com incrementos de 0,25, conforme mostra a tabela 1.

Tabela 1 – Todos os valores assumidos por  $\xi_1$  e  $\xi_2$  para a confecção das superfícies.

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
0,50	0,50	1,25	0,50
0,50	0,75	1,25	0,75
0,50	1,00	1,25	1,00
0,50	1,25	1,25	1,25
0,50	1,50	1,25	1,50
0,75	0,50	1,50	0,50
0,75	0,75	1,50	0,75
0,75	1,00	1,50	1,00
0,75	1,25	1,50	1,25
0,75	1,50	1,50	1,50
1,00	0,50		
1,00	0,75		
1,00	1,00		
1,00	1,25		
1,00	1,50		

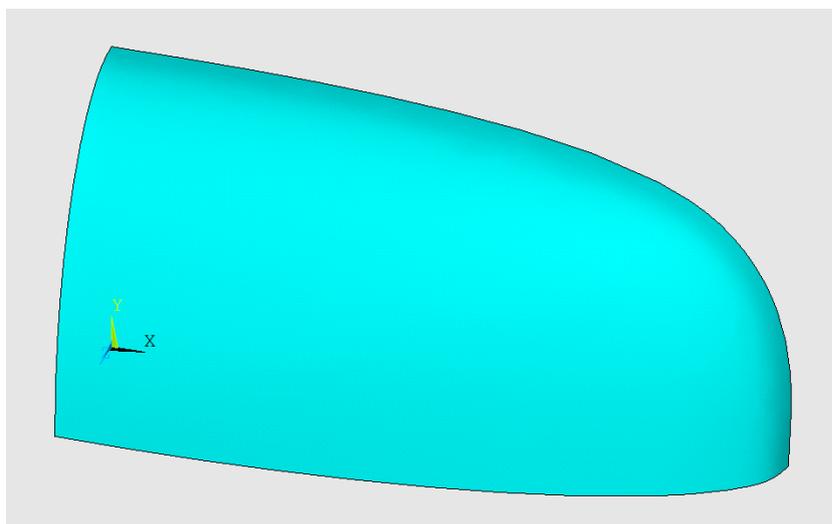
Em relação aos parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$ , seus valores foram definidos pelos limites geométricos impostos por cada caso estudado. No primeiro caso, tem-se a utilização de uma área limite quadrada no plano  $xy$ , conferindo a  $A$  e  $B$  um valor igual a 400 mm. Nesse caso,  $C$  assume um valor igual a 100 mm. Abaixo, a figura 3 ilustra um dos modelos gerados para o primeiro caso analisado.

Figura 3 – Exemplo de modelo gerado para análise do caso 1. Valor limite no eixo  $x$ :  $A = 400$  mm; Valor limite no eixo  $y$ :  $B = 400$  mm; Valor limite no eixo  $z$ :  $C = 100$  mm.



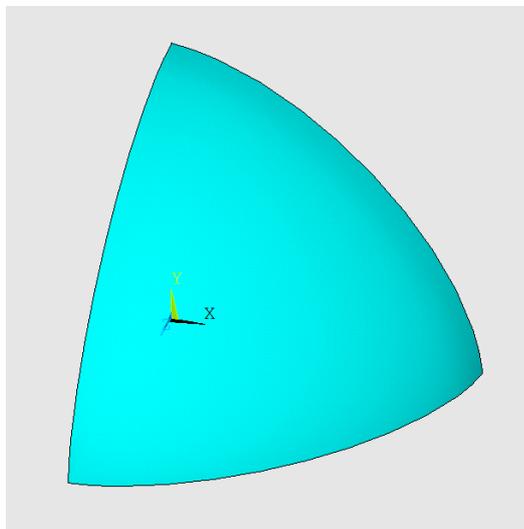
No segundo caso estudado, foi delimitada uma área limite retangular no plano  $xy$ , onde  $A$  assumiu um valor de 400 mm,  $B$  um valor de 200 mm e  $C$  um valor de 100 mm representando o valor limite para o eixo  $z$ . A figura 4 exibe um dos modelos gerados para análise do caso 2, a seguir.

Figura 4 – Exemplo de modelo gerado para análise do caso 2. Valor limite no eixo  $x$ :  $A = 400$  mm; Valor limite no eixo  $y$ :  $B = 200$  mm; Valor limite no eixo  $z$ :  $C = 100$  mm.



Em relação ao terceiro e último caso, foi delimitado um volume limite cúbico no espaço  $xyz$ , possibilitando a inserção de um octante de esfera neste. Para isso, os valores dos parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  foram todos iguais a 400 mm, conforme exibido por uma das superfícies geradas exibida na figura 5 a seguir.

Figura 5 – Exemplo de modelo gerado para análise do caso 3. Valor limite no eixo  $x$ :  $A = 400$  mm; Valor limite no eixo  $y$ :  $B = 400$  mm; Valor limite no eixo  $z$ :  $C = 400$  mm.



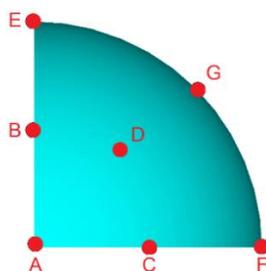
Todas as simulações foram realizadas através do *software* Ansys Mechanical APDL. Para a construção da malha foi utilizado o elemento SHELL181, indicado para a análise de modelos estruturais compostos por cascas. Destaca-se que a malha gerada pelo programa foi conferida a fim de que essa fosse suficiente refinada a ponto de garantir resultados sem um desvio significativo, conforme descrito na seção B.1 do apêndice B. A aplicação prática destas superfícies implica as seguintes condições de contorno: todos os pontos presentes no plano  $xy$  com deslocamento prescrito igual a 0 mm, pontos localizados no plano  $xz$  com simetria em relação a esse plano e pontos localizados no plano  $yz$  com simetria em relação a esse plano. Como carregamento, foi aplicada uma carga distribuída uniformemente pela área da superfície com valor de 5 MPa, reproduzindo a pressão exercida em uma profundidade de 500 m.

## 5. RESULTADOS

A partir das simulações realizadas, foram construídos quatro gráficos para cada caso estudado. Para ilustrar os resultados deste trabalho, foi escolhido o gráfico de bolha, sendo a área de cada bolha diretamente proporcional à grandeza representada no gráfico.

O primeiro gráfico de cada caso ilustra o máximo deslocamento  $u_z$ , em milímetros, de cada geometria, e o segundo gráfico informa a tensão máxima  $\sigma_m$ , em megaPascal, de cada geometria. Ambos os gráficos possuem rótulos à direita de cada ponto indicando a região aproximada de ocorrência dessas grandezas. Nesses gráficos, busca-se os menores valores de  $u_z$  e  $\sigma_m$ , que nessa análise são as grandezas determinantes para definir as superfícies ótimas. A figura 6 informa a localização dessas regiões, representadas nos gráficos por letras.

Figura 6 – Posições usadas para referenciar a ocorrência de máximos.

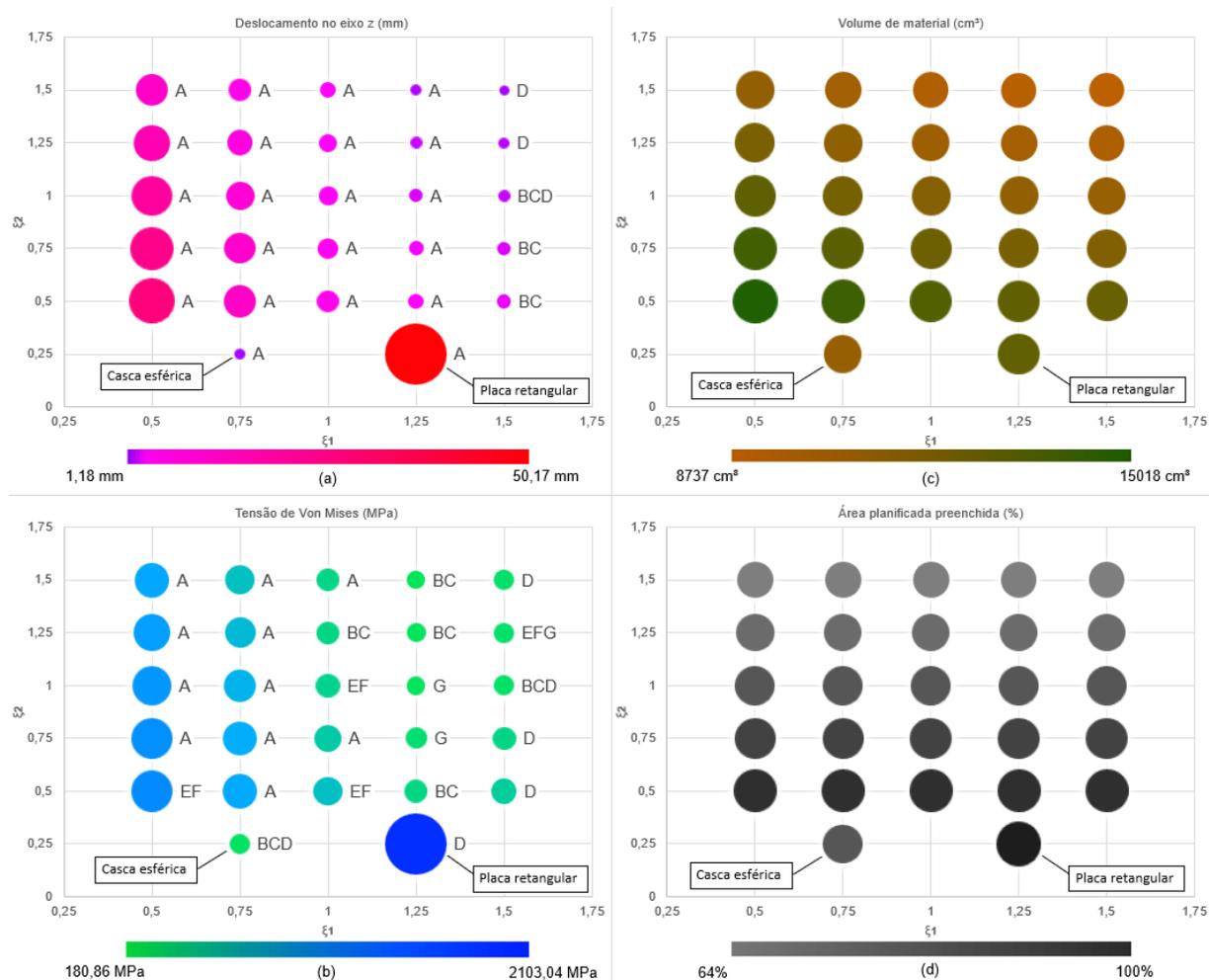


O terceiro gráfico de cada caso representa o volume total de material, em centímetros cúbicos. O quarto gráfico informa a porcentagem de área ocupada pela projeção de cada superfície em relação aos limites designados por cada caso.

### 5.1 CASO 1

O primeiro conjunto de casos estudados tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 20 mm. Para esse caso, a figura 7 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

Figura 7 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



O menor deslocamento  $u_z$  obtido entre as geometrias estudadas foi de 1,18 mm. Esse deslocamento ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,5 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Para referência, o máximo valor de deslocamento  $u_z$  obtido para a casca esférica foi de 1,35 mm e para a placa retangular foi de 50,17 mm. Percebe-se que o valor do deslocamento máximo  $u_z$  diminui conforme os parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam.

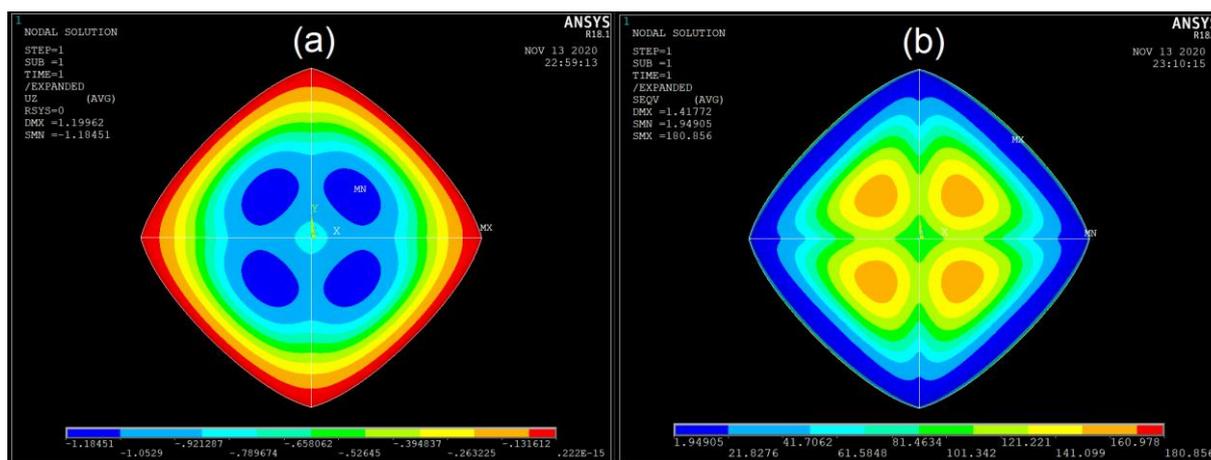
A menor tensão  $\sigma_m$  encontrada é igual a 180,86 MPa e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,25 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Para referência, o máximo valor de tensão  $\sigma_m$  obtido para a casca esférica foi de 205,47 MP, enquanto na placa retangular a tensão ultrapassou o valor limite da tensão de escoamento, caracterizando plastificação da estrutura. De forma semelhante ao que ocorre nos valores de  $u_z$ , os valores de  $\sigma_m$  também diminuem conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam, entretanto os maiores valores de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  não apresentam a menor tensão entre as geometrias testadas.

O menor volume total de material encontrado foi 8737,59 cm<sup>3</sup> e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,5 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Como referência, a casca esférica tem 10681,22 cm<sup>3</sup> e a placa retangular tem 12800,00 cm<sup>3</sup>. Através do gráfico, nota-se que o volume total de material diminui conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam.

A maior porcentagem de área planificada preenchida obtida foi 93%, desconsiderando o resultado de 100% obtido com a placa retangular. O valor obtido para a casca esférica foi de 79%. Como nessa análise apenas o plano  $xy$  foi analisado, apenas um dos parâmetros influenciava no resultado, nesse caso  $\xi_2$ . Analisando o gráfico fica visível que a área ocupada diminui conforme  $\xi_2$  aumenta, logo, as geometrias com  $\xi_2$  igual a 0,5 possuem um melhor aproveitamento da área delimitada pelos limites escolhidos para esse caso.

Abaixo a figura 8 ilustra os resultados referentes ao menor deslocamento  $u_z$  e menor tensão  $\sigma_m$  entre as geometrias testadas, com simetria para os quatro quadrantes.

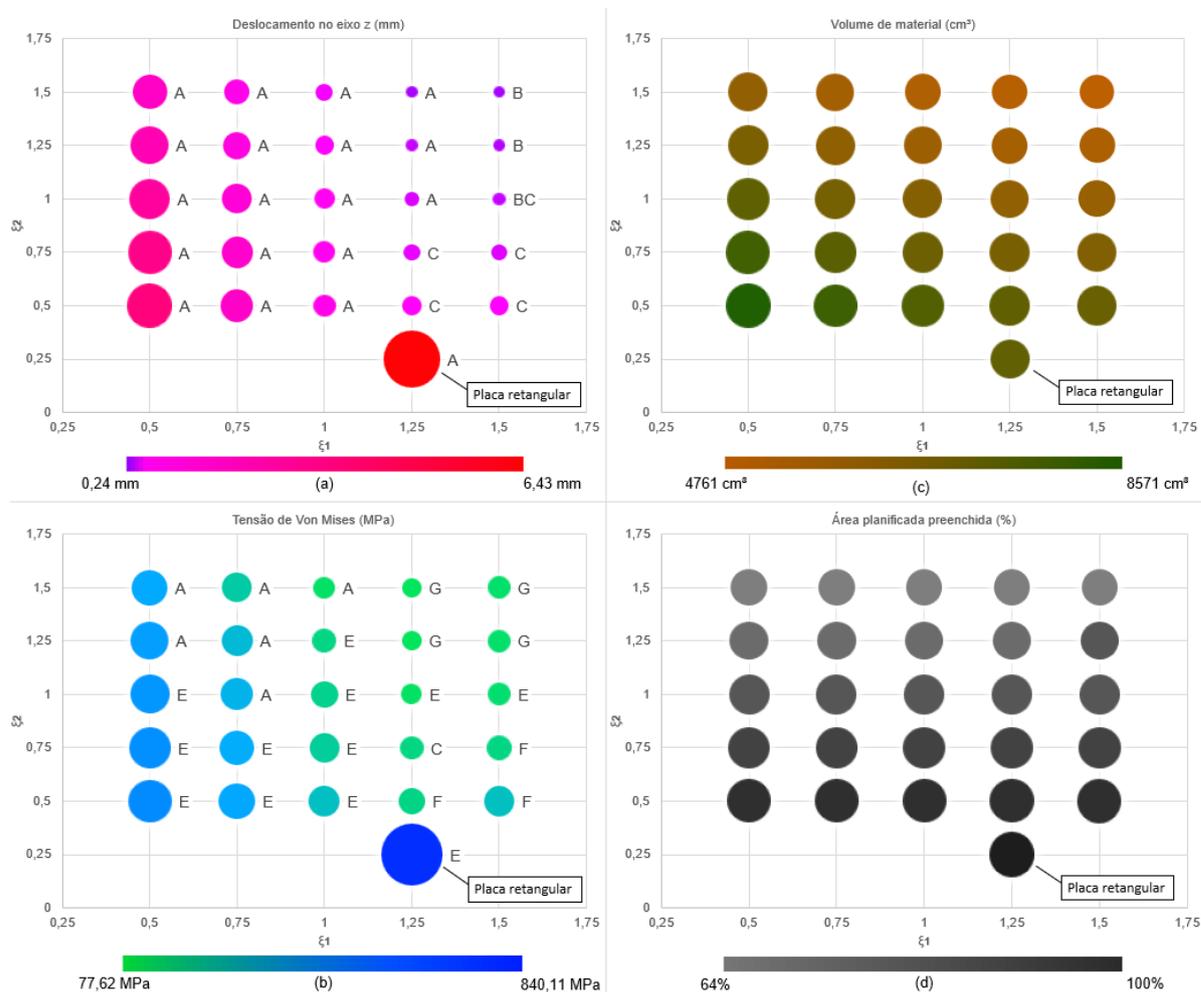
Figura 8 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$  para geometria com  $\xi_1 = 1,5$  e  $\xi_2 = 1,5$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$  para geometria com  $\xi_1 = 1,25$  e  $\xi_2 = 1,5$ .



## 5.2 CASO 2

O segundo caso estudado tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 20 mm. Para esse caso, a figura 9 informa os valores obtidos das grandezas em estudo.

Figura 9 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



O menor deslocamento  $u_z$  obtido entre as geometrias estudadas foi de 0,24 mm. Esse deslocamento ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,5 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Para referência, o máximo valor de deslocamento  $u_z$  obtido para a placa retangular foi de 6,43 mm. Percebe-se que o valor do deslocamento máximo  $u_z$  diminui conforme os parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam.

A menor tensão  $\sigma_m$  encontrada é igual a 77,62 MPa e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,25 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Para referência, o máximo valor de tensão  $\sigma_m$  obtido para a placa retangular ultrapassou o valor limite de escoamento, impossibilitando a utilização dos valores observados. De forma semelhante ao que ocorre nos valores de  $u_z$ , os valores de  $\sigma_m$  também diminuem conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam, entretanto os maiores valores de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  não apresentam a menor tensão entre as geometrias testadas.

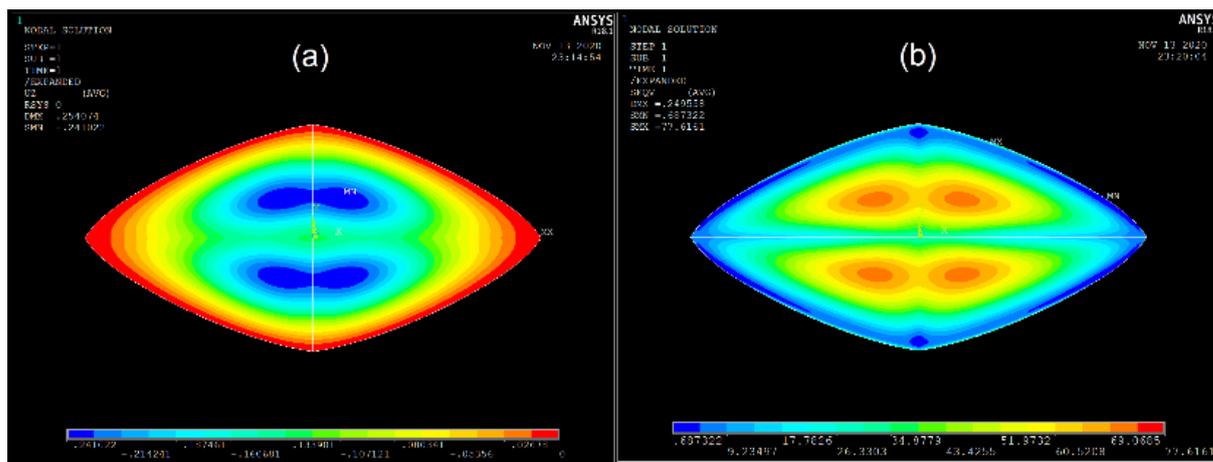
O menor volume total de material encontrado foi 4761,66 cm<sup>3</sup> e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,5 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Como referência, a placa retangular tem 6400,00 cm<sup>3</sup>. Através do gráfico, nota-se que o volume total de material diminui conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam.

A maior porcentagem de área planificada preenchida obtida foi 93%, desconsiderando o resultado de 100% obtido com a placa retangular. O valor obtido para a casca esférica foi de

79%. Como nessa análise apenas o plano  $xy$  foi analisado, apenas um dos parâmetros influenciava no resultado, nesse caso  $\xi_2$ . Analisando o gráfico, é visível que a área ocupada diminui conforme  $\xi_2$  aumenta, logo, as geometrias com  $\xi_2$  igual a 0,5 possuem um melhor aproveitamento da área delimitada pelos limites escolhidos para esse caso.

Abaixo a figura 10 ilustra os resultados referentes ao menor deslocamento  $u_z$  e menor tensão  $\sigma_m$  entre as geometrias testadas, com simetria para os quatro quadrantes.

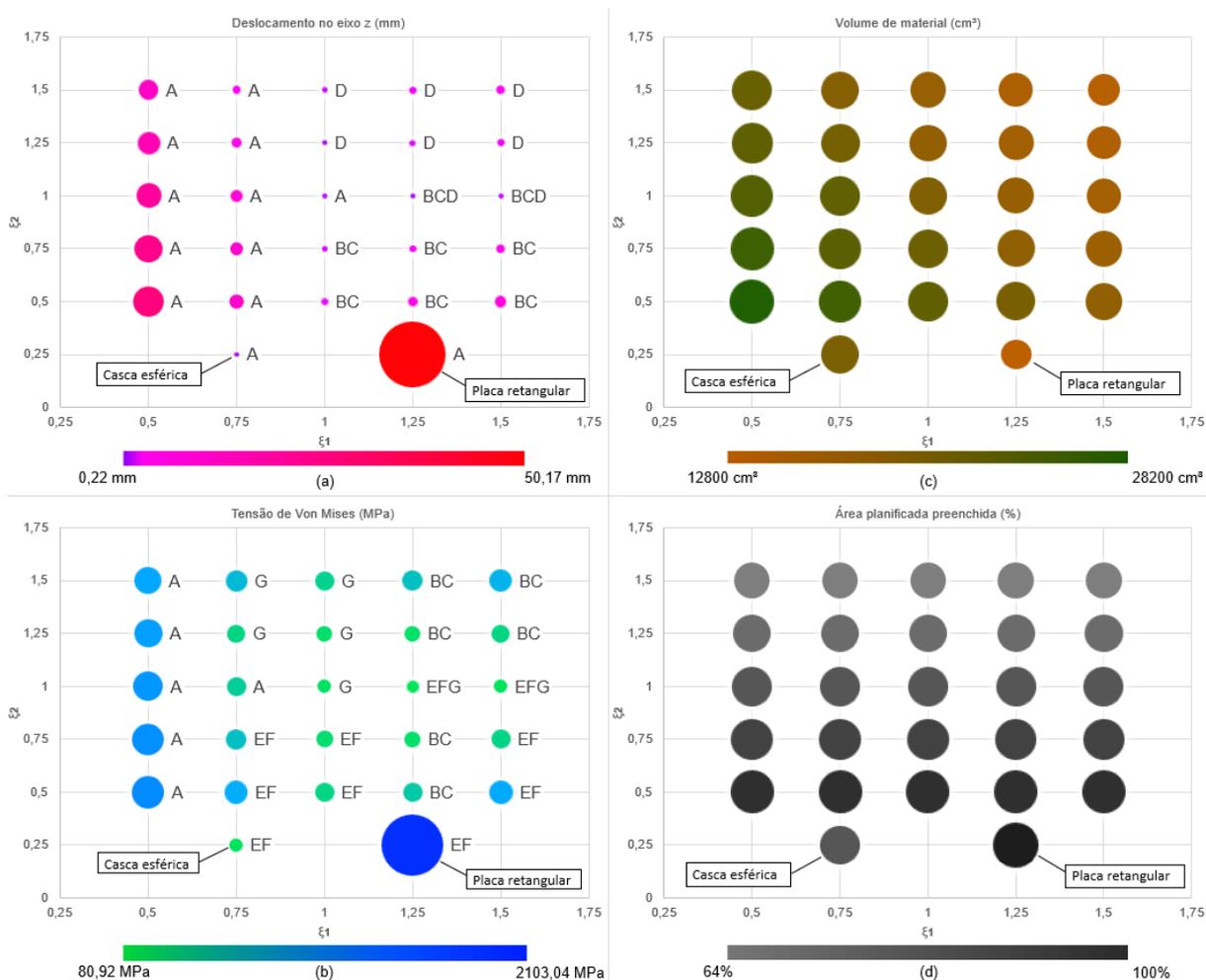
Figura 10 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$  para geometria com  $\xi_1 = 1,5$  e  $\xi_2 = 1,5$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$  para geometria com  $\xi_1 = 1,25$  e  $\xi_2 = 1,5$ .



### 5.3 CASO 3

O terceiro analisado tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente 400 mm, 400 mm e 400 mm, e espessura de 20 mm. A figura 11 contém os resultados obtidos para as grandezas analisadas referentes a esse caso.

Figura 11 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



O menor deslocamento  $u_z$  obtido entre as geometrias estudadas foi de 0,22 mm. Esse deslocamento ocorre em duas geometrias, em uma com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,0 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,25, e outra com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,25 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,0. Para referência, o máximo valor de deslocamento  $u_z$  obtido para a casca esférica foi de 0,23 mm e para a placa retangular foi de 50,17 mm. Percebe-se que o valor do deslocamento máximo  $u_z$  diminui conforme os parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  convergem para 1,0 e 1,25, próximo do centro do gráfico.

A menor tensão  $\sigma_m$  encontrada é igual a 80,92 MPa e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,25 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,0. Para referência, o máximo valor de tensão  $\sigma_m$  obtido para a casca esférica foi de 92,13 MPa enquanto na placa retangular os valores de tensão ultrapassaram o limite de escoamento, caracterizando a deformação plástica da estrutura mais uma vez. Percebe-se que os valores de  $\sigma_m$  diminuem conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  convergem para valores localizados no centro do gráfico, de forma semelhante ao que ocorre para  $u_z$ .

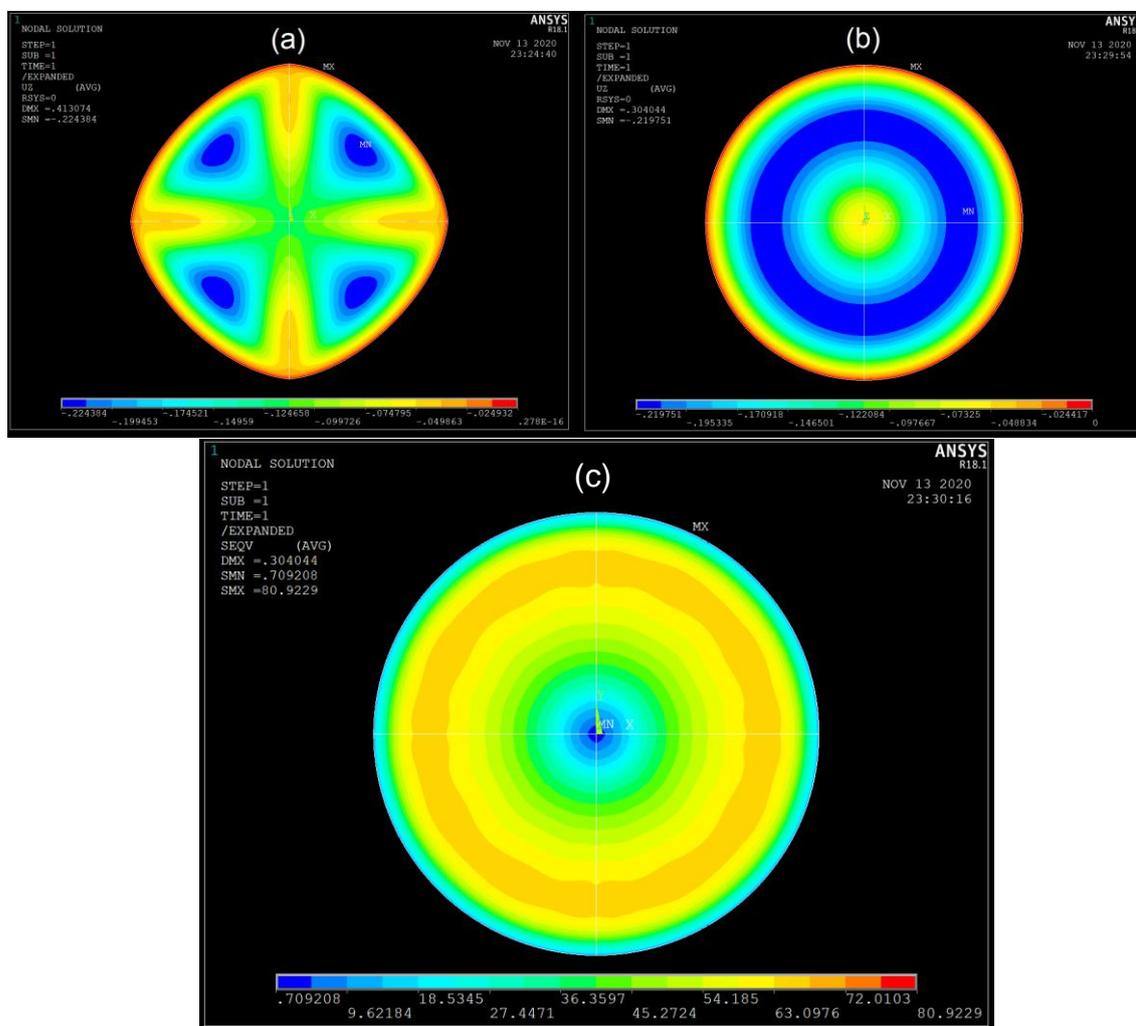
O menor volume total de material encontrado, desconsiderando o modelo de placa retangular, foi 14601,90 cm<sup>3</sup> e ocorre na geometria com parâmetro  $\xi_1$  igual a 1,5 e parâmetro  $\xi_2$  igual a 1,5. Como referência, a casca esférica tem 20106,19 cm<sup>3</sup> e a placa retangular tem

12800,00 cm<sup>3</sup>. Através do gráfico, nota-se que o volume total de material diminui conforme  $\xi_1$  e  $\xi_2$  aumentam.

A maior porcentagem de área planificada preenchida obtida foi 93%, desconsiderando o resultado de 100% obtido com a placa retangular. O valor obtido para a casca esférica foi de 79%. Como nessa análise apenas o plano  $xy$  foi analisado, apenas um dos parâmetros influenciava no resultado, nesse caso  $\xi_2$ . Analisando o gráfico fica visível que a área ocupada diminui conforme  $\xi_2$  aumenta, logo, as geometrias com  $\xi_2$  igual a 0,5 possuem um melhor aproveitamento da área delimitada pelos limites escolhidos para esse caso.

Abaixo a figura 12 ilustra os resultados referentes ao menor deslocamento  $u_z$  e menor tensão  $\sigma_m$  entre as geometrias testadas, com simetria para os quatro quadrantes.

Figura 12 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$  para geometria com  $\xi_1 = 1,0$  e  $\xi_2 = 1,25$ ; (b) Máximos deslocamentos  $u_z$  para geometria com  $\xi_1 = 1,25$  e  $\xi_2 = 1,0$ ; (c) Máximas tensões  $\sigma_m$  para geometria com  $\xi_1 = 1,25$  e  $\xi_2 = 1,0$ .



#### 5.4 DEMAIS CASOS

Também foram realizadas análises de todos os casos para espessuras de 40 milímetros e 80 milímetros, a fim de observar o comportamento das superfícies com a variação desse parâmetro. Assim como nos casos 1, 2 e 3, todas as grandezas apresentadas foram avaliadas e os resultados estão presentes no apêndice deste trabalho. Se comparados os resultados entre as superfícies

com os mesmos limites impostos, todas as espessuras apresentaram um comportamento similar para cada grandeza avaliada.

## 5.5 RESULTADOS FINAIS

Analisando o caso 1, que possui um limite quadrado no plano  $xy$ , conclui-se que a superfície superelipsoide com valores ótimos tem seus parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  convergindo para 1,25 e 1,5, respectivamente. Estes parâmetros apresentaram a menor tensão  $\sigma_m$  para qualquer espessura entre os modelos estudados e o segundo menor deslocamento  $u_z$  para qualquer espessura entre os modelos estudados.

Em relação ao caso 2, que possui um limite retangular no plano  $xy$ , nota-se que o parâmetro  $\xi_1$  se aproxima de 1,25 e parâmetro  $\xi_2$  se aproxima de 1,5 quando se procura a superfície superelipsoide com melhores resultados. Estes parâmetros apresentaram a melhor relação entre uma baixa tensão  $\sigma_m$  e um baixo valor de deslocamento  $u_z$ , ficando com resultados muito próximos aos menores valores obtidos para esse limite considerando todas as espessuras simuladas.

O caso 3, que utiliza os limites no espaço  $xyz$  prescritos por uma esfera, tem, para seus parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , valores ótimos convergindo para 1,25 e 1,0, respectivamente. Estes parâmetros apresentaram a melhor relação entre um baixo valor de tensão  $\sigma_m$  e um baixo valor de deslocamento  $u_z$ , apresentando resultados aceitáveis para todas as espessuras consideradas. Ainda sobre o caso 3, é importante destacar que a geometria com parâmetros  $\xi_1$  igual a 1,0 e  $\xi_2$  igual a 1,0 teve resultados muito próximos aos obtidos com a casca esférica. O modelo superelipsoides e a casca esférica tiveram uma diferença de 0,01 mm no deslocamento  $u_z$ , cerca de 2,5 MPa na tensão  $\sigma_m$ , cerca de 6 cm<sup>3</sup> entre os volumes totais de material e a mesma porcentagem de área projetada preenchida. Logo, entende-se que uma superfície superelipsoide com parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  convergindo em torno 1,0, tende a apresentar um comportamento idêntico a de uma casca esférica.

## 6. CONCLUSÃO

Anteriormente à realização deste trabalho, imaginava-se que o modelo esférico apresentaria os melhores resultados entre todas as geometrias estudadas; entretanto, ao observar os resultados apresentados na seção anterior, conclui-se que para todos os casos estudados foram encontradas geometrias alternativas que se comportam de maneira melhor do que um modelo esférico quando submetidas à pressão externa, considerando os valores de deslocamento  $u_z$  e os valores de tensão  $\sigma_m$  obtidos. É importante destacar que o fato de uma geometria possuir o menor valor de deslocamento  $u_z$  não necessariamente implica em um menor valor de tensão  $\sigma_m$ , e vice versa.

Para todas as situações propostas foram encontradas geometrias com valores de tensão  $\sigma_m$  inferior ao valor do limite de escoamento do alumínio 6061, e em todos esses casos os deslocamentos  $u_z$  mantiveram-se em valores dentro dos aceitáveis em relação às espessuras de suas respectivas geometrias.

Um aspecto relevante é o de que as superfícies consideradas ótimas na análise realizada não possuem um alto percentual de aproveitamento da área definida pelos limites de cada caso. Em uma situação onde o principal propósito é o de se obter um bom aproveitamento dessa área, deve-se realizar uma análise que leve em conta a utilização de superfícies com parâmetros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  mais baixos, entretanto deve se atentar ao fato de que estas configurações fazem com que a superfície gerada tenha uma menor rigidez de forma geral. Uma vez que a utilização de parâmetros com um valor menor torna a superfície mais retangular e com cantos mais vivos, a queda de rigidez já era esperada para parâmetros se aproximando de 0,5.

Conforme o esperado, o modelo retangular não apresentou resultados bons se comparado às demais geometrias estudadas, chegando em alguns casos a ultrapassar o valor do limite de escoamento do alumínio 6061, tornando inviável a sua utilização nas situações propostas.

Como continuidade para esse trabalho, recomenda-se a criação de uma metodologia de otimização de superfícies do tipo superelipsoide, elaborando uma rotina automática de geração e simulação de geometrias com parâmetros variados. Dessa forma, é possível obterem-se os valores ótimos específicos para cada situação proposta. Uma vez que o processo de geração das superfícies e a sua simulação consome muito tempo, a construção de uma rotina automática resultaria em um enorme ganho de tempo e proveria mais precisão aos resultados obtidos.

Além disso, para uma análise posterior a esse trabalho, indica-se a realização de um estudo de flambagem dos modelos estudados, através de elementos finitos. Também deve-se atentar à importância da norma ASME para o projeto desse tipo de estrutura, dedicando um espaço do trabalho para questões como a fabricação das geometrias.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALIČEVIĆ, P., KOZAK, D., & MRČELA, T. (2008). Strength of pressure vessels with ellipsoidal heads. *Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, **54**(10).

ZHENG, J., ZHANG, Z., LI, K., YI, Y., & GI, C. (2020). A simple formula for prediction of plastic collapse pressure of steel ellipsoidal heads under internal pressure. *Thin-Walled Structures*, **156**. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106994>

DAGHIGHI, S., ZUCCO, G., ROUHI, M., & WEAVER, P. M. (2020). Bend-free design of super ellipsoids of revolution composite pressure vessels. *Composite Structures*, **245**. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112283>

ASME. (2019). BPVC Section VIII-Rules for Construction of Pressure Vessels Division 1. **ASME BPVC.VIII.1-2019**.

REDDY, J. N. (2006). Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>

WELLMANN, C., LILLIE, C., & WRIGGERS, P. (2008). A contact detection algorithm for superellipsoids based on the common-normal concept. *Engineering Computations*. <https://doi.org/10.1108/02644400810881374>

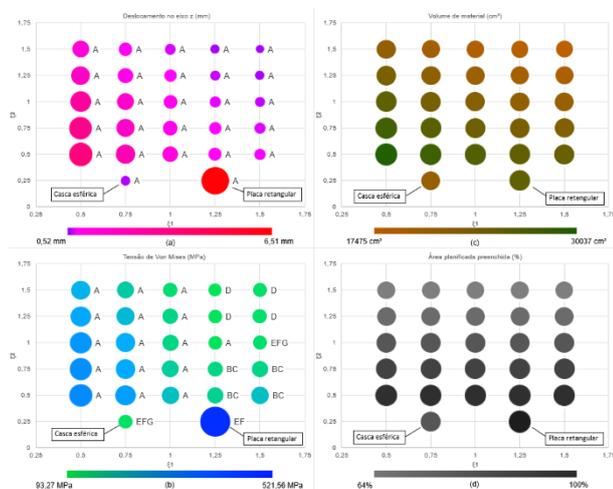
POPOV, E. P. (1978). Introdução à Mecânica dos Sólidos. Edgard Blücher.

## APÊNDICE A

### A.1 CASO 4

O caso 4 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 40 mm. Para esse caso, a figura A.1 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

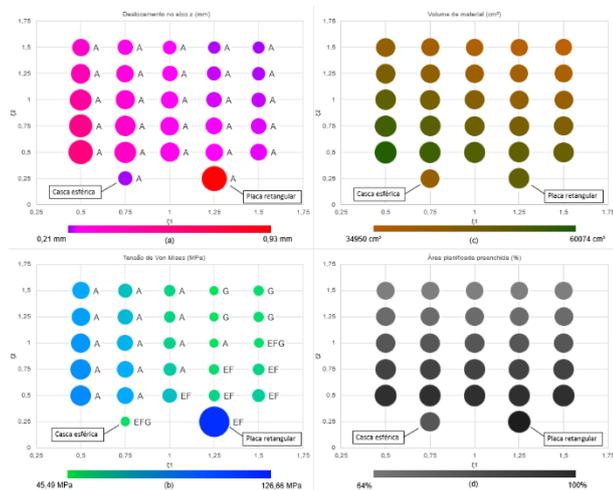
Figura A.1 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



## A.2 CASO 5

O caso 5 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 80 mm. Para esse caso, a figura A.2 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

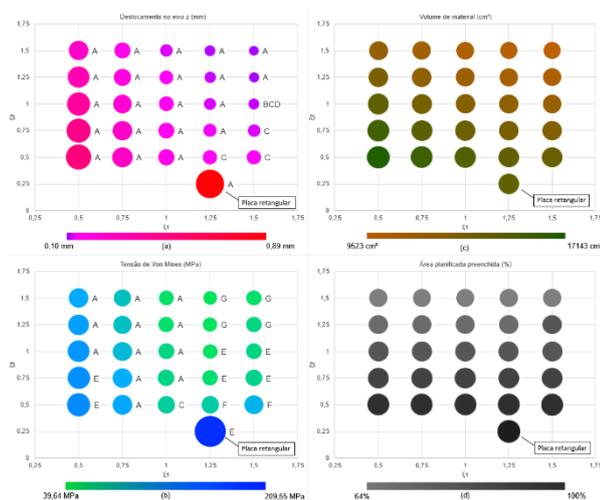
Figura A.2 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



## A.3 CASO 6

O caso 6 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 40 mm. Para esse caso, a figura A.3 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

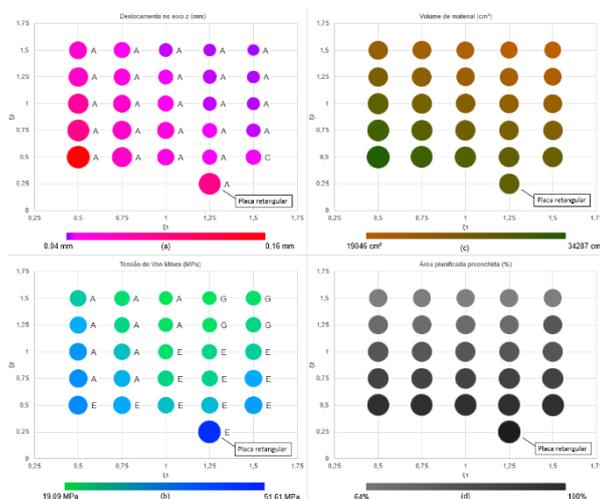
Figura A.3 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



## A.4 CASO 7

O caso 5 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 80 mm. Para esse caso, a figura A.4 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

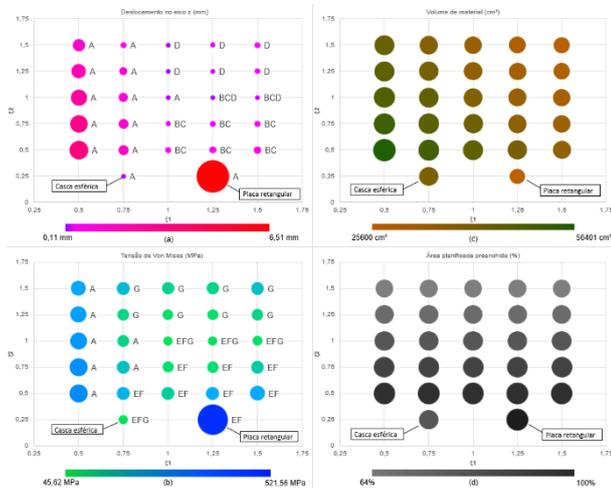
Figura A.4 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



### A.5 CASO 8

O caso 8 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 400 mm, e espessura de 40 mm. Para esse caso, a figura A.5 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

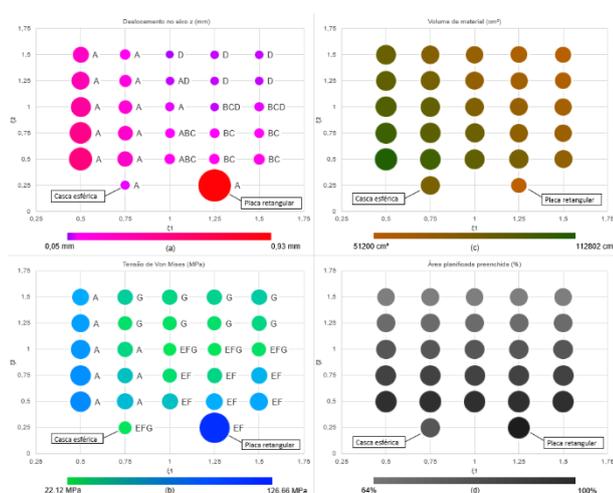
Figura A.5 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



### A.6 CASO 9

O caso 9 tem como parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 80 mm. Para esse caso, a figura A.6 ilustra os gráficos de cada grandeza avaliada.

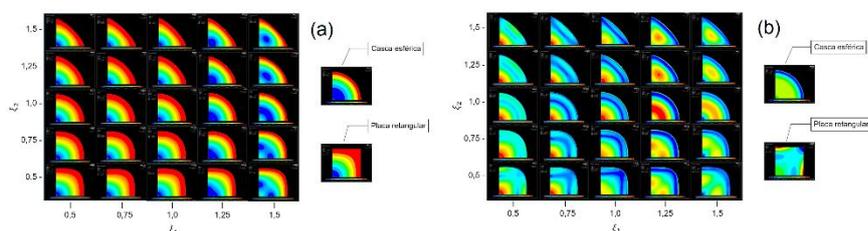
Figura A.6 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ ; (c) Volume total de material; (d) Porcentagem de área ocupada pela projeção da superfície.



## A.7 RESULTADOS OBTIDOS PELO ANSYS

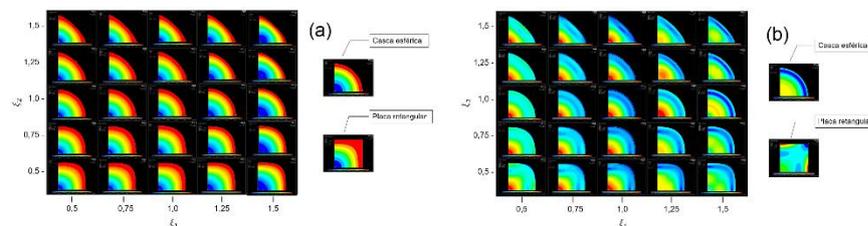
A seguir a figura A.7 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 20 mm.

Figura A.7 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



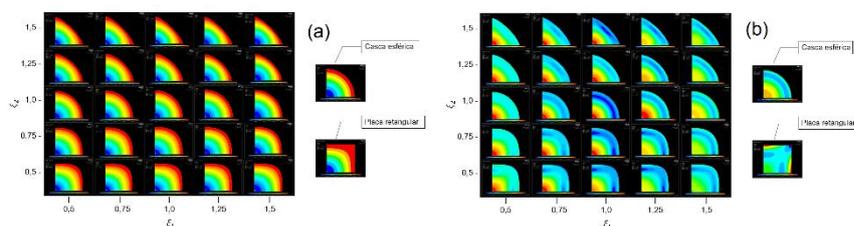
A seguir a figura A.8 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 40 mm.

Figura A.8 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



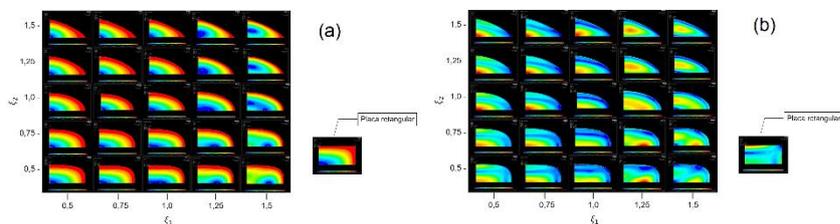
A seguir a figura A.9 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 100 mm, e espessura de 80 mm.

Figura A.9 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



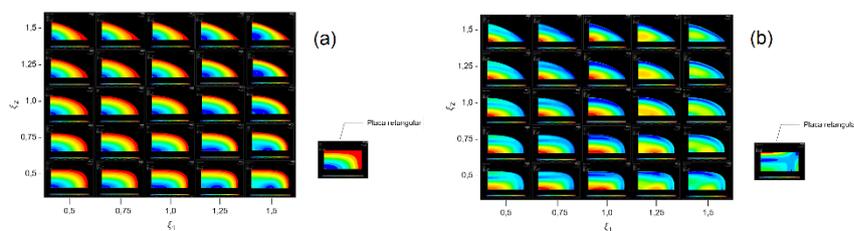
A seguir a figura A.10 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 20 mm.

Figura A.10 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



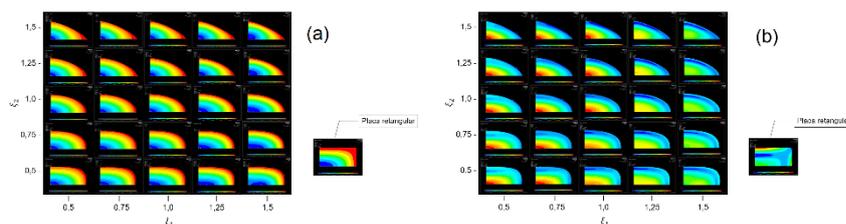
A seguir a figura A.11 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 40 mm.

Figura A.11 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



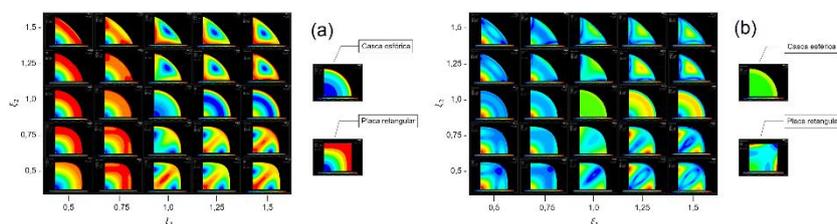
A seguir a figura A.12 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 200 mm e 100 mm, e espessura de 80 mm.

Figura A.12 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



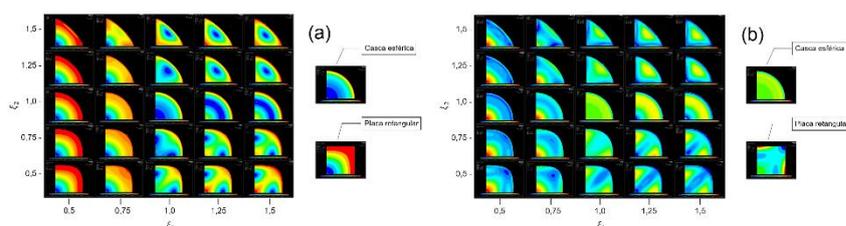
A seguir a figura A.13 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 400 mm, e espessura de 20 mm.

Figura A.13 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



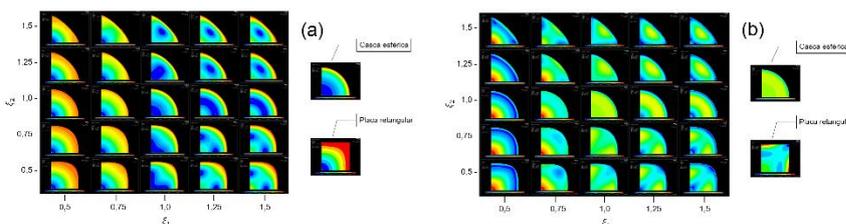
A seguir a figura A.14 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 400 mm, e espessura de 40 mm.

Figura A.14 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



A seguir a figura A.15 ilustra os resultados obtidos para os máximos deslocamentos  $u_z$  e máximas tensões  $\sigma_m$ . Parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente 400 mm, 400 mm e 400 mm, e espessura de 80 mm.

Figura A.15 – (a) Máximos deslocamentos  $u_z$ ; (b) Máximas tensões  $\sigma_m$ .



## APÊNDICE B

### B.1 MALHA UTILIZADA NAS ANÁLISES

Previamente à realização das simulações de todas as geometrias por elementos finitos, foi feita uma análise da malha a ser utilizada. Para isso, foram feitas três simulações para a mesma geometria, utilizando malhas com diferentes níveis de refinamento. Os resultados obtidos apresentaram uma variação muito pequena entre si, então optou-se pela malha utilizando o refinamento com menor custo computacional, ilustrada na figura B.1.

Figura B.1 – Malha utilizada para simulação de uma das geometrias do caso 2.

