

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENG. DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

FÁBIO ELNECAVE XAVIER - 00229725

**PROJETO DE CONTROLADORES LPV
PELO MÉTODO VRFT**

Porto Alegre
2020

FÁBIO ELNECAVE XAVIER - 00229725

**PROJETO DE CONTROLADORES LPV
PELO MÉTODO VRFT**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-CCA) apresentado à COMGRAD-CCA da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de *Bacharel em Eng. de Controle e Automação*.

ORIENTADORA:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini

Porto Alegre
2020

FÁBIO ELNECAVE XAVIER - 00229725

**PROJETO DE CONTROLADORES LPV
PELO MÉTODO VRFT**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina de TCC do curso *Eng. de Controle e Automação* e aprovado em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Orientadora: _____
Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela UFRGS – Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela UFRGS – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS
Doutor pela UFSC – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Pedro Rafael Bolognese Fernandes, UFRGS
Doutor pela Universidade de Dortmund – Dortmund, Alemanha

Marcelo Götz
Coordenador de Curso
Eng. de Controle e Automação

Porto Alegre, novembro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por sempre me darem todo o apoio que eu pudesse precisar e querer.

À Alice, pela parceria de sempre, inclusive na revisão deste texto.

À Lu, por estar ao meu lado o tempo todo e por tornar essas últimas semanas de trabalho muito menos sofridas.

Aos professores que me inspiraram e me fizeram ter certeza de que escolhi o curso certo.

Ao meus amigos e colegas, os melhores companheiros durante esses muitos anos de faculdade.

RESUMO

Gain scheduling é uma técnica muito popular para o controle de sistemas não lineares em situações nas quais a aproximação por um modelo linear não é válida. Ela consiste em projetar controladores lineares para diferentes pontos de operação do sistema e em interpolar os seus parâmetros, de maneira a gerar uma lei de controle capaz de fornecer um desempenho satisfatório para toda a faixa de operação de interesse. O modelo matemático de um controlador desse tipo é conhecido como linear a parâmetros variantes (LPV). Devido à dificuldade de se obter modelos suficientemente precisos para muitos processos não lineares, esse problema é particularmente interessante de ser tratado pelo paradigma de controle baseado em dados. Métodos dessa categoria buscam projetar um controlador unicamente a partir de dados experimentais, sem se basear em um modelo matemático do sistema que se deseja controlar. O objetivo deste trabalho é estudar a aplicação do método de controle baseado em dados *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) – originalmente proposto para o projeto de controladores lineares – para projetar controladores LPV para processos não lineares. São desenvolvidos dois estudos de caso para ilustrar a sua aplicação, nos quais os controladores LPV projetados pelo método VRFT são comparados aos controladores *gain scheduling* projetados a partir da metodologia mais tradicional de interpolação dos parâmetros de diversos controladores lineares. Os resultados mostram que o método proposto funciona, além de ser mais simples de ser aplicado. Os controladores desenvolvidos apresentaram um desempenho similar ao dos controladores projetados pelo procedimento de interpolação.

Palavras-chave: *Virtual reference feedback tuning*, LPV, *gain scheduling*, controle baseado em dados.

ABSTRACT

Gain scheduling is a very popular technique for the control of nonlinear systems in situations in which a linear model approximation is not valid. It consists of designing linear controllers for different operating points of the system and interpolating its parameters to generate a control law capable of providing satisfactory performance for the entire operating range of interest. The mathematical model of such a controller is known as linear parameter-varying (LPV). Due to the difficulty of obtaining sufficiently accurate models for many nonlinear processes, this problem is particularly compelling to be addressed by the data-driven control paradigm. Methods in this category seek to design a controller based solely on experimental data, without relying on a mathematical model of the system to be controlled. The aim of this work is to study the application of the *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) data-driven control method - originally proposed for the design of linear controllers - to design LPV controllers for nonlinear processes. Two case studies are developed to illustrate its application, in which the LPV controllers designed by the VRFT method are compared with gain scheduling controllers designed following the more traditional methodology of interpolating the parameters of several linear controllers. The results show that the proposed method works, apart from being of simpler application. The developed controllers presented a performance similar to the controllers designed by the interpolation procedure.

Keywords: Virtual reference feedback tuning, LPV, gain scheduling, data-driven control.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE ABREVIATURAS	8
1 INTRODUÇÃO	9
2 REVISÃO DA LITERATURA	11
2.1 Identificação de sistemas LTI	11
2.2 Identificação de sistemas LPV	12
2.3 <i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>	13
3 <i>VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING</i> PARA CONTROLADORES LPV	16
3.1 Estrutura do controlador	16
3.2 Descrição do método	20
4 ESTUDOS DE CASO	22
4.1 Sinal externo como variável de <i>scheduling</i>	22
4.2 Saída da planta como variável de <i>scheduling</i>	27
5 CONCLUSÃO	34
REFERÊNCIAS	35

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Representação em bloco de uma planta SISO.	9
2	Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada.	14
3	Diagramas de blocos de um controlador PI em tempo discreto.	17
4	Dados coletados em malha aberta aplicando um sinal p senoidal.	23
5	Ganhos dos controladores PID LPV em função de p	24
6	Dados coletados em malha aberta aplicando sinais p constantes.	25
7	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do método VRFT LPV.	26
8	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do procedimento de interpolação.	26
9	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID.	27
10	Dados coletados em malha aberta para y variando entre 0,1 e 0,4.	28
11	Ganhos dos controladores PID LPV em função de y	29
12	Dados coletados em malha aberta para y próximo a um ponto de operação específico.	30
13	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do método VRFT LPV.	32
14	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do procedimento de interpolação.	32
15	Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID.	33

LISTA DE ABREVIATURAS

CSTR	<i>Continuous stirred-tank reactor</i>
IFT	<i>Iterative Feedback Tuning</i>
LPV	<i>Linear parameter-varying</i>
LTI	<i>Linear time-invariant</i>
OCI	<i>Optimal Controller Identification</i>
PI	Proporcional integral
PID	Proporcional integral derivativo
SISO	<i>Single-input single-output</i>
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>

1 INTRODUÇÃO

A teoria de controle é o ramo da matemática aplicada que estuda como projetar controladores para sistemas dinâmicos. É comum se referir ao sistema que se deseja controlar pelo nome de *planta* ou *processo*. Neste trabalho, são considerados apenas plantas com uma entrada e uma saída (*Single-Input Single-Output* – SISO), conforme mostrado na Figura 1. O controlador é um sistema que calcula o sinal de controle u que deve ser aplicado na planta para que a sua saída y se comporte conforme desejado. Se o cálculo de u é feito a partir de medições de y , diz-se que o controle é feito em malha fechada; caso contrário, o controle é dito em malha aberta.

Figura 1: Representação em bloco de uma planta SISO.



Fonte: elaborada pelo autor

O projeto de sistemas de controle é simplificado consideravelmente quando a planta é um sistema linear e invariante no tempo (*Linear Time-Invariant* – LTI). Para esses sistemas, existem poderosos métodos de projeto baseados tanto em representações no domínio da frequência quanto em modelos em espaço de estados (OGATA; YANG, 2002). Já quando a planta é um sistema não linear, o problema de projeto do controlador é mais difícil. Caso se deseje apenas controlar essa planta na vizinhança de um ponto de operação, pode-se aproximar o seu comportamento por um modelo linear e aplicar as técnicas de projeto desenvolvidas para esse tipo de sistema (KHALIL; GRIZZLE, 2002). No entanto, na medida em que se afasta desse ponto, essa aproximação deixa de ser válida e o sistema tende a não responder conforme desejado.

Nos casos em que se deseja controlar a planta não linear em uma faixa de operação tal que a aproximação linear não é válida, uma das abordagens mais populares para o projeto de controladores é a conhecida como *gain scheduling* (LEITH; LEITHEAD, 2000). A ideia consiste em dividir essa faixa de operação em diversas regiões, em cada uma das quais calculam-se os parâmetros (ou ganhos) de um controlador linear que garanta um desempenho satisfatório. A partir da medida de uma variável indicativa do ponto de operação da planta, denominada variável de *scheduling*, define-se o conjunto de parâmetros que será usado no cálculo do sinal de controle.

Existem duas principais maneiras de se implementar um controlador *gain scheduling*. Uma opção, que não será explorada neste trabalho, consiste em usar o valor da variável

de *scheduling* para chavear entre os controladores lineares projetados para cada uma das regiões da faixa de operação. A outra corresponde a definir os ganhos do controlador como uma função contínua da variável de *scheduling*, interpolando os parâmetros dos controladores lineares projetados. O modelo matemático do controlador obtido nesse caso, que corresponde a uma estrutura linear cujos parâmetros são funções de uma variável, é denominado linear a parâmetros variantes (*Linear Parameter-Varying* – LPV) (TÓTH, 2010).

Tradicionalmente, o projeto de um controlador é feito com base em um modelo matemático da planta que se deseja controlar. Contudo, obter um modelo que descreva adequadamente uma planta para fins de controle, especialmente no caso não linear, é muitas vezes difícil e custoso. Assim, métodos de controle que se baseiam diretamente em dados de entrada e saída coletados em experimentos realizados na planta se mostram alternativas interessantes a esses procedimentos habituais. Esse paradigma de projeto é conhecido na literatura como *controle baseado em dados* (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011). Alguns exemplos de métodos de controle LTI que se enquadram nessa categoria são *Iterative Feedback Tuning* (IFT) (HJALMARSSON et al., 1998), *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2000) e *Optimal Controller Identification* (OCI) (CAMPESTRINI et al., 2017). Como a coleta de dados é feita amostrando os sinais de interesse, os controladores projetados por esses métodos são naturalmente sistemas em tempo discreto.

Para projetar um controlador *gain scheduling* LPV para uma planta cujo modelo é desconhecido, basta realizar experimentos de coleta de dados para diferentes pontos de operação e aplicar um método de controle baseado em dados para projetar um controlador linear para cada um desses pontos. O controlador LPV é obtido interpolando os parâmetros desses controladores lineares. Uma alternativa mais simples a esse procedimento seria generalizar um desses métodos para projetar diretamente um controlador LPV a partir de dados de um único experimento na planta. O candidato mais natural para isso é o método VRFT, por meio do qual o projeto é feito resolvendo um problema de otimização correspondente à identificação do controlador. A generalização para o caso LPV é feita então substituindo a identificação de um modelo LTI pela de um modelo LPV, a qual pode ser feita usando um método de mínimos quadrados (BAMIEH; GIARRE, 2002).

Essa generalização foi proposta inicialmente por (FORMENTIN; SAVARESI, 2011). No entanto, esse artigo testa o desempenho dos controladores projetados apenas em plantas LPV de modelo muito simples, o que não deixa claro se o método produziria bons resultados em aplicações práticas. Já em (FORMENTIN; PIGA et al., 2016), é feito o projeto baseado em dados de um controlador LPV para um sistema não linear mais complexo, porém usando um método mais sofisticado do que uma simples generalização do VRFT para o caso LPV. Em nenhum dos dois artigos comparam-se os resultados dos controladores obtidos com os de um controlador LPV projetado por um outro método.

Assim, este trabalho se propõe a estudar a aplicação do método VRFT para o projeto de controladores LPV no controle de plantas não lineares, comparando os seus desempenhos com controladores projetados por outras metodologias. No Capítulo 2, é feita uma revisão dos fundamentos de identificação de sistemas e de controle baseado em dados necessários para o restante do trabalho. Os aspectos teóricos referentes à estrutura de controladores *gain scheduling* LPV e ao projeto de controladores LPV pelo método VRFT são discutidos no Capítulo 3. No Capítulo 4, são desenvolvidos dois exemplos para ilustrar a aplicação do método desenvolvido. Finalmente, a conclusão do trabalho é feita no Capítulo 5.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Identificação de sistemas LTI

O problema de identificação de um sistema dinâmico consiste em determinar um modelo matemático que descreva a relação entre a sua entrada e a sua saída a partir de um conjunto de dados experimentais (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Na maioria das aplicações, trabalha-se com modelos ditos paramétricos, isto é, modelos com uma estrutura definida, caracterizados por um vetor de parâmetros $\theta \in \mathbb{R}^n$.

Para fins de controle, é comum representar um sistema dinâmico por um modelo LTI, que pode ser expresso na forma de uma equação de diferenças do tipo

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b). \quad (1)$$

Essa equação é equivalente à representação em termos da função de transferência

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}},$$

em que $Y(z)$ e $U(z)$ correspondem respectivamente às transformadas Z dos sinais y e u .

Para identificar um modelo LTI, começa-se reescrevendo (1) como

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + \varepsilon(t), \quad (2)$$

em que o vetor regressor $\varphi(t)$ e o vetor de parâmetros θ são definidos por

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b)]^T \\ \theta &= [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b}]^T. \end{aligned}$$

O termo $\varepsilon(t)$ corresponde à diferença entre o valor observado da saída e o seu valor previsto pelo modelo, e é denominado erro de predição.

Um dos métodos de identificação de mais fácil aplicação é o método de mínimos quadrados, que consiste em determinar o valor dos parâmetros que minimiza a soma dos quadrados dos erros de predição. Mais especificamente, a partir de um conjunto de dados $\{u(t), y(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$, o método de mínimos quadrados busca calcular o vetor θ que minimiza o critério

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \varphi(t)^T \theta]^2. \quad (3)$$

Derivando J em relação a θ e igualando essa derivada a zero, obtém-se que o argumento que minimiza (3) é

$$\theta = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right].$$

Embora essa solução analítica seja extremamente útil de um ponto de vista teórico, ela não é a mais adequada para uma implementação numérica. Alguns métodos numericamente robustos para o cálculo da solução de mínimos quadrados são a fatoração QR e a decomposição em valores singulares (GOLUB; VAN LOAN, 1996).

2.2 Identificação de sistemas LPV

Considera-se agora o problema de identificar o modelo de um sistema LPV descrito por uma equação de diferenças do tipo

$$\begin{aligned} y(t) + a_1(p(t))y(t-1) + a_2(p(t))y(t-2) + \dots + a_{n_a}(p(t))y(t-n_a) \\ = b_0(p(t))u(t) + b_1(p(t))u(t-1) + \dots + b_{n_b}(p(t))u(t-n_b), \end{aligned} \quad (4)$$

em que y é a saída do sistema, u é a sua entrada e p é uma variável de *scheduling*, conforme tratado em (BAMIEH; GIARRE, 2002). Supõe-se que as funções a_i e b_i podem ser escritas como uma combinação linear de um conjunto de funções conhecido $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

$$\begin{aligned} a_i(p(t)) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}f_j(p(t)) \\ b_i(p(t)) &= \sum_{j=1}^m b_{ij}f_j(p(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

O objetivo da identificação é obter os valores dos parâmetros a_{ij} e b_{ij} que melhor expliquem um conjunto de dados coletados de u , y e p , segundo um critério de mínimos quadrados que será detalhado na sequência.

Isolando o termo $y(t)$, pode-se reescrever (4) como

$$y(t) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i(p(t))y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i(p(t))u(t-i). \quad (6)$$

Substituindo agora as expressões de (5) em (6),

$$\begin{aligned} y(t) &= - \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^m a_{ij}f_j(p(t))y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} \sum_{j=1}^m b_{ij}f_j(p(t))u(t-i) \\ &= \sum_{j=1}^m f_j(p(t)) \left[\sum_{i=1}^{n_a} -a_{ij}y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_{ij}u(t-i) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

O termo entre colchetes pode ser escrito de uma maneira mais simples, definindo uma matriz de parâmetros Θ e um vetor $\varphi(t)$ da seguinte maneira:

$$\Theta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_a 1} & a_{n_a 2} & \dots & a_{n_a m} \\ b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n_b 1} & b_{n_b 2} & \dots & b_{n_b m} \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-n_a) \\ u(t) \\ \vdots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, (7) se torna

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^m f_j(p(t)) \sum_{i=1}^n \Theta_{ij} \phi_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \Psi_{ij}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

em que $n = n_a + n_b + 1$ e $\Psi_{ij}(t) = \phi_i(t) f_j(p(t))$.

Usando a definição usual de produto interno de duas matrizes $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$, (8) pode ser escrita como

$$y(t) = \langle \Theta, \Psi(t) \rangle. \quad (9)$$

A matriz $\Psi(t)$ é denominada matriz regressora, e depende apenas de dados coletados até o instante t , enquanto Θ contém os parâmetros que se deseja identificar. No caso $m = 1$, essas matrizes se tornam $\Theta = \theta \in \mathbb{R}^n$ e $\Psi(t) = \psi(t) \in \mathbb{R}^n$, e (9) se reduz a $y(t) = \psi(t)^T \theta$, que possui o mesmo formato de (2).

Feita a coleta de um conjunto de dados $\{u(t), y(t), p(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$, o problema de identificação consiste em determinar a matriz Θ que minimiza o critério

$$J^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \langle \Theta, \Psi(t) \rangle]^2. \quad (10)$$

De um ponto de vista computacional, a solução desse problema de otimização pode ser obtida exatamente como no caso da identificação de um sistema LTI: basta transformar as matrizes Θ e $\Psi(t)$ em vetores, concatenando as suas colunas uma após a outra (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Assim, denotando por $\text{vec}(A)$ o vetor obtido concatenando as colunas de uma matriz A , a matriz que minimiza (10) é

$$\text{vec}(\Theta) = \left[\sum_{t=1}^N \text{vec}(\Psi(t)) \text{vec}(\Psi(t))^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \text{vec}(\Psi(t)) y(t) \right].$$

2.3 Virtual Reference Feedback Tuning

Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) é um método para projeto de controladores lineares, originalmente proposto por (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2000), baseado inteiramente em dados experimentais coletados da planta que se deseja controlar, sem utilizar um modelo matemático dela. Para a sua aplicação, deve-se definir uma estrutura para a função de transferência do controlador, parametrizada linearmente por um vetor $\theta \in \mathbb{R}^p$, e um modelo de referência, isto é, a função de transferência $T_d(z)$ desejada para o sistema em malha fechada. O objetivo do projeto é determinar o valor de θ de forma que a resposta do sistema em malha fechada se aproxime ao máximo da especificada pelo modelo de referência.

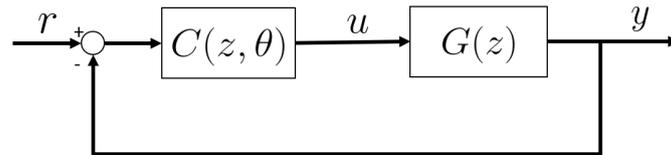
Considera-se um sistema de controle como o ilustrado na Figura 2, em que o sinal de controle u aplicado na planta (cuja função de transferência $G(z)$ ¹ é desconhecida) é calculado pelo controlador de função de transferência $C(z, \theta)$ a partir da diferença

¹Para que o problema de controle seja bem posto, $G(z)$ deve possuir grau relativo positivo. Isso sempre será verdade se a planta for um sistema em tempo contínuo amostrado.

observada entre o sinal de referência r e o sinal de saída y . A função de transferência $T(z, \theta)$ entre r e y em malha fechada é dada por

$$T(z, \theta) = \frac{C(z, \theta)G(z)}{1 + C(z, \theta)G(z)}.$$

Figura 2: Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada.



Fonte: elaborada pelo autor

Para um determinado sinal de referência r , cada valor de θ resultará em uma saída $y_\theta(t) = T(z, \theta)r(t)$.² Deseja-se determinar o valor de θ que tornará y_θ o mais próximo de $y_d(t) = T_d(z)r(t)$. Mais precisamente, o problema de controle é calcular θ que minimiza

$$\begin{aligned} J_y(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_\theta(t) - y_d(t)]^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(T(z, \theta) - T_d(z))r(t)]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Minimizar diretamente esse critério apresenta duas dificuldades: em primeiro lugar, esse é um problema de otimização não convexo, o que exige o uso de um algoritmo iterativo tal como o método do gradiente, que não necessariamente convergirá para o mínimo global da função; em segundo lugar, como J_y depende da função de transferência da planta $G(z)$, desconhecida, o seu gradiente deve ser estimado exclusivamente a partir de dados coletados, o que exige que se realizem diversos experimentos na planta.³

Para contornar esses inconvenientes, o método VRFT propõe um procedimento alternativo que depende de apenas um experimento na planta, no qual deve-se coletar um conjunto de dados $\{u(t), y(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$. Independentemente de como for feita a coleta, supõe-se que esses dados foram obtidos em malha fechada com um controlador capaz de fazer o sistema operar exatamente com a função de transferência $T_d(z)$. Nessa situação hipotética, a referência aplicada teria sido $\bar{r}(t) = T_d^{-1}(z)y(t)$, a qual é denominada referência virtual. Calcula-se então o erro virtual $\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t) = \frac{1 - T_d(z)}{T_d(z)}y(t)$, que corresponde ao sinal hipoteticamente aplicado na entrada do controlador.

O projeto do controlador pelo método VRFT é feito buscando o valor de θ tal que $C(z, \theta)\bar{e}(t)$ seja o mais próximo possível de $u(t)$. Dessa forma, deseja-se minimizar o critério

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t) - C(z, \theta)\bar{e}(t)]^2. \quad (12)$$

²Embora possa ser considerado um abuso de notação, o símbolo z será usado tanto como variável da transformada Z quanto para representar o operador atraso unitário z^{-1} .

³Outro método de controle baseado em dados, conhecido como *Iterative Feedback Tuning* (IFT), (HJALMARSSON et al., 1998) se propõe a resolver exatamente esse problema.

Sendo a função de transferência do controlador parametrizada linearmente por θ , pode-se escrever $C(z, \theta) = \bar{C}(z)^T \theta$, em que $\bar{C}(z)$ é um vetor de funções de transferência. Logo, o projeto de um controlador pelo método VRFT é matematicamente equivalente à identificação de um sistema LTI pelo método de mínimos quadrados (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011).

Se existir $\theta_d \in \mathbb{R}^p$ tal que $T(z, \theta_d) = T_d(z)$, os critérios (11) e (12) possuirão o mesmo mínimo, pois $J_y(\theta_d) = J_{VR}(\theta_d) = 0$. Caso contrário, os mínimos dos dois critérios serão atingidos para valores diferentes de θ . É interessante notar que, enquanto o argumento que minimiza J_y depende do sinal de referência r que se deseja aplicar em malha fechada, aquele que minimiza J_{VR} depende dos valores de u e de y coletados no experimento.

Para aproximar o valor de θ calculado pelo método VRFT do verdadeiro mínimo de J_y , pode-se adaptar o critério J_{VR} adicionando à sua formulação um filtro $L(z)$ da seguinte maneira:

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [L(z)(u(t) - C(z, \theta)\bar{e}(t))]^2. \quad (13)$$

Como o produto de duas funções de transferência é comutativo, esse critério pode ainda ser escrito como

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u_L(t) - C(z, \theta)\bar{e}_L(t)]^2, \quad (14)$$

com $u_L(t) = L(z)u(t)$ e $\bar{e}_L(t) = L(z)\bar{e}(t)$. Demonstra-se em (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011) que uma boa escolha de filtro é tal que

$$|L(e^{j\omega})|^2 = |T_d(e^{j\omega})|^2 |1 - T_d(e^{j\omega})|^2 \frac{\Phi_r(e^{j\omega})}{\Phi_u(e^{j\omega})} \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (15)$$

em que $\Phi_r(e^{j\omega})$ é a densidade espectral de potência do sinal de referência r que se deseja aplicar em malha fechada e $\Phi_u(e^{j\omega})$ é a densidade espectral de potência do sinal u coletado durante o experimento. Em particular, se o sinal u aplicado na coleta de dados tiver um espectro igual ao sinal de referência r que será aplicado em malha fechada, o filtro se torna

$$L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z)).$$

O projeto de um controlador pelo método VRFT pode ser resumido portanto pelos seguintes passos:

1. Realizar um experimento na planta, coletando um conjunto de dados de entrada e saída $\{u(t), y(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$.
2. Definir a estrutura da função de transferência $C(z, \theta)$, o modelo de referência $T_d(z)$ e o filtro $L(z)$.
3. Calcular o erro virtual $\bar{e}(t) = \frac{1-T_d(z)}{T_d(z)}y(t)$ e os sinais filtrados $u_L(t) = L(z)u(t)$ e $\bar{e}_L(t) = L(z)\bar{e}(t)$.
4. Determinar o valor de θ que minimiza (14).

3 VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING PARA CONTROLADORES LPV

Projetar um controlador pelo método VRFT corresponde a identificar, dentre os sistemas que podem ser descritos pela estrutura de controlador definida, aquele que gera uma saída mais próxima de u_L ao se aplicar como entrada o sinal \bar{e}_L . Isso sugere que é possível adaptar esse método para o projeto de controladores LPV, substituindo tal procedimento pela identificação de um sistema LPV. Para isso, no lugar de uma função de transferência, a estrutura do controlador deve ser especificada diretamente no domínio do tempo, em um formato que possa ser reduzido a uma equação do tipo (9). Além disso, é preciso levar em conta que o controlador LPV não é um sistema linear invariante no tempo, e portanto não comuta com o filtro $L(z)$. Assim, a passagem de (13) para (14) não é mais válida.

Sob a ótica do *gain scheduling*, é natural pensar o controlador LPV como uma generalização de um controlador LTI clássico, tal como um controlador proporcional integral (PI) ou um controlador proporcional integral derivativo (PID), porém com os ganhos variáveis. No entanto, não existe uma maneira única de se fazer essa generalização. Isso ocorre pois a função de transferência de um controlador pode ser representada em espaço de estados de diversas maneiras diferentes, as quais são todas equivalentes enquanto os parâmetros do controlador forem constantes. Conforme será mostrado neste capítulo, no momento em que esses parâmetros passam a ser funções de outra variável, as diferentes representações em espaço de estados corresponderão a controladores LPV diferentes.

Na Seção 3.1, é feita uma análise da diferença entre essas representações, culminando na proposta de uma estrutura de controlador LPV adequada para projeto pelo método VRFT. Definida essa estrutura, o método VRFT para controladores LPV é discutido na Seção 3.2.

3.1 Estrutura do controlador

Um controlador LPV corresponde a uma família de controladores lineares parametrizada por uma variável de *scheduling* que determina o ponto de operação da planta. Tradicionalmente, o projeto de controladores *gain scheduling* LPV é feito projetando controladores lineares de maneira independente para diferentes pontos de operação e em seguida interpolando os seus parâmetros. Assim, é desejável que essa interpolação seja feita de maneira a preservar as características locais dos controladores lineares. Mais precisamente, deseja-se que a linearização da conexão em realimentação da planta não linear com o controlador LPV em torno de um ponto de operação qualquer seja igual à conexão em realimentação da planta linearizada em torno desse ponto com o controlador linear correspondente (KAMINER et al., 1995).

Diferentes esquemas de interpolação resultarão em estruturas diferentes de controladores LPV, que poderão ou não preservar as características locais dos controladores lineares. Para ilustrar como essas estruturas podem afetar essa propriedade, são analisadas duas representações diferentes de um controlador PI LPV com os ganhos parametrizados pela saída y da planta. A discussão desenvolvida a seguir é inspirada no tratamento de controladores *gain scheduling* de (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

A função de transferência de um controlador PI em tempo discreto é dada por

$$C(z) = K_1 + K_2 \frac{1}{z-1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (16)$$

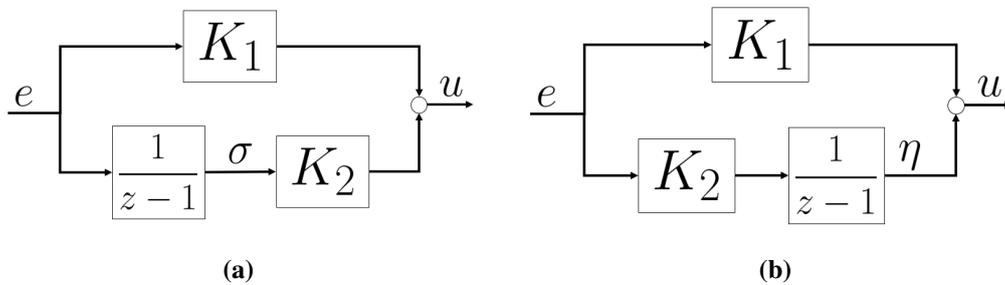
em que $b_0 = K_1$ e $b_1 = K_2 - K_1$. Dois diagramas de blocos para essa função de transferência são mostrados na Figura 3, os quais se diferenciam um do outro apenas no que diz respeito à posição relativa entre o ganho K_2 e o bloco $\frac{1}{z-1}$. O sinal de entrada e é o erro de seguimento de referência, e u é o sinal de controle calculado pelo controlador. O diagrama da Figura 3a corresponde ao modelo em espaço de estados

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \sigma(t) + e(t) \\ u(t) &= K_1 e(t) + K_2 \sigma(t), \end{aligned} \quad (17)$$

enquanto o da Figura 3b corresponde ao modelo

$$\begin{aligned} \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2 e(t) \\ u(t) &= K_1 e(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Figura 3: Diagramas de blocos de um controlador PI em tempo discreto.



Fonte: elaborada pelo autor

Considerando agora que os ganhos K_1 e K_2 sejam funções da saída y , pode-se generalizar esses dois modelos para se obter duas estruturas de controlador PI LPV. Assim, (17) e (18) se tornam, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \sigma(t) + e(t) \\ u(t) &= K_1(y(t))e(t) + K_2(y(t))\sigma(t) \end{aligned} \quad (19)$$

e

$$\begin{aligned} \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2(y(t))e(t) \\ u(t) &= K_1(y(t))e(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Embora (17) e (18) sejam equivalentes, os controladores (19) e (20) não são.

Para comparar essas duas estruturas, considera-se uma planta não linear descrita por

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}$ é a saída da planta. É feita a hipótese de que, para cada ponto de operação $\bar{y} \in \mathbb{R}$, o sistema de equações

$$\begin{aligned} x &= f(x, u) \\ \bar{y} &= h(x) \end{aligned} \quad (21)$$

possui uma única solução $(x, u) = (\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

A conexão em realimentação dessa planta com o controlador (19) é descrita pelas equações

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), K_1(h(x(t))))[r(t) - h(x(t))] + K_2(h(x(t)))\sigma(t) \\ \sigma(t+1) &= \sigma(t) + r(t) - h(x(t)), \end{aligned} \quad (22)$$

em que r é o sinal de referência. Quando aplicada uma referência constante $r(t) = \bar{y}$, o sistema em malha fechada possui um único ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ com $\bar{\sigma} = \frac{\bar{u}}{K_2(\bar{y})}$ devido à unicidade da solução de (21). Linearizando (22) em torno desse ponto, obtém-se

$$\chi(t+1) = \begin{bmatrix} A + BC(K_2'(\bar{y})\bar{\sigma} - K_1(\bar{y})) & BK_2(\bar{y}) \\ -C & 1 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} BK_1(\bar{y}) \\ 1 \end{bmatrix} \zeta(t), \quad (23)$$

com

$$\begin{aligned} \chi(t) &= [x(t) - \bar{x} \quad \sigma(t) - \bar{\sigma}]^T, \quad \zeta(t) = r(t) - \bar{y}, \quad K_2'(\bar{y}) = \frac{dK_2}{dy}(\bar{y}) \\ A &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}). \end{aligned}$$

A presença da derivada do ganho K_2 nessa equação revela que a conexão em realimentação da planta com o controlador LPV não é localmente equivalente à conexão com um controlador PI de ganhos $K_1(\bar{y})$ e $K_2(\bar{y})$. Como os autovalores da matriz de estado dependem do valor de $K_2'(\bar{y})$, a resposta do sistema em malha fechada será diferente da que seria obtida com o controlador LTI.

Já com o controlador (20), o sistema em malha fechada se torna

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), K_1(h(x(t))))[r(t) - h(x(t))] + \eta(t) \\ \eta(t+1) &= \eta(t) + K_2(h(x(t)))[r(t) - h(x(t))]. \end{aligned} \quad (24)$$

Para uma referência constante $r(t) = \bar{y}$, a unicidade da solução de (21) implica que esse sistema possui um único ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{\eta})$, com $\bar{\eta} = \bar{u}$. A linearização de (24) em torno desse ponto é

$$\chi(t+1) = \begin{bmatrix} A - BCK_1(\bar{y}) & B \\ -K_2(\bar{y})C & 1 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} BK_1(\bar{y}) \\ K_2(\bar{y}) \end{bmatrix} \zeta(t), \quad (25)$$

em que $\chi(t) = [x(t) - \bar{x} \quad \eta(t) - \bar{\eta}]^T$ e o restante dos termos é definido como no comentário que sucede (23).

Dessa vez, as matrizes do sistema (25) dependem apenas dos valores dos ganhos, e não das suas derivadas. Graças a isso, o comportamento local do sistema em malha fechada em torno desse ponto de operação é igual ao que seria obtido com o controlador PI de ganhos constantes $K_1(\bar{y})$ e $K_2(\bar{y})$. Essa representação é portanto mais adequada para a implementação de um controlador PI LPV do que a anterior.

É interessante notar que o motivo pelo qual as matrizes de (25) não dependem de $K_2'(\bar{y})$ é que, no controlador (20), o ganho $K_2(y)$ multiplica diretamente o erro de seguimento de referência e . Assim, ao se calcular as derivadas para linearizar o sistema em malha fechada, um termo em K_2' aparece multiplicando o valor de e em regime permanente, o qual vale zero devido à ação integral do controlador. Isso não ocorre com o controlador (19), pois nesse caso $K_2(y)$ multiplica a variável de estado σ , cujo valor $\bar{\sigma}$ em regime permanente não é em geral nulo.

O controlador (20) pode ser representado de maneira simples na forma de uma equação de diferenças. Manipulando as equações do modelo em espaço de estados, obtém-se

$$\begin{aligned} u(t) - u(t-1) &= K_1(y(t))e(t) - K_1(y(t-1))e(t-1) + \eta(t) - \eta(t-1) \\ &= K_1(y(t))e(t) - K_1(y(t-1))e(t-1) + K_2(y(t-1))e(t-1) \\ &= K_1(y(t))e(t) + [K_2(y(t-1)) - K_1(y(t-1))]e(t-1). \end{aligned}$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$u(t) - u(t-1) = b_0(y(t))e(t) + b_1(y(t-1))e(t-1), \quad (26)$$

com $b_0(y) = K_1(y)$ e $b_1(y) = K_2(y) - K_1(y)$.

Observa-se que (26) possui exatamente o mesmo formato da equação de diferenças correspondente à função de transferência (16), e que os coeficientes b_i são calculados a partir do valor de y no instante $t-i$. Isso sugere uma maneira simples de generalizar um controlador LTI para se obter uma estrutura de controlador LPV: dada uma função de transferência

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{-i}}{Q(z^{-1})},$$

em que Q é um polinômio, transformam-se os n coeficientes b_i do numerador em funções de uma variável de *scheduling* p calculadas no instante $t-i$, resultando em um controlador de equação

$$u(t) = \frac{1}{Q(z^{-1})} \sum_{i=0}^{n-1} b_i(p(t-i))e(t-i). \quad (27)$$

Invertendo o raciocínio desenvolvido no exemplo do controlador PI LPV, é simples verificar que um controlador com a estrutura (27) possui uma representação em espaço de estados cujo diagrama de blocos possuirá a propriedade de que os ganhos multiplicam diretamente o erro e , tal como na Figura 3b. Assim, caso o controlador seja capaz de fornecer um erro de seguimento nulo para referências constantes, as matrizes do sistema em malha fechada linearizado não dependerão das derivadas dos seus ganhos.

Se as funções b_i forem expressas como uma combinação linear de um conjunto de funções $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

$$b_i(p) = \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} f_j(p),$$

(27) se torna

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i))e(t-i). \quad (28)$$

Essa equação possui o mesmo formato que (8), e portanto o problema de identificação da matriz de parâmetros Θ pode ser resolvido pelo método de mínimos quadrados. Assim, a estrutura (28) será adotada daqui em diante para o projeto de controladores LPV pelo método VRFT.

3.2 Descrição do método

O método VRFT para controladores LPV busca resolver um problema semelhante ao descrito na Seção 2.3: a partir de dados do sinal de controle u , da saída y e de uma variável de *scheduling* p coletados de uma planta (possivelmente não linear) cujo modelo é desconhecido, determinar os parâmetros de um controlador LPV de estrutura (28) que tornarão a resposta do sistema em malha fechada a um determinado sinal de referência r o mais próximo possível de um modelo de referência linear $T_d(z)$. Mais precisamente, uma vez definidos o polinômio Q , o número n de coeficientes b_i e o conjunto de funções $\{f_j : 1 \leq j \leq m\}$ do controlador, o objetivo do projeto é calcular a matriz Θ que minimiza

$$J_y^{LPV}(\Theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_{\Theta}(t) - y_d(t)]^2, \quad (29)$$

em que y_{Θ} é a resposta do sistema em malha fechada ao sinal de referência r com o controlador de parâmetros Θ , e $y_d(t) = T_d(z)r(t)$ é a resposta correspondente ao modelo de referência especificado.

A ideia principal do VRFT consiste em aproximar esse problema por outro muito mais simples de ser resolvido, equivalente à identificação do controlador. Para isso, calcula-se o erro virtual $\bar{e}(t) = \frac{1-T_d(z)}{T_d(z)}y(t)$, que corresponde ao sinal que teria sido aplicado na entrada do controlador caso o conjunto de dados $\{u(t), y(t), p(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$ tivesse sido coletado em malha fechada com o sistema operando de acordo com o modelo de referência. Deseja-se então determinar os parâmetros do controlador com os quais a sua resposta ao sinal \bar{e} se aproxima ao máximo de u . Dessa forma, o projeto do controlador LPV pelo método VRFT é feito buscando Θ que minimiza

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z) \left(u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \right) \right]^2. \quad (30)$$

Este critério é equivalente ao proposto por (FORMENTIN; SAVARESI, 2011), diferindo apenas na maneira em que foi definida a estrutura do controlador.

Assim como no caso LTI, inclui-se no critério um filtro $L(z)$ para tentar aproximar a solução de (30) daquela de (29). Embora a teoria que justifica a expressão do filtro (15) se baseie na hipótese de que tanto a planta quanto o controlador são sistemas lineares, constatou-se a partir de simulações que o uso desse filtro apresenta bons resultados para o projeto de controladores LPV com dados coletados de plantas não lineares.¹

A equação (30) pode ser reduzida ao formato de (10) manipulando o termo entre colchetes. Para isso, começa-se reescrevendo-a como

$$\begin{aligned} J_{VR}^{LPV}(\Theta) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z)u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} [f_j(p(t-i))\bar{e}(t-i)] \right]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z)u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} z^{-i} \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} [f_j(p(t))\bar{e}(t)] \right]^2. \end{aligned}$$

¹Um filtro alternativo é proposto por (FORMENTIN; SAVARESI, 2011), o qual busca igualar as matrizes Hessianas dos critérios (29) e (30). A utilização desse filtro, no entanto, exige que sejam realizados experimentos adicionais na planta.

Definem-se então os sinais filtrados

$$\begin{aligned}\alpha_j(t) &= \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} [f_j(p(t))\bar{e}(t)] \\ u_L(t) &= L(z)u(t).\end{aligned}$$

Com essa nova notação, o critério se torna

$$\begin{aligned}J_{VR}^{LPV}(\Theta) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[u_L(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} z^{-i} \alpha_j(t) \right]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[u_L(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \alpha_j(t-i) \right]^2.\end{aligned}$$

Finalmente, definindo $\Psi_{ij}(t) = \alpha_j(t-i)$ e usando o conceito de produto interno de matrizes, obtém-se

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u_L(t) - \langle \Theta, \Psi(t) \rangle]^2. \quad (31)$$

Portanto, o projeto de um controlador LPV pelo método VRFT é feito de acordo com os seguintes passos:

1. Realizar um experimento na planta, coletando dados $\{u(t), y(t), p(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$.
2. Definir a estrutura do controlador LPV (Q , n e o conjunto $\{f_j : 1 \leq j \leq m\}$), o modelo de referência $T_d(z)$ e o filtro $L(z)$.
3. Calcular o erro virtual $\bar{e}(t) = \frac{1-T_d(z)}{T_d(z)}y(t)$ e os sinais $\alpha_j(t) = \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} [f_j(p(t))\bar{e}(t)]$ e $u_L(t) = L(z)u(t)$.
4. Montar a matriz regressora $\Psi(t)$ tal que $\Psi_{ij}(t) = \alpha_j(t-i)$.
5. Calcular a matriz Θ que minimiza (31).

4 ESTUDOS DE CASO

Para ilustrar a aplicação do método VRFT LPV, são desenvolvidos dois estudos de caso. Na Seção 4.1, considera-se o controle de uma planta descrita por um modelo LPV, parametrizada por um sinal externo p . O controlador desenvolvido utiliza esse mesmo sinal como variável de *scheduling*. Já na Seção 4.2, é feito o controle de um sistema não linear usando a sua saída y como variável de *scheduling* do controlador. Todos os ensaios foram realizados em simulações numéricas.

4.1 Sinal externo como variável de *scheduling*

Considera-se uma planta descrita pela equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + y(t) = u(t),$$

em que y é a saída, u é o sinal de controle e p é uma entrada do sistema que pode ser medida mas não manipulada para fins de controle, que será usada como variável de *scheduling* do controlador. Esse modelo corresponde a um sistema LPV de segunda ordem cujo fator de amortecimento é determinado pelo valor de p . Considera-se que p pode variar entre 0,6 e 1,4. Deseja-se projetar um controlador LPV que forneça uma resposta ao salto em malha fechada com tempo de acomodação de 3 s e sem sobrepasso, independentemente do valor de p .

O primeiro passo para o projeto de um controlador pelo método VRFT é a coleta de dados. Para isso, a planta foi simulada em malha aberta aplicando um sinal de controle u na forma de uma onda quadrada de período 20 s e um sinal p senoidal oscilando entre 0,4 e 1,6 com período 90 s. Foram coletadas 1350 amostras dos sinais de u , y e p com um tempo de amostragem de 0,2 s. Os resultados dessa coleta são mostrados na Figura 4. Percebe-se claramente que y oscila mais quanto menor for p .

Em seguida, é necessário escolher a estrutura do controlador. Optou-se por utilizar uma estrutura PID LPV, de equação

$$u(t) = u(t-1) + b_0(p(t))e(t) + b_1(p(t-1))e(t-1) + b_2(p(t-2))e(t-2),$$

o que corresponde a $Q(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ e $n = 3$. Os coeficientes b_i foram definidos como polinômios de primeiro grau de p , ou seja, combinações lineares das funções

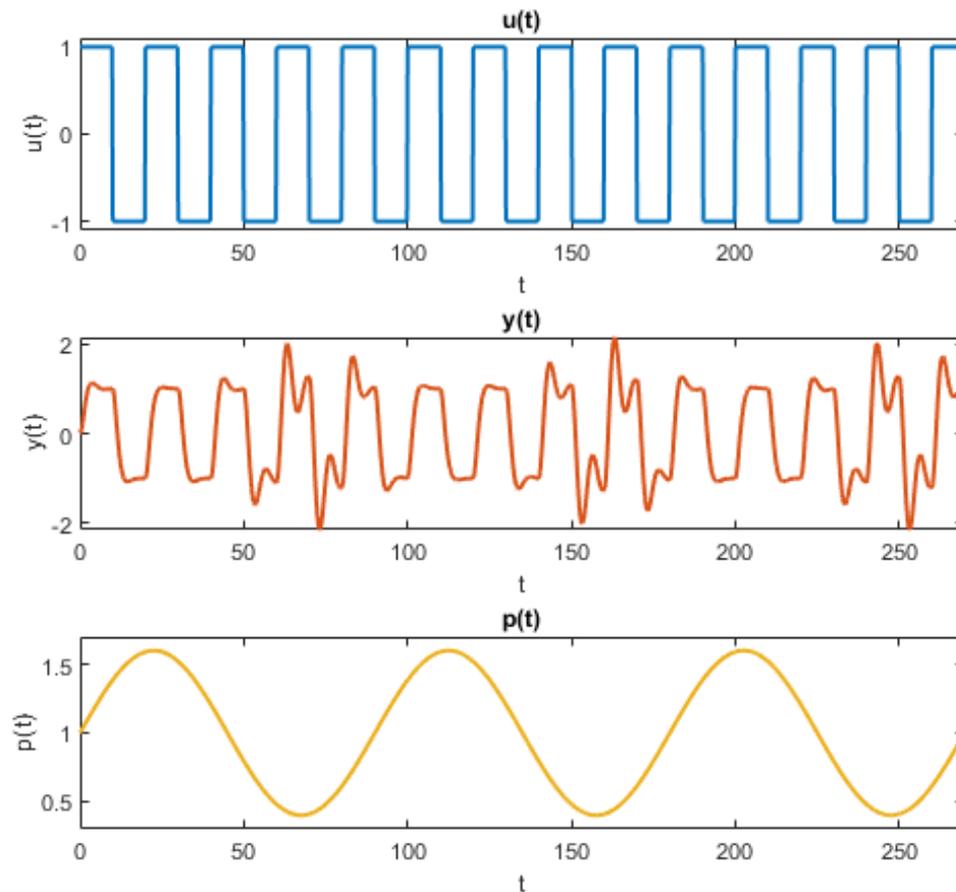
$$f_1(p) = 1$$

$$f_2(p) = p.$$

Escolheu-se como modelo de referência a função de transferência

$$T_d(z) = \frac{0.0615(z + 0.77)}{(z - 0.67)^2}$$

Figura 4: Dados coletados em malha aberta aplicando um sinal p senoidal.



Fonte: elaborada pelo autor

que fornece uma resposta ao salto criticamente amortecida com tempo de acomodação de 15 amostras, ou 3 s. Além disso, como o sinal u aplicado na coleta de dados e o sinal de referência que será aplicado em malha fechada são ondas quadradas, foi utilizado o filtro

$$L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z)).$$

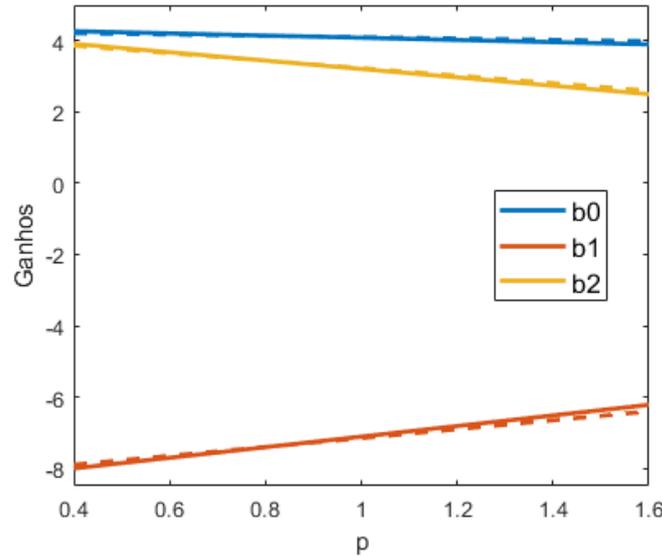
Uma vez feitas todas as especificações necessárias, os parâmetros do controlador são calculados resolvendo o problema de otimização (31). A partir dos dados coletados, obteve-se

$$\Theta = \begin{bmatrix} 4,391 & -0,3075 \\ -8,600 & 1,487 \\ 4,384 & -1,178 \end{bmatrix}.$$

A Figura 5 mostra, em linha contínua, como variam os ganhos b_0 , b_1 e b_2 em função de p .

Uma alternativa ao uso do método VRFT LPV para o projeto desse controlador é realizar dois experimentos de coleta de dados com valores constantes de p diferentes. Para cada um desses conjuntos de dados, utiliza-se o VRFT para projetar um controlador PID; em seguida, a matriz de parâmetros Θ é calculada interpolando os ganhos b_0 , b_1 e b_2

Figura 5: Ganhos dos controladores PID LPV em função de p . Os ganhos do controlador projetado usando o método VRFT LPV são traçados em linha contínua, enquanto os do controlador projetado usando o procedimento de interpolação são traçados em linha pontilhada.



Fonte: elaborada pelo autor

obtidos para os dois valores de p . Para realizar esse procedimento, foram feitas duas novas simulações em malha aberta, aplicando os sinais $p(t) = 0,7$ e $p(t) = 1,3$, cujos resultados são mostrados na Figura 6. Utilizando esses dados junto ao modelo de referência e ao filtro definidos anteriormente, obteve-se a matriz

$$\Theta = \begin{bmatrix} 4,290 & -0,1909 \\ -8,404 & 1,250 \\ 4,286 & -1,057 \end{bmatrix}.$$

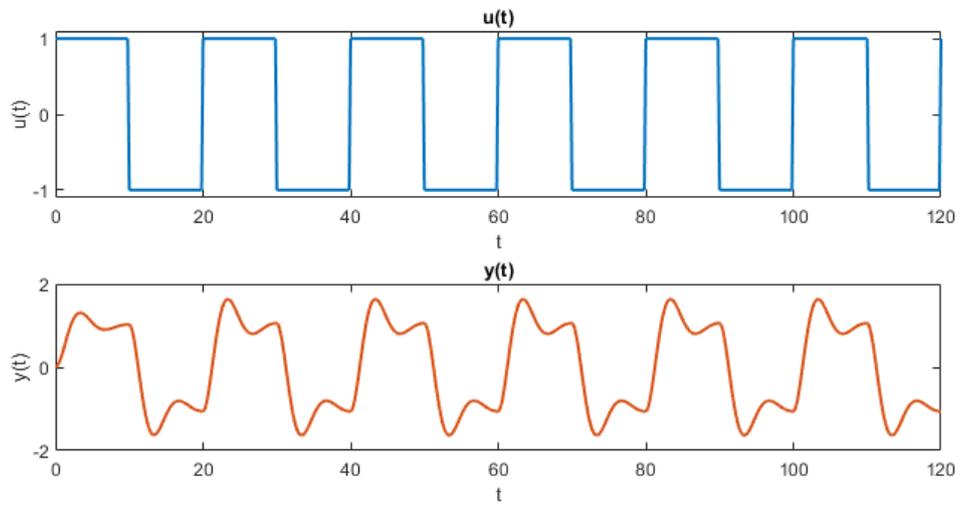
A variação dos ganhos b_0 , b_1 e b_2 em função de p com esses parâmetros é mostrada em linha tracejada na Figura 5.

Para comparar a performance dos controladores LPV projetados com a de um controlador LTI, utilizou-se o VRFT para projetar um controlador PID de ganhos constantes a partir dos dados de u e y mostrados na Figura 4, usando as mesmas funções de transferência $T_d(z)$ e $L(z)$. Os ganhos calculados nesse caso foram

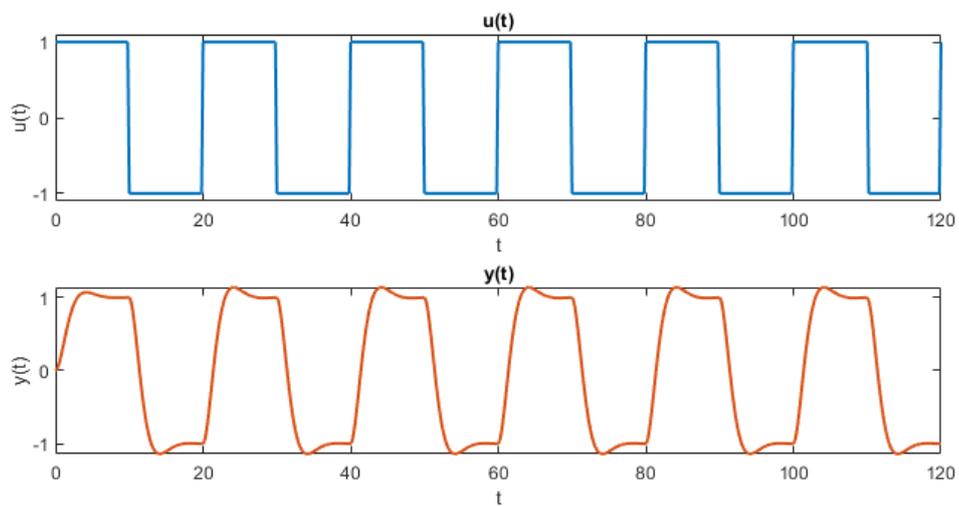
$$\begin{aligned} b_0 &= 4,134 \\ b_1 &= -7,475 \\ b_2 &= 3,516. \end{aligned}$$

Esses três controladores foram simulados em malha fechada aplicando saltos na referência a cada 10 s e um sinal p senoidal de período 80 s entre 0,4 e 1,6. Os resultados dessa simulação são mostrados nas figuras 7, 8 e 9. A referência r é mostrada em azul, e a saída y , em vermelho. Em amarelo tracejado é mostra-se curva desejada de y , isto é, a saída y_d que seria obtida se o sistema em malha fechada se comportasse exatamente conforme o modelo de referência $T_d(z)$. O sinal p aplicado nessa simulação é mostrado no gráfico abaixo, em roxo.

Figura 6: Dados coletados em malha aberta aplicando sinais p constantes.



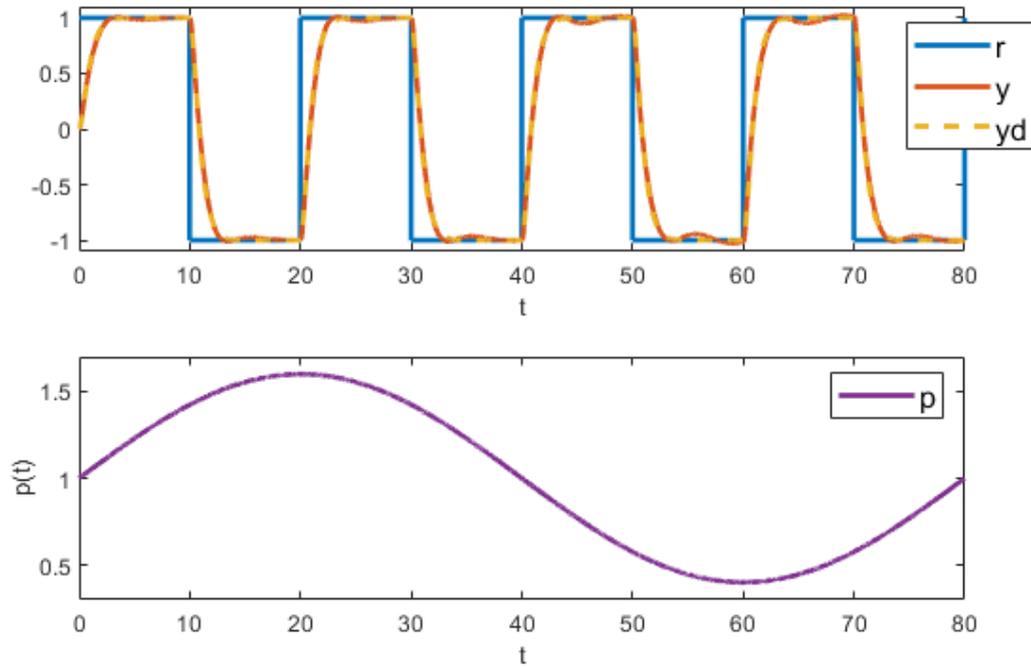
(a) $p(t) = 0,7$



(b) $p(t) = 1,3$

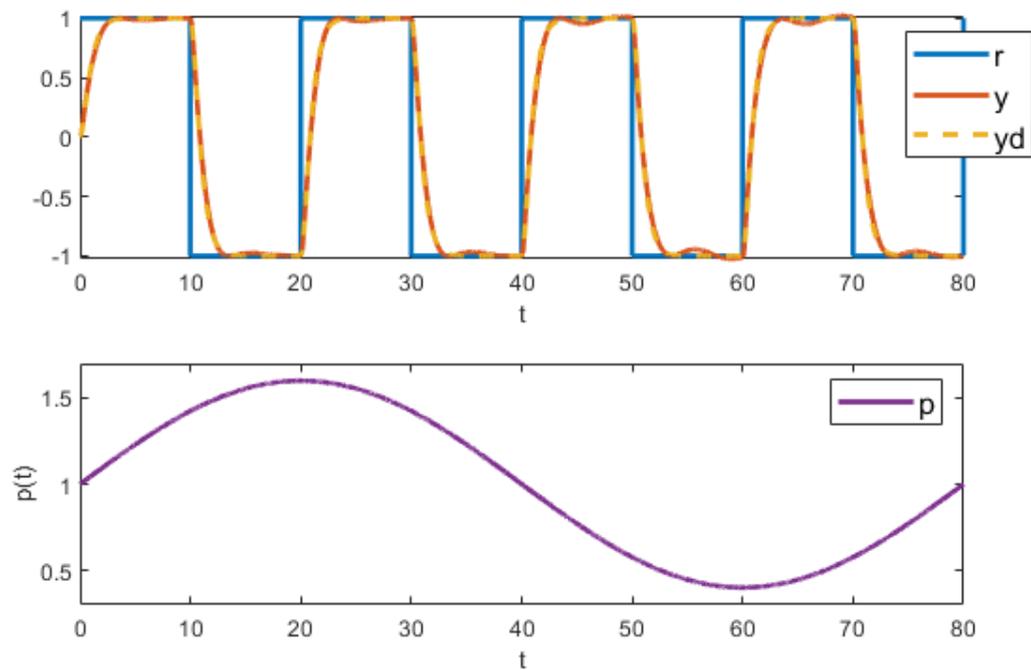
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 7: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do método VRFT LPV.



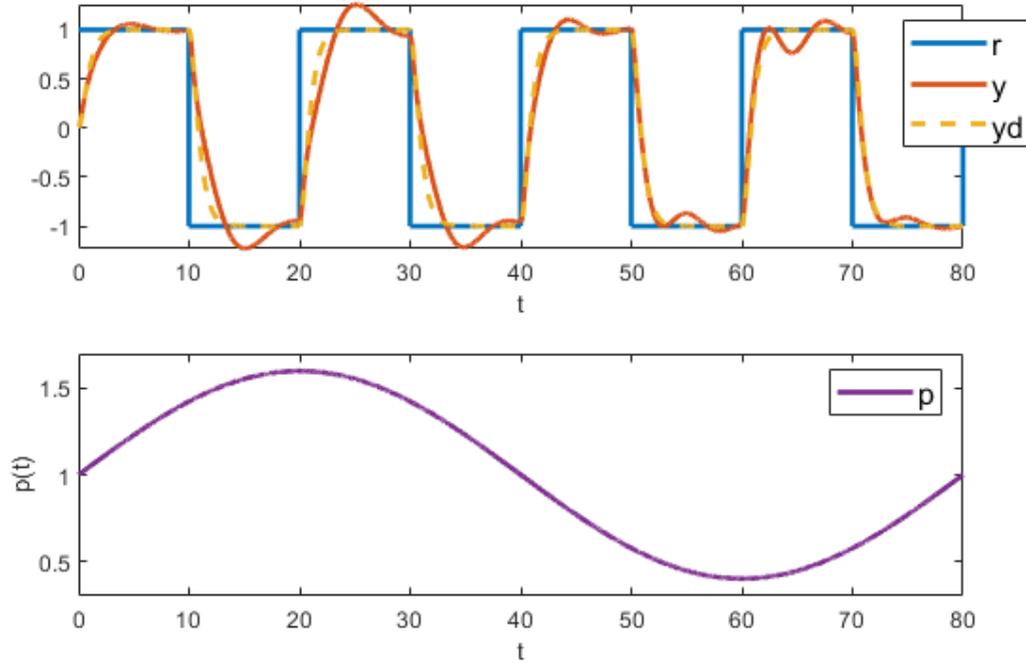
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 8: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do procedimento de interpolação.



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 9: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID.



Fonte: elaborada pelo autor

Nota-se que os desempenhos dos dois controladores LPV projetados são praticamente idênticos. Com ambos, a resposta do sistema em malha fechada foi muito próxima do modelo de referência, apesar da variação de p . Por outro lado, a resposta do sistema com o controlador PID de ganhos constantes varia significativamente com o valor de p , apresentando sobrepasso e oscilações. Para quantificar o quão bem os controladores conseguiram aproximar o modelo de referência, comparou-se o valor de \hat{J}_y^{LPV} , aproximação finita do critério (29), nos três casos.¹ Para o controlador LPV projetado pelo método VRFT LPV, obteve-se $\hat{J}_y^{LPV} = 7,12 \times 10^{-4}$; para o controlador LPV projetado pelo procedimento de interpolação, $\hat{J}_y^{LPV} = 6,98 \times 10^{-4}$; já para o controlador PID, $\hat{J}_y^{LPV} = 1,52 \times 10^{-2}$.

4.2 Saída da planta como variável de *scheduling*

Para ilustrar o projeto de um controlador LPV parametrizado pela saída da planta, considerou-se o sistema

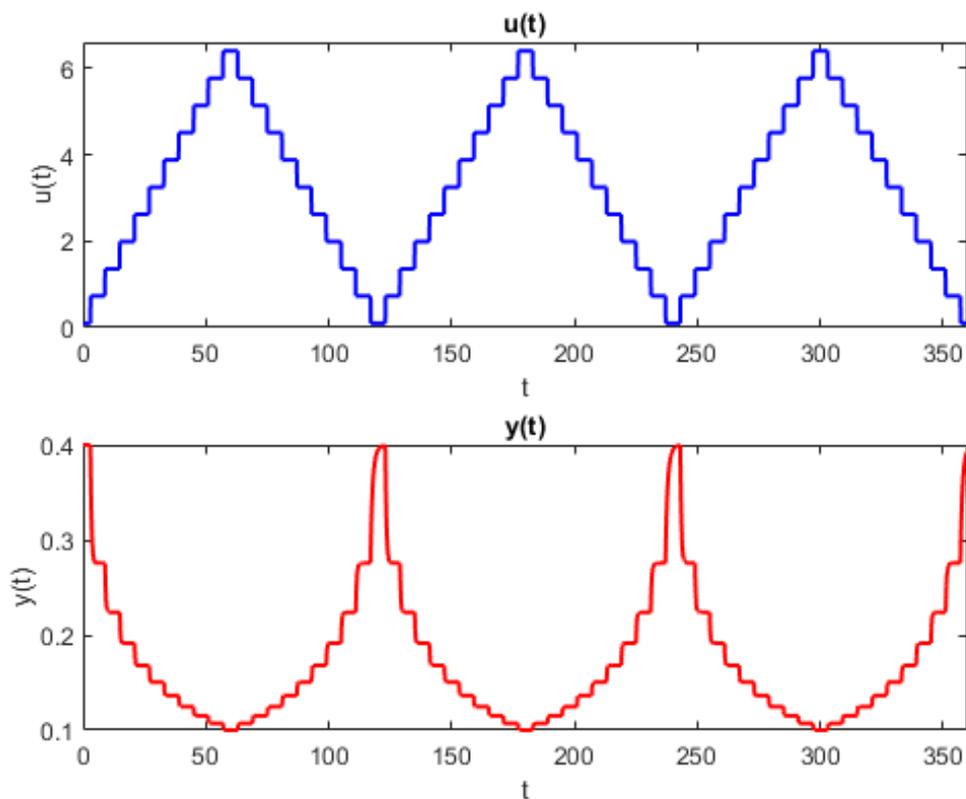
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t)^2 + (1 - x_1(t))u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2 - x_2(t)u(t) \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

¹Embora o projeto do controlador PID de ganhos constantes seja feito utilizando o método VRFT tradicional, esse controlador pode ser tratado como o caso trivial de um controlador LPV, para o qual a matriz Θ se reduziria a um vetor.

Este modelo pode descrever um reator do tipo *continuous stirred-tank reactor* (CSTR) de volume constante, com unidades normalizadas, no qual a variável de controle u corresponderia à vazão de entrada e de saída do tanque, e a saída y corresponderia à concentração da substância produzida na saída do reator (ROFFEL; BETLEM, 2007). Fazendo u variar entre 0 e ∞ , y varia entre 0,5 e 0. Tendo em vista esse comportamento, deseja-se projetar um controlador para que y siga uma referência r constante entre 0,1 e 0,4.

Para realizar a coleta de dados, foi feita uma simulação do processo em malha aberta aplicando um sinal de controle correspondente a uma sequência de degraus a cada 6 s, de maneira a fazer com que y assumia valores na faixa de 0,1 a 0,4. Foram coletadas 3600 amostras dos sinais u e y com um tempo de amostragem de 0,1 s, conforme mostrado na Figura 10. Observa-se que tanto o módulo do ganho estático do sistema quanto o seu tempo de acomodação aumentam significativamente na medida em que y aumenta, o que sugere que um controlador LTI não será capaz de fornecer uma resposta satisfatória em toda a faixa de operação.

Figura 10: Dados coletados em malha aberta para y variando entre 0,1 e 0,4.



Fonte: elaborada pelo autor

Para o controlador, foi escolhida uma estrutura de PID LPV com os ganhos dados por polinômios de segundo grau. Assim, a equação do controlador é

$$u(t) = u(t-1) + b_0(y(t))e(t) + b_1(y(t-1))e(t-1) + b_2(y(t-2))e(t-2),$$

correspondente a $Q(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ e $n = 3$, em que os coeficientes b_i são combinações

lineares das funções

$$\begin{aligned} f_1(y) &= 1 \\ f_2(y) &= y \\ f_3(y) &= y^2. \end{aligned}$$

O modelo de referência escolhido foi

$$T_d(z) = \frac{0.0172(z+0.88)}{(z-0.82)^2},$$

cuja resposta ao salto possui tempo de acomodação de 30 amostras (3 s) sem sobrepasso. Finalmente, como tanto o sinal u aplicado na coleta de dados quanto o sinal de referência que será aplicado em malha fechada são degraus, foi utilizado o filtro

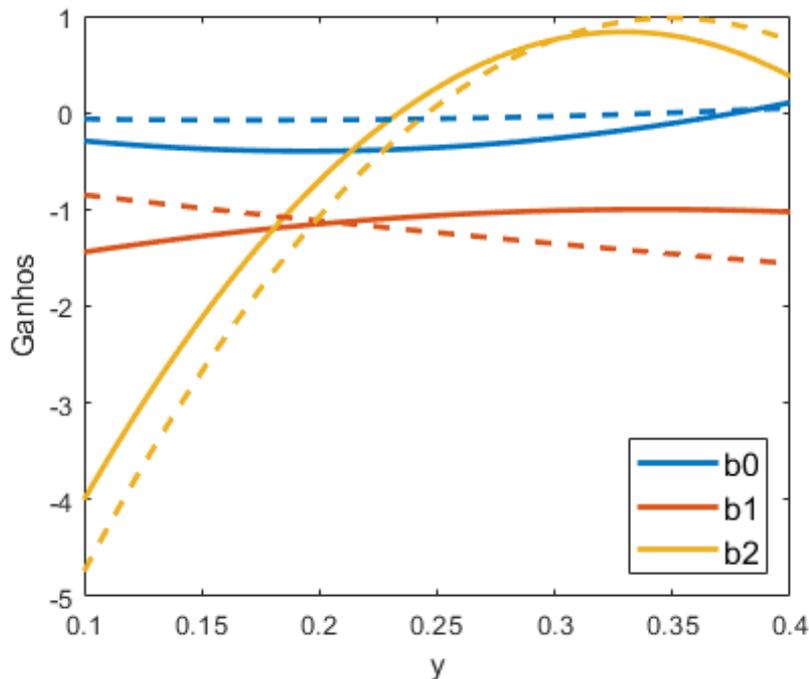
$$L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z)).$$

Com essas definições, obteve-se, aplicando o método VRFT LPV, a matriz de parâmetros do controlador

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0,0516 & -4,615 & 11,87 \\ -1,883 & 5,186 & -7,606 \\ -9,141 & 60,610 & -92,05 \end{bmatrix}.$$

A variação dos ganhos b_0 , b_1 e b_2 em função de y é mostrada em linha contínua na Figura 11.

Figura 11: *Ganhos dos controladores PID LPV em função de y . Os ganhos do controlador projetado usando o método VRFT LPV são traçados em linha contínua, enquanto os do controlador projetado usando o procedimento de interpolação são traçados em linha pontilhada.*



Fonte: elaborada pelo autor

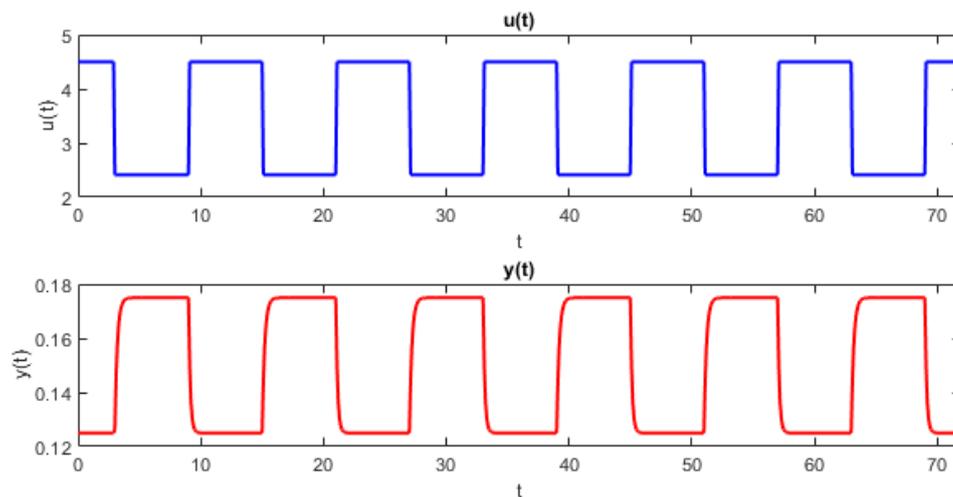
Assim como na Seção 4.1, um conjunto alternativo de parâmetros para esse controlador LPV foi calculado a partir da interpolação dos ganhos de controladores PID projetados

pelo método VRFT para pontos de operação específicos da planta. Para isso, foram feitas três simulações em malha aberta aplicando como sinal de controle ondas quadradas, de maneira a manter a saída y em torno dos valores 0,15, 0,25 e 0,35, conforme mostrado na Figura 12. A partir desses dados e das funções de transferência $T_d(z)$ e $L(z)$ definidas anteriormente, a matriz de parâmetros calculada foi

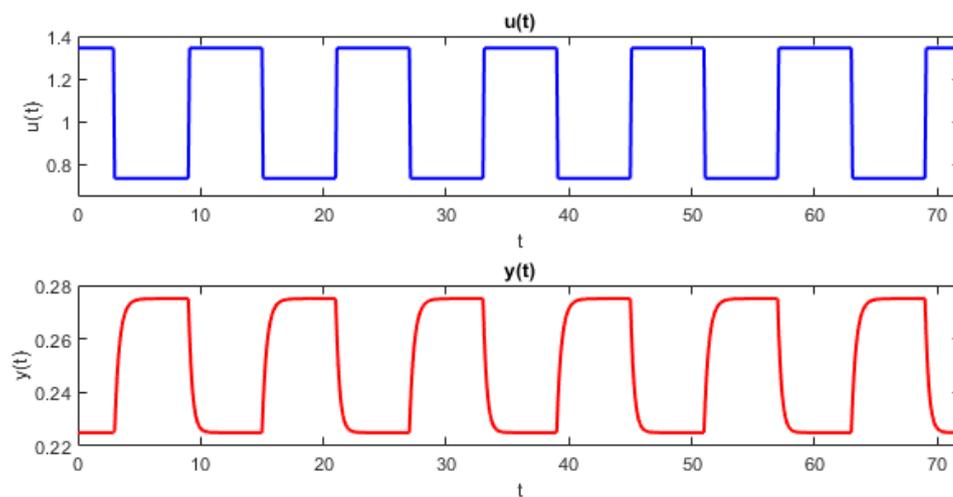
$$\Theta = \begin{bmatrix} -0,0065 & -0,8249 & 2,408 \\ -0,5508 & -3,144 & 1,563 \\ -10,25 & 64,31 & -92,08 \end{bmatrix}.$$

O gráfico dos ganhos b_0 , b_1 e b_2 em função de y para esses parâmetros é mostrado em linha tracejada na Figura 11.

Figura 12: Dados coletados em malha aberta para y próximo a um ponto de operação específico.



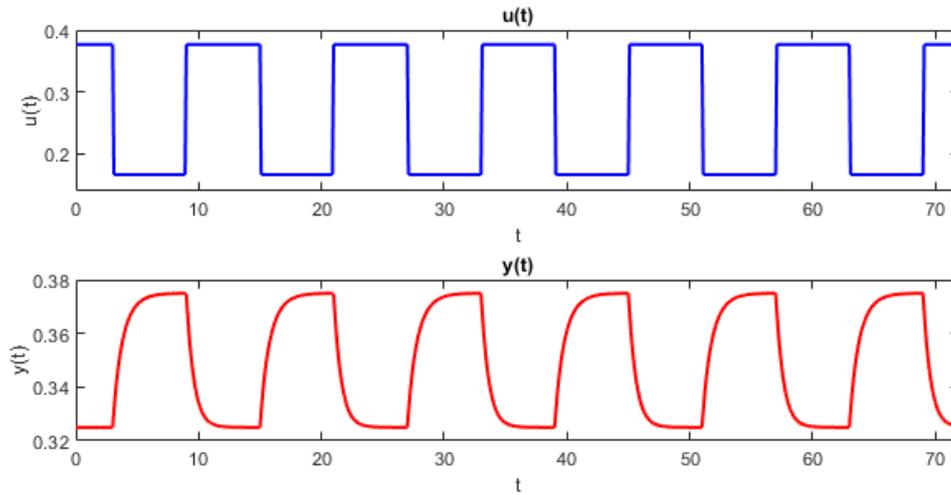
(a) $y(t) \approx 0,15$



(b) $y(t) \approx 0,25$

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 12: Dados coletados em malha aberta para y próximo a um ponto de operação específico (continuação).



(c) $y(t) \approx 0,35$

Fonte: elaborada pelo autor

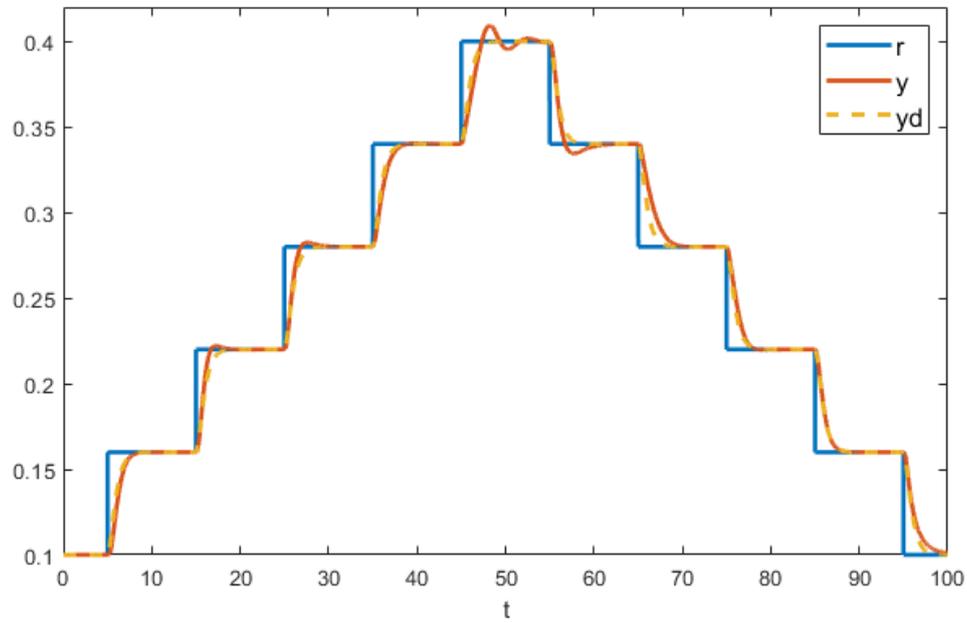
Projitou-se ainda um controlador PID de ganhos constantes com base nos dados coletados no ensaio mostrado na Figura 10. Novamente, foram utilizados o método VRFT e as mesmas $T_d(z)$ e $L(z)$ definidas para o projeto dos controladores LPV. Os ganhos obtidos para esse controlador foram

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,2721 \\ b_1 &= -1,8803 \\ b_2 &= 0,4939. \end{aligned}$$

Os três controladores foram simulados em malha fechada aplicando um sinal de referência variando entre 0,1 e 0,4 em saltos de amplitude 0,06. Os resultados dessa simulação são mostrados nas figuras 13, 14 e 15. A referência r é mostrada em azul, a saída y em vermelho e a saída y_d que seria obtida se o sistema em malha fechada se comportasse exatamente conforme o modelo de referência $T_d(z)$ em amarelo tracejado.

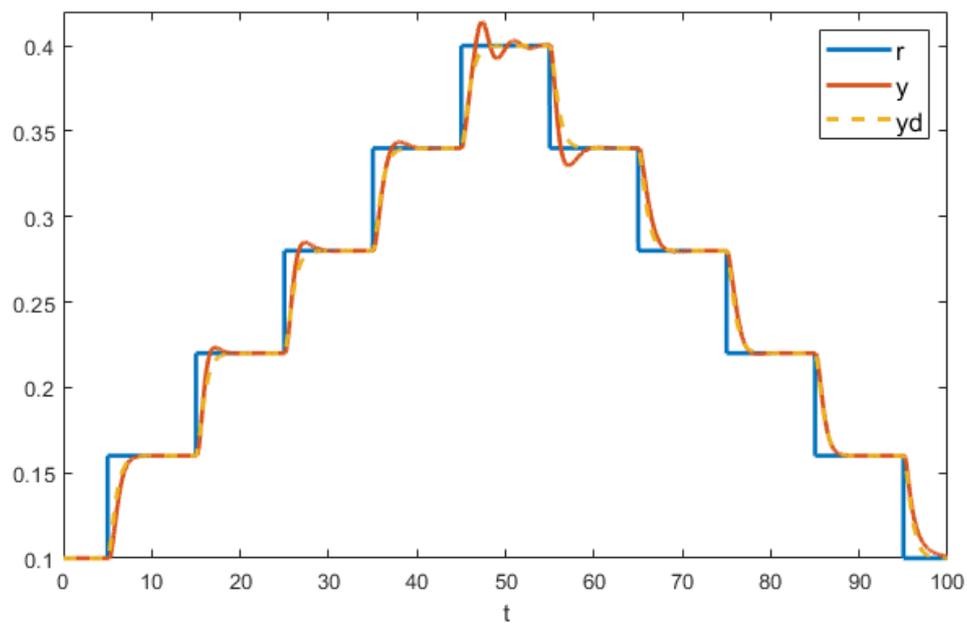
Observa-se que a resposta do sistema em malha fechada, com o controlador PID tradicional, varia significativamente com o ponto de operação da planta. Para pequenos valores de y , essa resposta é muito mais lenta do que o modelo de referência $T_d(z)$, enquanto que, para grandes valores de y , ela é excessivamente oscilatória. Esse fenômeno não ocorre com os dois controladores LPV, cujas respostas são muito semelhantes. Nesses casos, apesar das respostas ao salto ainda variarem com o ponto de operação, elas se aproximam de forma mais homogênea do modelo de referência. Comparando o valor de \hat{J}_y^{LPV} para os três controladores, obteve-se $\hat{J}_y^{LPV} = 1,17 \times 10^{-5}$ para o controlador projetado pelo método VRFT LPV, $\hat{J}_y^{LPV} = 1,49 \times 10^{-5}$ para o controlador LPV projetado pelo procedimento de interpolação e $\hat{J}_y^{LPV} = 1,56 \times 10^{-4}$ para o controlador PID de ganhos constantes.

Figura 13: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do método VRFT LPV.



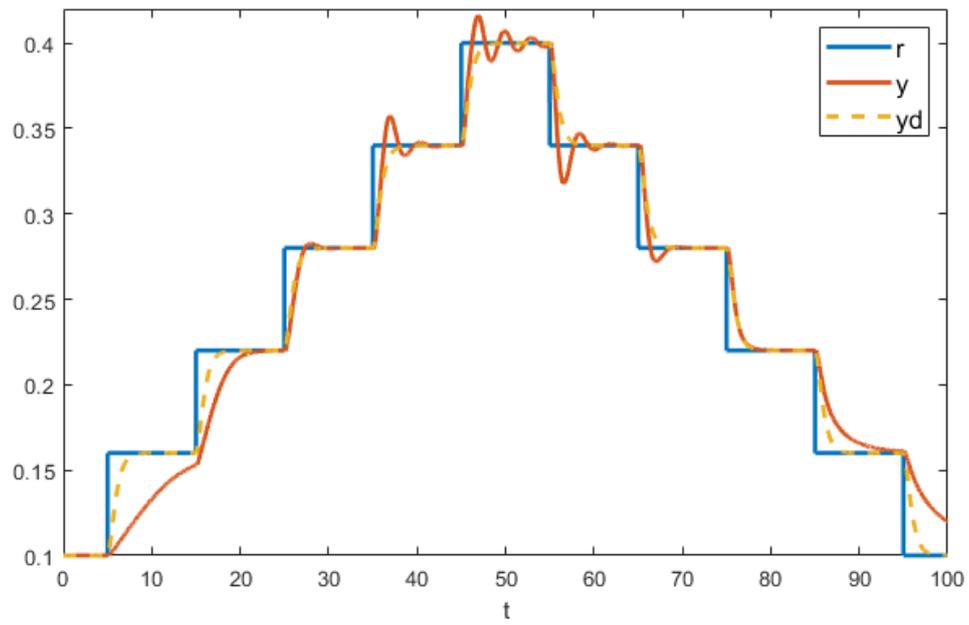
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 14: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID LPV projetado por meio do procedimento de interpolação.



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 15: Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID.



Fonte: elaborada pelo autor

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentada uma generalização do método VRFT para o projeto de controladores LPV parametrizados linearmente. Esse método é baseado na formulação de um problema de otimização equivalente à identificação do controlador, o qual pode ser resolvido por um método de mínimos quadrados. Ele possui ainda a vantagem de necessitar da realização de apenas um experimento de coleta de dados na planta.

Usando esse método, foram projetados controladores PID LPV para dois processos que não podem ser bem representados por um modelo LTI, utilizando como variável de *scheduling* tanto um sinal externo quanto a saída da planta. Nos dois casos, o controlador LPV apresentou um desempenho muito mais próximo do especificado pelo modelo de referência do que um controlador PID projetado a partir dos mesmos dados. Os controladores projetados pelo método VRFT LPV foram também comparados com controladores LPV projetados fazendo a interpolação dos ganhos de controladores LTI sintonizados para diferentes pontos de operação da planta. As simulações mostraram que os dois procedimentos fornecem resultados muito semelhantes; no entanto, o projeto pelo método VRFT LPV é mais simples, pois os parâmetros do controlador são calculados diretamente a partir de um único conjunto de dados.

É importante enfatizar que não se pode esperar que esse método produza controladores satisfatórios para qualquer conjunto de especificações e de dados. Embora o modelo matemático da planta não seja usado em nenhuma etapa do projeto, não é possível projetar um controlador desconhecendo completamente o processo que se deseja controlar. Deve-se buscar no mínimo saber se a estrutura de controlador escolhida é capaz de fornecer uma resposta semelhante ao modelo de referência. Ainda, ao se realizar a coleta de dados, é fundamental garantir que o sinal utilizado como variável de *scheduling* percorra toda a faixa de valores de interesse. Caso contrário, os ganhos do controlador para alguns pontos de operação seriam calculados por uma extrapolação, o que provavelmente resultaria em uma performance diferente da desejada.

Ao longo deste trabalho, considerou-se apenas o projeto de controladores LPV parametrizados por uma única variável de *scheduling*. No entanto, o método proposto pode ser imediatamente generalizado para o caso multivariável. Além disso, todas as simulações foram realizadas sem adição de ruído. Quando os dados são coletados na presença de ruído, introduz-se um erro de viés na identificação do controlador, que pode ser eliminado usando um método de variável instrumental. Isso deve ser levado em conta em trabalhos futuros em que o projeto do controlador for feito com base em dados coletados de sistemas físicos reais.

REFERÊNCIAS

- BAMIEH, B.; GIARRE, L. Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, Wiley Online Library, v. 12, n. 9, p. 841–853, 2002.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. *Data-driven controller design: the H2 approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- CAMPESTRINI, L. et al. Data-driven model reference control design by prediction error identification. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 354, n. 6, p. 2628–2647, 2017.
- CAMPI, M.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT): a new direct approach to the design of feedback controllers. In: IEEE. PROCEEDINGS of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187). [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 623–629.
- FORMENTIN, S.; PIGA, D. et al. Direct learning of LPV controllers from data. *Automatica*, Elsevier, v. 65, p. 98–110, 2016.
- FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. M. Virtual reference feedback tuning for linear parameter-varying systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 10219–10224, 2011.
- GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations* Johns Hopkins University Press. *Baltimore and London*, 1996.
- HJALMARSSON, H. et al. Iterative feedback tuning: theory and applications. *IEEE control systems magazine*, IEEE, v. 18, n. 4, p. 26–41, 1998.
- KAMINER, I. et al. A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, Elsevier, v. 31, n. 8, p. 1185–1191, 1995.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3.
- LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 73, n. 11, p. 1001–1025, 2000.
- OGATA, K.; YANG, Y. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice hall, 2002. v. 4.
- ROFFEL, B.; BETLEM, B. *Process dynamics and control: modeling for control and prediction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System identification*. [S.l.]: Prentice-Hall International, 1989.

TÓTH, R. *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 403.