

## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA FISSURAÇÃO EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DE UM MODELO INCORPORADO**

**Daiane de Sena Brisotto** – [daiabrisotto@yahoo.com.br](mailto:daiabrisotto@yahoo.com.br)

**Virgínia Maria Rosito d'Avila** – [vichy@ufrgs.br](mailto:vichy@ufrgs.br)

**Eduardo Bittencourt** – [bittenco@cpgec.ufrgs.br](mailto:bittenco@cpgec.ufrgs.br)

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

Porto Alegre, RS, Brasil

**Abstract.** *Na análise de estruturas de concreto, via método dos elementos finitos, as fissuras podem ser representadas por três modelos diferentes: discreto, distribuído ou incorporado. Na representação de forma discreta, as fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamentos entre dois elementos adjacentes. Já na simulação de forma distribuída, o material fissurado é tratado como contínuo. Recentemente, modelos de fissura incorporada têm sido desenvolvidos como uma alternativa para representar a fissuração em estruturas de concreto simples e armado. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. Neste trabalho, um modelo de fissura incorporada que considera a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento é apresentado. Um modelo de transferência de tensão por aderência é usado para incluir esta contribuição da armadura. Para representar as barras de aço da armadura, é utilizado um modelo incorporado que permite a disposição arbitrária das barras no interior dos elementos de concreto. Por fim, as previsões numéricas obtidas são comparadas com resultados experimentais com o objetivo de comprovar a eficácia do modelo proposto.*

**Keywords:** *Concreto Armado, Fissura Incorporada, Elementos Finitos.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Devido à natureza localizada, a correta modelagem da fissura é um tópico difícil, pois trata da descontinuidade no campo dos deslocamentos. Em estruturas de concreto armado, esta dificuldade aumenta devido ao complexo comportamento do concreto e do aço.

Em uma análise via Método dos Elementos Finitos (MEF), as fissuras podem ser representadas de formas distintas. Na representação de forma discreta, as fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamentos entre elementos. Estes modelos são uma boa técnica a ser empregada quando existem poucas fissuras ao longo da peça, como em estruturas de concreto simples. Entretanto, em estruturas de concreto armado, aonde se desenvolvem várias fissuras espalhadas ao longo da peça, a malha de elementos finitos deve ser fina o suficiente para ter uma resolução adequada de todas as fissuras, resultando um grande custo computacional. Já nos modelos de fissuração distribuída, a fissura é modelada através de uma alteração na equação constitutiva do contínuo nas vizinhanças da fissura.

Embora sejam usados com sucesso na análise da maioria das estruturas de concreto armado, estes modelos apresentam algumas deficiências quando empregados para estudar situações de fraturamento localizado que ocorrem, principalmente, em estruturas de concreto simples. Recentemente, modelos de fissura incorporada foram desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado, pois reúnem os aspectos favoráveis das duas técnicas anteriores: não se necessita fazer um remalhamento e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões.

Outro aspecto importante na análise numérica é a escolha de qual modelo utilizar para simular o comportamento do material fissurado. Modelos semi-empíricos são baseados em resultados experimentais e a perfeita aderência entre o concreto e as barras de aço é considerada. Os modelos de transferência de tensão se baseiam na transferência de tensão, por aderência, entre o aço e o concreto. O aparecimento da primeira fissura ocorre quando a tensão de tração no concreto supera o valor da resistência à tração. A formação de novas fissuras, até que uma configuração final seja estabelecida, está associada ao fato de se ter espaço suficiente para transferir tensão por aderência entre os materiais.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de fissura incorporada capaz de simular o comportamento de peças de concreto armado fletidas. Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen (1977,1979). O material fissurado é representado através de um modelo de transferência de tensão por aderência. Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

## 2. MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERÊNCIA

A seguir, é apresentado um breve resumo do Modelo de Transferência de Tensão por Aderência (Russo & Romano, 1992; Russo et al., 1990).

Um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente ocorre quando as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados. O escorregamento está associado à degradação do vínculo entre os materiais e ao aparecimento de fissuras no entorno das barras de aço. Basicamente, estas fissuras são devidas à tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em uma certa seção, a tensão no concreto, nesta seção, deve ser igual à resistência à tração do concreto, fazendo com que, conseqüentemente, a deformação de fissuração do concreto,  $\epsilon_{ct}$ , seja atingida. Novas distribuições de tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração. Assim, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado.

Antes de prosseguir, cabe fazer alguns comentários à respeito da formulação empregada. O problema que se está querendo resolver não pode ser resolvido de forma explícita para todas as situações. Para os casos que não existe solução explícita, o problema deve ser resolvido através de um processo iterativo, chegando-se a determinadas situações para as quais não existe solução. Assim, segundo FIB – Bulletin 10 (2000), é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da possível distribuição de deformações e escorregamento relativo ao longo do elemento antes de tentar resolver o problema. Em particular, a existência de um ponto ou região onde o escorregamento  $s$  e sua derivada são nulos ( $s=s'=0$ ) permite o uso de uma expressão explícita na solução do problema, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor. Assim, fazendo esta

avaliação prévia, é possível saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado em cada situação.

Considerando um trecho da peça entre duas fissuras consecutivas, de comprimento  $L$ , ver Fig. 1, dois comportamentos são possíveis, diretamente relacionados com o valor da carga externa e o comprimento da peça:

(a) comportamento de peça longa, caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente, e onde os dois materiais possuem a mesma deformação, Fig. 1(a);

(b) comportamento de peça curta caracterizado pelo fato de o aço e o concreto apresentarem deformações diferentes ao longo de todo o comprimento da peça, Fig. 1(b), e o escorregamento relativo entre os materiais é zero apenas no centro da peça devido à simetria.

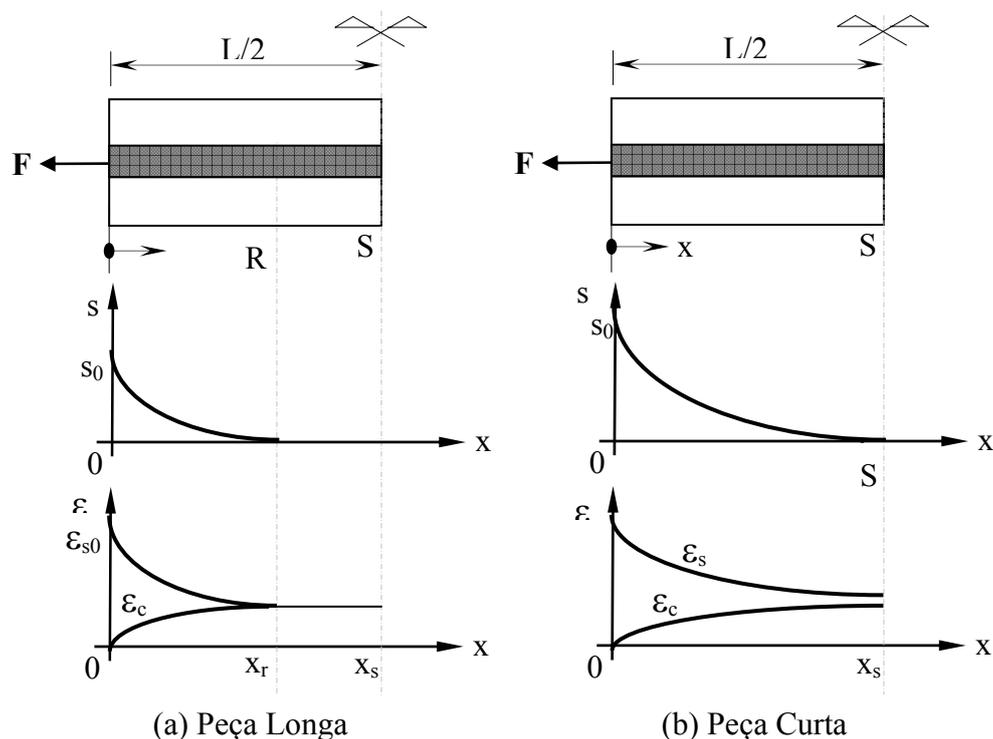


Figura 1 - Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço.

Para valores muito baixos de carga, o escorregamento se anula antes do eixo de simetria, como em peças longas. O elemento não irá fissurar se a deformação no concreto no ponto  $R$ , for menor que a deformação de fissuração. Um incremento de carga pode produzir duas respostas diferentes na peça:

a) Peça longa ( $\varepsilon_s = \varepsilon_c$  em  $x_R$ ): A deformação no concreto alcança o valor de fissuração,  $\varepsilon_{ct}$ , a uma distância até a extremidade carregada  $x_R \leq L/2$ . Neste caso,  $x_R = x_{Rcrack}$ , sendo  $x_{Rcrack}$  o comprimento requerido para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações (o denominado comprimento de transferência), dado por

$$x_{Rcrack} = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \left( \frac{\xi+1}{\xi} \right) \varepsilon_{ct} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{1-\alpha} \quad (1)$$

onde  $\xi = (E_s A_s) / (E_c A_c)$ .  $E_c$  e  $E_s$  são, respectivamente, os módulos de elasticidade do concreto e do aço.  $A_s$  é área de aço e  $A_c$  é área de concreto da seção transversal envolvida

na transferência de tensão.  $\gamma$  e  $\alpha$  são parâmetros que levam em consideração o tipo de relação *tensão de aderência x escorregamento* empregada (ver d'Avila (2003)). As primeiras fissuras se formam e a peça é subdividida em " $m$ " partes.

- b) Peça curta ( $\varepsilon_s \neq \varepsilon_c$  ao longo da peça): A deformação do concreto permanece menor que  $\varepsilon_{ct}$ , em  $x_R = L/2$ . Uma carga ainda maior deve ser aplicada para aumentar a deformação no concreto e a peça fissurar. Já que o valor de  $x_R$  não pode ir além de  $L/2$ , a primeira fissura aparecerá na seção de simetria quando  $\varepsilon_c = \varepsilon_{ct}$ . Assim, na fissuração, a peça é dividida em duas partes iguais.

As equações (2) e (3) mostram, de forma implícita, o escorregamento  $s$  como função de  $x$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{C}\right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad 0 \leq s < \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (2)$$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s \quad (3)$$

onde  $B$  e  $C$  são constantes de integração que dependem das condições de contorno.

No caso do comportamento de peça longa (Fig.1(a)), a constante de integração  $C$  é nula e o escorregamento  $s$  como função de  $x$  pode ser escrito de forma explícita

$$s = \left[ -((1-\alpha)/2)\sqrt{2\gamma}(x-B) \right]^{2/(1-\alpha)} \quad (4)$$

Finalmente, as deformações no aço e no concreto em função do escorregamento são dadas por

$$\varepsilon_s = \frac{\xi \varepsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (5)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\xi \varepsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (6)$$

onde  $\varepsilon_{s0}$  é a deformação na extremidade carregada.

Depois da formação das primeiras fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer, para um nível de carga ainda maior. O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração.

A diferença entre os alongamentos do aço e do concreto na metade da peça, é igual ao escorregamento da extremidade carregada,  $s_0$ . A abertura da fissura é dada por  $w = s_{01} + s_{02}$ , sendo  $s_{01}$  e  $s_{02}$  os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

### 3. O MODELO DE FISSURA INCORPORADA

#### 3.1 Modelo original de Dvorkin et al.

O modelo empregado neste trabalho, proposto por d'Avila (2003), foi baseado no modelo

original de fissura incorporada apresentado por Dvorkin et al. (1990)

Os três principais aspectos do modelo original de Dvorkin et al. são: 1) a localização de deformações envolve o elemento completo como domínio mínimo - forma-se apenas uma fissura por elemento; 2) considera-se a localização de deformações na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos, que passa pelo centro do elemento; 3) existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do concreto simples: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio.

O elemento finito usado é o *QMITC* (*Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components*). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional de cinco nós, ver Fig. 2(a), baseado no método de interpolação mista das componentes tensoriais (Dvorkin & Vassolo, 1989). Este elemento adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as deformações e realiza as duas interpolações em conjunto.

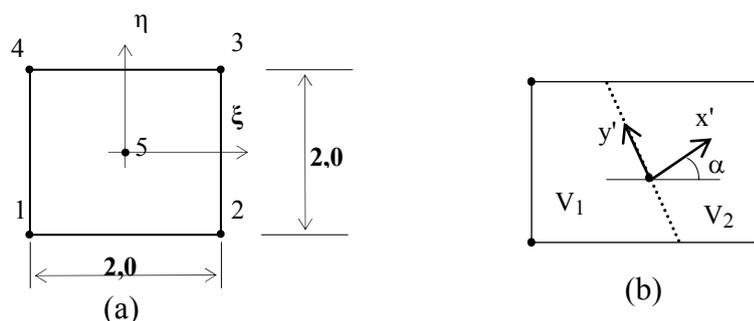


Figura 2 - a) Elemento QMITC; b) Elemento com a linha de descontinuidade.

Na Fig. 2(b), está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamentos - a fissura. A fissura, que passa pelo nó central (nó 5), divide o elemento em dois subdomínios:  $V_1$  e  $V_2$ .

A deformação incremental, para qualquer ponto em  $V_1$  ou  $V_2$ , é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{d} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{R}\mathbf{e}') = \mathbf{B}\mathbf{d}_N \quad (7)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento e  $\mathbf{d}_N$  é o deslocamento associado às deformações (sem o movimento de corpo rígido relativo à abertura da fissura).

Os deslocamentos para  $V_1$  ou  $V_2$  resultam, respectivamente

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{d} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{R}\mathbf{e}') = \mathbf{N}\mathbf{d} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (8)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{N}\mathbf{d} - (\mathbf{N}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{I})\mathbf{R}\mathbf{e}' = \mathbf{N}\mathbf{d} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{R}\mathbf{e}' - \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (9)$$

sendo  $\mathbf{e}'$  o vetor que contém as componentes no sistema local  $(x', y')$  da abertura da fissura;  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade  $(x', y')$  para o sistema de coordenadas do elemento; e,  $\mathbf{d}$  o vetor deslocamento nodal. A matriz  $\boldsymbol{\phi}$  é constituída por submatrizes  $\boldsymbol{\phi}_i$ , que são dadas por  $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}$  em  $V_1$  e  $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{I}$  em  $V_2$ .

O ponto chave deste modelo está na determinação do equilíbrio interno do elemento: as forças transmitidas através da fissura devem estar em equilíbrio com as forças no volume do elemento, ou seja

$$\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{S_L} \mathbf{t} dS \quad (10)$$

onde  $S_L$  é a superfície da linha de localização (da fissura). A matriz  $\mathbf{P}$  tem a função de seleccionar as componentes de tensão no domínio do elemento que serão transmitidas pela fissura. As relações constitutivas para a fissura e para o domínio do elemento são definidas, respectivamente, como

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

onde  $\mathbf{D}^e$  é a matriz constitutiva elástica do material e  $\mathbf{D}^{cr}$  é a matriz constitutiva da zona fissurada.

A configuração final de equilíbrio é obtida efetuando-se duas etapas de iterações: no elemento até que a igualdade (10) seja estabelecida; e na estrutura global, até que seja atingido o equilíbrio.

### 3.2 Modelo modificado empregado

A fissuração em estruturas de concreto armado é caracterizada pelo aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. A inclusão da armadura causa significativas modificações no processo de formação e crescimento das fissuras e, conseqüentemente, na força transmitida através das mesmas.

Para representar esta situação, mudanças devem ser feitas no modelo original de fissura incorporada apresentado na Seção 3.1. As duas principais modificações propostas são: permitir que o modelo seja capaz de representar um número variável de fissuras em cada elemento; e, incluir a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças. O modelo de transferência de tensão apresentado na Seção 2 será usado para introduzir estas modificações.

O procedimento proposto, para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a  $i$ -ésima iteração da estrutura global, é descrito a seguir.

- 1) Considerar a abertura da fissura,  $e'_{(0)}^{(i)}$ , igual ao valor da iteração global anterior.
- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que causa a deformação no elemento,  $d_{N(k)}^{(i)}$ .
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno,  $d_{Ni(k)}^{(i)}$ .
- 4) Determinar as deformações e tensões no domínio do elemento usando as Eq. (7) e (12).

Considerando que as barras de armadura somente contribuem com forças na direção de seus eixos ( $F_{ES}(1)$  para a barra longitudinal e  $F_{ES}(2)$  para o estribo), as forças do aço no domínio do elemento devem ser rotacionadas para as direções locais,  $F_{ES}'$ , como mostra a Fig. 3(a).  $A_s(1)$  e  $A_s(2)$  são, respectivamente, as áreas da armadura longitudinal e dos estribos.

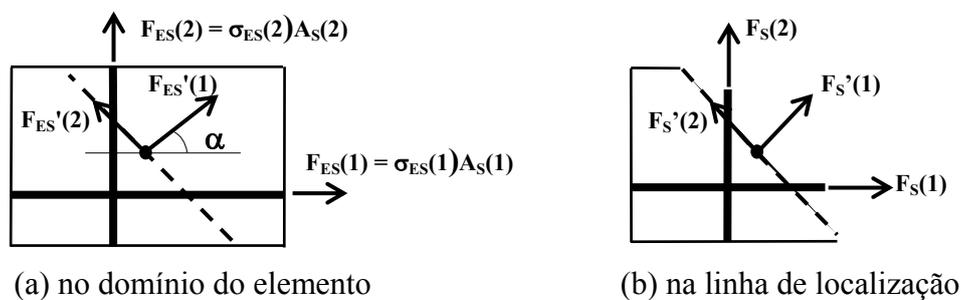


Figura 3 – Forças na armadura.

- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento, e à na fissura, igual aos

- valores da iteração global anterior:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i-1)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i-1)}$ .
- 6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento,  $\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)}$ , usando a Eq.(12).
  - 7) Determinar as tensões no concreto na linha de localização,  $\boldsymbol{t}_{(k)}^{(i)}$ , usando a Eq. (11).
  - 8) Calcular as forças resultantes, no domínio do elemento, nas direções locais ( $x', y'$ ):
    - a) a força no concreto,  $\boldsymbol{F}_{EL(k)}^{(i)}$ , usando a parte esquerda da Eq. (10).
    - b) a força no aço:  $\boldsymbol{F}_{ES'(k)}^{(i)} = (\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)} \boldsymbol{A}_s) \boldsymbol{R}^{-1}$ ,  $\boldsymbol{R}$  é a matriz que rotaciona as componentes cartesianas do vetor no sistema ( $x', y'$ ), para o sistema de coordenadas global.
    - c) a força total:  $\boldsymbol{F}_{ET(k)}^{(i)} = \boldsymbol{F}_{EL(k)}^{(i)} + \boldsymbol{F}_{ES'(k)}^{(i)}$ .
  - 9) Calcular as forças resultantes na linha de localização (fissura):
    - a) a força no concreto,  $\boldsymbol{F}_{CR(k)}^{(i)}$ , usando a parte direita da Eq. (10).
    - b) a força no aço:  $\boldsymbol{F}_{S'(k)}^{(i)} = \boldsymbol{F}_{ET(k)}^{(i)} - \boldsymbol{F}_{CR(k)}^{(i)}$
  - 10) Calcular a deformação no aço na fissura:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = (1/E_s) \boldsymbol{F}_{S'(k)}^{(i)} \boldsymbol{A}_s^{-1}$ , com  $\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{R} \boldsymbol{F}_s'$  (ver Fig. 3(b)).
  - 11) Com o valor da deformação na armadura na fissura,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)}$ , para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:
    - a) o comprimento de transferência,  $x_{Rcrack}$ , através da Eq. (1).
    - b) a deformação média do aço ao longo do elemento,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)}$ , utilizando a Eq. (5).
    - c) a deformação média no domínio do elemento,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{cm(k)}^{(i)}$ , utilizando a Eq. (6).
    - d) o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente,  $s_0$ , utilizando as Eq. (4) ou as Eq. (2) e (3).

Após a solução do passo 11(d) ter sido alcançada, a configuração final das fissuras pode ser determinada por:

- 12) Calcular a distância entre fissuras,  $dls = 2x_R$ , e a quantidade de fissuras em cada elemento,  $nf = L_{ele} / dls$ , conforme o comportamento de peça curta ou longa.  $L_{ele}$  é o comprimento do elemento normal à linha de localização.
- 13) Calcular o valor da abertura de cada fissura usado na Eq. (11):  $\boldsymbol{Re}' = 2s_0$ , sendo  $s_0$  o escorregamento máximo (ver Fig.1).
- 14) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento:  $\boldsymbol{e}_{(k)} = \boldsymbol{Re}'_{(k)} \times nf$ , que será utilizado nas Eq. (8) e (9).
- 15) Repetir os passos 6, 7, 8 e 9(a)
- 16) Calcular as forças resultantes:
  - a) a força no aço na fissura:  $\boldsymbol{F}_{S(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} E_s \boldsymbol{A}_s$ .
  - b) a força total na linha de localização:  $\boldsymbol{F}_{CT(k)}^{(i)} = \boldsymbol{F}_{CR(k)}^{(i)} + \boldsymbol{F}_{S(k)}^{(i)}$
- 17)  $k = k + 1$  e voltar para o passo 2.

Após o surgimento da fissura, todas as solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento.

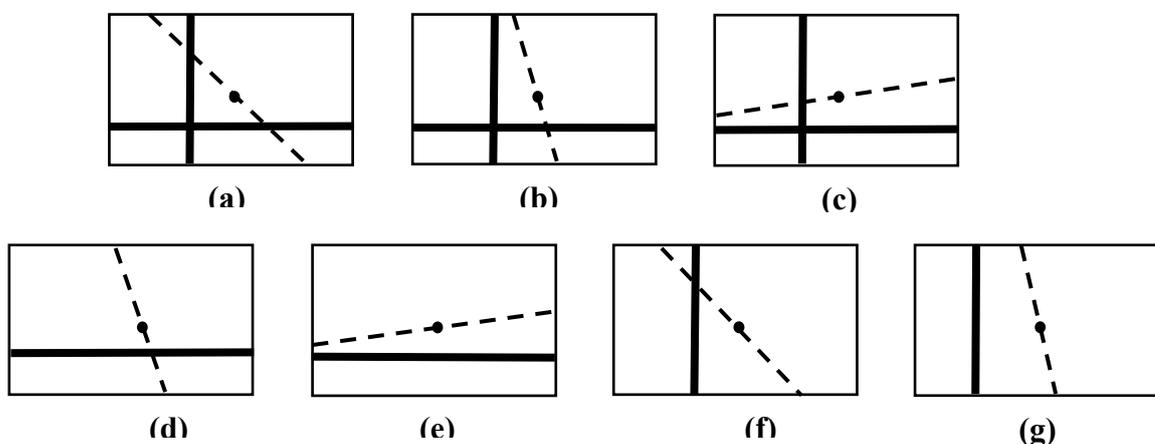


Figura 4 – Situações possíveis para a fissura interceptar a armadura.

Outro aspecto importante, é que o processo de transferência de tensão através da fissura deve ser feito somente pelos elementos que possuem barras de armadura interceptadas pela linha de localização. Todas as possíveis situações indicando as posições das barras da armadura e da linha de localização são mostradas na Fig. 4.

Para os elementos mostrados nas situações (c) e (f) na Fig. 4, o passo 11 do procedimento proposto é realizado para os estribos ( $A_s(2)$ ); para os elementos caracterizados pelas situações (b) e (d) na Fig. 4, é realizado para a barra longitudinal ( $A_s(1)$ ); e, para os elementos com ambas (estribos e longitudinal) barras interceptadas pela fissura, Fig. 4(a), o passo 11 do procedimento proposto é feito somente para a barra longitudinal ( $A_s(1)$ ).

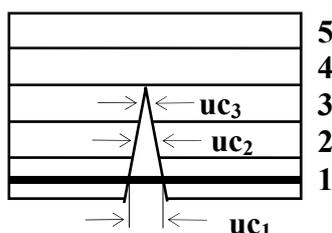


Figura 5 – Aberturas da fissura para elementos sem barras de armadura.

Para os elementos sem as barras de armadura atravessando a linha de localização, situações (e) e (g) na Fig. 4 e/ou elementos 2 e 3 na Fig. 5, o valor da abertura da fissura é determinado por uma variação linear em relação ao elemento com armadura próximo. Conseqüentemente, as aberturas de fissura para os três elementos fissurados mostrados na Fig. 5 são determinados por: elemento 1:  $uc_1$  é determinado pelo procedimento exposto acima; elemento 2:  $uc_2 = 2/3 uc_1$ ; elemento 3:  $uc_3 = 1/3 uc_1$ .

#### 4. EXEMPLO NUMÉRICO

Para comprovar a eficácia do modelo apresentado neste trabalho, os resultados numéricos são comparados com resultados experimentais obtidos por Leonhardt e Walther (1962). É analisada uma viga simétrica, simplesmente apoiada, carregada verticalmente por duas cargas concentradas, ver Fig.6.

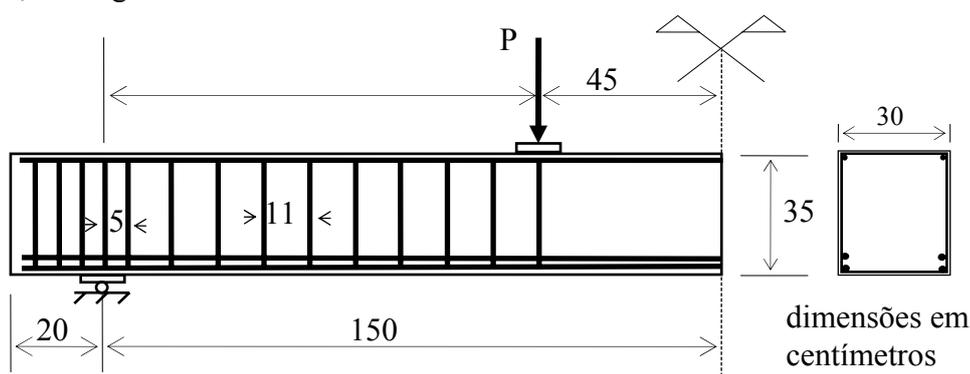
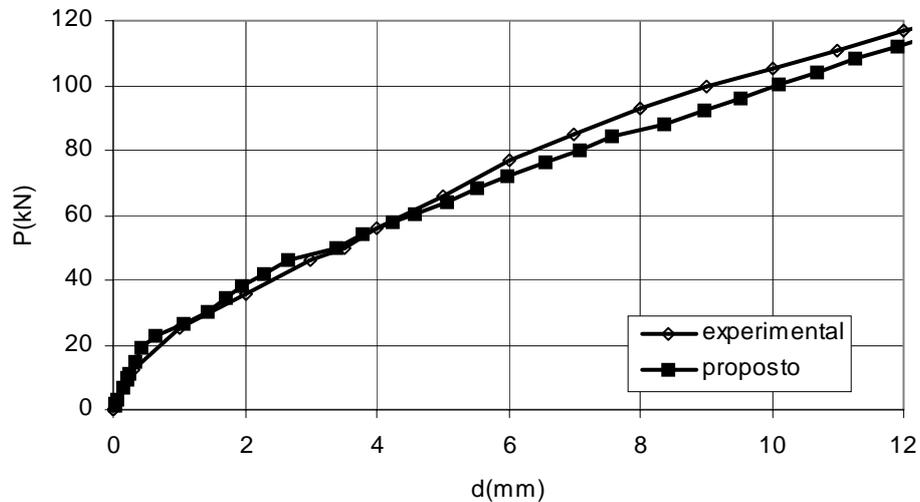


Figura 6: Características geométricas da viga analisada.

A armadura longitudinal inferior é composta por quatro barras de 20mm de diâmetro, com tensão de escoamento,  $f_y = 42.8\text{kN/cm}^2$ , e a armadura longitudinal superior consiste de duas barras de 8mm de diâmetro com tensão de escoamento,  $f_y = 46.5\text{kN/cm}^2$ . Os estribos têm diâmetro de 6mm e tensão de escoamento,  $f_y = 32.0\text{kN/cm}^2$  e seu espaçamento variável está representado na Fig 6. As propriedades do concreto são:  $f_t = 0.233\text{kN/cm}^2$ ;  $f_c = 2.42\text{kN/cm}^2$ ;

$E_c = 3400\text{kN/cm}^2$ ;  $\nu = 0.2$  e  $G_f = 0.000487\text{kN/cm}$ . Para o concreto na linha de localização é empregada uma lei de amolecimento linear. Empregou-se uma malha de 20 (5x4) elementos QMITC, na análise numérica.



Na Fig. 7, está representada a evolução da flecha ao longo do carregamento. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados numérico e experimental.

Figura 7: Evolução da flecha com o carregamento.

Na Fig. 8, as curvas de abertura total (soma da abertura de todas as fissuras na região entre a carga aplicada e o apoio) e de abertura máxima da fissura versus a carga aplicada são apresentadas.

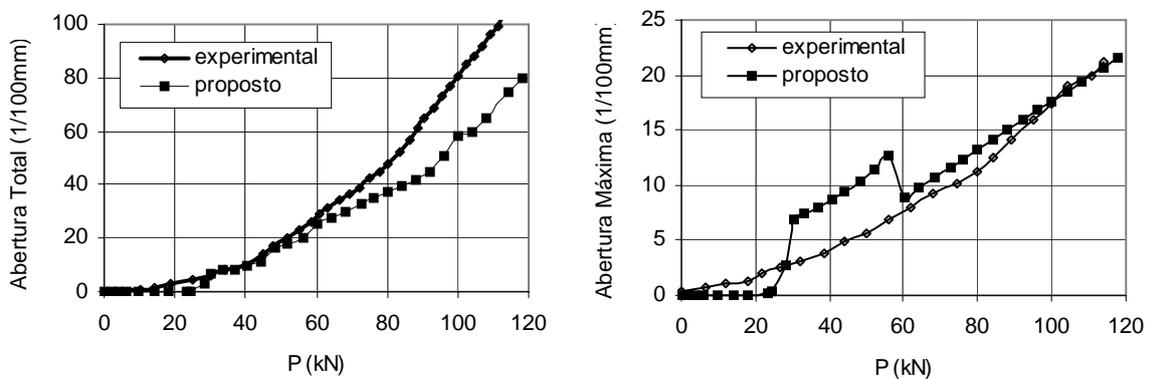


Figura 8: Evolução da abertura de fissura, na altura da armadura tracionada, com a carga.

Finalmente, a evolução da tensão nos estribos versus a carga aplicada, obtida pelo modelo proposto, é comparada com valores experimentais na Fig. 9. Os valores analisados são as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio.

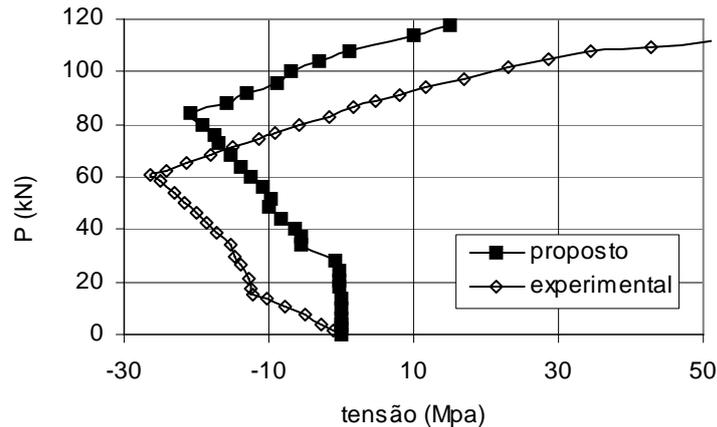


Figura 9: Evolução das tensões nos estribos ao longo do carregamento.

## 5. CONCLUSÕES

Da análise dos resultados mostrados no item 4, pode-se concluir que o modelo proposto neste trabalho é capaz de representar o comportamento de peças fletidas de concreto armado fissurado.

Na Fig. 8, verifica-se que a abertura total de fissuras é sempre crescente. Para uma carga de aproximadamente 55 kN, a abertura de cada fissura diminui, denotando a formação de uma segunda geração de fissuras. Analisando este diagrama, pode-se ver que os resultados obtidos pelo modelo proposto têm uma boa aproximação com os resultados experimentais, principalmente para níveis de carga acima de 60 kN, quando a fissuração está estabilizada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelos recursos financeiros obtidos.

## REFERENCES

- d'Avila, V.M.R., 2003, *Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos*, Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.
- Dvorkin, E.N., Cuitiño, A.M., Gioia, G., 1990, Finite Elements with Displacement Interpoled Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.30, pp.541-564.
- Dvorkin, E. N., Vassolo, S., 1989, A quadrilateral 2-D finite element based on mixed interpolation of tensorial components, *Engineering Computations*, vol.6, pp.217-224.
- Elwi, A.E.; Hrudrey, M., 1989, Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, New York.
- FIB. *Bond of Reinforcement in concrete*. Bulletin d'Information de la Federation Internationale du Beton, n.10, Lausanne, Switzerland, 2000.
- Leonhardt, F.; Walther, R., 1962, Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau, *Beton- und Stahlbetonbau*, v.57, n.7, p.161-173, Berlin.

Ottosen, N.S., 1977, A Failure Criterion for Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.103, n.EM4, p.527-535, New York.

Ottosen, N.S., 1979, Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.105, n.EM1, p.127-142, New York.

Russo, G., Zingone, G., Romano, F., 1990, Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforcing Bars in R. C. Joints, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 116: (2), pp. 336-355.

Russo, G., Romano, F., 1992, Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 118: (5), pp. 1172-1190, 1992.

## NUMERICAL SIMULATION OF CRACKING IN REINFORCED CONCRETE MEMBERS BY AN EMBEDDED MODEL

**Daiane de Sena Brisotto** – [daiabrisotto@yahoo.com.br](mailto:daiabrisotto@yahoo.com.br)

**Virgínia Maria Rosito d'Avila** – [vichy@ufrgs.br](mailto:vichy@ufrgs.br)

**Eduardo Bittencourt** – [bittenco@cpgec.ufrgs.br](mailto:bittenco@cpgec.ufrgs.br)

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

Porto Alegre, RS, Brazil

**Abstract.** *In finite element analysis of concrete structures, cracks can be represented by three different models: discrete, smeared or embedded. In discrete approaches, cracks are simulated as discontinuities of displacements between two adjacent elements. In smeared representations, cracked material is treated as an equivalent continuum. The embedded models were developed as an alternative to the numerical simulation of reinforced and plain concrete structures. In this approach, cracks are modeled as a displacement discontinuity within an element. In this paper, an embedded crack model that considers the inclusion of the reinforcement contribution in the internal force equilibrium of the element is presented. A bond stress-transfer approach is used to include this reinforcement contribution. An embedded model was employed to represent the reinforcement bars, allowing that they can be placed in an independent position and shape in regarding the FEM elements. To verify the performance of the proposed model, the numerical results obtained are compared with experimental results.*

**Keywords:** *Reinforced Concrete, Embedded Crack Model, Finite Element.*