

## SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL, NÃO-ESTACIONÁRIA, EM UM MEIO CONSTITUÍDO DE QUATRO CAMADAS

**Ivanilda Basso Aseka**

Departamento de Matemática, CCNE/UFSM  
Av. Roraima, s/n, 97105-900, Santa Maria/RS, Brasil  
iaseka@smail.ufsm.br

**Marco Tullio de Vilhena**

Instituto de Matemática, UFRGS  
Av. Bento Gonçalves, 9500, 91509-900, Porto Alegre/RS, Brasil  
vilhena@cesup.ufrgs.br

**Paulo Otto Beyer**

Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS  
CP. 17819, 90035-972, Porto Alegre/RS, Brasil  
pob@mecanica.ufrgs.br

***Resumo.** Neste trabalho as formulações chamadas de sistemas de parâmetros concentrados combinadas com a técnica da transformada de Laplace são utilizadas na obtenção de uma solução do problema de condução de calor em um meio constituído de quatro camadas. Neste meio supomos que o gradiente de temperatura na direção vertical é suave. Usamos a integração de Hermite (em diferentes ordens) para aproximar as integrais que definem as temperaturas e os fluxos médios de calor. Os problemas diferenciais unidimensionais resultantes desta aproximação, são então resolvidos com o uso da técnica da transformada de Laplace, cuja inversão é avaliada numericamente.*

***Palavras chave:** Condução de calor não-estacionária, Meio multicomposto, Parâmetros concentrados, Transformada de Laplace*

### 1. Introdução

A transferência de calor através de superfícies consistindo de várias camadas com propriedades físicas diferentes ocorre em muitas situações práticas, tais tipos de problemas apresentam dificuldades do ponto de vista dos formalismos analíticos ou numéricos envolvidos. Na análise de sistemas térmicos complexos métodos que utilizam a integração do sistema original em relação a uma das variáveis independentes são aproximações largamente utilizadas, quando o objetivo é obter uma formulação simplificada do problema original. O uso da integração da equação diferencial introduz termos que relacionam a variável média com o valor da variável original no contorno do meio, com a vantagem de se poder reter informações na direção do espaço integrado, fornecido pelas condições de contorno.

Por outro lado, existe também, uma vasta literatura sobre a solução de problemas de difusão pela aplicação da técnica da transformada de Laplace, entre os quais Carslaw and Jaeger, 1959, Lockwood and Mulholland, 1973, Chen and Lin, 1991 e Ozisik, 1993. Entretanto, em uma ampla pesquisa realizada não consta, até o momento, método de solução de problemas de difusão que faça uso da integração transversa combinado com o sistema de parâmetros concentrados e a técnica da transformada de Laplace.

A metodologia semi-analítica descrita neste trabalho, utiliza a formulação chamada de parâmetros concentrados Cotta and Mikhailov, 1997 combinada com a técnica da transformada de Laplace. Primeiramente, supondo que o gradiente de temperatura é suave na direção vertical, integramos transversalmente a equação do calor bidimensional em relação à variável espacial  $y$ . Este procedimento gera problemas em  $x$ , escritos para temperaturas médias. Estes problemas resultantes são então resolvidos com a aplicação da transformada de Laplace na variável temporal, com inversa avaliada numericamente.

A abordagem através dos sistemas de parâmetros concentrados nos permite encontrar expressões que relacionam a temperatura média com o seu valor no contorno do meio Cotta and Mikhailov, 1997. Três formulações podem ser obtidas para relacionar a grandeza média com a grandeza no contorno. A primeira, simplesmente,

aproxima as temperaturas na fronteira por seus valores médios, aproximação clássica. Para as outras aproximações, são utilizadas as fórmulas de integração numérica de Hermite ( $H_{0,0}$  e  $H_{1,1}$ ), nas integrais que definem a temperatura média e o fluxo médio de calor.

Esta metodologia é aqui usada na obtenção de uma solução do problema bidimensional, não-estacionário de condução de calor, em paredes de edificações. Com esta aplicação, temos como principal objetivo o cálculo do fluxo médio de calor que entra no ambiente condicionado, pois as envoltórias das edificações estão normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento. Portanto, o desempenho térmico dessas paredes, tem participação importante no comportamento térmico dos seus ambientes internos, influenciando aspectos como conforto térmico, dimensionamento dos sistemas de climatização e consumo de energia.

## 2. Descrição do Problema

Consideramos, um meio constituído de 4 camadas paralelas em contato, como é ilustrado na Fig. 1. Assumimos que não há resistência térmica nas interfaces  $x = x_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Cada camada é homogênea, isotrópica e tem propriedades térmicas (isto é  $\rho_i$ ,  $C_{p_i}$  e  $k_i$ ) constantes. Inicialmente, cada camada está à temperatura  $T_i(x, y, 0) = F_i(x, y)$  em  $x_i < x < x_{i+1}$  e  $y_1 < y < y_2$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $t = 0$ . Para um tempo  $t > 0$ , o calor é transferido por convecção nos contornos, que estão sujeitos às temperaturas:  $T_a(t)$  à esquerda;  $T_b(t)$  à direita;  $T_c(t)$  em  $y = y_1$  e  $T_d(t)$  em  $y = y_2$ . As temperaturas  $T_a(t)$  e  $T_d(t)$  são variáveis com o tempo,  $T_b(t)$  e  $T_c(t)$  são consideradas constantes. Os coeficientes de transferência de calor nas fronteiras  $x = x_1$ ,  $x = x_5$ ,  $y = y_1$  e  $y = y_2$  são, respectivamente,  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  e  $h_d$ . Não há geração de calor no meio. A formulação matemática desse problema de condução de calor, governado pela distribuição de temperatura  $T_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , para  $t > 0$ , Aseka, 2003 é dada por

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t}, \quad x_1 < x < x_5, \quad y_1 < y < y_2. \quad (1)$$

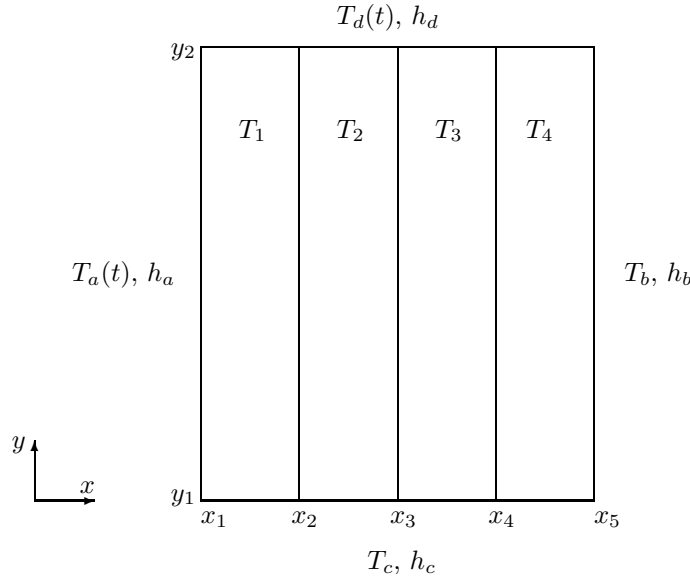


Figura 1: Meio constituído por quatro camadas

Ao problema acima, equação (1), são incorporadas as seguintes condições de contorno, de interface e condições iniciais:

- condições de contorno em  $x$ :

$$-k_1 \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} = h_a [T_a(t) - T_1(x, y, t)], \quad x = x_1, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$k_4 \frac{\partial T_4(x, y, t)}{\partial x} = h_b [T_b - T_4(x, y, t)], \quad x = x_5, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (3)$$

- condições de contorno em  $y$ :

$$-k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_c [T_c - T_i(x, y, t)], \quad y = y_1, \quad x_1 < x < x_5, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_d [T_d(t) - T_i(x, y, t)], \quad y = y_2, \quad x_1 < x < x_5, \quad t > 0; \quad (5)$$

- condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$T_i(x, y, t) = T_{i+1}(x, y, t), \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x, y, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (7)$$

- condições iniciais, para  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$T_i(x, y, t) = F_i(x, y), \quad t = 0, \quad y_1 < y < y_2, \quad x_i < x < x_{i+1}. \quad (8)$$

Definimos a temperatura média como

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} T_i(x, y, t) dy, \quad (9)$$

onde  $\Delta y = y_2 - y_1$  e  $i = 1, \dots, 4$ .

Multiplicando a Eq. (1) por  $1/\Delta y$ , em seguida, integrando-a com relação a variável  $y$  de  $y_1$  até  $y_2$  e usando a definição da temperatura média, equação (9), juntamente com as condições de contorno (4) e (5), obtemos a expressão

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{h_d}{\Delta y k_i} T_i(x, y_2, t) - \frac{h_c}{\Delta y k_i} T_i(x, y_1, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} [h_d T_d(t) + h_c T_c], \quad (10)$$

onde  $x_1 < x < x_5$  e  $t > 0$ .

A equação (10) é uma formulação diferencial obtida a partir do modelo matemático original, equação (1), sem o envolvimento de aproximações. O método dos parâmetros concentrados tem como característica básica assumir que a temperatura nos contornos podem ser razoavelmente bem aproximados por uma função da temperatura média. Diferentes níveis de aproximações podem ser utilizadas. A aproximação clássica aproxima a temperatura nos contornos pela temperatura média, isto é,

$$T_i(x, y_2, t) \cong \tau_i(x, t), \quad (11)$$

$$T_i(x, y_1, t) \cong \tau_i(x, t). \quad (12)$$

que gera a formulação clássica para as temperaturas médias

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_c + h_d)}{\Delta y k_i} \tau_i(x, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} (h_d T_d(t) + h_c T_c). \quad (13)$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial \tau_1(x, t)}{\partial x} + h_a \tau_1(x, t) = h_a T_a(t), \quad x = x_1, \quad t > 0; \quad (14)$$

$$k_4 \frac{\partial \tau_4(x, t)}{\partial x} + h_b \tau_4(x, t) = h_b T_b, \quad x = x_5, \quad t > 0; \quad (15)$$

- condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\tau_i(x, t) = \tau_{i+1}(x, t), \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (16)$$

$$k_i \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}(x, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (17)$$

e com condições iniciais, para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\tau_i(x, t) = G_{0i}(x), \quad t = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (18)$$

onde

$$G_{0i}(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} F_i(x, y) dy. \quad (19)$$

Agora, com o objetivo de melhorar a relação entre a temperatura no contorno e a temperatura média, mantendo o mesmo nível de simplificação matemática quando esta for comparada com a aproximação clássica, obtemos as formulações ditas melhoradas. Nesta abordagem, as integrais que definem as temperaturas e os fluxos de calor médios, são aproximadas pela aproximação de Hermite.

Empregando então, a regra do trapézio (aproximação  $H_{0,0}$ ) em ambas as integrais, obtemos a formulação  $H_{0,0}/H_{0,0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{4(k_i \Delta y (h_c + h_d) + h_c h_d)}{k_i (4k_i + h_d + h_c)} \tau_i(x, t) &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial t} \\ &- \frac{1}{\Delta y k_i} \left[ (h_d T_d(t) + h_c T_c) - \frac{h_d - h_c}{4k_i + h_d + h_c} (h_c T_c - h_d T_d(t)) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

E, em seguida, obtemos, também, a formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , que utiliza a regra do trapézio corrigida (aproximação  $H_{1,1}$ ) na aproximação da integral que define as temperaturas médias e, mantemos a regra do trapézio, aproximação  $H_{0,0}$ , nos fluxos médios de calor .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_d U_{inf} + h_c U_{sup})}{k_i \Delta y V} \tau_i(x, t) &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} \\ &- \frac{1}{\Delta y k_i} (h_d T_d(t) + h_c T_c) + \frac{(h_d Z(t) - h_c W(t))}{k_i \Delta y V}, \end{aligned} \quad (21)$$

onde

$$U_{sup} = 6k_i(2k_i + h_d), \quad (22)$$

$$U_{inf} = 6k_i(2k_i + h_c), \quad (23)$$

$$V = 12k_i^2 + k_i(3 + \Delta y)(h_c + h_d) + \Delta y h_d h_c, \quad (24)$$

$$Z(t) = 3k_i(h_c T_c - h_d T_d(t)) - \Delta y h_c h_d T_c - k_i \Delta y (h_c T_c + h_d T_d(t)) \quad (25)$$

e

$$W(t) = 3k_i(h_c T_c - h_d T_d(t)) + \Delta y h_c h_d T_c + k_i \Delta y (h_c T_c + h_d T_d(t)). \quad (26)$$

Observamos que essas formulações melhoradas, equações (20) e (21), estão sujeitas às condições de contorno (14)-(18)

As equações diferenciais parciais obtidas, equações (13), (20) e (21), podem ser convenientemente resolvidas pela técnica da transformada de Laplace. Deste modo, se denotamos

$$\bar{\tau}_i(x, s) = \mathcal{L}\{\tau_i(x, t)\} \quad (27)$$

então, a transformada de Laplace, aplicada nas equações diferenciais dadas pelas equações (13), (20) e (21), resulta

$$\frac{d^2 \bar{\tau}_i(x, s)}{dx^2} - \left( \beta_i + \frac{s}{\alpha_i} \right) \bar{\tau}_i(x, s) = -\frac{1}{\alpha_i} G_{0i}(x) - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (28)$$

onde  $\beta_i = \frac{h_c + h_d}{\Delta y k_i}$  para a aproximação clássica,  $\beta_i = \frac{4[k_i \Delta y (h_c + h_d) + h_c h_d]}{k_i (4k_i + h_d + h_c)}$  para a aproximação melhorada  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e para a aproximação melhorada  $H_{1,1}/H_{0,0}$ ,  $\beta_i = \frac{h_d U_{inf} + h_c U_{sup}}{k_i \Delta y V}$ , e os  $\gamma_i$ , para a para a aproximação clássica, para a aproximação melhorada  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e para a aproximação melhorada  $H_{1,1}/H_{0,0}$  são dados,

respectivamente, por:  $\gamma_i = h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s}$ ,  $\gamma_i = (h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s}) - \frac{h_d - h_c}{4k_i + h_d + h_c} \times (h_c \frac{T_c}{s} - h_d \bar{T}_d(s))$  e  $\gamma_i = (h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s}) + \frac{(h_d \bar{Z}(s) - h_c \bar{W}(s))}{k_i \Delta y V}$ .

Uma solução  $\bar{\tau}_i(x, s)$  da equação (28), que deve satisfazer as condições de contorno

$$-k_1 \frac{d\bar{\tau}_1(x, s)}{dx} + h_a \bar{\tau}_1(x, s) = h_a \bar{T}_a(s), \quad x = x_1 \quad (29)$$

$$k_4 \frac{d\bar{\tau}_4(x, s)}{dx} + h_b \bar{\tau}_4(x, s) = h_b \frac{T_b}{s}, \quad x = x_5 \quad (30)$$

e condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$

$$\bar{\tau}_i(x, s) = \bar{\tau}_{i+1}(x, s), \quad x = x_{i+1} \quad (31)$$

$$k_i \frac{d\bar{\tau}_i(x, s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}(x, s)}{dx}, \quad x = x_{i+1}, \quad (32)$$

pode ser escrita como

$$\bar{\tau}_i(x, s) = A_i e^{-R_i x} + B_i e^{R_i x} \quad (33)$$

$$- \frac{e^{-R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} \left[ -\frac{G_{0i}(\xi)}{\alpha_i} - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i(s) \right] d\xi \quad (34)$$

$$+ \frac{e^{R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} \left[ -\frac{G_{0i}(\xi)}{\alpha_i} - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i(s) \right] d\xi, \quad (35)$$

onde  $e^{-R_i x}$  e  $e^{R_i x}$  são funções linearmente independentes e  $R_i = \sqrt{\beta_i + \frac{s}{\alpha_i}}$ .

Ou ainda,

$$\bar{\tau}_i(x, s) = A_i e^{-R_i x} + B_i e^{R_i x} + I(x) + \frac{1}{2R_i^2 k_i \Delta y} \gamma_i(s) \left[ 2 - e^{-R_i(x-x_i)} - e^{-R_i(x_i-x)} \right], \quad (36)$$

onde

$$I_i(x) = \frac{1}{2R_i \alpha_i} \left[ e^{-R_i x} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} G_{0i}(\xi) - e^{R_i x} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} G_{0i}(\xi) d\xi \right]. \quad (37)$$

### 3. Resultados e Conclusões

O problema de condução de calor não-estacionária, bidimensional, em meio com quatro camadas, foi analisado. O meio multicamadas aqui estudado foi uma parede de edificação constituída por: estuque, concreto pesado, isolante e reboco Aseka, 2003. Conforme as dimensões dos meios consideradas neste trabalho, a largura de cada uma das camadas, quando comparada com a altura da parede, é "muito menor", por isto, podemos supor um gradiente de temperatura suave, em cada meio, na direção vertical. A parede em estudo, cujas dimensões e tipos de materiais utilizados na sua composição podem ser encontrados em ASHRAE, 1993, está sujeita a condições de contorno convectivas em todos os lados, sendo que, nas faces externa e superior, a temperatura foi considerada variável com o tempo. Esta é representada pela temperatura fictícia, denominada de temperatura Sol-Ar, que leva em consideração o efeito da radiação solar. A temperatura Sol-Ar evolui como função horária, com ciclo de um dia e consideramos que seus valores, Fig.(2), se repetem consecutivamente por, no mínimo, quatro dias, tempo necessário para o sistema entrar em regime periódico. Supomos que a temperatura interna mantém-se constante, igual a  $24^0C$ .

Os resultados numéricos obtidos, implementação computacional em linguagem Fortran, foram comparados com os resultados conseguidos através do método dos Volumes Finitos (MVF) e com os resultados dados em Beyer, 1998, com o uso do método desenvolvido por Beyer, chamado método Laplace/Gaussiana (L/G). A Fig.(3) apresenta a distribuição de temperaturas dentro da parede, no quarto dia (pela formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ ).

Na Fig.(4) podemos ver os fluxos médios de calor, no quarto dia, obtidos pelos métodos dos Volumes Finitos, Laplace/Gaussiana e pelo método aqui proposto, com a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

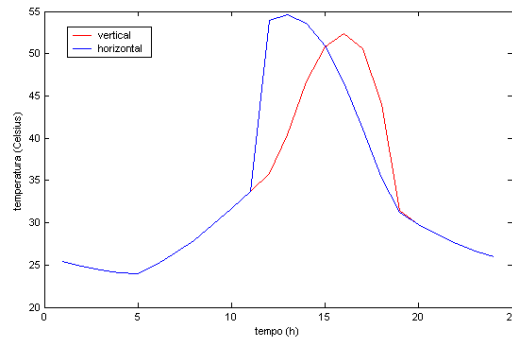


Figura 2: Temperatura Sol-Ar para superfície vertical e horizontal.

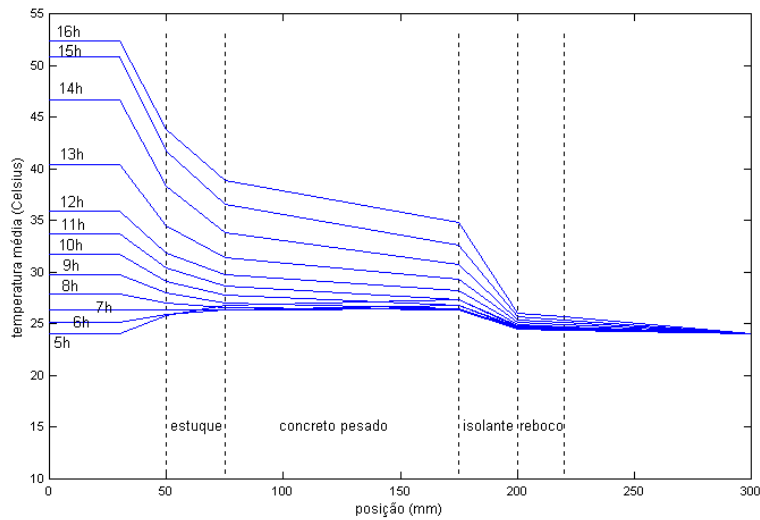


Figura 3: Distribuição de temperatura média na parede.

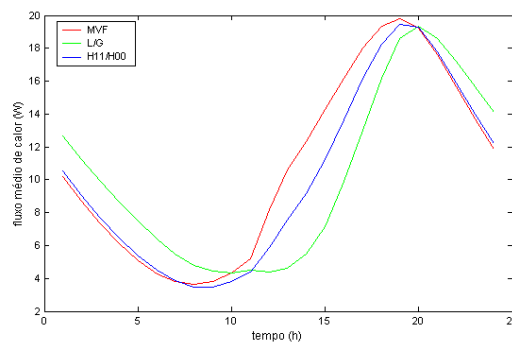


Figura 4: Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos, pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

Podemos observar que os fluxos médios de calor obtidos pelo método proposto (com a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ ) apresenta uma boa concordância com os valores numéricos obtidos pelo método dos Volumes Finitos (MVF). Observamos, ainda, que no intervalo onde ocorre um aumento brusco da temperatura Sol-Ar, entre 10:00 e 17:00 horas, ocorre, também, uma diferença maior entre os valores dos fluxos de calor médios obtidos pelos três métodos. Os fluxos médios de calor, obtidos pelo método desenvolvido neste trabalho com as aproximações  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e  $H_{1,1}/H_{0,0}$  são também apresentados a seguir. Notamos que, quando usamos a aproximação

$H_{0,0}/H_{0,0}$ , ocorre um pequeno distanciamento dos valores obtidos pelo MVF e, mais ainda, quando comparado com o método L/G, isto pode ser observado na Fig.(5). No caso do uso da aproximação clássica os resultados numéricos diferem por uma margem considerável, Fig.(6).

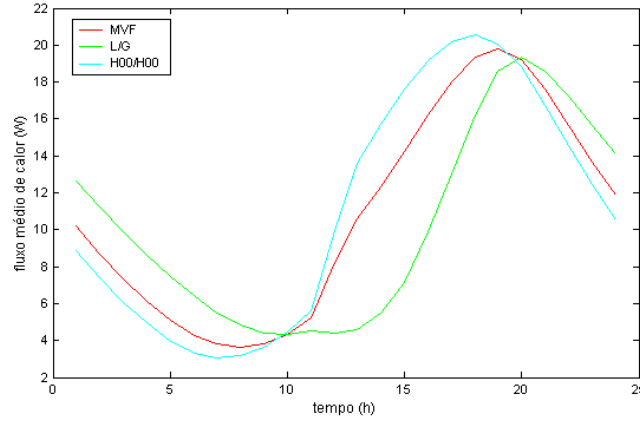


Figura 5: Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação  $H_{0,0}/H_{0,0}$ .

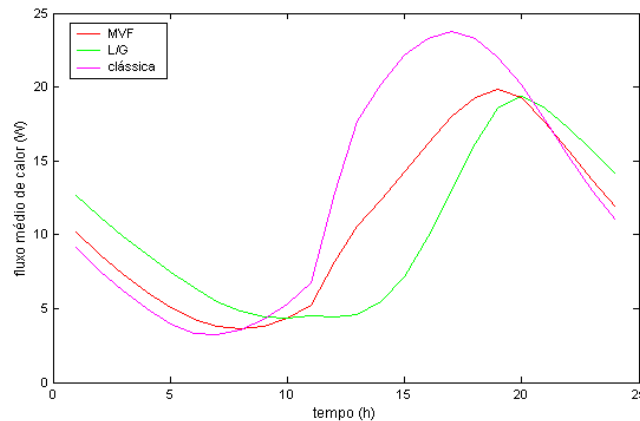


Figura 6: Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pela formulação aproximada clássica.

É importante comentar que o tempo computacional na obtenção dos resultados numéricos foi de 2 a 5 minutos, dependendo da formulação utilizada.

#### 4. Referências

- Aseka, I. B., 2003, “Solução da Equação de Condução de Calor Bidimensional, em Meios Multicompostos, pelos Métodos Nodal, com Parâmetros Concentrados, e a Técnica da Transformada de Laplace”, PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- ASHRAE, 1993, Handbook of Fundamentals, “aa”, Vol. 26, pp, 17–28.
- Beyer, P. O., 1998, “Condução de Calor Não-Estacionária em Paredes Externas Multi-Compostas”, PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Carslaw, H. and Jaeger, J., 1959, “Conduction Heat Transfer”, Clarendon Press, London, 428 p.
- Chen, H. and Lin, J.-Y., 1991, Application of the Hybrid Method to Transient Heat Conduction in One-Dimensional Composite Layers, “Computers and Structures”, Vol. 39, No. 39, pp. 451–458.

- Cotta, R. M. and Mikhailov, M., 1997, “Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation”, John Wiley, England, 428 p.
- Lockwood, L. and Mulholland, G., 1973, Diffusion Through Laminated Composite Cylinders Subjected to a Circumferentially Varying External Heat Flux, “J. Heat Transfer”, Vol. 95, No. 95, pp. 487–491.
- Ozisk, M., 1993, “Heat Conduction”, John Wiley, New York, 42.

## **SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION IN A BI-DIMENSIONAL MULTI-LAYERED CARTESIAN GEOMETRY BY THE ANALYSIS LUMPED SYSTEM AND LAPLACE TRANSFORM**

### **Ivanilda B. Aseka**

Departamento de Matemática, CCNE/UFSM  
Av. Roraima, s/n, 97105-900, Santa Maria/RS, Brasil  
iaseka@smail.ufsm.br if any

### **Marco Tullio de Vilhena**

Instituto de Matemática, UFRGS  
Av. Bento Gonçalves, 9500, 91509-900, Porto Alegre/RS, Brasil  
vilhena@cesup.ufrgs.br if any

### **Paulo Otto Beyer**

Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS  
CP. 17819, 90035-972, Porto Alegre/RS, Brasil  
pob@mecanica.ufrgs.br if any

**Abstract.** *In this work a semi-analytical methodology is developed for solving time-dependent two-dimensional heat conduction problems in heterogeneous media. This methodology combines the nodal method with lumped analysis and the Laplace transform technique. The nodal method is initially applied: the partial differential equation is transverse-integrated in one of the space variables. The next step is the lumped analysis: the temperatures at the inferior and superior boundaries are approximated by their averaged values. This procedure furnishes a set of one-dimensional differential equations. The solution is obtained by using Laplace transform which is inverted by numerical integration. The proposed method is applied in heat conduction problems appearing in buildings walls. A FORTRAN code was written in order to obtain numerical results which are compared with data available in the literature..*

**Keywords** . *transient heat conduction, multilayered, lumped parameter analysis, Laplace transform*