

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PELO MÉTODO BESO APLICADO A PROBLEMAS
COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO E FADIGA

Por

Fabiano Bortoluzzi

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Junho de 2020

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PELO MÉTODO BESO APLICADO A PROBLEMAS
COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO E FADIGA

por

Fabiano Bortoluzzi
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Co-Orientador: Prof. Dr. Ederval de Souza Lisboa

Aprovada por:

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz..... PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Agenor Dias de Meira Júnior..... FEAR/UPF

Prof. Dr. Marcos Daniel de Freitas Awruch..... DEM/UFSM

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 30 de Junho de 2020

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

À família, pelo apoio, carinho e dedicação que sempre demonstraram.

Aos amigos e colegas que fizeram parte de toda minha trajetória acadêmica.

Ao orientador Prof. Walter Jesus Paucar Casas, pela disponibilidade e assistência prestada ao longo de todo este curso de mestrado.

Ao co-orientador Prof. Ederval de Souza Lisboa, pela disponibilidade e assistência prestada ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao PROMEC e a UFRGS, pela qualidade do ensino oferecido.

RESUMO

Em problemas industriais, é contínua a busca por componentes com melhor desempenho estrutural, citando como exemplo a indústria automotiva onde é comum ter como objetivo o desenvolvimento de componentes com menor massa, mantendo-se a durabilidade dos mesmos e impactando diretamente no consumo de combustível dos veículos. Uma ferramenta que pode ser empregada para a solução deste tipo de problema é a otimização estrutural topológica. Dentre os diversos métodos disponíveis está o método de otimização estrutural evolucionária bidirecional BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) que tem sido utilizado em problemas baseados em tensões e fadiga. O objetivo desse trabalho consiste em aplicar a metodologia BESO para minimização dos níveis de tensões considerando uma restrição de volume estrutural e também para minimização do volume estrutural com restrições de tensão e fadiga. A metodologia foi implementada em linguagem Matlab[®] e aplicada em exemplos 2D que tiveram seus resultados comparados com a abordagem clássica de minimização de flexibilidade com restrição de volume. Em relação a minimização de tensões, comparou-se o procedimento implementado neste trabalho com outros procedimentos encontrados na literatura, onde foi verificado que a metodologia utilizada neste trabalho proporcionou maiores reduções nos níveis de tensão. Também foram realizados experimentos numéricos para a avaliação da influência dos parâmetros de entrada nos resultados finais. A minimização de volume foi primeiramente realizada com restrições de tensões, e foi aplicada em três diferentes exemplos. Posteriormente esta abordagem foi utilizada como base para implementação de restrições de fadiga considerando três diferentes critérios de falha (Goodman modificado, Gerber e Soderberg), que foram aplicados em quatro diferentes problemas. As três abordagens de otimização aplicadas sobre os exemplos estudados se mostraram eficientes em seus objetivos, produzindo topologias que atenderam as restrições e são fabricáveis. De modo geral, forneceram resultados melhores que a abordagem clássica de minimização de flexibilidade quando são avaliados critérios de tensões e fadiga.

Palavras-chave: Minimização de tensões; Minimização de flexibilidade; Minimização de volume; Otimização topológica evolucionária; Critérios de falha por fadiga.

ABSTRACT

In industrial problems, there is an ongoing search for components with better structural performance, citing for example the automotive industry which commonly has as objective the development of lighter components keeping durability and directly impacting in the vehicle fuel consumption. Structural topology optimization is a tool that can be employed to solve this kind of problem. Among many available methods, there is the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method that has been applied in stress and fatigue based problems. The objective of this work consists to apply the BESO method to minimize the stress levels with a structural volume constraint and volume minimization considering stress and fatigue constraints. The methodology was implemented in Matlab[®] language and applied to solve 2D examples which results were compared with the classical compliance minimization with volume constraint approach. In relation to stress minimization, the procedure implemented in this work was compared with other procedures found in the literature, where it was verified that the methodology used in this work provided greater reductions in stress levels. Numerical experiments were also carried out to evaluate the influence of the input parameters on the final results. The volume minimization was first performed with stress constraints and was applied in three different examples. Subsequently, this approach was used as basis for implementing fatigue constraints considering three different failure criteria (Modified Goodman, Gerber and Soderberg), which were applied in four different problems. The three optimization approaches applied in the studied examples were shown to be efficient in their objectives, matching the constraints and producing topologies that can be manufactured. In general, it provided better results than the classic compliance minimization approach when assessing stress and fatigue criteria.

Keywords: Stress minimization; Compliance minimization; Volume minimization; Evolutionary topology optimization, Fatigue failure criteria.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Otimização estrutural.....	1
1.2	Motivação.....	2
1.3	Objetivos.....	4
1.4	Organização do trabalho.....	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	Otimização topológica com restrições de tensão.....	6
2.2	Otimização topológica com restrições de fadiga.....	8
3	O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA BI-DIRECIONAL	11
3.1	Definição do problema de otimização.....	11
3.2	Análise de sensibilidade.....	12
3.3	Filtragem e estabilização das sensibilidades.....	14
3.4	Atualização das variáveis de projeto.....	16
3.5	Procedimento de otimização pelo método BESO.....	18
4	O BESO APLICADO A PROBLEMAS DE TENSÃO E FADIGA.....	20
4.1	Dificuldades da otimização topológica baseada em tensão.....	20
4.2	Minimização de tensões com restrição de volume.....	21
4.2.1	Análise de elementos finitos.....	22
4.2.2	Análise de sensibilidade.....	23
4.2.3	Procedimento BESO para minimização de tensões.....	26
4.3	Minimização de volume com restrição de tensão.....	26
4.3.1	Procedimento BESO para minimização de volume com restrição de tensão.....	27
4.4	Minimização de volume com restrição de fadiga.....	29
4.4.1	Procedimento BESO para minimização de volume com restrição de fadiga.....	32
5	RESULTADOS	33
5.1	Otimização para minimização de tensões com restrição de volume.....	33

5.1.1	Verificação dos algoritmos para minimização de flexibilidade e tensões.....	33
5.1.2	Exemplos numéricos	36
5.1.2.1	Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 1	36
5.1.2.2	Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2.....	38
5.1.3	Estudo da influência dos parâmetros do BESO.....	39
5.1.3.1	Efeitos do raio de filtragem e da taxa evolucionária	40
5.1.3.2	Efeitos da taxa evolucionária e do fator da norma-P.....	41
5.2	Otimização para minimização de volume com restrição de tensão.....	43
5.2.1	Viga longa bi-engastada – Exemplo 1	43
5.2.2	Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2.....	45
5.2.3	Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 3	47
5.3	Otimização para minimização de volume com restrição de fadiga.....	49
5.3.1	Viga longa bi-engastada – Exemplo 1	49
5.3.2	Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2.....	51
5.3.3	Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 3	53
5.3.4	Viga em balanço com carga concentrada – Exemplo 4.....	54
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	57
6.1	Conclusões.....	57
6.2	Sugestões	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
	APÊNDICE A FADIGA	65

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Tipos de otimização estrutural [Adaptado de: Bendsøe e Sigmund, 2003]	2
Figura 1.2 – Otimização de um componente aeroespacial [Adaptado de: Tomlin e Meyer, 2011]	3
Figura 3.1 – Efeitos de tabuleiro de xadrez e independência de malha.....	14
Figura 3.2 – Filtragem das sensibilidades	15
Figura 3.3 – Efeitos da estabilização	16
Figura 3.4 – Fluxograma do método BESO	19
Figura 4.1 – Elemento bilinear de 4 nós	22
Figura 5.1 – Viga em balanço com carga concentrada.....	34
Figura 5.2 – Verificação dos resultados: (a) Nabaki et al., 2019a e (b) Este trabalho	34
Figura 5.3 – Evolução da flexibilidade e do volume	35
Figura 5.4 – Evolução da tensão norma-P e do volume	35
Figura 5.5 – Viga em balanço com carga distribuída.....	36
Figura 5.6 – Viga em balanço com carga distribuída: (a) Xia et al., 2018 e (b) Este trabalho	37
Figura 5.7 – Evolução da flexibilidade, tensão norma-P e volume.....	37
Figura 5.8 – Viga entalhada bi-apoiada.....	38
Figura 5.9 – Viga entalhada bi-apoiada (a) Xia et al., 2018 e (b) Este trabalho	39
Figura 5.10 – Evolução da flexibilidade, tensão norma-P e do volume.....	39
Figura 5.11 – Exemplo 1: Efeitos do r_{\min} e da ER	40
Figura 5.12 – Exemplo 2: Efeitos do r_{\min} e da ER	41
Figura 5.13 – Exemplo 1: Efeitos do ER e do P	42
Figura 5.14 – Exemplo 2: Efeitos do ER e do P	42
Figura 5.15 – Viga longa bi-engastada.....	43
Figura 5.16 – Resultados do Exemplo 1.....	44
Figura 5.17 – Exemplo 1: Evolução da tensão máxima e do volume	44
Figura 5.18 – Viga entalhada bi-apoiada.....	45
Figura 5.19 – Resultados do Exemplo 2.....	46
Figura 5.20 – Exemplo 2: Evolução da tensão máxima e do volume	46
Figura 5.21 – Viga em balanço com carga distribuída.....	47
Figura 5.22 – Resultados do Exemplo 3.....	48

Figura 5.23 – Exemplo 3: Evolução da tensão máxima e do volume	48
Figura 5.24 – Viga longa bi-engastada.....	50
Figura 5.25 – Resultados do Exemplo 1.....	50
Figura 5.26 – Exemplo 1: Evolução do dano máximo e do volume	51
Figura 5.27 – Viga entalhada bi-apoiada.....	51
Figura 5.28 – Resultados do Exemplo 2.....	52
Figura 5.29 – Exemplo 2: Evolução do dano máximo e do volume	52
Figura 5.30 – Viga em balanço com carga distribuída.....	53
Figura 5.31 – Resultados do Exemplo 3.....	53
Figura 5.32 – Exemplo 3: Evolução do dano máximo e do volume	54
Figura 5.33 – Viga em balanço com carga concentrada.....	54
Figura 5.34 – Resultados Exemplo 4: critério de Goodman modificado	55
Figura 5.35 – Resultados Exemplo 4: critério de Gerber	55
Figura 5.36 – Resultados Exemplo 4: critério de Soderberg.....	56
Figura A.1 – Estágios de falha por fadiga	65
Figura A.2 – Ciclos de carregamentos.....	66
Figura A.3 – Diagrama para diversos critérios de fadiga.....	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Propriedades do material utilizado	49
---	----

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BESO	<i>Bi directional Evolutionary Structural Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

b	Expoente de resistência à fadiga
\mathbf{B}_i	Matriz deformação-deslocamento
\mathbf{D}_i	Matriz constitutiva do material
c	Parâmetro de normalização
C	Flexibilidade média
c_a	Fator de proporção de tensão alternada
c_m	Fator de proporção de tensão média
E	Módulo de elasticidade do material
E^0	Módulo de elasticidade do elemento sólido
ER	Taxa evolucionária
\mathbf{f}	Vetor de forças
\mathbf{F}_{\max}	Vetor de forças máximas
F_{\min}	Força mínima aplicada na estrutura
F_{\max}	Força máxima aplicada na estrutura
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
G_T	Função salto para tensões
G_F	Função salto para fadiga
$g_j(\mathbf{x})$	Restrições de desigualdade
$h_k(\mathbf{x})$	Restrições de igualdade
I	Número da iteração
k	Número da iteração
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
\mathbf{K}_i^0	Matriz de rigidez de cada elemento sólido
$L_{i(\max)}$	Dano máximo na estrutura
L_i^{GM}	Dano pelo critério de Goodman modificado
L_i^{GER}	Dano pelo critério de Gerber
L_i^{SOD}	Dano pelo critério de Soderberg
M	Número de elementos dentro do raio de filtragem
N	Número de iterações consideradas para a convergência
N_e	Número total de elementos
N_f	Número de ciclos para vida em fadiga
N_j	Função de forma para cada nó j do elemento finito
p	Expoente de penalização
P	Fator da norma-P
r_{ij}	Distância entre os centroides dos elementos
r_{\min}	Raio mínimo de filtragem

\mathbf{u}	Vetor de deslocamento
\mathbf{u}_i	Vetor de deslocamento de cada elemento
V	Volume da estrutura
V^*	Volume prescrito para a topologia final/Restrição de volume
V_i	Volume de cada elemento
V_k	Volume estrutural iteração atual
V_{k+1}	Volume estrutural da próxima iteração
w	Fator peso
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto
x_i	Variável de projeto de cada elemento
x_i^{k+1}	Variável de projeto de cada elemento da próxima iteração
$x_{\text{máx}}$	Variável de projeto com valor máximo
$x_{\text{mín}}$	Variável de projeto com valor mínimo

Símbolos Gregos

α_i	Número de sensibilidade do elemento i
$\hat{\alpha}_i$	Número de sensibilidade filtrado do elemento i
$\hat{\alpha}_i^k$	Número de sensibilidade filtrado do elemento i na iteração atual (k)
$\tilde{\alpha}_i$	Número de sensibilidade estabilizado do elemento i
$\tilde{\alpha}_i^{k-1}$	Número de sensibilidade estabilizado do elemento i na iteração anterior ($k-1$)
α^{th}	Limiar de sensibilidade
β	Fator de amortecimento
ξ_j	Coordenada não-dimensional do nó j associada ao eixo x
η_j	Coordenada não-dimensional do nó j associada ao eixo y
λ	Multiplicador Lagrangeano
λ^T	Multiplicador Lagrangeano transposto
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor de variáveis adjuntas
$\boldsymbol{\lambda}^T$	Vetor de variáveis adjuntas transposto
ν	Coeficiente de Poisson
$\boldsymbol{\sigma}_i$	Tensor de tensões do elemento i
σ^*	Restrição de tensão
$\boldsymbol{\sigma}_{ai}$	Vetor de tensões alternadas para o elemento i
$\boldsymbol{\sigma}_{mi}$	Vetor de tensões médias para o elemento i
$\sigma_{a_i}^{vM}$	Tensão alternada de von Mises para o elemento i
$\sigma_{m_i}^{vM}$	Tensão media de von Mises para o elemento i
σ_f^*	Tensão crítica de fadiga
σ_i^{vm}	Tensão de von Mises do elemento i
σ_{max}^{vM}	Tensão de von Mises máxima
$\sigma_{\text{max}}^{I-1}$	Tensão de von Mises máxima da iteração anterior

σ_G^{PN}	Tensão da norma-P
$\sigma_G^{PN}{}_{(\max)}$	Tensão da norma-P normalizada
σ_y	Tensão de escoamento
σ_{ut}	Tensão de ruptura
$(\sigma_i)_{N_f}$	Tensão limite de fadiga para um número de ciclos N_f
σ_f'	Coeficiente de resistência à fadiga
τ	Tolerância para convergência

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo aborda conceitos básicos sobre otimização estrutural, os tipos e os elementos que compõem o problema. Em seguida, são apresentados a motivação e os objetivos deste trabalho. Por fim, apresenta-se a organização desta dissertação através de uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

1.1 Otimização estrutural

Otimização estrutural pode ser definida como o processo de estabelecer o melhor projeto estrutural entre todos os possíveis, dentro de um objetivo prescrito, e um conjunto de limitações geométricas e/ou comportamentais [Olhoff e Taylor, 1983].

Os elementos que compõem a formulação de um problema de otimização são [Haftka e Gürdal, 1992]:

- *Função objetivo* [$f(\mathbf{x})$]: Funções que podem ser aprimoradas e utilizadas para mensurar a eficácia de cada projeto. Para problemas de otimização estrutural, peso, deslocamento, tensões, frequências de vibração, custo, etc. podem ser utilizados como funções objetivo.
- *Variáveis de projeto* [\mathbf{x}]: São parâmetros utilizados para expressar o potencial de mudança da estrutura, controlam a geometria, propriedades do material, etc. As variáveis de projeto podem ser contínuas ou discretas, normalmente apresentadas na forma vetorial. Variáveis de projeto contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo permissível, enquanto que para as discretas apenas são permitidos valores isolados dentro de uma lista de valores permitidos.
- *Restrições*: Delimitam o problema em estudo. Quando descritas por inequações, são chamadas de restrições de desigualdade. Quando determinam uma condição que a estrutura deverá respeitar, por exemplo, a condição de equilíbrio, elas são definidas por equações e chamadas de restrições de igualdade.

Um problema genérico de otimização pode ser escrito conforme a Equação 1.1.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar : } f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeito a : } g_j(\mathbf{x}) > 0, \quad j = 1, \dots, m \\
 &\quad \quad \quad h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, n \\
 &\quad \quad \quad x_{\min} \leq \mathbf{x} \leq x_{\max}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo, \mathbf{x} é o vetor das variáveis de projeto, $g_j(\mathbf{x})$ são restrições de desigualdade e $h_k(\mathbf{x})$ são restrições de igualdade. As variáveis de projeto são delimitadas por valores mínimos e máximos, dados por x_{\min} e x_{\max} .

Os problemas de otimização estrutural são classificados em: dimensional, de forma ou topológica. Em uma otimização dimensional, cada variável de projeto descreve uma dimensão da estrutura, por exemplo, uma espessura ou uma área. No caso de uma otimização de forma, busca-se o melhor formato para uma estrutura, assim a variável de projeto representa o domínio da estrutura. Por fim, otimização topológica diz respeito a obter a melhor distribuição de material para uma estrutura, como por exemplo, a quantidade, localização e formatos de furos, assim como a conectividade ao longo do domínio [Bendsøe e Sigmund, 2003]. A Figura 1.1 apresenta um exemplo de cada caso de otimização estrutural.

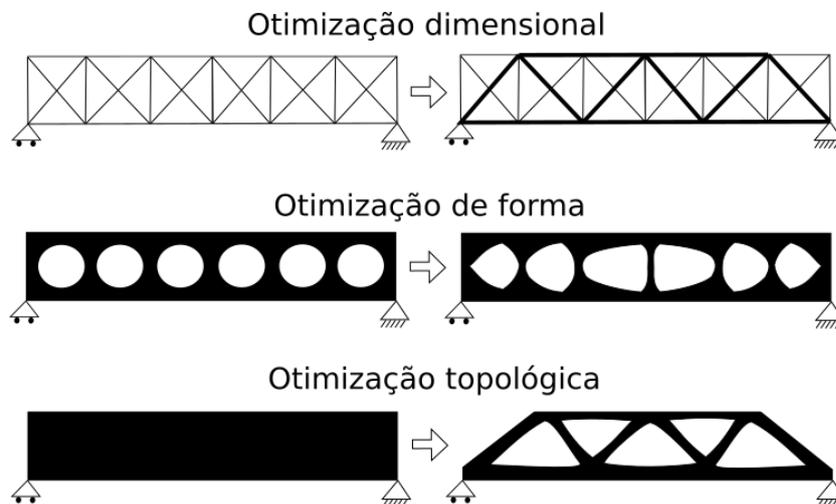


Figura 1.1 – Tipos de otimização estrutural [Adaptado de: Bendsøe e Sigmund, 2003]

1.2 Motivação

Com o crescente avanço computacional, a otimização topológica empregando o método dos elementos finitos vem demonstrando grande potencial para aplicação em

problemas da indústria, possibilitando melhorar o desempenho estrutural de componentes atendendo aos diferentes objetivos de um projeto, como por exemplo, redução de massa e volume, mudança de frequências naturais, redução dos níveis de tensão, etc. Porém, trabalhos envolvendo otimização de flexibilidade ou outros objetivos que não consideram as variações de tensões durante as mudanças na geometria podem causar a violação de critérios de projeto.

Avaliando o cenário da indústria de veículos, por exemplo, onde a busca por componentes cada vez mais leves e capazes de atender aos requisitos de durabilidade é constante, percebe-se grandes avanços nos métodos de simulação virtual capazes de reduzir investimentos com protótipos e testes experimentais. Pode-se citar como exemplo os trabalhos apresentados por Purushothaman et al., 2009, onde é apresentado uma simulação de durabilidade virtual e, Mantovani et al., 2017, que realizaram a otimização topológica de um painel de automóvel considerando restrições nos processos de fabricação. Tomlin e Meyer realizaram a otimização topológica de um componente da indústria aeroespacial, apresentado na Figura 1.2, tendo como objetivo reduzir o peso e maximizar a rigidez.

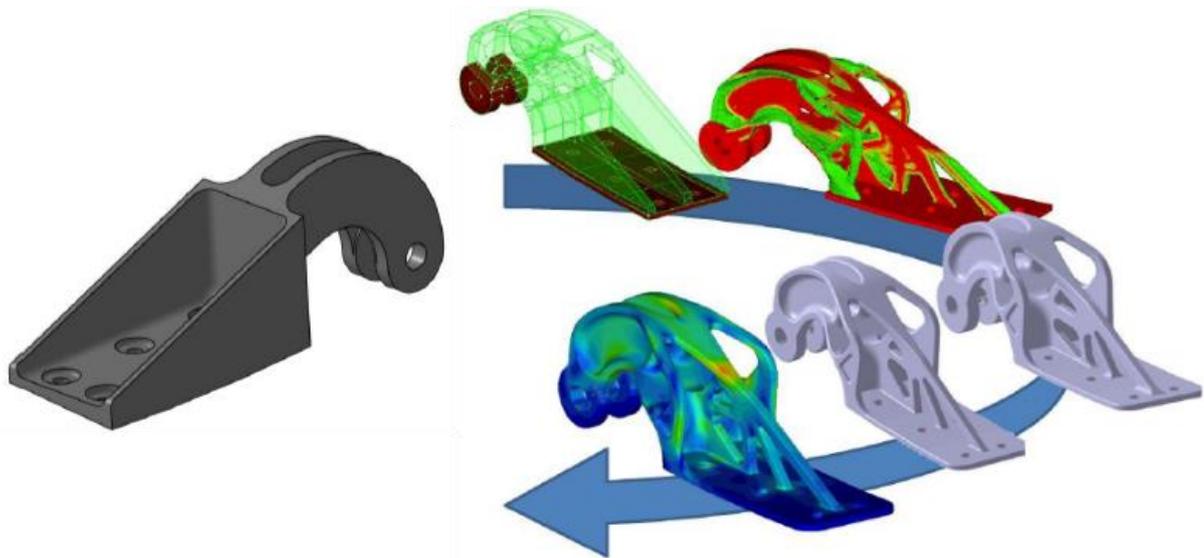


Figura 1.2 – Otimização de um componente aeroespacial [Adaptado de: Tomlin e Meyer, 2011]

Deaton e Grandhi, 2014, elencaram em sua pesquisa os principais desenvolvimentos relacionados à otimização topológica no período entre os anos 2000 e 2012. Em relação à otimização topológica baseada em tensões, destaca-se que os principais avanços foram realizados utilizando métodos baseados em densidade, como por exemplo, o método SIMP

(*Solid Isotropic Material with Penalization*) e também métodos que possuem dependência da geometria inicial como o *level-set*. Por fim, ressaltam este problema entre os assuntos com potencial para desenvolvimentos.

Tendo em vista que Xia et al., 2018, estenderam o método evolucionário bidirecional (BESO - *Bi directional Evolutionary Structural Optimization*) para minimização de tensão com restrição de volume, e levando em consideração o potencial que a otimização topológica demonstra para implementação em meio industrial, onde muitos projetos adotam como critérios de aprovação a redução de massa estrutural e critérios de falha baseados em um limite de tensão ou fadiga, almeja-se aplicar o método BESO para a solução de problemas em 2D baseados em tensões e também implementar uma solução que permita a utilização de restrições de fadiga.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar algoritmos computacionais capazes de realizar otimização topológica através do método evolucionário bidirecional (BESO) aplicado a problemas baseados em tensão e fadiga.

Como objetivos específicos têm-se:

- Implementar e verificar um algoritmo do método BESO baseado em tensão;
- Comparar os resultados obtidos pela metodologia implementada com resultados obtidos por outros métodos disponíveis na literatura;
- Realizar experimentos numéricos para avaliar a influência dos parâmetros de otimização do método BESO nos resultados obtidos;
- Implementar um algoritmo para minimização do volume estrutural considerando uma restrição de tensão;
- Estender o algoritmo de minimização de volume de modo a permitir o uso de restrições de fadiga por diferentes critérios.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em seis capítulos.

No Capítulo 1 são abordados conceitos gerais sobre otimização estrutural, como também são apresentadas a motivação e os objetivos do trabalho.

O Capítulo 2 expõe a revisão bibliográfica, apresentando o histórico de desenvolvimento da otimização topológica aplicada a problemas com restrição de tensão e fadiga.

O Capítulo 3 contém a fundamentação teórica referente ao método de otimização topológica BESO e sua formulação aplicada a problemas de flexibilidade.

O Capítulo 4 apresenta o método BESO aplicado a diferentes problemas envolvendo tensão e fadiga.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos para os diferentes problemas estudados.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão bibliográfica dividida em duas partes. Na primeira parte, são destacados alguns dos principais trabalhos que caracterizam a evolução da otimização topológica considerando restrições de tensões em diferentes métodos. Na segunda parte são apresentados os principais desenvolvimentos considerando as restrições de fadiga.

2.1 Otimização topológica com restrições de tensão

Sved e Ginos, 1968, ao realizar a otimização topológica de uma treliça de três barras, descobrem o problema de singularidade quando constatarem que uma estrutura otimizada só poderia ser obtida removendo-se uma das barras da estrutura, violando a restrição de tensão imposta àquele membro.

Kirsch, 1990, desenvolve um trabalho com o objetivo de investigar as propriedades do problema de singularidade, avaliando os efeitos de diferentes tipos de restrição na otimização topológica de treliças. É demonstrado que o problema é causado principalmente por restrições de tensão.

Yang e Chen, 1996, implementam o método das densidades para otimização topológica considerando minimização de tensões e de flexibilidade utilizando as funções de Kreisselmeier-Steinhauser (K-S) e de Park e Kikuchi (KK) para aproximar as tensões locais por meio de funções globais de tensão.

Cheng e Guo, 1997, propõem o método “relaxação \mathcal{E} ” para evitar o problema de singularidade em otimização topológica. A técnica é aplicada em diferentes estruturas de treliças, onde se relaxam as restrições de forças internas de suas barras e modifica-se o formato do domínio, eliminando a singularidade da formulação do problema.

Duysinx e Bendsøe, 1998, apresentam uma publicação que é considerada pioneira no assunto de otimização topológica relacionada a tensões. Em seu trabalho, propuseram uma solução para problemas de otimização topológica com restrição de tensão envolvendo materiais compósitos em camadas e também para materiais isotrópicos utilizando o método SIMP combinado com a técnica de relaxação \mathcal{E} para evitar o problema de singularidade.

Duysinx e Sigmund, 1998, implementam duas restrições globais de tensão baseadas na norma-P e na média-P do critério de relaxação \mathcal{E} , demonstrando que o uso de restrições

globais é uma boa alternativa ao uso de restrições locais em otimização topológica de estruturas contínuas. Observaram que o tempo computacional de processamento é bastante inferior, porém o uso de restrições globais pode resultar em topologias diferentes do que com o uso de restrições locais.

Allaire et al., 2004, estendem o método de otimização estrutural por homogenização para aplicação em problemas de minimização de tensões empregando uma função objetivo relaxada.

Allaire e Jouve, 2008, estendem o método *level-set* para solução de problemas de otimização de forma e topologia baseadas em tensão. Uma medida de tensão global em forma integral é empregada como função objetivo. O método *level-set* mostra-se capaz de evitar o problema de singularidade.

Bruggi, 2008, apresenta uma alternativa para o método relaxação- \mathcal{E} , chamada de Aproximação-qp, que baseia-se no modelo SIMP com a introdução de novos expoentes de penalização que atuam na suavização das restrições de tensões. O método é aplicado a problemas para minimizar o peso com restrição de tensão em um exemplo bidimensional e também com exemplos analíticos. São apresentadas comparações entre os dois métodos.

Paris et al., 2009, empregam o método SLP (*Sequential Linear Programming*) em problemas de minimização de peso com restrições de tensão aplicadas de forma local e global. As restrições locais de tensão foram aplicadas no centroide de cada elemento do domínio. As globais, por sua vez, foram expressas pela função de agregação de Kreisselmeier-Steinhauser (K-S), que concentra todas as restrições locais em uma única restrição global.

Paris et al., 2010, propõem um método para subdividir o domínio em blocos com restrições de tensões próprias, impostas sobre cada bloco na forma de uma restrição global. O método é testado e comparado com as abordagens clássicas de restrições locais e globais, para problemas de minimização de peso com restrições de tensão. Os resultados demonstraram que o processo implementado mantém a vantagem das restrições globais em relação ao custo computacional e também é capaz de mitigar a redução na precisão dos resultados, ocasionada pelo uso deste tipo de restrição.

Le et al., 2010, empregam o método SIMP com filtragem de densidades para otimização topológica envolvendo tensões. A norma-P, da razão entre a tensão relaxada de von Mises de cada elemento e o limite de tensão, foi utilizada no problema de minimização de tensões com restrição de volume e também como restrição de tensão máxima no problema de minimização de volume. Propuseram uma medida de tensão global normalizada com o

objetivo de estimar a tensão máxima na estrutura e apresentaram uma abordagem alternativa às restrições locais e globais, onde as restrições de tensões são aplicadas a regiões do domínio e, em seguida, calcula-se a medida de tensão global normalizada de cada subdomínio.

Bruggi e Duysinx, 2012, empregam o método SIMP para resolver problemas de minimização de peso sujeito a restrições de flexibilidade e tensão local, utilizando o critério de falha de Drucker-Prager combinado com a Aproximação-qp.

Holmberg et al., 2013, desenvolvem um método de implementação de restrições de tensões onde elas são usadas em conjunto com uma função objetivo que pode minimizar massa ou maximizar a rigidez. O método SIMP é utilizado juntamente com diferentes técnicas de distribuição das restrições de tensões, que são definidas por uma abordagem modificada da norma-P da tensão de von Mises penalizada.

Xia et al., 2018, estenderam o método BESO para problemas de minimização de tensão com restrição de volume. A análise de sensibilidade é baseada na norma-P da tensão de von Mises. Um novo método de filtragem e estabilização é proposto para amenizar os efeitos não lineares causados pelas tensões. O método proposto mostrou-se bastante eficiente e capaz de resolver problemas em 2D e 3D.

Fan et al., 2019, implementaram o método BESO para problemas de minimização de flexibilidade com múltiplas restrições, volume e tensão máxima de von Mises estimada pela norma-P. Para imposição da restrição de tensão, foi utilizada a técnica da função objetivo aumentada por um multiplicador de Lagrange. A efetividade da metodologia foi demonstrada com exemplos em 2D.

Nabaki et al., 2019a, propuseram uma alternativa ao método apresentado por Xia et al., 2018, onde o problema é formulado para minimização da norma-P da tensão de von Mises com restrição de volume. A análise de sensibilidade é similar àquela apresentada por Holmberg et al., 2013, onde os vetores de tensão do material são considerados de forma completa e a filtragem e estabilização são implementadas conforme descrito por Huang e Xie, 2007. Os autores reportaram melhores resultados do que os obtidos pelo método originalmente proposto.

2.2 Otimização topológica com restrições de fadiga

Sherif et al., 2010, utilizam o conceito de cargas estáticas equivalentes na otimização topológica de sistemas dinamicamente carregados sujeitos a restrições de fadiga. O problema

de otimização é formulado com objetivo de minimizar o volume da estrutura, considerando uma restrição de dano de acordo com a regra de Palmgren-Miner. Para a otimização topológica, é empregado o método SIMP, implementado através do software comercial Tosca[®]. A análise de fadiga, por sua vez, é realizada pelo software FEMFAT[®]. O método apresentado mostrou-se aplicável para problemas teóricos e também para um caso industrial.

Holmberg et al., 2014, estudam o problema de otimização topológica para minimização de massa com restrições de tensão estática e fadiga de alto ciclo. A análise de fadiga e a otimização topológica, pelo método SIMP, são tratadas em etapas separadas. A análise de fadiga visa determinar a máxima tensão que cause um dano acumulado permissível. Para isso, utiliza-se um diagrama de Haigh e a regra de Palmgren-Miner. Desta forma, a restrição de fadiga é convertida em uma restrição de tensão, e a análise de sensibilidade baseia-se apenas na tensão principal máxima.

Jeong et al., 2015, apresentam um método de otimização topológica com restrições contra falhas estáticas e fadiga, considerando carregamentos constantes e proporcionais. A otimização topológica é realizada utilizando o método SIMP, tendo como objetivo minimizar o volume estrutural. As falhas estáticas são baseadas na tensão de escoamento. As falhas por fadiga, por sua vez, são avaliadas pelo método da vida sob tensão. Primeiramente determinam-se as tensões médias por meio de análises estáticas, enquanto que as tensões alternantes são obtidas por análises harmônicas, em seguida são aplicados os critérios de Goodman modificado, Gerber e Soderberg. Outra abordagem também é avaliada, onde implementam critérios de von Mises assinalado diferenciáveis e dividem o domínio em regiões com restrições globais aplicadas por meio da norma-P normalizada.

Collet et al., 2017, utilizam o método SIMP para minimizar o peso da estrutura considerando restrições de flexibilidade e fadiga de alto ciclo. A restrição de fadiga é imposta por meio do critério de Goodman modificado, onde as tensões são obtidas por uma análise estática e, em seguida, aplica-se o método de Sines para determinação das tensões médias e alternadas. Esta metodologia produz como resultado uma topologia com vida infinita.

Oest e Lund, 2017, apresentam um método para otimização de problemas com restrição de fadiga para vida finita, que inclui a análise de fadiga diretamente no processo de otimização. Tendo como objetivo minimizar a massa da estrutura pelo método SIMP, foi imposta uma restrição baseada na norma-P do dano acumulado de cada elemento. O dano por fadiga é determinado pelo critério de Sines, onde as tensões alternadas e médias são obtidas por uma contagem de rainflow. Por fim, o dano acumulado é calculado utilizando a regra de

Palmgren-Miner e uma curva S-N. O método proposto é válido para carregamentos proporcionais.

Nabaki et al., 2018, implementam a metodologia apresentada por Holmberg et al., 2014, porém utilizando o método BESO. Assim como no trabalho original, uma tensão crítica de fadiga é usada como uma restrição de tensão na otimização topológica para minimização de volume. Neste trabalho o cálculo da tensão crítica de fadiga difere do original, baseando-se no critério de falha de Goodman ao invés do dano acumulado.

Nabaki et al., 2019b, apresentam um método onde o critério de falha de Goodman modificado é implementado diretamente na análise de sensibilidade pelo método BESO. O problema de otimização topológica é formulado para minimizar a flexibilidade, considerando restrições de volume e fadiga de alto ciclo com carregamentos proporcionais. Os números de sensibilidade levam em conta as influências da flexibilidade e também da fadiga, utilizando a técnica do multiplicador Lagrangeano. A contribuição da fadiga é avaliada pelo gradiente da norma-P do critério de Goodman modificado para cada elemento.

3 O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA BI-DIRECIONAL

O método de otimização estrutural evolucionária bidirecional começou a ser desenvolvido por Yang et al., 1999. Desde então, foram apresentadas diversas melhorias e correções, dentre as quais se destacam as propostas de Huang e Xie, 2007, onde foram introduzidos métodos de filtragem e estabilização dos números de sensibilidade, e de Huang e Xie, 2010a, que demonstraram a capacidade do BESO de realizar otimização topológica considerando múltiplas restrições. Neste capítulo, será apresentado o método BESO para otimização topológica, tendo como objetivo a minimização de flexibilidade com uma restrição de volume estrutural.

3.1 Definição do problema de otimização

Segundo Huang e Xie, 2007, o problema de minimização de flexibilidade com restrição do volume estrutural, pode ser formulado conforme a Equação 3.1.

$$\begin{aligned} \text{minimizar : } C &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{sujeito a : } &\begin{cases} V^* - \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i = 0 \\ x_i = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores de força e deslocamento, respectivamente. C é a flexibilidade média da estrutura, V^* é o volume prescrito para a topologia final, V_i é o volume de cada elemento e N_e é o número total de elementos na estrutura. As variáveis de projeto binárias, que representam a densidade de cada elemento, são denotadas por x_i . Neste trabalho adota-se $x_{\min} = 0,001$ para representar um elemento removido/vazio, enquanto que $x_i = 1$ descreve um elemento presente/sólido na estrutura.

A análise da formulação apresentada permite observar que, durante o processo de otimização, nenhum elemento é verdadeiramente removido do domínio, sendo apenas substituído por um elemento vazio. Esta abordagem é conhecida como *soft-kill* BESO.

3.2 Análise de sensibilidade

Esta análise tem como objetivo determinar o número de sensibilidade de cada elemento, que será o parâmetro utilizado para definir quais elementos serão adicionados/removidos durante as iterações de otimização topológica. Os números de sensibilidade são determinados pela derivada da função objetivo em relação a cada variável de projeto, este cálculo é realizado a partir dos resultados de uma análise de elementos finitos.

Os números de sensibilidade para o problema de minimização de flexibilidade são determinados a partir de uma análise estática de elementos finitos, definida pela Equação 3.2, conforme descrito em Huang e Xie, 2010b.

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.2)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores de força e deslocamento, respectivamente. \mathbf{K} é matriz de rigidez global da estrutura, Equação 3.3, expressa em função das variáveis de projeto, x_i , e das matrizes de rigidez de cada elemento sólido, \mathbf{K}_i^0 , e p é um expoente de penalização. Neste trabalho adota-se $p=3$.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_e} x_i^p \mathbf{K}_i^0 \quad (3.3)$$

Considerando como função objetivo a flexibilidade, definida anteriormente na Equação 3.1, a sensibilidade da função será determinada a partir da derivada da flexibilidade em relação às variáveis de projeto, conforme expresso na Equação 3.4.

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \quad (3.4)$$

Fazendo uso do método adjunto para determinar a sensibilidade do vetor de deslocamento, a função objetivo é reescrita considerando o multiplicador Lagrangeano, λ .

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}) \quad (3.5)$$

A sensibilidade da função objetivo modificada pode ser exposta como:

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{d\lambda^T}{dx_i} (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}) + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{f}}{dx_i} - \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \right) \quad (3.6)$$

Reescrevendo a Equação 3.6 e assumindo a hipótese de que o vetor de forças não sofre variações em função das variáveis de projeto, obtêm-se:

$$\frac{dC}{dx_i} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^T - \lambda^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} - \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \quad (3.7)$$

Resolvendo λ com o objetivo de eliminar o termo $\frac{d\mathbf{u}}{dx_i}$, a Equação 3.7 resulta em:

$$\frac{dC}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \quad (3.8)$$

Por fim, a sensibilidade da função objetivo é obtida derivando-se a Equação 3.3 e substituindo-a na Equação 3.8, assim obtemos:

$$\frac{dC}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \quad (3.9)$$

Desta forma, os números de sensibilidade dos elementos, representados por α_i , são obtidos pela Equação 3.10.

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{dC}{dx_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i & \text{quando } x_i = 1 \\ \frac{x_{\min}^{p-1}}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i & \text{quando } x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (3.10)$$

Analisando as Equações 3.3 e 3.10 pode-se entender a origem de um caso especial da abordagem *soft-kill* BESO, conhecido como *hard-kill* BESO, onde os elementos são verdadeiramente removidos do domínio durante as iterações de otimização e trabalha-se com $x_{\min} = 0$. Observa-se que, quando o expoente de penalização, p , tende ao infinito, os números de sensibilidade dos elementos vazios serão zero e eles serão de fato removidos do domínio.

3.3 Filtragem e estabilização das sensibilidades

O processo de filtragem e estabilização das sensibilidades foi introduzido no método BESO por Huang e Xie, 2007, com o objetivo de obter soluções convergentes que não apresentassem o problema de formação de tabuleiro de xadrez (Figura 3.1a) e dependência de malha, isto é, fornecer soluções que não variam com o refinamento da malha de elementos finitos (Figura 3.1b).

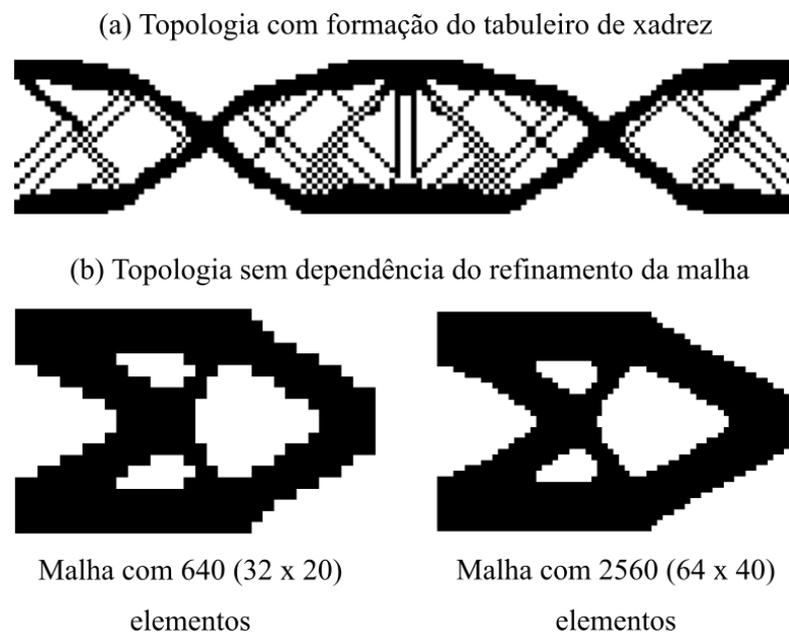


Figura 3.1 – Efeitos de tabuleiro de xadrez e independência de malha

No procedimento original de filtragem, os números de sensibilidade elementares são convertidos em nodais para então determinar os números de sensibilidade elementares filtrados. Neste trabalho, para simplificar o processo, optou-se pela filtragem aplicada diretamente às sensibilidades elementares, pois, conforme Xia et al., 2016, os dois esquemas produzem resultados práticos equivalentes.

Os números de sensibilidade filtrados, $\hat{\alpha}_i$, são obtidos pelas Equações 3.11 e 3.12

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^M w(r_{ij}) \alpha_i}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} \quad (3.11)$$

onde M é o número de elementos que possuem influência na filtragem. O fator peso, $w(r_{ij})$, é dado por:

$$w(r_{ij}) = \begin{cases} r_{\min} - r_{ij} & \text{para } r_{ij} < r_{\min} \\ 0 & \text{para } r_{ij} \geq r_{\min} \end{cases} \quad (3.12)$$

onde r_{ij} e r_{\min} , representam as distâncias entre os centroides dos elementos i e j da malha e o raio mínimo de filtragem, respectivamente. O raio mínimo de filtragem, parâmetro de entrada do BESO, delimita a região de influência que a vizinhança do domínio possui sobre o elemento central e, conseqüentemente, o valor de M (número de elementos dentro da região de influência do filtro), conforme ilustrado na Figura 3.2.

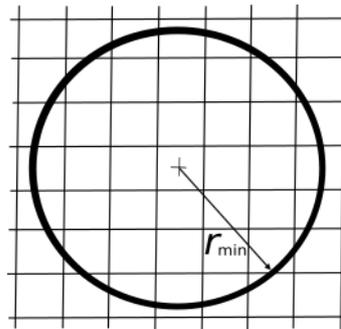


Figura 3.2 – Filtragem das sensibilidades

Com o objetivo de melhorar e facilitar a convergência do processo evolucionário, aplica-se um filtro de estabilização, onde modificam-se os números de sensibilidade dos elementos, considerando a sensibilidade das iterações anteriores. Desta forma o número de sensibilidade estabilizado é determinado pela Equação 3.13:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_i^k + \tilde{\alpha}_i^{k-1}}{2} \quad (3.13)$$

onde $\hat{\alpha}_i^k$ e $\tilde{\alpha}_i^{k-1}$ são os números de sensibilidade filtrados da iteração atual (k) e o número de sensibilidade estabilizado da iteração anterior ($k-1$), respectivamente.

Os gráficos da Figura 3.3 apresentam um exemplo da influência do filtro de estabilização sobre a função objetivo, nota-se que quando utilizada a estabilização, são evitadas grandes variações durante a convergência.

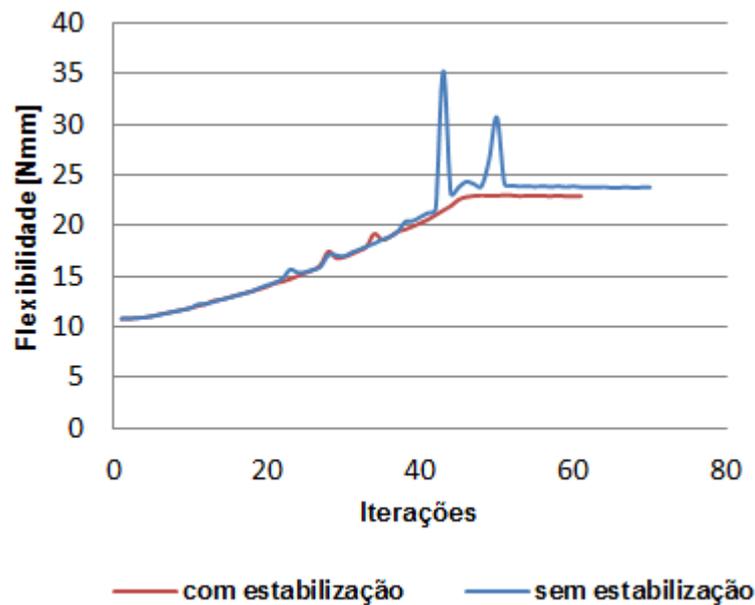


Figura 3.3 – Efeitos da estabilização

3.4 Atualização das variáveis de projeto

O método BESO realiza a otimização estrutural por meio da remoção ou inclusão de material a um domínio. Este processo é realizado em etapas sucessivas que variam de acordo com a taxa evolucionária, ER , parâmetro de entrada do BESO, que define a fração de material a ser removido da estrutura a cada iteração de otimização. O volume é gradualmente removido até que a restrição volumétrica definida, por exemplo, seja satisfeita. Esta condição é verificada por meio da comparação da restrição de volume, V^* , com o volume estrutural da próxima iteração, V_{k+1} , determinado pela Equação 3.14:

$$V_{k+1} = V_k (1 - ER) \quad (3.14)$$

Quando a restrição é satisfeita, o volume da estrutura não é mais alterado. Desta forma, a restrição de volume é atribuída como volume estrutural para as próximas iterações:

$$V_{k+1} = V^* \quad (3.15)$$

A atualização das variáveis de projeto define a nova topologia da estrutura, onde a distribuição de material sobre o domínio é realizada de acordo com os números de sensibilidade de cada elemento. Neste trabalho, empregou-se o método descrito por Huang e Xie, 2010b, porém, sem a implementação da taxa de admissão, que controla a quantidade de elementos adicionados. Desta forma, a atualização é realizada por meio do seguinte processo:

Primeiramente, organizam-se os números de sensibilidades dos elementos de forma decrescente, em seguida, aplicam-se as seguintes etapas:

1. Define-se o limiar de sensibilidade, α^{th} , determinado em função do volume estrutural da próxima iteração, conforme a Equação 3.14. Por exemplo, um domínio discretizado em 1000 elementos onde $\alpha_1 > \alpha_2 \dots > \alpha_{1000}$, em que V_{k+1} corresponde a 725 elementos sólidos, tem-se que $\alpha^{th} = \alpha_{725}$.
2. Atualizam-se as variáveis de projeto de modo que um elemento presente no domínio ($x_i = 1$) seja removido (x_i é atualizado para $x_i = x_{\min} = 0,001$) quando $\alpha_i \leq \alpha^{th}$ e um elemento ausente ($x_i = x_{\min} = 0,001$) seja adicionado (x_i é atualizado para $x_i = 1$) caso $\alpha_i > \alpha^{th}$. Esta etapa pode ser matematicamente representada pela Equação 3.16.

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} 0,001 & \text{se } x_i^k = 1 \text{ e } \alpha_i \leq \alpha^{th} \\ 1 & \text{se } x_i^k = 0,001 \text{ e } \alpha_i > \alpha^{th} \\ x_i^k & \text{qualquer outra condição} \end{cases} \quad (3.16)$$

Os ciclos de otimização são repetidos até serem satisfeitos a restrição de volume e o critério de convergência definido pela Equação 3.17.

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{k-N-i+1} \right|}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \leq \tau \quad (3.17)$$

onde k é o número da iteração, C é a função objetivo (flexibilidade, neste caso) e τ é a tolerância para convergência, neste trabalho utiliza-se $\tau = 0,001$. N é o número de iterações a serem consideradas na avaliação de convergência. Neste trabalho, adota-se $N = 5$ em todos os casos avaliados, o que implica em avaliar a convergência com base na tolerância das últimas 10 iterações.

3.5 Procedimento de otimização pelo método BESO

O procedimento evolucionário do método BESO pode ser implementado através das seguintes etapas:

1. Preparar o domínio para análise de elementos finitos: prepara-se a malha de elementos finitos e aplicam-se as condições de contorno, carregamento e propriedades do material;
2. Definir os parâmetros de entrada do método BESO: definem-se parâmetros como raio mínimo de filtragem (r_{\min}), taxa evolucionária (ER), expoente de penalização (p), etc.;
3. Realizar a análise de elementos finitos e determinar os números de sensibilidade: a análise de elementos finitos é realizada de acordo com as Equações 3.2 e 3.3, e o número de sensibilidade é determinado pela Equação 3.10;
4. Calcular o volume estrutural da próxima iteração: calcular o volume da estrutura na próxima iteração com a fração do volume já removido da estrutura, de acordo com Equação 3.14;
5. Realizar a filtragem e estabilização dos números de sensibilidade: aplicam-se os filtros descritos nas Equações 3.11 e 3.13;
6. Realizar a atualização das variáveis de projeto: atualizam-se as variáveis de projeto de acordo com o procedimento descrito na seção 3.4, resumido na Equação 3.16. Nesta etapa é gerada a topologia otimizada;

7. Repetir as etapas 3 a 6 até que a restrição volumétrica e o critério de convergência sejam satisfeitos: caso não sejam verificadas as condições das Equações 3.15 e 3.17, uma nova iteração de otimização é realizada considerando a topologia gerada na etapa anterior.

O processo é ilustrado pelo fluxograma na Figura 3.4.

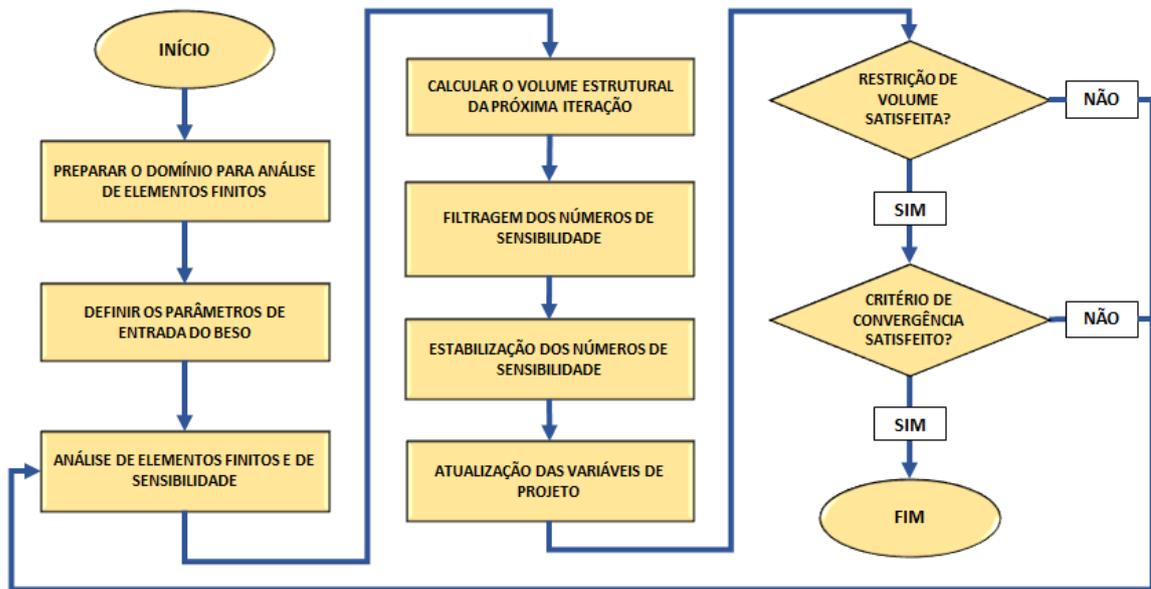


Figura 3.4 – Fluxograma do método BESO

4 O BESO APLICADO A PROBLEMAS DE TENSÃO E FADIGA

Neste capítulo serão apresentadas particularizações do método BESO para utilização em problemas com restrições de tensão e fadiga. Primeiramente, será apresentado um breve resumo sobre as principais dificuldades que são enfrentadas durante a solução destes tipos de problemas. Em seguida, o esquema apresentado por Nabaki et al., 2019a, será empregado para solução de problemas de minimização de tensões com restrição de volume e, posteriormente, servirá de base para solução de problemas onde o objetivo será a minimização do volume estrutural considerando restrições de tensão e fadiga.

4.1 Dificuldades da otimização topológica baseada em tensão

O trabalho apresentado por Le et al., 2010, apresenta um resumo das três principais dificuldades enfrentadas durante processos de otimização topológica baseada em tensão: singularidades, natureza local das tensões e o comportamento altamente não-linear das tensões.

O problema da singularidade foi primeiramente estudado por Kirsch, 1990, ao realizar a otimização topológica de treliças. Nos métodos de otimização baseados em densidades, com variáveis de projeto contínuas, o problema caracteriza-se pela apresentação de elementos com baixa densidade que podem apresentar altos níveis de tensão, impossibilitando a sua remoção durante o processo de otimização. Diversas soluções foram propostas para corrigir este problema, por exemplo, o método relaxação- ϵ proposto por Cheng e Guo, 1997, o método de tensão relaxada apresentado por Le et al., 2010, e de tensão penalizada apresentado por Holmberg et al., 2013. Conforme Nabaki et al., 2019a, o método BESO, por ser baseado em variáveis de projeto discretas (sólido ou vazio), evita naturalmente as singularidades aplicando as restrições de tensões somente nos elementos sólidos.

A natureza local das tensões gera a necessidade de uma enorme quantidade de restrições de tensões, ocasionando um elevado custo computacional para a solução do problema. Uma forma eficiente de tratar este problema é o emprego de uma medida global de tensão para aproximar a tensão máxima na estrutura, por exemplo, a norma-P apresentada por Duysinx e Sigmund, 1998, que também será implementada neste trabalho ou a função de Kreisselmeier-Steinhauser (K-S), utilizada por Paris et al., 2009.

O comportamento altamente não-linear das tensões ocorre devido à sensibilidade que elas possuem em relação a alterações na topologia, assim mudanças bruscas na geometria são drasticamente afetadas. Para minimizar este problema, Xia et al., 2018, propõem uma filtragem nos números de sensibilidade e nas variáveis de projeto para estabilizar o processo de otimização.

A natureza local e o comportamento não-linear das tensões tornam os resultados da otimização topológica baseada em tensões dependentes do refinamento da malha de elementos finitos. Esta característica é demonstrada em um exemplo estudado por Jeong et al., 2015, onde uma viga em balanço apresenta diferentes topologias para diferentes tamanhos de malhas, apesar da utilização de um filtro para independência de malha.

4.2 Minimização de tensões com restrição de volume

A otimização topológica para minimização de tensões com restrição de volume será implementada seguindo os procedimentos apresentados por Nabaki et al., 2019a, onde o problema é formulado de acordo com as Equações 4.1.

$$\begin{aligned} \text{minimizar : } \sigma_G^{PN}(x) &= \left(\frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} (\sigma_i^{vm}(x))^P \right)^{\frac{1}{P}} \\ \text{sujeito a : } &\begin{cases} V^* - \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i = 0 \\ x_i = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde σ_G^{PN} é a medida de tensão da norma-P modificada, o expoente P é o fator da norma-P, σ_i^{vm} é a tensão de von Mises no centroide dos elementos e N_e é o número total de elementos na estrutura. Nota-se que, à medida que o fator P tende ao infinito a tensão aproximada tende para o valor real da tensão máxima presente na estrutura. Neste trabalho, utiliza-se o valor de P variando entre 3 e 5, conforme sugerido por Nabaki et al., 2019a.

Conforme apresentado em Duysinx e Sigmund, 1998, a norma-P modificada ou média-P fornece aproximações abaixo do valor máximo, enquanto que a norma-P fornece aproximações acima do valor máximo.

4.2.1 Análise de elementos finitos

A estrutura é discretizada por uma malha de elementos finitos e utiliza-se uma análise estática linear para determinar as tensões de von Mises, onde a condição de equilíbrio da estrutura é descrita pela Equação 3.2.

O tensor de tensões de cada elemento, $\boldsymbol{\sigma}_i$, adotando o estado plano de tensões, é denotado pela Equação 4.2.

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T \quad (4.2)$$

onde \mathbf{D}_i é a matriz constitutiva do material, \mathbf{B}_i é a matriz deformação-deslocamento e \mathbf{u}_i é o vetor de deslocamento de cada elemento. Considerando o modelo de material sólido isotrópico com penalização (SIMP), detalhado em Bendsøe e Sigmund, 2003, e o estado plano de tensões, \mathbf{D}_i é dado pela Equação 4.3 [Nabaki et al., 2019a].

$$\mathbf{D}_i = \frac{E^0 x_i^p}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde E^0 e ν são respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

A matriz \mathbf{B}_i para o elemento bilinear de quatro nós, a ser usado neste trabalho, apresentado na Figura 4.1, é calculada pela Equação 4.4, como pode ser observado em Petyt, 2010.

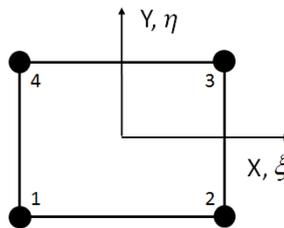


Figura 4.1 – Elemento bilinear de 4 nós

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 & \partial N_4/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y & 0 & \partial N_4/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial y & \partial N_4/\partial x \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde N_j são as funções de forma do elemento para cada nó j , escritas em termos das coordenadas não-dimensionais, ξ e η , conforme a Equação 4.5.

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta) \quad (4.5)$$

Finalmente, a tensão de von Mises pode ser determinada pela Equação 4.6.

$$\sigma_i^{vm} = \left(\sigma_{ix}^2 - \sigma_{ix} \sigma_{iy} + \sigma_{iy}^2 + 3\tau_{ixy}^2 \right)^{0,5} \quad (4.6)$$

4.2.2 Análise de sensibilidade

Os números de sensibilidades dos elementos são calculados derivando-se a norma-P da tensão de von Mises em relação às variáveis de projeto, conforme pode ser observado em Nabaki et al., 2019a; aplicando-se a regra da cadeia na Equação 4.1, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i(x)^T}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde o termo $\partial \sigma_G^{PN}(x)/\partial \sigma_i^{vm}$ é determinado pela Equação 4.8.

$$\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} = \left(\frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} (\sigma_i^{vm}(x))^P \right)^{\left(\frac{1}{P}-1\right)} \times \frac{1}{N_e} (\sigma_i^{vm}(x))^{P-1} \quad (4.8)$$

As derivadas da tensão de von Mises em relação a cada componente de tensão, $\partial\sigma_i^{vm}(x)/\partial\sigma_i$, considerando problemas em 2D, são definidas pelas Equações 4.9.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_i^{vm}(x)}{\partial\sigma_{ix}} &= \frac{1}{2\sigma_i^{vm}(x)}(2\sigma_{ix}(x) - \sigma_{iy}(x)) \\ \frac{\partial\sigma_i^{vm}(x)}{\partial\sigma_{iy}} &= \frac{1}{2\sigma_i^{vm}(x)}(2\sigma_{iy}(x) - \sigma_{ix}(x)) \\ \frac{\partial\sigma_i^{vm}(x)}{\partial\tau_{ixy}} &= \frac{3}{\sigma_i^{vm}(x)}\tau_{ixy}(x)\end{aligned}\quad (4.9)$$

Derivando-se a Equação 4.2, obtém-se:

$$\frac{\partial\sigma_i(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{D}(x)}{\partial x_i}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{u}(x)}{\partial x_i}\quad (4.10)$$

O termo $\partial\mathbf{D}(x)/\partial x_i$ é descrito pela Equação 4.11.

$$\frac{\partial\mathbf{D}(x)}{\partial x_i} = p\frac{E^0 x_i^{p-1}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\quad (4.11)$$

Aplicando-se a regra da cadeia à equação de equilíbrio, obtém-se:

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{K}(x)}{\partial x_i}\mathbf{u} + \mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{u}(x)}{\partial x_i}\quad (4.12)$$

Considerando a hipótese de que o vetor força não varia em função das variáveis de projeto, logo $\partial\mathbf{f}/\partial x_i = 0$, pode-se calcular $\partial\mathbf{u}(x)/\partial x_i$ conforme:

$$\frac{\partial\mathbf{u}(x)}{\partial x_i} = -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial\mathbf{K}(x)}{\partial x_i}\mathbf{u}\quad (4.13)$$

O termo $\partial\mathbf{K}(x)/\partial x_i$ é calculado por meio da Equação 4.14.

$$\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} = p x_i^{p-1} \mathbf{K}_i^0 \quad (4.14)$$

Reescrevendo a Equação 4.9 com base nas 4.10 e 4.13, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \times \left(\frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (4.15)$$

A Equação 4.16 pode ser resolvida pelo método adjunto, definindo-se a variável adjunta, λ , como:

$$\lambda^T = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \quad (4.16)$$

Pode-se calcular o vetor λ , por meio do sistema descrito na Equação 4.17.

$$\mathbf{K} \lambda = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^T \frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \quad (4.17)$$

Reescrevendo a Equação 4.15 considerando o vetor λ , obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B} \mathbf{u} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (4.18)$$

Logo, o número de sensibilidade para o problema de minimização de tensões é dado pela forma negativa do gradiente da norma-P da tensão de von Mises, conforme descrito na Equação 4.19.

$$\alpha_i = - \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} = - \left[\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B} \mathbf{u} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (4.19)$$

4.2.3 Procedimento BESO para minimização de tensões

O procedimento de implementação do BESO baseado em tensões é análogo ao descrito no capítulo 3, com variações nas etapas de análise de elementos finitos e de sensibilidade, onde é necessário o cálculo das tensões e do número de sensibilidade conforme descrito na Equação 4.19 e na avaliação da convergência que, neste caso, leva em conta a tensão de von Mises máxima, σ_{\max}^{vM} , após satisfeita a restrição de volume, conforme a Equação 4.20.

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N (\sigma_{\max, k-i+1}^{vM} - \sigma_{\max, k-N-i+1}^{vM}) \right|}{\sum_{i=1}^N \sigma_{\max, k-i+1}^{vM}} \leq 0,01 \quad (4.20)$$

4.3 Minimização de volume com restrição de tensão

O problema de minimização de volume com restrição de tensão pode ser enunciado e implementado como apresentado em Nabaki, 2019c:

$$\begin{aligned} \text{minimizar : } V &= \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i \\ \text{sujeito a : } &\begin{cases} \sigma_{G(\max)}^{PN} \leq \sigma^* \\ x_i = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde σ^* representa restrição de tensão. $\sigma_{G(\max)}^{PN}$ é a tensão da norma-P normalizada, empregada com o objetivo de obter uma estimativa da tensão local máxima, sendo calculada por meio da Equação 4.22.

$$\sigma_{G(\max)}^{PN} \approx c^I (\sigma_G^{PN})^I \quad (4.22)$$

onde I é o número da iteração, σ_G^{PN} é a tensão norma-P calculada conforme a Equação 4.1. O parâmetro de normalização, c^I , apresentado por Le et al., 2010, é obtido de acordo com a Equação 4.23, a partir da segunda iteração.

$$c = \beta^l \frac{\sigma_{\max}^{l-1}}{(\sigma_G^{PN})^{l-1}} + (1 - \beta^l)c^{l-1}, \quad 0 < \beta^l < 1 \quad (4.23)$$

A tensão máxima de von Mises da iteração anterior é denotada por σ_{\max}^{l-1} ; o fator de amortecimento, β , controla as variações entre c^l e c^{l-1} , se c oscila entre as iterações, o valor de β é definido no intervalo $0 < \beta^l < 1$; quando c permanece estável ao longo das iterações utiliza-se $\beta^l = 1$. Neste trabalho, por meio de experimentos numéricos, verificou-se que o uso de $\beta = 0,5$ em todas as iterações, forneceu resultados coerentes para os exemplos estudados.

4.3.1 Procedimento BESO para minimização de volume com restrição de tensão

Para realizar a minimização do volume, pode-se empregar a técnica da função objetivo aumentada por um multiplicador Lagrangeano, λ , desta forma, a função objetivo é expandida para considerar a restrição de tensão, sendo denotada por [Nabaki, 2019c]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i + \lambda (\sigma_{G(\max)}^{PN} - \sigma^*) \quad (4.24)$$

onde $f(x)$ é a função objetivo aumentada. Se $\sigma_{G(\max)}^{PN} < \sigma^*$ a restrição de tensão estará satisfeita, logo $\lambda = 0$ e a função objetivo será reduzida à sua forma original. Caso a restrição seja violada, λ é determinado por um procedimento iterativo detalhadamente descrito em Huang e Xie, 2010a. Devido às características dos problemas estudados neste trabalho, esta etapa do cálculo do Lagrangeano será simplificada, conforme demonstrado nas etapas apresentadas a seguir.

Os números de sensibilidade são determinados pela derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = V_i + \lambda \left(c \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} \right) \quad (4.25)$$

Reescrevendo a Equação 4.25 e substituindo o gradiente da norma-P pela Equação 4.18, obtém-se:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = V_i + \lambda c \left(\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B}\mathbf{u} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right) \quad (4.26)$$

Adotando a hipótese de que será utilizada uma malha uniforme, onde todos os elementos são idênticos e possuem o mesmo volume, pode-se simplificar a Equação 4.26 e obter o número de sensibilidade, conforme:

$$\alpha_i = -\frac{1}{\lambda c} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - V_i \right) = - \left[\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B}\mathbf{u} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (4.27)$$

O número de sensibilidade obtido é o mesmo utilizado para minimização de tensões, porém a restrição de tensão irá influenciar no cálculo do volume para a próxima iteração, descrito pela Equação 4.28, conforme apresentado por Nabaki, 2019c.

$$V_{k+1} = V_k (1 - ER \cdot G_T) \quad (4.28)$$

A variável G_T é a função salto para tensões, responsável pela imposição da restrição de tensão ao problema de minimização de volume. O volume seguirá sendo minimizado à medida que a restrição de tensão máxima estiver sendo satisfeita, logo ($G_T = 1$). Quando a restrição for violada, G_T receberá um valor negativo que causará um aumento do volume estrutural para buscar a redução do valor de tensão máxima. A função G_T foi modificada neste trabalho com o objetivo de fazer uma analogia com o cálculo de fator de segurança de tensões, onde se calcula a razão entre a tensão em um determinado ponto da estrutura e a tensão admissível no projeto. Desta forma, G_T a definida pela Equação 4.29.

$$G_T = \begin{cases} \text{se } \frac{\sigma_G^{PN}(\max)}{\sigma^*} < 1, & G_T = 1 \\ \text{se } \frac{\sigma_G^{PN}(\max)}{\sigma^*} \geq 1, & G_T = \frac{\sigma^* - \sigma_G^{PN}(\max)}{\sigma^*} \end{cases} \quad (4.29)$$

O procedimento do BESO segue as mesmas etapas implementadas para minimização de flexibilidade e de tensões, discutidas anteriormente, diferindo-se apenas no cálculo do volume da próxima iteração e nos critérios de parada. O processo de otimização realiza a minimização do volume até a restrição de tensão e os critérios de convergência das Equações 4.30 e 4.20 serem satisfeitos.

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N (V_{k-i+1} - V_{k-N-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^N V_{k-i+1}} \leq 0,01 \quad (4.30)$$

4.4 Minimização de volume com restrição de fadiga

Neste trabalho a abordagem de fadiga estudada tem como objetivo expandir a formulação utilizada nas seções anteriores, de modo a possibilitar uma estimativa preliminar quanto à segurança de uma estrutura em relação a este tipo de falha. Ressalta-se que a formulação empregada é limitada a etapas iniciais de projeto e não elimina a necessidade de estudos mais avançados em um problema real de engenharia.

Assim como nas seções anteriores, a otimização topológica é realizada com base em números de sensibilidade que levam em conta a tensão de von Mises e, por este motivo as restrições à fadiga também serão calculadas com base nesta medida de tensão. Desta forma, pode-se formular o problema de minimização de volume com restrição de fadiga de alto ciclo conforme a Equação 4.31, expressa por Nabaki et al., 2018.

$$\begin{aligned} \text{minimizar : } V &= \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i \\ \text{sujeito a : } &\begin{cases} \sigma_G^{PN} < \sigma_f^* \\ x_i = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.31)$$

A restrição de fadiga é imposta por meio da tensão crítica de fadiga, σ_f^* , definida de modo a respeitar a Equação 4.32. Conceitos básicos associados à fadiga, necessários para compreensão deste trabalho, são apresentados no Apêndice A.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar : } \sigma_f^* \\ &\text{sujeito a : } L_{i(\max)} < 1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $L_{i(\max)}$ é o dano máximo na estrutura, podendo-se adotar os critérios de Goodman modificado, Gerber ou Soderberg, formulados de acordo com as Equações 4.33 a 4.35, respectivamente.

$$L_i^{GM} = \frac{\sigma_{a_i}^{vM}}{(\sigma_i)_{N_f}} + \frac{\sigma_{m_i}^{vM}}{\sigma_{ut}} \quad (4.33)$$

$$L_i^{GER} = \frac{\sigma_{a_i}^{vM}}{(\sigma_i)_{N_f}} + \left(\frac{\sigma_{m_i}^{vM}}{\sigma_{ut}} \right)^2 \quad (4.34)$$

$$L_i^{SOD} = \frac{\sigma_{a_i}^{vM}}{(\sigma_i)_{N_f}} + \frac{\sigma_{m_i}^{vM}}{\sigma_y} \quad (4.35)$$

Os critérios de fadiga são calculados em função das tensões de von Mises alternadas e médias, $\sigma_{a_i}^{vM}$ e $\sigma_{m_i}^{vM}$, da tensão de escoamento, σ_y , e de ruptura, σ_{ut} . $(\sigma_i)_{N_f}$ é a tensão limite de fadiga para um determinado número de ciclos (N_f), definida pela Equação 4.36:

$$(\sigma_i)_{N_f} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (4.36)$$

onde σ_f' e b são o coeficiente de resistência a fadiga e o expoente de resistência a fadiga, propriedades específicas de cada material.

Considerando as hipóteses de que o carregamento é constante e proporcional, o material possui comportamento linear e sem trincas, determinam-se, por meio de uma análise

estática, as tensões alternadas, σ_{ai} , e médias, σ_{mi} , que serão calculadas em função do tensor de tensões de cada elemento, dado pela Equação 4.2, e dos fatores de proporção de tensões alternadas e médias, c_a e c_m , respectivamente. Assim:

$$\sigma_{ai} = c_a \sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xai} \\ \sigma_{yai} \\ \tau_{xyai} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\sigma_{mi} = c_m \sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xmi} \\ \sigma_{ymi} \\ \tau_{xymi} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Os fatores c_a e c_m , são calculados por:

$$c_a = \frac{1 - (F_{\min} / F_{\max})}{2} \quad (4.39)$$

$$c_m = \frac{1 + (F_{\min} / F_{\max})}{2} \quad (4.40)$$

F_{\min} e F_{\max} , são as forças mínimas e máximas que atuam sobre a estrutura, desta forma, a análise estática deverá ser realizada considerando a força máxima, logo, o equilíbrio da estrutura será calculado de acordo com a Equação 4.41.

$$\mathbf{F}_{\max} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (4.41)$$

Por fim, as tensões de von Mises alternadas e médias serão determinadas por:

$$\sigma_{ai}^{vM} = \left(\sigma_{xai}^2 - \sigma_{xai} \sigma_{yai} + \sigma_{yai}^2 + 3\tau_{xyai}^2 \right)^{0,5} \quad (4.42)$$

$$\sigma_{m_i}^{vM} = \left(\sigma_{x_{m_i}}^2 - \sigma_{x_{m_i}} \sigma_{y_{m_i}} + \sigma_{y_{m_i}}^2 + 3\tau_{xy_{m_i}}^2 \right)^{0,5} \quad (4.43)$$

4.4.1 Procedimento BESO para minimização de volume com restrição de fadiga

A Equação 4.44 é a função objetivo aumentada para o problema de minimização do volume considerando a restrição de tensão crítica de fadiga.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i + \lambda (\sigma_G^{PN} - \sigma_f^*) \quad (4.44)$$

Calculando o gradiente da função objetivo, obtém-se o número de sensibilidade definido pela Equação 4.27. Novamente, a restrição do problema será responsável pelo volume estrutural da próxima iteração, definido pela Equação 4.45. De forma análoga ao descrito na seção anterior, o material é removido enquanto a restrição estiver satisfeita e acrescentado quando ela for violada.

$$V_{k+1} = V_k (1 - ER \cdot G_F) \quad (4.45)$$

G_F é a função salto para fadiga, definida pela Equação 4.46.

$$G_F = \begin{cases} \text{se } L_{i(\max)} < 1, & G_F = 1 \\ \text{se } L_{i(\max)} \geq 1, & G_F = \frac{1 - L_{i(\max)}}{0,05} \end{cases} \quad (4.46)$$

O método BESO é implementado da mesma forma utilizada nos problemas estudados anteriormente, porém os critérios de convergência são calculados em função do volume e do critério de fadiga adotado, conforme descrito pelas Equações 4.30 e 4.47.

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N (L_{i(\max),k-i+1} - L_{i(\max),k-N-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^N L_{i(\max),k-i+1}} \leq 0,01 \quad (4.47)$$

5 RESULTADOS

Neste capítulo o método BESO é aplicado a diferentes problemas de otimização topológica, consideram-se restrições de tensão e fadiga, aplicadas a diferentes geometrias com diferentes condições de contorno. O algoritmo para minimização de tensão é verificado comparando-se os resultados obtidos àqueles na literatura. Também se avaliou a influência de alguns parâmetros de entrada do método. Por fim, realizou-se a implementação de algoritmos para minimização de volume com restrições de tensão e também de fadiga, avaliando diferentes critérios de fadiga.

5.1 Otimização para minimização de tensões com restrição de volume

Nesta seção o método BESO é utilizado para minimização de tensões considerando restrições volumétricas. Primeiramente, o algoritmo desenvolvido é verificado por meio da comparação dos resultados obtidos com os resultados do trabalho de Nabaki et al., 2019a. Em seguida, o mesmo código é empregado para solucionar exemplos apresentados no trabalho de Xia et al., 2018, com o objetivo de comparar as diferentes metodologias. Por fim, avalia-se a influência que diferentes parâmetros de entrada possuem sobre os resultados obtidos pelo método. As malhas de elementos finitos são compostas por elementos bilineares de quatro nós.

5.1.1 Verificação dos algoritmos para minimização de flexibilidade e tensões

Com o objetivo de verificar os algoritmos implementados, as topologias e os resultados obtidos na otimização topológica, por meio de minimização de flexibilidade e de tensões, são comparados com os resultados obtidos por Nabaki et al., 2019a.

O problema escolhido para esta verificação foi resolvido considerando as mesmas condições de contorno, carregamento, propriedades do material e demais parâmetros do BESO apresentados no exemplo da literatura. Desta forma, considera-se a estrutura apresentada na Figura 5.1. A viga é submetida a uma carga concentrada de 1500 N no centro da extremidade direita e engastada no lado esquerdo. O domínio possui a espessura de 1 mm e é discretizado por uma malha de 5000 elementos com lados medindo 2 mm. O módulo elástico e o coeficiente de Poisson são $E = 210000$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de

filtragem, taxa evolucionária, volume especificado e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, $V^* = 0,3$ e $P = 4$. Também é considerado um limite de tensão máxima de von Mises de 358 MPa.

Os seis elementos ao redor do nó de aplicação da carga foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões.

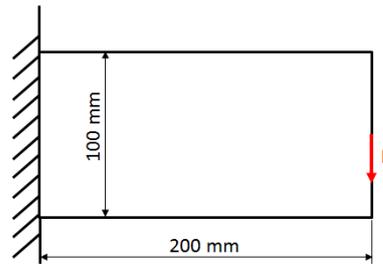


Figura 5.1 – Viga em balanço com carga concentrada

Os resultados obtidos são demonstrados na Figura 5.2, que apresenta as topologias obtidas para minimização de flexibilidade e de tensão, plotadas como resultados de tensão de von Mises. Também são apresentados os valores da flexibilidade (C) e da tensão máxima de von Mises (σ_{\max}^{vM}).

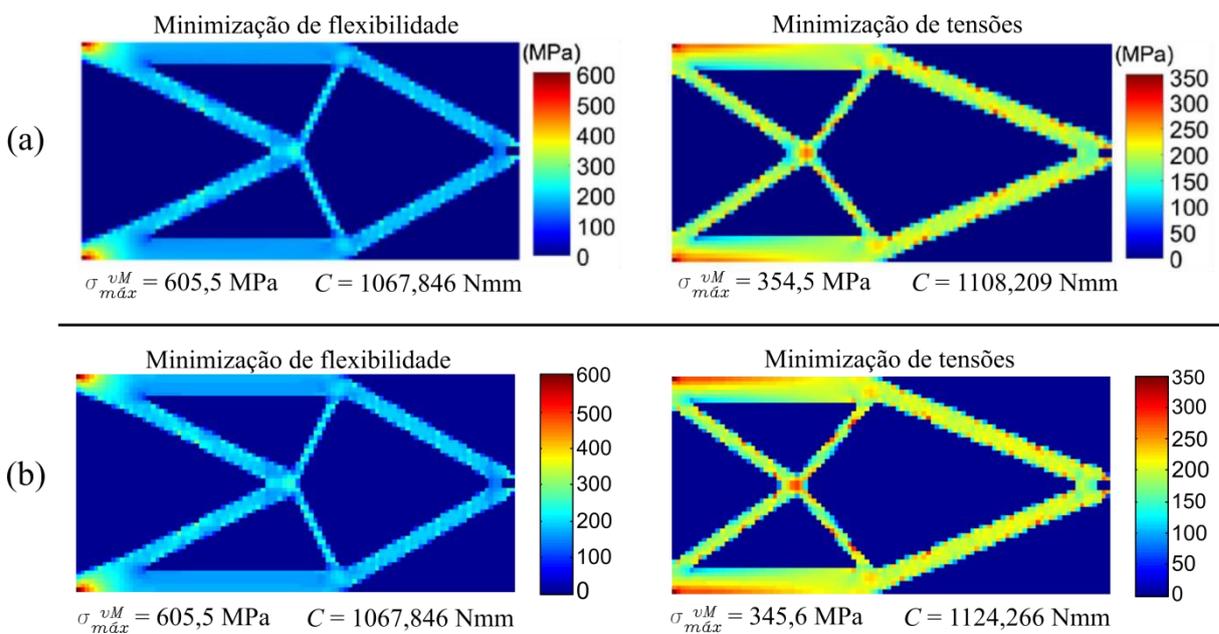


Figura 5.2 – Verificação dos resultados: (a) Nabaki et al., 2019a e (b) Este trabalho

Em relação à minimização de flexibilidade foram obtidos os mesmos resultados para topologia e tensão máxima de von Mises. Com a minimização de tensões, obteve-se a mesma topologia, porém a tensão máxima encontrada foi 2,5% menor do que a apresentada no trabalho de Nabaki et al., 2019a. A evolução dos processos de minimização pode ser observada na Figura 5.3, para o problema de flexibilidade, e na Figura 5.4 para o problema de tensões. As diferenças observadas nos resultados podem estar associadas a diferenças nas implementações numéricas. Portanto, os códigos desenvolvidos foram considerados adequados tanto para minimização de flexibilidade quanto para minimização de tensões.

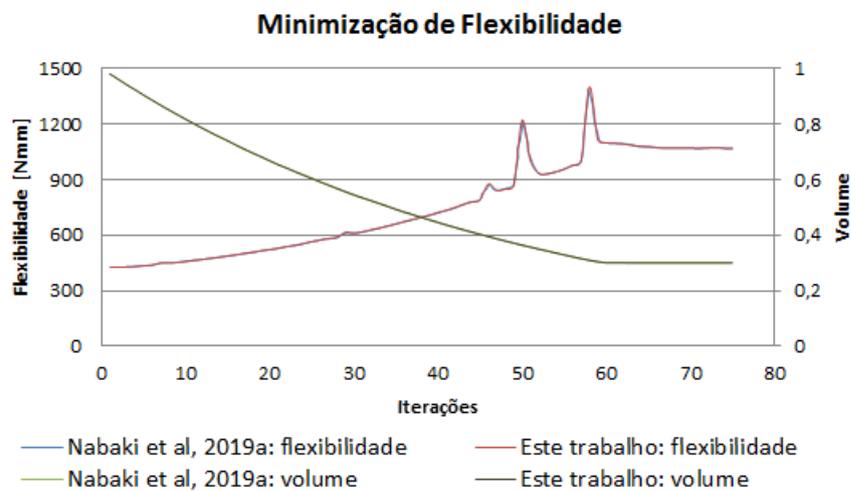


Figura 5.3 – Evolução da flexibilidade e do volume

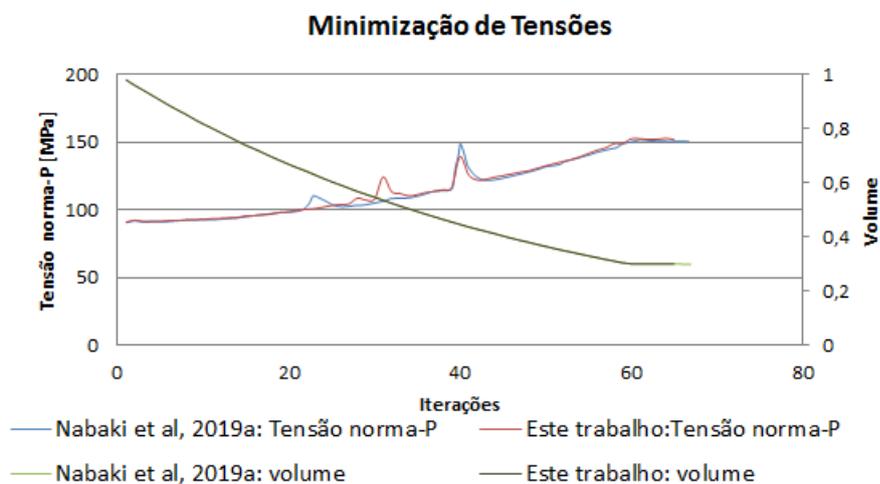


Figura 5.4 – Evolução da tensão norma-P e do volume

5.1.2 Exemplos numéricos

Nesta seção, o código desenvolvido é empregado na solução de dois problemas propostos no trabalho de Xia et al., 2018, tendo como objetivo comparar os resultados obtidos com as diferentes metodologias de minimização de tensões. Os dois casos são submetidos à minimização de flexibilidade e tensões, ambos sujeitos a restrições volumétricas. Os domínios são discretizados por malhas de elementos quadrados bilineares considerando o estado plano de tensões.

5.1.2.1 Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 1

A viga em balanço apresentada na Figura 5.5 é submetida a uma carga de 5 N distribuída sobre os 10 nós da face superior da extremidade do lado direito. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 20000 elementos quadrados com lados unitários. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são $E = 1$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de filtragem, a taxa evolucionária, volume especificado e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 5$ mm, $ER = 0,02$, $V^* = 0,5$ e $P = 4$.

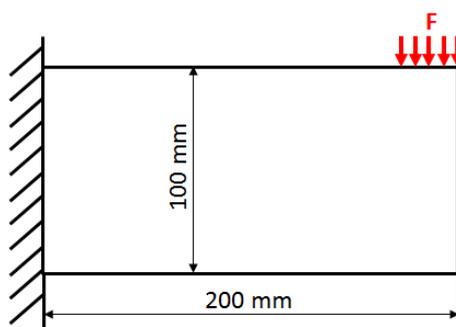


Figura 5.5 – Viga em balanço com carga distribuída

Os resultados obtidos são comparados na Figura 5.6, onde são demonstradas as topologias obtidas para minimização de flexibilidade e de tensão, plotadas como resultados de tensão de von Mises. Os resultados reportados por Xia et al., 2018, reduziram 16,7% a tensão máxima de von Mises por meio da minimização de tensões em relação a minimização de flexibilidade. Entretanto, o método utilizado neste trabalho proporcionou uma redução de 21,4%. Neste exemplo verificou-se que, com o método utilizado neste trabalho, a tensão máxima foi 12% inferior à encontrada por Xia et al., 2018.

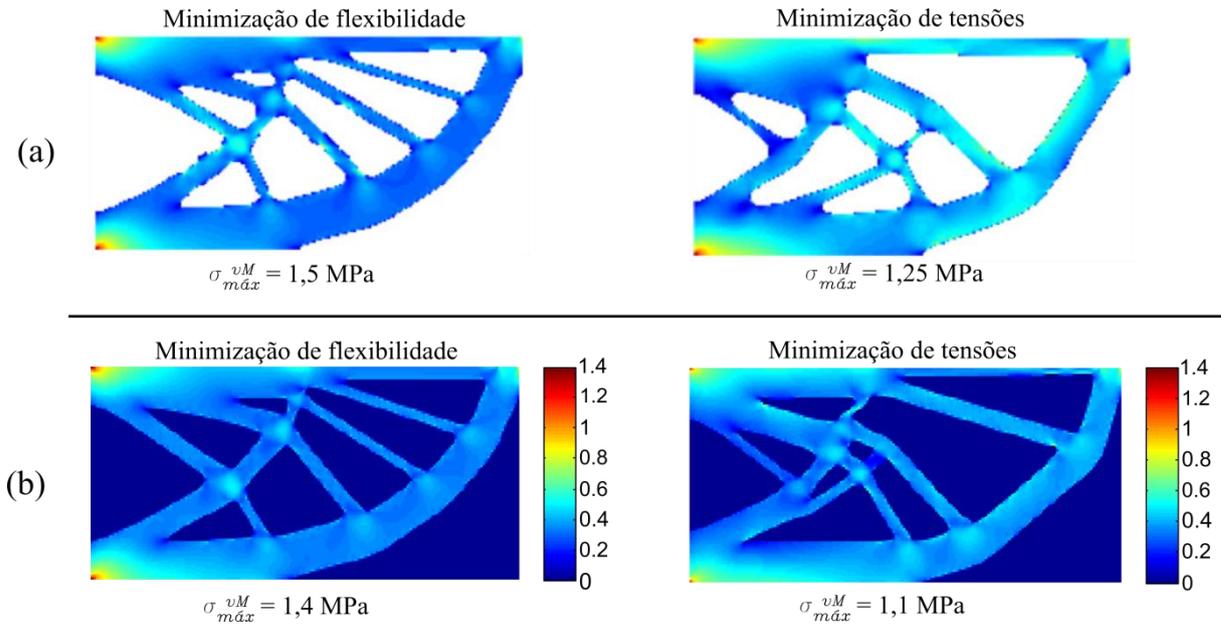


Figura 5.6 – Viga em balanço com carga distribuída: (a) Xia et al., 2018 e (b) Este trabalho

Dos resultados da Figura 5.6 é possível notar que as topologias apresentam diferenças significativas principalmente em relação à minimização de tensões, porém ambas as geometrias encontradas são fabricáveis.

Os históricos de evolução dos processos de otimização são apresentados na Figura 5.7, onde estão plotadas as funções objetivo dos dois problemas e os respectivos volumes estruturais.

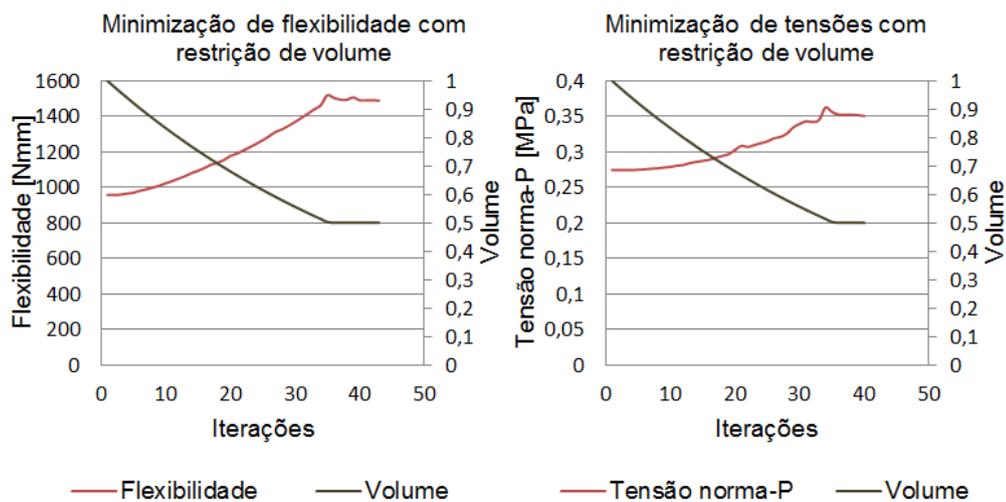


Figura 5.7 – Evolução da flexibilidade, tensão norma-P e volume

5.1.2.2 Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2

A viga entalhada bi-apoiada apresentada na Figura 5.8 é submetida a uma carga distribuída de 10 N aplicada sobre os 11 nós no centro da aresta superior. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 10800 elementos quadrados com lados unitários. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são $E = 1$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de filtragem, taxa evolucionária, volume especificado e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 4$ mm, $ER = 0,02$, $V^* = 0,5$ e $P = 4$.

Os oito elementos ao redor dos pontos de apoio foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões.

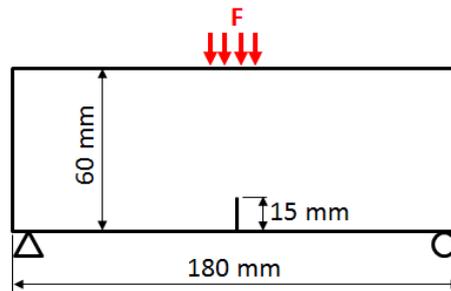


Figura 5.8 – Viga entalhada bi-apoiada

As topologias obtidas estão apresentadas na Figura 5.9, plotadas como resultados de tensões de von Mises. Os resultados reportados por Xia et al., 2018, reduziram 18,5% a tensão máxima de von Mises por meio da minimização de tensões em relação a flexibilidade. Entretanto, o método utilizado neste trabalho proporcionou uma redução de 21,7%. Ressalta-se que, neste exemplo, a tensão máxima verificada pelo método aqui utilizado, foi 16,16% superior ao obtido por Xia et al., 2018.

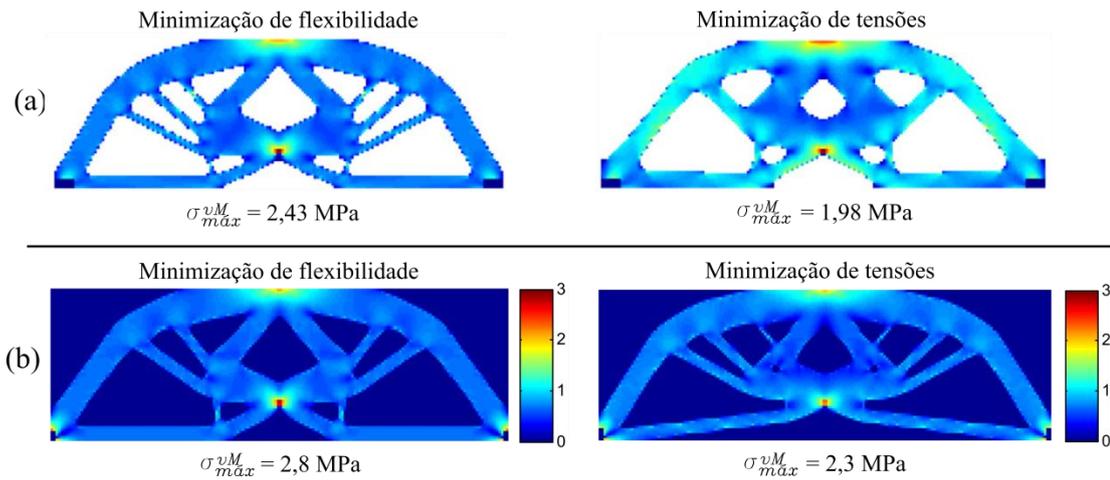


Figura 5.9 – Viga entalhada bi-apoiada (a) Xia et al., 2018 e (b) Este trabalho

Assim como verificado no exemplo anterior, as topologias obtidas apresentam diferenças significativas, principalmente em relação à minimização de tensões, porém ambas as geometrias encontradas são fabricáveis.

O histórico de evolução do processo de otimização é apresentado na Figura 5.10.

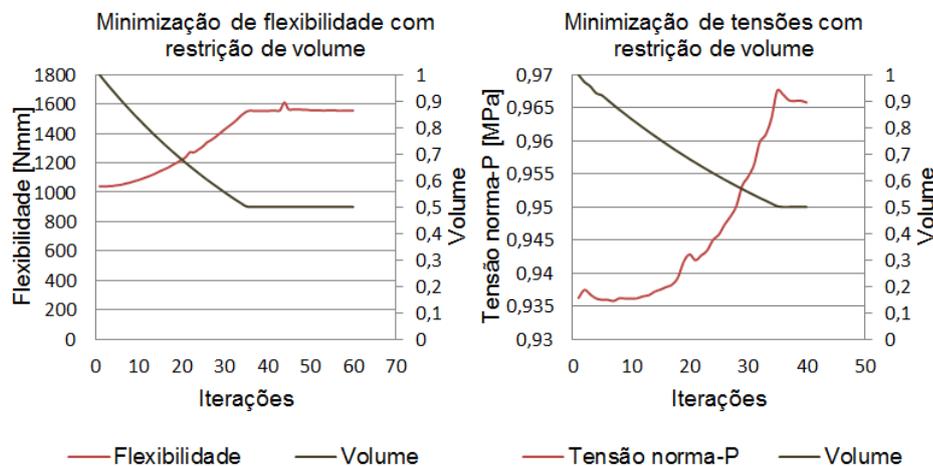


Figura 5.10 – Evolução da flexibilidade, tensão norma-P e do volume

5.1.3 Estudo da influência dos parâmetros do BESO

Os dois exemplos apresentados na seção anterior são utilizados para avaliar a influência de alguns parâmetros de entrada do método BESO. Diferentes combinações de parâmetros ER , P e r_{\min} foram testadas para ambos os exemplos. A primeira comparação realizada avalia os efeitos de diferentes combinações de ER e r_{\min} . Em seguida, avaliou-se a

influência de ER e P . A topologia final é apresentada com os resultados de tensão de von Mises juntamente com o número de iterações realizadas (iter.) e o valor de tensão de von Mises máximo encontrado na estrutura final (σ_{\max}^{vM}).

5.1.3.1 Efeitos do raio de filtragem e da taxa evolucionária

Nesta seção são testadas combinações de ER e r_{\min} para ambos os exemplos. O volume especificado e o fator da norma-P são: $V^* = 0,5$ e $P = 4$, respectivamente. Os resultados para o Exemplo 1 são apresentados na Figura 5.11, e para o Exemplo 2 na Figura 5.12.

A análise dos resultados demonstrou que, para os exemplos estudados, a restrição geométrica imposta pelo esquema de filtragem das sensibilidades, apresentou grande influência nos resultados. Os raios de filtragem menores produziram topologias com mais membros e com menores valores de tensão máxima. Maiores raios de filtragem levaram a geometrias com menos membros, porém com maiores valores de tensão máxima. A taxa evolucionária demonstrou maior influência nas topologias finais do que nas tensões máximas. Em ambos os exemplos o custo computacional foi maior para menores valores de ER .

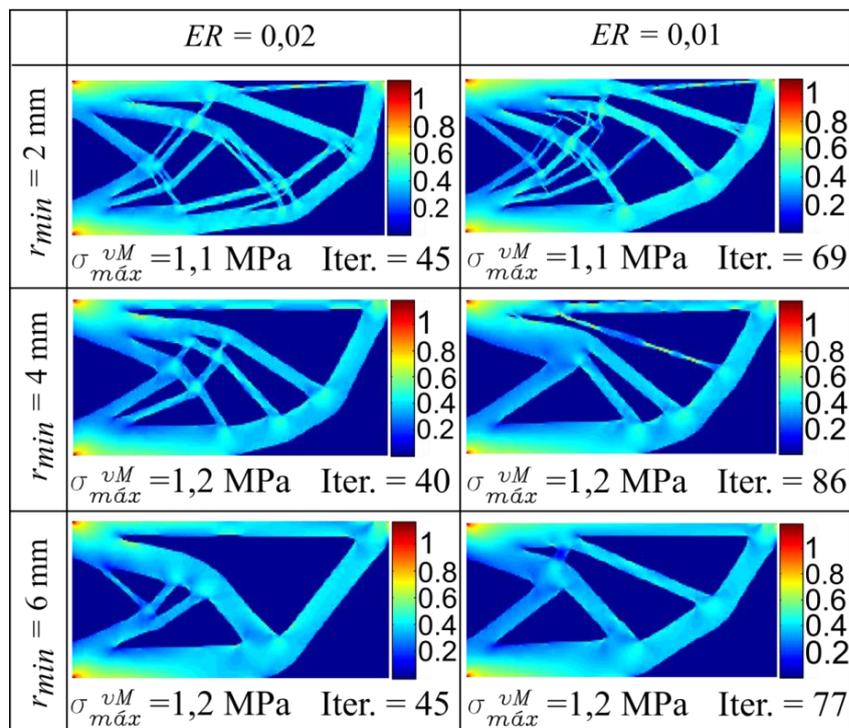


Figura 5.11 – Exemplo 1: Efeitos do r_{\min} e da ER

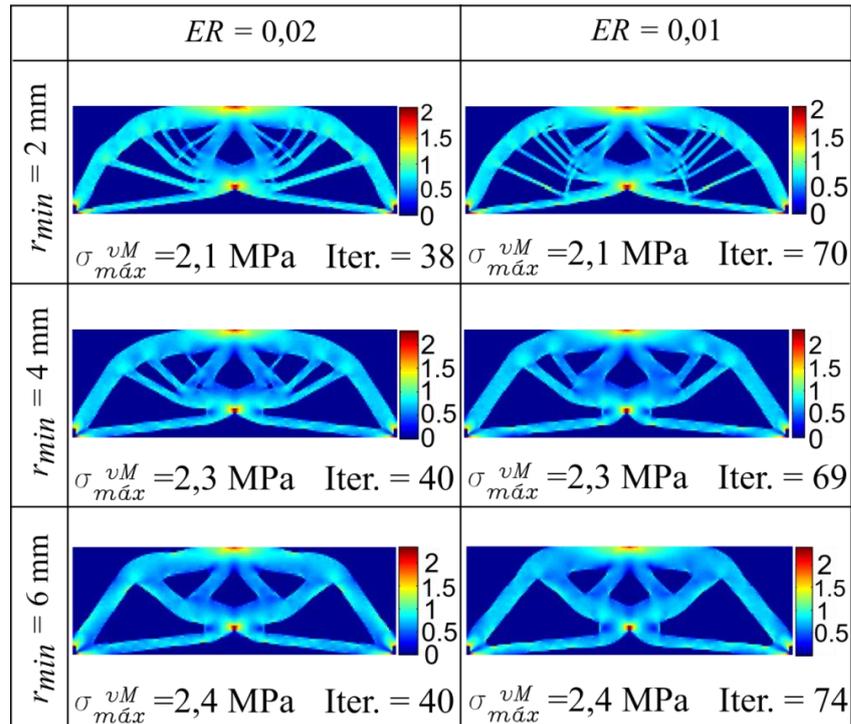


Figura 5.12 – Exemplo 2: Efeitos do r_{min} e da ER

5.1.3.2 Efeitos da taxa evolucionária e do fator da norma-P

Ainda considerando os dois exemplos anteriores, avaliou-se a influência da taxa evolucionária e do fator da norma-P, considerando $V^* = 0,5$ e $r_{min} = 6 \text{ mm}$. Os resultados são apresentados na Figura 5.13 para o Exemplo 1 e na Figura 5.14 para o Exemplo 2.

Com base nos resultados apresentados, pode-se observar que o parâmetro P é o mais sensível entre os avaliados, apresentando considerável influência nas topologias finais e também podendo influenciar os resultados de tensão máxima, conforme constatado no Exemplo 2.

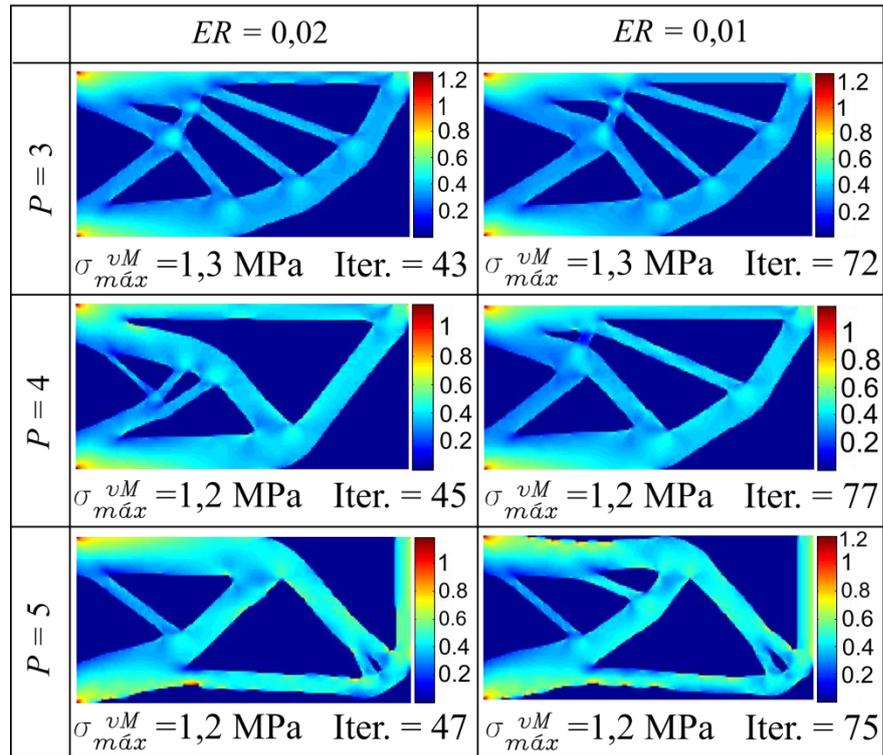


Figura 5.13 – Exemplo 1: Efeitos do ER e do P

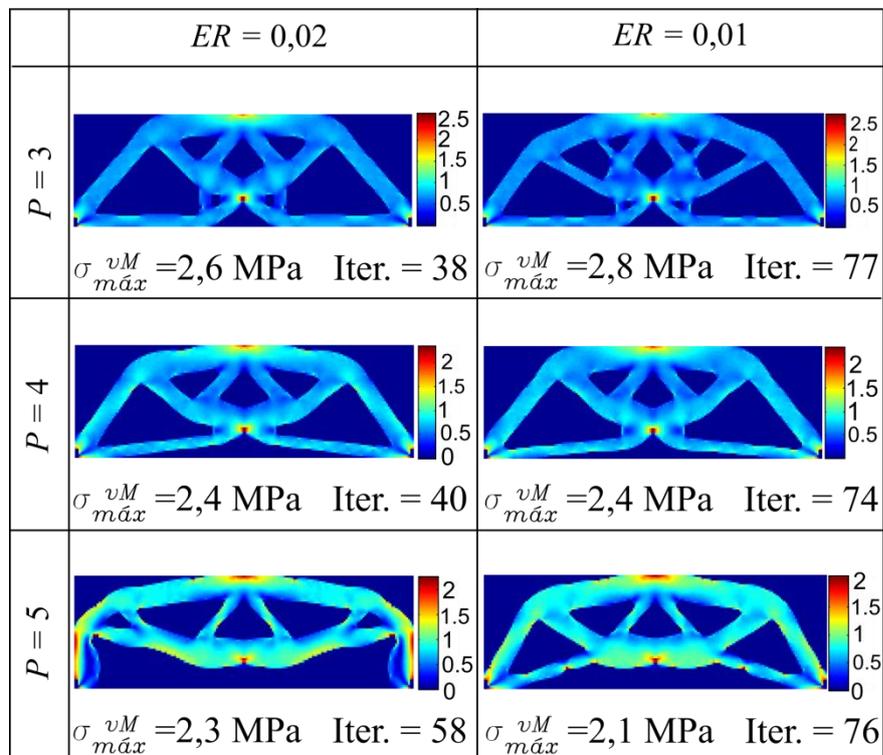


Figura 5.14 – Exemplo 2: Efeitos do ER e do P

5.2 Otimização para minimização de volume com restrição de tensão

O processo de otimização para minimização de volume consiste em determinar a topologia com a menor quantidade de material que obedeça a uma determinada restrição de tensão. Nesta seção, o procedimento foi aplicado a três exemplos. O volume estrutural obtido na topologia final foi empregado como restrição de volume em uma otimização para minimização de flexibilidade. Por fim, são comparados os resultados de tensão máxima de von Mises entre os dois métodos.

5.2.1 Viga longa bi-engastada – Exemplo 1

A viga longa bi-engastada apresentada na Figura 5.15 é submetida a uma carga concentrada de 300 N aplicada no nó central da aresta superior da viga. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 6000 elementos quadrados com lados unitários. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são $E = 210000$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de filtragem, a taxa evolucionária e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$ e $P = 4$. A tensão máxima de von Mises que a estrutura poderá apresentar está limitada a 150 MPa.

Os doze elementos ao redor do nó de aplicação da carga foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões.

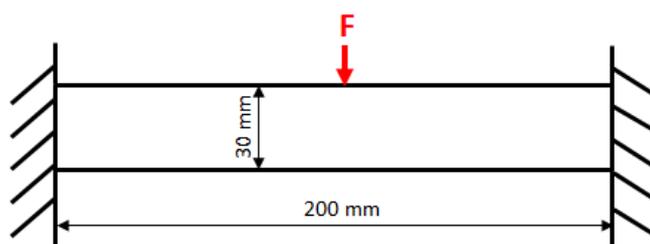


Figura 5.15 – Viga longa bi-engastada

Na Figura 5.16 são apresentados os seguintes resultados: topologia final plotada com os resultados da tensão de von Mises, valor da tensão de von Mises máxima encontrada na estrutura final e também a flexibilidade e o volume dessa estrutura.

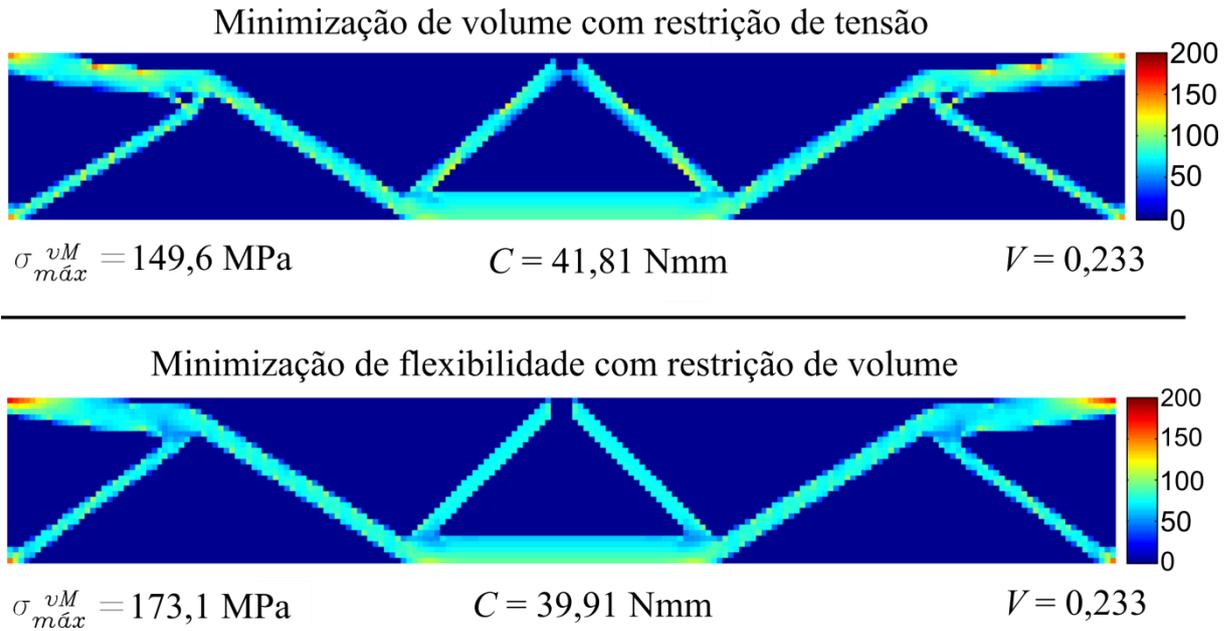


Figura 5.16 – Resultados do Exemplo 1

A evolução dos processos de otimização é apresentada na Figura 5.17.

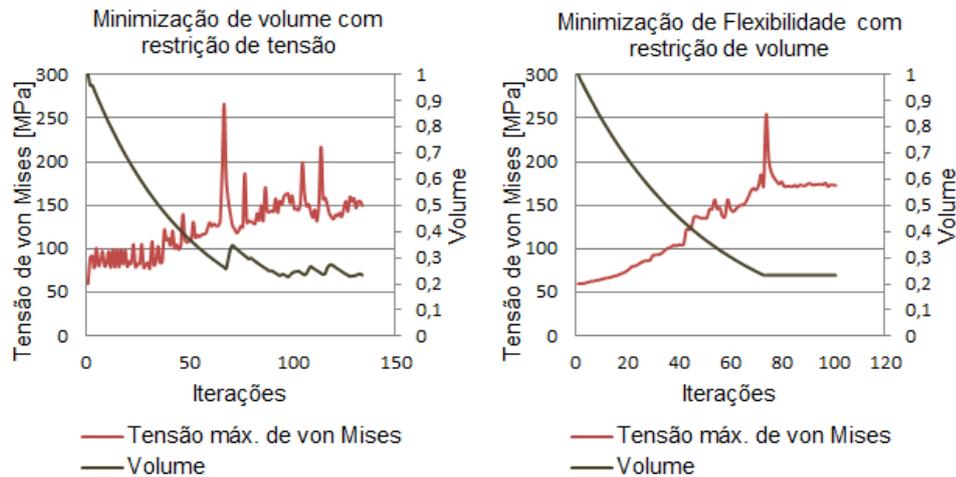


Figura 5.17 – Exemplo 1: Evolução da tensão máxima e do volume

Os resultados obtidos pela minimização de volume forneceram uma topologia que apresenta tensões máximas abaixo da restrição de tensão imposta, sendo 13,57% inferior ao valor máximo encontrado pela minimização de flexibilidade. Em relação à flexibilidade da estrutura, a geometria obtida é 4,76% mais flexível.

A análise do gráfico da Figura 5.17, demonstra que quando ocorreram violações na restrição de tensão, a estrutura recebeu acréscimos de material para permitir a correção deste problema.

5.2.2 Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2

A viga entalhada bi-apoiada apresentada na Figura 5.18 é submetida a uma carga distribuída de 1100 N, aplicada sobre os 11 nós no centro da face superior. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 10800 elementos quadrados com lados unitários. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são $E = 210000$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de filtragem, a taxa evolucionária e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, e $P = 4$. A tensão máxima de von Mises que a estrutura poderá apresentar está limitada em 270 MPa.

Os oito elementos ao redor dos pontos de apoio foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões.

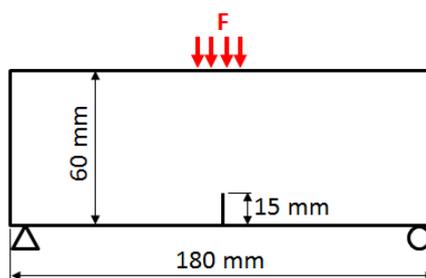


Figura 5.18 – Viga entalhada bi-apoiada

Na Figura 5.19 são apresentados os seguintes resultados: topologia final plotada com os resultados da tensão de von Mises, valor da tensão de von Mises máxima encontrada na estrutura final e também a flexibilidade e o volume dessa estrutura.

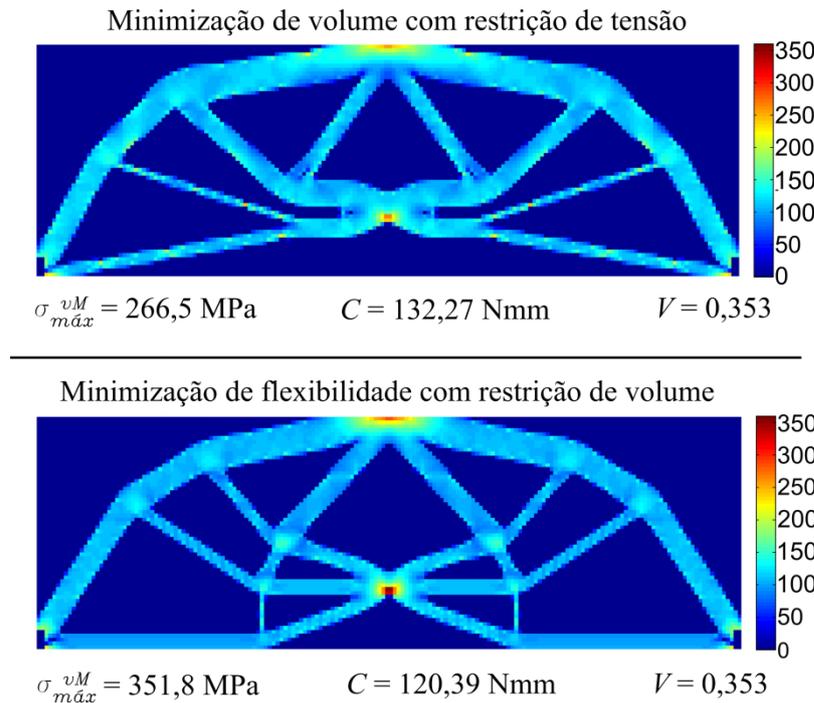


Figura 5.19 – Resultados do Exemplo 2

A Figura 5.20 apresenta o histórico evolucionário da tensão máxima e do volume para o Exemplo 2.

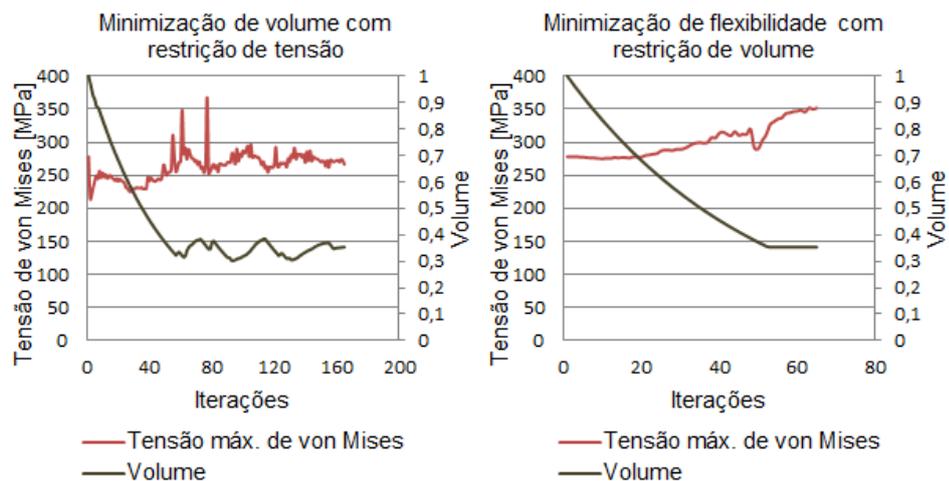


Figura 5.20 – Exemplo 2: Evolução da tensão máxima e do volume

Neste exemplo, a topologia otimizada também apresentou tensões máximas abaixo da restrição de tensão imposta, sendo 24,24% inferior ao valor máximo encontrado pela

minimização de flexibilidade. Enquanto a diferença entre a flexibilidade das estruturas é de 9,86% entre as duas metodologias.

Assim como verificado no exemplo anterior, a estrutura também recebeu acréscimos de material quando a restrição de tensão foi desrespeitada, conforme demonstrado no gráfico da Figura 5.20.

5.2.3 Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 3

A viga em balanço apresentada na Figura 5.21 é submetida a uma carga de 500 N, distribuída sobre os 10 nós da aresta superior, na extremidade do lado direito. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 20000 elementos quadrados com lados unitários. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são $E = 210000$ MPa e $\nu = 0,3$, respectivamente. O raio de filtragem, a taxa evolucionária e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, e $P = 4$. A tensão máxima de von Mises que a estrutura poderá apresentar está limitada em 150 MPa.

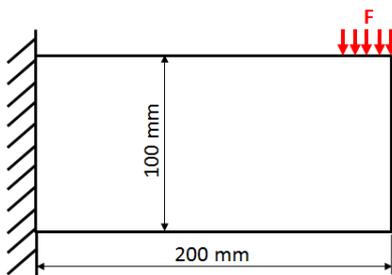


Figura 5.21 – Viga em balanço com carga distribuída

Na Figura 5.22 são apresentados os seguintes resultados: topologia final plotada com os resultados da tensão de von Mises, valor da tensão de von Mises máxima encontrada na estrutura final e também a flexibilidade e o volume dessa estrutura.

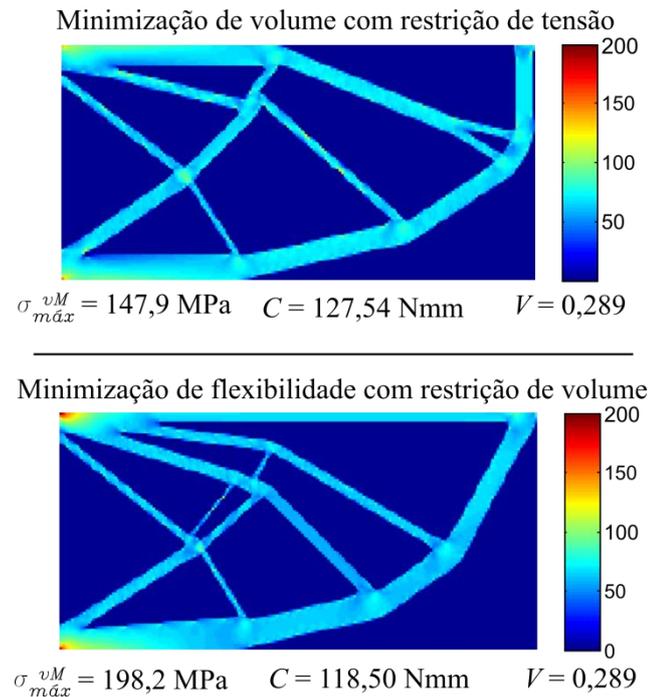


Figura 5.22 – Resultados do Exemplo 3

A Figura 5.23 apresenta o histórico evolucionário da tensão máxima e do volume para o Exemplo 2.

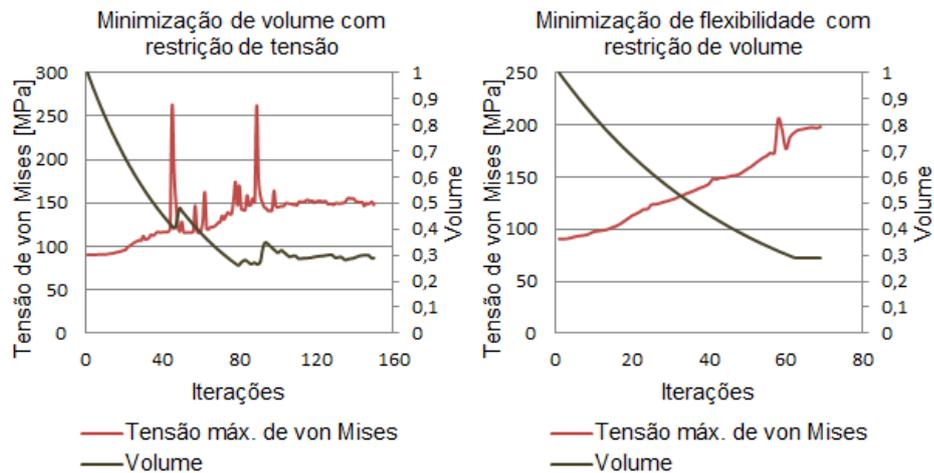


Figura 5.23 – Exemplo 3: Evolução da tensão máxima e do volume

Assim como nos exemplos anteriores, a topologia final obtida pela minimização de volume apresentou uma tensão máxima abaixo do limite permitido. A diferença entre as

tensões máximas nas estruturas é de -25,38% enquanto a diferença entre as flexibilidades é de 7,62%.

Nos três exemplos avaliados, o método de minimização de volume com restrição de tensão produziu topologias fabricáveis, isto é, sem problemas estruturais como a formação de tabuleiros de xadrez. As geometrias são mais flexíveis que as obtidas por meio da minimização de flexibilidade, entretanto com menores tensões de von Mises máximas. Também é possível observar que nos momentos em que a tensão máxima ultrapassou o limite, a estrutura recebeu acréscimos de material para corrigir este problema.

5.3 Otimização para minimização de volume com restrição de fadiga

Nesta seção a otimização topológica foi utilizada para minimizar o volume, obedecendo a uma restrição de fadiga, o critério de falha escolhido deve ser menor que 1. São analisados quatro exemplos, e o volume estrutural obtido na topologia final é empregado como restrição de volume na otimização para minimização de flexibilidade. Por fim, são comparados os resultados de dano máximo, tensão máxima e flexibilidade da estrutura final. As propriedades do material utilizado nos exemplos estão descritas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades do material utilizado

	E [MPa]	ν	σ_{ut} [MPa]	σ_y [MPa]	σ_f [MPa]	b	N_f
Material 1	210000	0,3	358	200	593	-0,086	10^7

5.3.1 Viga longa bi-engastada – Exemplo 1

A viga apresentada na Figura 5.24 é submetida a uma força variando entre -200N e 300 N, aplicada no nó central da aresta superior da viga. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 6000 elementos quadrados com lados unitários. Os parâmetros de entrada do método BESO são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$ e $P = 4$.

Os doze elementos ao redor do nó de aplicação da carga foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões e do dano.

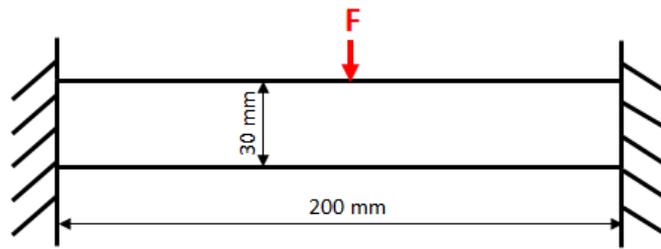


Figura 5.24 – Viga longa bi-engastada

Na Figura 5.25 são apresentados os resultados considerando uma restrição de fadiga pelo critério de Goodman modificado. A topologia final é plotada com os resultados do dano causado pela fadiga. Também são comparados os valores da tensão de von Mises máxima, o dano máximo encontrado na estrutura final, a flexibilidade e o volume dessa estrutura.

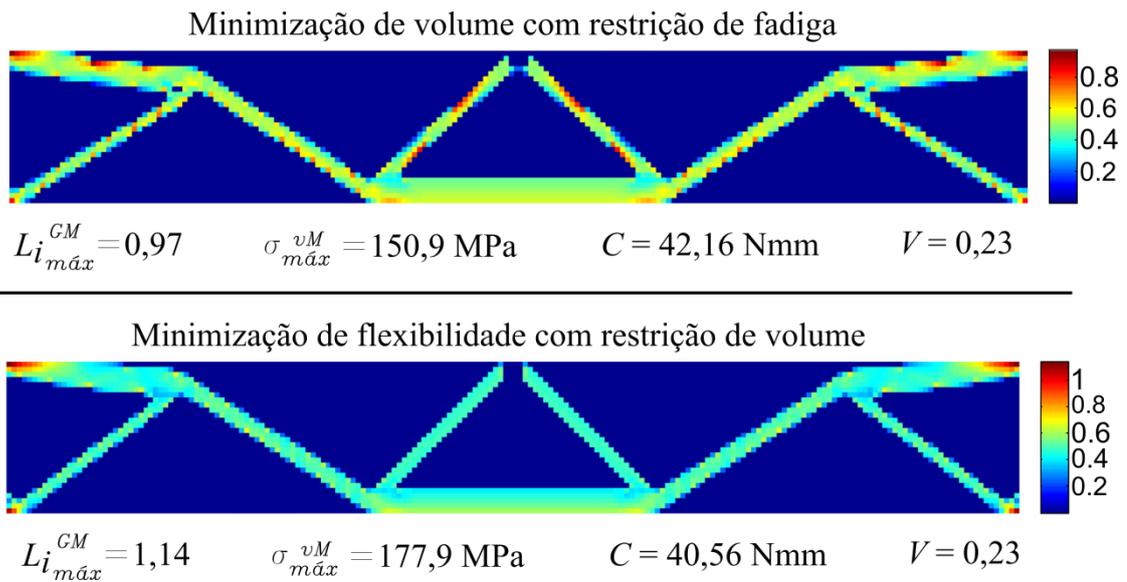


Figura 5.25 – Resultados do Exemplo 1

A Figura 5.26 apresenta o histórico evolucionário do valor máximo do critério de Goodman modificado e do volume estrutural.

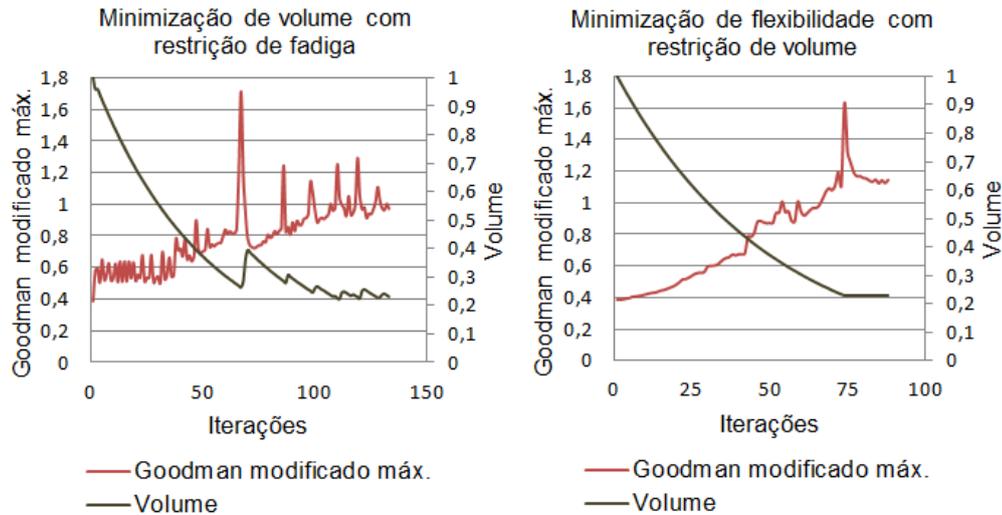


Figura 5.26 – Exemplo 1: Evolução do dano máximo e do volume

5.3.2 Viga bi-apoiada com entalhe – Exemplo 2

A viga apresentada na Figura 5.27 é submetida a uma força variando entre 1100 N e 880 N, distribuída sobre os 11 nós no centro da aresta superior. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 10800 elementos quadrados com lados unitários. Os parâmetros de entrada do BESO são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, e $P = 4$.

Os oito elementos ao redor dos pontos de apoio foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões e do dano.

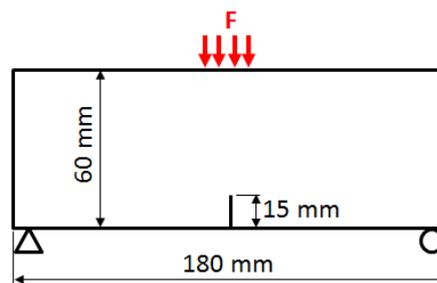


Figura 5.27 – Viga entalhada bi-apoiada

Na Figura 5.28 são apresentados os resultados considerando o critério de Gerber. A topologia final é plotada com os resultados do dano. Também são comparados os valores da tensão de von Mises máxima, o dano máximo, a flexibilidade e o volume dessa estrutura.

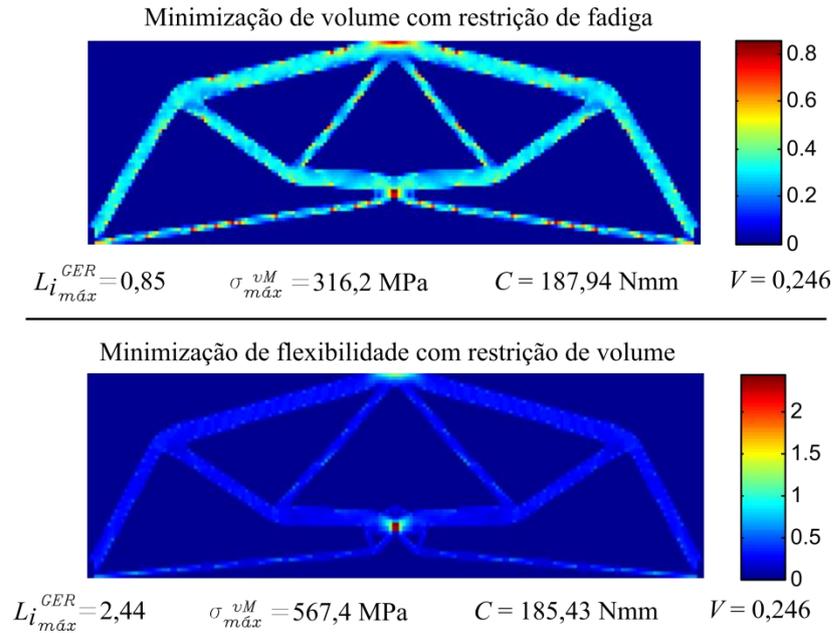


Figura 5.28 – Resultados do Exemplo 2

A Figura 5.29 apresenta o histórico evolucionário do valor máximo do critério de Gerber e do volume estrutural.

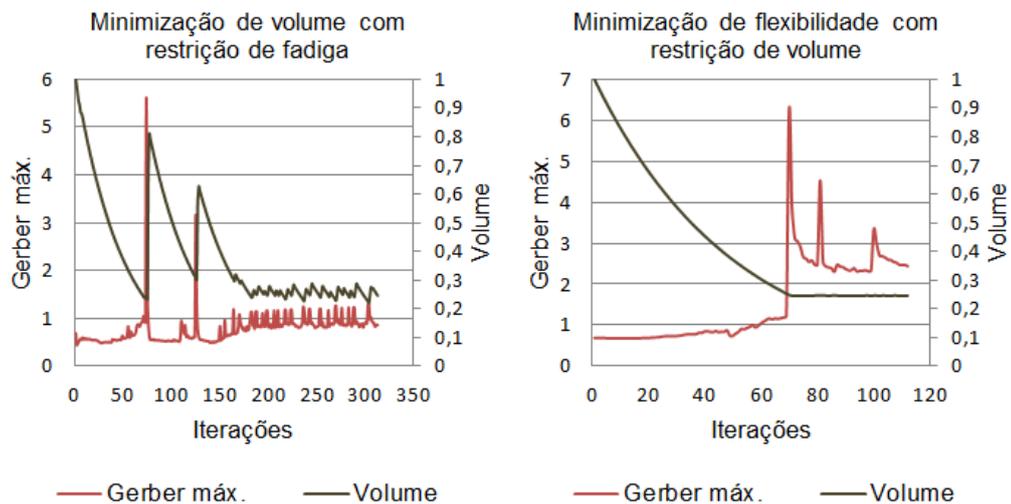


Figura 5.29 – Exemplo 2: Evolução do dano máximo e do volume

5.3.3 Viga em balanço com carga distribuída – Exemplo 3

A viga em balanço apresentada na Figura 5.30 é submetida a uma força variando entre 600 N e 200 N, distribuída sobre os 10 nós da aresta superior, na extremidade do lado direito. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 20000 elementos quadrados com lados unitários. O raio de filtragem, a taxa evolucionária e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, e $P = 4$.

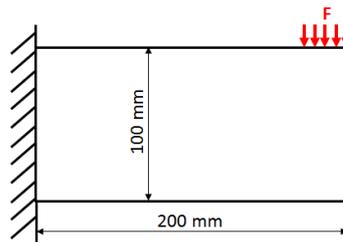


Figura 5.30 – Viga em balanço com carga distribuída

Na Figura 5.31 são apresentados os resultados considerando o critério de Soderberg.

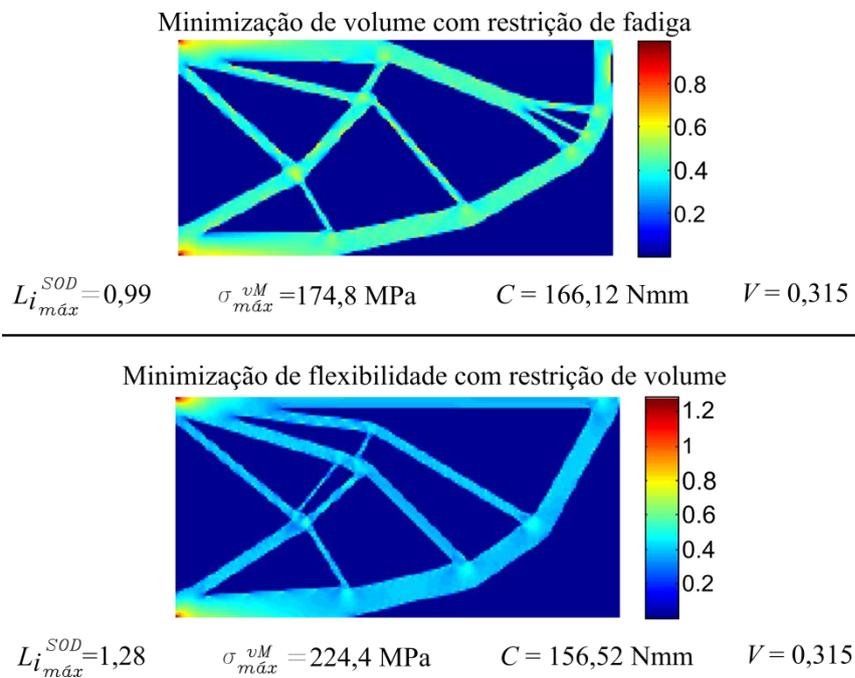


Figura 5.31 – Resultados do Exemplo 3

A Figura 5.32 apresenta o histórico evolucionário do valor máximo do critério de Soderberg e do volume estrutural.

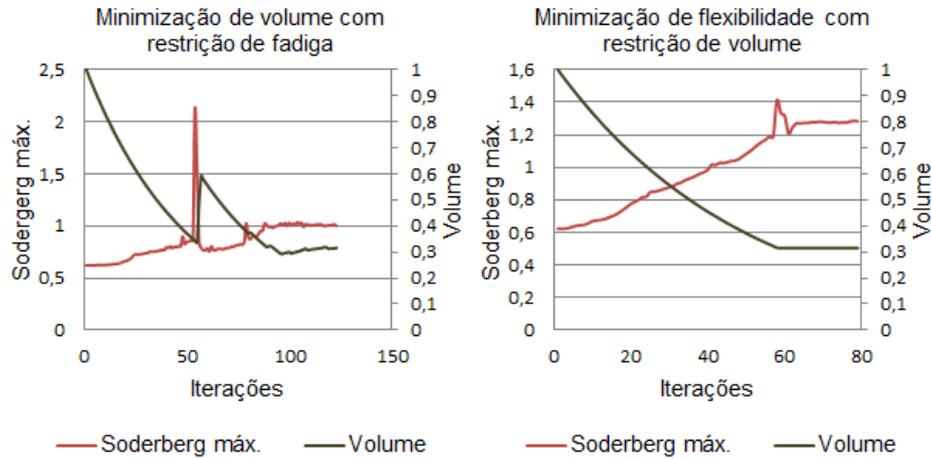


Figura 5.32 – Exemplo 3: Evolução do dano máximo e do volume

5.3.4 Viga em balanço com carga concentrada – Exemplo 4

A viga em balanço apresentada na Figura 5.33 é submetida a uma força variando entre 250 N e -150 N, aplicadas de forma concentrada no centro da extremidade livre. O domínio possui 1 mm de espessura e é discretizado por uma malha de 5000 elementos quadrados com lados unitários. O raio de filtragem, a taxa evolucionária e o fator da norma-P são: $r_{\min} = 2$ mm, $ER = 0,02$, e $P = 4$.

Os oito elementos ao redor do nó de aplicação da carga foram suprimidos do problema de otimização para evitar a concentração de tensões e do dano.

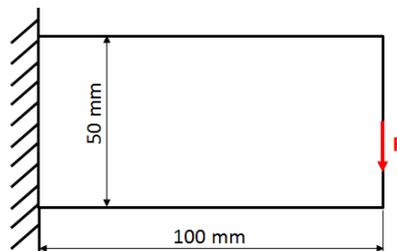


Figura 5.33 – Viga em balanço com carga concentrada

O problema foi resolvido para minimização de volume considerando restrições de fadiga por diferentes critérios: Goodman modificado, Gerber e Soderberg. Os critérios de falha foram restringidos para estar no intervalo de $0,95 < L_{i(\max)} < 1$, esta alteração tem o objetivo de possibilitar a avaliação do efeito dos diferentes critérios sobre o volume estrutural da topologia otimizada. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.34 a 5.36.

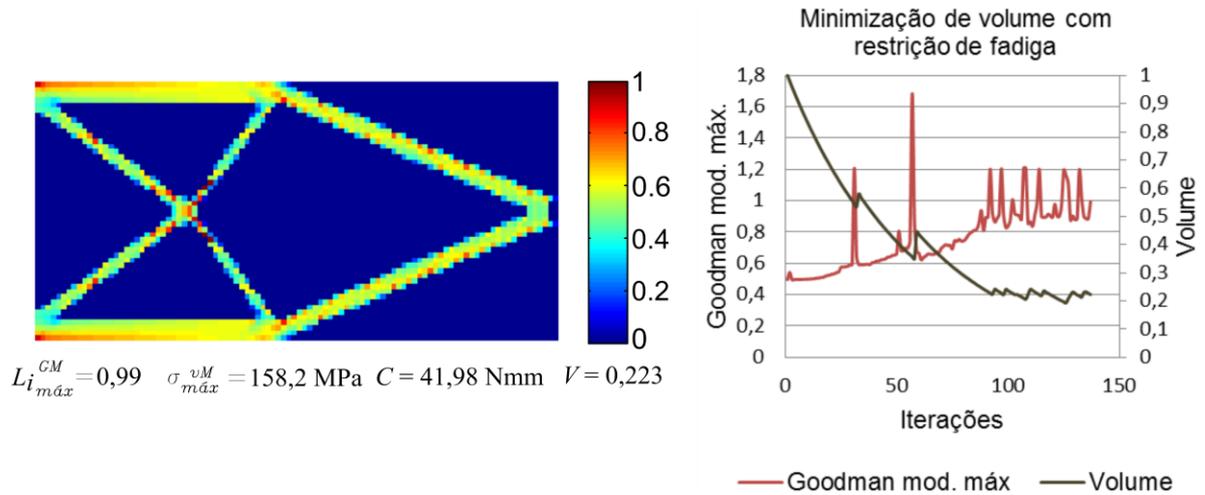


Figura 5.34 – Resultados Exemplo 4: critério de Goodman modificado

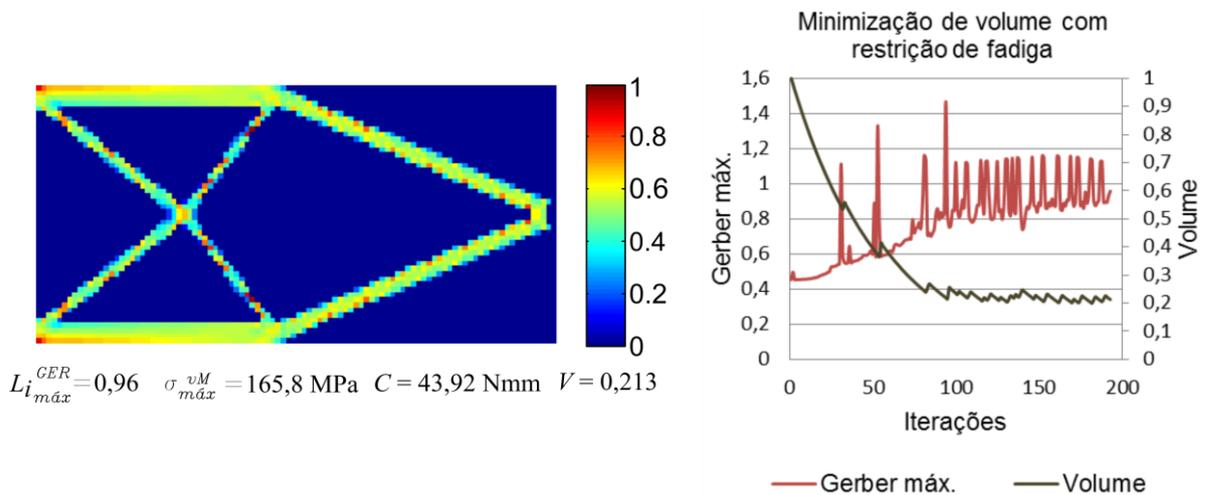


Figura 5.35 – Resultados Exemplo 4: critério de Gerber

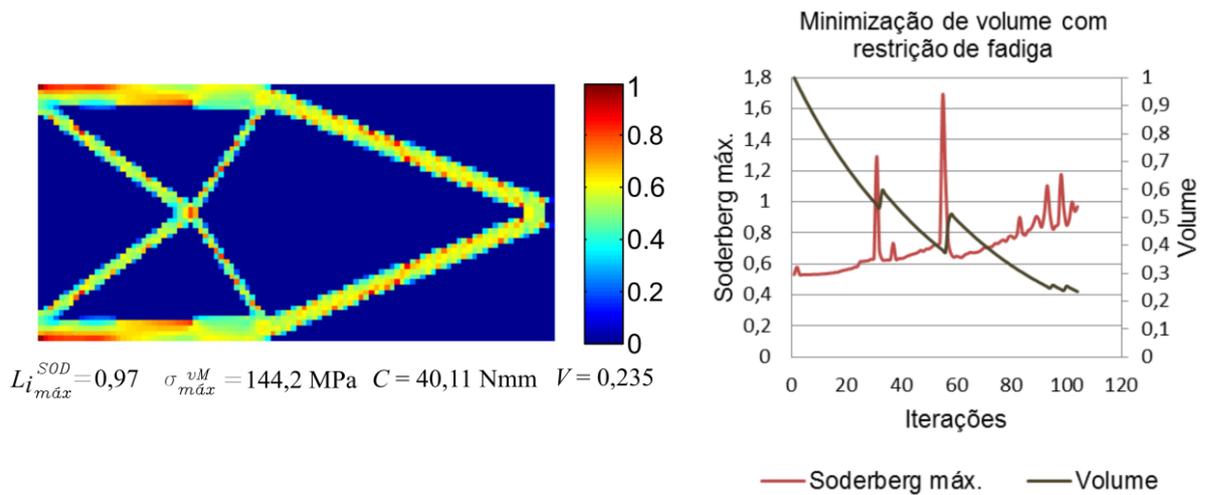


Figura 5.36 – Resultados Exemplo 4: crit\c{e}rio de Soderberg

Nos tr\~{e}s primeiros exemplos estudados verificou-se que os resultados apresentaram comportamento an\~{a}logo ao da abordagem empregada na se\c{a}o anterior. A otimiza\c{c}\~{a}o topol\~{o}gica produziu geometrias que respeitaram os crit\c{e}rios de falha por fadiga que foram impostos, sendo mais flex\c{i}veis e com menores tens\~{o}es m\acute{a}ximas do que os resultados obtidos com a abordagem cl\~{a}ssica de minimiza\c{c}\~{a}o de flexibilidade.

No quarto exemplo, os resultados obtidos demonstraram que a metodologia utilizada no trabalho \c{e} capaz de resolver um mesmo problema considerando restri\c{c}\~{o}es por diferentes crit\c{e}rios de fadiga. A an\~{a}lise destes resultados demonstra que, tanto o volume estrutural da topologia, como as tens\~{o}es m\acute{a}ximas e a flexibilidade, apresentaram resultados compat\c{i}veis com as restri\c{c}\~{o}es aplicadas. Nota-se que o emprego do crit\c{e}rio de falha de Goodman Modificado forneceu resultados intermedi\~{a}rios em rela\c{c}\~{a}o \`{a} Gerber, que \c{e} mais permissivo, e a Soderberg, que \c{e} o mais conservador dentre os utilizados, demonstrando coer\~{e}ncia com o diagrama da Figura A.3.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo do presente trabalho é a implementação computacional de um programa capaz de realizar otimização topológica de estruturas com restrições de tensão e fadiga, utilizando o método evolucionário bidirecional (BESO). Foram avaliadas três abordagens para a solução destes tipos de problemas: minimização de tensões com restrição de volume, minimização de volume com restrição de tensão e minimização de volume com restrição de fadiga. Neste capítulo são apresentados comentários e conclusões sobre os resultados encontrados e, também, sugestões para trabalhos futuros relacionados a este assunto.

6.1 Conclusões

O método BESO de otimização topológica evolucionária foi implementado em um código computacional em linguagem Matlab[®] considerando problemas de minimização de tensões de estruturas com restrição de volume, empregando a formulação apresentada na seção 4.2. O algoritmo desenvolvido foi verificado por meio da comparação dos resultados obtidos àqueles da literatura. Em seguida, serviu de base para a criação de dois novos algoritmos para minimização de volume considerando restrições de tensão e fadiga por diferentes critérios, onde foram implementadas as formulações descritas nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente.

A otimização topológica para minimização de tensões com restrição de volume foi aplicada, primeiramente, a uma viga em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade livre, permitindo verificar os resultados fornecidos pelo código desenvolvido através da comparação com os da literatura. Os resultados encontrados apresentaram pequenas variações, possivelmente ocasionadas por diferenças entre as implementações numéricas. Desta forma, o código proposto foi considerado satisfatório.

O procedimento de minimização de tensões foi então aplicado a dois problemas disponíveis na literatura, com o objetivo de comparar as diferenças entre as formulações. Em ambos os casos, verificou-se uma maior redução no valor de tensão máxima.

Em seguida, foi avaliada a influência que diferentes combinações de parâmetros de entrada possuem sobre os resultados finais. Em primeiro lugar, avaliou-se a influência da taxa evolucionária, ER , e do raio de filtragem, r_{min} . Verificou-se grande influência causada pela restrição geométrica imposta pelo esquema de filtragem de sensibilidades, onde os menores

raios de filtragem produziram topologias com maior número de membros. Embora mais difíceis de serem fabricadas, estas topologias apresentaram menores níveis de tensão máxima. O valor de ER demonstrou maior influência na geometria do que nos níveis de tensão, porém quanto menor o valor desta taxa, maior será o custo computacional do procedimento. Em segundo lugar, foram estudadas combinações entre ER e P , e verificou-se que o valor de P apresentou maior influência nas topologias do que resultados de tensões nos casos estudados. De um modo geral, mostrou-se que uma análise dos parâmetros de entrada pode fornecer resultados que podem ser decisivos na escolha de uma estrutura para fabricação.

A minimização de volume com restrição de tensão foi aplicada a três diferentes exemplos. Para fins de verificação dos resultados obtidos, os mesmos problemas também foram resolvidos pelo método clássico de minimização de flexibilidade, adotando como restrição de volume o valor minimizado nesta abordagem. Foram comparados os valores de tensão de von Mises máxima e flexibilidade da estrutura. Verificou-se que o código desenvolvido foi capaz de respeitar as restrições impostas e também de corrigir o volume da estrutura quando a restrição foi violada.

Por fim, o código de minimização de volume foi expandido com o objetivo de utilizar restrições de fadiga, que foram impostas por meio dos critérios de Goodman modificado, Gerber e Soderberg. A análise de fadiga foi realizada com o objetivo de determinar uma tensão crítica que causaria a falha por fadiga, para utilizá-la como uma restrição de tensão. A verificação dos resultados foi realizada de forma análoga à utilizada com as restrições de tensão, porém, comparando-se o valor máximo obtido com as diferentes teorias de falha por fadiga. O procedimento utilizado mostrou-se capaz de fornecer geometrias resistentes à fadiga, porém ressalta-se que, a metodologia utilizada limita-se às etapas conceituais de desenvolvimento e não elimina a necessidade de estudos mais avançados em etapas posteriores do projeto.

As três abordagens implementadas mostraram-se efetivas para a solução destes tipos de problemas, porém possuem algumas características que podem ser evoluídas, como por exemplo: a convergência dos processos de otimização e também as limitações da análise de fadiga, que acabam reduzindo as possibilidades de aplicação da abordagem.

6.2 Sugestões

Para trabalhos futuros relacionados aos assuntos abordados aqui, recomenda-se:

- Implementar um esquema de filtragem/estabilização para melhorar a convergência dos resultados.
- Implementar um código de otimização pelo método BESO para estruturas tridimensionais.
- Validar os resultados por meio de experimentos físicos.
- Implementar metodologias de análise de fadiga mais avançadas que possibilitem a solução de problemas como: fadiga de baixo ciclo, fadiga multiaxial ou fadiga no domínio da frequência.
- Aplicar as metodologias estudadas em um problema industrial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allaire, G.; Jouve, F. Minimum stress optimal design with the level set method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Vol. 32, p. 909-918, 2008.

Allaire, G.; Jouve, F.; Maillot, H. Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 28, p. 87-98, 2004.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications**. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Bruggi, M. On alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 36, n. 2, p. 125-141, 2008.

Bruggi, M.; Duysinx, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 46, n. 3, p. 369-384, 2012.

Cheng, G. D.; Guo, X. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 13, p. 258-266, 1997.

Collet, M.; Bruggi, M.; Duysinx, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 55, p. 839-855, 2017.

Deaton, J. D.; Grandhi, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49, n. 1, p. 1-38, 2014.

Dowling, N. E. **Mechanical behavior of materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue**. Prentice Hall. New York, 3rd edition, 2007.

Duysinx, P.; Bendsøe, M. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 43, n. 8, p. 1453-1478, 1998.

Duysinx, P.; Sigmund, O. **New developments in handling optimal stress constraints in optimal stress constraints in optimal material distribution.** 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary design optimization, paper 98-4906, p. 1501-1509, 1998.

Fan, Z.; Xia, L.; Lai, W.; Xia, Q.; Shi, T. Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 59, p. 647-658, 2019.

Haftka, R. T.; Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization.** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 3rd edition, 1992.

Holmberg, E.; Torstenfelt, B.; Klarbring, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** Vol. 48, p. 33-47, 2013.

Holmberg, E.; Torstenfelt, B.; Klarbring, A. Fatigue constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** Vol. 50, p. 207-219, 2014.

Huang, X.; Xie, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design.** Vol. 43, n. 14, p. 1039-1049, 2007.

Huang, X.; Xie, Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** Vol. 40, n. 1, p. 409-416, 2010a.

Huang, X.; Xie, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications.** John Wiley & Sons. Chichester, 1st edition, 2010b.

Jeong, S. H.; Choi, D-H.; Yoon, G. H. Fatigue and static failure considerations using a topology optimization method. **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 39, p. 1137-1162, 2015.

Kirsch, U. On singular topologies in optimum structural design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 2, n. 3, p. 133–142, 1990.

Le, C.; Norato, J.; Bruns, T.; Ha, C.; Tortorelli, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 41, p. 605–620, 2010.

Mantovani, S.; Lo Presti, I.; Cavazzoni, L.; Baldini, A. Influence of manufacturing constraints on the topology optimization of an automotive dashboard, **Procedia Manufacturing**, Vol. 11, p. 1700–1708, 2017.

Nabaki, K.; Shen, J.; Huang, X. Bi-directional evolutionary topology optimization based on critical fatigue constraint. **International Journal of Civil and Environmental Engineering**. Vol. 12, n. 2, p. 113-118, 2018.

Nabaki, K.; Shen, J.; Huang, X. Stress Minimization of Structures Based on Bidirectional Evolutionary Procedure. **Journal of Structural Engineering**, vol. 145, n. 2, 2019a.

Nabaki, K.; Shen, J.; Huang, X. Evolutionary topology optimization of continuum structures considering fatigue failure. **Materials and Design**, vol. 166, 2019b.

Nabaki, K. **Topology Optimization of Structures against Fatigue Life**. Thesis (Doctor of Philosophy), School of Engineering - College of Science - Engineering and Health, RMIT University, 2019c, 173 p.

Norton, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. Bookman, Porto Alegre. 4ª edição, 2013.

Oest, J.; Lund, E. Topology optimization with finite-life fatigue constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 56, p. 1045-1059, 2017.

Olhoff, N.; Taylor, J. E., On structural optimization. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 50, p. 1139-1151, 1983.

Paris, J.; Navarrina, F.; Colominas, I.; Casteleiro, M. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 39, p. 419–437, 2009.

Paris, J.; Navarrina, F.; Colominas, I.; Casteleiro, M. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures. **Advances in Engineering Software**. Vol. 41, n. 3, p. 433–441, 2010.

Petyt, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. Cambridge University Press. New York, 2st edition, 2010.

Purushothaman, N.; Jayakumar, P.; Critchley, J.; Datta, S.; Pisipati, V. **A Robust Durability Process For Military Ground Vehicles**, Proceedings of the 2009 Ground Vehicles Engineering and Technology Symposium (GVSETS), Troy, EUA, 2009.

Sved, G.; Ginos, Z. Structural optimization under multiple loads. **International Journal of Mechanical Sciences**. Vol. 10, n. 10, p. 803–805, 1968.

Sherif, K.; Witteveen, W.; Puchner, K.; Irschik, H. Efficient topology optimization of large dynamic finite element systems using fatigue. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**. Vol. 48, n. 7, p. 1339–1347, 2010.

Tomlin, M.; Meyer, J. **Topology optimization of an additive layer manufactured (ALM) aerospace part**, The 7th Altair CAE technology conference, 2011.

Xia, L.; Xia, Q.; Huang, X.; Xie, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review. **Archives of Computational Methods in Engineering**. Vol. 25, n. 2, p. 437-478, 2016.

Xia, L.; Zhang, L.; Xia, Q.; Shi, T. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol. 333, p. 356–370, 2018.

Yang, R. J.; Chen, C. J. Stress-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 12, p. 98-105, 1996.

Yang, X. Y.; Xie, Y. M.; Steven, G. P.; Querin, O. M. Topology optimization for frequencies using an evolutionary method. **Journal of Structural Engineering**, vol. 125, n. 12, p. 1432–1438, 1999.

APÊNDICE A FADIGA

De acordo com Dowling (2007), fadiga é uma falha que ocorre devido a carregamentos repetidos que ocasionam o aparecimento de uma ou mais trincas que crescem até que a falha completa ocorra.

A falha por fadiga ocorre em três estágios [Norton, 2013]:

- *Nucleação da trinca*: oscilações de tensões causam deformações plásticas localizadas que criam bandas de deslizamento (regiões de deformação causada por cisalhamento) ao longo dos contornos dos cristais do material, o agrupamento destas bandas de deslizamento origina trincas microscópicas. Materiais frágeis podem desconsiderar esta etapa e iniciar diretamente com a propagação da trinca.
- *Propagação da trinca*: as tensões de tração causam o crescimento da trinca e sua propagação ocorre nos planos normais à tensão máxima de tração. O crescimento da trinca é proporcional à amplitude de tensão, enquanto que a propagação é influenciada pelo número de ciclos.
- *Fratura*: falha repentina e catastrófica. Ocorre pelo aumento do tamanho da trinca, ocasionando tensões na extremidade da trinca, que ultrapassam o limite de tenacidade à fratura do material. A fratura ocorre tanto pelo crescimento da trinca até um tamanho crítico quanto pelo aumento da tensão nominal.

A Figura A.1 ilustra os estágios descritos acima.

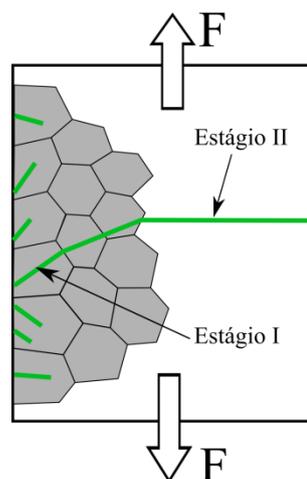


Figura A.1 – Estágios de falha por fadiga

A.1 Características de um carregamento cíclico

Um carregamento cíclico de amplitude constante, como o exemplificado na Figura A.2, tem suas características descritas pelas Equações A.1 a A.4.

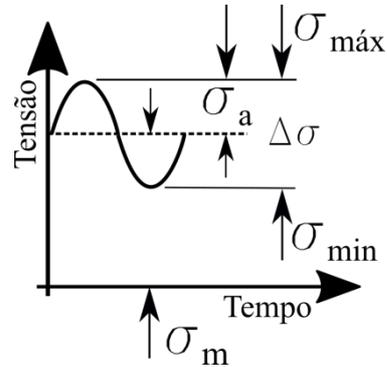


Figura A.2 – Ciclos de carregamentos

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$R = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{mín}} \quad (\text{A.3})$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (\text{A.4})$$

onde $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ são as tensões máximas e mínimas, σ_a e σ_m são as amplitudes de tensão e a tensão média, R e A são as razões de tensões e de amplitudes, respectivamente. Combinando as Equações A.1, A.2 e A.3, obtêm-se os fatores de proporção de amplitude de tensão e tensão média, c_a e c_m , respectivamente:

$$C_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_{máx}} = \frac{1}{2}(1 - R) \quad (\text{A.5})$$

$$C_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{máx}} = \frac{1}{2}(1 + R) \quad (\text{A.6})$$

A.2 Critérios de falha por fadiga

Uma forma de avaliar se uma estrutura sujeita a carregamentos cíclicos está suscetível a uma falha por fadiga é por meio da construção de diagramas conforme o exemplificado na Figura A.3. Desta forma, conhecendo-se as propriedades do material da estrutura e as tensões presentes na mesma, pode-se marcar um ponto no diagrama e avaliar se a estrutura atende a determinado critério.

Adotando como exemplo o ponto A, a estrutura estaria segura de acordo com os critérios de Goodman modificado e Gerber, mas estaria sujeita a falha de acordo com o critério de Soderberg.

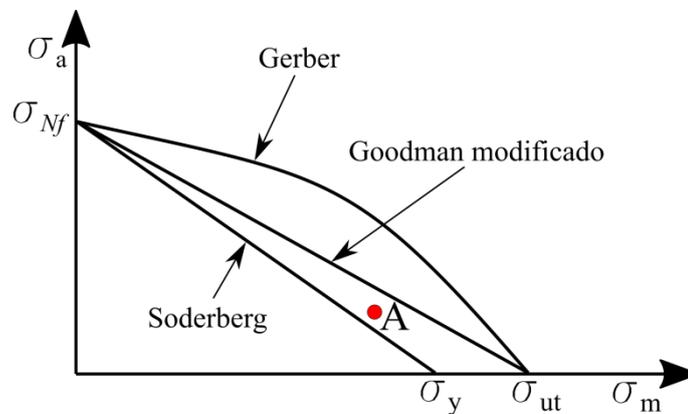


Figura A.3 – Diagrama para diversos critérios de fadiga

Os critérios de Goodman modificado, Gerber e Soderberg representados no diagrama são calculados pelas Equações A.7 a A.9, respectivamente:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{N_f}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ut}} = 1 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{N_f}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{N_f}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{A.9})$$

onde σ_a e σ_m são as tensões alternadas e médias, σ_y e σ_{ut} são a tensão de escoamento e de ruptura, σ_{N_f} é a tensão limite de fadiga para um determinado número de ciclos N_f , denotada pela Equação A.10.

$$\sigma_{N_f} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (\text{A.10})$$

σ_f' e b são o coeficiente de resistência a fadiga e o expoente de resistência a fadiga, propriedades específicas de cada material.