

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RODRIGO BINOTTO

**ESTIMADORES DE ESTADO
DISTRIBUÍDOS COM APLICAÇÕES AO
CONTROLE FLOCKING**

Porto Alegre
2020

RODRIGO BINOTTO

**ESTIMADORES DE ESTADO
DISTRIBUÍDOS COM APLICAÇÕES AO
CONTROLE FLOCKING**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Sanfelice
Bazanella

Porto Alegre
2020

RODRIGO BINOTTO

**ESTIMADORES DE ESTADO
DISTRIBUÍDOS COM APLICAÇÕES AO
CONTROLE FLOCKING**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vítor Heloiz Nascimento, PSI – Poli-USP
Doutor pela University of California – Los Angeles, Estados Unidos

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, julho de 2020.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo suporte e incentivo durante todos os anos de estudo.

Ao professor Alexandre Bazanella por ter orientado este trabalho e também por todas as oportunidades que me concedeu desde os anos de iniciação científica.

Ao PPGEE e a UFRGS pelo ensino de excelência.

Aos colegas Chrystian, Eduardo Félix e Eduardo Varriale por toda a ajuda durante o curso. Agradeço também a todos os colegas de Data Driven Control Group.

Aos professores Jeferson Flores e Lucíola Campestrini que me motivaram a escolher a área de sistemas de controle.

Ao CNPQ e a Petrobras pela provisão da bolsa de mestrado.

À Raquel pelo amor e parceria durante toda jornada.

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre estratégias distribuídas de estimação de estado aplicadas em problemas envolvendo redes multiagente de sensores (ou nós). Nesse tipo de problema a rede de nós é utilizada para cooperativamente estimar o estado de um sistema dinâmico. Diferentemente da abordagem clássica onde as medidas de todos os nós são agregadas em um único ponto para solução do problema de estimação, em uma estratégia distribuída os nós compartilham dados com os demais nós no seu entorno e após esse compartilhamento de informação uma estimativa para o estado do sistema é determinada localmente em cada um deles. Sem a necessidade de todos os nós enviarem dados para uma central de processamento, através de uma estratégia distribuída existe uma redução significativa na demanda por energia de comunicação na rede, além de tornar o sistema mais robusto a falhas, tendo em vista que não existe um único ponto responsável pela estimativa. Um dos principais algoritmos de estimação distribuídos abordados na literatura é o Filtro de Kalman Difuso (DKF), uma adaptação multiagente do Filtro de Kalman clássico, que no trabalho desenvolvido foi explorado em conjunto com a lei de controle *flocking*. Essa lei de controle visa conduzir uma rede móvel de nós a um comportamento coletivo formando arranjos espaciais e em geral é assumido na literatura que os nós possuem acesso ao estado de um sistema de referência que guia o movimento da rede. Foi então considerado o caso onde os nós somente possuem acesso a medidas corrompidas por ruído relacionadas ao estado do sistema de referência e para aplicar a lei de controle *flocking* foi proposta a inclusão do DKF em cascata com o algoritmo de controle, permitindo assim estimar a trajetória do sistema de referência. A partir de estudos de caso em ambiente de simulação foram obtidos resultados que indicam que o DKF supera o desempenho de outros algoritmos de estimação distribuída já aplicados para esse problema, atingindo o desempenho próximo do ótimo - que é obtido através de uma estratégia centralizada.

Palavras-chave: Redes multiagente de sensores, estimação de estado multiagente, Filtro de Kalman Difuso, controle *flocking*.

ABSTRACT

In the present work, a study about the application of distributed state estimation strategies for problems involving multiagent sensor networks was carried. In such problems, sensors (which are equivelently called nodes) are used to cooperatively estimate the state of a dynamic system. Differently from the classical approach, where the measurements of all nodes are aggregated in a fusion center to solve the estimation problem, in a distributed strategy the nodes share information with the nodes in their surroundings, and after this an estimative for the system state is determined locally at each one of them. Since there is not the requirement for all nodes send data to the fusion center, in a distributed strategy generally there is a significant decrease on the network's communication energy. Additionally, with this approach the system naturally is more robust to failures, given that there is not an only point responsible for the estimation process. One of the main distributed estimation algorithms is the Diffuse Kalman Filter (DKF), a multiagent adaptation of the classical Kalman Filter and in our study the DKF was explored with the flocking formation control law. This control law aims to lead a mobile network to a collective behavior forming special arranges, and in general it is assumed that nodes have access to the state of a reference system which guides network movement. So, was considered a case where nodes can only have access to noisy measurements that are related to the reference system state, and to apply the control law was proposed the inclusion of DKF in cascading to the flocking control algorithm to track the reference system state. From simulation case studies, the obtained results showed that DKF outperforms other distributed estimation algorithms applied before to this problem and reaches a performance close to optimal - which is obtained through a centralized strategy.

Keywords: Multiagent sensor network, multiagent state estimation, Diffusion Kalman Filter, flocking control algorithm.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 1 – | Exemplo de vizinhança para o nó n (setas indicam que dois nós compartilham informação). | 24 |
| Figura 2 – | Exemplo de configuração α -lattice. | 53 |
| Figura 3 – | Topologia de comunicação da rede. | 60 |
| Figura 4 – | Variação do parâmetro $\gamma(n)$ para os nós da rede. | 62 |
| Figura 5 – | Comparação entre a trajetória real do sistema (\mathbf{x}_k) e a trajetória estimada com o DKF ($\hat{\mathbf{x}}_k^d$). | 62 |
| Figura 6 – | Comparação entre a trajetória estimada com o CKF ($\hat{\mathbf{x}}_k^c$) e a trajetória estimada com o DKF ($\hat{\mathbf{x}}_k^d$). | 63 |
| Figura 7 – | Erro médio (tendência) obtido com o DKF no nó $n = 5$ | 63 |
| Figura 8 – | Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DKF e o MSE ótimo obtido com o CKF. | 65 |
| Figura 9 – | Comparação entre o MSE assintótico teórico para o DKF, o valor atingido em simulação e atingido através da estratégia não cooperativa. | 66 |
| Figura 10 – | Trajetória real do sistema (167) em uma das rodadas de simulação. | 67 |
| Figura 11 – | Comparação das medidas $z_{1,k}$ do nó $n = 1$ (menor nível de ruído) e medidas $z_{7,k}$ do nó $n = 7$ (maior nível de ruído). | 68 |
| Figura 12 – | Comparação entre a trajetória real do sistema e as estimativas obtidas com o DEKF para o nó $n = 1$ e com o EKF. | 69 |
| Figura 13 – | Comparação entre a trajetória real do sistema e as estimativas obtidas com o DEKF para o nó $n = 7$ e com o EKF. | 69 |
| Figura 14 – | Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DEKF e o MSE ótimo obtido com o EKF. | 69 |
| Figura 15 – | Posição inicial dos nós para a rede móvel: realizações de uma VA uniformemente distribuída com média nula e covariância (171). | 70 |
| Figura 16 – | Resultado da aplicação do controle <i>flocking</i> em cascata com o DKF: configuração inicial da rede $q(0)$, configuração final $q(t \gg 0)$ e trajetória do líder $q^r(t)$ | 72 |
| Figura 17 – | Trajetória real do agente líder comparada a estimativa do nó $n = 2$ com DKF, consKF e o CKF. | 73 |
| Figura 18 – | Trajetória real do agente líder comparada a estimativa do nó $n = 3$ com DKF, consKF e o CKF. | 73 |
| Figura 19 – | Comparação entre o MSE para o nó $n = 6$ com o DKF, consKF e o CKF. | 74 |
| Figura 20 – | Comparação entre o MSE para o nó $n = 7$ com o DKF, consKF e o CKF. | 74 |

| | |
|--|----|
| Figura 21 – Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DKF e o MSE ótimo obtido com o CKF. | 74 |
| Figura 22 – Comparação do erro de trajetória (176) para as diferentes estratégias de estimação em cascata com o controle <i>flocking</i> | 75 |
| Figura 23 – Resultado da aplicação do controle <i>flocking</i> em cascata com o DEKF: configuração inicial da rede $q(0)$, configuração final $q(t \gg 0)$ e trajetória do líder $q^r(t)$ | 77 |
| Figura 24 – Comparação entre a posição real do líder (q^a e q^b) e a estimada para o nó $n = 4$ (\hat{q}_4^a e \hat{q}_4^b) através do DEKF. | 77 |
| Figura 25 – Comparação entre a velocidade real do líder (s^a e s^b) e a estimada para o nó $n = 4$ (\hat{s}_4^a e \hat{s}_4^b) através do DEKF. | 78 |
| Figura 26 – MSE local para o nó $n = 7$ | 78 |
| Figura 27 – Erro de trajetória (176) resultante para o DEKF. | 79 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------------|---|----|
| Tabela 1 – | Resumo dos parâmetros utilizados em simulação para lei de controle <i>flocking</i> | 71 |
|------------|---|----|

LISTA DE ABREVIATURAS

| | |
|-------|--|
| CTM | <i>coordinated turn motion</i> |
| CKF | Filtro de Kalman Centralizado |
| DKF | Filtro de Kalman Difuso |
| DEKF | Filtro de Kalman Estendido Difuso |
| KF | Filtro de Kalman |
| EKF | Filtro de Kalman Estendido |
| pdf | função densidade de probabilidade |
| PPGEE | Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica |
| VA | variável aleatória |
| VANT | veículo aéreo não tripulado |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--|--|
| \mathbb{Z} | conjunto dos números inteiros |
| \mathbb{N} | conjunto dos números naturais |
| \mathbb{R} | conjunto dos números reais |
| \mathbb{R}^+ | conjunto dos números reais positivos incluindo 0 |
| $\sigma\{A\}$ | espectro da matriz A |
| I_α | matriz identidade de dimensão α |
| 0_α | matriz nula de dimensão α |
| $\ \cdot\ $ | norma euclidiana |
| ∇_x | operador gradiente |
| $\mathbb{E}\{\cdot\}$ | operador valor esperado |
| $p_{\mathbf{X}}(x)$ | pdf de \mathbf{X} |
| $p_{\mathbf{X} \mathbf{Y}}(x y)$ | pdf de \mathbf{X} condicionado a \mathbf{Y} |
| \otimes | produto de Kronecker |
| $tr\{A\}$ | traço da matriz A |
| $\mathbf{x} \sim \mathbb{G}(\bar{x}, P)$ | VA \mathbf{x} com pdf gaussiana de média \bar{x} e covariância P |
| x^T | transposto de x (matriz ou vetor) |
| $\max\{A\}$ | valor máximo dentro do conjunto A |
| $\mathbb{E}\{\mathbf{x} \mathbf{y}\}$ | valor esperado de \mathbf{x} condicionado a \mathbf{y} |
| $\mathbb{1}$ | vetor com todos os componentes iguais a 1 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 1.1 | Organização do trabalho | 16 |
| 1.2 | Notação | 16 |
| 2 | ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM REDES MULTIAGENTE | 18 |
| 2.1 | Introdução | 18 |
| 2.2 | Fundamentos de estimação | 18 |
| 2.3 | Problema de estimação de estado | 20 |
| 2.3.1 | Sistema linear e gaussiano | 21 |
| 2.4 | Formulação do problema de filtragem para redes multiagente | 23 |
| 2.5 | Considerações Finais | 25 |
| 3 | SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ESTADO MULTIAGENTE | 27 |
| 3.1 | Introdução | 27 |
| 3.2 | Classificação das soluções | 27 |
| 3.3 | Caso linear e gaussiano | 28 |
| 3.3.1 | Filtro de Kalman Centralizado | 29 |
| 3.3.2 | Filtro de Kalman Difuso | 30 |
| 3.4 | Considerações finais | 33 |
| 4 | ANÁLISE DO DKF E EXTENSÕES PARA O CASO NÃO LINEAR | 35 |
| 4.1 | Introdução | 35 |
| 4.2 | Formas equivalentes do DKF | 35 |
| 4.2.1 | DKF - correção com estrutura de informação | 36 |
| 4.2.2 | DKF - correção sequencial | 39 |
| 4.3 | Análise do desempenho do DKF | 41 |
| 4.3.1 | Erro médio | 41 |
| 4.3.2 | Erro médio quadrático | 43 |
| 4.3.3 | Erro médio quadrático assintótico | 45 |
| 4.4 | Construção da matriz de difusão | 46 |
| 4.5 | Filtro de Kalman Estendido Difuso | 47 |
| 4.6 | Considerações Finais | 49 |
| 5 | ESTIMADORES DISTRIBUÍDOS APLICADOS NO ALGORITMO DE CONTROLE FLOCKING | 50 |
| 5.1 | Introdução | 50 |
| 5.2 | Controle <i>flocking</i> | 50 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 5.2.1 | Descrição do sistema | 51 |
| 5.2.2 | Descrição do comportamento <i>flocking</i> | 52 |
| 5.2.3 | Lei de controle | 53 |
| 5.3 | Problema de filtragem multiagente aplicado ao controle <i>flocking</i> | 55 |
| 5.3.1 | Controle <i>flocking</i> em cascata com DKF | 57 |
| 5.4 | Considerações Finais | 58 |
| 6 | SIMULAÇÕES E RESULTADOS | 59 |
| 6.1 | Introdução | 59 |
| 6.2 | Estimadores distribuídos em redes estáticas | 59 |
| 6.2.1 | DKF em uma rede de $N=10$ nós | 59 |
| 6.2.2 | DEKF em uma rede de $N=10$ nós | 66 |
| 6.3 | Estimadores distribuídos em cascata com controle <i>flocking</i> | 70 |
| 6.3.1 | Agente líder com dinâmica linear | 70 |
| 6.3.2 | Agente líder com dinâmica não linear | 75 |
| 7 | CONCLUSÃO | 80 |
| | REFERÊNCIAS | 82 |
| | APÊNDICE A INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES SOBRE O ALGORITMO DE CONTROLE <i>FLOCKING</i> | 86 |
| A.1 | Função $\Phi(q)$ e u_n^g | 86 |
| A.2 | Matriz $\bar{A}(q)$ | 87 |
| A.3 | Resumo dos parâmetros da lei de controle <i>flocking</i> | 88 |

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho são abordadas técnicas distribuídas para estimação do estado de sistemas dinâmicos através da utilização de redes multiagente de sensores, problema esse denominado de filtragem em redes multiagente (CATTIVELLI; SAYED, 2010a). Nesse tipo de problema deseja-se extrair informações de um sistema dinâmico cujo estado não pode ser diretamente acessado, havendo disponíveis somente conjuntos de medidas provenientes de uma rede de sensores. Tais medidas são associadas ao estado do sistema conforme uma relação conhecida e partindo do pressuposto básico de que elas são corrompidas por ruído, para obtermos informações do estado do sistema é necessária a aplicação de algum método de estimação.

Define-se como rede multiagente de sensores um conjunto de sensores com capacidade de comunicação entre si (ESTRIN *et al.*, 2001). Esse conjunto é descrito como uma rede de N nós (ou agentes), onde cada nó representa um sensor. Além da estrutura necessária para obter as medidas, é assumido que cada nó é dotado de no mínimo mais dois conjuntos de componentes:

- dispositivos para comunicação (com ou sem fio) permitindo o compartilhamento de dados com os demais nós da rede;
- dispositivos para processamento da informação localmente, ou seja no próprio nó.

Também é assumido que não necessariamente todos os nós efetuam o mesmo tipo de medida, o que é equivalente a assumir que a rede pode ser composta por diferentes tipos de sensores.

Problemas de estimação envolvendo redes com essas propriedades são observados em diversas aplicações. Exemplos são encontrados em redes cooperativas de veículos aéreos não tripulados (VANT) (SHIMA; RASMUSSEN, 2009), redes robóticas (BULLO; CORTES; MARTINEZ, 2009) e redes de câmeras para monitoramento (AGHAJAN; CAVALLARO, 2009). Também são propostas na literatura soluções que aplicam redes de sensores na agricultura de precisão (CORKE *et al.*, 2010), localização espacial em redes de comunicação (CATTIVELLI; SAYED, 2010b), estimativa da trajetória de projéteis (ZHAO; GUIBAS; GUIBAS, 2004), dentre outras.

Quando se enfrenta um problema de estimação envolvendo redes multiagentes é possível dividir as soluções em dois grupos: centralizadas e distribuídas. Nas soluções centralizadas todos os nós enviam os dados coletados para um nó central que é responsável por executar o processamento e fusão desses dados para solucionar o problema de estimação. O principal aspecto positivo de uma estratégia centralizada é que trabalha-se com o máximo de informação disponível, agregando dados de todos os elementos da rede (SAYED *et al.*, 2013). Entretanto, para que os nós se comuniquem com a central existe uma demanda elevada por energia de comunicação (LOPES; SAYED, 2008), tendo em vista que a rede pode ser composta por um número elevado de nós e eles podem estar distantes da central. Devido a isso e também a outras limitações físicas, para muitos sistemas não é possível a implementação de soluções do tipo centralizadas. Outro fator negativo é que a existência de um nó central para processamento cria um potencial ponto de falha para o sistema (PASQUALETTI; CARLI; BULLO, 2011), pois com uma falha na central toda a rede perde a sua capacidade de estimação.

Por sua vez, nas soluções distribuídas não existe uma central de processamento em posse de todos os dados coletados pelos nós. Cada um dos nós irá resolver o problema de estimação localmente considerando suas próprias medidas e também conjuntos de dados oriundos dos nós próximos a eles. Dessa forma a comunicação pode ocorrer unicamente dentro de subconjuntos de nós que estão próximos uns dos outros, sendo esses conjuntos denominados de vizinhanças. Para muitos casos, a realização de comunicação exclusivamente dentro das vizinhanças possibilita uma redução significativa dos recursos de comunicação necessários na rede (PREDD; KULKARNI; POOR, 2006). Além disso, em estratégias distribuídas o sistema naturalmente torna-se mais robusto, no sentido de que não há uma central de processamento, ou seja um potencial ponto de falha (FAWZI; TABUADA; DIGGAVI, 2014). Como desvantagem em relação à abordagem centralizada, em geral as estratégias distribuídas apresentam estimativas menos precisas, justamente por utilizarem um menor número de dados para o processamento.

Avanços significativos na área de estimação distribuída em redes multiagentes foram registrados na literatura nas últimas décadas, tanto para problemas de estimação de parâmetros como para estimação de estado de sistemas dinâmicos. Para estimação de parâmetros foram propostos diversos algoritmos distribuídos do tipo consenso, como em (JOHANSSON *et al.*, 2008) e (XIAO; BOYD, 2004), que surgem a partir do estudo de consenso em grafos. Outra classe de soluções distribuídas são as do tipo difusas (SAYED *et al.*, 2014). Dentro dessa classe destacam-se as versões distribuídas para os filtros adaptativos clássicos, como o *diffusion least-mean-squares* (CATTIVELLI; SAYED, 2009) e *diffusion recursive-least-squares* (CATTIVELLI; LOPES; SAYED, 2008a).

Da mesma forma, para os problemas de estimação de estado foram propostas diversas soluções distribuídas. Para sistemas lineares foram desenvolvidos algoritmos distribuídos inspirados no Filtro de Kalman (KF) clássico (KALMAN, 1960), como versões de

consenso do KF (OLFATI-SABER, 2007) e (KHAN; MOURA, 2008). Ainda para sistemas lineares também se destacam algoritmos para estimação de estado através de redes com elevado número de nós, como o estimador assintótico proposto em (MARELLI; FU, 2015). Já para sistemas não lineares também foram desenvolvidas versões distribuídas para algoritmos baseados em métodos Sequenciais de Monte Carlo, como o Filtro de Partículas Distribuído (HLINKA; HLAWATSCH; DJURIC, 2012).

Sob esse contexto, o objetivo principal do trabalho desenvolvido consiste no estudo de algoritmos distribuídos de estimação de estado para redes multiagente de sensores. Em particular, será tratado do Filtro de Kalman Difuso (DKF), originalmente proposto em (CATTIVELLI; LOPES; SAYED, 2008b). Inspirado nas estratégias difusas de estimação de parâmetros, o DKF consiste em uma adaptação para redes multiagente do KF clássico.

No trabalho é explorado como o DKF e sua versão estendida para sistemas não lineares podem ser aplicados em uma rede móvel de nós sujeitos a uma lei de controle distribuído *flocking* (OLFATI-SABER, 2006). Essa lei de controle possui como objetivo conduzir a rede móvel para um comportamento de *flocking* (ou comportamento de bando). Inspirado no comportamento coletivo observado em grupos de animais como pássaros e peixes, o controle *flocking* possui aplicações no controle de formação de redes de VANT (VÁSÁRHELYI *et al.*, 2014), controle de redes robóticas (SEMNANI; BASIR, 2014), monitoramento ambiental com redes móveis de sensores (LU *et al.*, 2016), dentre outras.

Como motivação para o trabalho desenvolvido se destaca que a aplicação do DKF em conjunto com estratégias de controle de navegação e formação em redes multiagente, como é o caso do algoritmo *flocking*, foi pouco explorada na literatura. Em (OLFATI-SABER; JALALKAMALI, 2006) os autores estudam como algoritmos distribuídos de estimação de estado podem ser aplicados em conjunto com o controle *flocking*. Porém na mesma referência é proposta a utilização do Filtro de Kalman de Consenso, que possui como desvantagem em relação ao DKF a necessidade do ajuste de três parâmetros e também o fato de ser restrito a sistemas lineares. Por sua vez, o DKF possui como única escolha de projeto a política de compartilhamento de informação na rede, representada por uma matriz denominada de matriz de difusão, e possui adaptações para o caso não linear.

Além disso, comparado ao KF de consenso esperam-se melhores resultados com o DKF em conjunto com o controle *flocking*, pois como discutido em (SAYED *et al.*, 2013) as estratégias difusas quando sujeitas a uma escolha adequada da política de compartilhamento de informação em geral superam o desempenho de estratégias do tipo consenso. Considerando esse aspecto, outro tópico que será explorado no trabalho são regras para a construção da matriz de difusão, sendo proposta pelo autor uma generalização da Regra de Hastings para o caso multidimensional.

1.1 Organização do trabalho

Os demais capítulos do trabalho são divididos como segue. No capítulo 2 são apresentados fundamentos de estimação incluindo o problema clássico de estimação de estado. Após isso, o problema de filtragem em rede é formalmente apresentado, iniciando com a descrição do sistema e da rede multiagente de sensores.

No capítulo 3 são tratados aspectos gerais envolvendo as soluções desse problema. Em seguida são apresentadas duas soluções para o caso linear e gaussiano, o Filtro de Kalman Centralizado e o DKF, sendo este o principal algoritmo para o restante do trabalho. Já o capítulo 4 contém um estudo sobre o DKF, apresentando duas formas equivalentes do algoritmo e uma análise do seu desempenho. Também no capítulo 4 é descrita a regra proposta para a construção da matriz de difusão do DKF e uma adaptação do algoritmo para o caso não linear, o Filtro de Kalman Estendido Difuso (DEKF).

No capítulo 5 é proposta a aplicação do DKF para o algoritmo de controle *flocking*, contendo então a principal contribuição do trabalho desenvolvido. No início do capítulo são apresentados aspectos gerais sobre o controle *flocking*. Após isso é discutido como o problema de filtragem surge no âmbito do controle *flocking*, relacionando esse algoritmo de controle ao restante do trabalho. Por fim, são discutidos os detalhes da aplicação do DKF ao controle *flocking*.

No capítulo 6 são apresentados exemplos em simulação e os resultados obtidos. Inicialmente o capítulo contém exemplos simples da aplicação do DKF e o DEKF em problemas genéricos e após isso são abordados casos envolvendo a aplicação das estratégias de estimação no controle *flocking*. Por fim, o capítulo 7 contém as conclusões do trabalho.

1.2 Notação

Ao longo do trabalho serão tratados tanto sinais em tempo contínuo como em tempo discreto. Para tornar a notação mais clara, a dependência temporal dos sinais em tempo contínuo será denotada de forma convencional, enquanto para os sinais de tempo discreto será empregada notação subscripta. Além disso, será dada preferência à letra t para o tempo contínuo e k para o tempo discreto. Ou seja, $x(t)$ é um sinal dependente do tempo contínuo $t \in \mathbb{R}$, enquanto x_k é dependente do tempo discreto $k \in \mathbb{Z}$.

As quantidades associadas às redes multiagentes ainda possuem dependência com os nós da rede, por isso irão demandar dois subscritos no caso de tempo discreto. Será convencionalizado que o primeiro subscrito associa a variável a um nó da rede enquanto o segundo subscrito denota a dependência temporal. Ou seja, $x_{n,k}$ representa o sinal x associado ao nó n para o instante de tempo $k \in \mathbb{Z}$. Observa-se que será dada preferência à letra n para referência a um nó genérico da rede multiagente.

Para destacar os processos estocásticos e variáveis aleatórias será utilizada fonte em negrito, enquanto as quantidades determinísticas serão escritas com fonte convencional.

O operador $col \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ empilha x_1, x_2, \dots, x_N (vetores ou matrizes):

$$col \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (1)$$

enquanto o operador $diag \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ constrói uma matriz bloco-diagonal com as matrizes $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

$$diag \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_N \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2 ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM REDES MULTIAGENTE

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os blocos teóricos fundamentais para o restante do trabalho, sendo seu principal objetivo a formulação do problema de estimação de estado para sistemas monitorados por redes multiagentes. Inicialmente serão abordados conceitos fundamentais de estimação. Em seguida é apresentado o problema clássico de estimação de estado para um sistema dinâmico e sua extensão para o caso de redes multiagentes de sensores.

2.2 Fundamentos de estimação

Um problema de estimação pode ser definido como a extração de informações de uma variável aleatória (VA) \mathbf{X} a partir do conhecimento de realizações de \mathbf{Y} , uma segunda VA que de alguma forma é relacionada a \mathbf{X} . Ou seja, estamos interessados na seguinte pergunta: sabendo que foi observada a realização $\mathbf{Y} = y$, o que podemos dizer sobre a VA \mathbf{X} ? Tais problemas são relevantes no campo de probabilidade aplicada, tendo em vista que diversos problemas na área de engenharia e demais áreas da ciência podem ser formulados e solucionados através dessa abordagem.

Em geral, o conceito de extrair informações de \mathbf{X} é traduzido matematicamente como a determinação de um valor estimado para \mathbf{X} , que recebe o nome de estimativa \hat{x} . Sendo dependente da observação $\mathbf{Y} = y$, a estimativa \hat{x} é interpretada como o resultado da aplicação de y em uma função $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$ que recebe o nome de estimador. Sob esse ponto de vista, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$ é uma regra que associa um valor particular \hat{x} para cada um dos valores possíveis de y .

Observa-se que a solução de um problema de estimação invariavelmente irá demandar a escolha de um estimador $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$. Essa escolha é balizada por um critério de estimação que indica quais aspectos são considerados para determinar \hat{x} através da observação $\mathbf{Y} = y$. Um dos principais critérios de estimação empregados na literatura e que será explorado ao longo do trabalho é dado pela minimização do erro médio quadrático entre \mathbf{X} e $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$

condicionado à $\mathbf{Y} = y$, expresso como:

$$\mathbb{E} \left\{ \|\tilde{\mathbf{X}}\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \right\}, \quad (3)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ é o operador valor esperado e $\tilde{\mathbf{X}}$ é definido como o erro de estimação:

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}. \quad (4)$$

O estimador que minimiza (3) é denominado de estimador *mean-square* e uma estimativa por ele produzida é chamada de estimativa *mean-square* ou de mínima variância. Equivalememente, se \hat{x} é uma estimativa *mean-square*, ela minimiza (3), i.e.:

$$\mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{X} - \hat{x}\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{X} - z\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \right\}, \quad (5)$$

para qualquer z . Um resultado clássico na área de estimação demonstra que a estimativa *mean square* \hat{x} dada a realização $\mathbf{Y} = y$ é obtida pelo valor esperado de \mathbf{X} condicionado a $\mathbf{Y} = y$ (ANDERSON; MOORE, 2012), como enunciado no Teorema 1:

Teorema 1 (estimativa *mean square*). *Considere duas VA \mathbf{X} e \mathbf{Y} cuja função densidade de probabilidade de \mathbf{X} condicionada a \mathbf{Y} é $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y)$. A estimativa \hat{x} para \mathbf{X} dada a realização $\mathbf{Y} = y$ e que atende (5) é obtida como:*

$$\hat{x} = \mathbb{E} \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y \} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx \quad (6)$$

Prova. Seja z uma estimativa de \mathbf{X} . Substituindo z no erro médio quadrático (3), tem-se:

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{X} - z\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \}, \quad (7)$$

que pode ser expresso em função de $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y)$ como:

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{X} - z\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - z)^T (x - z) p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx. \quad (8)$$

Sabendo que z não é função de x em (8) e que $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx = 1$, (8) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \|\mathbf{X} - z\|^2 \mid \mathbf{Y} = y \} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^T x p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx - \left\| \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx \right\|^2 + \\ &\quad \left[z - \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx \right]^T \left[z - \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x|y) dx \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Analisando (9) observa-se que ela é uma expressão quadrática para z possuindo mínimo global em $z = \mathbb{E} \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y \}$. Logo a estimativa *mean square* de \mathbf{X} é única e dada por $\hat{x} = \mathbb{E} \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y \}$. \square

Nota-se pelo Teorema 1 que a escolha pelo critério *mean-square* resulta em uma solução para o problema de estimação unicamente caracterizada através de (5). Exceto para casos particulares, a adoção de outros critérios de estimação resultaria em soluções diferentes. Isso corrobora o fato de o critério de estimação ser parte fundamental da construção do problema. Um outro exemplo de critério de estimação é a maximização da função *likelihood*, resultando no estimador de máxima verossimilhança que é importante ferramenta na solução de problemas de identificação de parâmetros (LJUNG, 1999).

2.3 Problema de estimação de estado

Considere um sistema em tempo discreto representado por um modelo dinâmico em espaço de estados cuja equação de estado é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_k, k) + G_k \boldsymbol{\eta}_k, \quad (10)$$

onde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{m_x}$ é o estado do sistema e $u_k \in \mathbb{R}^{m_u}$ é um sinal de entrada conhecido, ambos para o instante de tempo $k \in \mathbb{Z}$. O processo estocástico $\boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{R}^{m_\eta}$ é o ruído de estado e G_k é uma matriz em $\mathbb{R}^{m_x \times m_\eta}$ dependente do tempo k . A função de transição de estado $f(\cdot) : \mathbb{R}^{m_x} \times \mathbb{R}^{m_u} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}^{m_x}$ é possivelmente uma função não linear.

Toda informação sobre o sistema (10) até o instante k está contida no vetor de estados \mathbf{x}_k . Porém, admite-se que o vetor de estados não pode ser diretamente acessado, estando disponíveis somente medidas $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$ que estão relacionadas ao estado \mathbf{x}_k de acordo com a equação de medida:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k, \quad (11)$$

sendo o mapeamento $h(\cdot) : \mathbb{R}^{m_x} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ possivelmente uma função não linear. O processo estocástico $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ é denominado ruído de medida. No caso em que $f(\cdot)$ e/ou $h(\cdot)$ são funções não lineares, (10) e (11) formam um modelo em espaço de estados não linear com ruído aditivo (SÄRKKÄ, 2013).

São assumidas ainda as seguintes hipóteses sobre os ruídos e \mathbf{x}_0 , o estado inicial do sistema:

- **A1:** $\boldsymbol{\eta}_k$ possui média nula $\forall k$ e é branco, i.e. $\forall k, l, \mathbb{E}\{\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_l^T\} \triangleq Q_k \delta_{kl} > 0$, onde δ_{kl} representa a função Delta de Kronecker;
- **A2:** \mathbf{v}_k possui média nula $\forall k$ e é branco, i.e. $\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T\} \triangleq R_k \delta_{kl} > 0$;
- **A3:** $\{\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{v}_l\}$ são mutuamente independentes $\forall k, l$;
- **A4:** $\{\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{x}_0\}$ bem como $\{\mathbf{v}_k, \mathbf{x}_0\}$ são mutuamente independentes $\forall k$.

Nota-se que por $\boldsymbol{\eta}_k$ e \mathbf{v}_k possuírem média nula, Q_k e R_k são as covariâncias dos ruídos de estado e de medida, respectivamente. Todas essas hipóteses são amplamente adotadas

na literatura de estimação de estado e possuem interpretações razoáveis para sistemas reais. A hipótese **A2** por exemplo, pode ser interpretada como a utilização de um sensor cujo erro possui média nula e não tem relação entre duas amostras k e l . Da mesma forma, espera-se que a perturbação na medida e no estado (η_k e v_k) não possuam nenhuma relação entre si e com o estado inicial do sistema, conforme previsto por **A3** e **A4**.

Tendo em vista que não há acesso direto ao estado \mathbf{x}_k , surge o problema de como obter informações do sistema de posse do conhecimento disponível: realizações das medidas z_k e o modelo em espaço de estado formados por (10) e (11) que concentra a informação sobre a dinâmica do sistema e relaciona o estado e as medidas. Com a presença dos ruídos de medição e de estado, esse problema é formulado como um problema de estimação. Para um determinado instante de tempo k , desejamos determinar uma estimativa para o estado \mathbf{x}_k a partir do conjunto de observações $\{z_m\}$, $m = 0, 1, \dots, L$, sendo $L \in \mathbb{Z}$.

O caso de maior interesse para o trabalho desenvolvido ocorre quando $L = k$, sendo esse problema denominado de **filtragem** ou **estimação de estado**. Nesse caso são utilizadas medidas até o instante de tempo k para determinar uma estimativa para \mathbf{x}_k . Quando $L < k$, as medidas $\{z_m\}$ são aplicadas para prever o comportamento futuro do sistema (10), sendo o problema de estimação chamado de **predição**. Já no caso em que $L > k$ o problema é denominado **suavização** (ANDERSON; MOORE, 2012).

Definindo como $\hat{\mathbf{x}}_{k|m}$ a estimativa para o estado \mathbf{x}_k considerando toda a informação disponível até o instante m , o erro de estimação de $\hat{\mathbf{x}}_{k|m}$ é dado por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|m} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|m} . \quad (12)$$

Sob a ótica de um estimador *mean square* busca-se uma estimativa que minimize o erro médio quadrático entre $\hat{\mathbf{x}}_{k|m}$ e \mathbf{x}_k condicionado às observações $\mathbf{Z}_m \triangleq \{z_0, \dots, z_m\}$, dado por:

$$\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_{k|m}\|^2 \mid \mathbf{Z}_m\} . \quad (13)$$

Uma forma alternativa de obter (13) é através da covariância do erro $\tilde{\mathbf{x}}_{k|m}$. Suponha que $\tilde{\mathbf{x}}_{k|m}$ condicionado a \mathbf{Z}_m possua média nula e sua covariância seja dada pela matriz P . Então segue que o erro médio quadrático é igual ao traço de P :

$$\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_{k|m}\|^2 \mid \mathbf{Z}_m\} = \text{tr}\{P\} . \quad (14)$$

2.3.1 Sistema linear e gaussiano

A solução para o problema de filtragem considerando o sistema em espaço de estados composto por (10) e (11) não possui solução analítica no caso geral (GUSTAFSSON, 2010). Entretanto, no caso particular em que o sistema é linear e gaussiano existe uma solução analítica e recursiva para o problema, conforme apresentado a seguir.

Para esse caso as expressões (10) e (11) formam o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k + G_k \eta_k , \\ z_k &= H_k \mathbf{x}_k + v_k , \end{cases} \quad (15)$$

onde F_k , B_k e H_k são matrizes de dimensões $[m_x \times m_x]$, $[m_x \times m_u]$ e $[p \times m_x]$, respectivamente. Considerando o caso gaussiano, é assumido que todas as perturbações do sistema possuem função de densidade de probabilidade (pdf) gaussiana. Adotando a notação $\alpha \sim \mathbb{G}(\bar{\alpha}, A)$ para representar que α possui pdf gaussiana com média $\bar{\alpha}$ e covariância A , sob as hipóteses **A1** e **A2** tem-se que $\eta_k \sim \mathbb{G}(0, Q_k)$ e $v_k \sim \mathbb{G}(0, R_k)$. Para o sistema ser considerado gaussiano, além das perturbações também é assumido que o estado inicial possui pdf gaussiana conhecida $x_0 \sim \mathbb{G}(\bar{x}_0, P_0)$. Observa-se que por x_0 ser gaussiano, para o conhecimento de sua pdf basta conhecermos sua média \bar{x}_0 e covariância P_0 (PAPOULIS; PILLAI, 2002).

A solução ótima para o problema de filtragem nesse caso particular é bastante conhecida na literatura sendo obtida através do Filtro de Kalman (KF) (KALMAN, 1960), que consiste em um algoritmo recursivo com uma estrutura do tipo *predição-correção*. Considerando o instante k , na etapa de predição toda a informação disponível antes da medida z_k é aplicada ao modelo do sistema para determinar a estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$. A informação aplicada nessa etapa é na verdade a própria estimativa obtida na etapa de correção anterior, $\hat{x}_{k-1|k-1}$. Por sua vez, na etapa de correção a estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ é atualizada a partir da medida z_k coletada, obtendo a estimativa *a posteriori* $\hat{x}_{k|k}$ que consiste na estimativa final para o instante k . As incertezas nas estimativas $\hat{x}_{k|k-1}$ e $\hat{x}_{k|k}$ são mensuradas pelas covariâncias *a priori* $P_{k-1|k-1}$ e *a posteriori* $P_{k|k}$, respectivamente. A formulação de cada uma das etapas do KF é apresentada no Teorema 2:

Teorema 2 (Filtro de Kalman (KALMAN, 1960)). *Seja o sistema linear (15) com os ruídos de processo e medida gaussianos, $\eta_k \sim \mathbb{G}(0, Q_k)$ e $v_k \sim \mathbb{G}(0, R_k)$, e com estado inicial gaussiano, $x_0 \sim \mathbb{G}(\bar{x}_0, P_0)$. Considere ainda que η_k , v_k e x_0 atendem as hipóteses **A1** até **A4**. Então, a estimativa ótima no sentido mean square para o estado x_k considerando o conjunto de medidas $Z_k \triangleq \{z_0, \dots, z_k\}$ é dada pela estimativa *a posteriori* $\hat{x}_{k|k}$ com covariância $P_{k|k}$:*

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (16)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \quad (17)$$

onde a estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ e sua covariância $P_{k|k-1}$ são dadas por:

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1} u_{k-1} \quad (18)$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T \quad (19)$$

e o ganho ótimo de correção é expresso como:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (20)$$

Prova. pode ser encontrada em (SÄRKKÄ, 2013). □

2.4 Formulação do problema de filtragem para redes multiagente

Essa seção estende o problema de filtragem apresentado na seção 2.3 para o caso de sistemas monitorados através de uma rede de sensores com N nós (ou agentes). Para isso, novamente consideramos o sistema não linear com ruído aditivo (10), porém a medida z_k agora é substituída por N medidas oriundas da rede, resultando no seguinte modelo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, u_k, k) + G_k \boldsymbol{\eta}_k . \\ \mathbf{z}_{n,k} &= h_n(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_{n,k} , \quad n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (21)$$

É fundamental notar as diferenças entre a equação de medida em (21) e a equação de medida (11) do sistema convencional apresentado na seção 2.3. Para a rede de sensores, em um determinado instante de tempo k cada nó n executa uma medida $z_{n,k} \in \mathbb{R}^{p_n}$, onde o primeiro subscrito associa a medida ao nó n e o segundo subscrito denota a dependência temporal (conforme detalhado na seção de notação 1.2). Destaca-se que a dimensão p_n das medidas e o mapeamento $h_n(\cdot)$ são dependentes do nó n sendo possivelmente diferentes para cada nó da rede. Da mesma forma, a medida de cada nó é corrompida por um ruído de medição $\mathbf{v}_{n,k}$ diferente.

Uma grande variedade de sistemas pode ser modelado por (21), porém essa abordagem é especialmente adequada para representar uma rede de sensores distribuídos no espaço que monitoram o **mesmo fenômeno físico** cujo estado é \mathbf{x}_k . Essa abordagem também permite o tratamento de casos onde a rede é dinâmica, ou seja a posição dos nós no espaço é variante no tempo, abrangendo o caso em que uma rede dinâmica de sensores é utilizada para medir o estado \mathbf{x}_k .

De forma semelhante ao considerado para o sistema convencional, são admitidas as seguintes hipóteses envolvendo os processos estocásticos do sistema (21):

- **B1:** $\boldsymbol{\eta}_k$ possui média nula $\forall k$ e é branco, i.e. $\forall k, l, \mathbb{E}\{\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_l^T\} \triangleq Q_k \delta_{kl} > 0$;
- **B2:** $\mathbf{v}_{n,k}$ possui média nula $\forall k$ e é branco no tempo e no espaço, i.e. $\mathbb{E}\{\mathbf{v}_{n,k} \mathbf{v}_{m,l}^T\} \triangleq R_{n,k} \delta_{kl} \delta_{nm} > 0$;
- **B3:** $\{\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{v}_{n,l}\}$ são mutuamente independentes $\forall k, l, n$;
- **B4:** $\{\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{x}_0\}$ bem como $\{\mathbf{v}_{n,k}, \mathbf{x}_0\}$ são mutuamente independentes $\forall k, n$.

O termo branco no espaço utilizado na hipótese **B2** é relacionado com o fato de os nós da rede serem interpretados como sensores distribuídos no espaço. Assume-se assim que os ruídos de medida para dois nós distintos são descorrelacionados.

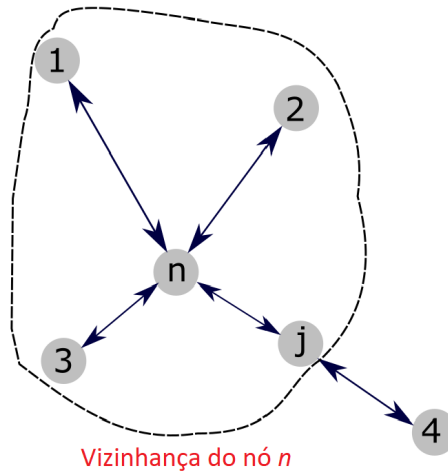
É suposto também que os nós possuem capacidade de comunicação entre si, podendo compartilhar informações com os demais nós integrantes da rede de acordo com um determinado protocolo de comunicação. Dois nós que compartilham informação diretamente

são ditos **conectados**. Como geralmente, a troca de informação se dá entre os nós espacialmente próximos, denomina-se **vizinhança** de um nó o conjunto de todos os nós conectados a ele, de acordo com a definição 1:

Definição 1. (Vizinhança) A vizinhança \mathcal{N}_n do nó n é o conjunto formado por todos os nós diretamente conectados a ele, i.e. todos os nós que possuem capacidade de compartilhar informações com o nó n , incluindo ele mesmo.

A Figura 1 ilustra a vizinhança de n que para o exemplo é o conjunto de nós dentro da área delimitada pela linha tracejada, $\mathcal{N}_n = \{1,2,3,n,j\}$. Na Figura 1 as setas indicam que dois nós compartilham informação diretamente.

Figura 1 – Exemplo de vizinhança para o nó n (setas indicam que dois nós compartilham informação).



Fonte: do autor

Definindo o conjunto de todos os nós da rede como:

$$\mathcal{V} \triangleq \{1, \dots, N\} \quad (22)$$

a topologia de comunicação da rede pode ser descrita através de um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. As arestas \mathcal{E} são um subconjunto de $\{(l, n) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ de acordo com a seguinte regra:

$$(l, n) \in \mathcal{E} \iff l \in \mathcal{N}_n. \quad (23)$$

Assume-se que o grafo \mathcal{G} é não-dirigido (BOLLOBÁS, 2013), ou seja $(l, n) \in \mathcal{E} \iff (n, l) \in \mathcal{E}$, o que implica que se o nó n envia informações para l , então o nó l também envia informações para n . Podemos ainda associar a um grafo uma matriz A de dimensão $N \times N$ que fornece uma forma alternativa de descrever a sua topologia, sendo denominada de matriz de adjacência e definida como:

$$A \triangleq [a_{ln}], n = 1, \dots, N; l = 1, \dots, N. \quad (24)$$

onde as entradas a_{ln} são:

$$a_{ln} \triangleq \begin{cases} 1, & l \in \mathcal{N}_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (25)$$

No problema de estimação de estado em um contexto multiagente novamente se busca estimar \mathbf{x}_k , porém cada nó da rede irá determinar uma estimativa própria para o estado do sistema. Então, tem-se como solução do problema uma estimativa para cada nó, resultando em um total de N estimativas $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$, $n = 1, \dots, N$. Para determinar $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$ são consideradas todas as medidas do próprio nó n até o instante k , formando o conjunto $\mathbf{Z}_{n,k} \triangleq \{z_{n,0}, \dots, z_{n,k}\}$. Além de $\mathbf{Z}_{n,k}$, é admitido que para obter $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$ também podem ser consideradas informações recebidas dos vizinhos de n . A informação que um vizinho $l \in \mathcal{N}_n$ envia para o nó n pode ser a sua medida $z_{l,k}$ ou alguma outra quantidade após uma etapa de pré-processamento local no nó l . Também é admitido que os nós vizinhos podem compartilhar outros tipo de dados, como os parâmetros dos seus modelos de medição.

Assim como no problema de estimação de estado clássico, a escolha de um critério de estimação também é um ponto fundamental para o desenvolvimento da solução. Para o trabalho desenvolvido será considerado o critério de minimização do erro *mean square* local ($\text{MSE}^{\text{local}}$), i.e. o erro *mean square* de estimação em cada um dos nós da rede, definido para o nó n como:

$$\text{MSE}_{n,k}^{\text{local}} \triangleq \mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}\|^2\}. \quad (26)$$

onde o erro de estimação local é:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k} \triangleq \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{n,k}. \quad (27)$$

Idealmente, por esse critério cada nó obtém uma estimativa com o menor erro médio quadrático local possível, portanto são atingidas boas estimativas locais nos nós. Outros exemplos de critérios já tratados na literatura de estimação multiagente são a minimização do erro médio quadrático sobre toda rede (DE SOUZA; KINNAERT; COUTINHO, 2015) e a minimização do pior caso de consenso entre as estimativas locais (UGRINOVSKII, 2011).

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o problema de filtragem para o caso de sistemas dinâmicos cujo estado é medido através de uma rede de N nós, onde cada nó é interpretado como um sensor. A formulação do problema foi desenvolvida através de uma extensão do problema clássico de estimação de estado. No decorrer do trabalho serão estudadas aplicações e soluções para esse problema que pode ser resumido como:

Problema de filtragem multiagente: *considere um sistema dinâmico em tempo discreto monitorado por uma rede com N nós de acordo com o modelo em espaço de estados*

(21). Para cada instante de tempo k , busca-se determinar uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$ do estado \mathbf{x}_k em cada um dos N nós da rede. Para determinar $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$ são consideradas as medidas do próprio nó n até o instante k , i.e. o conjunto $\mathbf{Z}_{n,k} \triangleq \{\mathbf{z}_{n,0}, \dots, \mathbf{z}_{n,k}\}$, e outras informações oriundas dos nós que compõem a sua vizinhança \mathcal{N}_n . O critério de estimação empregado será do tipo mean-square local, logo cada nó idealmente buscará pela minimização do erro médio quadrático local dado por $\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}\|^2\}$.

3 SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ESTADO MULTIAGENTE

3.1 Introdução

Nesse capítulo são abordadas soluções para o problema de filtragem em redes multiagentes. Primeiro é discutido como as soluções podem ser classificadas tomando como critérios a cooperação e a centralização. Em seguida são discutidas soluções para o caso linear gaussiano e é apresentada a principal estratégia de interesse para o trabalho, o Filtro de Kalman Difuso (DKF).

3.2 Classificação das soluções

Antes de tratarmos de forma mais específica das soluções de interesse, é relevante formalizar alguns aspectos gerais sobre as soluções de problemas de estimação em rede discutidos superficialmente no capítulo 1. Conforme apresentado a seguir, é possível classificar qualquer solução de acordo com os critérios de cooperação e centralização.

Como o compartilhamento de informação entre os nós faz parte da construção de uma solução para o problema de filtragem em rede, evidentemente existe a escolha de não haver a troca de informação. Sabendo disso, qualquer solução proposta pode ser classificada considerando a existência de cooperação entre os nós, resultando em dois tipos de soluções:

- **não cooperativas**: quando não há nenhuma troca de informação entre os nós da rede e cada nó estima o estado do sistema independentemente dos demais.
- **cooperativas**: quando existe qualquer forma de troca de informação entre os elementos da rede.

O nosso interesse reside nas soluções cooperativas, pois em uma solução não cooperativa a característica de rede do problema não é explorada. Suponha que em uma rede existam dois grupos de nós, o grupo N_1 com medidas pouco corrompidas por ruído e o grupo N_2 com medidas bastante contaminadas (i.e. $tr \{R_{n_1,k}\} \ll tr \{R_{n_2,k}\}$, $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$).

Optando por uma solução não cooperativa, é esperado que os nós do grupo N_2 se mantenham isolados com estimativas de pouca qualidade quando comparados ao grupo N_1 , i.e. com erro médio quadrático local elevado. Devido a isso as soluções não cooperativas são menos interessantes para os problemas de estimação em rede, sendo utilizadas principalmente para comparação de desempenho com as estratégias cooperativas.

Ainda é possível classificar as soluções como centralizadas ou distribuídas:

- **centralizadas**: admite-se que exista um nó central c que recebe o nome de central de fusão. A central de fusão é um nó vizinho de todos os demais nós da rede, i.e. $n \in \mathcal{N}_c, \forall n \in \mathcal{V}$. Esse nó especial reúne toda a informação medida pelos demais nós e de posse dela efetua o processamento necessário para determinar uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{c,k}$. Em uma segunda etapa a central de fusão envia a estimativa para todos os demais nós. Logo, em uma solução centralizada todos os nós possuem a mesma estimativa, i.e. $\hat{\mathbf{x}}_{n,k} = \hat{\mathbf{x}}_{c,k} \forall n \in \mathcal{V}$;
- **distribuídas**: em uma solução distribuída não existe a central de fusão e os nós ficam restritos a vizinhanças onde existe somente parte da informação disponível.

Como já discutido no Capítulo 1, as soluções centralizadas tem potencial de produzir estimativas ótimas, entretanto possuem como aspectos negativos uma demanda maior por energia de comunicação e resultam em um possível ponto de falha para o sistema, pois com uma falta na central de fusão toda a rede perde sua capacidade de estimação. Por sua vez, apesar de não atingirem desempenho ótimo, as soluções distribuídas não apresentam esse potencial ponto de falha e podem diminuir significativamente a energia de comunicação na rede. Além disso, para diversos sistemas simplesmente não há a possibilidade de aplicação de uma estratégia centralizada.

3.3 Caso linear e gaussiano

Primeiramente concentraremos atenção no caso linear e gaussiano. Nesse caso particular o sistema em rede (21) é expresso como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k \\ \mathbf{z}_{n,k} &= H_{n,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{n,k}, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N. \quad (28)$$

sendo as matrizes F_k , B_k e $H_{n,k}$ de dimensões $[m_x \times m_x]$, $[m_x \times m_u]$ e $[p_n \times m_x]$, respectivamente. Destaca-se que todas as matrizes do modelo são dependentes do tempo k , resultando em um modelo variante no tempo. Além disso, a matriz $H_{n,k}$ é dependente do nó n , portanto cada nó possui equação de medida possivelmente diferente dos demais. Restringido ainda mais o modelo, no caso gaussiano e sob as hipóteses **B1** a **B4** temos: $\mathbf{x}_0 \sim \mathbb{G}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$, $\boldsymbol{\eta}_k \sim \mathbb{G}(0, Q_k)$ e $\mathbf{v}_{n,k} \sim \mathbb{G}(0, R_{n,k})$.

A seguir são apresentadas duas soluções para esse caso, sendo uma estratégia centralizada que fornece a solução ótima para o problema e uma solução distribuída, o DKF.

3.3.1 Filtro de Kalman Centralizado

Em uma solução centralizada é suposto que existe a central de fusão que a cada instante k recebe a medida de todos os nós, $\mathbf{z}_{n,k}$, $n = 1, \dots, N$. Além das suas medidas os nós também transmitem a matriz $H_{n,k}$ para a central de fusão, ou essa informação já é previamente conhecida. Dessa forma, sob a ótica da central de fusão o sistema em rede (28) pode ser descrito por um modelo global:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k, \\ \mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (29)$$

onde \mathbf{z}_k é obtido empilhando cada uma das medidas dos N nós:

$$\mathbf{z}_k \triangleq \text{col}\{\mathbf{z}_{1,k}, \mathbf{z}_{2,k}, \dots, \mathbf{z}_{N,k}\}, \quad (30)$$

e H_k é a matriz:

$$H_k \triangleq \text{col}\{H_{1,k}, H_{2,k}, \dots, H_{N,k}\}. \quad (31)$$

O ruído de medida \mathbf{v}_k é construído da mesma forma que \mathbf{z}_k :

$$\mathbf{v}_k \triangleq \text{col}\{\mathbf{v}_{1,k}, \mathbf{v}_{2,k}, \dots, \mathbf{v}_{N,k}\}, \quad (32)$$

e como \mathbf{v}_k é um vetor com todas as suas partições gaussianas, i.e. $\mathbf{v}_{n,k} \sim \mathbb{G}(0, R_{n,k})$ $\forall n \in \mathcal{V}$, então segue que \mathbf{v}_k também possui pdf gaussiana (MAYBECK, 1982). Além disso, pela hipótese **B2** $\mathbf{v}_{n,k}$ e $\mathbf{v}_{l,k}$ são descorrelacionados $\forall n, l \in \mathcal{V}$ e possuem média nula, logo \mathbf{v}_k também tem média nula e sua covariância R_k é a matriz bloco diagonal:

$$R_k \triangleq \text{diag}\{R_{1,k}, R_{2,k}, \dots, R_{N,k}\}. \quad (33)$$

Por **B2** segue também que \mathbf{v}_k é branco no tempo, i.e. $\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T\} = R_k \delta_{kl}$.

De imediato, notamos que o sistema (29) visto pela central de fusão possui exatamente a mesma estrutura do sistema (15), verificando as hipóteses **A1** a **A4**. Logo, a solução ótima para o problema de filtragem em rede por uma abordagem centralizada segue direto do Teorema 2 e é obtida através do KF. Para enfatizar que trata-se da aplicação do KF como estratégia centralizada para solução do problema de filtragem em rede, o algoritmo será referido como Filtro de Kalman Centralizado (CKF) e a estimativa produzida por ele será denominada $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^c$.

Uma iteração do CKF para o instante k é mostrada no Algoritmo 1, apresentado em sua forma mais genérica quando além de suas medidas os nós enviam a matriz $H_{n,k}$. A notação $a \leftarrow b$ atribui o valor b à a . O algoritmo é inicializado com $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$ e $P_{0|-1} = P_0$. Claramente os passos 1 e 2 podem ter sua ordem trocada entre si sem alteração do resultado final $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^c$.

Algoritmo 1 Iteração do CKF para o instante k :

1. Etapa de predição na central de fusão:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \leftarrow F_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^c + B_{k-1} u_{k-1}, \\ P_{k|k-1} \leftarrow F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T. \end{cases} \quad (34)$$

2. Central de fusão recebe $z_{l,k}$ e $H_{l,k}$, $\forall l \in \mathcal{V}$;

3. Etapa de correção na central de fusão:

$$\begin{cases} K_k \leftarrow P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}, \\ P_{k|k} \leftarrow P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^c \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \end{cases} \quad (35)$$

4. Central de fusão transmite $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^c$ para todos os nós da rede.

É importante ressaltar que para o sistema linear e gaussiano a estimativa obtida pelo CKF considera toda a informação disponível na rede. Portanto, atinge desempenho ótimo, i.e. o MSE^{local} é o menor possível, dado pelo traço da matriz $P_{k|k}$.

3.3.2 Filtro de Kalman Difuso

O DKF é uma solução **distribuída** e **cooperativa** para o problema de filtragem em rede, originalmente proposta em (CATTIVELLI; SAYED, 2010a). Por se tratar de uma estratégia distribuída, para o DKF não existe a central de fusão. Como os nós estão restritos a vizinhanças onde a totalidade da informação presente na rede não está disponível, não há como atingir a estimativa ótima como no caso do CKF. Sabendo dessa limitação, o DKF busca primeiro obter estimativas sub-ótimas locais em cada vizinhança e depois combinar essas estimativas para aproximá-las da estimativa ótima. Assim, para cada instante k o algoritmo pode ser dividido em duas etapas:

- **Etapa 1 - estimativa intermediária local:** cada nó n determina uma estimativa intermediária sub-ótima com as medidas disponíveis em sua vizinha \mathcal{N}_n . Denominaremos essa estimativa intermediária para o nó n como $\psi_{n,k}$;
- **Etapa 2 - difusão:** nessa etapa os nós executam a combinação das estimativas intermediárias dos seus vizinhos. Primeiro cada nó transmite a sua estimativa intermediária para todos os seus vizinhos. Como detalhado a seguir, de posse de $\psi_{l,k}$, $\forall l \in \mathcal{N}_n$, o nó n irá determinar a estimativa final $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ como uma combinação linear convexa de todas as estimativas intermediárias dos nós que compõem sua vizinhança.

A seguir são discutidos os detalhes de cada uma dessas etapas.

3.3.2.1 Etapa 1 - estimativa intermediária local

Considerando somente o conjunto de medidas locais, i.e. as medidas disponíveis em \mathcal{N}_n , o nó n pode aplicar essa informação para obter a estimativa intermediária $\psi_{n,k}$. Naturalmente surge o problema de determinar qual seria a melhor estimativa possível de \mathbf{x}_k dadas **somente** as medidas em \mathcal{N}_n . Para compreender esse problema, consideraremos que a vizinhança \mathcal{N}_n é formada pelo conjunto de nós $\mathcal{N}_n = \{l_1, l_2, \dots, n\}$. Para o instante k podemos empilhar todas as medidas dos nós em \mathcal{N}_n , resultando no seguinte vetor:

$$\mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} \triangleq \text{col}\{\mathbf{z}_{l_1,k}, \mathbf{z}_{l_2,k}, \dots, \mathbf{z}_{n,k}\}, \quad (36)$$

Dessa forma, notamos que o problema de determinar $\psi_{n,k}$ é equivalente a obter uma estimativa de mínima variância para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k \\ \mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} = H_k^{\mathcal{N}_n} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n} \end{cases} \quad (37)$$

onde $H_k^{\mathcal{N}_n}$ e $\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n}$ são definidos como:

$$H_k^{\mathcal{N}_n} \triangleq \text{col}\{H_{l_1,k}, H_{l_2,k}, \dots, H_{n,k}\}, \quad (38)$$

$$\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n} \triangleq \text{col}\{\mathbf{v}_{l_1,k}, \mathbf{v}_{l_2,k}, \dots, \mathbf{v}_{n,k}\}, \quad (39)$$

O sistema (37) consiste na versão local para a vizinhança \mathcal{N}_n do sistema em rede original. Analogamente ao discutido para o sistema global (29), sabemos que $\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n}$ também é um ruído gaussiano com média nula e covariância dada por:

$$R_k^{\mathcal{N}_n} \triangleq \text{diag}\{R_{l_1,k}, R_{l_2,k}, \dots, R_{n,k}\}. \quad (40)$$

Além disso, as hipóteses **A1** a **A4** são verificadas para o sistema local (37). Portanto, como decorrência direta do Teorema 2 sabemos que a melhor estimativa possível para esse sistema local é obtida com a aplicação do KF para o sistema (37).

Supondo que a estimativa intermediária seja obtida com o KF para o sistema local (37), **localmente** ela seria a melhor estimativa possível a partir das medidas do próprio nó n e de seus vizinhos, i.e. o conjunto $\{\mathbf{z}_{n,m}\}$, $m = 1, \dots, k, \forall n \in \mathcal{N}_n$. Porém do ponto de vista global, quando consideramos a totalidade da rede multiagente, $\psi_{n,k}$ é uma estimativa sub-ótima, possuindo a seguinte propriedade:

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{x}_k - \psi_{n,k}\|^2\} \geq \mathbb{E}\{\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c\|^2\} \quad (41)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ é a estimativa ótima que seria obtida através do CKF.

3.3.2.2 Etapa 2 - difusão

Após todos os nós efetuarem a primeira etapa do DKF, há como resultado N estimativas intermediárias $\psi_{n,k}$, $n = 1, \dots, N$. Como detalhado em (CATTIVELLI; SAYED,

2010a), a motivação para a etapa de difusão se dá pelo fato de a estimativa ótima obtida com CKF $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ poder ser expressa como:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^c \approx \sum_{n=1}^N \Gamma_n \boldsymbol{\psi}_{n,k} . \quad (42)$$

Ou seja, a estimativa ótima pode ser aproximada através de uma soma ponderada das estimativas intermediárias $\boldsymbol{\psi}_{n,k}$, $n = 1, \dots, N$. As matrizes de ponderação Γ_n em (42) ainda possuem a seguinte restrição:

$$\sum_{n=1}^N \Gamma_n = I , \quad (43)$$

tornando (42) uma combinação convexa de $\boldsymbol{\psi}_{n,k}$, $n = 1, \dots, N$.

Baseada nisso, a etapa de difusão consiste primeiro no compartilhamento das estimativas intermediárias entre os nós vizinhos. Após isso, a estimativa final $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ para n é obtida como a combinação convexa de todas as estimativas intermediárias dos seus vizinhos:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l=1}^N c_{ln} \boldsymbol{\psi}_{l,k} , \quad (44)$$

onde c_{ln} é o coeficiente utilizado pelo nó n para ponderar a estimativa intermediária $\boldsymbol{\psi}_{l,k}$ recebida do seu vizinho l . Dessa forma, quando dois nós não são vizinhos, ou seja não compartilham diretamente informação, o coeficiente c_{ln} obrigatoriamente é nulo:

$$l \notin \mathcal{N}_n \Rightarrow c_{ln} = 0 . \quad (45)$$

Além disso, para garantir que (44) é uma combinação convexa, os coeficientes c_{ln} obedecem à restrição:

$$\sum_{l=1}^N c_{ln} = 1 . \quad (46)$$

Podemos reunir todos os coeficientes c_{ln} em uma única matriz de dimensão $[N \times N]$:

$$C \triangleq [c_{ln}], n = 1, \dots, N; l = 1, \dots, N. \quad (47)$$

C recebe o nome especial de matriz de difusão. Pela restrição (46), a matriz C é estocástica (SAYED; LOPES, 2007), i.e. possui a seguinte propriedade:

$$C^T \mathbb{1} = \mathbb{1} , c_{ln} \geq 0 , \quad (48)$$

sendo $\mathbb{1} \triangleq \text{col}\{1, 1, \dots, 1\}$.

A matriz de difusão exerce o papel fundamental de reger como se dá a troca de informação entre os nós. É importante notar que ela é a única escolha de projeto para o algoritmo e possui impacto direto no resultado final. Como será detalhado na seção 4.3.2,

o MSE^{local} do DKF é uma função da matriz C , sendo esse o único parâmetro manipulável para o projetista. Evidentemente, com um valor maior para c_{ln} estamos aumentando o peso da informação oriunda do nó l na estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$. Logo, intuitivamente sabemos que aumentando o peso da informação recebida dos nós com menor nível de ruído obteremos melhores estimativas $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$. Na seção 4.4 são discutidos os detalhes do projeto da matriz de difusão onde também é proposta uma regra para sua construção.

A junção das etapas 1 e 2 resulta no DKF, conforme apresentado no Algoritmo 2 que contém uma iteração completa do DKF para o nó n no instante k . Para $k = 0$, o algoritmo é inicializado com $\mathbf{x}_{n,0|-1} = \bar{x}_0$ e $P_{n,0|-1} = P_0$. É importante observar que a matriz $P_{n,k|k}$ **não é a covariância** da estimativa $\mathbf{x}_{n,k|k}^d$, diferentemente do que ocorre com a covariância *a posteriori* $P_{k|k}$ do CKF. A recursão que permite determinar a covariância das estimativas do DKF é mostrada na seção 4.3.2.

Algoritmo 2 Iteração do DKF para o nó n no instante k :

1. Predição no nó:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} \leftarrow F_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d + B_{k-1} u_{k-1} , \\ P_{n,k|k-1} \leftarrow F_{k-1} P_{n,k-1|k-1} F_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T . \end{cases} \quad (49)$$

2. Compartilhamento na vizinhança das medidas e matrizes do modelo de medição: nó n recebe $\mathbf{z}_{l,k}$ e $H_{l,k}$, $\forall l \in \mathcal{N}_n$ e constrói $\mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n}$ e $H_k^{\mathcal{N}_n}$ de acordo com (36) e (38);

3. Correção local no nó:

$$\begin{cases} K_{n,k} \leftarrow P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T \left[H_k^{\mathcal{N}_n} P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T + R_k^{\mathcal{N}_n} \right]^{-1} , \\ P_{n,k|k} \leftarrow P_{n,k|k-1} - K_{n,k} H_k^{\mathcal{N}_n} P_{n,k|k-1} , \\ \boldsymbol{\psi}_{n,k} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + K_{n,k} (\mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} - H_k^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}) . \end{cases} \quad (50)$$

4. Compartilhamento na vizinhança das estimativas intermediárias: nó n recebe $\boldsymbol{\psi}_{l,k}$ $\forall l \in \mathcal{N}_n$;

5. Combinação das estimativas intermediárias:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d \leftarrow \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \boldsymbol{\psi}_{l,k} . \quad (51)$$

3.4 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados aspectos gerais das soluções para o problema de filtragem multiagente. Foi apresentada a solução ótima para o caso linear e gaussiano que

é atingida através de uma estratégia centralizada, o CKF. Por fim foi apresentado o DKF, uma solução distribuída sub-ótima baseada em um KF local acrescido da etapa de difusão que busca atingir um desempenho próximo ao CKF.

4 ANÁLISE DO DKF E EXTENSÕES PARA O CASO NÃO LINEAR

4.1 Introdução

Neste capítulo é aprofundado o estudo sobre o DKF. Inicialmente serão mostradas duas implementações do DKF que trazem como vantagem em relação ao Algoritmo 2 o fato da etapa de correção local poder ser executada em paralelo com a comunicação das medidas na vizinhança. Em seguida é realizado o estudo do desempenho do DKF através da análise do seu erro médio e erro médio quadrático. Após isso, é proposta uma regra para a construção da matriz de difusão C . Por fim, é apresentada uma adaptação do algoritmo para sistemas não lineares, o Filtro de Kalman Estendido Difuso.

4.2 Formas equivalentes do DKF

Nessa seção são apresentados dois algoritmos equivalentes ao Algoritmo 2 mostrado na seção 3.3.2, ou seja dois algoritmos que produzem exatamente a mesma estimativa da implementação do DKF apresentada no Algoritmo 2. Para obtermos essas duas novas implementações iremos alterar a etapa de correção local do Algoritmo 2 que será reescrita através de formulações alternativas. A partir dessas reformulações é possível fragmentar a etapa de correção e executá-la em paralelo com o recebimento dos dados dos vizinhos. Essa característica facilita a aplicação dos algoritmos, especialmente nos casos de redes com grande quantidade de nós.

A primeira implementação do DKF é fundamentada na forma de informação do KF, apresentada em detalhes em (CATTIVELLI; SAYED, 2010a). Já a segunda implementação é baseada na forma sequencial do KF (KAILATH; SAYED; HASSIBI, 2000). Além da etapa de correção local (*passos 2 e 3* do Algoritmo 2) nenhuma das outras etapas do DKF é alterada nos algoritmos equivalentes.

Para facilitar o desenvolvimento das implementações iremos supor um caso particular onde o nó n possui um total de \bar{N} nós vizinhos que são numerados de 1 até $\bar{N} \in \mathbb{N}$. Ou

seja, a vizinhança \mathcal{N}_n do nó n é o seguinte conjunto:

$$\mathcal{N}_n = \{1, 2, \dots, n, \dots, \bar{N}\} \quad (52)$$

Conforme (37), o sistema local na vizinhança \mathcal{N}_n é dado então por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k . \\ \mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} &= H_k^{\mathcal{N}_n} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n} , \end{cases} \quad (53)$$

com a matriz:

$$H_k^{\mathcal{N}_n} = \text{col}\{H_{1,k}, H_{2,k}, \dots, H_{n,k}, \dots, H_{\bar{N},k}\}, \quad (54)$$

e o ruído de medição:

$$\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n} = \text{col}\{\mathbf{v}_{1,k}, \mathbf{v}_{2,k}, \dots, \mathbf{v}_{n,k}, \dots, \mathbf{v}_{\bar{N},k}\} . \quad (55)$$

Um resultado intermediário que será utilizado para desenvolvermos ambas as implementações é apresentado no Lema 1.

Lema 1. *Sejam as matrizes de dimensões adequadas H , $P^{(j)}$, $P^{(j-1)}$, R e $R_e \triangleq R + HP^{(j-1)}H^T$. Assuma que $\exists (P^{(j)})^{-1}$, $(P^{(j-1)})^{-1}$, relacionadas por:*

$$(P^{(j)})^{-1} = (P^{(j-1)})^{-1} + H^T R^{-1} H . \quad (56)$$

Então segue que:

$$P^{(j-1)} H^T R_e^{-1} = P^{(j)} H^T R^{-1} . \quad (57)$$

Prova. Multiplicando (57) por R_e à direita e $(P^{(j)})^{-1}$ à esquerda temos:

$$(P^{(j)})^{-1} P^{(j-1)} H^T = H^T R^{-1} R_e . \quad (58)$$

Substituindo a definição de R_e em (58) e aplicando a relação (56), temos:

$$\left[(P^{(j-1)})^{-1} + H^T R^{-1} H \right] P^{(j-1)} H^T = H^T R^{-1} (R + HP^{(j-1)}H^T) . \quad (59)$$

Finalmente, desenvolvendo os produtos em (59) a igualdade é verificada:

$$H^T + H^T R^{-1} HP^{(j-1)}H^T = H^T + H^T R^{-1} HP^{(j-1)}H^T . \quad (60)$$

□

4.2.1 DKF - correção com estrutura de informação

Para obter essa implementação do DKF iremos reescrever a sua etapa de correção local, alterando o *passo 3* do Algoritmo 2. Primeiramente notamos que a covariância *a posteriori* do KF local para n em (50) é expressa como:

$$P_{n,k|k} = P_{n,k|k-1} - P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T \left[H_k^{\mathcal{N}_n} P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T + R_k^{\mathcal{N}_n} \right]^{-1} H_k^{\mathcal{N}_n} P_{n,k|k-1} . \quad (61)$$

Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes (KAILATH; SAYED; HASSIBI, 2000) em (61), é possível obter a seguinte expressão para a inversa de $P_{n,k|k}$:

$$(P_{n,k|k})^{-1} = (P_{n,k|k-1})^{-1} + (H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} H_k^{\mathcal{N}_n}. \quad (62)$$

A relação (62) sugere uma nova forma de determinar $P_{n,k|k}$, primeiro calculando a sua inversa $(P_{n,k|k})^{-1}$.

Definindo agora a matriz R_e como:

$$R_e \triangleq H_k^{\mathcal{N}_n} P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T + R_k^{\mathcal{N}_n}, \quad (63)$$

podemos expressar a correção da estimativa *a priori* em (50) como:

$$\psi_{n,k} = \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_e)^{-1} (\mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} - H_k^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}), \quad (64)$$

Aplicando o Lema 1 (com $P^{(j-1)} = P_{n,k|k-1}$, $P^{(j)} = P_{n,k|k}$ e $R = R_k^{\mathcal{N}_n}$) é possível substituir o termo $P_{n,k|k-1} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_e)^{-1}$ em (64) por $P_{n,k|k} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1}$, resultando em:

$$\psi_{n,k} = \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + P_{n,k|k} (H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} (\mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} - H_k^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}). \quad (65)$$

Observamos que até esse ponto o que foi desenvolvido para reescrevermos a etapa de correção como (65) e também para obtermos a expressão (62) é válido para qualquer KF, não somente para a correção local do DKF. Porém, para o sistema local (53) podemos desenvolver ainda mais essas duas expressões. Sabemos pela hipótese **B2** que as partições de $\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n}$ são decorrelacionadas, i.e. $\mathbb{E}\{\mathbf{v}_{l_1,k} \mathbf{v}_{l_2,k}^T\} = R_{l_1,k} \delta_{l_1 l_2}$, $l_1, l_2 \in \mathcal{N}_n$. Portanto, a covariância $R_k^{\mathcal{N}_n}$ é uma matriz bloco-diagonal:

$$\mathbb{E}\left\{\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n} (\mathbf{v}_k^{\mathcal{N}_n})^T\right\} = R_k^{\mathcal{N}_n} = \text{diag}\{R_{1,k}, R_{2,k}, \dots, R_{n,k}, \dots, R_{\bar{N},k}\}, \quad (66)$$

e como $R_{l,k}$ é positiva-definida $\forall l \in \mathcal{N}_n$, a inversa $R_k^{\mathcal{N}_n}$ sempre existe e também é bloco-diagonal:

$$(R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} = \text{diag}\{R_{1,k}^{-1}, R_{2,k}^{-1}, \dots, R_{n,k}^{-1}, \dots, R_{\bar{N},k}^{-1}\}. \quad (67)$$

Sendo assim, os produtos $(H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} \mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n}$ e $(H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} H_k^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}$ tornam-se respectivamente:

$$(H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} \mathbf{z}_k^{\mathcal{N}_n} = \sum_{l=1}^{\bar{N}} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} \mathbf{z}_{l,k}. \quad (68)$$

$$(H_k^{\mathcal{N}_n})^T (R_k^{\mathcal{N}_n})^{-1} H_k^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} = \sum_{l=1}^{\bar{N}} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} H_{l,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}. \quad (69)$$

Com (68) e (69) podemos reescrever (62) e (65) respectivamente como:

$$\psi_{n,k} = \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + P_{n,k|k} (\boldsymbol{\zeta}_{n,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}), \quad (70)$$

$$(P_{n,k|k})^{-1} = (P_{n,k|k-1})^{-1} + S_{n,k} , \quad (71)$$

onde:

$$\zeta_{n,k} \triangleq \sum_{l=1}^{\bar{n}} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} z_{l,k} , \quad (72)$$

$$S_{n,k} \triangleq \sum_{l=1}^{\bar{n}} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} H_{l,k} . \quad (73)$$

A expressão (70) da etapa de correção do KF (CATTIVELLI; SAYED, 2010a) recebe o nome de etapa correção com estrutura de informação. Ela é atrativa para o problema de filtragem em rede por permitir que n construa gradualmente $\zeta_{n,k}$ e $S_{n,k}$ conforme os vizinhos enviem suas medidas $z_{l,k}$ e matrizes $H_{l,k}$, independentemente da ordem em que os nós efetuam essa comunicação.

A versão final do DKF para o nó n no instante k com a correção na forma de informação é mostrada no Algoritmo 3. Podemos notar que a vantagem dessa versão do DKF se reflete no fato de o *passo 2* poder ser executado em paralelo com a construção de $\zeta_{n,k}$ e $S_{n,k}$. É importante ressaltar que o resultado final obtido com o Algoritmo 3, i.e. $\hat{\mathbf{x}}_{k,n}^d$ e $P_{n,k|k}$, é rigorosamente o mesmo do Algoritmo 2.

Algoritmo 3 Iteração do DKF para o nó n no instante k - correção com estrutura de informação:

1. Predição no nó:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} \leftarrow F_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d + B_{k-1} u_{k-1} , \\ P_{n,k|k-1} \leftarrow F_{k-1} P_{n,k-1|k-1} F_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T . \end{cases} \quad (74)$$

2. Compartilhamento na vizinhança das medidas e matrizes do modelo de medição: nó n recebe $z_{l,k}$ e $H_{l,k}$, $\forall l \in \mathcal{N}_n$;

3. Correção no nó:

$$\begin{cases} \zeta_{n,k} \leftarrow \sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} z_{l,k} \\ S_{n,k} \leftarrow \sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} H_{l,k} \\ (P_{n,k|k})^{-1} \leftarrow (P_{n,k|k-1})^{-1} + S_{n,k} , \\ \psi_{n,k} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + P_{n,k|k} (\zeta_{n,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}) . \end{cases} \quad (75)$$

4. Compartilhamento na vizinhança das estimativas intermediárias: nó n recebe $\psi_{l,k}$ $\forall l \in \mathcal{N}_n$;

5. Combinação das estimativas intermediárias:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \psi_{l,k} . \quad (76)$$

4.2.2 DKF - correção sequencial

A segunda implementação do DKF consiste na substituição da etapa de correção por um procedimento recursivo, resultando no DKF com correção sequencial. Essa nova forma de apresentar o DKF pode ser obtida diretamente do Algoritmo 3, como mostrado a seguir.

Com o resultado (62) e multiplicando a expressão (70) por $(P_{n,k|k})^{-1}$ à esquerda obtemos:

$$(P_{n,k|k})^{-1} \psi_{n,k} = (P_{n,k|k-1})^{-1} \hat{x}_{n,k|k-1} + \sum_{l=1}^{\bar{N}} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} z_{l,k}. \quad (77)$$

Além disso, analisando a expressão para a inversa $(P_{n,k|k})^{-1}$ em (75), verifica-se que é possível determinar $(P_{n,k|k})^{-1}$ através da seguinte recursão:

$$(P_{n,k}^{(j)})^{-1} = (P_{n,k}^{(j-1)})^{-1} + H_{j,k}^T (R_{j,k})^{-1} H_{j,k}, \quad (78)$$

onde $j \in \{1, 2, \dots, \bar{N}\}$ e $P_{n,k}^{(0)} = P_{n,k|k-1}$. Iterando (78) de $j = 1$ até \bar{N} teremos $P_{n,k}^{(\bar{N})} = P_{n,k|k-1}$. A existência das inversas (78) é garantida com a inicialização de $P_{n,k}^{(0)}$ como $P_{n,k|k-1}$.

Analogamente, com $\psi_{n,k}^{(0)} = \hat{x}_{n,k|k-1}$ podemos obter (77) através da recursão:

$$(P_{n,k}^{(j)})^{-1} \psi_{n,k}^{(j)} = (P_{n,k}^{(j-1)})^{-1} \psi_{n,k}^{(j-1)} + H_{j,k}^T R_{j,k}^{-1} z_{j,k}. \quad (79)$$

para $j = 1, 2, \dots, \bar{N}$. Definindo a matriz:

$$R_e^{(j)} \triangleq H_{j,k} P_{n,k}^{(j-1)} H_{j,k}^T + R_{j,k}, \quad (80)$$

e lembrando que (78) nos permite expressar $P_{n,k}^{(j)}$ como:

$$P_{n,k}^{(j)} = P_{n,k}^{(j-1)} - P_{n,k}^{(j-1)} H_{j,k}^T (R_e^{(j)})^{-1} H_{j,k} P_{n,k}^{(j-1)}, \quad (81)$$

podemos ainda obter a seguinte expressão para $\psi_{n,k}^{(j)}$:

$$\psi_{n,k}^{(j)} = \psi_{n,k}^{(j-1)} - P_{n,k}^{(j-1)} H_{j,k}^T (R_e^{(j)})^{-1} H_{j,k} \psi_{n,k}^{(j-1)} + P_{n,k}^{(j)} H_{j,k}^T (R_{j,k})^{-1} z_{j,k}. \quad (82)$$

Finalmente, aplicando o Lema 1 (com $H = H_{j,k}$, $P^{(j)} = P_{n,k}^{(j)}$, $P^{(j-1)} = P_{n,k}^{(j-1)}$ e $R = R_{j,k}$) podemos substituir o termo $P_{n,k}^{(j)} H_{j,k}^T (R_{j,k})^{-1}$ por $P_{n,k}^{(j-1)} H_{j,k}^T (R_e^{(j)})^{-1}$, obtendo:

$$\psi_{n,k}^{(j)} = \psi_{n,k}^{(j-1)} + P_{n,k}^{(j-1)} H_{j,k}^T (R_e^{(j)})^{-1} (z_{j,k} - H_{j,k} \psi_{n,k}^{(j-1)}) \quad (83)$$

O par (81) e (83) possui exatamente a mesma estrutura da etapa de correção do KF convencional, considerando que possuímos somente o sensor do nó j à disposição. Iniciando o procedimento com $\psi_{n,k}^{(0)} = \hat{x}_{n,k|k-1}$ e $P_{n,k}^{(0)} = P_{n,k|k-1}$ podemos fragmentar a etapa de correção do DKF em \bar{N} passos, agregando a informação recebida de cada nó j em

$\psi_{n,k}^{(j)}$ e $P_{n,k}^{(j)}$. Essa forma de efetuar a etapa de correção do KF é conhecida como forma sequencial (KAILATH; SAYED; HASSIBI, 2000), sendo válida para qualquer KF onde as partições do ruído de medição são descorrelacionadas, como no caso do sistema local (53).

No Algoritmo 4 é apresentada a versão final do DKF com a etapa de correção sequencial. Assim como na forma de informação, o Algoritmo 4 é interessante para a aplicação em rede pois podemos executar os *passos* 2, 3 e 4 concomitantemente. Também é importante notar que a atualização de $P_{n,k}^{(j)}$ e $\psi_{n,k}^{(j)}$ não depende da ordem em que os nós vizinhos enviam suas medidas para o nó n .

Algoritmo 4 Iteração do DKF para o nó n no instante k - correção na forma sequencial:

1. Predição no nó:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} & \leftarrow F_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \\ P_{n,k|k-1} & \leftarrow F_{k-1}P_{n,k-1|k-1}F_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T. \end{cases} \quad (84)$$

2. Compartilhamento na vizinhança das medidas e matrizes do modelo de medição: nó n recebe $z_{l,k}$ e $H_{l,k}$, $\forall l \in \mathcal{N}_n$;

3. Correção sequencial no nó - inicialização:

$$\begin{cases} \psi_{n,k}^{(0)} & \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}, \\ P_{n,k}^{(0)} & \leftarrow P_{n,k|k-1}. \end{cases} \quad (85)$$

4. Correção sequencial no nó - repetir $\forall j \in \mathcal{N}_n$:

$$\begin{cases} R_e^{(j)} & \leftarrow H_{j,k}P_{n,k}^{(j-1)}H_{j,k}^T + R_{j,k} \\ P_{n,k}^{(j)} & \leftarrow P_{n,k}^{(j-1)} - P_{n,k}^{(j-1)}H_{j,k}^T \left(R_e^{(j)}\right)^{-1} H_{j,k}P_{n,k}^{(j-1)} \\ \psi_{n,k}^{(j)} & \leftarrow \psi_{n,k}^{(j-1)} + P_{n,k}^{(j-1)}H_{j,k}^T \left(R_e^{(j)}\right)^{-1} \left(z_{j,k} - H_{j,k}\psi_{n,k}^{(j-1)}\right) \end{cases} \quad (86)$$

5. Correção sequencial no nó - finalização:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k} & \leftarrow \psi_{n,k}^{(j)}, \\ P_{n,k|k} & \leftarrow P_{n,k}^{(j)}. \end{cases} \quad (87)$$

6. Compartilhamento na vizinhança das estimativas intermediárias: nó n recebe $\psi_{l,k}$ $\forall l \in \mathcal{N}_n$;

7. Combinação das estimativas intermediárias:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \psi_{l,k}. \quad (88)$$

4.3 Análise do desempenho do DKF

Esta seção contém a análise do desempenho do DKF sendo seguido em linhas gerais a análise apresentada em (CATTIVELLI; SAYED, 2010a). As duas principais métricas que caracterizam o desempenho do algoritmo são o seu erro médio e erro médio quadrático local, definido em (26). Como discutido no capítulo 3, a solução ótima para o problema de filtragem em rede no caso linear e gaussiano é obtida através do CKF, que sabidamente apresenta erro médio nulo e tem seu erro médio quadrático dado pelo traço da matriz de covariância *a posteriori* (ANDERSON; MOORE, 2012). Sendo assim, o objetivo da análise é verificar se o DKF também apresenta erro médio nulo e obter uma expressão que permita determinar o seu erro médio quadrático, possibilitando a comparação com o desempenho do CKF ou outros estimadores.

Para essa análise iremos supor que o sistema em rede (29) possui entrada u_k nula, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k \mathbf{x}_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k, \\ \mathbf{z}_k &= H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (89)$$

Essa hipótese não implica em perda de generalidade para a análise, conforme a **Observação 1**.

Observação 1: a partir das hipóteses **B1** e **B2** sabemos que \mathbf{v}_k e $\boldsymbol{\eta}_k$ possuem média nula. Logo, temos que as médias de \mathbf{x}_k e $\mathbf{z}_{n,k}$ obedecem ao seguinte modelo dinâmico:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\mathbf{x}_{k+1}\} &= F_k \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\} + B_k u_k \\ \mathbb{E}\{\mathbf{z}_{n,k}\} &= H_{n,k} \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (90)$$

com $\mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} = \bar{\mathbf{x}}_0$. Introduzindo as variáveis $\boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{x}_k - \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\}$ e $\boldsymbol{\varsigma}_{n,k} = \mathbf{z}_{n,k} - \mathbb{E}\{\mathbf{z}_{n,k}\}$ temos que $\boldsymbol{\omega}_k$ e $\boldsymbol{\varsigma}_{n,k}$ seguem um modelo dinâmico com a mesma estrutura de (89). Suponha que seja aplicado algum dos algoritmos estudados (CKF ou DKF) para estimarmos $\boldsymbol{\omega}_k$ a partir das medidas $\boldsymbol{\varsigma}_{n,k}$ e estimarmos \mathbf{x}_k a partir das medidas $\mathbf{z}_{n,k}$, obtendo respectivamente as estimativa $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n,k}$ e $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$. Conhecendo (90) é trivial mostrar que:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{n,k} + \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\}, \quad (91)$$

Logo os erros de estimação de $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n,k}$ e $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}$ são iguais:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k} = \mathbf{x}_{n,k} - \hat{\mathbf{x}}_{n,k} = \boldsymbol{\omega}_{n,k} + \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n,k} + \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\}) = \boldsymbol{\omega}_{n,k} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{n,k} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n,k}, \quad (92)$$

e conseqüentemente possuem a mesma média e covariância, o que implica que ambas as estimativas possuem mesmo erro médio e mesmo erro médio quadrático.

4.3.1 Erro médio

Na análise de erro médio da estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ será utilizado o DKF na forma de informação, apresentado no Algoritmo 3. Conforme a definição (12), os erros para as estimativas do nó n ($\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}$ - estimativa *a priori*, $\boldsymbol{\psi}_{n,k}$ estimativa intermediária e $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ -

estimativa final) são dados por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}, \quad (93)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k} = \mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_{n,k}, \quad (94)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d. \quad (95)$$

Para realizar a análise buscaremos expressar o erro médio da estimativa final $\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ em função do erro *a priori* $\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}$ e de forma que não dependa explicitamente do erro da estimativa intermediária $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k}$.

A partir de (51), sabemos que $\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d$ é expresso como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \mathbf{x}_k - \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \boldsymbol{\psi}_{l,k}. \quad (96)$$

Com as restrições em (48) para a matriz de difusão temos que $\sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} = 1$. Portanto, (96) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} (\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_{l,k}) = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{l,k}. \quad (97)$$

Já o erro $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k}$ é dado por:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} - P_{n,k|k} (\boldsymbol{\zeta}_{n,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}) = \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} - P_{n,k|k} (\boldsymbol{\zeta}_{n,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}), \quad (98)$$

e substituindo $\boldsymbol{\zeta}_{n,k}$ conforme (72) temos:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k} = \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} - P_{n,k|k} \left(\sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} \mathbf{z}_{l,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} \right). \quad (99)$$

Sabendo que $\mathbf{z}_{l,k} = H_{l,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{l,k}$, (99) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k} = \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} - P_{n,k|k} \left(\sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} H_{l,k} \mathbf{x}_k + \sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} \mathbf{v}_{l,k} - S_{n,k} \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} \right). \quad (100)$$

Identificamos o termo multiplicando \mathbf{x}_k como $S_{n,k}$, resultando na seguinte expressão para o erro da estimativa intermediária:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k} = (I - P_{n,k|k} S_{n,k}) \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} - P_{n,k|k} \sum_{l \in \mathcal{N}_n} H_{l,k}^T R_{l,k}^{-1} \mathbf{v}_{l,k}. \quad (101)$$

Substituindo (101) em (97) temos:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \left[(I - P_{l,k|k} S_{l,k}) \tilde{\mathbf{x}}_{l,k|k-1} - P_{l,k|k} \sum_{j \in \mathcal{N}_l} H_{j,k}^T R_{j,k}^{-1} \mathbf{v}_{j,k} \right]. \quad (102)$$

Por sua vez, o erro da etapa de predição é expresso em função $\tilde{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}$ como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} = \mathbf{x}_k - F_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d = F_{k-1}\tilde{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d + G_{k-1}\boldsymbol{\eta}_{k-1}, \quad (103)$$

onde foi utilizada a equação de estado do modelo para substituir $\mathbf{x}_k = F_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\boldsymbol{\eta}_{k-1}$. As expressões (102) e (103) descrevem a dinâmica do erro de estimação para o nó n e conforme desejávamos não dependem explicitamente do erro $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{n,k}$.

Para determinar o erro médio basta agora aplicar o operador valor esperado em (102) e (103). Como os ruídos $\boldsymbol{\eta}_k$ e $\mathbf{v}_{l,k} \forall l \in \mathcal{V}$ possuem média nula, temos como resultado as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}\} &= F_{k-1}\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d\}, \\ \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d\} &= \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} (I - P_{l,k|k} S_{l,k}) \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{l,k|k-1}\}. \end{cases} \quad (104)$$

O par de expressões em (104) nos permite determinar de forma recursiva as médias $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}\}$ e $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d\}$. Como o DKF é inicializado com $\mathbf{x}_{n,0|-1} = \bar{x} \forall n \in \mathcal{V}$, o erro médio da estimativa *a priori* para $k = 0$ é nulo:

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,0|-1}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{n,0|-1}\} = \bar{x} - \bar{x} = 0. \quad (105)$$

Portanto, a recursão (104) é inicializada com $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,0|-1}\} = 0$ o que implica que $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}\} = 0$ e $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d\} = 0, \forall k$. Ou seja, o erro médio das estimativas produzidas pelo DKF é nulo.

4.3.2 Erro médio quadrático

Para efetuar a análise do erro médio quadrático das estimativas será construído um modelo aumentado que inclui todas as estimativas da rede. Empilhando o erro dos N nós definimos o seguinte vetor de dimensão mN :

$$\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d \triangleq \text{col}\{\tilde{\mathbf{x}}_{1,k|k}^d, \tilde{\mathbf{x}}_{2,k|k}^d, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{N,k|k}^d\}. \quad (106)$$

A partir da análise do erro médio sabemos que $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d\} = 0, \forall n \in \mathcal{V}$, logo $\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d$ também tem média nula e possui a seguinte covariância:

$$\mathcal{P}_k^d \triangleq \mathbb{E}\left\{\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d \left(\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d\right)^T\right\}. \quad (107)$$

Analisando a sua construção, notamos que a matriz $\mathcal{P}_{n,k}^d$ pode ser dividida nos seguintes blocos:

$$\mathcal{P}_k^d = \begin{bmatrix} P_{1,k}^d & P_{12,k}^d & \cdots & P_{1N,k}^d \\ * & P_{2,k}^d & \cdots & P_{2N,k}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & P_{N,k}^d \end{bmatrix} \quad (108)$$

com as matrizes da diagonal principal $P_{n,k}^d, \forall n \in \mathcal{V}$, sendo as covariâncias nos nós:

$$P_{n,k}^d \triangleq \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d \left(\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d \right)^T \right\}, \quad (109)$$

e as demais matrizes sendo as covariâncias cruzadas entre os erros das estimativas, ou seja, $P_{nl,k}^d \triangleq \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d \left(\tilde{\mathbf{x}}_{l,k|k}^d \right)^T \right\}$.

De posse da matriz \mathcal{P}_k^d , uma abordagem para determinar o erro médio quadrático no nó n é através do traço do produto matricial $\mathcal{P}_k^d \mathcal{I}_n$, onde \mathcal{I}_n é uma matriz bloco-diagonal de dimensão $mN \times mN$ com todos os blocos nulos, exceto na posição (n,n) , ou seja:

$$\mathcal{I}_n = \begin{bmatrix} i_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i_N \end{bmatrix}, i_j = \begin{cases} 0, & j \neq n \\ I_m, & j = n \end{cases} \quad (110)$$

Nota-se que o traço de $\mathcal{P}_k^d \mathcal{I}_n$ é igual ao traço da matriz de covariância da estimativa em n :

$$\text{tr}\{\mathcal{P}_k^d \mathcal{I}_n\} = \text{tr}\{P_{n,k}^d\}. \quad (111)$$

Portanto o erro médio quadrático local em n conforme a definição em (26) pode ser expresso como:

$$\text{MSE}_{n,k}^{\text{local}} = \text{tr}\{\mathcal{P}_k^d \mathcal{I}_n\}. \quad (112)$$

Através dessa abordagem a caracterização do erro médio quadrático para o DKF tem como passo intermediário a determinação de $\mathcal{P}_{n,k}^d$. Para isso, temos a partir de (101) e (102) que o erro da estimativa do nó n é dado por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \left[\sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} (I - P_{l,k|k} S_{l,k}) (F_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d + G_{k-1} \boldsymbol{\eta}_{k-1}) - P_{l,k|k} \sum_{j \in \mathcal{N}_l} H_{j,k}^T R_{j,k}^{-1} \mathbf{v}_{j,k} \right]. \quad (113)$$

Com a expressão (113) podemos obter o modelo aumentado do erro para todos os nós:

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{k|k}^d = \mathcal{C}^T (I - \mathcal{P}_{k|k} \mathcal{S}_k) \left[(I \otimes F_{k-1}) \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{k-1|k-1}^d + (\mathbb{1} \otimes G_{k-1} \boldsymbol{\eta}_{k-1}) \right] - \mathcal{C}^T \mathcal{P}_{k|k} \mathcal{A}^T \mathcal{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{v}_k. \quad (114)$$

onde \otimes denota o produto de Kronecker e as matrizes $\mathcal{P}_{k|k}$, \mathcal{A} , \mathcal{C} , \mathcal{H}_k e \mathcal{S}_k são definidas como:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{k|k} \triangleq \text{diag}\{P_{1,k|k}, \dots, P_{N,k|k}\}, \\ \mathcal{A} \triangleq A \otimes I_m, \\ \mathcal{C} \triangleq C \otimes I_m, \\ \mathcal{H}_k \triangleq \text{diag}\{H_{1,k}, \dots, H_{N,k}\}, \\ \mathcal{S}_k \triangleq \text{diag}\{S_{1,k}, \dots, S_{N,k}\}, \end{cases} \quad (115)$$

Já a matriz R_k é a covariância do ruído global \mathbf{v}_k definida em (32).

Definindo agora as seguintes matrizes:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k & \triangleq \mathcal{C}^T (I - \mathcal{P}_{k|k} \mathcal{S}_k) (I \otimes F_{k-1}) , \\ \mathcal{B}_k & \triangleq \mathcal{C}^T (I - \mathcal{P}_{k|k} \mathcal{S}_k) (I \otimes G_{k-1}) , \\ \mathcal{D}_k & \triangleq \mathcal{C}^T \mathcal{P}_{k|k} \mathcal{A}^T \mathcal{H}_k^T R_k^{-1} , \end{cases} \quad (116)$$

o erro aumentado em (114) pode ser expresso de forma mais compacta como:

$$\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d = \mathcal{F}_k \tilde{\mathcal{X}}_{k-1|k-1}^d + \mathcal{B}_k (\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{k-1}) - \mathcal{D}_k \mathbf{v}_k . \quad (117)$$

Aplicando (108) com $\tilde{\mathcal{X}}_{k|k}^d$ dado por (117) e considerando as hipóteses **B1** e **B2** sobre os ruídos do sistema, obtemos a seguinte expressão para $\mathcal{P}_{n,k}^d$:

$$\mathcal{P}_k^d = \mathcal{F}_k \mathcal{P}_{k-1}^d \mathcal{F}_k^T + \mathcal{B}_k (\mathbb{1} \mathbb{1}^T \otimes Q_{k-1}) \mathcal{B}_k^T + \mathcal{D}_k R_k \mathcal{D}_k^T . \quad (118)$$

Iniciando a recursão com \mathcal{P}_0^d , através de (118) é possível determinar a covariância do erro aumentado para qualquer instante de tempo k e com (112) obtemos o $\text{MSE}_{n,k}^{\text{local}}$ para qualquer nó da rede.

4.3.3 Erro médio quadrático assintótico

Sob determinadas condições detalhadas abaixo, é possível obter diretamente o erro médio quadrático em regime permanente ($\text{MSE}_{n,SS}^{\text{local}}$) da estimativa do DKF, que é definido como:

$$\text{MSE}_{n,SS}^{\text{local}} \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{MSE}_{n,k}^{\text{local}} . \quad (119)$$

Em (CATTIVELLI; SAYED, 2010a) são tratadas as condições para a convergência de $\text{MSE}_{n,k}^{\text{local}}$. Supondo que a matriz de difusão atende ao conjunto de restrições (47), os autores mostram que a verificação das seguintes hipóteses é condição suficiente para garantir convergência:

- **C1**: as matrizes do sistema são invariantes no tempo, ou seja, $F_k = F$, $G_k = G$, $H_{n,k} = H_n$, $Q_k = Q$, $R_{n,k} = R_n$, $\forall k, n$;
- **C2**: Os pares $\{F, H_k^{N_n}\}$ são detectáveis $\forall n$, com $H_k^{N_n}$ definida conforme (38);
- **C3**: O par $\{F, GQ^{\frac{1}{2}}\}$ é estabilizável.

Observa-se que nenhuma das condições depende diretamente da escolha da matriz de difusão, somente das características do sistema em rede.

Com as condições **C1** a **C3** verificadas, a matriz $\mathcal{P}_{k|k}$ converge assintoticamente, o que implica na convergência assintótica de $\mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}_{SS}$, $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_{SS}$ e $\mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_{SS}$. Como resultado, a matriz \mathcal{P}_k^d da recursão (118) também converge assintoticamente, ou seja:

$$\mathcal{P}_{SS}^d \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k^d . \quad (120)$$

e a recursão (118) em regime permanente torna-se:

$$\mathcal{P}_{SS}^d = \mathcal{F}_{SS} \mathcal{P}_{SS}^d \mathcal{F}_{SS}^T + \mathcal{B}_{SS} (\mathbb{1} \mathbb{1}^T \otimes Q) \mathcal{B}_{SS}^T + \mathcal{D}_{SS} R \mathcal{D}_{SS}^T. \quad (121)$$

que possui a forma de uma Equação de Lyapunov. Sob as hipóteses **C1** a **C3** é garantido que \mathcal{F}_{SS} é estável, implicando que (121) possui solução única.

4.4 Construção da matriz de difusão

A caracterização do desempenho médio quadrático do DKF evidencia a importância da escolha da matriz de difusão para o algoritmo. A partir da expressão (118) nota-se que a matriz C impacta diretamente na covariância aumentada \mathcal{P}_k^d , pois \mathcal{F}_k , \mathcal{B}_k e \mathcal{D}_k são dependentes de $\mathcal{C} = C \otimes I_m$. Isso reflete a influência da política de compartilhamento de informação ao longo da rede, política essa que é definida pela matriz de difusão. Ou seja, a decisão de atribuir maior ou menor peso para a informação oriunda de determinados nós irá resultar em melhor ou pior desempenho.

Esse resultado corrobora o que é esperado intuitivamente, pois quando atribuímos maior peso aos dados dos nós expostos a menor nível de ruído esperamos como resultado estimativas mais precisas. De fato a dependência de desempenho com a política de compartilhamento para o DKF é um resultado em comum para com os demais algoritmos de estimação em rede, como o *diffusion least-mean-squares* (CATTIVELLI; SAYED, 2009) e *diffusion recursive-least-squares* (CATTIVELLI; LOPES; SAYED, 2008a).

Uma escolha pouco criteriosa da política de compartilhamento da informação pode fazer com que a cooperação não seja benéfica para o desempenho de um algoritmo de estimação em rede, no sentido de que o resultado obtido através da estratégia cooperativa possua erro maior comparado a uma estratégia não cooperativa (SAYED *et al.*, 2014). Para o DKF observaríamos por exemplo um erro maior que aquele que seria atingido pelo KF através de uma abordagem não cooperativa, ou seja quando os nós utilizam exclusivamente as suas próprias medidas para realizar a estimativa através do KF clássico. Obviamente essa situação é o oposto do desejado, tendo em vista que a cooperação visa principalmente um incremento de desempenho das estimativas, ao custo de maior gasto de energia para manter a comunicação entre os nós vizinhos.

Diversas regras para escolha da política de compartilhamento para algoritmos de estimação em rede são registradas na literatura, sendo grande parte delas oriundas do estudo de consenso em grafos. Em geral essas regras consideram a quantidade de nós em cada vizinhança e/ou o perfil de ruído na rede (SAYED *et al.*, 2014). Ao considerar o perfil de ruído é atribuído maior peso aos dados oriundos de nós cujas medidas possuem menor nível de ruído, assumindo que tais nós dispõem de estimativas mais precisas.

Sob esse contexto, no presente trabalho é proposta uma regra para a construção da matriz de difusão que considera esses dois aspectos. A regra proposta consiste em uma

extensão da Regra de Hastings que é usualmente aplicada em problemas de estimação recursiva de parâmetros em rede (SAYED *et al.*, 2014). A Regra de Hastings é destinada ao caso invariante no tempo (hipótese **CI**) e considera tanto o perfil de ruído na rede como a quantidade de nós em cada vizinhança, sendo aplicada quando as medidas de todos os nós são unidimensionais, ou seja $z_{n,k} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathcal{V}$. Nesse caso o ruído de medição em n também é unidimensional, com variância $R_n = \sigma_n^2, \sigma_n^2 \in \mathbb{R}$. Definindo \bar{n} como a cardinalidade da vizinhança \mathcal{N}_n e \bar{l} a cardinalidade de \mathcal{N}_l , ou seja a quantidade de vizinhos de cada nó, a matriz de difusão construída com Regra de Hastings tem suas entradas dadas por:

$$c_{ln} = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{\max\{\bar{n}\sigma_n^2, \bar{l}\sigma_l^2\}}, l \in \mathcal{N}_n \\ 1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_n} c_{jn}, l = n \end{cases} . \quad (122)$$

onde o operador $\max\{A\}$ seleciona o valor máximo dentro do conjunto A .

Na extensão que propomos para Regra de Hastings também é considerado o caso invariante no tempo, porém assume-se que as medidas $z_{n,k} \in \mathbb{R}^{p_n}$ podem ser multidimensionais, ou seja $p_n \geq 1$. As variâncias σ_n^2 em (122) são então substituídas pelo maior autovalor da matriz de covariância do ruído de medição R_n , definido como $\bar{\lambda}_n$:

$$\bar{\lambda}_n \triangleq \max\{\sigma(R_n)\}, \quad (123)$$

onde $\sigma(R_n)$ é o espectro de R_n . A construção da matriz C com a extensão proposta é então dada por:

$$c_{ln} = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_n}{\max\{\bar{n}\bar{\lambda}_n, \bar{l}\bar{\lambda}_l\}}, l \in \mathcal{N}_n \\ 1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_n} c_{jn}, l = n \end{cases} . \quad (124)$$

A principal característica da Regra de Hastings original é que para o caso unidimensional existe a garantia de que todos os nós se beneficiam com a cooperação, ou seja todos os nós apresentam estimativas com erro médio quadrático menor do que se aplicassem uma estratégia não cooperativa (SAYED *et al.*, 2013). Essa é a principal motivação para a utilização de uma regra inspirada na Regra de Hastings para o DKF.

4.5 Filtro de Kalman Estendido Difuso

O DEKF foi originalmente proposto em (CATTIVELLI; SAYED, 2010b) como uma solução de estimação distribuída considerando o caso em que as funções $f(\cdot)$ e $h_n(\cdot)$ do modelo (21) são não lineares. Essa adaptação segue o mesmo princípio do Filtro de Kalman Estendido (KFE) (SÄRKKÄ, 2013), sendo baseada na expansão das não linearidades em série de potência.

Expressando as funções não lineares $f(\cdot)$ e $h_n(\cdot)$ como série de potência em torno do ponto \bar{x} temos:

$$\begin{cases} f(x) &= f(\bar{x}) + \bar{F}(\bar{x}) [x - \bar{x}] + HOT(x) , \\ h_n(x) &= h_n(\bar{x}) + \bar{H}_n(\bar{x}) [x - \bar{x}] + HOT(x) . \end{cases} \quad (125)$$

onde $\bar{F}(\bar{x})$ e $\bar{H}_n(\bar{x})$ são as matrizes Jacobianas de $f(x)$ e $h_n(x)$ avaliadas no ponto \bar{x} :

$$\bar{F}_k(\bar{x}) \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u_k} \quad (126)$$

$$\bar{H}_{n,k}(\bar{x}) \triangleq \left. \frac{\partial h_n}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (127)$$

e $HOT(x)$ representa termos de maior ordem dependentes de x .

Desconsiderando os termos $HOT(x)$ o sistema (21) pode ser aproximado em torno do ponto \bar{x} como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &\approx f(\bar{x}) + \bar{F}(\bar{x}) [\mathbf{x}_k - \bar{x}] + G_k \boldsymbol{\eta}_k , \\ \mathbf{z}_{n,k} &\approx h_n(\bar{x}) + \bar{H}_n(\bar{x}) [\mathbf{x}_k - \bar{x}] + \mathbf{v}_{n,k} , \\ n &= 1, \dots, N. \end{cases} \quad (128)$$

Definindo os termos:

$$\begin{cases} \bar{u}_k &\triangleq f(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{x}) \bar{x} , \\ \bar{\mathbf{z}}_{n,k} &\triangleq \mathbf{z}_{n,k} - h_n(\bar{x}) + \bar{H}_n(\bar{x}) \bar{x} . \end{cases} \quad (129)$$

Obtemos o seguinte sistema linearizado em torno de \bar{x} :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &\approx \bar{F}(\bar{x}) \mathbf{x}_k + \bar{u}_k + G_k \boldsymbol{\eta}_k , \\ \bar{\mathbf{z}}_{n,k} &\approx \bar{H}_{n,k}(\bar{x}) \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{n,k} , \\ n &= 1, \dots, N. \end{cases} \quad (130)$$

que possui a mesma estrutura do sistema linear (15), tendo em vista \bar{u}_k é um sinal conhecido e determinístico. Dessa forma, podemos aplicar diretamente o DKF ao sistema linearizado para estimarmos \mathbf{x}_k . A união da linearização com o DKF consiste portanto no DEKF, conforme apresentado no Algoritmo 5. É importante observar que na etapa de correção do DEKF o nó n avalia a Jacobiana \bar{H}_l para a sua estimativa *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}$ e não para a estimativa do vizinho $\hat{\mathbf{x}}_{l,k|k-1}$.

O DEKF possui como vantagem ser um método pouco custoso computacionalmente frente a outros métodos de estimação para sistemas não lineares (SÄRKKÄ, 2013). Entretanto possui como limitação o fato de ser uma solução aproximada devido ao erro da linearização e também se restringe ao caso em que os ruídos do sistema são gaussianos ou podem ser aproximados como tal.

Algoritmo 5 Iteração do DEKF para o nó n no instante k :

1. Predição no nó:

$$\begin{cases} \bar{F} & \leftarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d, u_k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} & \leftarrow \bar{F} \hat{\mathbf{x}}_{n,k-1|k-1}^d + \bar{u}_k, \\ P_{n,k|k-1} & \leftarrow \bar{F} P_{n,k-1|k-1} \bar{F}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T. \end{cases} \quad (131)$$

2. Compartilhamento na vizinhança das medidas e matrizes do modelo de medição: nó n recebe $\mathbf{z}_{l,k}, \forall l \in \mathcal{N}_n$;

3. Correção no nó:

$$\begin{cases} \bar{H}_l & \leftarrow \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1}^d}, \forall l \in \mathcal{N}_n \\ (P_{n,k|k})^{-1} & \leftarrow (P_{n,k|k-1})^{-1} + \sum_{l \in \mathcal{N}_n} \bar{H}_l^T R_{l,k}^{-1} \bar{H}_l, \\ P_{n,k|k} & \leftarrow \left[(P_{n,k|k})^{-1} \right]^{-1}, \\ \psi_{n,k} & \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1} + P_{n,k|k} \sum_{l \in \mathcal{N}_n} \bar{H}_l^T R_{l,k}^{-1} [\mathbf{z}_{n,k} - h_l(\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k-1})]. \end{cases} \quad (132)$$

4. Compartilhamento na vizinhança das estimativas intermediárias: nó n recebe $\psi_{l,k}, \forall l \in \mathcal{N}_n$;

5. Combinação das estimativas intermediárias:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k|k}^d = \sum_{l \in \mathcal{N}_n} c_{ln} \psi_{l,k}. \quad (133)$$

4.6 Considerações Finais

Neste capítulo foi aprofundado o estudo sobre o DKF. Conforme discutido, através de reestruturações do DKF é possível obter algoritmos que são mais adequados para implementações práticas, principalmente para redes onde existe um tráfego intenso de dados. Também foi realizada a avaliação do desempenho do DKF, sob o ponto de vista do seu erro médio e erro médio quadrático. Assim como o KF clássico, o DKF apresenta erro médio nulo. Já o seu erro médio quadrático pode ser obtido através da expressão (118) que converge assintoticamente para (121) caso as hipóteses **C1** a **C3** sejam verificadas.

No capítulo também foi proposta uma regra para construção da matriz de difusão do DKF obtida através de uma generalização da Regra de Hastings para o caso multidimensional. Por fim, foi apresentada uma adaptação do DKF para sistemas não lineares, o DEKF.

5 ESTIMADORES DISTRIBUÍDOS APLICADOS NO ALGORITMO DE CONTROLE *FLOCKING*

5.1 Introdução

Esse capítulo contém a principal contribuição do trabalho desenvolvido: a aplicação do DKF no algoritmo de controle *flocking*. Iniciaremos o capítulo com uma apresentação dos principais aspectos do algoritmo de controle *flocking* original. Em seguida é mostrado como o problema de filtragem naturalmente surge dentro do algoritmo de *flocking*. Após isso são apresentados os detalhes da aplicação das estratégias difusas para esse problema, resultando no algoritmo de *flocking* em cascata com os estimadores distribuídos estudados.

5.2 Controle *flocking*

Genericamente o comportamento de *flocking* pode ser definido como a conduta em bando de um grupo de agentes que possuem um objetivo comum e apresentam uma ordem espacial atingida através de interações locais, sem a existência de um agente central para coordenação. Exemplos de grupos que apresentam esse comportamento são observados em diversas espécies de animais como aves, peixes e insetos. Na área de engenharia, sistemas que possuem essas características possuem potencial de serem aplicados em soluções envolvendo redes móveis de sensores, redes multiagente de VANT, dentre outros.

Sob o ponto de vista de sistemas de controle, o problema de conduzir uma rede móvel de agentes para um comportamento de *flocking* pode ser abordado como um problema de navegação e formação em redes multiagente. Um dos principais trabalhos na literatura que adota essa abordagem é (OLFATI-SABER, 2006), que se destaca principalmente pelo fato de o autor propor critérios matemáticos para caracterizar o comportamento de *flocking*. No mesmo trabalho o autor propõe uma lei de controle que garante a convergência de uma rede móvel para um comportamento de *flocking* em um espaço livre de obstáculos e de forma que os agentes não colidam uns com outros, o que é uma propriedade fundamental para muitas aplicações. Considerando essas características, essa será a técnica de controle

explorada no restante do trabalho, sendo denominada simplesmente de controle *flocking*.

Para apresentação será inicialmente realizada a descrição do sistema em rede sujeito à lei de controle *flocking*, aproveitando os conceitos discutidos na seção 2.3, porém com algumas diferenças fundamentais em relação à rede de sensores abordada naquele capítulo. Em seguida são apresentados o critério empregado para determinar que uma rede móvel atinge o comportamento *flocking* e a lei de controle proposta em (OLFATI-SABER, 2006).

5.2.1 Descrição do sistema

Considere uma rede de N nós móveis dispostos em uma região espacial de dimensão d . Tomando como referência um determinado sistema de coordenadas espaciais em \mathbb{R}^d , a posição do nó n pode ser representada pelo vetor $q_n \in \mathbb{R}^d$. Podemos então definir um vetor $q \in \mathbb{R}^{Nd}$ com as coordenadas de todos os nós da rede:

$$q \triangleq \text{col} \{q_1, \dots, q_N\} . \quad (134)$$

O vetor (134) contendo a posição de todos os nós em uma rede móvel recebe o nome especial de **configuração**.

Novamente representaremos a topologia da rede através de um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Relembrando a **Definição 1**, sabemos que dois nós são ditos vizinhos se possuem capacidade de compartilhar informações entre si. Conforme (23), rerepresentada a seguir:

$$(l, n) \in \mathcal{E} \iff l \in \mathcal{N}_n , \quad (135)$$

as arestas \mathcal{E} constituem uma forma equivalente de descrever os conjuntos de vizinhanças $\mathcal{N}_n, \forall n \in \mathcal{V}$.

Para o controle *flocking* consideraremos um caso particular de rede em que as vizinhanças estão obrigatoriamente associadas à localização espacial dos nós. Será assumido que l compõe a vizinhança \mathcal{N}_n se ele estiver no interior de uma bola de raio ρ centrada em q_n , ou seja:

$$l \in \mathcal{N}_n \Rightarrow \|q_n - q_l\| < \rho , \quad (136)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Sendo assim, podemos alternativamente definir as arestas de \mathcal{G} como:

$$\mathcal{E} = \{(l, n) : \|q_n - q_l\| < \rho\} . \quad (137)$$

Por (137) torna-se claro que as arestas são dependentes da configuração q . Um grafo $\mathcal{G}(q) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(q))$ cujas arestas são construídas através de (137) é chamado de **rede de proximidade** e o raio ρ é denominado **raio de interação**.

Considerando ainda o caso dinâmico, ou seja quando a posição dos nós é dependente de uma variável de tempo $t \in \mathbb{R}$, a topologia de comunicação de uma rede de proximidade também será dinâmica, pois $q = q(t)$. Por consequência as vizinhanças serão variantes

no tempo, i.e. $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n(t)$, adicionando complexidade a qualquer estratégia cooperativa de estimação e/ou controle. É importante notar que adotamos uma variável de tempo t contínua para descrever a dinâmica dos nós, diferentemente dos capítulos do trabalho dedicados exclusivamente às estratégias de estimação em rede, onde se tratou somente de sistemas em tempo discreto. Essa diferença entre as abordagens foi adotada para manter a descrição original do algoritmo de controle *flocking*.

Será assumido que todos os nós da rede possuem dinâmica descrita por um modelo em espaço de estados do tipo integrador duplo. Definindo o estado $\xi_n(t) \in \mathbb{R}^{2d}$ do nó n para o instante t como:

$$\xi_n(t) \triangleq \begin{bmatrix} q_n(t) \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (138)$$

o modelo dinâmico para a rede será dado por:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \begin{bmatrix} 0_d & I_d \\ 0_d & 0_d \end{bmatrix} \xi_n(t) + \begin{bmatrix} 0_d \\ I_d \end{bmatrix} u_n(t), \\ n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (139)$$

onde a aceleração do nó, $u_n(t)$, é uma variável manipulada do sistema.

É importante entender que o modelo (139) representa a dinâmica dos nós da rede, descrevendo como variam suas posições e velocidades ao longo do tempo. Além disso, consideramos que estamos atuando sobre o sistema através da entrada de controle $u_n(t)$. Supondo um caso em que essa rede móvel é utilizada como uma rede de sensores como na seção 2.4, esse modelo não substitui o sistema (21), mas sim o complementa.

5.2.2 Descrição do comportamento *flocking*

Idealmente, para o comportamento *flocking* os nós devem estar dispostos em uma estrutura do tipo treliça (ou cristal), onde todos os nós se mantêm a uma determinada distância $D \in \mathbb{R}$ dos seus vizinhos, denominada de distância interagentes e atendendo $D < \rho$. Tomando esse critério podemos construir um conjunto de restrições que garantem que todos os vizinhos estão alocados a uma distância euclidiana $D \in \mathbb{R}$ uns dos outros, ou seja:

$$\forall l \neq n : l \in \mathcal{N}_n \Rightarrow \|q_n - q_l\| = D. \quad (140)$$

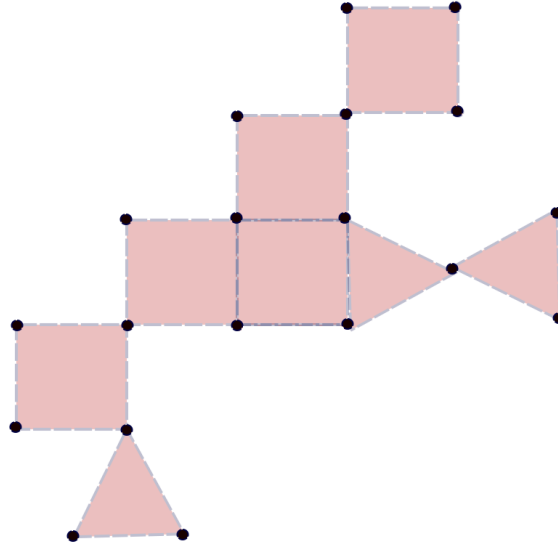
Configurações que atendem ao conjunto de restrições (140) recebem o nome de α -*lattice*. Um exemplo de uma configuração α -*lattice* em \mathbb{R}^2 é mostrado na Figura 2.

Para flexibilizar a restrição (140) podemos ainda incluir uma tolerância $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \ll D$, resultando no seguinte conjunto de restrições:

$$\forall l \neq n : l \in \mathcal{N}_n \Rightarrow -\delta \leq \|q_n - q_l\| - D \leq \delta. \quad (141)$$

Essa flexibilização permite aplicar o critério em sistemas reais que apresentam comportamento de *flocking*, para os quais (140) dificilmente seria verificada.

Figura 2 – Exemplo de configuração α -lattice.



Fonte: do autor

No caso dinâmico não basta que a rede atinja uma configuração α -lattice em apenas um instante de tempo específico, sendo necessário que a estrutura de cristal se mantenha ao longo do tempo. Portanto é considerado que o sistema atinge um comportamento de *flocking* se existe algum tempo t_f para o qual (141) é verificada para todo tempo $t \geq t_f$.

Considerando todos esses aspectos podemos resumir o critério para estabelecer que a rede móvel atinge o comportamento de *flocking* na seguinte definição:

Definição 2. (Comportamento flocking) Diz-se que uma rede de proximidade atinge o comportamento flocking se existe um tempo t_f para qual a sua configuração $q(t)$ verifica o seguinte conjunto de restrições $\forall t \geq t_f$:

$$\forall t \geq t_f, \forall l \neq n : l \in \mathcal{N}_n(t) \Rightarrow -\delta \leq \|q_n(t) - q_l(t)\| - D \leq \delta, \quad (142)$$

onde $D > 0$ é a distância entre os nós e $\delta > 0$ é um parâmetro de tolerância atendendo $\delta \ll D$.

5.2.3 Lei de controle

A lei de controle proposta por (OLFATI-SABER, 2006) possui como objetivo conduzir uma rede móvel com dinâmica descrita pelo modelo (139) a um comportamento *flocking* considerando qualquer condição inicial $\xi_n(0)$, $\forall n \in \mathcal{V}$. Analogamente ao discutido para as estratégias de estimação em rede, a lei de controle proposta pode ser classificada como **distribuída**, pois o sinal de controle $u_n(t)$ aplicado ao nó n pode ser determinado considerando somente informações disponíveis dentro da vizinhança $\mathcal{N}_n(t)$. Dessa forma cada nó é capaz de obter $u_n(t)$ por si próprio e localmente, sem a necessidade de um nó central para determinar o sinal de controle de todos os N nós.

A lei de controle *flocking* para cada nó pode ser decomposta em três termos:

$$u_n(t) = u_n^g(t) + u_n^c(t) + u_n^f(t) . \quad (143)$$

O sinal $u_n^g(t)$ é chamado de termo gradiente e tem como objetivo a minimização de uma função $\Psi(q)$ denominada de função potencial coletiva. O termo de gradiente é dado então por:

$$u_n^g(t) = -\nabla_{q_n} \Psi(q) . \quad (144)$$

onde ∇_x é o operador gradiente em relação a x . A função potencial coletiva é interpretada como uma função custo que quantifica o quanto a configuração q difere de uma estrutura α -lattice. Ou seja, se a configuração q verifica a restrição (140) então $\Psi(q)$ é minimizada. Outra propriedade importante da função potencial coletiva é que o seu gradiente com relação à posição q_n é função somente das posições dos nós dentro da vizinhança de n , ou seja é uma função de $q_l \forall l \in \mathcal{N}_n$, e não de toda a configuração q . No Apêndice A são apresentados os detalhes para a construção da função potencial coletiva e o gradiente (143).

Por sua vez, o termo $u_n^c(t)$ é responsável por garantir que os nós da rede atinjam assintoticamente a mesma velocidade, o que é fundamental para que o comportamento de *flocking* seja mantido ao longo do tempo. Para isso, $u_n^c(t)$ é determinado com base em uma estratégia de consenso das velocidades dentro das vizinhanças, sendo dado por:

$$u_n^c(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_n} \bar{a}_{nj}(q) [\dot{q}_n(t) - \dot{q}_j(t)] . \quad (145)$$

onde $\bar{a}_{nj}(q)$ são as entradas de uma matriz especial de consenso $\bar{A}(q)$:

$$\bar{A}(q) \triangleq [\bar{a}_{nl}(q)], \quad n = 1, \dots, N; \quad l = 1, \dots, N. \quad (146)$$

As entradas da matriz de consenso possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} l \notin \mathcal{N}_n \Rightarrow \bar{a}_{nl}(q) = 0 . \\ 0 \leq \bar{a}_{nl}(q) < 1 \end{cases} \quad (147)$$

A primeira propriedade em (147) explica a dependência da matriz \bar{A}_{nl} com a configuração q , pois as vizinhanças de uma rede proximidade são dependentes da configuração q . Também no Apêndice A são apresentados os detalhes para a construção da matriz de consenso.

O último termo da lei de controle recebe o nome de realimentação de navegação sendo responsável por atribuir um objetivo comum ao grupo de nós. Para isso é assumido que existe um nó especial chamado de agente líder r . Diferentemente dos demais nós da rede que têm dinâmica descrita pelo modelo de integrador duplo (139), para abranger casos mais genéricos consideramos que o agente líder executa um movimento no espaço descrito pelo seguinte modelo:

$$\dot{x}^r(t) = f(x^r(t), t) \quad (148)$$

onde o estado do agente líder $x^r(t)$ é definido como a sua posição $q^r(t)$ e sua velocidade $\dot{q}^r(t)$, ou seja:

$$x^r(t) \triangleq \begin{bmatrix} q^r(t) \\ \dot{q}^r(t) \end{bmatrix}, \quad (149)$$

A realimentação de navegação aplicada ao nó n é dada então por:

$$u_n^f(t) = -\beta_1 (q_n(t) - q^r(t)) - \beta_2 (\dot{q}_n(t) - \dot{q}^r(t)), \quad (150)$$

onde $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$ são parâmetros de projeto da lei de controle.

Ao incluirmos o termo $u_n^f(t)$ os nós procuram seguir a trajetória do líder r que irá guiar o grupo inteiro, enquanto os termos de consenso e gradiente são responsáveis por manter a rede em comportamento de *flocking*, ou seja mantendo uma estrutura do tipo α -*lattice*. Além de fornecer o objetivo de grupo aos nós, a realimentação de navegação garante que todos os nós se mantenham unidos. Sem esse termo, para determinadas condições iniciais $q(0)$ a rede pode se fragmentar em grupos menores de nós, formando redes menores e isoladas umas das outras.

Analisando os termos da lei de controle *flocking* notamos que ela de fato se classifica como uma estratégia de controle distribuída se as seguintes hipóteses forem verificadas:

- **D1**: a cada instante de tempo t todos os nós conhecem a posição e velocidade de todos os seus vizinhos;
- **D2**: a cada instante de tempo t todos os nós conhecem a posição e velocidade do agente líder.

Como sabemos que os termos de consenso e gradiente para o nó n são funções da posição e velocidade de todos os nós em $\mathcal{N}_n(t)$, a hipótese **D1** garante que toda a informação necessária para obter $u_n^g(t)$ e $u_n^c(t)$ está disponível para o nó n . Da mesma forma, a hipótese **D2** garante que o sinal $u_n^f(t)$ pode ser determinado localmente no próprio nó n .

5.3 Problema de filtragem multiagente aplicado ao controle *flocking*

Na descrição do controle *flocking* foi assumido a partir da hipótese **D2** que todos os nós na rede conhecem a posição e velocidade do agente líder, ou seja conhecem a cada instante de tempo o estado $x^r(t)$ do sistema (148). Trataremos a partir desse ponto do caso onde os nós não acessam diretamente $x^r(t)$, mas apenas executam medidas associadas ao estado do agente líder de acordo com um modelo de medição conhecido. Assumindo que as medidas são contaminadas por ruído, para aplicar a lei de controle *flocking* (143) é necessário que os nós apliquem alguma técnica de estimação que lhes possibilite determinar uma estimativa para esse termo.

Novamente consideramos uma rede com N nós móveis cujo comportamento dinâmico é descrito pelo modelo de integrador duplo (139). Considerando que o ferramental

teórico para solução de problemas de estimação e filtragem em rede é majoritariamente desenvolvido para tempo discreto, iremos tratar diretamente do caso discretizado do controle *flocking*. Assim, assume-se que o sinal de controle em cada nó somente é alterado em instantes de tempo múltiplos de um período de amostragem $T_s \in \mathbb{R}$, empregando para isso um dispositivo do tipo *zero-order hold*. Podemos definir a versão discreta da lei de controle (143) como:

$$u_{n,k} \triangleq u_n(kT_s), \quad (151)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ é um instante de tempo discreto representando o k -múltiplo de T_s . Ressalta-se que mais uma vez foi adotada a notação subscrita para denotar a dependência de um sinal com o tempo discreto, conforme o convencionado na seção 1.2. Além de ser útil sob a perspectiva do problema de estimar $x^r(t)$, a abordagem de discretização é mais adequada para implementações práticas da lei de controle *flocking*. Sob uma escolha de T_s suficientemente pequeno podemos desconsiderar o erro devido à discretização e as propriedades da lei de controle *flocking* são preservadas.

Em vez do modelo determinístico e em tempo contínuo (148) do algoritmo original, será assumido que a dinâmica do agente líder é descrita pelo seguinte modelo estocástico em tempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1}^r = f(\mathbf{x}_k^r, k) + G_k \boldsymbol{\eta}_k, \quad (152)$$

onde o estado $\mathbf{x}_k^r \in \mathbb{R}^{2d}$ é composto por sua posição $\mathbf{q}_k^r \in \mathbb{R}^d$ e velocidade $\mathbf{s}_k^r \in \mathbb{R}^d$ no instante k :

$$\mathbf{x}_k^r \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^r \\ \mathbf{s}_k^r \end{bmatrix}. \quad (153)$$

Novamente $\boldsymbol{\eta}_k$ é o ruído de processo e G_k uma matriz de dimensão adequada. Também é permitido que $f(\cdot)$ seja uma função não linear. O nó n não possui acesso direto ao estado \mathbf{x}_k^r , somente efetua medidas $\mathbf{z}_{n,k} \in \mathbb{R}^{p_n}$ de acordo com o modelo dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{n,k} = h_n(\mathbf{x}_k^r, k) + \mathbf{v}_{n,k}, \\ n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (154)$$

onde $h_n(\cdot)$ é possivelmente uma função não linear e $\mathbf{v}_{n,k}$ é um ruído de medida. É assumido que o ruído de processo $\boldsymbol{\eta}_k$, o ruído $\mathbf{v}_{n,k}$ e o estado inicial do sistema (153) verificam as hipóteses **B1** a **B4**.

Observamos que para esse caso estamos abdicando da hipótese **D2** e por esse motivo não é possível determinar diretamente o termo de realimentação de navegação. Para aplicar o controle *flocking* devemos incluir um passo intermediário onde o nó n primeiro obtém uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}^r$ para o estado do agente líder:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,k}^r \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{n,k}^r \\ \hat{\mathbf{s}}_{n,k}^r \end{bmatrix}. \quad (155)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}_{n,k}^r$ e $\hat{\mathbf{s}}_{n,k}^r$ são a sua posição e velocidade estimadas localmente pelo nó n , respectivamente. Substituímos a lei de controle $u_{n,k}$ por uma estimativa $\hat{\mathbf{u}}_{n,k}$, dada por:

$$\hat{\mathbf{u}}_{n,k} = u_{n,k}^g + u_{n,k}^c + \hat{\mathbf{u}}_{n,k}^f . \quad (156)$$

sendo o termo $\hat{\mathbf{u}}_{n,k}^f$ a estimativa para a realimentação de navegação aplicada ao agente n :

$$\hat{\mathbf{u}}_{n,k}^f = -\beta_1 (p_{n,k} - \hat{\mathbf{q}}_{n,k}^r) - \beta_2 (s_{n,k} - \hat{\mathbf{s}}_{n,k}^r) . \quad (157)$$

5.3.1 Controle *flocking* em cascata com DKF

As expressões (152) e (154) possuem exatamente a mesma estrutura do sistema (21) tratado no problema de filtragem multiagente. Dessa forma, podemos aplicar a metodologia de estimadores distribuídos para determinar $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}^r$. Obviamente existiria a opção de aplicarmos uma técnica de estimação centralizada para esse problema se houvesse um nó da rede em posse de todas as medidas $z_{n,k}$ a cada instante k . Porém, uma estratégia distribuída é naturalmente mais adequada sob o aspecto de que é mantida a característica distribuída do sistema, tendo em vista que a lei de controle *flocking* somente utiliza informações disponíveis na vizinhança \mathcal{N}_n para determinar $u_{n,k}$.

Considerando isso, no caso em que a dinâmica do agente líder obedece a um sistema linear e gaussiano como (28) propomos a utilização do DKF para estimarmos $\hat{\mathbf{x}}_{n,k}^r$ resultando no **algoritmo de controle *flocking* em cascata com o DKF**, apresentado no Algoritmo 6. Para o caso não linear a versão Estendida do DKF pode ser diretamente aplicado ao algoritmo em cascata simplesmente substituindo o DKF por sua versão estendida no passo 3.

O ponto mais importante da aplicação do DKF para o controle *flocking* é que como as vizinhanças são variantes ao longo do tempo em uma rede de proximidade dinâmica, é necessário também que a matriz de difusão seja recalculada a cada instante k , considerando as alterações nas vizinhanças. Empregando a adaptação da Regra de Hastings proposta na seção 4.4 por exemplo, teremos que as entradas da matriz de difusão serão dadas a cada instante k por:

$$c_{ln,k} = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_n}{\max\{\bar{n}, \bar{\lambda}_n, \bar{l}, \bar{\lambda}_l\}}, l \in \mathcal{N}_{n,k} \\ 1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_n} c_{jn}, l = n \end{cases} . \quad (158)$$

onde $\mathcal{N}_{n,k}$ é a vizinhança do nó n para o instante k .

Algoritmo 6 Lei de controle *flocking* em cascata com DKF para o nó n no instante k :

1. n verifica quais nós compõem a sua vizinhança no tempo k determinando o conjunto $\mathcal{N}_{n,k}$;
 2. Determinação dos pesos $c_{ln} \forall n \in \mathcal{N}_n$ através de alguma regra de construção (por exemplo, a regra (158));
 3. Nó n determina uma estimativa da posição $\hat{\mathbf{q}}_{n,k}^r$ e velocidade $\hat{\mathbf{s}}_{n,k}^r$ do agente líder através do DKF (algoritmos 2, 3 ou 4);
 4. Determinação de $\hat{\mathbf{u}}_{n,k}$ conforme (156).
-

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposta a aplicação dos estimadores de estado distribuídos em conjunto com a lei de controle *flocking*. Na primeira parte foram discutidos aspectos básicos da lei de controle *flocking* detalhadamente descrita em (OLFATI-SABER, 2006). Em seguida foi abordado como o problema de filtragem multiagente surge como uma primeira etapa do problema de conduzir uma rede móvel para um comportamento *flocking* para o caso onde os nós móveis não possuem acesso direto ao estado do agente líder. Por fim, na última seção do capítulo foram discutidos os detalhes da aplicação do DKF para esse problema.

6 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

6.1 Introdução

Nesse capítulo são apresentadas as simulações realizadas e os resultados obtidos. Em caráter introdutório, na primeira parte do capítulo são mostradas simulações que envolvem a aplicação das técnicas de estimação distribuídas para uma rede de nós estáticos. O restante do capítulo contém as simulações abrangendo a aplicação dos estimadores distribuídos ao controle *flocking*.

6.2 Estimadores distribuídos em redes estáticas

Os dois exemplos a seguir abordam a aplicação das técnicas de estimação distribuídas estudadas considerando sistemas onde a rede de nós possui topologia de comunicação estática. A primeira simulação apresenta o caso de um sistema linear cujo estado é estimado através do DKF para uma rede de $N = 10$ nós. Já no segundo exemplo a mesma topologia de comunicação do exemplo anterior é utilizada para estimar o estado de um sistema não linear através do DEKF.

6.2.1 DKF em uma rede de $N=10$ nós

O principal objetivo desse primeiro exemplo é ilustrar a aplicação do DKF para uma rede de sensores com topologia de comunicação estática, ou seja as vizinhanças dos nós não se alteram ao longo do tempo. Outro ponto que será explorado no exemplo é o benefício para as estimativas resultante da cooperação entre os nós. Para avaliar esse efeito iremos supor uma rede de sensores com perfil de ruído não uniforme, ou seja quando nem todos os nós são afetados pelo mesmo nível de ruído em suas medidas.

Na simulação iremos considerar um sistema com dimensão $m_x = 3$ descrito pelo seguinte modelo linear e invariante no tempo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + G\boldsymbol{\eta}_k, \quad (159)$$

onde o estado \mathbf{x} é composto por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}, \quad (160)$$

e as matrizes F e G são:

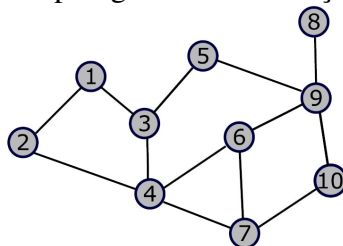
$$F = \begin{bmatrix} 0.836 & 0.306 & -0.293 \\ -0.0257 & 1.303 & -0.409 \\ -0.0257 & 0.503 & 0.391 \end{bmatrix}, \quad (161)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 \end{bmatrix}. \quad (162)$$

Observamos que a partir dessa escolha de F o sistema (159) é assintoticamente estável, tendo em vista que todos os autovalores de F possuem módulo menor que a unidade ($\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.842$, $\lambda_3 = 0.88$). Já o ruído de processo $\boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{R}^{m_x}$ é gaussiano com média nula e covariância constante, ou seja $\boldsymbol{\eta}_k \sim \mathbb{G}(0, Q)$. A matriz de covariância é dada por $Q = \alpha_\eta I_{m_x}$, com parâmetro $\alpha_\eta = 10$.

A rede responsável por realizar as medidas é composta por $N = 10$ nós, sendo o conjunto de nós dado por $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, 10\}$. Na Figura 3 a topologia de comunicação da rede é representada graficamente, onde as linhas indicam que dois nós trocam dados. Observa-se que todos os nós possuem ao menos um vizinho e que a rede pode ser representada por um grafo conectado, ou seja um grafo onde existe ao menos um caminho conectando quaisquer dois nós.

Figura 3 – Topologia de comunicação da rede.



Fonte: do autor

Iremos considerar ainda que os nós são divididos em dois grupos. O primeiro grupo (composto pelos nós $n = 1, 2, \dots, 5$) executa medidas de dimensão $p_n = 2$ que são relacionadas ao estado do sistema (159) conforme a seguinte equação de medida linear:

$$\mathbf{z}_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{n,k}, \quad n = 1, \dots, 5. \quad (163)$$

com $\mathbf{v}_{n,k} \in \mathbb{R}^2$, $n \leq 5$. Já o segundo grupo de nós (composto pelos nós $n = 6, 7, \dots, 10$) realiza medidas de dimensão $p_n = 3$ de acordo com o seguinte modelo de medição também linear:

$$\mathbf{z}_{n,k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{n,k}, \quad n = 6, \dots, 10. \quad (164)$$

com $\mathbf{v}_{n,k} \in \mathbb{R}^3$, $n \geq 6$. Isto é, o segundo grupo mede o estado completo do sistema. Considerando isso, são observados dois tipos de matrizes de medição ao longo da rede:

$$H_n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & , \quad n \leq 5, \\ I_3 & , \quad n \geq 6. \end{cases} \quad (165)$$

Notamos a partir de (165) que individualmente a equação de medida de cada nó em conjunto com o modelo (159) forma sistemas observáveis, tendo em vista que o par (H_n, F) é observável $\forall n \in \mathcal{V}$.

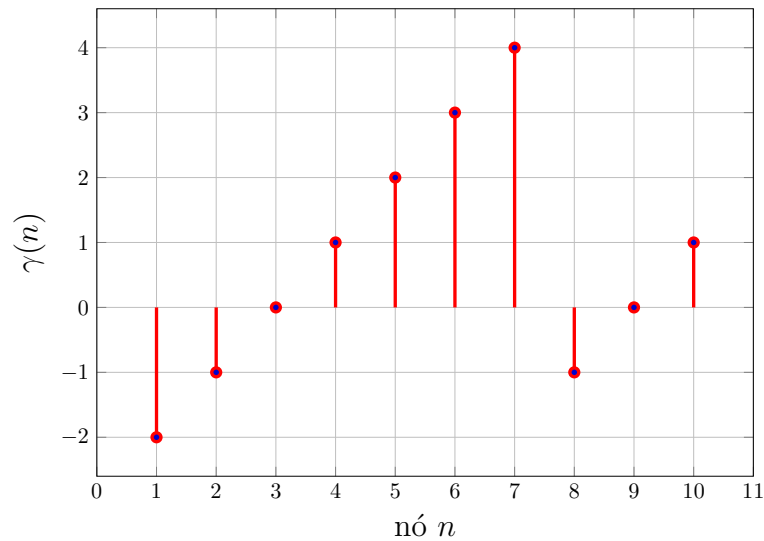
Os ruídos de medição $\mathbf{v}_{n,k}$ também são gaussianos possuindo média nula e covariância estacionária R_n , ou seja $\mathbf{v}_{n,k} \sim \mathbb{G}(0, R_n)$, $\forall k$. Além de descorrelacionados entre si, todos os ruídos do sistema foram construídos de forma a serem também descorrelacionados com estado inicial \mathbf{x}_0 , ou seja o sistema verifica as hipóteses **B1** a **B4**. Para que a rede possua o perfil de ruído não uniforme a matriz de covariância R_n para cada nó foi escolhida de acordo com a seguinte expressão:

$$R_n = \begin{cases} 10^{\gamma(n)} I_2 & , \quad n \leq 5, \\ 10^{\gamma(n)} I_3 & , \quad n \geq 6. \end{cases} \quad (166)$$

onde o parâmetro $\gamma(n)$ é dependente do nó n . O valor do parâmetro $\gamma(n)$ associado a cada nó é mostrado na Figura 4 que descreve o perfil de ruído ao longo da rede. Esse perfil de ruído foi construído com o intuito de explorar um caso extremo onde é grande a diferença do ruído nas medidas de cada nó. Podemos notar por exemplo que o nó 1 é o menos afetado pelo ruído de medição, apresentando $\gamma(1) = -2$, enquanto o nó 7 é o que possui as medidas mais corrompidas, com $\gamma(7) = 4$, ou seja 6 ordens maior que para o nó 1.

Para as simulações foram realizadas 200 rodadas de Monte Carlo considerando um estado inicial do sistema $\mathbf{x}_0 \sim \mathbb{G}(0, P_0)$ com covariância $P_0 = 10I_{m_x}$. O tempo de simulação foi de $k_{max} = 100$ amostras. A matriz de difusão foi construída com a Regra de Hastings adaptada (124). Além do DKF, foram obtidas estimativas da trajetória do sistema com o CKF, possibilitando uma comparação com a solução ótima, e com um KF não cooperativo em cada nó isoladamente, permitindo avaliar o impacto da cooperação.

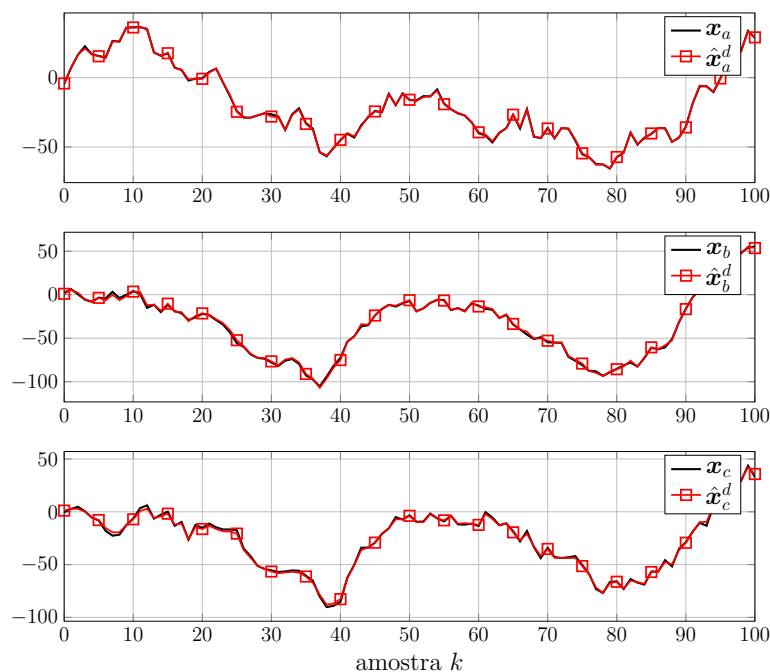
Figura 4 – Variação do parâmetro $\gamma(n)$ para os nós da rede.



Fonte: do autor

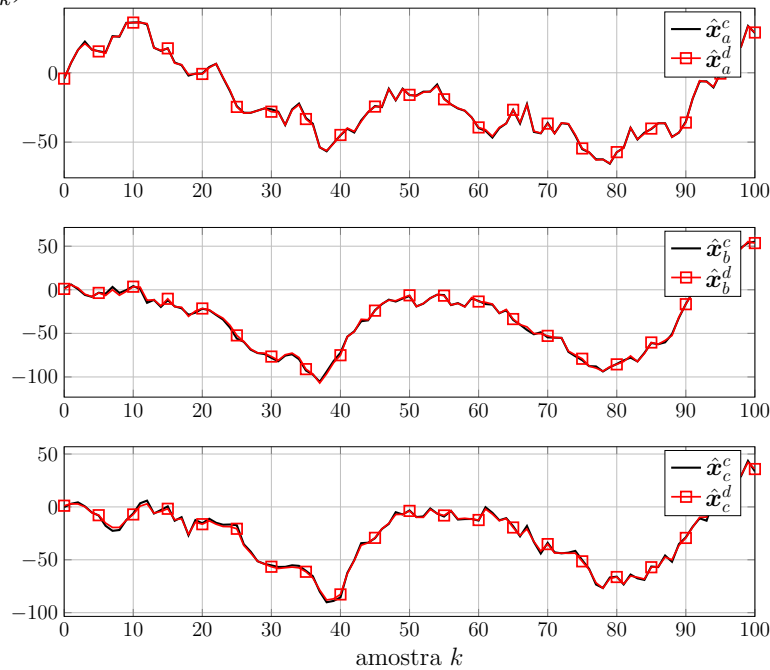
Na Figura 5 é mostrada a trajetória real do sistema (x_k) e a trajetória estimada pelo DKF (\hat{x}_k^d) ao longo da simulação em uma das rodadas de Monte Carlo. Notamos que a estimativa do DKF acompanha a trajetória do sistema, já apresentando convergências nas primeiras amostras. Na Figura 6 é comparada a trajetória do DKF com a trajetória do CKF para uma das rodadas de simulação, onde observamos que ambos algoritmos apresentaram resultados bastante similares.

Figura 5 – Comparação entre a trajetória real do sistema (x_k) e a trajetória estimada com o DKF (\hat{x}_k^d).



Fonte: do autor

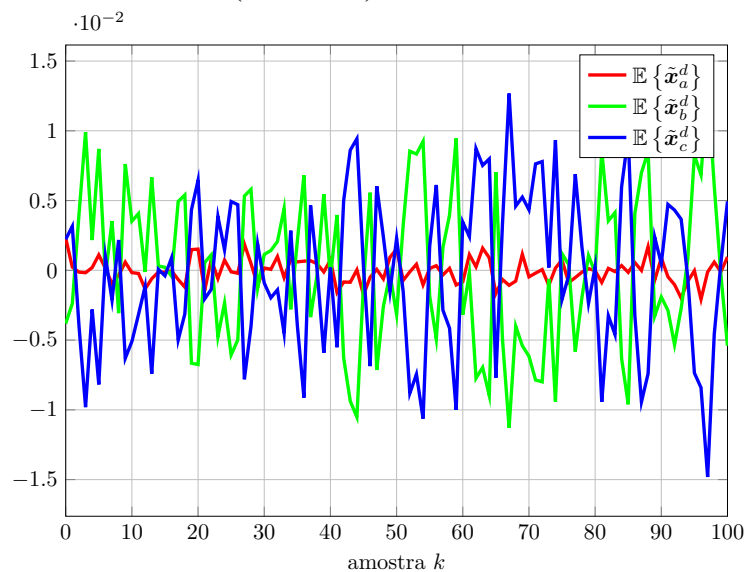
Figura 6 – Comparação entre a trajetória estimada com o CKF (\hat{x}_k^c) e a trajetória estimada com o DKF (\hat{x}_k^d).



Fonte: do autor

Verificando a análise de desempenho teórico da seção 4.3 foi realizada a análise do erro médio e erro médio quadrático obtidos com o DKF. Tomando a média dos erros nas 200 rodadas de simulação, todos os nós da rede apresentaram erro médio $\forall k$ com módulo menor do que $1.5 \cdot 10^{-2}$, corroborando o esperado teoricamente. Como exemplo é mostrado na Figura 7 o erro médio (tendência) de estimativa no nó $n = 5$ em cada um dos três componentes do estado estimado \hat{x}_k^d .

Figura 7 – Erro médio (tendência) obtido com o DKF no nó $n = 5$.



Fonte: do autor

Já na Figura 8 é mostrada a estimativa para o erro médio quadrático local (conforme (26)) obtido para cada um dos nós da rede e também o atingindo com o CKF. Observa-se que as curvas do $MSE_{n,k}^{local}$ são apresentadas em dB ($10\log_{10}(MSE_{n,k}^{local})$), e portanto quanto mais negativo o valor mostrado no gráfico mais próximo de zero encontra-se o MSE. Primeiramente notamos que para todos os nós ocorre uma rápida convergência do erro médio quadrático com o DKF, já nas primeiras amostras da simulação, o mesmo ocorrendo com o CKF. Esse fato se dá devido às características do sistema, ou seja as matrizes F e H_n .

Corroborando o esperado teoricamente, a estimativa obtida com CKF apresenta o menor MSE em todos os instantes de tempo. Já para o DKF temos que houve grande diferença entre os resultados obtidos em cada nó. Por exemplo, os nós $n = 8$ e $n = 9$ atingiram os menores MSE com diferença de $5dB$ em comparação ao CKF, enquanto os nós $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ atingiram MSE com diferença de mais de $25dB$ em relação ao CKF. Essa grande diferença entre os resultados obtidos é explicada por três fatores: a diferença na equação de medida de cada nó (tendo em vista que temos dois grupos de sensores diferentes na rede), a diferença dos níveis de ruído (tendo em vista que R_n não é igual para todos os nós) e a cooperação entre os nós da rede.

Para auxiliar na compreensão do resultado obtido, na Figura 9 é mostrada uma comparação para todos os $N = 10$ nós entre o erro médio quadrático assintótico ($MSE_{n,SS}^{local}$ do DKF, seguindo a definição (119)), e o $MSE_{n,SS}^{local}$ obtido com a estratégia não cooperativa (um KF não cooperativo onde cada nó considera somente suas próprias medidas). Notamos primeiramente que exceto o nó $n = 5$ todos os nós do primeiro grupo ($n \leq 5$) apresentaram MSE assintótico de aproximadamente $18dB$ tanto para o DKF como no KF não cooperativo. Já o nó $n = 5$ apresentou MSE de aproximadamente $21dB$ com o KF não cooperativo, maior que os demais nós dentro do seu grupo, o que de fato era esperado tendo em vista era o nó com maior nível de ruído dentro do primeiro grupo ($\gamma(5) = 2$, conforme o perfil de ruído da Figura 4), entretanto apresentou o menor MSE com o DKF em comparação ao seu grupo. Esse fato é decorrência da cooperação com os nós do segundo grupo, como detalhado a seguir.

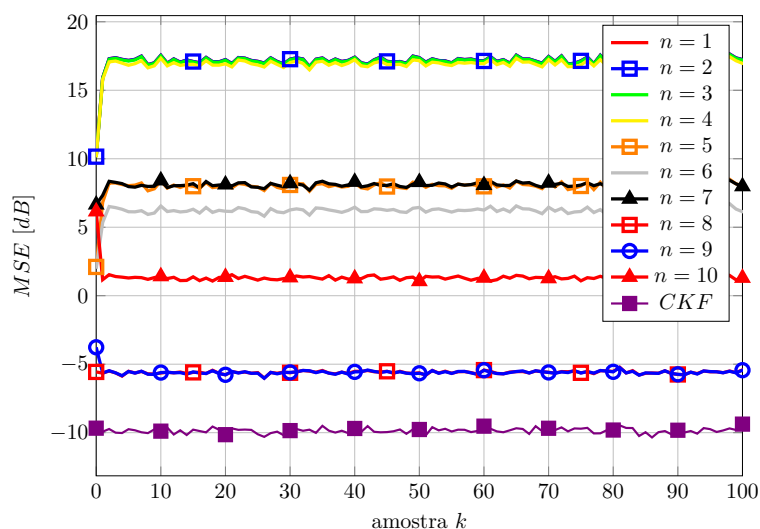
Para o segundo grupo de nós ($n \geq 6$ e $H_n = I$) o resultado obtido já foi bastante diferente entre os nós. Os nós $n = 6$ e $n = 7$ que apresentavam medidas com maior nível de ruído ($\gamma(6) = 3$ e $\gamma(7) = 4$) conseguiram estimativas muito mais precisas com o DKF em comparação ao que atingiram isoladamente (uma diferença de aproximadamente $30dB$), obtendo um grande benefício com a cooperação. Houve também um benefício para os nós $n = 9$ e $n = 10$ (que apresentavam nível intermediário de ruído comparado ao restante da rede $\gamma(9) = 0$ e $\gamma(10) = 1$) que diminuíram em aproximadamente $10dB$ o seu MSE em comparação com a estratégia não cooperativa. Já o nó $n = 8$ apresentou o menor MSE local com o DKF obtendo um resultado muito próximo ao que já obteria com a estratégia não cooperativa, o que de fato era esperado tendo em vista que era nó

dentro de seu grupo com o menor nível de ruído em suas medidas.

A primeira conclusão que obtemos dessa análise é que nenhum dos nós obteve perda de desempenho ao adotarem a cooperação, ou seja não houve aumento do seu MSE em comparação com a estratégia não cooperativa. Isso se dá principalmente devido a escolha da política de compartilhamento de informação (124). Também podemos notar através da análise como a troca de informação foi benéfica para determinados nós da rede. Por exemplo, os nós $n = 5$ e $n = 6$ que isoladamente apresentam MSE de 21db e 26db obtém uma diminuição do seu MSE ao trocarem dados com o seu vizinho $n = 9$. E conforme desejado, a estimativa do nó $n = 9$ não é deteriorada com os dados com maior nível de ruído oriundos de $n = 5$ e $n = 6$. Entretanto esse efeito não é propagado para todos os nós da rede e por exemplo o próprio $n = 6$ não é capaz de transmitir o benefício recebido para o nó $n = 4$, que não apresentou melhora significativa na sua estimativa.

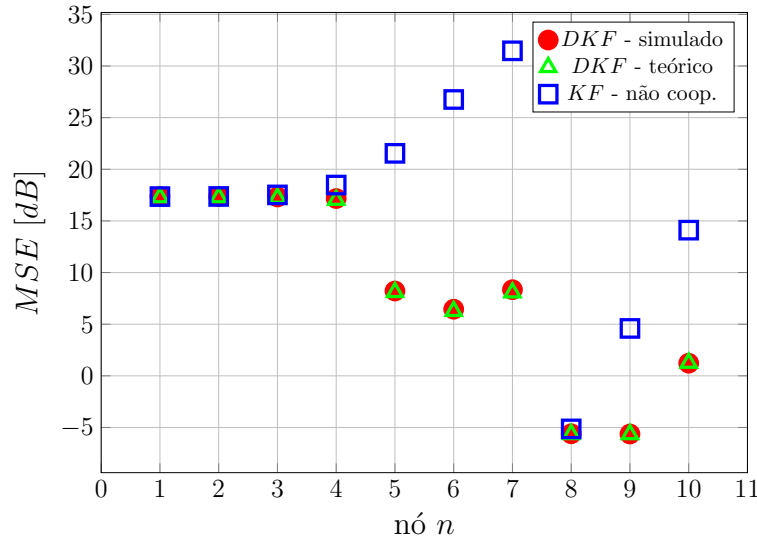
Por fim, ainda na Figura 9 é realizada a comparação entre o $\text{MSE}_{n,SS}^{\text{local}}$ para o DKF resultante das simulações e o seu valor teórico determinado através da expressão (121). Notamos que o resultado obtido em todos os nós da rede foi muito próximo ao valor esperado teoricamente.

Figura 8 – Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DKF e o MSE ótimo obtido com o CKF.



Fonte: do autor

Figura 9 – Comparação entre o MSE assintótico teórico para o DKF, o valor atingido em simulação e atingido através da estratégia não cooperativa.



Fonte: do autor

6.2.2 DEKF em uma rede de $N=10$ nós

Neste exemplo é abordada a aplicação do DEKF em um problema de filtragem em rede para um sistema não linear. O sistema de interesse é um modelo do tipo pêndulo com dimensão $m_x = 2$ cujo estado é definido como:

$$\mathbf{x}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^a \\ \mathbf{x}_k^b \end{bmatrix}, \quad (167)$$

sendo \mathbf{x}_k^a a posição angular do pêndulo e \mathbf{x}_k^b a sua velocidade. A dinâmica do estado \mathbf{x}_k é descrita pelo seguinte modelo estocástico:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^a & \theta_1 \mathbf{x}_k^b \\ \mathbf{x}_k^b & -\theta_2 \sin(\mathbf{x}_k^a) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (168)$$

onde $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$ são os parâmetros do modelo. O ruído de processo $\boldsymbol{\eta}_k$ possui pdf gaussiana com média nula e covariância definida em termos de β_1 e do parâmetro $\tau \in \mathbb{R}$:

$$Q = \tau \begin{bmatrix} \frac{\theta_1^3}{3} & \frac{\theta_1^2}{2} \\ \frac{\theta_1^2}{2} & \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (169)$$

Para realização das medidas novamente utilizaremos uma rede de $N = 10$ nós e com a mesma topologia de comunicação estática mostrada na Figura 3. Porém, para essa simulação todos os nós efetuam medidas escalares conforme o seguinte modelo de medição:

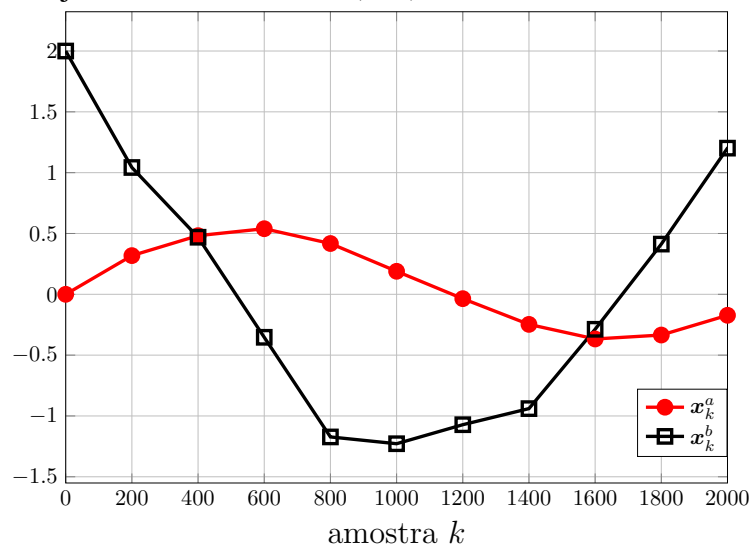
$$z_{n,k} = \sin(\mathbf{x}_k^a) + \mathbf{v}_{n,k}, \quad (170)$$

sendo o ruído $v_{n,k}$ gaussiano com média nula e variância $\sigma_n^2 = 10^{\gamma(n)}$. A dependência do parâmetro $\gamma(n)$ com o nó n também segue o apresentado na Figura 4.

Foram efetuadas 200 rodadas de simulação com realizações independentes de todos os processos estocástico envolvidos no modelo, considerando um tempo de simulação de $k_{max} = 2000$ amostras. A matriz de difusão utilizada no DEKF foi construída através da regra (124). Para comparação com o DEKF, a trajetória do sistema também foi estimada com um KF Estendido centralizado, ou seja agregando a medida de todos os nós e aplicando a versão clássica do KF Estendido (EKF).

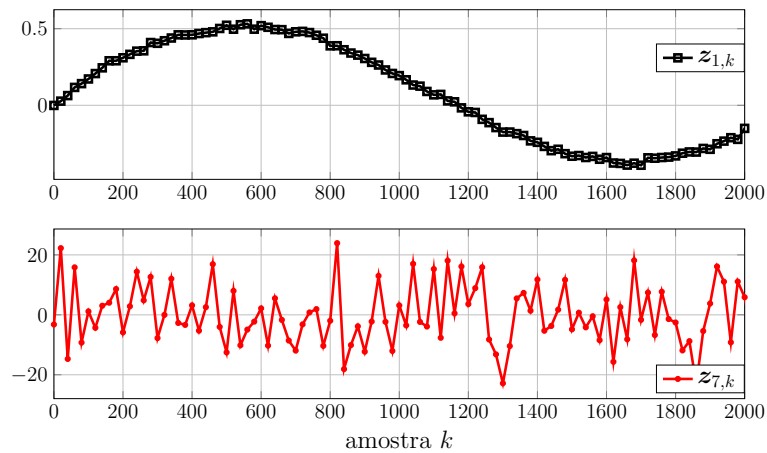
Na Figura 10 é apresentada a trajetória do sistema para uma das rodadas de simulações, mostrando a posição x_k^a e velocidade x_k^b . Já na Figura 11 é mostrada uma comparação entre as medidas $z_{1,k}$ realizadas pelo nó $n = 1$ (menor nível de ruído) e as medidas $z_{7,k}$ realizadas pelo nó $n = 7$ (maior nível de ruído) considerando a trajetória da Figura 10. Notamos que as medidas $z_{1,k}$ acompanham a trajetória do estado x_k^a , já as medidas $z_{7,k}$ são compostas principalmente por ruído, sendo difícil identificar a trajetória do sistema a partir delas.

Figura 10 – Trajetória real do sistema (167) em uma das rodadas de simulação.



Fonte: do autor

Figura 11 – Comparação das medidas $z_{1,k}$ do nó $n = 1$ (menor nível de ruído) e medidas $z_{7,k}$ do nó $n = 7$ (maior nível de ruído).

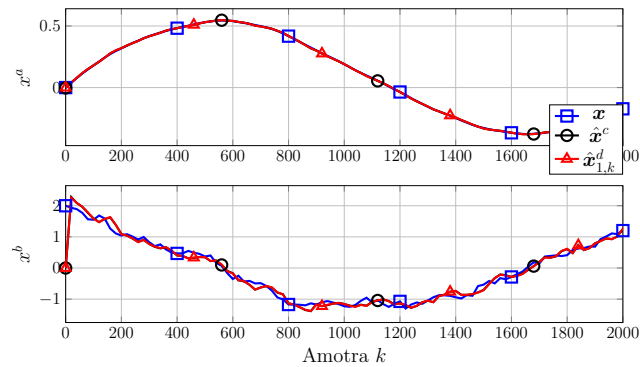


Fonte: do autor

Já nas figuras 12 e 13 temos as estimativas atingidas com o DEKF e com o EKF para os nós $n = 1$ e $n = 7$, respectivamente. Observamos que mesmo dispondo de medidas muito menos precisas, como verificamos pela Figura 11, o nó $n = 7$ obteve estimativas com o DEKF $\hat{x}_{7,k}$ que seguiram a trajetória real do sistema com erro próximo de zero, assim como foi verificado no nó $n = 1$. Esse resultado indica como a cooperação foi benéfica para o nó $n = 7$. Da mesma forma, ambos os nós obtiveram resultados com o DEKF muito próximos aos atingidos com a estratégia centralizada.

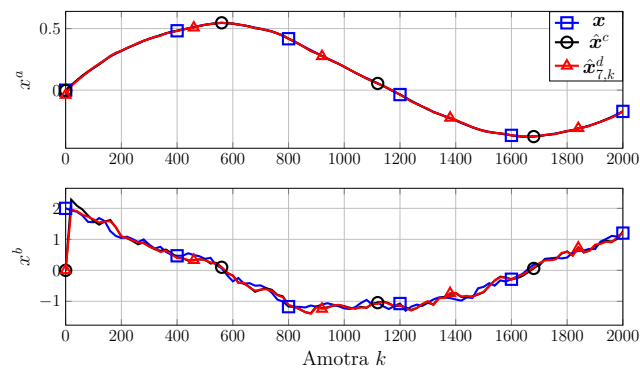
Essa análise é corroborada pela Figura 14 que apresenta o $MSE_{n,k}^{local}$ para todos os nós da rede e também o erro médio quadrático para o EKF. Notamos que em decorrência da cooperação do DEKF o erro médio quadrático em todos os nós foi muito próximo ao do EKF. Diferentemente do exemplo para o sistema linear, para o sistema do tipo pêndulo todos os nós obtiveram um $MSE_{n,k}^{local}$ muito próximo uns dos outros e de aproximadamente $-20dB$. Notamos que comparado ao exemplo linear, o erro médio quadrático para esse sistema foi muito menor, mesmo para um caso não linear onde há o erro devido a aproximação linear do DEKF. Esse fato é decorrência direta das características do sistema não linear e da equação de medida considerados.

Figura 12 – Comparação entre a trajetória real do sistema e as estimativas obtidas com o DEKF para o nó $n = 1$ e com o EKF.



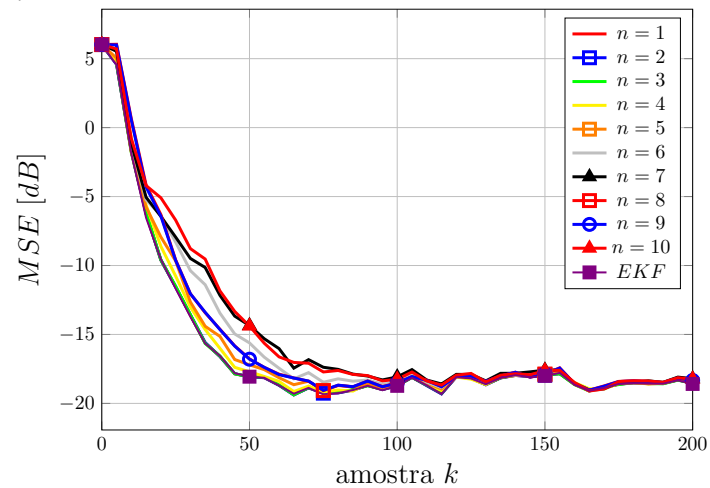
Fonte: do autor

Figura 13 – Comparação entre a trajetória real do sistema e as estimativas obtidas com o DEKF para o nó $n = 7$ e com o EKF.



Fonte: do autor

Figura 14 – Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DEKF e o MSE ótimo obtido com o EKF.



Fonte: do autor

6.3 Estimadores distribuídos em cascata com controle *flocking*

A seguir são apresentados dois estudos de caso onde as técnicas de estimação distribuída são exploradas em conjunto com o controle *flocking*. No primeiro exemplo é estudado um caso onde o agente líder possui dinâmica linear e o segundo exemplo aborda o caso onde o líder possui dinâmica descrita por um modelo não linear.

6.3.1 Agente líder com dinâmica linear

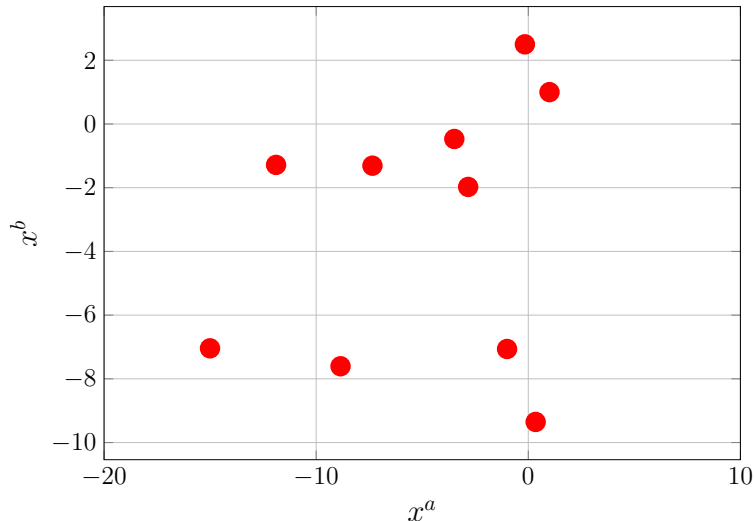
Para essa simulação será considerada uma rede com $N = 10$ nós móveis dispostos em um espaço de dimensão $d = 2$ (com coordenadas espaciais x^a - eixo horizontal e x^b - eixo vertical) e com dinâmica de acordo com o modelo de integrador duplo (139). Deseja-se conduzir essa rede móvel para um comportamento *flocking* com uma distância entre os nós de $D = 7$ e considerando um raio de interação entre nós de $\rho = 10.5$.

A condição inicial $\xi_n(0)$ contendo a posição e velocidade de cada um dos N nós foi escolhida aleatoriamente como realizações de uma VA uniformemente distribuída com média nula e covariância P_ξ dada por:

$$P_\xi \triangleq \text{diag}\{70,70,1,1\} . \quad (171)$$

Na Figura 15 é mostrada uma configuração $q(0)$ resultante dessa escolha.

Figura 15 – Posição inicial dos nós para a rede móvel: realizações de uma VA uniformemente distribuída com média nula e covariância (171).



Fonte: do autor

O agente líder também possui dinâmica de integrador duplo, sendo sua aceleração substituída por um ruído de processo branco η_k com pdf gaussiana, média nula e covariância $Q = 10$, resultando no seguinte modelo discretizado:

$$\mathbf{x}_{k+1}^r = \begin{bmatrix} I_2 & T_s I_2 \\ 0_2 & I_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^r + \begin{bmatrix} 0.5 T_s^2 I_2 \\ T_s I_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_k , \quad (172)$$

onde $T_s = 0.01$ é o período de amostragem e o estado \mathbf{x}_k^r é decomposto na posição $\mathbf{q}_k^r \in \mathbb{R}^2$ e velocidade $\mathbf{s}_k^r \in \mathbb{R}^2$, conforme (153). O estado inicial \mathbf{x}_0^r também é gaussiano, com média nula e covariância $P_0 = 10I_4$.

Os nós efetuam medidas associadas ao estado \mathbf{x}_k^r de acordo com um modelo linear e invariante no tempo dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{n,k} = H_n \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{n,k}, \\ n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (173)$$

sendo a matriz H_n dependente do nó n :

$$H_n = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix} & n \leq 5, \\ \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \end{bmatrix} & n > 5. \end{cases} \quad (174)$$

Os ruídos de medição associados a cada nó também são gaussianos e com covariância estacionária, ou seja $\mathbf{v}_{n,k} \sim \mathbb{G}(0, R_n)$, $\forall k$. A covariância R_n é dependente do nó n conforme segue:

$$R_n = 10^{\gamma(n)} I_2 \quad (175)$$

onde o parâmetro $\gamma(n)$ segue o apresentado na Figura 4.

Considerando esse sistema foi aplicado o algoritmo de controle *flocking* em cascata com o DKF (Algoritmo 6). A cada instante k a matriz de difusão foi determinada utilizando a regra (158). Já os parâmetros β_1 e β_2 para a realimentação de navegação do controle *flocking* foram escolhidos ambos como 0.01. Os demais parâmetros utilizados no controle foram adaptados de exemplos apresentados em (OLFATI-SABER, 2006) e são mostrados na Tabela 1 (No Apêndice A é apresentada a Tabela 2 contendo um resumo dos parâmetros da lei de controle *flocking*).

Tabela 1 – Resumo dos parâmetros utilizados em simulação para lei de controle *flocking*

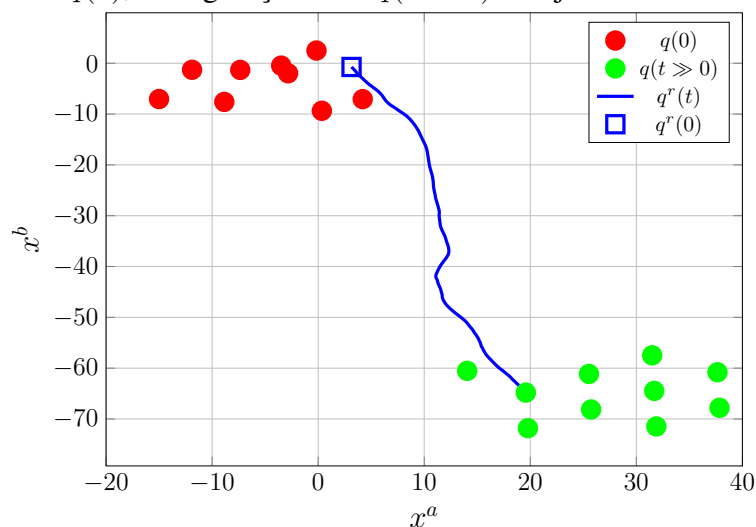
| Parâmetro | Valor |
|-----------------------|-------|
| D | 7.5 |
| ρ | 10.5 |
| β_1 e β_2 | 0.01 |
| $\bar{\sigma}$ | 0.1 |
| a e b | 5 |
| h | 0.25 |

Foram efetuadas 1000 rodadas independentes de Monte Carlo para avaliar a média dos resultados. Para comparação os experimentos também foram simulados com a substituição do DKF pelo CKF, representando portanto a solução ótima para o problema de esti-

mação, e também com o Filtro de Kalman de Consenso (consKF) utilizado em (OLFATI-SABER; JALALKAMALI, 2006) originalmente aplicado no problema de controle *flocking*.

Na Figura 16 é ilustrado o comportamento do sistema ao aplicarmos o controle *flocking* em cascata com o DKF. Nela é apresentada a trajetória do agente líder, a configuração inicial $q(0)$ da rede e a configuração final $q(t \gg 0)$ da rede. Observamos que a rede assintoticamente segue a trajetória do líder ao mesmo tempo em que atinge e mantém uma configuração de α -lattice.

Figura 16 – Resultado da aplicação do controle *flocking* em cascata com o DKF: configuração inicial da rede $q(0)$, configuração final $q(t \gg 0)$ e trajetória do líder $q^r(t)$.



Fonte: do autor

Já nas figuras 17 e 18 são mostradas respectivamente as trajetórias estimadas pelos nós $n = 2$ e $n = 6$ em uma das rodadas de simulação. É efetuada a comparação entre a trajetória do agente líder e as estimativas obtidas com o DKF, com o consKF e com a solução ótima do CKF. Podemos observar que em ambos os nós o pior desempenho foi atingido com o consKF, enquanto o DKF e o CKF apresentam estimativas muito próximas ao estado real do sistema.

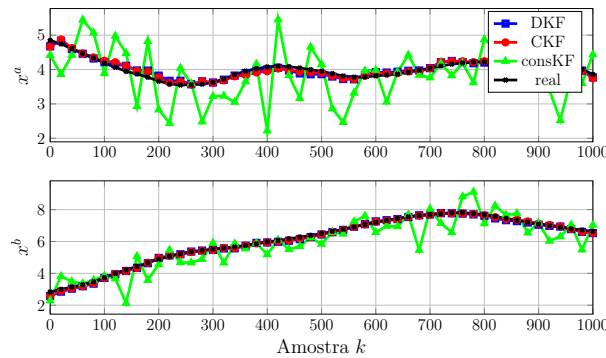
O melhor desempenho do DKF frente ao consKF é comprovado pelo erro médio quadrático das estimativas conforme exemplificado nas figuras 19 e 20 que mostram o $MSE_{n,k}^{local}$ obtido por esses dois métodos para os nós $n = 3$ e $n = 7$. Para os dois nós a estimativa do DKF apresentou erro médio quadrático muito próximo ao CKF, enquanto o consKF apresentou um resultado aproximadamente 30 vezes maior. Esse resultado foi verificado em todos os demais nós da rede conforme mostrado na Figura 21 que apresenta o erro médio quadrático de todos os $N = 10$ nós com o DKF em comparação com o atingido pelo CKF. Observamos que todos os nós obtiveram um resultado muito próximo ao estimador ótimo.

Para avaliar o impacto na rede móvel do algoritmo de estimação em cascata com o controle *flocking* foi determinado o erro quadrático da trajetória, definido como:

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \|\xi^r(t) - \hat{\xi}(t)\| \quad (176)$$

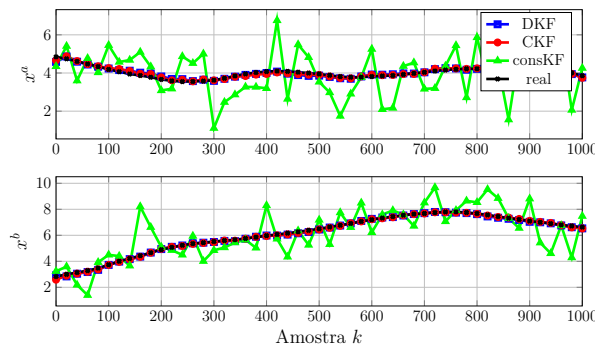
onde $\xi^r(t) \triangleq \text{col}\{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$ é a trajetória dos nós quando aplicamos o algoritmo de controle *flocking* conhecendo precisamente a posição e velocidade do agente líder e $\hat{\xi}(t) \triangleq \text{col}\{\hat{\xi}_1(t), \hat{\xi}_2(t), \dots, \hat{\xi}_N(t)\}$ é a trajetória dos nós quando aplicamos o controle *flocking* estimando a posição e velocidade do líder a partir das medidas dos nós. Na Figura 22 é mostrada a comparação do erro de trajetória $\tilde{\xi}$ resultante da aplicação do consKF, DKF e do CKF na etapa de estimação do controle *flocking*. Conforme esperado pela análise do $\text{MSE}_{n,k}^{\text{local}}$, o erro de trajetória do DKF e CKF foram muito semelhantes, enquanto o consKF apresenta um erro maior de trajetória.

Figura 17 – Trajetória real do agente líder comparada a estimativa do nó $n = 2$ com DKF, consKF e o CKF.



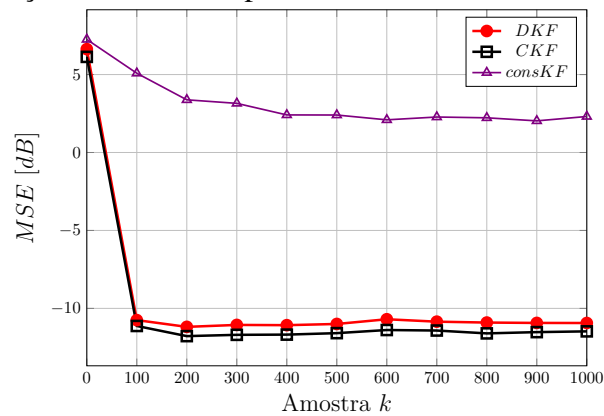
Fonte: do autor

Figura 18 – Trajetória real do agente líder comparada a estimativa do nó $n = 3$ com DKF, consKF e o CKF.



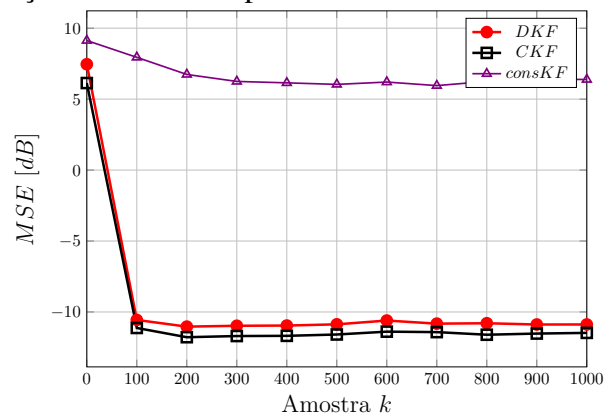
Fonte: do autor

Figura 19 – Comparação entre o MSE para o nó $n = 6$ com o DKF, consKF e o CKF.



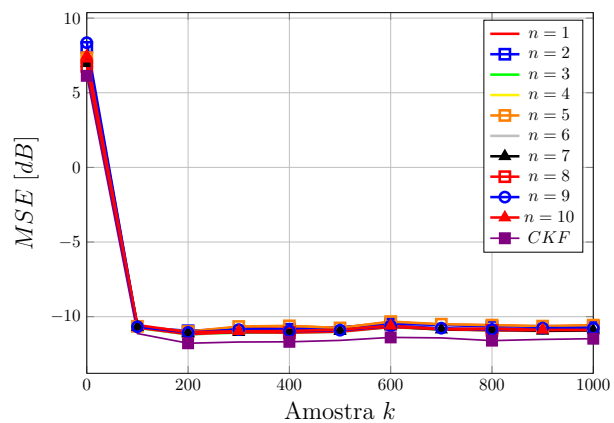
Fonte: do autor

Figura 20 – Comparação entre o MSE para o nó $n = 7$ com o DKF, consKF e o CKF.



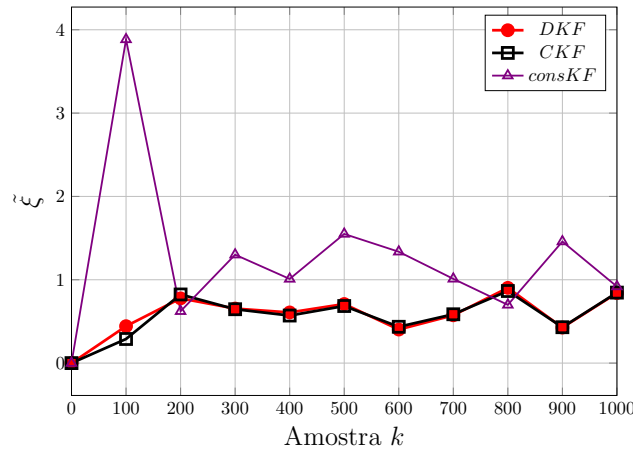
Fonte: do autor

Figura 21 – Comparação entre o MSE para os diferentes nós com o DKF e o MSE ótimo obtido com o CKF.



Fonte: do autor

Figura 22 – Comparação do erro de trajetória (176) para as diferentes estratégias de estimação em cascata com o controle *flocking*.



Fonte: do autor

6.3.2 Agente líder com dinâmica não linear

Neste exemplo consideraremos um caso de rede móvel onde o agente líder possui dinâmica não linear, implicando na necessidade de utilização do DEKF na etapa de estimação do algoritmo de controle *flocking* em cascata com o estimador distribuído. Será assumido que o agente líder obedece um modelo do tipo *coordinated turn motion* (CTM) (BAR-SHALOM; LI; KIRUBARAJAN, 2004), que consiste em um modelo bidimensional usualmente adotado na literatura para descrição de aeronaves em manobra.

Seja um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^2 com eixos x^a (horizontal) e x^b (vertical), adotando um modelo CTM para o agente líder temos que seu estado é composto por cinco variáveis:

$$\mathbf{x}_k^r \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^a \\ \mathbf{s}_k^a \\ \mathbf{q}_k^b \\ \mathbf{s}_k^b \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix}, \quad (177)$$

onde \mathbf{q}^a , \mathbf{q}^b são respectivamente as coordenadas do agente líder no eixos x^a e x^b , \mathbf{s}^a e \mathbf{s}^b são as suas velocidades também nos eixos x^a e x^b e $\boldsymbol{\omega}_k$ é o ângulo de movimento no plano. Temos então que a dinâmica do agente líder é descrita pelo seguinte modelo em espaço de estados:

$$\mathbf{x}_{k+1}^r = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(T_s \boldsymbol{\omega}_k)}{\boldsymbol{\omega}_k} & 0 & -\frac{1-\cos(T_s \boldsymbol{\omega}_k)}{\boldsymbol{\omega}_k} & 0 \\ 1 & \cos(T_s \boldsymbol{\omega}_k) & 0 & -\sin(T_s \boldsymbol{\omega}_k) & 0 \\ 1 & \frac{1-\cos(T_s \boldsymbol{\omega}_k)}{\boldsymbol{\omega}_k} & 0 & \frac{\sin(T_s \boldsymbol{\omega}_k)}{\boldsymbol{\omega}_k} & 0 \\ 1 & \sin(T_s \boldsymbol{\omega}_k) & 0 & \cos(T_s \boldsymbol{\omega}_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^r + \begin{bmatrix} 0.5T_s^2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0.5T_s^2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_k, \quad (178)$$

sendo T_s o período de amostragem e $\eta_k \in \mathbb{R}^3$ um ruído branco gaussiano com média nula e covariância Q . Para as simulações foram adotados os valores de $T_s = 0.1$ e $Q = 10I_3$.

Novamente deseja-se conduzir uma rede com $N = 10$ nós móveis para um comportamento de *flocking* e seguindo a trajetória do agente líder, considerando uma distância entre nós de $D = 7.5$ e raio de interação $\rho = 10.5$. A dinâmica dos nós segue o modelo de integrador duplo (139) e o estado inicial dos nós da rede foi escolhido como realizações de uma VA com pdf uniforme de média nula e covariância P_ξ dada por:

$$P_\xi \triangleq \text{diag}\{70,70,1,1\}. \quad (179)$$

Para efetuar medidas os nós da rede empregam exclusivamente sensores de posição, resultando no seguinte modelo de medição:

$$\begin{cases} z_{n,k} = Hx_k + v_{n,k}, \\ n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (180)$$

sendo $z_{n,k} \in \mathbb{R}^2$ e a matriz H dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (181)$$

Os ruídos de medição $v_{n,k}$ foram escolhidos como gaussianos com média nula e covariância $R = I_2$.

Foram simulados experimentos onde a posição e velocidade do líder foram estimadas através do DEKF em cascata com a lei de controle (157) (substituindo o DKF pelo DEKF no passo 3 do Algoritmo 6). Os parâmetros para lei de controle *flocking* foram os mesmos adotados para o exemplo linear, seguindo a Tabela 1.

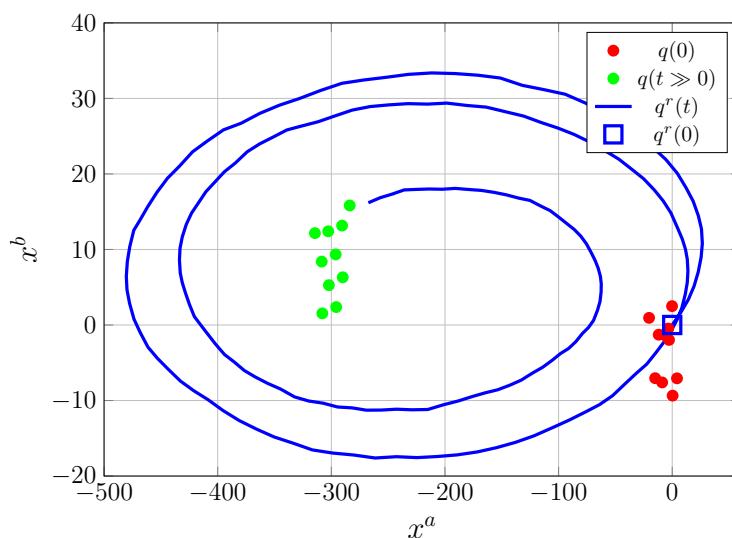
As simulações foram repetidas para 500 rodadas independentes de Monte Carlo, tomando assim a média dos resultados obtidos. Para comparação os experimentos também foram simulados com a substituição do DEKF por uma solução centralizada, onde foi aplicado KF Estendido agregando as medidas de todos os nós. Entretanto, verificou-se nas simulações que a partir de uma estratégia centralizada por aproximação linear como o KF Estendido não foi possível obter uma solução para o problema, tendo em vista que gerou-se problemas mal condicionados numericamente. Foi observado que isso ocorreu devido aos erros de linearização associados ao fato de trabalharmos com um sistema de dimensão elevada tendo em vista o grande número de medidas no caso centralizado. A partir desse fato evidenciou-se outra vantagem das estratégias distribuídas: em geral elas conduzem a problemas melhor condicionados numericamente frente a estratégias centralizadas.

O DEKF em cascata com o controle *flocking* cumpriu seu objetivo, conduzindo a rede móvel para um comportamento *flocking*. Como exemplo na Figura 23 é apresentada a trajetória do líder para uma das rodadas de simulações e a configuração inicial ($q(0)$) e

final da rede ($q \gg 0$) resultante. Já nas figuras (24) e (25) são apresentadas a posição (q^a e q^b) e velocidade real (s^a e s^b) do líder comparadas com as estimativas para um dos nós da rede (nó $n = 4$). Através da comparação das trajetórias podemos notar que o erro nas estimativas para esse nó foi pouco significativo, comportamento repetido para os demais nós da rede.

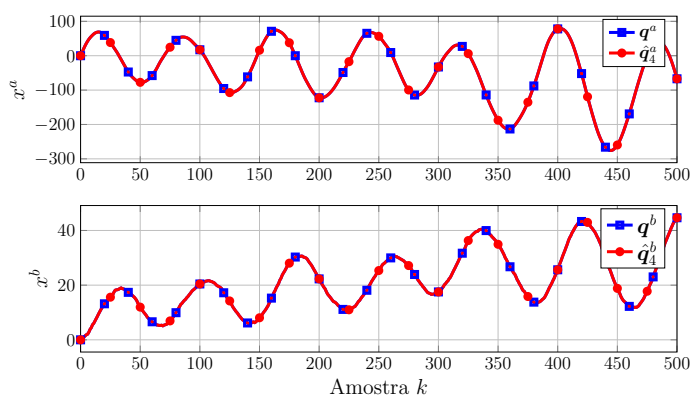
Apesar de as estimativas apresentarem erro médio pequeno, o erro médio quadrático considerando todas as rodadas de simulação não apresenta convergência como no caso linear, oscilando entre valores na ordem de $13dB$, conforme exemplificado na Figura 26 que apresenta o MSE^{local} para o nó $n = 7$.

Figura 23 – Resultado da aplicação do controle *flocking* em cascata com o DEKF: configuração inicial da rede $q(0)$, configuração final $q(t \gg 0)$ e trajetória do líder $q^r(t)$.



Fonte: do autor

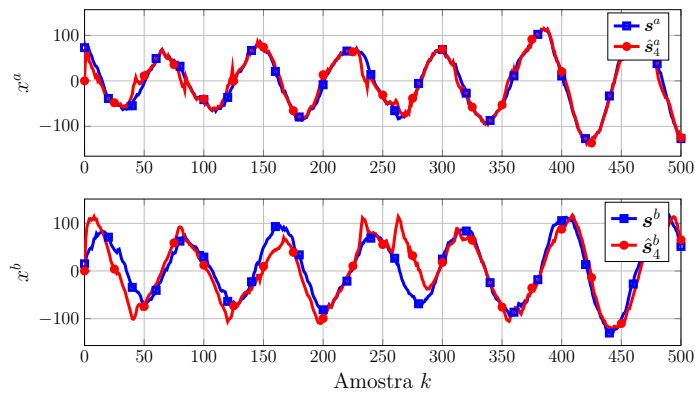
Figura 24 – Comparação entre a posição real do líder (q^a e q^b) e a estimada para o nó $n = 4$ (\hat{q}_4^a e \hat{q}_4^b) através do DEKF.



Fonte: do autor

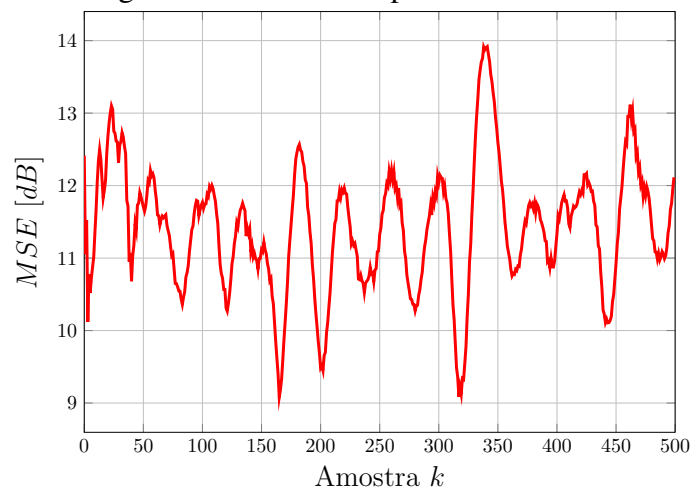
Por fim, as simulações também foram repetidas para o caso onde os nós conheciam precisamente a posição e velocidade do agente líder a cada instante de tempo, possibilitando determinar o erro de trajetória conforme (176). Na Figura 27 é mostrado o erro de trajetória resultante da média das rodadas de simulação. Podemos notar que o erro resultante foi elevado em comparação ao caso linear, também em decorrência do erro de linearização do DEKF.

Figura 25 – Comparação entre a velocidade real do líder (s^a e s^b) e a estimada para o nó $n = 4$ (\hat{s}_4^a e \hat{s}_4^b) através do DEKF.



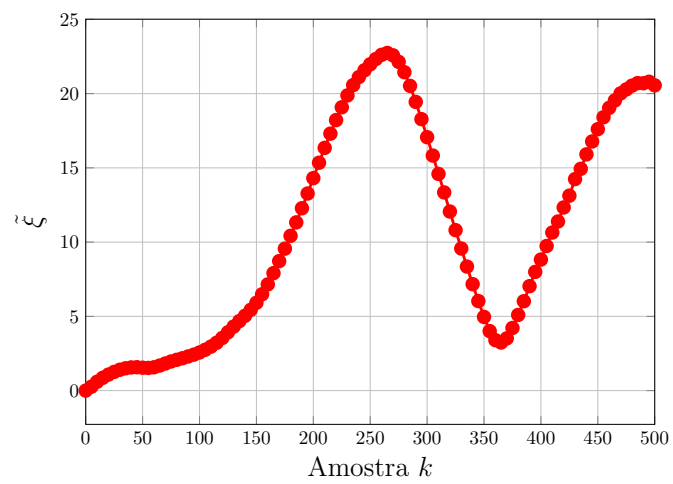
Fonte: do autor

Figura 26 – MSE local para o nó $n = 7$.



Fonte: do autor

Figura 27 – Erro de trajetória (176) resultante para o DEKF.



Fonte: do autor

7 CONCLUSÃO

No trabalho desenvolvido foi estudado o problema de estimação do estado de um sistema dinâmico através de medidas oriundas de uma rede multiagente de sensores. Foi concentrada atenção em técnicas distribuídas para esse problema, sendo detalhadamente estudado o Filtro de Kalman Difuso (DKF). Como contribuição do trabalho, foi proposta a utilização do DKF em cascata com o algoritmo de controle *flocking*.

Nos capítulos iniciais foram abordados fundamentos do problema clássico de estimação de estado de um sistema dinâmico. A partir desse problema clássico, foi apresentada a sua extensão para o caso em que as medidas são obtidas através de uma rede multiagente de sensores. Foram discutidas as diferenças entre as possíveis soluções para esse problema que podem ser classificadas sob dois critérios: a centralização e a cooperação. O primeiro desses critérios distingue as soluções como centralizadas, quando há um único nó responsável por coletar todos os dados da rede e determinar a estimativa para o estado do sistema, e distribuídas, quando cada nó localmente obtém a sua estimativa. Já o critério de cooperação divide as soluções entre cooperativas, quando existe compartilhamento de informação entre os nós, e não cooperativas dispõem exclusivamente de suas medidas para resolver o problema de estimação. Considerando que as soluções que se classificam como distribuídas e cooperativas impõem diversas vantagens na solução de um problema de estimação multiagente, nosso maior interesse ao longo do trabalho residiu nesse tipo de solução.

Após essa discussão preliminar foram apresentados os detalhes do DKF que consiste em um dos principais algoritmos distribuídos e cooperativos de estimação de estado previstos na literatura. O estudo do DKF englobou uma revisão sobre formas equivalentes do algoritmo e análise de desempenho médio e desempenho médio quadrático. Também foram discutidas regras de construção para a matriz de difusão sendo proposta pelo autor uma extensão da Regra de Hastings para o caso multidimensional. Considerando que o DKF é restrito ao caso de sistemas lineares e gaussianos, foi ainda estudada uma adaptação do algoritmo para o caso não linear, o Filtro de Kalman Difuso Estendido.

Em seguida foi estudado como o DKF pode ser utilizado em conjunto com o controle *flocking*, um algoritmo de controle que visa conduzir uma rede móvel de nós para um

comportamento de grupo descrito como *flocking*. Na formulação original do controle *flocking* é necessário que a rede móvel siga a trajetória de um sistema de referência e em geral admite-se que todos os nós conhecem o estado de tal sistema. Foi detalhado como o DKF pode ser aplicado em cascata com esse algoritmo de controle para que cada nó da rede móvel estime a trajetória do sistema de referência.

Por fim, foram apresentadas simulações envolvendo a aplicação do DKF inicialmente considerando sistemas de nós estáticos e em seguida em redes móveis sujeitas ao algoritmo de controle *flocking*. Como trabalhos futuros, destaca-se que a aplicação de técnicas de estimação de estado multiagente em algoritmos de controle é um campo em expansão dentro da área de sistemas de controle. Sendo assim, é interessante explorar a aplicação em outros algoritmos de controle de formação não só do DKF, mas também de outras estratégias distribuídas de estimação de estado.

REFERÊNCIAS

- AGHAJAN, H.; CAVALLARO, A. **Multi-camera networks: principles and applications**. Boston: Academic Press, 2009.
- ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. New York: Courier Corporation, 2012.
- BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. **Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software**. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- BOLLOBÁS, B. **Modern graph theory**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 184.
- BULLO, F.; CORTES, J.; MARTINEZ, S. **Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms**. New Jersey: Princeton University Press, 2009.
- CATTIVELLI, F. S.; LOPES, C. G.; SAYED, A. H. Diffusion recursive least-squares for distributed estimation over adaptive networks. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New Jersey, v. 56, n. 5, p. 1865–1877, 2008.
- CATTIVELLI, F. S.; LOPES, C. G.; SAYED, A. H. Diffusion strategies for distributed Kalman filtering: formulation and performance analysis. **Proc. Cognitive Information Processing**, New Jersey, p. 36–41, 2008.
- CATTIVELLI, F. S.; SAYED, A. H. Diffusion LMS strategies for distributed estimation. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New Jersey, v. 58, n. 3, p. 1035–1048, 2009.
- CATTIVELLI, F. S.; SAYED, A. H. Diffusion strategies for distributed Kalman filtering and smoothing. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New Jersey, v. 55, n. 9, p. 2069–2084, 2010.
- CATTIVELLI, F. S.; SAYED, A. H. Distributed nonlinear Kalman filtering with applications to wireless localization. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON*

ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, 2010. **Proceedings [...]** IEEE, 2010. p. 3522–3525.

CORKE, P. *et al.* Environmental wireless sensor networks. **Proceedings of the IEEE**, New Jersey, v. 98, n. 11, p. 1903–1917, 2010.

DE SOUZA, C. E.; KINNAERT, M.; COUTINHO, D. Consensus-based distributed mean square state estimation. *In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC)*, 2015. **Proceedings [...]** IEEE, 2015. p. 5134–5139.

ESTRIN, D. *et al.* Instrumenting the world with wireless sensor networks. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING*, 2001. **Proceedings [...]** IEEE, 2001. p. 2033–2036.

FAWZI, H.; TABUADA, P.; DIGGAVI, S. Secure estimation and control for cyber-physical systems under adversarial attacks. **IEEE Transactions on Automatic control**, New Jersey, v. 59, n. 6, p. 1454–1467, 2014.

GUSTAFSSON, F. Particle filter theory and practice with positioning applications. **IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine**, New Jersey, v. 25, n. 7, p. 53–82, 2010.

HLINKA, O.; HLAWATSCH, F.; DJURIC, P. M. Distributed particle filtering in agent networks: a survey, classification, and comparison. **IEEE Signal Processing Magazine**, New Jersey, v. 30, n. 1, p. 61–81, 2012.

JOHANSSON, B. *et al.* Subgradient methods and consensus algorithms for solving convex optimization problems. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 47., 2008. **Proceedings [...]** IEEE, 2008. p. 4185–4190.

KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. **Linear estimation**. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 725 p. n. BOOK.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering**, New York, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

KHAN, U. A.; MOURA, J. M. Distributing the Kalman filter for large-scale systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New Jersey, v. 56, n. 10, p. 4919–4935, 2008.

LJUNG, L. System identification. **Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering**, Linkoping, p. 1–19, 1999.

LOPES, C. G.; SAYED, A. H. Diffusion least-mean squares over adaptive networks: formulation and performance analysis. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New Jersey, v. 56, n. 7, p. 3122–3136, 2008.

- LU, Q. *et al.* Cooperative control of mobile sensor networks for environmental monitoring: an event-triggered finite-time control scheme. **IEEE Transactions on Cybernetics**, Ner Jersey, v. 47, n. 12, p. 4134–4147, 2016.
- MARELLI, D. E.; FU, M. Distributed weighted least-squares estimation with fast convergence for large-scale systems. **Automatica**, New York, v. 51, p. 27–39, 2015.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. New York: Academic Press, 1982. 7 p. v. 3.
- OLFATI-SABER, R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New Jersey, v. 51, n. 3, p. 401–420, 2006.
- OLFATI-SABER, R. Distributed Kalman filtering for sensor networks. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 46., 2007. **Proceedings [...]** IEEE, 2007. p. 5492–5498.
- OLFATI-SABER, R.; JALALKAMALI, P. Collaborative target tracking using distributed Kalman filtering on mobile sensor networks. *In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2006. **Proceedings [...]** IEEE, 2006. p. 1100–1105.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. New York: McGraw-Hill Education, 2002.
- PASQUALETTI, F.; CARLI, R.; BULLO, F. A distributed method for state estimation and false data detection in power networks. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SMART GRID COMMUNICATIONS (SMARTGRIDCOMM)*, 2011. **Proceedings [...]** IEEE, 2011. p. 469–474.
- PREDD, J. B.; KULKARNI, S. B.; POOR, H. V. Distributed learning in wireless sensor networks. **IEEE Signal Processing Magazine**, New York, v. 23, n. 4, p. 56–69, 2006.
- SÄRKKÄ, S. **Bayesian filtering and smoothing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. v. 3.
- SAYED, A. H.; LOPES, C. G. Distributed processing over adaptive networks. *In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SIGNAL PROCESSING AND ITS APPLICATIONS*, 9., 2007. **Proceedings [...]** IEEE, 2007. p. 1–3.
- SAYED, A. H. *et al.* Diffusion strategies for adaptation and learning over networks: an examination of distributed strategies and network behavior. **IEEE Signal Processing Magazine**, New York, v. 30, n. 3, p. 155–171, 2013.
- SAYED, A. H. *et al.* Adaptation, learning, and optimization over networks. **Foundations and Trends® in Machine Learning**, Los Angeles, v. 7, n. 4-5, p. 311–801, 2014.

SEMNANI, S. H.; BASIR, O. A. Semi-flocking algorithm for motion control of mobile sensors in large-scale surveillance systems. **IEEE Transactions on Cybernetics**, [S.l.], v. 45, n. 1, p. 129–137, 2014.

SHIMA, T.; RASMUSSEN, S. **UAV cooperative decision and control**: challenges and practical approaches. New York: SIAM, 2009.

UGRINOVSKII, V. Distributed robust filtering with H consensus of estimates. **Automatica**, New York, v. 47, n. 1, p. 1–13, 2011.

VÁSÁRHELYI, G. *et al.* Outdoor flocking and formation flight with autonomous aerial robots. *In*: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 2014. **Proceedings [...]** IEEE, 2014. p. 3866–3873.

XIAO, L.; BOYD, S. Fast linear iterations for distributed averaging. **Systems & Control Letters**, New York, v. 53, n. 1, p. 65–78, 2004.

ZHAO, F.; GUIBAS, L. J.; GUIBAS, L. **Wireless sensor networks**: an information processing approach. Burlington: Morgan Kaufmann, 2004.

APÊNDICE A INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES SOBRE O ALGORITMO DE CONTROLE *FLOCKING*

Seguindo o apresentado em (OLFATI-SABER, 2006), são discutidos detalhes para a construção da função de potencial coletiva $\Phi(q)$ e o gradiente u_n^g resultante. Também é apresentada a regra de construção para a matriz de consenso de velocidade $\bar{A}(q)$. É assumida uma distância desejada entre os nós D e um raio de interação ρ . Ainda é apresentado na Tabela 2 um resumo de todos os parâmetros do algoritmo.

A.1 Função $\Phi(q)$ e u_n^g

Para definir a função $\Phi(q)$ iremos necessitar de uma série de definições preliminares. Primeiro definimos uma função $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^+$:

$$\sigma(z) \triangleq \|z\|_\sigma = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\sqrt{1 + \bar{\sigma} \|z\|^2} - 1 \right]. \quad (182)$$

onde $\bar{\sigma}$ é um parâmetro positivo entre 0 e 1. Também definimos uma função de atração/repulsão $\psi_a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ cujo mínimo global se dá em $\|D\|_\sigma$ e possui um valor constante para $\|\rho\|_\sigma$. Um exemplo de função com essa característica é mostrado na Figura 28.

Uma possibilidade para construir a função $\psi_a(z)$ é como a seguinte integral:

$$\psi_a(z) = \int_{\|D\|_\sigma}^z \phi(s) ds. \quad (183)$$

onde por sua vez a função $\phi(\cdot)$ é definida como:

$$\phi(z) \triangleq \Gamma \left(\frac{z}{\|\rho\|_\sigma} \right) \frac{1}{2} \left[(a+b) \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + (a-b) \right]. \quad (184)$$

sendo a e b são dois parâmetros positivos e a função $\Gamma(\cdot)$ definida em termos do parâmetro h entre 0 e 1 como:

$$\Gamma(z) \triangleq \begin{cases} 1, & 0 < z \leq h, \\ 0.5 \left[1 + \cos \left(\pi \frac{z-h}{1-h} \right) \right], & h < z \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (185)$$

Finalmente, a função $\Phi(q)$ é definida como:

$$\Phi(q) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \psi_a(\|q_n - q_l\|_\sigma). \quad (186)$$

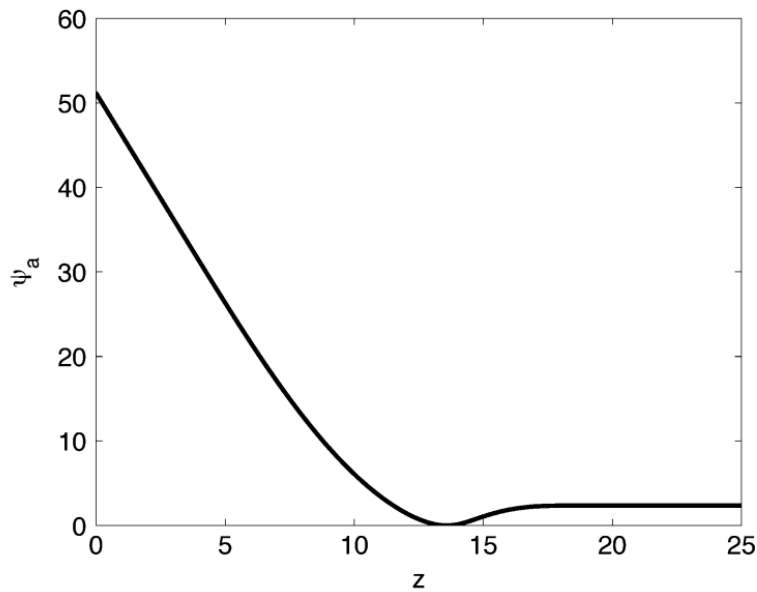
Uma propriedade importante da função $\Phi(q)$ é que ela não apresenta singularidades para configurações q em que dois nós possuem a mesma posição, ou seja $q_n = q_j$.

O termo de gradiente para o nó n resultante de uma função potencial coletiva conforme (186) é então dado por:

$$w_n^g = -\nabla_{q_n} \Psi(q) = \sum_{j \in \mathcal{N}_n} \phi(\|q_j - q_n\|_\sigma) \frac{(q_j - q_n)}{\sqrt{1 + \bar{\sigma} \|q_j - q_n\|^2}}. \quad (187)$$

sendo portanto função somente da posição dos nós dentro da vizinhança \mathcal{N}_n .

Figura 28 – Exemplo de função $\psi_a(z)$.



Fonte: (OLFATI-SABER, 2006)

A.2 Matriz $\bar{A}(q)$

Diversas são as escolhas possíveis para a matriz de consenso $\bar{A}(q)$. Em (OLFATI-SABER, 2006) o autor propõe a utilização da seguinte regra de construção:

$$\bar{a}_{nl}(q) = \begin{cases} \Gamma \left(\frac{\|q_n - q_l\|_\sigma}{\|\rho\|_\sigma} \right), & l \in \mathcal{N}_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (188)$$

A.3 Resumo dos parâmetros da lei de controle *flocking*

Tabela 2 – Resumo dos parâmetros da lei de controle *flocking*

| Parâmetro | Descrição |
|-----------------------|---------------------------------------|
| D | distância desejada entre nós vizinhos |
| ρ | raio de interação entre nós |
| β_1 e β_2 | ganhos da realimentação de navegação |
| $\bar{\sigma}$ | parâmetro da função $\sigma(\cdot)$ |
| a e b | parâmetros da função $\phi(\cdot)$ |
| h | parâmetro da função $\Gamma(\cdot)$ |