UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática

Jéssica Carolini da Silva Laurindo

ESTATÍSTICA NO GEOGEBRA:

uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central

PORTO ALEGRE

2019

Jéssica Carolini da Silva Laurindo

ESTATÍSTICA NO GEOGEBRA:

uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central

Dissertação apresentada à banca de qualificação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática

PORTO ALEGRE

2019

CIP - Catalogação na Publicação

Laurindo, Jéssica Carolini da Silva Laurindo
ESTATÍSTICA NO GEOGEBRA: uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central / Jéssica Carolini da Silva Laurindo Laurindo. -- 2019.
205 f.
Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso Basso.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Educação Estatística. 2. GeoGebra. 3. Abstração Reflexionante. 4. Raciocínio Estatístico. 5. Medidas de Tendência Central. I. Basso, Marcus Vinicius de Azevedo Basso, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Jéssica Carolini da Silva Laurindo

ESTATÍSTICA NO GEOGEBRA:

uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central

Dissertação apresentada à banca de qualificação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

BANCA EXAMINADORA

____

Prof(a). Dr(a). Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

____

Prof(a). Dr(a). Luciana Neves Nunes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

____

Prof(a). Dr(a). Aline Silva De Bona
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Como pesquisadores a primeira lição que aprendemos é que não estamos sozinhos nessa jornada. Eu explico: é que chegar à resposta de uma investigação científica é como trilhar uma estrada cujo caminho desconhecemos. No início não sabemos qual rota traçar, nem mesmo o que iremos encontrar no final. É preciso começar para descobrir! Mas como começa? Um bom início é buscar o auxílio de autores que já trilharam caminhos semelhantes, cujas pesquisas possam nos dar uma direção a seguir. Parece até simples, mas não é. Quanto mais lemos mais dúvidas temos. O caminho é complicado, é verdade. E quem disse que seria fácil? As vezes nos sentimos confusos, perdidos e até erramos a trajetória. Nessas horas entra em cena um personagem chamado orientador, imprescindível nessa caminhada para nos ajudar a recalcular a rota de investigação e chegarmos ao nosso destino. É por isso que digo: não estamos sozinhos. Sempre tem alguém para nos dizer onde estamos e apontar o melhor caminho.

Uma pesquisa acadêmica é assim, feita por uma estrada trilhada por muitos autores, seja por aqueles cujos estudos publicados inspiram o desenvolvimento do trabalho, seja pelos professores que na leitura atenta da nossa escrita nos ajudam a perceber novos horizontes aos quais jamais havíamos imaginado que pudessem existir. Não podemos esquecer, é claro, dos estudantes sujeitos da pesquisa que nos surpreendem a todo instante mostrando que sempre existe uma maneira diferente de pensar e que jamais imaginávamos que seria possível. E por que não citar a nossa família? Sim. Afinal, sem eles não haveria motivação, força para continuar e calma nos momentos de angústia, ansiedade e até choro. Enfim, cada uma dessas pessoas nos agrega e de algum modo influenciam na trajetória do nosso trabalho. E por isso repito: como pesquisadores nunca estamos sozinhos!

Essa pesquisa não foi diferente e contou com ajuda de muitos autores. A todos eles o meu profundo e sincero muito obrigada: à Deus e à família pelo suporte nas horas mais difíceis; aos professores pelas contribuições valiosas; aos estudantes sujeitos da pesquisa pela disposição e interesse. Sem todos vocês nada seria possível!

Por fim, mas não menos importante, agradeço o professor Marcus pelo apoio, motivação e companhia nessa longa caminhada, sempre respeitando meus limites e escolhas. Desde que o conheci, foram muitos aprendizados, os quais vão muito além dessa pesquisa. Agradeço por estender a mão nos momentos em que eu pensei que não seria capaz. Gratidão por tudo hoje e sempre, meu querido orientador, meu querido amigo!

RESUMO

Esta pesquisa tem o objetivo de investigar como a aprendizagem de conceitos estatísticos pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra. Para a realização desse estudo foi tomado como referencial teórico as ideias sobre Abstração Reflexionante e o processo de Tomada de Consciência de Jean Piaget. De acordo com o autor, a construção do conhecimento é resultante da interação entre sujeito e objeto cujo foco está no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa de caráter exploratório, visto que os procedimentos metodológicos consistem na realização de um conjunto de atividades com estudantes do Ensino Médio visando a investigação do processo de aprendizagem dos conceitos estatísticos com o apoio do software. Para a produção dos dados foram utilizados os registros e as falas dos alunos durante a realização das atividades, assim como os vídeos, as fotos, o diário de campo do pesquisador e as entrevistas com os estudantes inspiradas no Método Clínico de Piaget. Em caráter experimental, foi realizado um estudo piloto com quatro estudantes do Ensino Médio cujos resultados serviram de inspiração para reavaliar a proposta metodológica utilizada. No experimento final, foram descritas e analisadas as entrevistas de outros quatro estudantes buscando tecer relações com a base teórica assumida. Entre os resultados produzidos, destaca-se que o "arrastar" dinâmico do GeoGebra proporcionou a abstração e (re)construção dos conceitos estatísticos mediante ao manuseio nos dados expostos no software. Observou-se ainda que os estudantes costumam confundir média, mediana e moda. No entanto, foi no patamar das comparações entre as medidas e das suas ações no GeoGebra que os estudantes tiveram a oportunidade de expor suas ideias, experimentar diferentes distribuições, reorganizar suas estruturas, refletir e abstrair conceitos.

Palavras-chave:

Educação Estatística. GeoGebra. Abstração Reflexionante. Raciocínio Estatístico. Medidas de Tendência Central.

ABSTRACT

This research aims to investigate how the learning of statistical concepts can be enhanced in the GeoGebra software environment. For the accomplishment of this study was taken as theoretical reference the ideas on Reflecting Abstraction and the process of Taking of Conscience of Jean Piaget. According to the author, the construction of knowledge is the result of the interaction between subject and object whose focus is on the learning process. From this perspective, this research is characterized as exploratory qualitative, since the methodological procedures consist of performing a set of activities with high school students to investigate the learning process of statistical concepts with the support of the software. For data production, the students' records and speeches were used during the activities, as well as the videos, photos, the researcher's field diary and the interviews with the students inspired by the Piaget Clinical Method. On an experimental basis, a pilot study was conducted with four high school students whose results served as inspiration to reassess the methodological proposal used. In the final experiment, the interviews of four other students were described and analyzed seeking to weave relationships with the assumed theoretical basis. Among the results produced, it is noteworthy that the dynamic dragging of GeoGebra provided the abstraction and (re) construction of statistical concepts by handling the data exposed in the software. It was also observed that students often confuse average, medium and mode. However, it was at the level of comparisons between measurements and their actions in GeoGebra that students had the opportunity to express their ideas, experiment with different distributions, reorganize their structures, reflect and abstract concepts.

Key words:

Statistical Education. GeoGebra. Reflective Abstraction. Statistical Reasoning. Measures of Central tendency.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ABE	Associação Brasileira de Estatística
ASA	American Statistical Association
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAS	Cálculo Algébrico Simbólico
CIEM	Congresso Internacional de Ensino de Matemática
EBRAPEM	Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
EDUEST	Grupo de Pesquisa de Educação Estatística
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
GAISE	Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education
GPEE	Grupo de Pesquisa em Educação Estatística
GREF	Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental
IASE	International Association for Statistical Education
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
NCMT	National Council of Teachers of Mathematics
NTIC	Novas Tecnologias da Informação e Comunicação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEAMAT	Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

Capítulo 1

DOS CAMINHOS PERCORRIDOS AO DESPERTAR DO PROBLEMA

> Não podemos escapar dos dados, assim como não podemos evitar o uso de palavras. Tal como palavras os dados não se interpretam a si mesmos, mas devem ser lidos com entendimento. Da mesma maneira que um escritor pode dispor as palavras em argumentos convincentes ou frases sem sentido, assim também os dados podem ser convincentes, enganosos ou simplesmente inócuos. A instrução numérica, a capacidade de acompanhar e compreender argumentos baseados em dados, é importante para qualquer um de nós. O estudo da Estatística é parte essencial de uma formação sólida.
>
> (MOORE, 2005, p.4)

O avanço e a expansão das tecnologias digitais provocaram uma nova leitura do mundo e a necessidade de novas exigências e novas competências para a formação do cidadão da sociedade moderna tais como a criatividade e a colaboratividade. Marcando mudanças e transformações em diversos campos do conhecimento, as novas tecnologias impulsionaram o desenvolvimento da ciência permitindo e amplificando a realização de experimentos, de simulações, bem como o acesso e o armazenamento de uma vasta quantidade de informações que podem ser divulgadas e compartilhadas em tempo real. A Estatística, por sua vez, representa um componente importante nesse processo por oferecer modelos que permitem resumir, representar e fazer inferências do conjunto de dados[1] divulgados nas pesquisas e nas mídias.

Diante desse cenário, a Estatística tem sido um tema emergente nos currículos escolares, visto que se faz cada vez mais necessário formar cidadãos críticos que sejam capazes não apenas de ler e interpretar as informações representadas por gráficos e tabelas, mas também de fazer previsões e tomar decisões para atender as necessidades do novo século. Nessa direção, o letramento estatístico configura-se como uma necessidade sendo tema de investigação de diversos pesquisadores do mundo – Lopes (1998, 2003); Batanero e Godino (2001); Gal (2002); Moore (1988, 2005), Garfield (1998; 2002), Delmas (2002) e Chance *et al.* (2007), Burril

---

[1] Compreendemos que a palavra dado apresenta múltiplos significados. Portanto, nesse texto, quando o contexto dessa pesquisa estiver relacionado ao sentido estatístico, será expressa apenas a palavra "dado" e afins. Por outro lado, quando o contexto dessa pesquisa estiver relacionado à produção de dados do pesquisador, será utilizado o termo "produção de dados" e afins.

(2018), Wild e Pffannkuch (1999), entre outros – e um dos objetivos previstos em documentos oficiais que preveem as aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas pelos estudantes.

As novas competências e habilidades do mundo moderno, provocadas pelas novas tecnologias, associadas à formação do cidadão crítico diante dos fatos que o rodeiam vão ao encontro aos meus ideais enquanto educadora. Desse modo, encontro na Matemática e na Estatística um dos meios possíveis para atingir os meus objetivos. Sob essa perspectiva, busco práticas de ensino que associem conceitos matemáticos do currículo escolar à realidade de vida dos alunos que leciono, de modo que a Matemática faça sentido para eles e que também seja um instrumento para desenvolver a capacidade de pensar através de problemas que envolvam a investigação, estimulando o questionamento e a criatividade.

Nesse contexto, as informações numéricas presentes em pesquisas científicas, pesquisas de opinião, notícias de jornais e outros meios de comunicação que estejam relacionadas a algum tema de interesse do aluno e que façam parte da sua realidade representam um material amplo e fértil para desenvolver as atividades matemáticas que proponho. Desse modo, tabelas, gráficos, pictogramas, infográficos são representações recorrentes e que permitem desenvolver diversos conceitos como razão, proporção, porcentagem, regra de três, média, moda, desvio padrão, escala, fazer estimativas, entre outros.

Essas atividades me fizeram perceber que a leitura e interpretação das informações numéricas presentes nessas diferentes representações constituem uma habilidade a ser desenvolvida pelos alunos, visto que a maioria deles chega nos anos finais da escolarização sem saber ler e interpretar corretamente os valores observados, apesar de realizar os cálculos corretamente. Sendo assim, percebi que trabalhar com as ideias estatísticas, portanto, era algo emergente. No entanto, como professora de Matemática, não me sentia confortável em aprofundar os conceitos estatísticos promovendo discussões mais intensas com os alunos por não ter um amplo conhecimento desta ciência nem um aporte pedagógico que me orientasse a trabalhar com ela na escola. Porém, esse obstáculo pode ser superado através de uma disciplina intitulada “Estatística Aplicada” cursada no Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, cujo objetivo geral era apresentar algumas ideias estatísticas sob um enfoque didático para os professores que lecionavam na Escola Básica. Esta disciplina me proporcionou um novo olhar sobre os conceitos estatísticos e como podemos desenvolvê-los na escola.

Paralelo a essas experiências, o uso das mídias digitais na educação também constitui um tema que considero relevante e pertinente no atual século em que vivemos, compondo a minha linha de pesquisa desde a graduação. Desde então, debruço-me nos estudos sobre o tema e busco desenvolver artefatos com softwares educacionais para o ensino de Matemática, especialmente o software GeoGebra[2], o qual me identifico. Considero que os softwares como o GeoGebra permitem construir artefatos que são capazes de externar ideias matemáticas, seja para corroborar algo que achamos que foi compreendido, seja para esboçar e desenvolver alguma ideia mal construída e percorrer novos caminhos. Desse modo, utilizo o GeoGebra para tal fim, particularmente e com os estudantes.

O software GeoGebra possui diversificados recursos de Geometria, de Álgebra, assim como de Estatística e Probabilidade. Portanto, não demorou muito para unir os meus interesses e explorar os comandos do pacote de Estatística oferecidos pelo software. Nessa exploração, percebo alguns aspectos sobre conceitos estatísticos que não podem ser constatados sob a perspectiva estática do lápis e papel e que o caráter dinâmico do GeoGebra pode ampliar o significado de alguns conceitos. Desse modo, minha constatação inicial foi de que o software pode ter grande potencial em oferecer uma nova forma de pensar sobre os conceitos estatísticos pelos alunos e ampliar o conjunto de problemas relativos a esse tema. Nasce então uma questão a ser investigada: **como ocorre o processo de construção de conhecimento dos conceitos estatísticos por estudantes de Ensino Médio a partir das suas ações realizadas sobre o software GeoGebra?**

Esta pergunta será tomada como ponto de partida nessa investigação, na busca por compreender o que de novo os estudantes podem aprender em Estatística com o software.

É importante destacar que os sujeitos participantes dessa pesquisa compõem um grupo de oito estudantes pertencentes a duas escolas públicas do Ensino Médio, etapa na qual os conceitos de medidas de tendência central costumam ser aprofundados.

Salientamos ainda que existem diversos conceitos estatísticos e investigar a aprendizagem de todos eles, não é o objetivo dessa pesquisa. Desse modo, nos concentraremos apenas nos conceitos relativos às medidas de tendência central (média, mediana, moda). Sendo assim, esta pesquisa tem como objetivo geral investigar como a aprendizagem dos conceitos de medidas de tendência central pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra.

Portanto, para contemplar este propósito, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Investigar o processo de abstração reflexionante dos estudantes frente à leitura, interpretação e ação sobre o conjunto de dados, mediados pelas múltiplas representações disponibilizadas pelo software.

[2] Software de Matemática dinâmica que será apresentado na seção 3.2 do capítulo 3.

- Identificar o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes sobre as medidas de tendência central quando agem sobre o GeoGebra.

Como objetivos operacionais foram traçadas as seguintes ações de pesquisa:

- Explorar o pacote de Estatística do software GeoGebra identificando elementos que possam contribuir no processo de aprendizagem dos estudantes;
- Utilizar o software GeoGebra como ambiente de interação para a construção de conceitos estatísticos referentes às medidas de tendência central por meio de atividades que propiciem a investigação, a reflexão e a abstração desses conceitos.

Tendo em vista os objetivos que norteiam a investigação, este trabalho está estruturado em sete capítulos que buscam contar a trajetória desta pesquisa bem como alguns resultados alcançados. Sendo assim, no segundo capítulo, discorre-se sobre os principais aspectos sobre Educação Estatística, buscando fundamentação teórica nas ideias dos principais autores da área; um recorte sobre o que propõem os documentos oficiais sobre o tema nos currículos escolares; e, por fim, um panorama das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de Estatística no Brasil e também sobre o raciocínio dos estudantes frente aos conceitos de média, mediana e moda.

O terceiro capítulo descreve a importância e relevância que as tecnologias e os softwares educacionais têm sobre o ensino e a aprendizagem de Estatística, em especial, o software GeoGebra. No mesmo capítulo, apresenta-se um recorte sobre os estudos correlatos ao tema de pesquisa buscando aproximações e distanciamentos assim como suporte e inspiração para o delineamento da investigação.

No quarto capítulo, apresentam-se os fundamentos dos estudos de Jean Piaget sobre o processo de Abstração Reflexionante (1995) e o processo de Tomada de Consciência (1977), que serão tomados como referencial teórico para compreender quais as abstrações e reflexões realizadas quando o estudante constrói e manipula os artefatos envolvendo ideias estatísticas no GeoGebra. Na mesma seção, apresenta-se o Método Clínico de Piaget (2002) que ajudará a fundamentar a metodologia deste trabalho, cujas entrevistas clínicas servirão de inspiração para acompanhar os percursos dos pensamentos dos sujeitos investigados quando agem sobre o software.

No quinto capítulo, apresentam-se os aspectos metodológicos que embasaram a produção e análise dos dados, assim como a descrição do estudo piloto, relatando as primeiras experiências que serviram para reavaliar as propostas metodológicas traçadas. Ainda neste capítulo, apresentam-se a sequência de atividades reelaborada a partir da análise do estudo piloto, assim como os sujeitos participantes da pesquisa.

No sexto capítulo, apresenta-se a descrição detalhada das entrevistas aplicadas com quatro estudantes de uma escola pública de Ensino Médio cujos dados produzidos foram analisados, buscando tecer relações mediante a triangulação entre o referencial teórico de Jean Piaget, a metodologia de pesquisa utilizada e as pesquisas sobre Educação Estatística do capítulo 2 e tecnologias digitais do capítulo 3.

Por fim, no sétimo capítulo, são apresentadas as considerações finais da pesquisa assim como possíveis desmembramentos para estudos futuros.

Capítulo 2

PANORAMA DE PESQUISA: UM OLHAR PARA A EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico.
(FISCHBEIN, 1975, *apud* BATANERO; GODINO, 2005)

Nos últimos anos a Estatística tem se incorporado no currículo da Matemática da Escola Básica e tem desempenhado um papel fundamental em uma sociedade onde dados, variação e o acaso são ideias que se fazem presentes cotidianamente na vida moderna (MOORE, 1998). Segundo Batanero e Godino, a inclusão da Estatística no currículo escolar deve-se não apenas ao seu caráter instrumental, mas "pelo valor que o desenvolvimento do raciocínio estatístico tem em uma sociedade caracterizada pela disponibilidade de informações e a necessidade de tomada de decisão em um ambiente de incerteza" (2005, p.01). Portanto, é emergente que as escolas propiciem uma Educação Estatística que capacite o estudante não somente a compreender, mas também a participar da sociedade da informação.

Este capítulo, portanto, apresenta um panorama acerca das principais ideias e objetivos que envolvem o tema Educação Estatística na perspectiva de diversos autores, assim como as metas e os domínios traçados que desejamos ser alcançados por todos estudantes ao final de escolarização. Além disso, serão apresentados um cenário a respeito do ensino de Estatística na Educação Básica assim como um breve recorte sobre as pesquisas que discorrem sobre o tema no Brasil.

2.1 Educação Estatística: objetivos, metas e domínios

A Educação Estatística tem como objeto de estudo as questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos sobre Estatística, Combinatória e Probabilidade, em todos os níveis de ensino. De modo mais específico, os estudos sobre Educação Estatística buscam compreender a forma como as pessoas aprendem esses conceitos "envolvendo os aspectos cognitivos e afetivos e o desenvolvimento de abordagens didáticas e de materiais de ensino." (CAZORLA et.al, 2017, p.15).

Gal e Garfield (1997) compreendem que um dos objetivos da Educação Estatística envolve tornar os alunos cidadãos capazes de "compreender e lidar com a incerteza, variabilidade e informação estatística no mundo [...] assim como contribuir ou participar da produção, interpretação e comunicação de dados referentes a problemas que encontram em sua vida profissional." (1997, p.3, tradução nossa). Desse modo, espera-se que uma pessoa alfabetizada estatisticamente seja capaz de não somente ler e interpretar os dados que o cercam, mas também ser capaz de fazer previsões e tomar decisões a partir desses dados. Para alcançar esses objetivos podem ser necessários vários anos de estudo se estendendo por diversos níveis de escolaridade. Portanto, para atingir esse nível amplo de compreensão sobre as ideias estatísticas Gal e Garfield (1997, 1999) propõem metas que devem ser traçadas ao desenvolver o ensino de Estatística. O quadro 1 a seguir apresenta essas metas e alguns exemplos de habilidades a serem desenvolvidas em cada uma delas.

Quadro 1 - Metas traçadas para o ensino de Estatística.

Metas	**Exemplos de habilidades**[3]
Compreender o propósito e a lógica das investigações estatísticas	Reconhecer a existência da variação, a necessidade de descrever populações através da recolha de dados, a necessidade de reduzir dados brutos observando o comportamento dos dados através de representações gráficas e tabulares, etc.
Compreender o processo de investigações estatísticas	Formular uma pergunta, coletar e organizar os dados, analisar e interpretar os dados e refletir sobre conclusões e possíveis implicações dos resultados;
Desenvolver habilidades que podem ser usadas no processo de investigação estatística	Organizar os dados e calcular os índices necessários como média, mediana, desvio padrão, etc. Construir e exibir tabelas, gráficos.
Compreender as relações matemáticas	Explicar como a média é influenciada pelos valores extremos e um conjunto de dados, etc.

[3] Consideramos o termo "habilidade" no sentido atribuído por Philippe Perrenoud (2008), ou seja, as habilidades são representadas pelas ações em si, ou seja, pelas ações determinadas pelas competências de forma concreta (como escovar o cabelo, pintar, escrever, montar e desmontar, tocar instrumentos musicais etc.)

Entender a probabilidade e chance	Compreender conceitos e palavras relacionadas ao acaso, à incerteza e à probabilidade reconhecendo que essa última também é uma medida de incerteza, desenvolver modelos e usá-los para simular eventos, etc.
Desenvolver habilidades interpretativas e letramento estatístico	Interpretar os resultados propondo questões, reflexões e críticas sobre a interpretação dos resultados.
Desenvolver a capacidade de comunicar-se estatisticamente	Usar a terminologia estatística e probabilística adequadamente, transmitir resultados de forma convincente e ser capaz de construir argumentos apropriados a partir dos dados ou observações.

Fonte: Síntese da autora a partir das metas traçadas por Gal e Garfield (1999).

Concordamos com o posicionamento de Campos, Wodewotzki, Jacobini (2011) ao afirmar que não há uma receita pronta para alcançar essas metas, mas existem algumas estratégias que podem facilitar o seu cumprimento em sala de aula como, por exemplo: concentrar o ensino de Estatística no processo e não no produto final, dando ênfase à análise e à interpretação dos dados e não apenas nos cálculos e nas técnicas, incentivando os alunos a argumentar, interpretar e analisar os resultados. Utilizar as tecnologias para a realização de simulações e experimentos abrindo espaço para a interpretação dos resultados e tomadas de decisões. Propiciar o trabalho com projetos e outras ações que ofereçam ao estudante a possibilidade de vivenciar todas as etapas de uma pesquisa em Estatística.

Alcançar as metas traçadas por Gal e Garfield (1997,1999) no campo do ensino e da aprendizagem em Estatística pressupõe o desenvolvimento de três domínios: o letramento, o raciocínio e o pensamento estatístico. Segundo Campos, Wodewotzki, Jacobini (2011), em consonância com as ideias de autores como Garfield (1998), Rumsey (2002), Chance (2002), Delmas (2002), esses domínios podem ser compreendidos resumidamente da seguinte forma:

> o letramento estatístico pode ser visto como o entendimento e a interpretação da informação estatística apresentada, o raciocínio estatístico apresenta a habilidade de trabalhar com as ferramentas e os conceitos aprendidos e o pensamento estatístico leva a uma compreensão global da dimensão do problema, permitindo ao aluno questionar espontaneamente a realidade observada por meio da Estatística. (CAMPOS, WODEWOTZKI, JACOBINI, 2011, p.28)

Delmas (2002) considera uma perspectiva diferente para que se possa distinguir os objetivos do letramento, do raciocínio e do pensamento estatístico. Ele propõe uma lista de tarefas com palavras que podem ajudar a compreender melhor as diferenças entre os três domínios, conforme exposto no quadro 2.

Quadro 2 - Tarefas que podem distinguir os três domínios instrucionais.

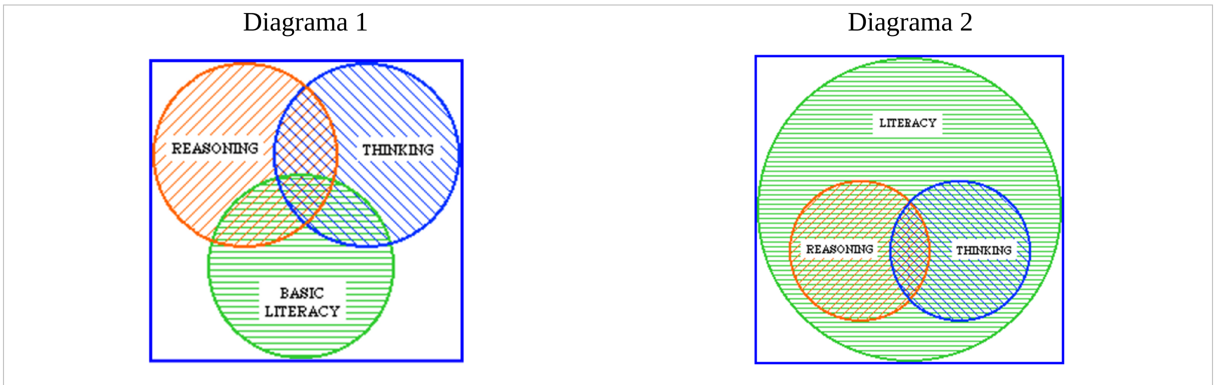
Letramento	**Raciocínio**	**Pensamento**
Identificar Descrever Reformular a frase Traduzir Interpretar Ler	Por quê? Como? Explicar (o processo)	Aplicar Críticar Avaliar Generalizar

Fonte: DELMAS, 2002, p.6.

Segundo o autor, o que nos move de um domínio para outro não é o conteúdo, mas o que é solicitado para o aluno fazer em relação àquele conteúdo, ou seja, é a natureza de uma tarefa que determina qual domínio é avaliado. Portanto, se o objetivo é desenvolver o letramento dos alunos, então o professor poderá propor tarefas que solicitem a identificação de exemplos sobre algum conceito, que descrevam gráficos ou que interpretem resultados estatísticos, por exemplo. Se, ao invés disso, o objetivo é desenvolver o raciocínio estatístico, então o professor poderá propor tarefas que solicitem a explicação do porquê ou como os resultados foram produzidos. Ou seja, o professor poderá propor, por exemplo, que o aluno explique o motivo da média ser considerada o ponto de equilíbrio dos dados ou porque ela é sensível a valores extremos. O pensamento estatístico, por sua vez, é diferente dos outros domínios, visto que desafia o estudante a aplicar seus conhecimentos em Estatística em problemas do mundo real, seja para criticar, avaliar, estabelecer conclusões ou para fazer generalizações do conhecimento obtido em sala de aula para situações novas (DELMAS, 2002).

No entanto, as distinções entre esses domínios não são claras nem fáceis de serem percebidas devido à sobreposição de ideias existentes entre eles. Delmas (2002) apresenta dois possíveis modos de interpretar as sobreposições presentes entre o letramento, o raciocínio e o pensamento estatístico através de dois diagramas, conforme a figura 1:

Figura 1 - Relações entre letramento, raciocínio e pensamento estatístico.



Fonte: Delmas (2002)

No primeiro diagrama o letramento estatístico é compreendido como o "desenvolvimento de habilidades básicas e de conhecimento que são necessários para desenvolver o raciocínio estatístico e pensamento" (DELMAS, 2002). Neste modelo, cada domínio é independente dos demais, ao mesmo tempo em que há sobreposições parciais entre dois e três domínios. Ou seja, é possível realizar atividades que proponham o desenvolvimento de cada domínio de forma independente ou que desenvolvam os três domínios ao mesmo tempo. Em contrapartida, de acordo a perspectiva do segundo diagrama, o raciocínio e o pensamento estatístico são compreendidos como submetas para o letramento estatístico, não havendo conteúdos independentes do letramento. Ou seja, pressupõe-se que uma pessoa letrada estatisticamente já tem o raciocínio e o pensamento desenvolvidos. No entanto, essa concepção implica em "exigir inúmeras competências educacionais dentro e fora da sala de aula" (DELMAS, 2002, p. 4) e, portanto, é mais difícil de ser alcançada.

O foco dessa pesquisa situa-se no domínio do raciocínio estatístico, visto que o nosso olhar está centrado na aprendizagem e no desenvolvimento de conceitos e ideias. Por isso direcionamos nossa análise nas ideias sobre o raciocínio estatístico. Segundo Garfield (2002, p.1) "o raciocínio estatístico pode ser definido como a forma como as pessoas raciocinam com ideias estatísticas e fazem sentido à informação estatística". Para o autor, isso envolve saber "fazer interpretações baseadas em conjuntos de dados, representações gráficas e resumos estatísticos" (2002, p.1).

Gal e Garfield (1999) propõem alguns tipos de raciocínio estatístico que são resumidamente apresentados no quadro 3 a seguir:

Quadro 3 - Tipos de raciocínio estatístico.

Tipo de Raciocínio	**Exemplos**
Raciocínio sobre os dados	Categorização dos dados em qualitativos ou quantitativos; discretos ou contínuos; Entender que cada variável leva a um tipo de gráfico e medida estatística.
Raciocínio sobre representações dos dados	Ler e interpretar gráficos; identificar qual tipo de gráfico é apropriado para representar o conjunto de dados observados; identificar e reconhecer a distribuição dos dados no gráfico observando medidas de centro e variabilidade.

Raciocínio sobre as medidas estatísticas	Identificar quais são as medidas que melhor resumem e representam o conjunto de dados; Compreender o significado das medidas de posição e variabilidade em relação ao conjunto de dados.
Raciocínio sobre a incerteza	Compreender as ideias de aleatoriedade, chance e probabilidade para fazer julgamentos sobre eventos. Usar métodos apropriados para determinar a probabilidade de diferentes eventos.
Raciocínio sobre amostras	Compreender a relação entre amostras e população identificando possíveis inferências com bases nas amostras. Identificar que amostras grandes e bem escolhidas representarão as populações com mais precisão.
Raciocínio sobre associação	Saber julgar a interpretar uma relação entre duas variáveis em uma tabela de dupla entrada ou em gráficos de dispersão. Identificar que a forte correlação entre variáveis não significa necessariamente que uma causa a outra.

Fonte: Síntese da autora a partir das definições apresentadas por Garfield e Gal (1999).

Segundo Campos, Wodewotzki, Jacobini (2011, p.21) “se os professores estiverem atentos ao tipo de raciocínio que precisam reforçar em seus estudantes, podem promover atividades para ajudar a desenvolvê-los”. Portando, nesta pesquisa, serão realizadas atividades que buscam desenvolver o raciocínio sobre as medidas estatísticas através da interação dos estudantes com os recursos do GeoGebra, buscando apresentar propriedades de alguns conceitos que não seriam possíveis de serem observadas apenas com o lápis e papel.

Quando investigamos o raciocínio dos estudantes sobre as medidas estatísticas estamos interessados em observar se eles são capazes não apenas de calcular a média, a mediana ou a moda, por exemplo, mas identificar qual medida é mais representativa para o conjunto de dados observado e se eles têm uma compreensão clara dos motivos que os levaram à tomada de tal decisão. Nesse contexto, tarefas e atividades que direcionam apenas a respostas do tipo “certo ou errado”, “sim ou não”, “calcule”, pouco refletem o nível de raciocínio do estudante não sendo possível identificar os processos que o levaram a interpretar ou construir argumentos. Portanto, é necessário que o professor proponha atividades que estimulem práticas que o levem a pensar em como e por que determinado conceito foi utilizado no contexto que se está analisando. Assim, o professor terá condições de identificar o nível do raciocínio do aluno e a partir de então elaborar uma proposta para superar esse nível o levando a outros patamares.

Acreditamos que as tecnologias digitais podem potencializar esse processo elevando o nível de raciocínio estatístico dos estudantes tendo em vista os recursos que ela dispõe.

Para identificar tais níveis, Garfield (2002) propõe um modelo que resumidamente é apresentado no quadro 4 a seguir:

Quadro 4 - Modelo de raciocínio estatístico.

Níveis de Raciocínio	**Característica**
Nível 1 – Raciocínio Idiossincrático	Quando o aluno reconhece algumas palavras e símbolos e usa-os sem compreender totalmente, ou incorretamente, podendo misturar informações.
Nível 2 – Raciocínio Verbal	Quando o estudante tem uma compreensão verbal dos conceitos, mas não é capaz de aplicá-los ao comportamento do mundo real.
Nível 3 – Raciocínio Transitório	Quando o estudante é capaz de aplicar uma ou duas dimensões do processo estatístico, mas não é capaz de integrar totalmente essas dimensões.
Nível 4 – Raciocínio Processual	Quando o aluno é capaz de identificar corretamente as dimensões do processo estatístico, mas não consegue integrá-los totalmente não compreendendo o processo por completo.
Nível 5 – Raciocínio de processo integrado	Quando o aluno compreende completamente o processo estatístico, coordenando regras e comportamento, podendo explicar o processo com suas próprias palavras.

Fonte: Síntese da autora a partir das definições de Garfield (2002).

Os níveis elencados por Garfield (2002) nos ajudarão a avaliar o raciocínio dos alunos e, também, a elaborar novas atividades no GeoGebra que propiciarão o desenvolvimento de ideias e conceitos apresentados pelos estudantes sobre a Estatística proporcionando a passagem para níveis de raciocínio mais elevados.

Porém, identificar o raciocínio estatístico dos alunos pressupõe a compreensão ampla do pesquisador acerca das especificidades sobre os modos de pensar em Estatística e como ela se apresenta no cenário educacional, sobretudo nas escolas. Para entender o contexto educacional em que a Estatística está inserida, assim como os desafios e as metas que se apresentam, discorremos, na próxima seção, um breve recorte sobre os principais aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem de Estatística na Educação Básica no contexto atual.

2.2 O cenário do ensino de Estatística na Educação Básica

Apesar da Estatística ser uma ciência matemática, ela não se configura como um ramo da Matemática e, portanto, apresenta modos de pensar e métodos específicos em sua teoria (GAL, GARFILD, 1997). Na Estatística “os dados não são apenas números, são números com um contexto” (COOB, MOORE, 1997, p.801). A ênfase no contexto faz salientar diferenças significativas entre o pensamento matemático e o pensamento estatístico. No primeiro, prevalecem os cálculos exatos e determinísticos, o segundo, por sua vez, envolve situações de aproximação, aleatoriedade e estimação. Desse modo, muitos problemas estatísticos não apresentam uma única solução. A Matemática, por sua vez, é utilizada como uma espécie de “ferramenta” para resolver problemas estatísticos. No entanto, Gal e Garfield (1997) argumentam que a aplicação precisa dos cálculos e execução de procedimentos estão sendo substituídos pelos dispositivos tecnológicos e softwares cada vez mais sofisticados.

Ainda que haja diferenças salientes entre os modos de pensar dessas ciências, na Escola Básica a Estatística representa um componente do currículo da disciplina de Matemática e, portanto, está sob a incumbência dos professores de Matemática. Por apresentar características diferentes em seus métodos, o ensino de Estatística torna-se um desafio para esses professores, visto que muitos não se sentem preparados para desenvolver esses conceitos com os alunos, alegando não ter domínio do assunto (BAYER et at., 2006; SANTOS, 2005). Uma das justificativas para esse fato deve-se à ausência ou baixa carga horária da disciplina de Estatística da maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática. Os livros didáticos, por sua vez, tornam-se a principal fonte de referência para esses professores.

Na pesquisa de Bayer et al. (2006), por exemplo, 73,8% dos professores entrevistados responderam que utilizaram os livros de Matemática para Ensino Fundamental e Médio como suporte para suas aulas. O resultado disso é o estudo de Estatística nas escolas centrado apenas nos cálculos e nas fórmulas e não em conceitos, predominando atividades sobre a leitura e construção de gráficos, tabelas e o cálculo de medidas de posição e dispersão sem convidar o estudante a refletir criticamente sobre as medidas e as representações encontradas.

Para Lopes (2008), a escola tem função de educar o estudante para o exercício da cidadania desenvolvendo o pensamento crítico e reflexivo do indivíduo e a Estatística pode desempenhar uma função importante nesse processo. Porém, a autora acrescenta que desenvolver apenas a parte da Estatística descritiva não ajudará os estudantes a desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico. Ou seja, a Educação Estatística deve transcender a coleta e organização de dados ou mesmo a compreensão das porcentagens expostas em índices estatísticos. Para Lopes (2008, p.60), as atividades estatísticas devem partir sempre da problematização, com vistas a formar o estudante para que ele saiba "analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade".

Na busca por contemplar esses objetivos, surgem iniciativas tais como o IASE (*International Association for Statistical Education*) e a ASA (*American Statistical Association*), compostas por pesquisadores de diversas partes do mundo, cujo objetivo é fomentar o debate e a pesquisa com vistas à investigação e à criação de estratégias e ações sobre o ensinar e o aprender Estatística em diversos níveis. Entre os documentos resultantes dessas ações, destaca-se o relatório GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) publicado pela ASA em 2005, com vistas a completar as orientações do NCMT (*National Council of Teachers of Mathematics*), descrevendo recomendações sobre o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de Estatística na escola.

Segundo o relatório GAISE, um dos principais objetivos da Educação Estatística é desenvolver o pensamento estatístico tendo como foco principal fazer o aluno saber lidar com a compreensão, a explicação e a quantificação da variabilidade dos dados. A onipresença da variabilidade é, segundo este documento, o principal fator que separa a Estatística da Matemática. Desse modo, os programas de ensino de análise de dados e Probabilidade na educação básica devem permitir:

> [...] formular perguntas que possam ser abordadas com dados e coletar, organizar e exibir dados para respondê-los; selecionar e usar métodos estatísticos apropriados para analisar dados; desenvolver e avaliar inferências e previsões que são baseadas em dados; e entender e aplicar os conceitos básicos de probabilidade. (FRANKILIN et al., 2007, p.5)

Assim, a Educação Estatística deve ser vista como um processo em desenvolvimento cuja estrutura de conceitos deve organizar-se em um modelo bidimensional. Segundo esse modelo, o letramento estatístico não ocorre de acordo com a idade dos alunos, mas sim através de três níveis de desenvolvimento (A, B e C). Ou seja, um estudante que inicia seus estudos em Estatística no Ensino Médio deve começar pelos conceitos do nível A e ir avançando progressivamente. Cada nível organiza-se através dos componentes da resolução de problemas devendo assim contemplar todas as suas etapas, ou seja, formulação de perguntas, coleta de dados, organização de dados, interpretação dos resultados. (FRANKILIN et al., 2007)

No Brasil, as recomendações presentes em pesquisas e documentos oficiais sobre Educação Estatística apontam para a mesma direção. A Associação Brasileira de Estatística

(ABE), por exemplo, tem manifestado sua preocupação sobre a Educação Estatística nas escolas, e propõe algumas orientações sobre a inclusão de conteúdos sobre Probabilidade e Estatística no currículo escolar. Segundo a ABE, os conceitos estatísticos devem ser apresentados em diferentes níveis de aprofundamento seguindo, portanto, uma metodologia espiral de aprendizagem com ênfase no desenvolvimento de projetos. O uso de ferramentas computacionais, aplicativos e materiais didáticos que auxiliem os professores devem ser introduzidos nas propostas didáticas sempre que possível. Do mesmo modo, as recomendações presentes no Relatório GAISE, experiências no Brasil e outras iniciativas voltadas ao ensino de Estatística, também podem ser seguidas para o desenvolvimento desse trabalho (LOUZADA et al, 2015).

Oficialmente os conceitos de Estatística foram sugeridos no âmbito escolar no Ensino Fundamental no bloco denominado tratamento de informação, através dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997, e mais tarde no Ensino Médio em 1999. No entanto, estes documentos apresentam algumas fragilidades em relação à abordagem desses conceitos, visto que a diferença entre o pensamento Matemático e Estatístico não está evidenciada provocando um estudo com ênfase em cálculos e aplicação de fórmulas como muitas vezes tem se apresentado em livros didáticos, por exemplo.

Recentemente, essas propostas curriculares foram reavaliadas para a elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), os conceitos estatísticos fazem parte do tópico “Estatística e Probabilidade” compondo assim uma das cinco unidades temáticas da Matemática a serem desenvolvidas nos segmentos da Escola Básica, percorrendo todos os níveis do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Além disso, a abordagem de conceitos estatísticos deve ser apoiada em situações-problema da vida cotidiana, ciência e tecnologia envolvendo a elaboração, a coleta e a organização de dados por meio de uma pesquisa de interesse dos alunos buscando desenvolver habilidades para:

> [...] coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos. (BRASIL, 2017, p.230).

Para contemplar esses aspectos, recomenda-se uma abordagem didática incluindo consultas em páginas de institutos de pesquisas como Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), assim como o uso das tecnologias – como calculadoras e planilhas eletrônicas – para auxiliar na construção de gráficos e na realização de cálculos. No estudo de probabilidade é recomendado promover atividades envolvendo a realização de experimentos aleatórios e simulações visando a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos.

A primeira versão da BNCC do Ensino Médio (BRASIL, 2018) encontra-se publicada e propõe a ampliação e aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental. O documento destaca alguns pares de ideias fundamentais como variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) essas ideias são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático e produzem articulações entre vários campos da Matemática como: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Consideramos imprescindíveis para o estudo de Estatística e Probabilidade as ideias de variação e constância; certeza e incerteza, visto que as primeiras envolvem a observação e o reconhecimento de características comuns e diferentes que são fundamentais para a análise e interpretação de dados. As segundas envolvem o "estudo de fenômenos aleatórios, à obtenção de medidas no mundo físico, a estimativas, análises e inferências estatísticas" (BRASIL, 2018, p 520).

A BNCC do Ensino Médio (BRASIL, 2018) propõe que as habilidades a serem desenvolvidas estejam organizadas por competências, no entanto, reforçam que uma mesma habilidade possa se adequar a mais de uma competência. O quadro 5 a seguir, busca sintetizar as habilidades propostas no documento que competem ao estudo de Probabilidade e Estatística.

Quadro 5 - Habilidades sobre Estatística e Probabilidade presentes na BNCC do Ensino Médio.

(EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.
(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
(EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT409) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: BRASIL, 2018.

As habilidades presentes na tabela sugerem o planejamento e execução de pesquisas estatísticas e análise de dados por meio de diferentes tipos de representações. Sugerem ainda que esse trabalho seja realizado como o apoio de recursos tecnológicos como a utilização de softwares para a construção de gráficos e tabelas e a identificação de medidas de posição e dispersão para a análise e interpretação dos dados, indo ao encontro do objetivo proposto neste estudo.

As orientações presentes na BNCC (BRASIL, 2017,2018) reforçam a relevância do desenvolvimento do letramento estatístico na Escola Básica e representam um avanço neste eixo. É preciso lembrar que antes da oficialização dos estudos envolvendo a análise de dados e a Probabilidade na Escola Básica, a Estatística já permeava nos currículos dos cursos normais de forma restrita (VALENTE, 2007) compondo, inclusive, através do capítulo intitulado "Noções de Estatística", o livro "Matemática e Estatística" de Osvaldo Sangiorgi (1965) voltado para as estudantes das escolas normalistas.

Segundo Silva, Cazorla e Kataoka (2010)[4], após a publicação dos PCN's as pesquisas sobre Educação Estatística começaram a se expandir. Tal fato também pode ser observado na pesquisa de Santos (2015) ao fazer um levantamento de teses e dissertações da Educação Estatística em programas de pós-graduação no Brasil ao longo do tempo até 2012. Em sua revisão bibliográfica Santos (2015) aponta que a partir da publicação dos PCN's o número de pesquisas em programas de pós-graduação aumentou de forma significativa atraindo a atenção de educadores para a investigação sobre o tema. O autor acrescenta ainda a realização da I Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística: desafios para o século XXI", realizada em 1999, na Universidade Federal de santa Catarina – UFSC, em Florianópolis, como um dos marcos importantes para a disseminação dos estudos sobre Educação Estatística no Brasil, reunindo pesquisadores nacionais e internacionais. De acordo com Santos (2015), tais acontecimentos culminaram posteriormente na criação do GT12, em 2001, Grupo de Trabalho - Ensino de Probabilidade e Estatística, da Sociedade Brasileira de

[4] Silva, Cazorla e Kataoka (2010, 2015) analisam a produção científica do GT12 no período compreendido entre 1994 a 2014.

Educação Matemática (SBEM) consolidando o campo de pesquisa e aumentando ainda mais o número de produções sobre essa temática.

Atualmente existem diversos outros grupos de estudos sobre a Educação Estatística na Escola Básica espalhados no país tais como: o GPEE – Grupo de Pesquisa em Educação Estatística na UNESP; o EDUEST – Grupo de Pesquisa de Educação Estatística da FURG, Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEAMAT da PUC de São Paulo, Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental – GREF da UFPE, entre outros.

Segundo Santos (2015) as pesquisas em Educação Estatística evidenciam o predomínio de dois eixos temáticos: Metodologia/Didática do ensino de Estatística, Probabilidade e Combinatória; Utilização de TIC, materiais e outros recursos didáticos no ensino-aprendizado de Estatística, Probabilidade e Combinatória.

A fim de investigar a composição do cenário da Educação Estatística no Brasil nos últimos anos, fizemos um levantamento no banco de Teses e Dissertações da CAPES buscando encontrar estudos sobre o tema. No refinamento do repositório da CAPES buscamos por pesquisas que tivessem como palavras-chave: “educação” e “Estatística” no período compreendido entre os anos de 2013 a 2017[5]. Porém, nesse refinamento havia trabalhos cujo tema tangenciava o assunto que estávamos interessados e, por isso, delimitamos ainda mais nossa seleção, buscando apenas por trabalhos cuja grande área do conhecimento pertencia às áreas das “ciências exatas da terra”, “ciências humanas” e “multidisciplinar”. Nesse refinamento[6] selecionamos 122 trabalhos cujos títulos e resumos acreditávamos estarem diretamente relacionados ao ensino e à aprendizagem de Estatística. No conjunto das 122 pesquisas, 20 são teses e 102 são dissertações, sendo que esses estudos apresentam maior concentração nos anos de 2015 com 40 pesquisas e de 2016 com 29 pesquisas. Observamos também que o maior número de publicações é proveniente da Universidade Federal de Pernambuco com 11 pesquisas no total. Assim como Santos (2015), verificamos que os eixos temáticos de maior predomínio são Metodologia/Didática do ensino de Estatística, Probabilidade e Combinatória com 31 trabalhos e Utilização de TIC, materiais e outros recursos didáticos no ensino-aprendizado de Estatística, Probabilidade e Combinatória com 25 trabalhos.

[5] Período que representa os cinco anos antecedentes ao momento em que estava sendo realizada a revisão bibliográfica desta pesquisa.

[6] É importante salientar que nossa revisão bibliográfica não tem a pretensão de fazer uma investigação com o mesmo nível de aprofundamento de Santos (2015) e, portanto, pode não abranger todos os estudos relativos ao tema durante esse período. Logo, algum estudo pode ter ficado de fora por não termos compreendido claramente o tema na redação do título ou do resumo ou por existirem trabalhos categorizados fora da grande área de conhecimento que selecionamos.

Nossa hipótese é que esses resultados demonstram certa preocupação da comunidade de educadores e pesquisadores matemáticos e estatísticos em investigar como ensinar Estatística nas escolas. Nesse contexto, as tecnologias têm ganhado destaque no que tange às metodologias didáticas desenvolvidas, revelando-se como um amplo campo de investigação nos estudos sobre Educação Estatística. O foco desse trabalho, vai na mesma direção dessas pesquisas, buscando compreender de que modo as tecnologias podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes sobre a média, a mediana e a moda, em particular, como o software GeoGebra pode auxiliar nesse processo. No entanto, primeiro é necessário investigar o panorama dos principais estudos sobre o raciocínio dos alunos sobre as medidas de posição, conforme seção a seguir:

2.3 O raciocínio dos estudantes sobre as medidas de posição: o que dizem as pesquisas?

> A ideia dos dados como uma mistura de sinal e ruído é talvez o conceito mais fundamental nas estatísticas.
> (KONOLD & POLLATSEK, 2002, p.259)

Ao encontro do pensamento de Konold & Pollatsek (2002), Garfield et al. (2008) reafirmam que “compreender a ideia de centro de uma distribuição de dados como um sinal em meio ao ruído (variação) é um componente-chave para compreender o conceito de distribuição e essencial para interpretação de gráficos e análise de dados” (p.188). Em Estatística denomina-se medidas de posição ou medidas de tendência central, valores que servem para representar um conjunto de dados resumindo as informações e identificando a tendência de concentração dos dados. Segundo Coutinho e Novaes (2013) “a análise das medidas de tendência central permite a construção de um ‘retrato’ dos dados tratados complementando as representações gráficas e tabulares”. As principais medidas de posição são a média, a mediana e a moda. Cada uma delas tem objetivos e significados específicos cuja escolha entre uma e outra na análise de dados dependerá tanto dos objetivos traçados na pesquisa quanto da forma como os dados estão distribuídos.

A média aritmética, por exemplo, pode ser interpretada como “um valor típico e que pode representar, em certas circunstâncias, um conjunto de dados” (MAGINA et al., 2010). Para calculá-la basta somar todos os valores observados e dividir pelo número de valores somados, conforme a notação matemática apresentada no quadro 6 a seguir:

Quadro 6 - Definição de Média Aritmética.

Se $x_1, \ldots, x_n$ são os n valores (distintos ou não) da variável X, a média aritmética, ou simplesmente média, de X pode ser escrita: $$\bar{X} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Fonte – BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 36.

Já a mediana é uma medida que, assim como a média, busca caracterizar o centro da distribuição, porém dividindo o conjunto de dados ordenados em duas partes iguais. Ou seja, para encontrar o valor da mediana é necessário primeiro ordenar o conjunto de dados; se o número de valores for ímpar, a mediana será o termo do meio; se o número de valores for par, a mediana será a média dos dois termos do meio. Em notação matemática, definimos mediana do seguinte modo:

Quadro 7 - Definição de Mediana

Consideremos um conjunto de observações ordenadas em ordem crescente. Vamos denotar a menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$ e assim por diante, obtendo-se $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$. Com esta notação, a mediana da variável X pode ser definida como: $$Mediana\,(X) = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & se\ n\ ímpar; \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & se\ n\ par. \end{cases}$$

Fonte – BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 36.

A moda, por sua vez, é definida como “a realização mais frequente do conjunto de valores observados” (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 36). Quando houver duas modas dizemos que a distribuição é bimodal. Da mesma forma, quando houver três modas, dizemos que a distribuição é trimodal e assim por diante.

Os estudos sobre as medidas de tendência central estão previstos nos currículos escolares oficiais de diversos países do mundo. No entanto, o quadro de pesquisas relacionadas ao tema tem apontado dificuldades encontradas tanto por alunos quanto por professores na compreensão desses conceitos. Esses estudos mostram, por exemplo, que a média aritmética, apesar de ser uma expressão presente no cotidiano das pessoas, é um conceito de difícil entendimento, especialmente quanto ao seu significado quando inserida em determinado contexto. Ainda que a média seja muito utilizada pelos alunos no cotidiano, seja para verificar as chances de aprovação, seja através das mídias ou da simples estimação de tempo para chegar em determinado lugar, as pesquisas apontam que a maioria dos estudantes não compreendem a dimensão desse conceito (CAZORLA, 2003).

Mokros e Russell (1995) reforçam essa afirmativa ao argumentar que a simplicidade do algoritmo da média não revela o nível de sua complexidade. Uma das possíveis causas para esse fato pode ser a valorização do cálculo e detrimento dos seus significados e propriedades tal como apontam as pesquisas sobre aprendizagem da média. Strauss e Bichler (1988) realizaram um estudo sobre o desenvolvimento do conceito de média aritmética com crianças no qual elencaram sete propriedades fundamentais que devem ser consideradas para o domínio desse conceito, conforme exposto no quadro 8:

Quadro 8 - Propriedades da Média.

1. a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo ≤ média ≤ valor máximo);
2. a soma dos desvios a partir da média é zero (Σ (Xi – média) = 0);
3. a média é influenciada por cada um e por todos os valores (média = Σ Xi/n);
4. a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
5. a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3);
6. o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
7. a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Fonte - Strauss e Bichler (1988, p.66) traduzido por Magina et al. (2010, p. 62).

Neste estudo participaram 20 crianças entre 8 a 14 anos no qual foram convidadas a resolverem atividades sobre as sete propriedades elencadas. É importante destacar que a maioria das tarefas eram qualitativas e, portanto, os estudantes não conseguiam utilizar o algoritmo da média utilizando os dados da tarefa. Entre os resultados observados pelos autores estão as diferenças significativas encontradas entre as idades dos estudantes e as propriedades elencadas. Ou seja, segundo Strauss e Bichler (1988) a compreensão dos alunos evolui de acordo com a idade. Portanto, é relevante atribuir diferentes níveis de desenvolvimento para as diferentes propriedades da média. Constatou-se ainda que as tarefas sobre as propriedades 1, 3 e 4 foram mais fáceis de serem compreendidas pelos estudantes do que as tarefas sobre as propriedades 2, 6 e 7.

Na mesma direção, Mokros e Russell (1995) investigaram por meio de entrevistas clínicas o entendimento da média de 21 estudantes com idades de 4, 6 e 8 anos. Para a realização desse estudo, os alunos deveriam responder sete questões relativas a problemas de construção e interpretação: no primeiro, os alunos deveriam demonstrar seus conhecimentos sobre a média a partir da construção de diferentes conjuntos de dados que poderiam representar uma determinada média; no segundo, os problemas visavam buscar entender o pensamento dos alunos sobre a relação entre um conjunto de dados e um indicador de centro. Ao longo da análise, os autores elencaram cinco tipos de abordagens gerais que as crianças utilizavam para construir e descrever a média: (a) média como moda; (b) média como algoritmo; (c) média como uma medida razoável; (d) média como ponto médio; (e) média como um ponto de equilíbrio. Os autores concluem que introduzir o algoritmo de forma prematura para encontrar a média pode atrapalhar o raciocínio de algumas crianças cujas ideias fundamentais de representatividade sequer ainda estão bem desenvolvidas. Nesse sentido, os autores defendem que para compreender o conceito de média é necessário primeiro construir a ideia de representatividade, equilíbrio e ter uma experiência utilizando a mediana, pois é uma medida que se conecta mais facilmente às ideias informais das crianças sobre a média. Para isso, é necessário desenvolver atividades que oportunizem coletar, representar, descrever e interpretar dados, onde, nesse processo, as crianças possam desenvolver ideias informais sobre tipicidade e representatividade. Uma das questões em aberto pelos autores é como as crianças podem entender a média como ponto de equilíbrio dos dados, visto que nenhum dos estudantes apresentou uma compreensão completa dessas relações.

Neste contexto da média como equilíbrio, Hardiman, Bem e Pollatset (1984) investigaram se as experiências realizadas por um modelo de feixe de equilíbrio poderiam melhorar a compreensão dos alunos sobre a média. O estudo foi realizado com 48 estudantes universitários (17 a 36 anos) matriculados em um curso de Psicologia. A aplicação do método envolveu três etapas: pré-teste, treinamento e pós-teste. Após o pré-teste, uma parte dos alunos foi designada a tarefas de treinamento de equilíbrio e outra parte foi designada à condição de controle onde deveriam resolver problemas não relacionados por igual período. O objetivo era verificar se os indivíduos de treinamento teriam melhor desempenho no pós-teste do que os sujeitos de controle. Ao final da experiência, verificou-se que os indivíduos de treinamento apresentaram melhor desempenho nos problemas de pós-teste.

Watson e Moritz (1999, 2000) realizaram um estudo sobre o desenvolvimento longitudinal da compreensão de média dos alunos entre 8 e 15 anos. As respostas dos estudantes foram categorizadas segundo seis níveis de desenvolvimento: (a) Pré-estrutural – na qual não inclui nenhum conceito claro sobre a média. (b) Uniestrutural – no qual os estudantes utilizam apenas uma ideia sobre a média expressa muitas vezes de maneira coloquial sem estabelecer uma relação conceitual; (c) Multiestrutural – quando os estudantes utilizam respostas mais elaboradas sobre a média expressando duas ou mais ideias relacionadas com outras medidas de posição como meio, maioria ou utilizam o algoritmo para descrever a média; (d) Relacional – quando os alunos apresentam uma compreensão integrada das relações envolvidas entre os dados. Nesse caso, a interpretação da média vai além do algoritmo, conseguindo observar a variação e a natureza representativa da média.

Quando perguntado a um aluno por exemplo, o significado da frase: "Você está na média", podemos identificar o nível de desenvolvimento dos alunos através dos seguintes exemplos de respostas: no nível pré-estrutural os alunos interpretariam do seguinte modo: "Você não é o melhor amigo para mim." (WATSON; MORITZ, 2000, p.15); já no nível Uni-estrutural, a interpretação seria: "Que você foi aprovado" (WATSON; MORITZ, 2000, p.15); no nível Multiestrutural, as respostas seriam do tipo: "Não muito bom nem muito ruim, no meio" ou "É se você tiver alguns números, some-os e, depois, divida por quantos existem" (WATSON; MORITZ, 2000, p.15); no nível Relacional o aluno poderia avaliar se a média é uma boa medida para a representação dos dados. Ou seja, percebe, por exemplo, que a presença de um valor muito alto no conjunto de dados pode afetar o valor média fazendo com que ela não seja uma medida representativa. Entre os resultados observados por Watson e Moritz (2000) foram as respostas de nível Multiestrutural que se sobressaíram sobre os demais níveis, ou seja, o entendimento do algoritmo se sobrepôs ao entendimento do conceito de média.

No Brasil, Magina et al. (2010) realizaram um estudo com 287 estudantes e professores brasileiros dos quais: 54 pertenciam à 4ª série e 47 à 5ª série do Ensino Fundamental. Entre os professores 61 eram iniciantes, 82 eram estudantes concluintes do curso de Pedagogia e 43 eram professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. A metodologia consistiu na aplicação de um teste composto por sete atividades envolvendo leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos e o conceito de média. No entanto, no estudo relatado pelas autoras foram apresentados os resultados de apenas três questões sobre a média. Na análise dos resultados verificou-se que a média constitui um conceito difícil de ser compreendido e que a apropriação desse conceito aumenta de acordo com a escolaridade. No entanto, observou-se que alguns professores não apresentaram o conhecimento satisfatório a respeito da média. Entre os resultados encontrados a partir das respostas dos sujeitos é a compreensão, tanto de crianças quando de alunos do curso de graduação, da média como a soma dos valores. Além disso, foi comum encontrar sujeitos que confundiam a média como o valor máximo dos dados.

Na mesma perspectiva, Marques, Guimarães e Gitirana (2011), realizaram uma pesquisa com 179 alunos e 39 professores cujo objetivo era verificar, sob a base teórica de Vergnaud

(1996), como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental considerando diferentes significados, invariantes e representações. Para a realização do estudo foram aplicados dois testes com equivalência entre invariantes e significados, apenas variando a representação do enunciado de cada questão: com gráfico de barras e enunciado escrito. Entre os resultados encontrados verificou-se que tanto alunos quanto professores tiveram dificuldades em resolver as questões propostas, apesar de o número de respostas corretas ser significativamente maior entre os professores do que dos alunos do 3º e 5º ano. Observou-se ainda que, na maioria das situações, inclusive para dados apresentados em enunciados escritos, a média é a soma dos valores da variável. Em questões envolvendo gráfico de barras, muitos sujeitos entenderam que a média correspondia ao valor da maior barra ou ponto máximo. Os professores tiveram dificuldades em responder questões que envolviam o "reconhecimento da média como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica e como valor que irá se obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando na distribuição" (p.734). Constatou-se ainda que os alunos do 3º e 5º ano não compreendem que "a média pode ser um número que não corresponde a um dado que possa ser assumido pela variável e a média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada" (p.734). De modo geral, as autoras destacaram o trabalho com múltiplas representações um fator que contribui para a compreensão do conceito de média.

Cazorla (2003) investigou o nível de conhecimento sobre a média aritmética com 840 estudantes de diversos cursos de graduação matriculados nas disciplinas de Estatística da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) na Bahia. Para isso, foi aplicado um questionário informativo e uma prova contendo seis questões sobre média e suas propriedades. Entre os resultados observou-se que 41,7% dos estudantes definiu a média através do seu algoritmo; 8,7% como ponto médio, valor central, mediana e outros; 1,7% como o valor que resume. Sobre a utilidade da média, 20,6% compreende que a utilidade da média é representar um conjunto de dados; 7,7% para encontrar valores intermediários e 4,9% compreende que a média serve para fazer inferência. Quanto a questões procedimentais, verificou-se que 95,2% conhecia o algoritmo da média simples, 79,5% conseguiu recalcular a média ao inserir um novo valor no conjunto de dados e 86,4% encontrou um valor dada a média e os valores restantes. No entanto, assim como em outros estudos citados, um terço dos alunos resolveu problemas sobre média ponderada e apenas 2,5% conseguiram interpretar a média de uma variável discreta cujo resultado é um número decimal. Neste último, utilizaram a ideia de representatividade, amostra, população, estimativa, amplitude e ponto de equilíbrio.

Muitas pesquisas apontam ainda que os alunos têm dificuldades em diferenciar a média, a mediana e a moda, confundindo com frequência esses conceitos. Boaventura e Fernandes (2004) realizaram um estudo para identificar a dificuldade dos alunos do 12º ano sobre esses três conceitos. Participaram do estudo 181 estudantes de três escolas secundárias, com idades compreendidas entre 16 e 23 anos de idade, cuja média de idade foi de 17,8 anos. A coleta de dados consistiu na realização de um questionário composto por 9 questões estabelecidas a partir de estudos de diversos autores. Entre os resultados encontrados, observou-se que o conceito de mediana foi o que os alunos apresentaram maior dificuldade, seguido da média e depois da moda. No que concerne ao conceito de mediana, os alunos apresentaram dificuldade tanto no aspecto do cálculo quanto no aspecto conceitual confundindo o seu significado com a média. Em relação à média, observou-se maior dificuldade dos alunos sempre que a tarefa envolvia uma interpretação para além do cálculo de média simples ou quando a informação apresentada era na forma de um gráfico. Entre outras situações de difícil compreensão pelos estudantes foram constatados os seguintes aspectos: o cálculo de médias ponderadas; a determinação de um conjunto de dados cujos valores da média, mediana e moda são conhecidos; decidir situações em que é impossível utilizar as medidas de posição e extrair do gráfico a informação necessária para a determinação dessas medidas; compreensão de propriedades da média, mediana e moda, identificando, por exemplo, o que ocorre com essas medidas quando acrescentamos um valor no conjunto de dados; localizar as medidas de posição em distribuições simétricas e assimétricas e atribuir significado às medidas de tendência central como, por exemplo, descrever o algoritmo da média ao invés de interpretá-la no contexto do problema. Os autores concluem que em termos de utilização de conceitos elementares de Estatística a formação recebida pelos estudantes ao longo da sua escolaridade foi pouco consistente.

Os resultados sobre média ponderada de Boaventura e Fernandes (2004) vão ao encontro da pesquisa realizada por Pollatsek, Lima e Well, em 1981, cujo estudo realizado com estudantes de psicologia conseguiu apontar que 38% dos alunos não conseguiam resolver o seguinte problema: “Um estudante frequentou a faculdade A por dois semestres e ganhou um GPA[7] de 3,2. O mesmo aluno frequentou a faculdade B por três semestres e ganhou um GPA de 3,81. Qual foi o GPA geral do aluno?” (p.192). Os autores verificaram que a maioria dos alunos utilizou média aritmética simples entre 3,2 e 3,81. Quanto, na verdade, a resposta correta deveria levar em consideração as ponderações representadas pelo número de semestres frequentados em cada faculdade, ou seja, (2x3,2 +3x3,81)/5.

---

[7] Média ponderada de pontos que resume o desempenho geral do aluno em determinado curso de universidade.

Mayén et al. (2007) verificaram a compreensão de 125 estudantes mexicanos com idade entre 17 e 18 anos, de sete centros educativos públicos do último ano de Bachillerato. Para isso, foi aplicado um questionário com questões sobre as três medidas. Entre os resultados apontados pelos autores destaca-se a dificuldade dos estudantes: no cálculo de médias ponderadas não levando em conta a ponderação; na realização do cálculo da mediana a partir de dados representados em um gráfico, onde os alunos não levam em conta a frequência dos dados agrupados na realização do cálculo. Além disso, os estudantes têm dificuldades em calcular a mediana quando o número de dados é par, pois em alguns casos os alunos não ordenam os dados e em outros têm dificuldade em resolver a indeterminação produzida pelos dados centrais. Os estudantes também apresentam dificuldades em reconhecer que a média é pouco resistente quando existem outliers, onde nem todos os alunos percebem que deve ser eliminado o valor discrepante ou tomar a mediana como uma medida mais apropriada. No entanto, os alunos reconhecem o efeito do zero no valor da média e que a soma dos desvios acima e abaixo dela é compensada.

Em linhas gerais, os aspectos destacados ao longo dos estudos de diversos autores convergem quanto à compreensão de média, mediana e moda de estudantes em diversas faixas etárias. É necessário portanto, um estudo mais aprofundado que leve em consideração o nível cognitivo dos estudantes, de acordo com a sua idade, de modo que os conceitos e suas propriedades possam ser introduzidos respeitando essas etapas. Além disso, é evidente ao longo das pesquisas que é necessário investir na formação inicial e continuada de professores para que esses possam não apenas dominar esses conceitos, mas ter uma visão ampla a respeito das possíveis dificuldades que os alunos podem ter ao longo de seu aprendizado sobre as ideias estatísticas. Um trabalho com tecnologias talvez possa ser um caminho para ampliar o conjunto de possibilidades para a aprendizagem de conceitos estatísticos, conforme os argumentos apresentados no capítulo a seguir.

Capítulo 3

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO

> A escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação (TIC ou NTIC) transformam espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar.
> (PERRENOUD, 2000, p.125).

O desenvolvimento acelerado das inovações tecnológicas tem provocado mudanças na maneira de pensar e produzir conhecimento, levantando diversas questões relativas ao impacto da tecnologia na cognição humana assim como nas possíveis transformações que podem ocorrer no ambiente escolar. Desse modo, as pesquisas relativas às implicações da tecnologia sobre os processos de ensino e aprendizagem têm sido objeto de estudo de educadores nas últimas décadas e compõem um amplo campo de estudo na área da educação.

As ressonâncias desses estudos apontam que os discursos e diálogos sobre essa temática transcendem a ideia de que a tecnologia tem a função de tornar as aulas mais atrativas despertando a atenção e o interesse do estudante através da simples transferência de práticas realizadas com lápis e papel para o computador. Os debates sobre a inserção das tecnologias nas práticas escolares vão além, e propõem a possibilidade da criação e do desenvolvimento de novas abordagens assim como a elaboração e amplificação de problemas e soluções que ganham novos sentidos e significados no ambiente virtual. Para Pierre Levy, além de oferecer novas formas de acesso à informação, o uso das tecnologias oferece novos estilos de raciocínio e de conhecimento, acrescentando ainda que “o uso crescente das tecnologias digitais e das redes de comunicação interativa acompanha e amplifica uma profunda mutação na relação com o saber” (LÉVY, 2000, p.172).

Um dos primeiros visionários sobre as implicações da inserção da tecnologia na educação foi Seymour Papert (1985) que já na década de 60 defendia a ideia de que o computador poderia ter grande influência na maneira de pensar e, portanto, deveria ser usado pelas crianças na sala de aula como um instrumento para aprender. Papert acreditava que o computador poderia ser usado pela criança para programar e, nesse processo de “ensinar a máquina”, a criança aprende a pensar sobre os modelos construídos, permitindo concretizar as ideias abstratas que antes eram inatingíveis, superando os limites entre o concreto e o formal (1985, p.37).

É preciso lembrar que, muito antes da invenção dos computadores, o homem se apropriava das tecnologias como instrumentos para pensar, aprender e processar as informações. Nesse sentido, Levy (2000) classifica o desenvolvimento da tecnologia em três etapas: a oralidade, a escrita e as novas tecnologias digitais. Cada uma dessas etapas utiliza sistemas de símbolos influenciando diretamente no tipo de conhecimento a ser construído. No âmbito das tecnologias digitais, é possível integrar esses diferentes sistemas de símbolos como oralidade, escrita, imagens, vídeos etc., para representar e transmitir uma informação, ampliando as possibilidades no processo de construção do conhecimento. Desse modo, "as novas tecnologias favorecem não só a novas formas de acesso à informação, mas também a novos estilos de raciocínio e de conhecimento" (LÉVY, 2000, p.157).

Atualmente, existem diversas políticas públicas e projetos que incentivam a inserção e o uso da tecnologia nas Escolas. No entanto, Coll e Monereo (2010, p.66) destacam que os estudos de acompanhamento e avaliação mostram que em muitos países a incorporação das tecnologias ainda é limitada, "ficando abaixo do potencial transformador e inovador que lhe é atribuído". Os autores apontam ainda que uma das causas desse problema está relacionada ao uso restrito e pouco inovador que os professores e os alunos fazem das tecnologias. Ou seja, as tecnologias digitais são utilizadas muito mais como ferramentas de informação do que de comunicação e colaboração, reforçando as práticas transmissivas e tradicionais de ensino, contribuindo para que o estudante utilize essas ferramentas mais para consumir do que para produzir conhecimento. Coll e Monereo (2010) argumentam que a simples incorporação das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) não garante a melhoria do ensino e aprendizagem e que o grau do impacto das TIC's está relacionado aos "contextos de uso" que professores e alunos fazem dela. Ou seja, o potencial das novas tecnologias não está nas suas características próprias, mas "nas atividades que desenvolvem professores e estudantes graças às possibilidades de comunicação, troca de informação e conhecimento, acesso e processamento de informação que essas tecnologias oferecem" (COLL; MONEREO, 2010, p.70).

Diante do exposto, compreendemos que o uso das tecnologias vai além de um instrumento para informação e comunicação. As tecnologias digitais podem ampliar e transformar as práticas escolares promovendo novas formas de pensar que seriam impossíveis sem o uso delas e, consequentemente, propõem mudanças na maneira de ensinar e de aprender. Ou seja, as tecnologias digitais integram sistemas de símbolos tais como som, imagem e movimento que podem ampliar e transformar qualitativamente a maneira de pensar sobre ideias e conceitos, contribuindo para que o estudante atribua novas características sobre determinado objeto que sem esses recursos não seria possível verificar. No entanto, acreditamos que o grande debate que se coloca atualmente é pensar em como promover atividades que não somente façam o simples uso das tecnologias digitais para transmitir ou comunicar informações, mas que propiciem o pensar-com[8] tecnologias, ou seja, pensar em um ambiente virtual de modo que seus recursos sejam fundamentais para a construção do conhecimento.

Ao refletir sobre as possíveis transformações que as tecnologias podem provocar no pensamento humano, destacamos as reflexões propostas por Roy D. Pea que, em 1987, propôs um debate sobre os papeis das tecnologias cognitivas no pensamento matemático. Para o autor, tecnologia cognitiva é qualquer meio que ajuda a transcender as limitações da mente. As tecnologias digitais, portanto, podem ser consideradas como tal por integrar diversos sistemas de símbolos como notações, escritas, imagens, sons, linguagem de programação etc., que ajudam a externar os produtos do pensamento. Já naquela época, o autor defendia as tecnologias cognitivas não apenas como amplificadores, mas como reorganizadores da mente, colocando em pauta a seguinte reflexão: o que é possível fazer com as tecnologias que antes não era possível ou não era prático fazer? Compreendemos que essa questão ainda é atual e pertinente podendo ser estendida para diversos campos do conhecimento. Em Educação Estatística, por exemplo, podemos desdobrá-la através da seguinte pergunta: qual o papel das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem de Estatística? Mais especificamente, o que os recursos tecnológicos podem tornar possível no desenvolvimento do raciocínio estatístico? Essas são questões mais amplas e fazem parte do conjunto de indagações que permeiam os objetivos desta pesquisa e que buscaremos respondê-las conforme a seção a seguir.

3.1 O papel das tecnologias digitais na Educação Estatística

> Considerando que os estudantes no currículo tradicional de estatística são capazes de "plantar uma árvore", os alunos no currículo informatizado são capazes de "plantar uma floresta e planejar para a reflorestação"
> (RUBIN; ROSEBERRY; BRUCE, 1988 *apud* BEN-ZVI; FRIEDLANDER, 1997, p.46, tradução nossa)

Segundo Moore et al. (1995, p.3), “a natureza da pesquisa estatística e da prática estatística mudaram drasticamente sob o impacto da tecnologia”. Um dos efeitos desse impacto

8 Expressão cunhada por Rosa (2008) inspirada a partir do constructo teórico “Seres-humanos-com-mídias” (BORBA; VILLARREAL, 2005), no qual a produção do conhecimento é concebida através de um coletivo composto por seres humanos e mídias e não somente entre seres humanos.

está relacionado ao campo do ensino dessa disciplina onde professores e pesquisadores têm reavaliado alguns aspectos relativos ao que e como ensinar Estatística com tecnologias.

De modo geral, há um certo consenso entre os pesquisadores em considerar que o uso das tecnologias nas práticas de ensino e aprendizagem permite a criação de um ambiente de aprendizagem novo e propício para o desenvolvimento e a compreensão de conceitos. Para Burril (2018), por exemplo, a tecnologia faz diferença na Educação Estatística, pois fornece novas informações sobre o trabalho com dados abrindo as portas para a estatística e o raciocínio estatístico para todos os alunos. Para Chance et al. (2007) a tecnologia ampliou as técnicas gráficas e de visualização oferecendo aos estudantes novas maneiras de explorar e analisar os dados bem como de pensar em ideias estatísticas direcionando a atenção do aluno na interpretação dos resultados e na compreensão de conceitos ao invés do cálculo de fórmulas e nos procedimentos computacionais. Rossman (1996) destaca três aspectos para o uso da tecnologia em Estatística e que consideramos ser fundamentais: primeiro, a tecnologia facilita realização de cálculos e representações visuais permitindo que o estudante concentre a atenção na compreensão de conceitos e interpretação de resultados. Ou seja, é possível trabalhar com uma grande quantidade de dados e realizar muitos cálculos rapidamente de modo preciso e com poucos erros. Além disso, amplia a diversidade de representações gráficas que podem ser reproduzidas de maneira rápida e compartilhada simultaneamente permitindo comparações entre diferentes representações e melhores explorações do conjunto de dados. Segundo, a tecnologia permite a realização de simulações facilitando a visualização e exploração do comportamento dos dados a longo prazo. Ou seja, o estudante pode investigar o comportamento de processos aleatórios através de um grande número de repetições. Terceiro, com o uso da tecnologia é possível explorar fenômenos estatísticos permitindo que os alunos façam previsões sobre uma propriedade estatística. Ou seja, é possível investigar o efeito causado através do ajuste dos dados e compreender algumas ideias estatísticas abstratas que não são possíveis de verificar apenas com o uso do lápis e do papel.

Esses três principais aspectos criam condições para a realização de atividades envolvendo dados reais e que tenham mais significado para os estudantes tornando as ideias estatísticas representativas para que o aluno possa realizar conclusões e fazer previsões sobre o conjunto de dados investigado.

Atualmente existem diversos tipos de tecnologias digitais que podem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem em Estatística. Chance et al. (2007) analisam e categorizam esses tipos da seguinte maneira: pacotes de software estatístico, software educativo, planilhas, applets/aplicativos independentes, calculadoras gráficas, materiais multimídia e repositórios de dados. O quadro 9 ilustra as categorias elaboradas por Chance et al. (2007) acompanhadas por alguns exemplos apresentados pelos autores e completados por nós.

Quadro 9 - Tipos de tecnologias digitais utilizados no processo de ensino e aprendizagem em Estatística.

Categorias	**Exemplos**
pacotes de software estatístico	SPSS - http://www.spss.com; S-plus - http://www.insightful.com; R - http: //www.r- project.org; SAS - http://www.sas.com; Minitab - http://www.minitab.com
software educativo	Fathom -http://www.keypress.com/x5656.xml; TinkerPlots - https://www.tinkerplots.com; InspireData - http://www.inspiration.com/productinfo/inspiredata
planilhas	Excel http://office.microsoft.com Calc https://pt-br.libreoffice.org/descubra/calc
applets / aplicativos independentes	Sampling SIM http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat_tools/software.htm
calculadoras gráficas	Statistics Course Assistant (app)
materiais multimídia	ActivStats http://www.activstats.com AtivEstat da USP-SP https://www.ime.usp.br/ativestat
repositórios de dados	Biblioteca de dados e histórias – DASL http://lib.stat.cmu.edu/DASL Conjunto de conjuntos de dados e histórias do Journal of Statistics JSE http://www.amstat.org/publications/jse/jse_data_archive.html IBGE Educa - https://educa.ibge.gov.br/

Fonte – Inspirado em Chance et al. (2007) e adaptado pela autora.

Para Ben-Zvi (2000) e Biehler (1997) *apud* Chance et al. (2007), há vários recursos e ferramentas presentes em cada categoria que se repetem e que contemplam o mesmo objetivo, porém nenhum deles parece atender plenamente todos os aspectos para o uso educacional dessas tecnologias.

Estevam e Kalinke (2013), ao investigarem o cenário das pesquisas brasileiras sobre os recursos tecnológicos utilizados no ensino de Estatística na Educação Básica, apresentam um panorama das pesquisas publicadas no Banco de Dissertações e Teses da CAPES no período compreendido entre 2004 a 2011, identificando 15 trabalhos relacionados ao tema. Segundo esse estudo, os autores identificaram a utilização e exploração tanto de softwares específicos para o ensino de Estatística – Fathom, Tabletop, TinkerPlots – como de softwares que não foram criados para esse fim, mas que apresentam possibilidades para a realização de tarefas para o ensino de Estatística como Excel, GeoGebra, R e Superlogo.

Os autores destacam que, apesar de oferecer um pacote de possibilidades para o ensino e aprendizagem em Estatística, muitos dos softwares são comerciais como Microsoft Excel, TinkerPlots, Fathom e Tabletop, SPSS, InspireData, e, portanto, representam um fator complicador no que se refere ao acesso a esses recursos nos ambientes escolares por alunos e professores, especialmente na escola pública que carece de recursos financeiros para a aquisição desses softwares, assim como de computadores em plenas condições de uso e funcionamento.

No entanto, mais importante do que a escolha da tecnologia adequada é o modo como essa tecnologia é utilizada em sala de aula de maneira que o foco da atividade esteja na ideia estatística e não na tecnologia. Para nós, é necessário pensar em atividades estatísticas inseridas no ambiente tecnológico que propicie a investigação e a exploração de problemas estatísticos que "incentivem os alunos a discutir e resumir os grandes conceitos da lição antes de serem resumidos pelo instrutor" (Chance et al., 2007, p. 15). Desse modo, é importante evitar ambientes que comportam excesso de recursos sofisticados e que muitas vezes concentram a aprendizagem do estudante mais na ferramenta do que nas ideias estatísticas. Chance et al. argumentam que a escolha de uma ferramenta tecnologia deve envolver:

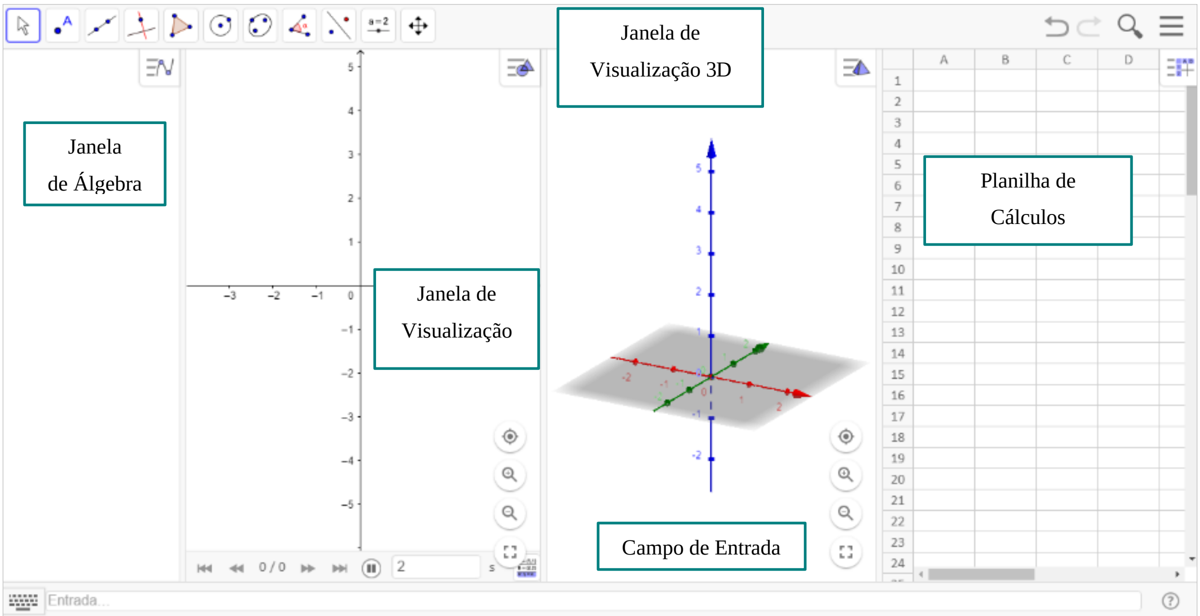
> [...] facilidade de uso, interatividade, vínculos dinâmicos entre dados / gráficos / análises e portabilidade ... É necessário um ambiente de aprendizagem que seja rico em recursos, que auxilie na exploração, crie uma atmosfera na qual as ideias possam ser expressas livremente, estimule os alunos a compreender e permita que os alunos (e professores) tenham liberdade para cometer erros (2007, p. 20, tradução nossa).

A partir das características apresentadas, compreendemos que o software GeoGebra pode constituir um ambiente rico para aprendizagem de Estatística. Mesmo não sendo um software destinando para esse fim, apresenta um amplo pacote de recursos que podem ajudar os estudantes na compreensão de ideias e conceitos estatísticos. Na próxima seção, será apresentado o software GeoGebra e seus principais recursos.

3.2 Estatística no software GeoGebra

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica, criado em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwarter e, desde então, tem sido utilizado em diversos níveis de ensino por alunos e professores. Um dos motivos que vem despertando o interesse dos educadores pelo GeoGebra é por ser um software de código aberto, disponível gratuitamente para todos os usuários e apresentar uma interface simples, de fácil manipulação, reunindo geometria, álgebra, planilhas, gráficos, Estatística e cálculo que podem ser compartilhados e manipulados na mesma tela. Desse modo, o GeoGebra permite que um mesmo objeto apresente diferentes representações que podem ser modificadas dinamicamente. A figura 2 ilustra a interface do software e algumas das janelas de visualização disponíveis que podem ser exibidas na tela conforme a necessidade do usuário. A janela de álgebra, por exemplo, exibe os registros algébricos das construções do usuário; já a janela de visualização permite a visualização de gráficos e figuras geométricas bidimensionais; assim como a janela de visualização 3D que permite a exibição de gráficos e figuras geométricas tridimensionalmente. A planilha de cálculos permite construir tabelas e listas de pares ordenados de pontos que podem ser exibidos tanto na janela de álgebra como também geometricamente na janela de visualização. O programa apresenta ainda uma janela CAS (Cálculo Algébrico Simbólico) que possibilita, por exemplo, a resolução de equações de forma simbólica. No campo de entrada podem ser digitadas as equações e os comandos a serem executados.

Figura 2 - Interface do Software GeoGebra.



Fonte – Software GeoGebra.

Além do caráter multifacetado, o software é multiplataforma podendo ser instalado em diferentes sistemas operacionais e dispositivos móveis. Além disso, por apresentar múltiplos recursos o software oferece seis versões com diferentes objetivos que podem ser obtidas conforme as necessidades do usuário: Calculadora Gráfica - destinado para Funções, Geometria, Cálculo e Estatística; Geometria – destinado para a construção de objetos geométricos bidimensionais; 3D Calculadora Gráfica – para Geometria Álgebra, Cálculo e Matemática 3D, Realidade Aumentada – que permite trabalhar com Matemática em três dimensões no mundo real; Duas versões do GeoGebra Clássico que reúne todas as versões anteriores.

Segundo informações presentes na página do Instituto São Paulo GeoGebra[9], o software atualmente é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, possuindo 62 Institutos GeoGebra distribuídos por 44 países. A existência desses institutos possibilita desenvolver um trabalho colaborativo entre os usuários dando suporte não somente ao seu uso, mas na descoberta de diferentes possibilidades e novos recursos. Destaca-se o espaço “help”, uma espécie de fórum disponível no site do GeoGebra e criado com o objetivo de estabelecer um ambiente no qual os usuários podem apresentar problemas, sugerir ideias e realizar perguntas sobre os recursos e ferramentas do software, criando assim um espaço de troca de experiências de forma dinâmica e colaborativa.

No site do GeoGebra é possível também acessar o espaço “materiais” onde os usuários podem criar seus materiais e compartilhar com outros usuários criando um grande repositório de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos. É possível ainda criar e visualizar objetos no software online através de um navegador de internet.

Esse conjunto de espaços e possibilidades oferecidos pelo GeoGebra são resultados de constantes transformações e atualizações gerados graças à rede colaborativa formada por seus usuários que contribuem para que ele seja cada vez mais conhecido e utilizado pelas pessoas há 18 anos.

Atualmente a última versão do GeoGebra apresenta diversos recursos e ferramentas de Matemática, porém a sua primeira versão não contemplava o pacote de Estatística e Probabilidade, o qual surgiu apenas em 2009, a partir da sua versão 3.2. Desde então, os recursos referentes a esse tema parecem ser pouco explorados por alunos e professores se observarmos o número de materiais e de publicações disponíveis que buscam desenvolver ideias estatísticas no software em comparação aos materiais que buscam desenvolver ideias de

[9] Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em: 15 mar. 2017.

Geometria, por exemplo. Compreendemos que uma das razões que pode justificar esse fato é o desconforto dos professores de Matemática com o ensino de Estatística. Vale lembrar que o GeoGebra não é um software estatístico e talvez, por isso, também pouco conhecido pela comunidade estatística, mas que contempla um amplo pacote de recursos e ferramentas que podem auxiliar professores e alunos a desenvolver algumas ideias e conceitos sobre esse tema, conforme ilustra a figura 3.

Figura 3 - Comandos específicos do tipo Estatística e Probabilidade presentes no GeoGebra.

Fonte: Software GeoGebra.

Bortolossi (2016) apresenta os principais recursos do GeoGebra no ensino e na aprendizagem sobre Estatística e Probabilidade. Nesta seção, tomamos como referência o trabalho do autor para mostrar algumas das possibilidades do software sobre o tema, complementando suas ideias e destacando aspectos que reafirmam a escolha do software para essa pesquisa.

Em seu trabalho, Bortolossi (2016) mostra as diferentes análises que podem ser realizadas no software a partir da inserção dos dados na planilha de cálculos que, quando selecionados, podem ser investigados. Na figura 4 ilustramos essas análises seguidas da descrição de suas funções conforme descrito pelo GeoGebra ao posicionar o cursor do mouse em cima de cada uma delas.

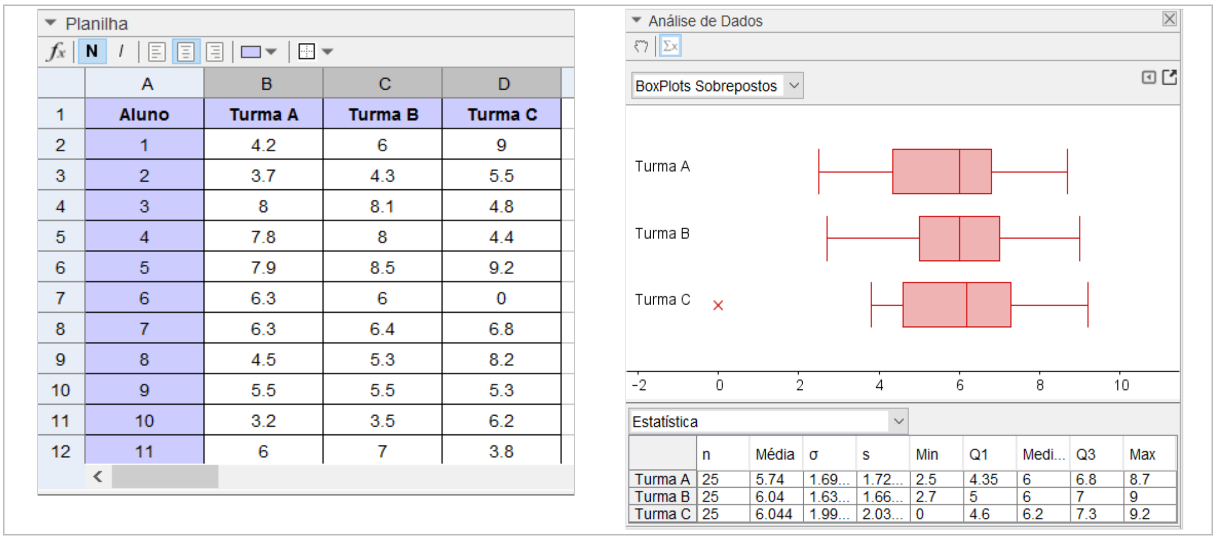
Figura 4 - Tipos de análise de dados.

Fonte: Software GeoGebra.

A Análise Univariada analisa valores numéricos em um bloco de células, a Análise Bivariada analisa pares de valores em um bloco de células e a Análise Multivariada analisa dois ou mais blocos das colunas selecionadas.

Bortolossi (2016) também dá destaque para o conjunto de ferramentas pré-definidas disponíveis pelo software descrevendo brevemente essas possibilidades. Conforme a análise escolhida o software oferece um conjunto de diagramas para a representação dos dados como, por exemplo: histograma, boxplot, diagrama de barras, etc. Além disso é apresentado um quadro com as medidas resumo (média, desvio padrão, etc) sobre o conjunto de dados selecionado. Na figura 5 ilustramos um exemplo de análise multivariada sobre as notas fictícias de alunos de três turmas enfatizando a possibilidade de análise dos dados mediante as relações estabelecidas entre os gráficos e as medidas resumo.

Figura 5 - Análise multivariada das notas de três turmas.



Fonte: Construção da autora.

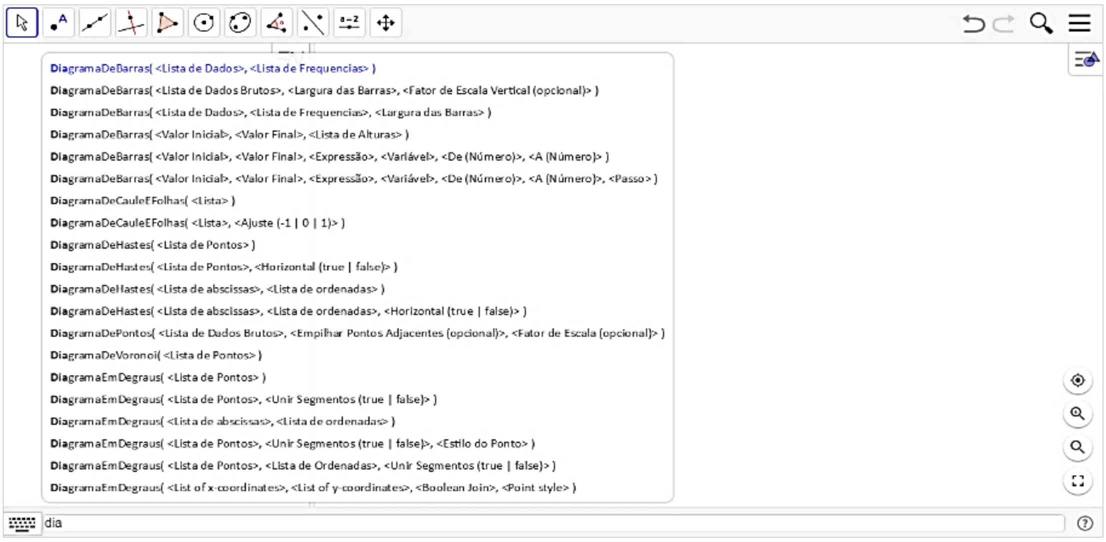
Em seu artigo, Bortolossi (2016) ainda destaca que na análise bivariada é possível escolher diversos modelos de regressão (linear, log, polinomial, potência, exponencial, crescimento e senoidal). Completamos os apontamentos do autor através da figura 6, a qual ilustra um exemplo de regressão linear gerada através de pares ordenados digitados na Planilha de Cálculo. O software apresenta a função que melhor se ajusta ao conjunto de pontos e o gráfico correspondente, assim como o diagrama de resíduos. A partir da função apresentada, pode-se avaliar simbolicamente valores para “y” da função a partir de um valor de “x” escolhido.

Figura 6 - Modelo de Regressão.

Fonte – Construção da autora.

Conforme os dados são alterados na planilha de cálculos, as representações gráficas e as medidas resumo são alteradas automaticamente. Além disso, “as construções no GeoGebra podem ser feitas usando-se ferramentas interativas ou digitando-se comandos (todos em Português!) em um Campo de Entrada” (BORTOLOSSI, 2016, p. 434). Ou seja, para gerar o gráfico de pontos, por exemplo, basta o usuário digitar no campo de entrada o comando “DiagramaDePontos[<Lista de Dados Brutos>, <Empilhar Pontos Adjacentes (opcional)>, <Fator de Escala (opcional)>]”. Do mesmo modo, para calcular a média dos dados, basta o usuário digitar no campo de entrada o comando “Média(<Lista dos Dados Brutos>)”. É importante destacar que ao digitar apenas a sílaba “dia”, por exemplo, o software já apresenta uma lista de diagramas possíveis para o usuário escolher sem que ele tenha que memorizar todos os comandos do software. É possível, ainda, pesquisar o comando desejado através do ícone “ajuda” identificado pelo ponto de interrogação no canto esquerdo do campo de entrada, conforme ilustra a figura 7:

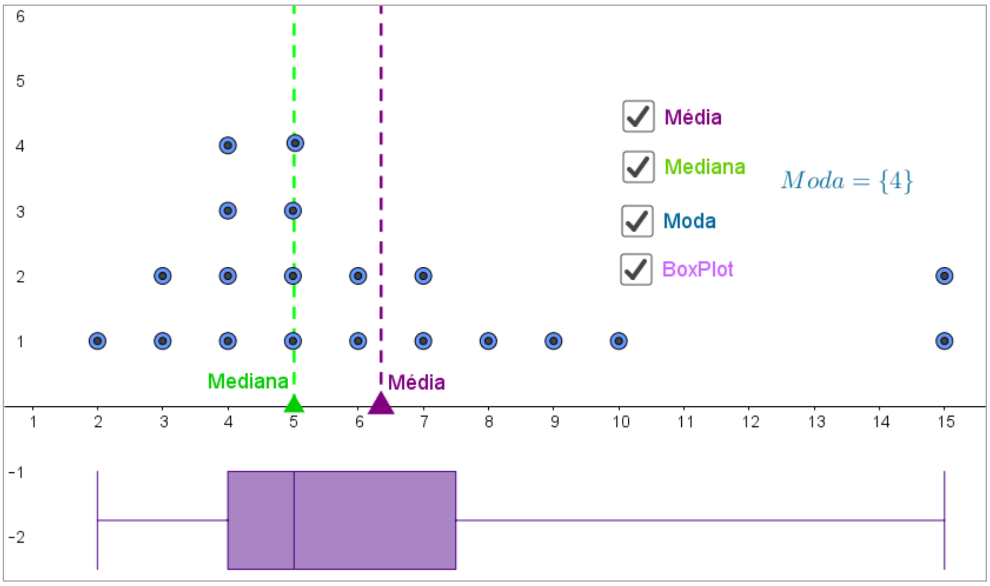
Figura 7 - Lista de comandos no campo de entrada.



Fonte: Software GeoGebra

Os gráficos e as medidas resumo podem ser representados em uma mesma janela de visualização, permitindo ao usuário fazer comparações entre diferentes representações gráficas, identificando geometricamente as medidas de posição e de dispersão, por exemplo. A figura 8 ilustra o gráfico de pontos e o boxplot compartilhados em uma mesma tela. A composição de ambos os gráficos ajuda na análise e no estudo da variabilidade dos dados pelos estudantes.

Figura 8 – Gráfico de pontos e *boxplot* representados na mesma janela de visualização.



Fonte: Construção da autora[10].

[10] Disponível em < https://www.geogebra.org/m/heqfbama>. Acesso em: 10 mar. 1018.

Bortolossi (2016) destaca a possibilidade de realização de movimentos e mudanças de parâmetros como um dos fortes recursos do software, enfatizando o seu dinamismo. Assim como o autor, consideramos o arrastar dinâmico, característica peculiar em ambientes de Matemática dinâmica como o GeoGebra, como um dos aspectos de extrema importância, especialmente para os objetivos dessa pesquisa. Ao arrastar os pontos do gráfico da figura 8, por exemplo, as medidas estatísticas vinculadas a esses dados são automaticamente modificadas, facilitando a compreensão dos estudantes sobre as propriedades dessas medidas. Segundo Finzer (2006, p.3), observar os dados enquanto eles são arrastados faz com que os estudantes percebam que "quase tudo o que é importante sobre os valores de dados permanece intacto e que, se a quantidade de arrasto for conhecida, os dados originais poderão ser reconstituídos". Desse modo, o arrasto dos pontos proporciona um ambiente dinâmico de aprendizagem contribuindo para que o aprendiz construa uma relação íntima com os objetos que estão na tela.

Finzer e Jackiw (1998) caracterizam ambientes de manipulação dinâmica a partir de três atributos que são facilmente observáveis no gráfico da figura 8: *a manipulação é direta*, ou seja, o usuário pode clicar nos pontos e modificar as suas posições observando o que acontece com as medidas estatísticas dinamicamente. Esse aspecto faz com que "a distância cognitiva entre o que está na tela e a Matemática por trás dele seja mínima" (p. 01). Além disso, *o movimento é contínuo*, ou seja, na medida que o arrasto ocorre, as medidas estatísticas relacionadas àquele movimento modificam dinamicamente em tempo real, fornecendo um feedback imediato para o aprendiz dos efeitos desse arrasto. E, por fim, o *ambiente é imersivo*, ou seja, a interface é mínima e simples fazendo com que o foco esteja diretamente voltado na exploração dos dados e não na tecnologia. Esses aspectos são favoráveis para que o estudante possa realizar abstrações e fazer generalizações a partir das observações dos dados em movimento.

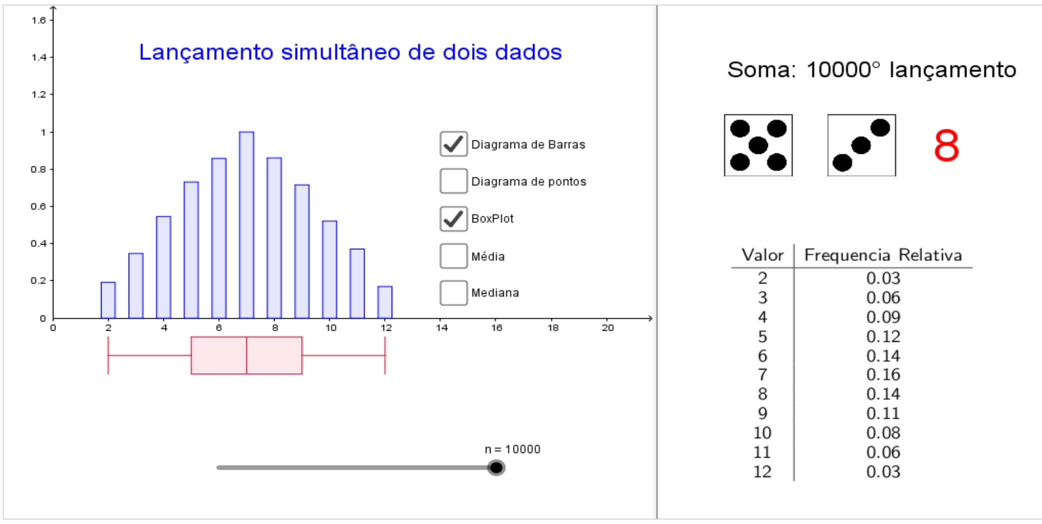
Na mesma direção, Finzer (2006) reflete sobre o papel da alteração dinâmica de dados e parâmetros na compreensão de conceitos estatísticos. Nesse contexto, o autor descreve algumas possíveis ações que o estudante poderia ter ao arrastar pontos no gráfico e observar o valor da média. De acordo com as ações elencadas por Finzer (2006), quando um único ponto é arrastado, por exemplo, o valor da média se altera junto com a linha vertical traçada sobre o seu valor. Desse modo, o aluno tem a oportunidade de observar que a média sempre muda para qualquer ponto na mesma direção do arrasto. Além disso, "a influência de vários pontos é proporcional ao número de pontos que estão sendo arrastados" (p.02). Finzer (2016) acrescenta que ao arrastar pontos sequencialmente, o estudante tem a possibilidade de observar que, ao mover um ponto a uma certa distância em uma direção, a média pode ser balanceada movendo outro ponto a mesma distância, mas na direção oposta. Além disso, o estudante pode também arrastar múltiplos pontos e verificar o valor da média em relação à distribuição, observando que em distribuições simétricas, por exemplo, o valor da média está posicionado sempre no meio. No entanto, em distribuições em que há valores extremos, a média pode estar longe dos valores de dados centrais, mas nunca fora de todos os valores.

Para além desses aspectos, é possível ainda comparar a média com a mediana e outras medidas observando aproximações e distanciamentos entre as suas propriedades.

É claro que o GeoGebra não é o único ambiente que possibilita o rastro de pontos, porém é um software versátil que possibilita a criação de múltiplas construções a partir dos comandos que dispõe. A partir desses recursos, o usuário pode criar artefatos conforme a sua necessidade sem ter um conhecimento amplo de programação.

O software também "possui geradores de números pseudo-aleatórios pré-definidos para as distribuições uniforme, normal, Poisson e binomial" (BORTOLOSSI, 2016, p. 435). Desse modo, é possível criar simulações permitindo ao estudante a observação do comportamento dos dados através de sucessivas repetições realizadas pelo arrastar do controle deslizante[11]. A figura 9, por exemplo, mostra a simulação da soma da face no lançamento simultâneo de dois dados não viciados, permitindo que o estudante possa investigar como se comportam a soma das faces sorteadas em cada distribuição.

Figura 9 - Lançamento simultâneo de dois dados.



Fonte – Construção da autora[12].

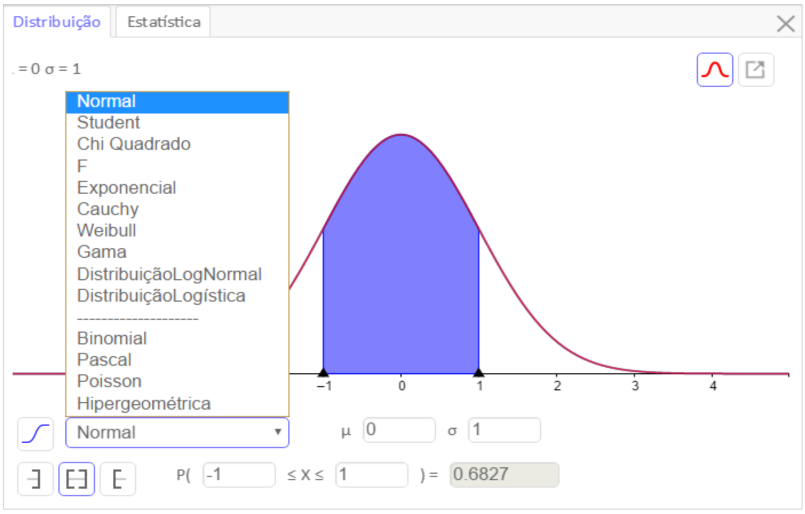
[11] Ponto que representa um valor numérico delimitado por um intervalo pré-estabelecido, que é alterado quando arrastado e cuja função é ajustar parâmetros em um modelo construído.

[12] Disponível em < https://www.geogebra.org/m/etb7qwxq>. Acesso em: 10 mar. 1018.

A construção de simulações, como a do lançamento dos dados no GeoGebra, apenas é possível através da união dos recursos de geometria, álgebra e estatística presentes no software. Ou seja, as ferramentas estatísticas sozinhas não permitiriam tal construção. No entanto, graças ao caráter dinâmico e multifacetado do software é possível compor diferentes ferramentas e comandos na criação de diferentes artefatos. Consideramos que esse aspecto, característico do GeoGebra, é singular frente a outros softwares ampliando ainda mais as possibilidades frente ao ensino e à aprendizagem de conceitos relacionados à Estatística e Probabilidade.

Uma das ferramentas mais expressivas presentes no GeoGebra sobre Probabilidade é a Calculadora de Probabilidades que representa "um tipo de versão interativa das tabelas de probabilidade que costumam vir como apêndices dos livros de Estatística" (BORTOLOSSI, 2016, p.422). Esta ferramenta apresenta duas abas: a aba "distribuição" e a aba "Estatística". Na primeira é possível trabalhar com diversos tipos de distribuições e calcular as probabilidades através da edição dos parâmetros de cada distribuição. Além disso, é possível ainda sobrepor a Curva Normal, por exemplo. Na segunda, é possível fazer testes de hipóteses a partir da distribuição escolhida. As imagens a seguir ilustram essas possibilidades, através do gráfico da distribuição normal de probabilidade, assim como a lista de outras distribuições oferecidas na aba "Distribuição" (figura 10) e os possíveis testes na aba "Estatística" (figura 11).

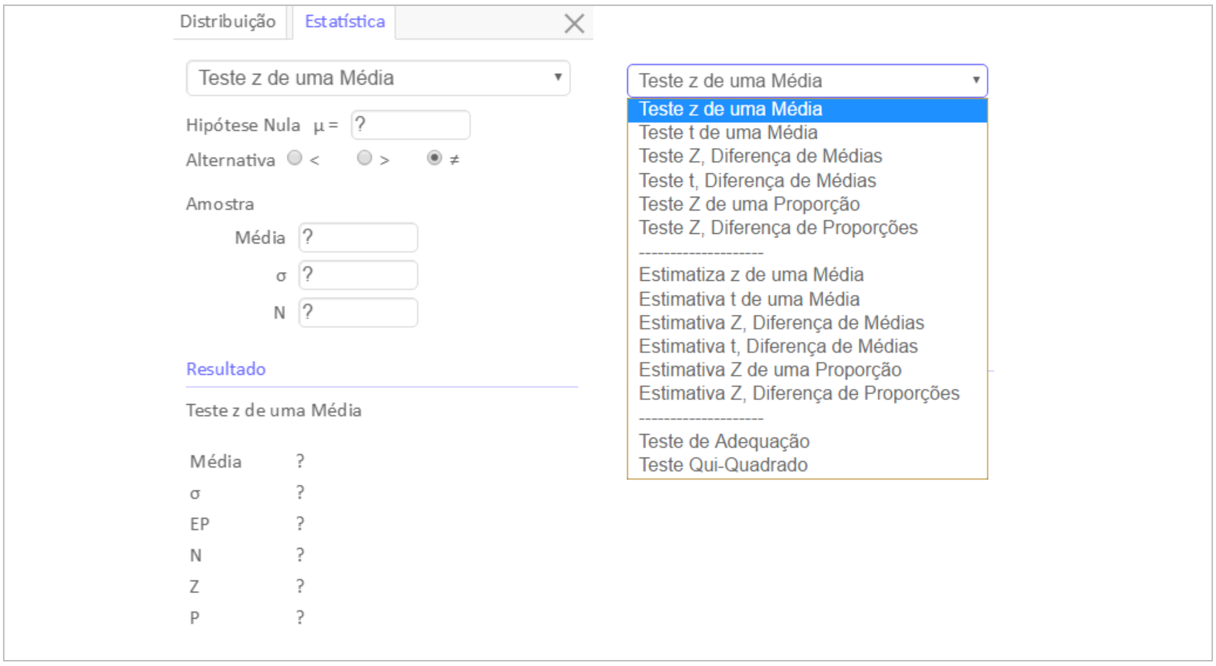
Figura 10 - Aba "Distribuição" na Calculadora de Probabilidades.



Fonte: Software GeoGebra.

É possível movimentar os triângulos pretos presentes no eixo horizontal no gráfico da figura 10 e modificar o intervalo de probabilidade, alterando automaticamente a probabilidade da distribuição.

Figura 11 - Aba "Estatística" na Calculadora de Probabilidades.



Fonte – Software GeoGebra.

Existem, ainda, diversas ferramentas e comandos que podem ser utilizados, inclusive para desenvolver atividades relacionadas à Estatística Descritiva e Inferencial, mas que não seriam possíveis de serem ilustradas em detalhes nesse trabalho[13]. Porém, foram apresentados os comandos e recursos que consideramos mais importantes para o ensino e aprendizagem de Estatística e Probabilidade.

Mesmo sendo um software com amplas possibilidades, ele apresenta algumas limitações. Entre elas é a não disponibilidade de um comando específico para o diagrama de setores. Apesar de ser possível construí-lo, as ferramentas e etapas para gerá-lo sobrepõem os conceitos estatísticos, tornando a construção mais vantajosa para a construção de conceitos matemáticos. Além disso, por apresentar múltiplos recursos e não ser específico para Estatística, o GeoGebra não comporta grande quantidade de dados. Ou seja, banco de informações com muitos dados dificultam a utilização do software. Outro fator limitador é a impossibilidade de alterar os gráficos apenas com o movimento dos pontos – no caso do gráfico criado pelo comando "*DiagramaDePontos*" – e das barras – no caso do gráfico criado pelo comando "*DiagramaDeBarras*". Nessas representações, por exemplo, os gráficos apenas podem ser modificados mediante a alteração dos dados nas planilhas.

[13] Para maiores detalhes sobre os recursos do GeoGebra, o leitor poderá consultar o artigo escrito por Bortolossi (2016). Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804/1749>. Acesso em: 10 mar. 2017.

Entretanto, consideramos que o GeoGebra pode ser relevante para o ensino e aprendizagem de conceitos e ideias tanto de Estatística quanto de Probabilidade, visto que atende aos critérios estabelecidos pelos pesquisadores da área apresentados no capítulo anterior. Ou seja, o GeoGebra é livre e gratuito podendo ser utilizado nas escolas, sobretudo as públicas. É intuitivo e de fácil manipulação e muito conhecido pelos professores de Matemática, cujo estudo de Estatística está sob a incumbência desses profissionais. Desse modo, é bem aceito para o desenvolvimento de atividades em sala de aula pelos professores, criando um ambiente de aprendizagem rico de recursos e que permite estimular os alunos a expressarem suas ideias livremente, conforme recomenda Chance et.al. (2007).

Na seção a seguir, serão apresentados os estudos correlatos na tentativa de encontrar aproximações e distanciamentos aos objetivos propostos nesta pesquisa.

3.3 Estudos Correlatos: pistas para a investigação

Na tentativa de afinar os sentidos e encontrar pistas que ajudem a responder a pergunta que guia esta investigação, buscou-se em trabalhos correlatos, experiências que possam dar suporte ao delineamento da pesquisa e que auxiliem a aprofundar os conhecimentos sobre o tema a ser investigado.

Para iniciar o mapeamento bibliográfico, tomou-se como fonte de dados os estudos que preconizavam o ensino e a aprendizagem de Estatística através do software GeoGebra publicados entre os anos de 2013 a 2017 no Banco de Teses e Dissertações da CAPES e nos anais dos principais encontros de Educação Matemática do país: o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). A escolha desses repositórios justifica-se por compreendermos a sua importância e relevância ao revelar um panorama amplo e transparente sobre as principais pesquisas e práticas emergentes no país relativas ao ensino e aprendizagem de Matemática e, consequentemente, de Estatística – componente do currículo da Matemática – na educação básica. Porém, não encontramos um número expressivo de trabalhos relacionados ao tema dessa pesquisa. No SIPEM, por exemplo, nenhum artigo sobre o tema foi encontrado no período compreendido entre 2009 e 2017. No ENEM encontramos apenas um minicurso sobre o tema realizado em 2016. No banco de Teses de Dissertações da CAPES encontramos apenas 8 dissertações e nenhuma tese sobre o tema em questão, até mesmo em períodos anteriores à 2013. Naturalmente que, uma vez que o surgimento do pacote de Estatística no software ocorreu apenas em 2009, é compreensível não encontrarmos muitos trabalhos entre 2009 e 2013.

No entanto, mesmo não encontrando nesses repositórios um número expressivo de pesquisas relativas ao tema do nosso trabalho, fomos além dessa busca e alteramos a rota de nossa investigação procurando em diversificadas fontes trabalhos e experiências de professores e pesquisadores sobre o software GeoGebra no ensino de Estatística. Por considerarmos essas pesquisas imprescindíveis para este estudo, resolvemos contemplá-las apresentado suas ideias centrais neste capítulo. Portanto, essa seção destina-se a apresentar um breve resumo dos trabalhos publicados em eventos e encontros de educação matemática, assim como um levantamento de teses e dissertações no qual encontramos pesquisas sobre o tema e alguns artigos que consideramos relevantes para este estudo.

3.3.1 Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM

O ENEM é um evento que ocorre a cada três anos e o período que determinamos investigar abrangia os eventos de 2013 e 2016. Nos anais dos eventos correspondentes a esses dois anos, encontramos apenas o minicurso de Handaya (2016) sobre o tema Estatística no GeoGebra. Neste minicurso a autora apresenta uma proposta para a construção de uma ferramenta no software para o estudo de medidas resumo de dados distribuídos por classe. A ferramenta que a autora faz referência consiste na construção de um histograma a partir de dados distribuídos por frequências e, a partir dele, realizar cálculos de medidas resumo e variabilidade como média, mediana, moda, desvio padrão, variância, percentis, quartis, curtose e etc.

3.3.2 Congresso Internacional de Ensino de Matemática – CIEM

O CIEM ocorre a cada quatro anos e o período que determinamos investigar abrange os eventos ocorridos em 2013 e 2017. No entanto, foram encontrados trabalhos publicados sobre o tema apenas em 2017, sendo dois minicursos e uma comunicação científica.

Nascimento et al. (2017) apresentam através de um minicurso três jogos no GeoGebra para desenvolver os conceitos relativos às medidas de tendência central e de dispersão. Soares e Beck (2017) apresentam algumas funções do GeoGebra para o ensino de Estatística, especialmente conceitos sobre regressão linear, através de uma atividade envolvendo o ajuste de uma curva que representa a variação do comprimento de uma barra de aço em função da temperatura. Na mesma direção, Laurindo, Caitano e Basso (2017) apresentam os principais recursos do pacote de Estatística do GeoGebra através de duas propostas de atividades: a primeira consiste na comparação e análise do desempenho de três turmas contemplando a construção de gráficos e o cálculo de medidas resumo e de variabilidade; a segunda consiste na simulação do lançamento simultâneo de dois dados contemplando as ideias sobre definição frequentista de probabilidade. Os autores destacam o aspecto dinâmico do software e a possibilidade de representar diferentes gráficos que podem ser compartilhados em uma única tela e modificados simultaneamente podendo contribuir para aprendizagem de conceitos estatísticos.

3.3.3 Banco de Teses e Dissertações da Capes

No Banco de Teses e Dissertações da Capes as pesquisas foram selecionadas a partir das seguintes palavras-chaves “GeoGebra” e “Estatística”, “Ensino” e “Estatística, “Educação e Estatística”. Nesse refinamento foram encontradas diversas pesquisas sobre a temática procurada. No entanto, foram escolhidas apenas as pesquisas que tinham como temática central a utilização do GeoGebra no Ensino de Estatística, sendo encontrados 9 dissertações e nenhuma tese.

A pesquisa de Santos (2013) apresenta um conjunto de atividades realizadas com estudantes do Ensino Médio sobre Estatística contemplando todas as etapas da pesquisa em Estatística. O software GeoGebra é utilizado na proposta da autora como um ambiente para a realização de cálculos de medidas resumo e construção de gráficos por meio de uma sequência de passos para guiar os alunos nas ações no software. As falas dos alunos sobre as ideias estatísticas ao longo da atividade não foram relatadas, não sendo possível observar a influência do software na aprendizagem sobre as ideias estatísticas.

Silva (2018) apresenta um estudo semelhante ao de Santos (2013), no entanto suas experiências foram realizadas com os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Seu objetivo era relatar uma possibilidade de atividade com abordagem contextualizada e interdisciplinar da Estatística. A atividade consistia na coleta de forma anônima de dados sobre o peso, a idade e a altura dos alunos. Após foram realizadas aulas teóricas de Estatística sobre construção de tabelas, gráficos e realização de cálculos de medidas de tendência central, para posteriormente aplicar esses conhecimentos através da análise dos dados inseridos no software. Na sequência os alunos deveriam estabelecer comparações dos próprios dados com os de outros alunos da mesma faixa etária pertencentes a outras realidades, no Brasil e no mundo, com o auxílio dos professores de outras disciplinas. Entre os resultados da pesquisa, Silva (2018) destaca que a produção de gráficos e a realização de medidas resumo no GeoGebra gerou satisfação nos alunos fazendo-os perceber que o cálculo é importante, no entanto o objetivo principal é o significado de tais valores. Além disso, com o computador foi possível ampliar o tempo para análise dos dados. Silva (2018) acrescenta ainda que a facilidade proporcionada pelos recursos do software permitiu a construção do gráfico *boxplot*, o que inicialmente não estava previsto, mas que enriqueceu os objetivos iniciais.

Nascimento (2017) apresenta em sua pesquisa um conjunto de atividades para o ensino e aprendizagem de conceitos de medidas de posição e dispersão no software GeoGebra com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental. A proposta era que os alunos preenchessem uma pesquisa feita no formulário do Google Docs pelo professor cujos dados coletados eram importados para a planilha do GeoGebra. As investigações dos conceitos estatísticos eram realizadas a partir dos dados importados mediante a exploração dos recursos do software. O autor propõe duas atividades sobre média e desvio padrão através da realização de jogos construídos no GeoGebra. Entre os resultados da pesquisa, o autor destaca a motivação dos alunos frente às práticas desenvolvidas e o potencial das tecnologias frente à realização dos cálculos. Além disso, foram observadas algumas dificuldades dos estudantes em compreender os números racionais resultantes do cálculo de algumas médias.

A pesquisa de Leite (2017) é semelhante à de Nascimento (2017), porém os sujeitos da pesquisa eram os alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Além disso, as atividades propostas envolviam realizar uma pesquisa estatística sobre o perfil dos alunos da escola e elaborar um questionário para ser respondido através do formulário do Google Docs, cujos dados eram importados para o GeoGebra e os conceitos estatísticos eram desenvolvidos a partir da manipulação dos dados mediante os recursos do software. Para avaliar os resultados obtidos, o autor elabora um questionário com perguntas relativas à avaliação da proposta didática pelos alunos e à verificação sobre a compreensão dos estudantes sobre os conceitos desenvolvidos.

Tanto na pesquisa de Leite (2017) quanto na pesquisa de Nascimento (2017) as respostas dos sujeitos ao longo das atividades sobre os conceitos estatísticos não foram investigadas segundo algum referencial teórico. Desse modo não foi possível compreender o processo de aprendizagem dos conceitos estatísticos mediante os recursos do GeoGebra, distanciando-se dos objetivos que pretendemos atingir no nosso trabalho.

As pesquisas de Gonçalves (2014), Duarte (2010), Silva (2015), Rocha (2017), Filho (2016) utilizam o GeoGebra para desenvolver ideias sobre distribuições de probabilidade explorando a calculadora de probabilidades do software e outros comandos para construir diferentes tipos de distribuições binominal, normal, etc. Entre esses trabalhos, apenas a pesquisa de Duarte (2010) apresenta uma aplicação da proposta de didática, diferente dos outros trabalhos cujas atividades não foram aplicadas com os estudantes. O objetivo de Duarte (2010) era investigar como o GeoGebra pode ser utilizado para o ensino e aprendizagem da distribuição normal de probabilidade, aplicando sua proposta com estudantes do ensino superior. Ao longo das atividades foi possível observar o processo de aprendizagem dos alunos mediante as respostas dos sujeitos da pesquisa. Entre os principais resultados apresentados o autor aponta "para a aceitação deste tipo de prática como viável e sendo colaborativa para o ensino e aprendizado, principalmente quando a ênfase for a interpretação de uma região geométrica." (DUARTE, p.110, 2010). Além disso, o autor destaca o potencial do software frente às diversas possibilidades para o estudo de outras distribuições, Estatística descritiva, análise de variâncias e de regressões.

3.3.4 Artigos sobre a temática Estatística no software GeoGebra

Além dos trabalhos divulgados no Banco de Teses e Dissertações da Capes e nos eventos de Educação Matemática, foram encontrados 11 artigos cuja temática contempla aspectos relativos ao ensino e aprendizagem de Estatística mediante os recursos do GeoGebra. Alguns desses trabalhos buscam explorar os recursos do software e apresentar a sua potencialidade na aprendizagem de Estatística na Educação Básica.

Bortolossi (2016), por exemplo, apresenta os principais recursos do software específicos para Estatística e Probabilidade e alguns exemplos de como esses recursos podem ser utilizados na criação de objetos de aprendizagem. O autor destaca o aspecto dinâmico do software, a possibilidade de múltiplas representações gráficas e a realização de simulações, além da realização de cálculos algébricos através da janela CAS e a análise de dados através da calculadora de probabilidades. Bortolossi (2016) defende a utilização do software por alunos estudantes do curso de licenciatura em Matemática em preferência a outros softwares estatísticos.

Cazares (2014) vai na mesma direção descrevendo as possibilidades do software para o ensino de probabilidade destacando o potencial cognitivo do GeoGebra sob a perspectiva das ideias de ferramentas cognitivas de Pea (1987). O autor destaca a calculadora de probabilidades que permite a exploração articulada entre as representações simbólicas, numéricas e gráficas das distribuições de probabilidades simultaneamente. Cazares (2014) destaca também os controles deslizantes, uma ferramenta presente no software que, no estudo das probabilidades, permite gerar famílias de distribuições. As planilhas e as janelas gráficas também são destacadas permitindo a realização de cálculos e simulações de fenômenos aleatórios. O autor apresenta um exemplo de atividade didática que possibilita simular fenômenos aleatórios e conclui que o GeoGebra contém várias funções de ferramenta cognitiva apontados por Pea (1987) e pode ser uma ferramenta útil para a criação de materiais didáticos para o uso em sala de aula.

Alguns artigos apresentam propostas de atividades para o ensino de Estatística no GeoGebra como Phan-Yamada e Man (2018). Em seu trabalho apresentam uma proposta de atividade que combina geometria com Estatística descritiva e inferência utilizando o software como ferramenta para analisar os dados. A atividade proposta consiste em investigar se as pessoas conseguem identificar com mais precisão o ponto médio de segmentos horizontais ou oblíquos. Os dados foram coletados a partir de experimentos no software onde as pessoas deveriam estimar o ponto médio posicionando-o no segmento de reta horizontal e no segmento oblíquo. O software, então, apresenta a distância entre o ponto estimado e o ponto médio de cada segmento. Os dados referentes às estimativas dos participantes eram registrados na planilha de cálculos do software. Após a coleta dos dados os estudantes deveriam realizar análises de regressão de duas variáveis, encontrar os intervalos de confiança e realizar testes de hipóteses através dos recursos do GeoGebra buscando investigar se existe correlação entre os dados coletados para o segmento horizontal e oblíquo. Ao final da atividade os autores concluem que o erro para segmentos horizontais é menor do que o erro para segmentos oblíquos. Argumentam ainda que o GeoGebra diminui o erro de medição dos segmentos, agiliza a realização e o registro dos cálculos e facilita a análise dos dados. Os autores defendem a utilização do software para alunos do curso introdutório de Estatística trabalhando com uma quantidade pequena de dados.

Schreiber, Ferreira e Porciúncula (2017) investigam as percepções dos estudantes de licenciatura em Matemática sobre o software GeoGebra na realização de Projetos de Aprendizagem em uma disciplina de Estatística. Para isso foi proposta uma atividade que visava tanto a aprendizagem de conceitos estatísticos quando o estudo da abordagem didática desses conceitos na educação básica. Ao final da atividade os estudantes deveriam responder a um questionário para avaliar o software em atividades de ensino de Estatística, especialmente em Projetos de Aprendizagem. Entre as impressões dos estudantes descritas pelos autores, destaca-se que o software facilita e torna mais atrativa a visualização gráfica dos dados. Os alunos demonstraram-se entusiasmados com as potencialidades do software para a aprendizagem de

Estatística e relataram que o software facilita a compreensão de conteúdos estatísticos e seus recursos possibilitam a construção do conhecimento relativos ao tema.

No que tange à análise do desenvolvimento de conceitos Estatísticos por meio do GeoGebra, destacamos a pesquisa de mestrado de Araújo (2018) cujo trabalho se aproxima dos objetivos desta pesquisa, visto que o autor busca investigar as potencialidades do software para o estudo de medidas de tendência central. Para isso o autor realiza uma proposta de atividades no GeoGebra com estudantes da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública. Para análise dos dados, Araújo toma como referencial a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e adota como referencial metodológico os pressupostos da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988). O autor propõe quatro atividades nas quais são apresentados problemas que permitem os alunos trabalhar com a planilha do GeoGebra, tendo o auxílio do software para a análise dos dados. Nesse contexto, Araújo identificou as potencialidades do GeoGebra a partir das dialéticas do aporte teórico assumido. Entre os resultados da pesquisa, o autor identifica que, em uma dialética de *ação*, o software permitiu que os estudantes organizassem os dados do problema, encontrando respostas para os questionamentos rapidamente. Outro resultado apontado pelo autor foi que a organização dos dados no software por meio de listas, tabelas e gráficos permitiu a discussão dos alunos sobre a representação dos valores em relação ao conjunto de dados, em uma dialética de *formulação*. Além disso, as múltiplas representações dos dados permitiram, em uma dialética de *validação*, que os participantes identificassem propriedades das medidas de tendência central, permitindo ao professor a realização de novas discussões acerca dessas propriedades promovendo a consolidação do saber, em uma dialética de *institucionalização*. Ao final da pesquisa, Araújo conclui que o GeoGebra contribuiu positivamente, visto que, experimento realizado possibilitou a mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos para dar significado à média, mediana e moda.

Assim como a pesquisa de Araújo (2018), nosso trabalho também envolve o estudo de medidas de tendência central no GeoGebra com estudantes do Ensino Médio. No entanto, o foco do nosso trabalho está voltado mais para a análise do processo de abstração e construção dos conceitos dessas medidas no software, e toma como referencial teórico os estudos de Piaget (1977, 1995).

Abar e Araújo (2012) apresentam a utilização da ferramenta do GeoGebra para a construção do gráfico *boxplot*. Na época em que o artigo foi publicado a versão disponível do software não apresentava *outlier* nos gráficos de *boxplot* induzindo o estudante ao erro. Para identificar esse erro os autores fazem uma comparação da construção de *boxplot* no GeoGebra com o *boxplot* do software R através de exemplos. Ao final do trabalho, os autores reconhecem que o software R é mais utilizado para análise de dados na pesquisa quantitativa e que o GeoGebra é destinado para o ensino de Matemática e Estatística, mas alertam que alguns erros nos comandos do GeoGebra, como o do *boxplot*, devem ser observados para não comprometer a formação dos alunos. Os autores finalizam sugerindo que nas futuras versões esse erro seja corrigido. Atualmente o comando para a construção de gráfico de *boxplot* já permite identificar *outlier*, não apresentando mais esse tipo de erro nos gráficos.

Na mesma linha comparativa entre os softwares GeoGebra e R, Coutinho e Souza (2013, 2015) discutem o desenvolvimento do letramento estatístico dos estudantes mediante o uso de ambientes computacionais, buscando apresentar alguns critérios e identificar contribuições, fragilidades ou limitações para o uso desses tipos de programas na construção de gráficos estatísticos. Para a análise os autores tomam como referencial teórico a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e o processo de transnumeração (Wild e Pfannkuch 1999; Pfannkuch, 2008). No texto em questão, os autores limitam-se a investigar o uso simultâneo de gráficos de pontos e *boxplot* construídos através da inserção de dados fictícios em ambos os programas, apontando que ambos os softwares permitem a representação simultânea dos gráficos no mesmo sistema de eixos facilitando a apreensão da variação, destacando que esse aspecto não é possível no Excel, por exemplo. Os autores destacam que o aspecto dinâmico do GeoGebra permite a modificação simultânea dos gráficos a partir da alteração dos dados na planilha, além da realização de construções sem a necessidade da realização de cálculos complexos. Para eles esses aspectos facilitam a análise dos gráficos e contribui para o desenvolvimento do letramento estatístico. Coutinho e Souza (2013, 2015) também argumentam certo aumento de complexidade do registro de representação semiótica no que se refere à análise dos gráficos no software R, pois o programa associa cada variável a um *boxplot* marginal, sendo necessário que o aluno mobilize habilidades mais complexas para a análise dos gráficos.

Inspirados pelas mesmas ideias sobre transnumeração de Wild e Pfannkuch (1999) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Coutinho, Almouloud e Silva (2012) propõem o desenvolvimento do letramento estatístico com professores de Matemática a partir do software GeoGebra, visando debater com os docentes as potencialidades de um ambiente dinâmico para a análise de gráficos estatísticos. Em particular, pretendia-se investigar qual a percepção de variabilidade desses professores ao utilizar um ambiente computacional para o trabalho com gráficos estatísticos com os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Um dos resultados observados foi a constatação de que a construção do gráfico de setores no software é portadora de grandes dificuldades cognitivas, ao contrário da construção e manipulação de outros gráficos no software. A possibilidade de modificar os dados na planilha alterando simultaneamente os gráficos foi um aspecto destacado pelos professores como fundamental para a discussão de variabilidade, acrescentando que na gestão do tempo didático essa possibilidade favorece a exploração de diversas formas de distribuição dos dados. Entre os resultados observados, destacou-se também a preocupação dos professores em criar uma apresentação adequada do tema em estudo permitindo ao aluno desenvolver um trabalho autônomo.

Os dois últimos artigos citados pertencem à autora Cileda Coutinho que, junto com outros autores participantes do grupo de estudos PEA-MAT[14] da PUC-SP, desenvolvem pesquisas sobre o desenvolvimento do letramento estatístico a partir do GeoGebra tomando como fonte de referência as ideias de transnumeração de Wild e Pfannkuch (1999). Em 2017, Coutinho aprofunda esse tema e propõe uma reflexão sobre as possíveis contribuições do GeoGebra no processo de transnumeração que consiste basicamente nas mudanças de representação para melhor compreender os dados. Ou seja, nas palavras da autora a transnumeração "é a busca pelas representações que, articuladas, nos contam a 'história dos dados'[15] da forma mais completa e eficaz" (2017, p.16). Para realizar essa investigação a autora apresenta representações de gráficos de pontos e boxplot no software provenientes de dados utilizados em oficinas realizadas pelo grupo de pesquisa PEA-MAT. A partir dessas diferentes representações a autora apresenta suas articulações entre o processo transnumerativo no ambiente do GeoGebra. Segundo Coutinho, a possibilidade de sobreposição de representações no software "potencializa o aprofundamento na busca da 'história contada pelos dados' " (2017, p.23), permitindo o desenvolvimento da transnumeração e a percepção da variação a partir das possibilidades oriundas do aspecto dinâmico do software.

Por último, Chan, Ismail e Sumintono (2016) apresentam a elaboração de um quadro que busca avaliar o nível de raciocínio estatístico dos estudantes do nível médio sobre as Estatísticas descritivas, especialmente medidas de tendência central e de variabilidade. O software GeoGebra, por sua vez, é utilizado pelos autores como um ambiente para a realização das tarefas (construção e análise de gráficos e realização de medidas de posição e variabilidade) que são aplicadas aos alunos sujeitos da investigação. Os resultados provenientes dessas tarefas serviram como base para a validação do quadro elaborado por Chan Ismail e Sumintono (2016). O quadro em questão consiste na articulação entre os cinco níveis do raciocínio estatístico proposto por Garfield (2002) – raciocínio idiossincrático, raciocínio verbal, raciocínio

[14] Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática - PEAMAT
[15] Expressão inspirada nas ideias de Chick, Pfannkuch e Watson (2005).

transitório, raciocínio processual e raciocínio de processo integrado – com os processos de descrever dados, organizar e reduzir dados, representar dados e analisar e interpretar dados. Ou seja, cada nível é analisado conforme os processos descritos. O quadro de avaliação elaborado pelos autores foi testado através de entrevistas baseadas em tarefas com 10 estudantes de cerca de dezesseis anos de idade que cursavam a décima série. Os alunos selecionados já tinham conhecimentos prévios sobre conceitos básicos de Estatística como: intervalo de classes, moda, média de dados agrupados, a frequência cumulativa e as medidas de dispersão. Para refinar e validar o quadro de avaliação foram propostas aos estudantes entrevistas baseadas em cinco tarefas, com 51 itens no total, onde cada item foi associado aos processos propostos pelo quadro. Os resultados apresentados ao longo da investigação mostraram que os níveis de raciocínio estatístico dos alunos eram consistentes entre as quatro construções confirmando a validade do quadro. Segundo os autores, o quadro desenvolvido “fornece um guia para planejar metas de aprendizado e projetar instruções e avaliações” (2016, p.01). O estudo apresentado por Chan Ismail e Sumintono (2016) se aproxima dessa investigação quanto aos aspectos metodológicos, visto que, o nível de raciocínio estatístico dos alunos, mediante suas interações no GeoGebra, também será avaliado. No entanto, observamos que na pesquisa dos autores o software não assume o papel principal na investigação, podendo ser utilizado outro ambiente para a realização das atividades, diferente de nossa pesquisa cujo GeoGebra é considerado por nós um componente essencial na investigação.

Ao analisar as pesquisas que utilizam o GeoGebra no ensino de Estatística percebemos que os estudos sobre a utilização do software no processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos são ainda relativamente recentes e que é pequeno o número de pesquisas sobre o tema. Ao analisar a natureza dos estudos publicados, verificamos poucos trabalhos de cunho epistemológico, ou seja, que procuram investigar como o software pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes mediante os recursos que oferece, articulando esses resultados a um referencial teórico para ajudar na análise dos dados. Destacamos, portanto, a necessidade de mais produções nesse sentido. Em particular, não encontramos nenhum estudo no que se refere a investigar, à luz da teoria de Jean Piaget (1977/1995), os processos de Abstração Reflexionante que podem ocorrer com os estudantes em seus experimentos no GeoGebra. Desse modo, consideramos que a nossa pesquisa venha preencher essa lacuna identificada.

Capítulo 4

O APORTE TEÓRICO DE JEAN PIAGET

Pensar é agir sobre o objeto e transformá-lo.
(PIAGET, 1972, p.85)

Para analisar os processos envolvidos na compreensão dos conceitos estatísticos pelos estudantes no ambiente do software GeoGebra, iremos utilizar a teoria da Abstração Reflexionante (1977/1995) e os estudos sobre Tomada de Consciência (1977) de Jean Piaget, cuja obra é conhecida como Epistemologia Genética (1983). Através dela, Piaget busca investigar como o ser humano constrói conhecimento, sobretudo como as pessoas aprendem. Além disso, será tomado como referencial metodológico entrevistas inspiradas no Método Clínico que consiste em um conjunto de estratégias utilizadas por Piaget para compreender o percurso do pensamento dos sujeitos em suas experiências. Esse método será utilizado na tentativa de investigar a maneira como os sujeitos resolvem os problemas ao agirem sobre o software, revelando as ideias que estão por trás das suas explicações.

4.1 O Processo de Abstração Reflexionante

Segundo a teoria de Piaget (1983), o conhecimento é um processo de construção contínua que ocorre por meio da interação entre o sujeito e o objeto. Este último, por sua vez, não se restringe apenas a objetos do mundo físico, mas consiste em tudo aquilo que não é o sujeito. Isto inclui não somente o meio físico, mas também o meio social.

Salientamos que o verbo “interagir” em Epistemologia Genética implica em uma relação mútua onde não somente o sujeito “age” sobre o objeto, mas o objeto também “age” sobre o sujeito. Desse modo, o sujeito só pode “agir sobre” o objeto e não “interagir”. Ou seja, é errado dizer que o “indivíduo interage com o meio” o correto é dizer “o indivíduo age sobre o meio” ou então “indivíduo e meio interagem”. (BECKER; FERREIRA, 2013)

Para Piaget (1972), pensar envolve conhecer o objeto, agindo sobre ele, compreendendo como ele é construído, modificando e transformando-o. Essas transformações ocorrem internamente e, portanto, não podem ser observadas. É por conta delas que o conhecimento não pode ser considerado uma cópia da realidade, isto é, o sujeito não aprende porque alguém ensina. Ele aprende porque o conhecimento é fruto de um processo de construções e reconstruções que ocorrem por meio das ações do sujeito sobre o objeto (assimilação) e das ações do sujeito sobre si mesmo (acomodação) quando este encontra-se em desequilíbrio na presença de uma situação nova.

Portanto, compreendemos, a partir da teoria de Piaget, que o sujeito aprende agindo, visto que as experiências provocadas por suas ações propiciam pensar sobre o objeto e sobre suas próprias ações. Nesta pesquisa, em particular, o cerne da investigação é a interação entre estudantes e o GeoGebra, sobretudo as possíveis abstrações que podem emergir dessas ações e, consequentemente, as transformações que podem ocorrer sobre as ideias estatísticas.

Para Jean Piaget a construção do conhecimento ocorre por meio do processo de abstração reflexionante. Em sua obra, "Abstração Reflexionante: relações lógico matemáticas e ordem das relações Espaciais[16]" (1995), ele busca diferenciar a abstração empírica da abstração reflexionante: a primeira é procedente da retirada de características dos objetos através de experiências físicas e observáveis; a segunda "apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo essas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas" (p. 274).

Ou seja, as texturas, as cores, as formas dos objetos são características observáveis que são retiradas desses objetos. Do mesmo modo as ações, que também podem ser observáveis, como girar, falar, andar etc. Retirar as características materiais intrínsecas desses objetos ou das ações compõe o processo que Piaget descreve como abstração empírica. Porém, o ato de atribuir qualidades provenientes das coordenações das ações e que não podem ser observáveis, porque são resultantes das coordenações internas do sujeito, constitui o processo de abstração reflexionante.

Se, por exemplo, uma criança infere que a soma de parcelas iguais pode ser representada pela operação de multiplicação, ou se ela compreende que a disposição retangular de um conjunto de objetos ou pessoas podem ser contados multiplicando-se apenas uma linha por uma coluna, ao invés de contar todos os elementos, então ela coordena as ações de multiplicar e somar. Assim como quando um estudante infere que uma parcela de um gráfico de setores pode ser representada por uma fração, que a mesma também pode ser representada por uma porcentagem e, mais, que isso equivale à frequência relativa dos dados observados em Estatística. Nesse caso, o estudante coordena as ações de representar a fração como parte do todo, como porcentagem e como frequência relativa. Os exemplos citados são provenientes da coordenação das ações que ocorrem na mente do sujeito e, portanto, não podem ser observadas,

---

[16] Obra em português, traduzida da obra original em francês, publicada em 1977 em dois volumes: "Recherches Sur L´abstraction Réflechissante – L´abstracion desrelations logico-arithmétiques" (vol. 1) e L´abstracion de l´ordre des relations spatiales" (vol. 2).

constituindo-se em abstrações reflexionantes. De modo mais amplo, a abstração reflexionante, ao contrário da empírica, é fonte de novas construções.

Jean Piaget dividiu a abstração reflexionante em dois casos particulares: abstração pseudo-empírica e abstração refletida. A pseudo-empírica ocorre quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (1995, p.274). Becker, a partir das ideias de Piaget, explica que a abstração pseudo-empírica ocorre quando "se retira dos observáveis não mais suas características, mas o que o sujeito colocou neles" (2014, p.107). Ou seja, quando a leitura dos resultados ocorre a partir de objetos materiais, como se fossem abstrações empíricas, mas que, na verdade, não são retiradas dos aspectos observáveis e, sim, das propriedades introduzidas pelo sujeito (PIAGET, 1995). Uma criança ao observar um círculo e caracterizá-lo como uma bola, por exemplo. A bola não é uma característica do círculo, mas algo que a criança atribuiu a ele.

A abstração pseudo-empírica encontra-se no meio do processo de abstração empírica e abstração reflexionante. Segundo Becker, "como reflexionante, ela reconhece a legitimidade da abstração empírica, mas, ao mesmo tempo, mostra que é a reflexionante que organiza, dá sentido aos dados obtidos pela empírica" (2014, p.119). Já a abstração refletida ocorre quando o sujeito toma consciência de suas ações, ou seja, quando o sujeito compreende o processo de seu pensamento.

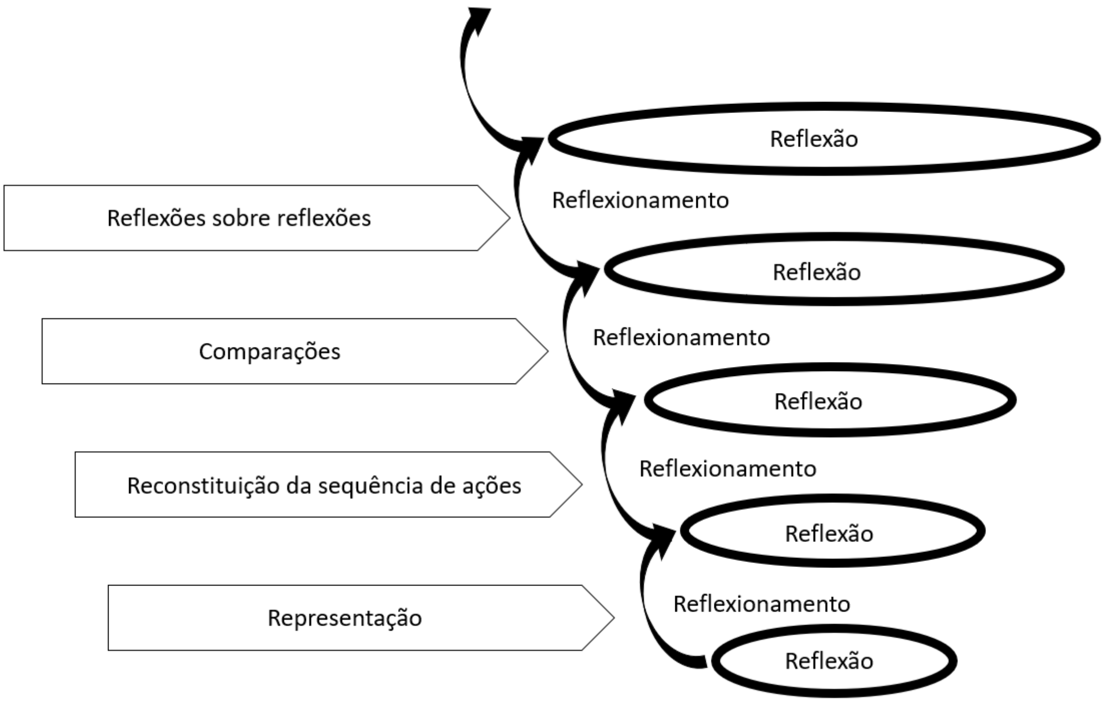
Para Jean Piaget (1995), o processo de abstração reflexionante é realizado em duas etapas: o reflexionamento e a reflexão: o primeiro consiste em projetar para um patamar superior aquilo que foi tirado do patamar inferior como, por exemplo, conceituar uma ação; o segundo consiste em um "ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior" (1995, p.274-275).

Ao longo de suas pesquisas, Piaget (1995) identifica diferentes graus de reflexionamentos: o primeiro consiste em um processo que conduz das ações sucessivas à sua representação atual; o segundo consiste na reconstituição da sequência de ações do início ao fim, reunindo representações de um todo coordenado; o terceiro patamar é o das comparações, onde a ação total reconstituída no nível anterior é comparada a outras, semelhantes ou diferentes; após a identificação das estruturas comuns e não comuns inicia-se o quarto patamar que consiste nas "reflexões" sobre as reflexões precedentes, chegando, assim, a vários graus de meta reflexão ou pensamento reflexivo. Este último permite ao sujeito "encontrar as razões das conexões, até então simplesmente constatadas" (PIAGET, 1995, p.275).

A união do reflexionamento e da reflexão compõem uma estrutura que comporta diferenças qualitativas entre patamares inferiores e patamares superiores. Segundo Becker

(2012, p.36) “a metáfora patamar superior significa que conhecimentos de menor complexidade são reconstruídos dando origem a sínteses de maior complexidade e, portanto, de maior abrangência”. Gera-se assim um processo espiral, onde “todo o reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido a reflexão” (PIAGET, 1995, p.276). O processo de abstração acontece toda vez que o ciclo reflexionamento-reflexão é iniciado, não importando o nível que se encontra. A figura 12 apresenta uma síntese do processo de abstração reflexionante em evolução identificando os diferentes graus de reflexionamento e a alternância entre reflexionamento e reflexão.

Figura 12 - Processo de abstração reflexionante e graus de reflexionamento.

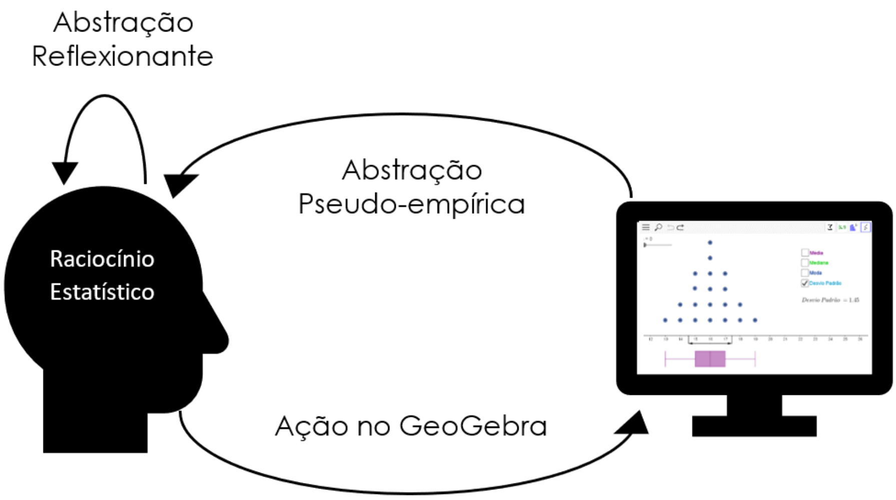


Fonte: Construção da autora.

Para Piaget (1995), o processo de abstração reflexionante ocorre em todos os estágios do desenvolvimento. Porém, a capacidade de realizar abstrações acompanha o desenvolvimento do sujeito. Ou seja, na medida que ele vai ficando mais velho maior a sua capacidade de atingir abstrações reflexivas. Do mesmo modo, quanto menor a idade do sujeito, prevalecem as abstrações empíricas e pseudo-empíricas, devido à necessidade de a criança ter que apoiar-se ao concreto para realizar abstrações (BECKER, 2014). Na medida que o estudante é estimulado a fazer abstrações através das interações com objetos e situações problemas, ele melhora a sua capacidade de pensamento evoluindo no processo de abstração reflexionante.

Compreendemos que a tecnologia pode potencializar o pensamento reflexivo, visto que ela apresenta recursos que podem concretizar as ideias não observáveis dos estudantes, assim como ajudá-los a atingir novos patamares de reflexionamento e de reflexão. Em particular, nesta pesquisa as ideias de Piaget darão o aporte teórico necessário para compreender como o software GeoGebra poderá ampliar as abstrações dos alunos frente aos conceitos estatísticos. Para ilustrar como compreendemos o processo de abstração reflexionante decorrentes da interação entre o sujeito e o GeoGebra, construímos um modelo inspirado no esquema apresentado por Valente (2005, p.54).

Figura 13 - Processo de abstração reflexionante na interação entre o sujeito e o GeoGebra.



Fonte – Reconstrução do esquema apresentado por Valente (2005, p.54).

De acordo com o modelo, o sujeito, ao interagir com o software, retira qualidades das construções presentes na tela através de características observáveis. Ao modificar essas construções ele atribui características ao objeto modificado e que não são observáveis realizando abstrações pseudo-empíricas. A abstração reflexionante ocorre quando o sujeito coordena suas ações mediante ao novo objeto construído. Ao conceituar aquilo que foi modificado, tomando consciência de suas ações, ocorre a abstração refletida.

4.2 O Processo de Tomada de Consciência: do fazer ao compreender.

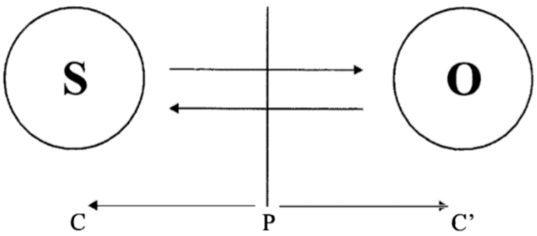
A evolução da abstração reflexionante para abstração refletida se faz por tomada de consciência. Para Piaget (1977, p.197), “a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma num conceito, essa tomada de consciência consistindo, portanto, essencialmente, numa conceituação”. Ou seja, quando o sujeito toma consciência de suas ações, compreendendo os processos de seu pensamento, ocorre a construção de conceitos.

Um dos resultados dos estudos de Piaget (1977) é o de que existe um certo atraso da conceituação em relação à ação. Isso significa que o sujeito pode ter êxito ao realizar uma determinada ação, mas não saber explicar claramente aquilo que fez, isto é, fazer sem compreender. Para tomar consciência é necessário um movimento de coordenação e reconstrução das ações no plano da representação de modo que o sujeito se aproprie das suas ações de tal maneira que saiba explicar como as realizou.

É importante destacar que a tomada de consciência para Piaget difere-se de um *insight*. Para ele o primeiro leva em conta o avanço do pensamento por meio do movimento de interação constante entre o sujeito e o objeto. Ao contrário do segundo que consiste em apenas uma iluminação, onde não há um avanço qualitativo do pensamento.

Para compreender como ocorre o processo de tomada de consciência, Piaget (1977) propõe o seguinte modelo (figura 14) que leva em conta o sujeito (S), o objeto (O) e a periferia (P):

Figura 14 - Processo de tomada de consciência.



Fonte: PIAGET, 1977, p.199.

Para Piaget (1977), o conhecimento procede não a partir do sujeito nem do objeto, mas da interação entre ambos, a partir de um ponto chamado de periferia (P). Quando o sujeito age sobre o objeto (C’), acaba transformando-o buscando assimilá-lo. Não conseguindo transformar o objeto, o sujeito transforma as suas próprias estruturas de assimilação na tentativa de acomodar o conhecimento (C) (BECKER, 1999).

Segundo Piaget (1977, p.198) “a tomada de consciência procede da periferia para o centro” e esse movimento leva à constatação de um êxito ou fracasso. Ao ocorrer o fracasso o sujeito procura investigar por que ele ocorreu buscando encontrar falha da adaptação do esquema ao objeto. É por meio dos dados de observação sobre a ação que o sujeito examina os meios empregados buscando correções ou substituições. Ocorre então um processo de idas e vindas entre o objeto e a ação no qual a "tomada de consciência aproxima-se por etapas do mecanismo interno do ato e estende-se, portanto, da periferia para o centro" (PIAGET, 1977, p.199).

Os estudos sobre a aprendizagem de Estatística mostram que em muitos casos não há tomada de consciência pelos estudantes sobre os conceitos. Ou seja, os alunos sabem reproduzir as fórmulas, mas desconhecem o motivo pelo qual estão realizando os cálculos. Sendo assim, os estudos de Piaget sobre tomada de consciência são fundamentais na aprendizagem de conceitos estatísticos, visto que colocam em pauta como ocorre o processo entre o fazer e o compreender.

Na próxima seção, apresentaremos o Método Clínico de Jean Piaget (2002), particularmente as entrevistas clínicas, procedimento metodológico que será utilizado para compreender os processos pelos quais os alunos podem percorrer ao realizar abstrações.

4.3 O Método Clínico

Compreender o modo como os estudantes pensam sobre determinados conceitos e como eles aprendem não é uma tarefa simples, visto que os percursos de seus pensamentos não podem ser observáveis. Desse modo, o professor investigador torna-se uma espécie de detetive à procura de pistas que possam revelar o pensamento e as ideias que transitam na mente do estudante. Seu papel é provocar o sujeito investigado por meio de perguntas cujas respostas são analisadas cuidadosamente na tentativa de compreender o que de fato passa em sua mente. É preciso estar atento às palavras, aos gestos e às expressões manifestadas pelo estudante em atividades que o desafiem a pensar na solução do problema proposto. Portanto, para estudar o pensamento dos alunos, sujeitos desta pesquisa, ao interagirem com o software e desvelar as abstrações que eles realizam durante esse processo, serão realizadas entrevistas inspiradas no Método Clínico de Jean Piaget.

O Método Clínico é um procedimento de análise e coleta de dados criado por Piaget em seus estudos sobre o pensamento da criança[17]. Apesar de ter origem na clínica médica, cujo interesse era o diagnóstico individual em pacientes, Piaget analisa "indivíduos normais em evolução" (DELVAL, 2002, p.70) buscando encontrar características universais que revelam como os sujeitos produzem conhecimento.

[17] Apesar de Piaget aplicar o Método Clínico em seus estudos com crianças, também é possível utilizá-lo para analisar o pensamento dos adultos.

Delval, a partir dos trabalhos de Piaget, apresenta a descrição do método e o caracteriza como uma "intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações ou experimentações do sujeito" (2002, p. 68). Essas intervenções podem ser realizadas por meio de entrevistas onde o investigador busca através de perguntas seguir o percurso das ideias do sujeito sobre a explicação de um problema ou transformações de um objeto. Essas investigações também podem ocorrer sem o uso da linguagem oral, isto é, apenas introduzindo modificações nos objetos ou situações de acordo com as hipóteses criadas pelo investigador acerca das ações do sujeito.

Segundo Delval, o pressuposto do Método Clínico reside na concepção de que os sujeitos "têm uma estrutura de pensamento coerente, constroem representações da realidade à sua volta e revelam isso ao longo da entrevista ou de suas ações" (2002, p.70). O investigador, por sua vez, deve estar atento às explicações do sujeito buscando formular hipóteses acerca de tais respostas ao mesmo tempo que as modifica. Ou seja, na medida que o sujeito apresenta suas explicações sobre determinado problema, o investigador busca formular hipóteses sobre o motivo de tais explicações e, também, modificar as perguntas ou situação experimental em função das respostas do sujeito, tentando esclarecer, completar ou contradizer as explicações dadas (DELVAL, 2002, p.72).

É importante destacar que as perguntas a serem realizadas ao sujeito devem tomar como base as hipóteses gerais acerca do problema e os objetivos que se desejam atingir. Considerando que cada sujeito poderá responder de uma maneira diferente não sendo possível prever as suas respostas, o percurso da investigação não é necessariamente linear e está subordinado às possíveis explicações do sujeito comportando idas e vindas para acompanhar a linha do seu pensamento. No entanto, é interessante elaborar algumas perguntas básicas que irão guiar a investigação, buscando identificar os principais tipos de resposta e explicações dadas pelos sujeitos. De acordo com as respostas, as perguntas principais podem ser ampliadas através de perguntas complementares na tentativa de compreender o que desejam expressar.

No âmbito desta pesquisa, serão considerados os conhecimentos prévios dos estudantes frente aos conceitos de Estatística, buscando acompanhar o percurso do pensamento dos estudantes e investigar como as suas representações sobre esses conceitos podem ser transformadas e aprimoradas frente à manipulação dos recursos do GeoGebra. Para isso, será proposto um conjunto de atividades inseridas no ambiente do software e elaboradas entrevistas inspiradas no método clínico que nos guiarão no processo de investigação, conforme o capítulo a seguir.

Capítulo 5

METODOLOGIA DA PESQUISA: CAMINHOS PARA INVESTIGAÇÃO

A melhor maneira para se captar a realidade é aquela que possibilita ao pesquisador "colocar-se no papel do outro", vendo o mundo pela visão dos pesquisados.
(GODOY, 1995, p.61)

Nesta seção serão apresentadas as questões metodológicas que guiaram este estudo, revelando os caminhos que foram trilhados durante o processo de construção da proposta didática. Desse modo, descreveremos a perspectiva metodológica assumida, assim como os procedimentos escolhidos para a produção dos dados ao longo da investigação. Também será relatado neste capítulo o estudo piloto: uma espécie de ensaio que permitiu testar os procedimentos da pesquisa antes da aplicação do experimento final.

5.1 Perspectiva Metodológica e Procedimentos Escolhidos

Inspirados pelas ideias de Jean Piaget, apresentadas no capítulo anterior, compreendemos que o conhecimento é uma construção resultante do processo de abstração reflexionante que ocorre a partir da interação entre o sujeito e o objeto. Em outras palavras, é agindo sobre o objeto que o sujeito aprende. Compreendemos também que as tecnologias digitais, por sua vez, podem potencializar o processo de construção do conhecimento, visto que dispõem de instrumentos que podem ampliar e modificar a forma de pensar dos indivíduos.

Nosso objetivo nesta pesquisa é investigar como a aprendizagem dos conceitos de medidas de tendência central pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra. Ou seja, estamos interessados no processo em que eles são construídos a partir da interação entre o sujeito e o software, buscando entender como ocorrem as abstrações nesse movimento de interação. Desse modo, os caminhos percorridos pelos estudantes são mais importantes do que o conceito final construído por eles.

Portanto, nossa preocupação nesta pesquisa não é analisar os dados produzidos em seus aspectos numéricos, mas sim observar o nível de aprofundamento das ideias apresentadas pelos sujeitos participantes da investigação. Portanto, caracterizamos essa pesquisa como qualitativa de caráter exploratório, visto que buscamos identificar “particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado” (GOLDENBERG, 2004, p. 49-50).

Segundo Goldenberg, “os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos” (2004, p.53). Entendemos que para compreender os indivíduos é necessário "colocar-se no papel do outro" observando os dados através da lente do investigado. Isso implica na constante observação do investigador, na realização de entrevistas e demais documentos que apresentem as evidências do pensamento dos sujeitos.

A partir dessa perspectiva da investigação adotaremos como estratégia metodológica a elaboração de um conjunto de atividades com o objetivo de perceber quais as representações e ideias estatísticas que os estudantes apresentam ao agir sobre as atividades construídas no GeoGebra. Para compreender esses processos e identificar aspectos que não podem ser observáveis, serão realizadas entrevistas com os estudantes, sujeitos dessa pesquisa, inspiradas no Método Clínico de Jean Piaget. De acordo com Bogdan e Biklen, o objetivo do investigador na pesquisa qualitativa é compreender em detalhes como os sujeitos pensam elaborando questões abertas e que os permitam responder de acordo com as suas perspectivas pessoais sem “se moldar a questões previamente elaboradas” (1994, p.17).

As entrevistas inspiradas no Método Clínico, se enquadram ao que Bogdan e Biklen (1994) propõem, pois consistem em entrevistas que permitem ao sujeito expressar livremente “os aspectos básicos de seu pensamento que estão relacionados com o tema de estudo” (DELVAL, 2002, p.135). Desse modo, perguntas fixas e padronizadas ou gerais e abstratas são evitadas para não induzir ou confundir o pensamento do sujeito investigado.

A fim de registrar tanto as manipulações dos alunos no software, como suas falas, expressões e gestos, as entrevistas serão gravadas e fotografadas durante a realização das atividades. Esses registros serão fundamentais para encontrar pistas que ajudam a revelar o percurso dos pensamentos. Além disso, será tomado como instrumento de coleta de dados o diário de campo do investigador, os recursos do GeoGebra e os registros escritos dos estudantes ao longo das atividades.

Segundo Borba e Araújo (2004), a multiplicidade de procedimentos permite a triangulação dos dados aumentando a credibilidade da pesquisa qualitativa. Ou seja, quanto mais procedimentos efetuarmos mais elementos teremos para construir as provas que irão nos conduzir à resposta ao problema investigado. Desse modo, compreendemos que o entrelace das atividades, das entrevistas e dos fundamentos teóricos assumidos formarão uma rede consistente que servirá como base para alcançar os objetivos pretendidos neste trabalho.

5.2 Sujeitos da Pesquisa

A aplicação da proposta didática ocorreu em duas etapas: estudo piloto e experimento final. Em ambas, o grupo de sujeitos participantes foi composto por estudantes do Ensino Médio, sendo quatro pertencentes ao estudo piloto e quatro pertencentes ao experimento final. Neste último, foram descritas as atividades realizadas por cada estudante individualmente, relatando em detalhes as entrevistas de dois sujeitos cujas respostas refletiram de maneira clara e evidente suas estratégias de investigação, permitindo acompanhar o percurso do movimento de reflexões e reflexionamentos em relação ao raciocínio sobre as medidas estatísticas.

Além disso, cada experiência ocorreu em escolas diferentes[18]. Sendo assim, a caracterização dos sujeitos, bem como o contexto em que estão inseridos, serão descritas ao logo das próximas seções.

Salientamos que a escolha pela etapa do Ensino Médio justifica-se por representar os anos finais da escolarização onde são aprofundados os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, ampliando as possibilidades para o desenvolvimento deste estudo. Além disso, no Ensino Médio os estudantes carregam consigo algumas representações pessoais sobre alguns conceitos estatísticos. Essas representações podem ser investigadas e aprimoradas frente aos recursos do software.

5.3 Proposta Metodológica

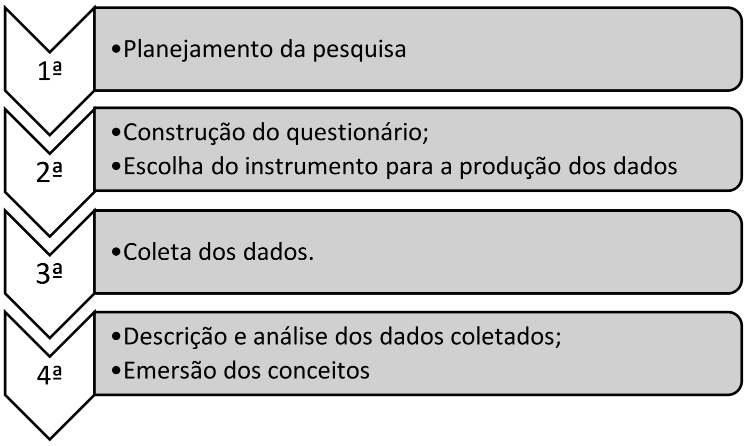
Nesta seção iremos apresentar a organização da primeira proposta de atividades que foi aplicada no estudo piloto. Essas atividades foram posteriormente replanejadas visando realizar os ajustes necessários para melhor alcançar os objetivos traçados.

Conforme as recomendações presentes em documentos oficiais e em pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem em Estatística, é importante que os alunos realizem uma pesquisa sobre algum tema do seu interesse, buscando vivenciar todas as etapas da pesquisa como planejamento, coleta, organização e análise dos dados. Desse modo, como estratégia

[18] Por motivos particulares, não foi possível realizar o experimento final na mesma escola em que foi aplicado o estudo piloto.

metodológica elaboramos um conjunto de atividades no software tomando como elementos os dados coletados a partir de uma pesquisa estatística realizada pelos estudantes conforme os seus interesses. O quadro 10 apresenta as etapas as quais os alunos deveriam cumprir para obter os dados a ser analisados no GeoGebra posteriormente.

Quadro 10 - Etapas da Pesquisa Estatística.



Fonte – Construção da autora

Para a realização da proposta estimamos encontros de aproximadamente duas horas, sendo um encontro para primeira etapa, outro para a segunda etapa e quatro encontros para a quarta etapa na qual seriam aplicadas as atividades no GeoGebra e realizadas as entrevistas com os estudantes. Não foi estimado encontro na terceira etapa, visto que a aplicação do questionário deveria ser realizada pelos alunos a distância.

Para que os estudantes pudessem compartilhar as suas estratégias, colaborando com a produção de dados e cooperando entre si para a construção dos conceitos estatísticos, os alunos deveriam ser separados em duplas, de modo que cada par realizasse uma pesquisa sobre um tema diferente.

Após a coleta, os dados deveriam ser inseridos no software GeoGebra. A representação gráfica dos dados seria realizada com a ajuda da professora pesquisadora. Ao longo das atividades também seriam utilizados alguns objetos presentes na seção “Materiais Didáticos”[19] do site do GeoGebra. Alguns desses objetos foram adaptados conforme os objetivos da pesquisa.

Os conceitos estatísticos seriam desenvolvidos por meio da manipulação dos dados pelos estudantes e também pelos questionamentos realizados pela pesquisadora ao longo das

[19] Disponível em <https://www.geogebra.org/materials?lang=pt>. Acesso em: 10 mar. 2018.

entrevistas. A sequência completa das atividades pode ser visualizada através do Apêndice D deste trabalho. Nesta sequência cada tarefa é acompanhada por um conjunto de perguntas gerais a serem realizadas ao longo das entrevistas. No entanto, conforme as respostas dos estudantes novas perguntas complementares poderiam ser realizadas na tentativa de compreender melhor seus pensamentos.

Salientamos que os procedimentos descritos consistiram apenas em uma proposta inicial. Porém, era preciso testar a aplicabilidade das atividades e do método clínico, além de identificar elementos para criar as categorias de análise da pesquisa. Portanto, realizamos um experimento piloto cuja aplicação será apresentada na seção a seguir, apontando os principais resultados e alguns aspectos a serem aprimorados na aplicação do experimento final.

Enfatizamos que a proposta didática realizada no estudo piloto e no experimento final, disponíveis nos Apêndices D e E deste trabalho, foi inspirada no conjunto de atividades sobre Medidas de Posição, disponível em <http://www.cdme.imuff.mat.br/medidasposicao/medidasposicao-html/MedidasDePInt.html>, idealizado por Ana Maria Lima de Farias.

5.4 O Estudo Piloto: primeiras experiências

5.4.1 O contexto da escola

A proposta foi realizada em uma escola estadual agrícola do município de Cachoeirinha. Esta escola conta com cursos técnicos de Zootecnia, Agricultura e Agropecuária, este último integrado ao nível médio, que são oferecidos nos turnos da manhã e da tarde. Porém, a instituição também conta com turmas regulares a partir do 6º ano do Ensino Fundamental em ambos os turnos (manhã e tarde).

Apesar de ser uma escola agrícola, está inserida em uma zona urbana do município. No entanto, contém um espaço amplo e com diferentes ambientes para o cultivo de plantas e criação de animais, prática de esportes e, também, três salas multimídia com computadores com acesso à internet, televisão, projetores e notebooks.

5.4.2 Os sujeitos da pesquisa e aplicação do projeto piloto

O estudo foi aplicado com quatro alunas que cursavam o terceiro ano do Ensino Médio e tinham entre 17 a 18 anos de idade. Essas alunas fazem parte de uma turma composta por apenas 9 estudantes com a mesma faixa etária de idade, dos quais todos foram convidados e aceitaram participar do projeto. Porém, será relatado aqui neste texto apenas a participação das quatro meninas, tendo em vista assiduidade das estudantes nas aulas durante a realização das atividades.

Segundo os relatos da professora regente da turma da qual as alunas fazem parte, os conceitos de medidas de posição – média, mediana e moda – foram desenvolvidos anteriormente e, portanto, elas já tinham alguns conhecimentos prévios sobre o tema. No entanto, medidas de variabilidade não foram desenvolvidas, logo não temos nenhum tipo de conhecimento sobre as impressões das estudantes relativas a esses conceitos.

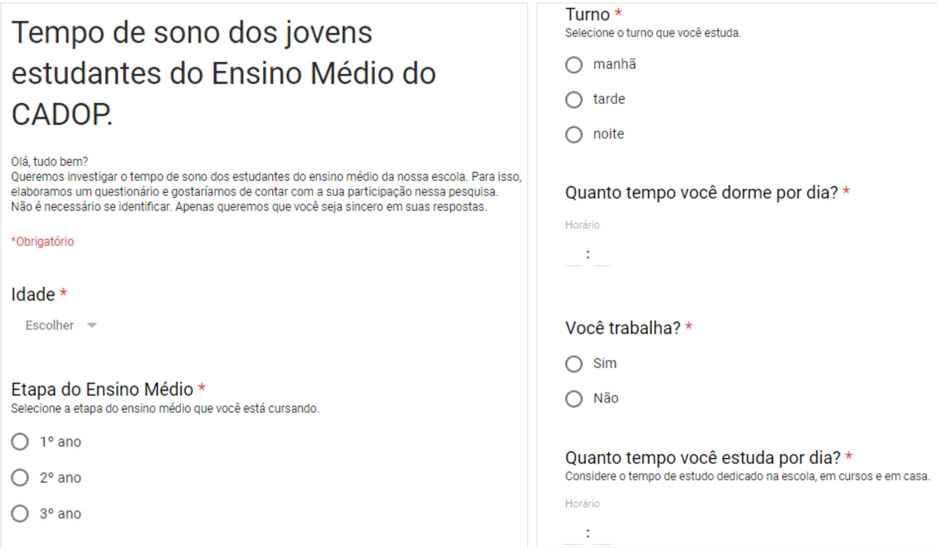
Para iniciar a proposta foi escolhido um tema de pesquisa para elaborar um questionário e coletar os dados necessários para a análise no software posteriormente. O tema escolhido pelas alunas foi sobre o tempo de sono dos estudantes do Ensino Médio da escola que estudavam. A motivação para esse tema estava relacionada à realidade dos alunos que trabalhavam e estudavam ao longo do dia e tinham poucas horas para dormir. Logo, estavam interessados em saber quantas horas os jovens dormiam por dia, tendo como perspectiva futura avaliar como isso pode interferir nas atividades do dia a dia.

Após a escolha do tema, foi elaborado um questionário, junto com a professora pesquisadora. Neste momento, foram apresentados às alunas os conceitos de população e amostra e sua importância na realização de pesquisas estatísticas.

Como instrumento de aplicação do questionário utilizou-se o formulário do Google[20]. A escolha por esse formulário deve-se à possibilidade de aplicação do questionário para muitos estudantes na modalidade à distância através de diferentes redes sociais. Além disso, o Google Forms organiza os dados automaticamente em uma planilha facilitando a análise posteriormente. A figura 15 ilustra o questionário construído com os estudantes.

[20] Disponível em: https://www.google.com/forms/about/. Acesso em: 15 jul. 2018.

Figura 15 - Questionário construído no Google Forms.



Tempo de sono dos jovens estudantes do Ensino Médio do CADOP.

Olá, tudo bem?
Queremos investigar o tempo de sono dos estudantes do ensino médio da nossa escola. Para isso, elaboramos um questionário e gostaríamos de contar com a sua participação nessa pesquisa.
Não é necessário se identificar. Apenas queremos que você seja sincero em suas respostas.

*Obrigatório

Idade *
Escolher

Etapa do Ensino Médio *
Selecione a etapa do ensino médio que você está cursando.
1º ano
2º ano
3º ano

Turno *
Selecione o turno que você estuda.
manhã
tarde
noite

Quanto tempo você dorme por dia? *
Horário
__ : __

Você trabalha? *
Sim
Não

Quanto tempo você estuda por dia? *
Considere o tempo de estudo dedicado na escola, em cursos e em casa.
Horário
__ : __

Fonte: Acervo da pesquisa.

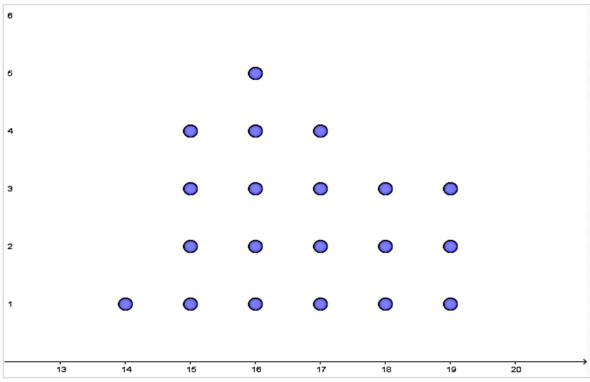
Aqui ocorreu um problema na pesquisa, as alunas não aplicaram o questionário e não tinham dados para analisar. Além disso, não havia mais tempo para realizar essa etapa. Desse modo, optou-se por trabalhar com alguns dados fictícios construídos pela pesquisadora.

Antes de analisar o conjunto de dados coletados foi apresentado o software GeoGebra, sua interface e alguns comandos principais necessários para aplicação da proposta. Destacamos que, para responder as perguntas propostas nas atividades não era necessário um amplo conhecimento do GeoGebra, pois as atividades solicitavam apenas o arrastar de pontos e a observação de dados. Além disso, a construção de gráficos e o cálculo de medidas resumo no software poderiam ser realizados junto com a pesquisadora que no percurso das tarefas conduziria as estudantes na manipulação do software.

Após a transferência dos dados para o GeoGebra a pesquisadora refletiu com as estudantes sobre a classificação das variáveis categorizando-as em qualitativas e quantitativas, e seus níveis de mensuração (quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa nominal e qualitativa ordinal). Em seguida, sugeriu a análise do conjunto de dados disponíveis na tabela presente na planilha de cálculo do software, fazendo-os perceber a necessidade de representar os dados de uma outra forma capaz de revelar informações que poderiam ser observadas mais facilmente.

Nesse contexto, a pesquisadora sugeriu a representação dos dados referentes à variável idade através do gráfico de pontos, que não era conhecido pelas alunas e, portanto, foi construído pela pesquisadora. A figura 16 apresenta o gráfico construído e os dados organizados na planilha do GeoGebra.

Figura 16 - Representação dos dados da variável idade no software GeoGebra.



	A	B	C	D	E	F
1	Idade	Quanto tem...	Você trabalha?	Quanto tempo você est...	Etapa do Ensi...	Turno
2	19	06:30:00	Sim	4	3º ano	manhã
3	17	07:00:00	Sim	6	2º ano	manhã
4	15	08:30:00	Não	5	1º ano	manhã
5	18	05:00:00	Sim	5	3º ano	manhã
6	14	10:00:00	Não	7	1º ano	tarde
7	19	04:30:00	Sim	4.5	3º ano	manhã
8	17	06:20:00	Sim	5	2º ano	tarde
9	15	08:00:00	Não	6	1º ano	tarde
10	19	04:00:00	Sim	4	3º ano	manhã
11	16	07:30:00	Sim	5	2º ano	manhã
12	18	05:30:00	Sim	6	3º ano	tarde
13	15	09:00:00	Não	8	1º ano	tarde
14	16	06:45:00	Sim	5	2º ano	tarde
15	17	07:15:00	Sim	4	3º ano	manhã
16	16	05:45:00	Sim	5	3º ano	manhã
17	15	08:00:00	Não	6	1º ano	tarde
18	17	06:20:00	Sim	4.5	2º ano	manhã
19	16	07:15:00	Sim	5.5	2º ano	manhã
20	18	05:30:00	Sim	4.5	3º ano	manhã
21	16	07:00:00	Não	6	1º ano	manhã

Fonte: Acervo da pesquisa.

Devido à extensão dos dados produzidos neste estudo piloto, iremos apresentar apenas um pequeno recorte das entrevistas mostrando as ideias das estudantes sobre média aritmética e a transformação desse conceito através das atividades realizadas no software, conforme seção a seguir.

Salientamos que, para preservar a identidade das estudantes ao longo da discrição dos diálogos, iremos identificá-los com as letras maiúsculas do alfabeto (A, B, C e D). A letra P será utilizada para referir-se à pesquisadora nos diálogos.

5.4.3 Explorando o conceito de média aritmética.

As ideias expressas pelas estudantes sobre média aritmética foram reveladas e modificadas ao longo da investigação. Em um primeiro momento, por exemplo, as alunas expressavam a média como "*o valor mais comum*", ou "*o valor que mais aparece no gráfico*".

Isso ficou evidente em suas respostas quando a professora solicitou que elas expressassem um valor que pudesse resumir as idades dos alunos observando os dados no gráfico:

A: Acho que devemos falar um valor que aparece mais.
B: É ... eu acho que é o valor que uma grande maioria tem. Por exemplo, se tiver seis alunos com 10 anos e dois com 9 anos, a turma vai se basear nos alunos que têm dez anos e não nos que têm nove anos.
A: Sim, como a nossa turma: existem nove pessoas, duas têm 18 anos e a maioria tem 17 anos. Então, acho que a nossa média seria 17 anos, entendeu?
P: Então a maioria seria a média, isso?
A e B: Sim!
P: E qual seria esse valor observando o gráfico?
C: 16 anos

P: Por quê?
B: Porque há mais pontos no gráfico.

A professora pesquisadora convida as alunas a confirmar suas respostas calculando a média aritmética, através do comando “média aritmética” no GeoGebra, e posicionando a medida no gráfico. O valor calculado pelo software foi 16,65 não causando estranheza pelas estudantes, visto que 16 é um valor próximo da média calculada:

C: A gente respondeu 16 porque a gente deu uma olhadinha rápida no gráfico, mas se a gente fizesse na ponta do lápis ...
D: Mas a mediana também não é o número que mais aparece? [Interrompeu uma aluna.]
B: Não, é a moda!
C: É!!! [Concordou como estivesse lembrando da definição de moda.]
D: Ah não, está certo! A mediana é a que está no meio.
B: É ... é o ponto central.
D: Tá, mas daí a gente está fazendo a moda.
A: Ah é verdade, por que que a média tem que ser o número que mais aparece? Até porque o número está entre 16 e 17, então...
D: A gente deveria calcular tudo e dividir pela quantidade.
P: Mas o software não fez isso?
B: Fez. Ele deu o resultado, mas a gente não sabe por que deu esse resultado.
A: É ... Por que a média deu isso? [Referindo-se ao valor calculado no software de 16,65.]

O diálogo entre as alunas revela que o conceito de média parece não estar bem compreendido, tendo em vista o conflito gerado entre as ideias apresentadas por elas e o valor calculado pelo software. Para conferir o resultado, as estudantes calcularam a média aritmética pelo celular utilizando a fórmula, ou seja, somando todos os valores e dividindo pela quantidade de valores somados. Mesmo assim, não conseguiam expressar com clareza o significado da média aritmética através do valor encontrado, visto que 16,65 nem mesmo era um dado presente no gráfico.

Ao longo da atividade, observamos que as alunas realizaram abstrações do tipo pseudo-empírica, visto que atribuíram características aos pontos que mais apareciam no gráfico. Ou seja, associaram à média os pontos que estavam sobre o 16. Além disso, as respostas das estudantes sugerem que elas estavam inicialmente no nível idiossincrático de raciocínio determinado por Garfield (2002), pois reconheciam as palavras média e moda, mas misturavam os conceitos pensando que a média é uma medida que “mais aparece” (expressão cunhada pelas alunas a partir das observações do gráfico). O mesmo resultado foi constatado nos estudos realizados por Mokros e Russell (1995), no qual os estudantes interpretavam o valor médio como aquele que ocorre com maior frequência na distribuição.

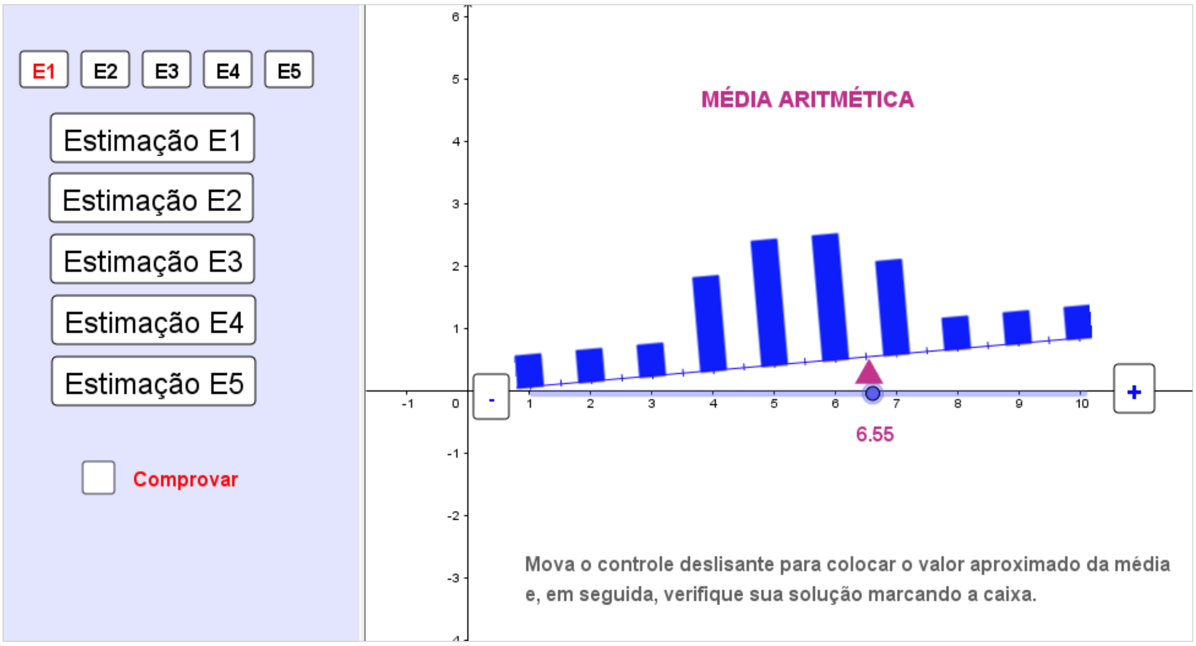
Apesar de, ao longo do diálogo, elas perceberem que estavam confundindo esses conceitos e apresentarem ideias corretas sobre moda e mediana, como "*a mediana é o que tá no meio*" e a moda é "*o número que mais aparece*", ainda não eram capazes de compreender o significado da média no contexto do problema.

Tendo em vista as ideias apresentadas pelas estudantes, as atividades propostas no GeoGebra foram desenvolvidas a partir de suas percepções iniciais conforme as seções a seguir:

5.4.3.1 Média aritmética como ponto de equilíbrio

Esta atividade consiste em observar se as estudantes compreendem a média como um ponto de equilíbrio dos dados. Para isso, foi aplicada uma atividade[21] no GeoGebra, na qual as alunas deveriam estimar a média aritmética através da observação do gráfico de barras e, em seguida, comprovar a sua estimativa selecionando o item "comprovar" presente na tela. Em outra tela, é possível observar o mesmo gráfico sendo equilibrado quando o controle deslizante presente no eixo horizontal é movido e posicionado na média aritmética, conforme ilustra a figura 17:

Figura 17 - Média Aritmética como ponto de equilíbrio.



Fonte: Atividade criada por José Luis Álvarez García[22] e adaptada pela autora[23].

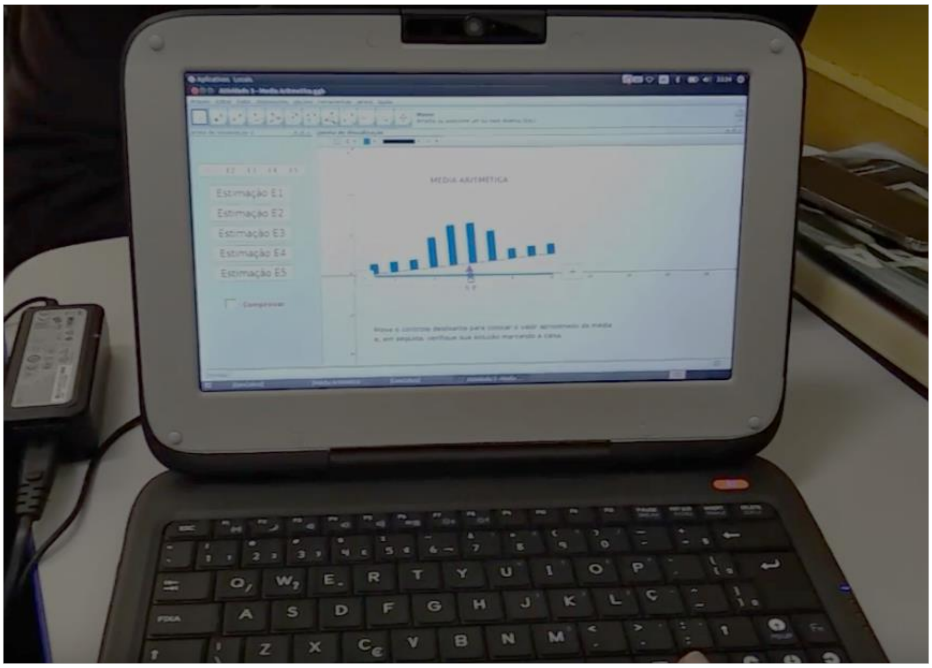
[21] Atividade 2 sobre média aritmética descrita no apêndice D.
[22] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/fwMmYGtx>. Acesso em: 10 mar. 2017.
[23] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/zhesqf99#material/kyfbmzvv>. Acesso em: 10 mar. 2017.

O primeiro gráfico observado era o mesmo presente da figura 17, onde as alunas deveriam estimar a média aritmética e em seguida posicioná-las no eixo horizontal do gráfico. A primeira atitude de uma das alunas foi recorrer à calculadora para encontrar a média. Outra estudante sugeriu que a média estivesse no meio, conforme expresso no diálogo a seguir:

B: Eu colocaria bem no meio. Sabe por quê? Porque dos dois lados ela tem o mesmo valor, então a média seria bem ao meio. Eu penso assim. [Explica a aluna com os olhos fixos na tela tentando justificar sua resposta.]
P: Tu achas que a média está bem no meio? [Pergunta a pesquisadora tentando compreender a resposta da aluna.]
B: Eu acho porque dos dois lados eles têm os mesmos valores. Se fosse calcular a média, ela seria a central ali eu acho. Entre o 5 e o 6. Eu acho que é isso.
P: Certo, então clica no botão estimar.
B: Deu 5,5.
P: Confirmou o que tu pensavas?
B: Sim, mas eu ainda não entendi. Eu fiz essa associação por cima porque eles tinham os mesmos valores mesmo sendo números diferentes. Mas eu ainda não entendi.
P: Quem tinham os mesmos valores?
B: As barras.

A partir da resposta da estudante, a pesquisadora propõe que seja acessada a tela onde aparece o mesmo gráfico em desequilíbrio e propõe que seja movimentado o controle deslizante sobre o eixo horizontal do gráfico, conforme ilustra a figura 18:

Figura 18 - Gráfico sendo “equilibrado” pela aluna através do controle deslizante.



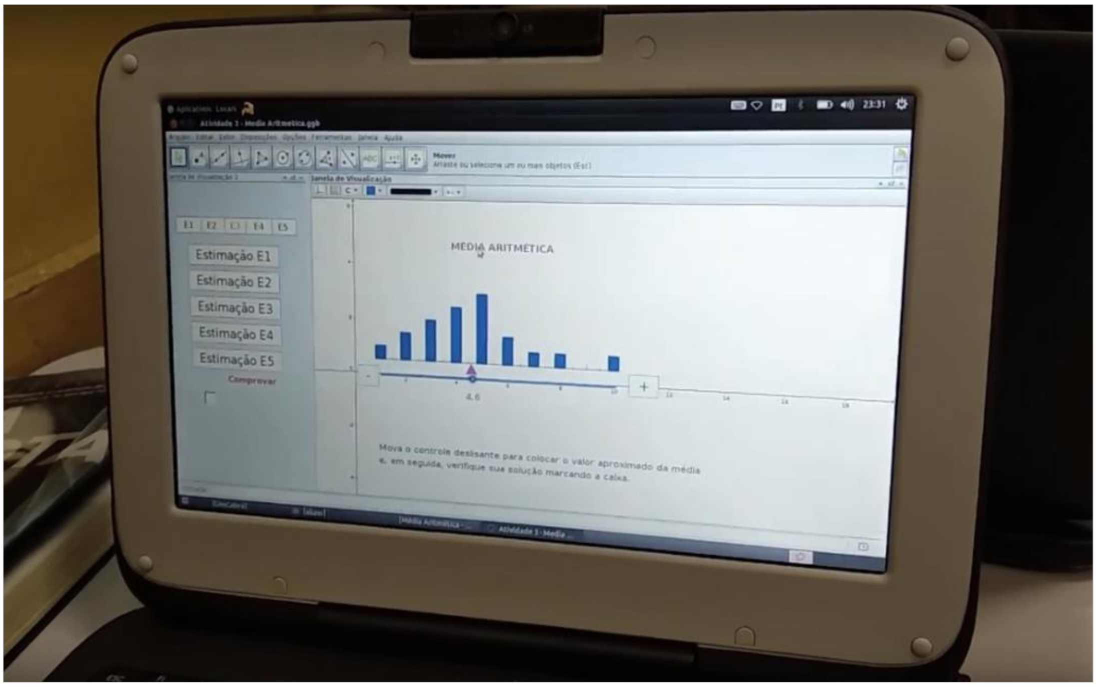
Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao observar a tela com o gráfico em desequilíbrio a aluna se espanta:

P: Movimenta o ponto azul embaixo do triângulo.
B: Movimento para onde?
P: Para onde tu quiseres. Fica movendo e observa o que acontece.
B: Ah ... Que legal! [Surpreende-se a aluna ao mover os pontos.]
P: Clica em comprovar. Não deu a média que tu tinhas estimado?
B: Sim! [Responde a aluna ao observar a média posicionada no gráfico.]
P: Agora posiciona o ponto azul.
B: É como se fosse uma balança.
P: E aí?
B: A média é o que equilibra.
P: A média é o que equilibra quando a balança se equilibra? [Pensando sobre a resposta de aluna.]
A: Quando está no meio.
B: Não, quando está na média.
P: Quando está no meio ou quando está na média?
A: É que essa média é no meio, daí equilibrou a balança.
P: Será que o gráfico se equilibra porque está no meio ou porque está na média?
B: Porque está na média.
P: Será?
A: Eu não sei. Tinha que ver outro exemplo.

A pesquisadora propõe que seja observado outro gráfico de barras, com uma distribuição assimétrica dos dados para que as alunas pudessem investigar se o gráfico se equilibraria no meio ou na média. A figura 19 ilustra o gráfico observado pelas alunas:

Figura 19 - Gráfico de barras com distribuição assimétrica.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Neste gráfico, as alunas tiveram dificuldades em estimar a média, visto que nunca haviam pensado sobre essa estimação a partir de um gráfico de barras, necessitando se apoiar no cálculo da média a partir da calculadora. O rastro da seta rosa localizada na escala horizontal do gráfico permitiu que as estudantes observassem o equilíbrio do gráfico sobre o valor da média. O diálogo a seguir descreve suas reações ao mover a seta:

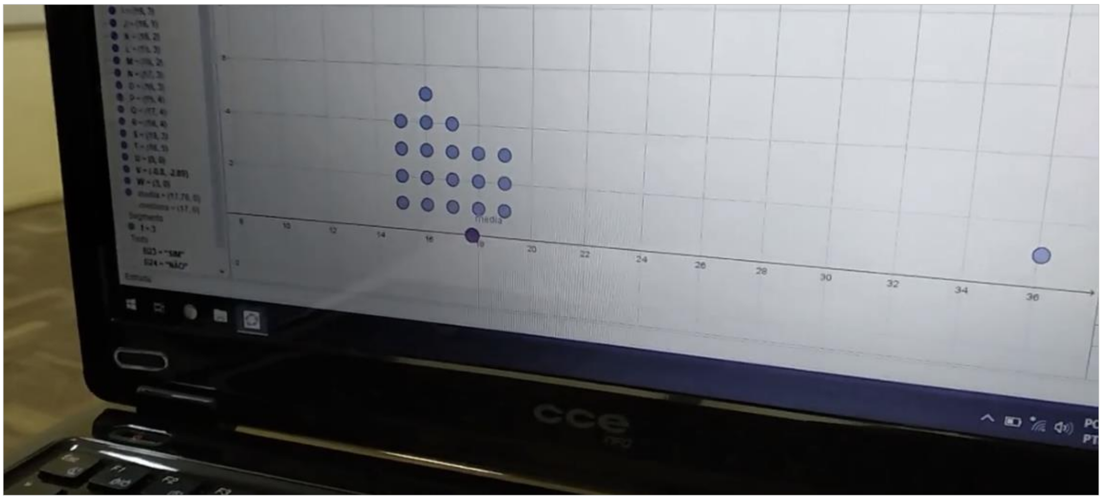
B: Ah, então realmente é a média é que equilibra.
P: Não é o meio então?
B: Não, não é o meio.
A: É! Olha ali que lindo! Equilibrou! [Expressa a aluna ao verificar através da tela de outro computador que o gráfico se equilibra na média aritmética.]
P: Então, o que nós poderíamos dizer sobre a média?
B: É o equilíbrio...
A: Não, não é o equilíbrio. Temos que achar uma resposta. Se a média equilibra o gráfico... o gráfico são os nossos resultados...
D: São os nossos dados. [Interrompe a colega tentando ajudá-la.]
A: São os nossos dados. Então...eu não consigo formar um raciocínio. Deixa eu ver. [Responde a aluna tentando elaborar uma resposta.]
D: É que a gente não sabe o conceito da média.
P: Mas ela está relacionada à ideia de equilíbrio, né?
C: A média é o equilíbrio. [Afirma a aluna.]
A: A média é meio que a nossa base.
P: A média é o equilíbrio, tu achas? [Pergunta para a aluna C.]
C: Acho que sim.
B: Eu acho que sim.

O rastro da seta rosa na escala horizontal do gráfico permitiu a modificação do objeto na tela pelas alunas ao mesmo tempo em que pensavam nas características sobre a média aritmética a partir desse movimento. A ideia de balança e equilíbrio, expressas inicialmente pelas alunas, são resultantes do processo de abstração reflexionante do tipo pseudo-empírica, visto que as características atribuídas por elas resultam das coordenações de suas ações a partir do movimento observado no gráfico. Consideramos ainda que a interpretação da média como o equilíbrio pelas alunas “B” e “C” é resultado do processo de abstração a partir dos gráficos com distribuições diferentes presentes no GeoGebra. Observamos que a aluna “A”, ao tentar formalizar o raciocínio sobre média, busca reorganizar as abstrações obtidas a partir do movimento do gráfico em um patamar superior, porém não conseguiu formalizar as ideias observadas sobre a média aritmética. Ou seja, ela tenta justificar a ideia de equilíbrio, mas não consegue observar que o equilíbrio ocorre devido à combinação existente entre as distâncias e as frequências dos valores do gráfico em relação à média.

5.4.3.2 Média aritmética sensível aos valores extremos

Esta atividade consiste em observar se as estudantes compreendem a média como uma medida que leva em conta todos os dados e é modificada na presença de valores muito afastados do conjunto de dados. Para isso, a pesquisadora retornou ao gráfico de pontos referente às idades dos alunos e solicitou que as estudantes movessem um ponto do gráfico, afastando-o dos demais. A figura 20 mostra o ponto afastado no gráfico pela aluna, posicionado no 36 da escala.

Figura 20 - Ponto afastado no gráfico pela aluna.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao mover o ponto, as alunas imediatamente perceberam que a média foi alterada e novas reflexões foram feitas a partir do arrastar de pontos conforme o diálogo a seguir:

A: A média alterou bastante. [Observa uma aluna quando o ponto foi arrastado.]
P: O que acontece quando temos um dado como esse em nossa pesquisa? Imagine que, ao observar a idade das pessoas, percebemos que a maioria das idades estão entre 14 e 20 anos e há um aluno com 36 anos de idade.
A: Eu acho que tu desconsideras esse ponto.
D: Na verdade se for pensar não, porque mudou a média então ele faz parte do gráfico.
P: Por que tu desconsideras?
A: Porque ele é um só, daí... [aluna pensando]. É porque a média já está pronta ali. Agora se a gente tem um intervalo, onde está todo mundo ali junto com o mesmo resultado, daí tem um só que é "um caso à parte" ... [aluna pensando]. Eu acho que não considera, sei lá. [...]. É porque a média já está pronta, a gente já calculou a média, então vai alterar porque tu estás movendo um ponto. Mas se a gente não tem uma média e a gente for calcular, daí não precisa.

Cremos que a expressão "*mesmo resultado*" da aluna referia-se ao intervalo 14 a 20 e a expressão "*um só*" referia-se ao ponto afastado que foi posicionado no 36 da escala.

A resposta apresentada pela aluna “A” poderia levar o diálogo para outro caminho, não sendo possível atingir o objetivo pretendido pela pesquisadora. Portanto, neste momento do diálogo, a pergunta inicial foi retomada, propondo dessa vez que um novo ponto seja arrastado pelas alunas, onde novamente o diálogo se reestabelece:

P: Ao arrastar o novo ponto, a média foi modificada?
D: Sim.
P: O que podemos pensar sobre isso? Ou seja, que características da média podemos extrair?
D: É que a média não é o que mais aparece, ela é a soma de todos eles. Não importa se um tem 14 e dez tem 16. Eu acho. [Concluiu a aluna.]

A expressão “*ela é a soma de todos eles*”, dita pela aluna “D”, sugere que ela percebe que a média considera todos os dados do grupo pesquisado e por isso a média foi modificada quando um ponto foi afastado dos demais dados.

O próximo diálogo refere-se à representatividade da média, onde a pesquisadora busca investigar se as alunas percebem em quais situações a média é considerada uma medida representativa para o conjunto de dados observados.

P: Podemos dizer que a nova média – 18,08 – calculada a partir do movimento do ponto do gráfico, representa a idade dos alunos?
B: Não, porque só uma pessoa tem 36 e o resto das pessoas são mais jovens do que ela.
P: Então poderíamos dizer que os alunos têm em média 18 anos? Esse valor representa bem o grupo de alunos pesquisados?
C: Sim, porque é a média.
P: No que vocês pensam quando ouvem a frase: “A média de idade dos alunos é de 18 anos”.
A, B, C e D: Que a maioria dos alunos tem 18 anos.

As estudantes B e C pareciam discordar da representatividade do valor da média encontrado. Porém, a distribuição dos dados no gráfico também não permitia que as alunas observassem as características que a professora desejava, pois não estava evidente que a média pode não ser em alguns casos uma boa medida para representar o conjunto de dados. Então ela propõe o arrastar de alguns pontos do gráfico de modo que o valor da média seja modificado dinamicamente, ficando ora mais próximo, ora mais afastado do conjunto de dados. Ao observar o movimento uma aluna faz a seguinte observação:

B: Então a média sempre vai acompanhar o ponto máximo?
P: Será que ela irá acompanhar?
B: Não sei, porque se tirar o número 36 a média vai diminuir, com certeza.

Novamente, percebe-se aqui uma frase que revela a percepção da aluna sobre a média como uma medida sensível aos valores extremos graças ao caráter dinâmico do software que modificava o valor da média ao arrastar os pontos no gráfico. No entanto, a pesquisadora estava interessada em saber se as estudantes percebiam a média como representativa e retoma o diálogo sobre a representatividade da média.

P: Ok, mas vamos observar o novo valor da média: 17,36. Esse valor representa bem a idade dos alunos de acordo com o gráfico?
B: Não resumiria mais se fosse o número 16.
P: E o que está "puxando" a média para o 17,36?
B: A pessoa que tem 36 anos.
P: E será que a média é a melhor medida para representar as idades dos alunos?
B: Talvez a moda representaria melhor.
P: Será? Um aluno me disse que acha que nem sempre a média é eficiente. Será que ele tem razão?
D: Tem outros recursos, a gente pode usar a média, a moda e a mediana. Daí depois que a gente fizer todos eles a gente pode chegar a uma conclusão.

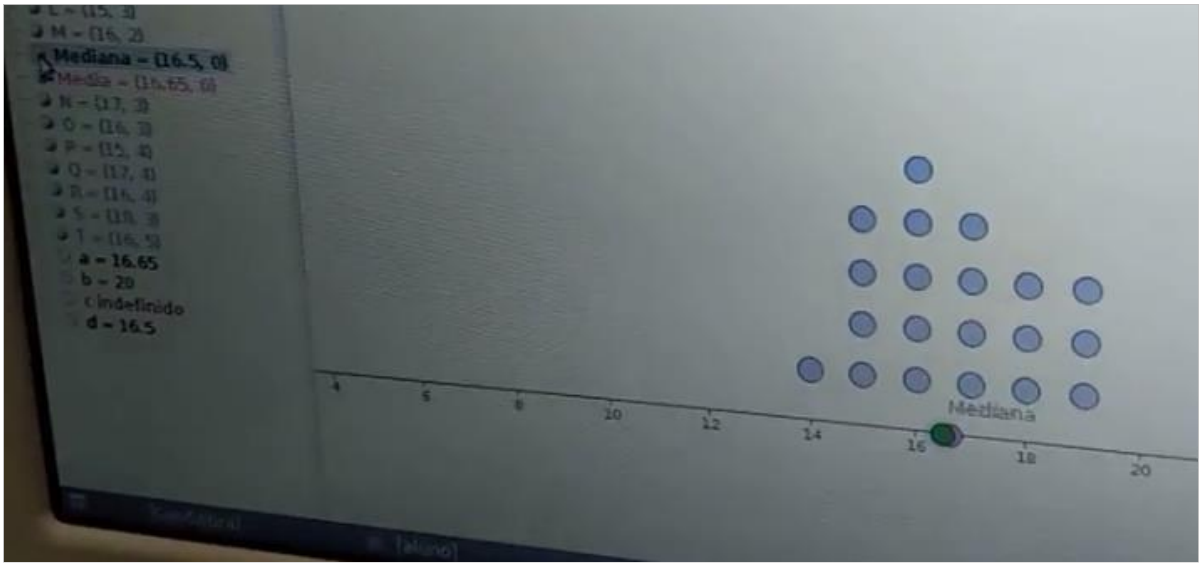
De acordo com os diálogos transcritos compreendemos que as alunas perceberam por abstração pseudo-empírica que a média é alterada quando um ponto é afastado dos demais, visto que, ao arrastar um ponto do gráfico, o objeto foi modificado cuja conclusão das alunas ocorreu a partir dessa modificação. Quando a aluna "D" justifica esse fato argumentando que a média "*é a soma de todos eles*" compreendemos que ela percebeu, também por abstração pseudo-empírica, que a alteração da média ocorreu porque levou em consideração todos os dados. No entanto, não sabemos se ela estende essa observação para diferentes contextos, generalizando a propriedade.

5.4.3.3 Comparando Média, Mediana e Moda.

Após a sugestão da estudante D, foram estimados e identificados os valores da mediana e da moda com a ajuda do software com o objetivo de estabelecer comparações e identificar diferenças entre essas medidas.

Ao longo das entrevistas, as alunas expressavam sua compreensão sobre mediana e moda. Para elas a mediana significa *"o ponto central dos dados"* ou o *"meio dos dados"*. Desse modo, no contexto das idades dos alunos, representada pelo gráfico de pontos no software, a aluna "A" estima que a idade mediana seria de 16 anos. Segundo ela: *"eu imaginei uma reta ali no meio das bolinhas e o meio fica mais ou menos ali no 16. Foi assim que eu pensei rapidamente. Ou seja, se tu separares ali mais ou menos vai dar aproximadamente 16".* Ao identificar a mediana no software (figura 21) e nos cálculos realizados em uma folha de papel, as estudantes verificaram que a estimação da aluna “A” estava próxima do valor exato, ou seja, 16,5. Além disso, a estudante “D”, ao observar a posição da mediana no gráfico, acrescenta: *“se a gente olhar ali dá pra ver que não está realmente no 16”*.

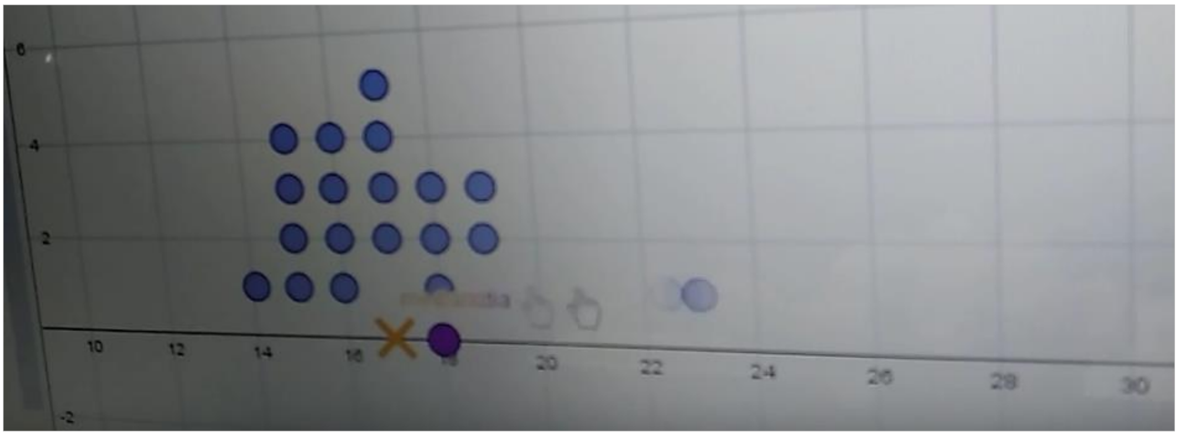
Figura 21 - Identificação da idade mediana dos alunos no gráfico de pontos.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Após a estimação da mediana, foi sugerido pela pesquisadora a modificação de alguns pontos do gráfico visando observar o que ocorre com o valor da mediana. Ao arrastar os pontos, a estudante “B” destaca: *“A mediana não altera”*. Na sequência, a aluna “A” acrescenta: *“A média altera, a mediana não”*. As alunas observaram arrastando os pontos que para alguns deles a mediana não se alterava, ao contrário de outros pontos que modificavam o valor da mediana, representado no gráfico pelo “X” (figura 22). Na experimentação do arrastar de mais pontos a estudante “A” observa que a mediana modifica com o arrastar dos pontos que estão mais ao centro.

Figura 22 - Observação da mediana por meio do arrastar dos pontos no gráfico.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Após as observações realizadas a pesquisadora propõe a seguinte reflexão:

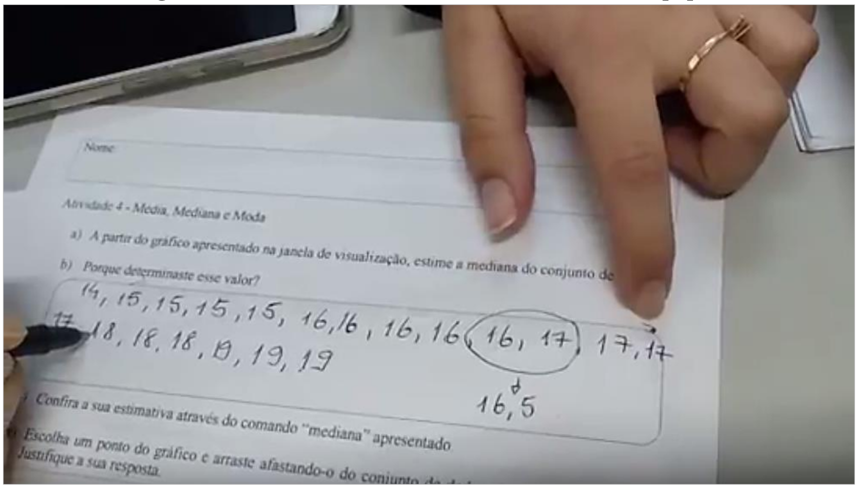
P: O que vocês podem concluir comparando mediana e média?
D: Que as vezes a média dá um resultado não tão certo. Já a mediana continua. Mesmo mudando de local a mediana...
B: É que também a mediana muda de lugar. Dependendo da coluna né...
P: Depende da coluna? Como assim?
B: É que quando ela pegou aqueles números que estão mais próximos do meio a mediana se moveu. Agora quando ela pegou aquele ponto bem na ponta só a média se moveu.
A: É porque não da interferência ele é o último dado. Agora se eu for colocar o ponto 18 lá, com certeza vai alterar a mediana. [Respondeu apontando para o lado direito da tela, dando a ideia de que o lugar ao qual ela estava se referindo era afastado dos dados.]
P: Então arrasta. Vamos ver.

Ao arrastar o ponto localizado no 18, a aluna “A” percebe que a mediana não foi alterada, ao contrário do que ela havia suposto inicialmente. Neste momento a aluna reorganiza suas ações e arrasta o ponto localizado no 18 para o lado esquerdo da distribuição observando que a mediana se altera. Neste instante ela conclui:

A: “Ah! [...] Eu acho que se a gente ‘mover’ um número naquela metade dos dados, a mediana não irá alterar. Por exemplo: se eu colocar um 17 a mais e um 18 a menos, esse valor (17) vai continuar pertencendo a essa metade dos dados e a mediana não irá alterar. Mas se eu tirar um 17 e colocar um 15 a mais já vai modificar a mediana. O meio vai ser o 16 e não o 16,5.”

A estudante ilustra a sua explicação por meio dos cálculos realizados no papel (figura 23). Sua resposta sugere que a modificação do valor da mediana ocorre quando são alterados os valores que determinam o meio da distribuição. Para confirmar sua hipótese a pesquisadora sugere que sejam alterados os valores referidos no software.

Figura 23 - Cálculo da mediana em uma folha de papel.



Fonte - Acervo da pesquisa.

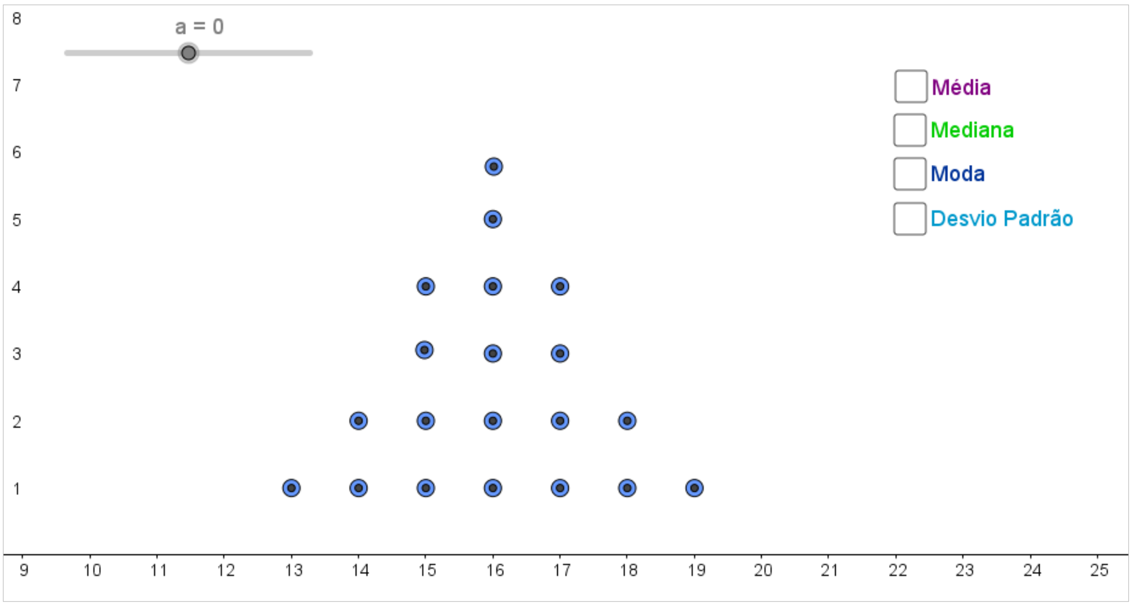
Observamos, nesse caso, o processo de tomada de consciência das alunas decorrente de suas ações sobre o objeto, experimentando alguns pontos do gráfico e observando o que acontece com a média e a mediana. A conclusão das alunas de que *"a média se altera e a mediana não"* é resultante de um processo interno de abstração de seus pensamentos determinados por suas ações no software, identificando que a mediana é uma medida mais robusta que a média. O mesmo ocorre quando as estudantes concluem que a mediana será alterada apenas se forem modificados os pontos que determinam o meio dos dados.

Essas constatações apenas puderam ser realizadas graças aos três atributos que caracterizam ambientes de manipulação dinâmica denominados por Finzer e Jackiw (1998), são eles: *manipulação direta*, o *movimento contínuo,* o *ambiente imersivo* na exploração dos dados no software. Tais aspectos permitiram às alunas observar o que acontece com a mediana quando cada ponto é arrastado, reorganizando as suas estruturas de pensamento.

Na sequência a pesquisadora pergunta o que seria a moda dos dados. A estudante B responde sorrindo: *"Acho que agora sim a moda é o valor que aparece mais!"*. Nesse caso, as estudantes não tiveram dúvidas em concluir que a moda no contexto das idades dos alunos seria de 16 anos. Observamos desta vez que houve um certo avanço sobre as diferenças entre as medidas estatísticas, ao contrário do início da entrevista, em que as alunas confundiam os conceitos de média, mediana e moda.

Para confirmar este fato, finalizamos a atividade propondo às estudantes um novo gráfico de pontos, desta vez com distribuição simétrica (figura 24), onde elas deveriam estimar a média, a mediana e a moda.

Figura 24 - Gráfico de pontos com distribuição simétrica.

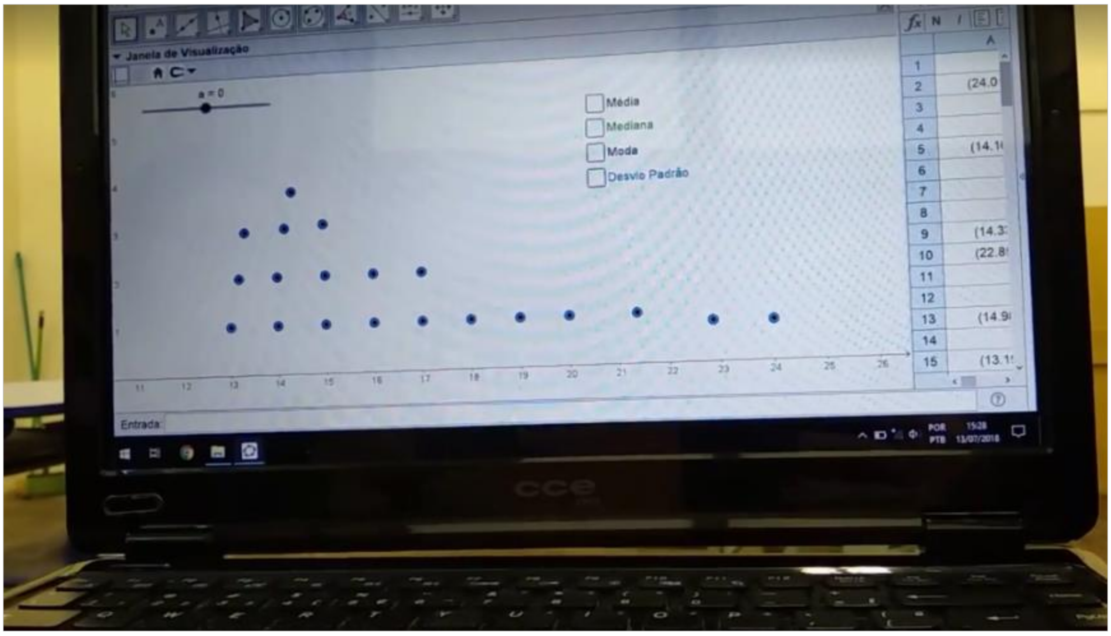


Fonte – Acervo da pesquisa.

P: Qual seria a média?
B: Eu acho que bem ali no 16. Não, não é. Eu confundi com a moda.
A: Acho que sim.
D: A gente sempre acha que a média é o maior número ...
A: Mas ali no 16 não vai equilibrar?
P: Será?
D: Não, na verdade a média vai ser um pouco mais diferente quando tem aquele gráfico assim. [Responde a aluna fazendo o desenho do gráfico com o dedo referindo-se a um gráfico assimétrico.] Mas quando é assim, como está, a média vai ser ali mesmo, no 16.
A: É se a gente pensar em uma balança, a média fica exatamente no 16 [...] porque tanto de um lado quando de outro tem a mesma quantidade de pontos.
P: Vamos conferir no software?
A, B, C e D: Sim! Acertamos! [Respondem ao verificar o valor da média identificado no gráfico.]
P: E a moda?
A, B, C e D: 16 também.
P: E a mediana?
D: A mediana vai ser entre o 15 e o 16, eu acho!?
A: Tem quantos pontos?
P: Vamos contar [...] 20 pontos.
A: A mediana é 16,5.
P: Porque tu pensaste em 16,5?
A: Porque calculando ficaria entre o 16 e 17, então o resultado somando e dividindo por 2 seria 16,5.
P: Vamos conferir. [Responde a pesquisadora conferindo o valor no software cujo valor mediano identificado no gráfico foi de 16.]
D: Não deu. Por quê?
A: Ah! É claro que não.
D: Ah! Quando a gente for ordenar os valores aqui, vamos ver que a metade vai dar bem no 16.
A: É porque se a gente for dividir o gráfico no meio vai ter a mesma quantidade de pontos tanto de um lado quanto de outro.

O valor da mediana foi confirmado no software pelo comando "mediana". Observamos, através desse gráfico, que as alunas compreendem que a média está relacionada à ideia de ponto de equilíbrio dos dados e não ao valor que mais aparece como elas pensavam inicialmente. Além disso, a fala da aluna D – "*na verdade a média vai ser um pouco mais diferente quando tem aquele gráfico assim"* – mostra que ela compreende que a média, a mediana e a moda são diferentes em gráficos assimétricos. Para confirmar essa constatação, a pesquisadora propôs uma nova distribuição. Desta vez, o gráfico é assimétrico conforme figura 25.

Figura 25 - Gráfico de pontos com distribuição assimétrica.



Fonte – Acervo da pesquisa.

As alunas tiveram dificuldade em estimar a média nesse gráfico. Para a estudante "C" a média seria 16, já para a estudante "A" a média seria 15. Já as estudantes "B" e "D" acham que a média estaria mais à direita do gráfico, próximo do 17. A aluna "D" justificou sua hipótese da seguinte maneira: *"A média estaria mais para a direita [...] porque se um grupo de alunos tirou 5 em uma prova, por exemplo, e um aluno tirou 10, a média vai aumentar e não diminuir".* Ao verificar o valor da média no gráfico as alunas "B" e "D" confirmaram a sua hipótese.

As respostas das estudantes demonstram que elas compreendem que a média é uma medida afetada por todos os valores da distribuição e que um valor extremo pode aumentar ou diminuir o valor da média significativamente. Tais constatações apenas puderam ser observadas devido ao aspecto dinâmico do software que possibilitou, por meio do rastro de pontos ao longo das atividades, a observação das medidas estatísticas de maneira imersiva e imediata.

Quanto ao valor da mediana as alunas acreditavam que seria o mesmo valor da média, justificando que o mesmo caso havia acontecido no exemplo do gráfico anterior, onde a distribuição era simétrica. Apenas a aluna “A” argumentou que a mediana pudesse ser um valor diferente, próximo do 16, justificando que, se os dados estiverem ordenados, o meio ficaria entre o 15 e o 16. Sua hipótese foi confirmada pelo software que marcou a mediana na posição de 15,5 na escala. Em relação à moda as alunas não tiveram dúvida, identificando o 14 como o valor modal.

Neste gráfico as alunas observaram que as medidas, ao contrário do gráfico anterior, não coincidiram e concluíram que as três medidas teriam o mesmo valor quando a distribuição fosse simétrica. Nesse contexto, observamos que o gráfico assimétrico, provocou um certo desequilíbrio nas estudantes, visto que desta vez, as três medidas não coincidiam, necessitando reorganizar suas ações para obter níveis de reflexões mais avançados do que os alcançados no gráfico simétrico.

Por fim, compreendemos que as ações no GeoGebra e os diálogos realizados durante as entrevistas foram fundamentais para estimar esses valores, visto que elas resgataram fatos observados anteriormente em outros gráficos para identificar essas medidas. Além disso, os experimentos realizados pelo rastro dos pontos no software permitiram a realização de abstrações reflexionantes, elevando os patamares de reflexionamento ao nível das comparações entre as medidas nas diferentes distribuições. As incoerências entre as ideias estabelecidas e os valores no software, provocaram a reorganização das ações para poder compreender propriedades das três medidas de tendência central.

5.5 Replanejamento das Atividades: alterando a rota de investigação

O estudo piloto se constituiu em uma etapa fundamental no desenvolvimento da pesquisa, visto que possibilitou identificar problemas metodológicos que foram reavaliados provocando mudanças para alcançar os objetivos traçados.

Durante o experimento, observamos que, de fato, o aspecto dinâmico e multifacetado do GeoGebra pode contribuir para novas maneiras de pensar sobre conceitos estatísticos, como já havíamos suposto em capítulos anteriores. No entanto, encontramos obstáculos na aplicação da proposta elaborada, visto que a pesquisa estatística a ser realizada pelos estudantes exigiu o cumprimento de algumas etapas antes de chegar às atividades no software, as quais eles não se motivaram em realizar. Compreendemos, portanto, que o estudo com dados secundários ao longo das atividades daria mais ênfase ao uso da tecnologia, em particular o GeoGebra.

Além disso, percebemos que as entrevistas realizadas com as alunas em grupo não possibilitaram acompanhar individualmente o processo do pensamento, nem identificar e comparar as abstrações e os diferentes níveis de reflexionamento atingidos por cada uma.

Diante disso, decidimos alterar a rota de investigação e trilhar novos caminhos replanejando as atividades e procurando fazer com que os alunos tenham um envolvimento mais direto com o software através de dados que já estão prontos, sem preocupar-se com o processo de coleta e organização. Também priorizamos pela realização de atividades e entrevistas individuais buscando maior nível de detalhamento na compreensão do percurso do pensamento de cada sujeito ao longo da ação sobre o software.

Nas seções a seguir, apresentaremos os novos sujeitos participantes da pesquisa e o contexto ao qual estão inseridos e, na sequência, o novo conjunto de atividades elaborado.

5.5.1 Novos sujeitos na pesquisa

Os sujeitos que participaram do segundo momento da pesquisa, após a aplicação do estudo piloto, pertencem a uma escola pública federal no município de Porto Alegre. O grupo de análise em questão é formado por quatro estudantes que tinham entre 16 a 18 anos, sendo um menino e três meninas. No entanto, devido à extensão da análise, serão descritas com mais detalhes as entrevistas de dois estudantes cujo percurso do pensamento pode ser acompanhado e observado com clareza o movimento de reflexões e reflexionamentos. Desse modo, as entrevistas dos outros dois sujeitos participantes serão relatadas de maneira breve, destacando apenas os momentos cujo raciocínio sobre a medidas estatísticas ficou evidente de acordo com o processo de abstração Reflexionante.

É importante destacar que os participantes estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio, com exceção de apenas uma aluna que cursava o primeiro ano. O critério de seleção do grupo analisado foi o interesse, a indicação dos professores de Matemática da escola e a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa no turno inverso ao das disciplinas curriculares. É importante destacar ainda, que todos os estudantes já tiveram aulas de Estatística sobre as medidas de tendência central e, portanto, possuem algum conhecimento sobre o assunto.

As atividades foram aplicadas mediante entrevistas ao longo de quatro encontros de aproximadamente 40 minutos. Os encontros ocorreram semanalmente no turno da tarde, entre os espaços da escola, mediante a autorização dos professores e durante os momentos em que os alunos não estavam realizando atividades curriculares.

Na seção a seguir, será apresentado o replanejamento da proposta de atividades reajustando os aspectos destacados anteriormente para atingir os objetivos traçados na pesquisa.

5.5.2 Atividades no GeoGebra: planejando novas propostas

Tendo em vista as experiências do estudo piloto, elaboramos novas atividades no software GeoGebra com base em dados secundários, abdicando da realização de uma pesquisa estatística, conforme justificado na seção anterior.

As tarefas foram organizadas de modo que inicialmente os estudantes pudessem analisar as medidas de posição a partir de um conjunto pequeno de dados estatísticos para, posteriormente, investigar essas medidas em conjuntos maiores. Ou seja, as atividades foram planejadas de forma que as propriedades das medidas de posição fossem desenvolvidas gradativamente de forma espiral, tendo em vista níveis crescentes de complexidade, conforme recomendam os documentos curriculares oficiais (BRASIL, 2017). O quadro 11 apresenta algumas propriedades das medidas de posição que cada atividade pode contemplar.

Quadro 11 - Distribuição das propriedades das medidas de posição por atividade.

Propriedades	**Atividade**			
	1	**2**	**3**	**4**
A média pode não coincidir com um dos valores dos quais ela é composta;	X	X	X	X
A média não mantém o mesmo conjunto de valores, havendo diferentes distribuições para uma mesma média aritmética;	X	X		X
A média é uma medida que pode não corresponder à realidade física;	X			
Se o número de dados for ímpar, a mediana será o valor central dos dados ordenados. Se o número de dados for par, a mediana será a média dos dois valores centrais dos dados ordenados.	X			
A mediana e a moda não alteram na presença de alguns valores discrepantes. Ao contrário da média que é uma	X	X		X

medida mais sensível, modificando-se com facilidade na alteração dos valores da distribuição, visto que é influenciada por cada um e por todos eles.				
A média é o ponto de equilíbrio do conjunto de dados da distribuição;			X	
Em distribuições simétricas média = mediana = moda; em distribuições assimétricas à direita a moda<mediana<média; em distribuições simétricas à esquerda média<mediana<moda.		X		X
Se uma constante é somada a cada valor do conjunto de dados, a média aritmética também será somada por essa constante.		X		

Fonte: Construção da autora.

Para facilitar a compreensão dos estudantes, as primeiras atividades foram realizadas incialmente a partir de dados fictícios para posteriormente utilizar dados reais. Desse modo, as atividades foram criadas a partir de uma situação hipotética envolvendo primeiro as notas de um aluno na disciplina de Matemática; após, as notas de uma turma na mesma disciplina, contendo um número maior de dados; e por fim um conjunto de dados mais amplo, como o número de acertos na prova de Matemática dos estudantes que realizaram o vestibular da UFRGS.

É importante destacar que os objetos de aprendizagem que compõem as atividades também foram utilizados no primeiro experimento, exceto a atividade 4. Esses objetos são provenientes tanto de construções realizadas no GeoGebra pela pesquisadora, como também de construções criadas por outros autores que estão disponíveis na aba “Materiais” do site geogebra.com[24]. Essas últimas foram modificadas e adaptadas conforme os propósitos dessa pesquisa.

Salientamos que a criação e adaptação desses objetos foram possíveis porque o GeoGebra é um software livre, de código aberto e com uma interface simples que integra diferentes representações em uma mesma tela, sem necessitar de uma linguagem de programação específica. Ou seja, para a criação desses objetos basta apenas que o sujeito conheça as ferramentas do software e tenha domínio da Álgebra, Geometria e Estatística, por exemplo, integrando e coordenando seus conhecimentos. Tais características são singulares no GeoGebra, conforme exposto na seção 3.2.

[24] Disponível em <https://www.geogebra.org/materials?lang=pt>. Acesso em 10 de março de 2018.

Os objetos propostos no conjunto de atividades, articulados aos questionamentos da pesquisadora, tem como objetivo proporcionar ao estudante a realização de uma exploração investigativa sobre as medidas estatísticas a partir da modificação instantânea de representações gráficas no software, provocadas pelo arrastar dos pontos. Nesse contexto, o aspecto dinâmico do software foi o componente central das atividades contribuindo para ampliar e/ou transformar conceitos estatísticos.

A sequência completa das tarefas elaboradas pode ser visualizada no Apêndice E, assim como os questionamentos principais a serem realizados pela investigadora aos estudantes sujeitos da pesquisa.

Capítulo 6

ANÁLISE DO ESTUDO

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.
(SCHOPENHAUER, 2010, p. 156-157)

Neste capítulo, os dados produzidos ao longo da aplicação da proposta serão entrelaçados com os fundamentos teóricos apresentados nos capítulos anteriores. As relações tecidas entre a teoria e as respostas dos estudantes foram os pressupostos assumidos para analisar os dados e encontrar pistas para responder à pergunta de pesquisa. Desse modo, chegar à resposta do problema proposto nessa investigação exigiu a observação cuidadosa das falas, das ações e das expressões dos estudantes, buscando identificar os diferentes níveis de pensamento dos alunos em cada etapa.

Com base nessas observações, foi adotada como estratégia de análise a descrição das entrevistas realizadas com os estudantes em cada atividade a partir da Teoria de Abstração Reflexionante (1977, 1995) e do processo de Tomada de Consciência (1977) de Jean Piaget. Ao longo dessa descrição buscamos identificar e analisar os diferentes graus de reflexionamento atingidos pelos alunos quando observam e manipulam os dados no GeoGebra e quando justificam as suas respostas. Nesse contexto, foram tecidas as relações entre as respostas dos estudantes a partir das atividades verificando como o software pode contribuir para a compreensão dos conceitos estatísticos sobre medidas de tendência central.

As seções a seguir apresentam a descrição das análises conforme as estratégias traçadas.

6.1 Interpretando dados e tecendo relações

Nesta seção apresentaremos alguns recortes das entrevistas realizadas com os estudantes em cada atividade, que foi analisada à luz da teoria de Abstração Reflexionante de Jean Piaget (1977/1995). Os trechos em itálico representam as falas dos alunos no corpo do texto. Para preservar a identidade dos participantes, iremos identificá-los com letras maiúsculas do alfabeto (E, F, G e H) onde cada letra representa um estudante diferente. A letra P será utilizada para referir-se à pesquisadora nos diálogos. Além disso, com o objetivo de facilitar a leitura, foram realizadas algumas correções nas falas dos sujeitos sem que a essência das ideias envolvidas fosse comprometida.

A descrição das entrevistas está organizada por aluno, na qual buscamos apontar os principais resultados ao longo de cada atividade[25]. Ou seja, destacaremos aspectos que consideramos mais relevantes a respeito do raciocínio sobre as medidas estatísticas de cada sujeito, demarcando o movimento de reflexionamentos, reflexões e tomadas de consciência.

6.1.1 Entrevista com a estudante E

6.1.1.1 Atividade 1

A primeira atividade permitiu verificar os conhecimentos prévios da estudante sobre média, mediana e moda. No caso da média aritmética, observou-se que a aluna apresentou dificuldade para defini-la sem descrever o algoritmo. Isso ocorreu em diversos momentos, ficando evidente também ao longo de suas justificativas. Nas palavras da aluna *"[...] na média tu somas tudo e divide pela quantidade que tem"*. Desse modo, toda a vez que era preciso estimar a média aritmética, ela realizava mentalmente o cálculo utilizando os valores dos pontos[26] representados na escala. Resultados semelhantes sobre interpretar a média como um algoritmo foi identificado nos estudos de Mokros e Russell (1995) e Carzola (2003), por exemplo. Além disso, de acordo com as categorias de Watson e Moritz (2000), parece que essa estudante estaria em um nível Multiestrutural de desenvolvimento sobre a compreensão da média.

Em determinado momento da entrevista foi solicitado que a aluna apresentasse possíveis conjuntos de três notas cuja média fosse igual a 5. A aluna, então, arrasta um ponto para o número 10 da escala, arrasta outros dois pontos empilhando-os no número 5 e justifica da seguinte maneira: *"uma das possibilidades é gabaritar uma das provas, ou seja, ter tirado nota 10, e nas outras duas tirar nota 5. Porque daí quando somar as três notas, vai dar 15 ao todo. Então, ao dividir por três, dará 5"*. No entanto, o valor da média aritmética calculado pelo software e posicionado na escala era 6,7. Quando indagada sobre o motivo que pelo qual o valor não correspondeu ao esperado, a aluna clica novamente na caixa seletora correspondente à

[25] Observamos que neste capítulo não estão descritas as tarefas de cada atividade. Portanto, recomendamos para melhor compreensão da leitura, que seja consultado o Apêndice E desse trabalho.
[26] Para melhor compreensão do texto, chamaremos de "pontos" os "X's" presentes no objeto da atividade 1, conforme pode ser observado no Apêndice E deste trabalho.

média presente na tela, tentando encontrar algum "erro" no software. Porém, o valor calculado continuava o mesmo, isto é, 6,7. Segue, então o diálogo a seguir:

E: Tá, então esquece.
P: Não, vamos ver o que está acontecendo. Por que será que o software calculou 6,7?
E: Ah tá, fiz a conta errada! [Responde a aluna após pensar alguns segundos.] É que o total dava 20 que dividido por 3 dá 6,7. Então podemos pensar em 2,5 em uma prova, 2,5 em outra prova e 10 na outra prova. Aí a média será 5.

Ao confrontar o resultado pensado com o valor calculado pelo software, a aluna entra em desequilíbrio. Para verificar o que havia ocorrido, a aluna selecionou novamente a caixa seletora da média tentando recalculá-la, acreditando que ocorreu algum erro no software. Assim, ela procura assimilar o objeto, tentando transformá-lo para satisfazer suas necessidades. Ao perceber que isso não era possível, a aluna tenta transformar-se a si mesma por acomodação, buscando encontrar os motivos para os quais o erro ocorreu, reorganizando as suas estruturas. Esse processo de dar-se conta do erro cometido deve-se às ações no GeoGebra que, de acordo com os atributos pontuados por Finzer e Jackiw (1998) nesses ambientes de manipulação dinâmica, possibilitou a modificação *direta* e a observação do *movimento contínuo* dos pontos, calculando instantaneamente o valor da média, posicionando-a na escala.

O dinamismo do software também foi fundamental para testar outras possibilidades sobre o conjunto de notas com média 5. Isto é, na medida que a aluna pensava nos valores, ela arrastava os pontos, confirmando as suas hipóteses instantaneamente.

Em outro momento, ao longo da atividade foi proposto à aluna estimar a média de um conjunto de dados que representavam o número de animais de estimação por família cujos valores eram respectivamente 0, 1, 1, 2, 2, 3. Ao representar os dados na escala, perguntamos qual seria a média de animais por família. A aluna responde da seguinte maneira:

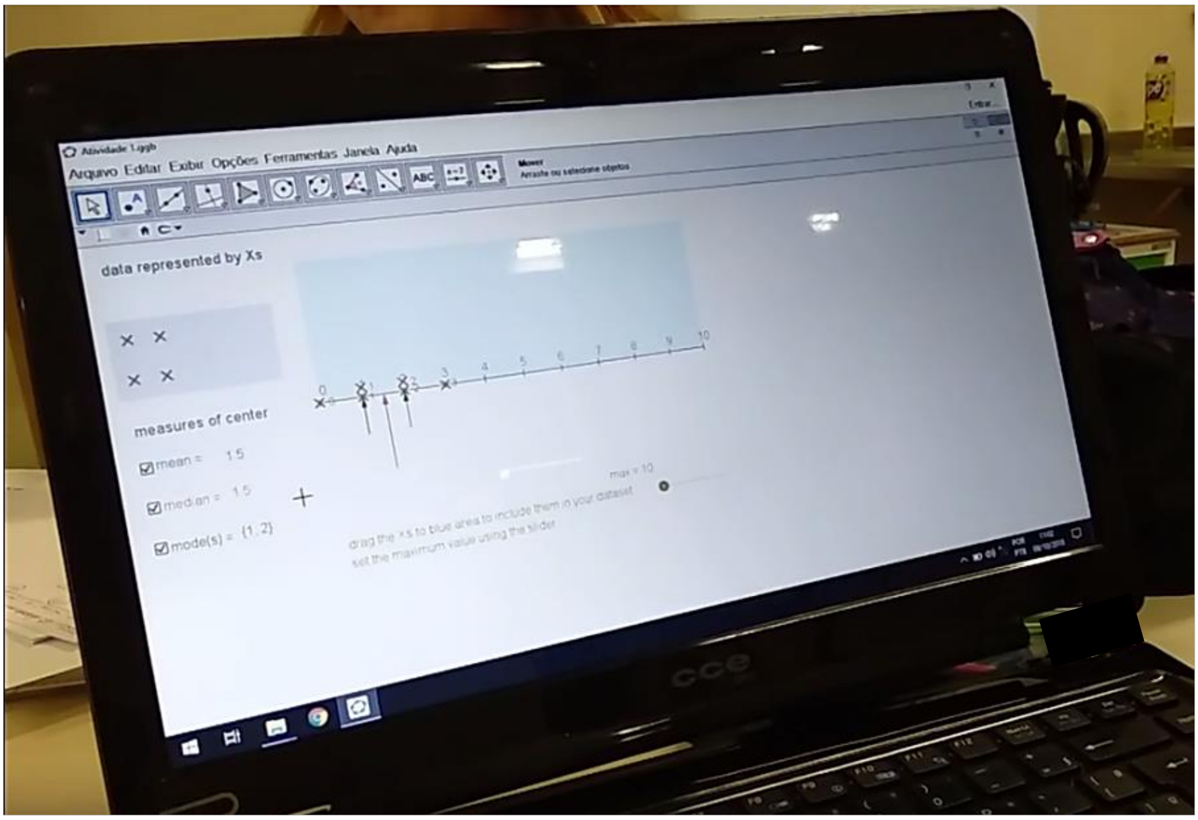
E: Seria 2, talvez, ou um pouco mais [...] não, será 2 ou 1. Acho que mais perto do número 2 eu acho, porque não dá para ter um valor quebrado de animais. [Responde a aluna pensando sobre a média.]
P: Me explica como tu pensastes. Por que não dá para ter um número quebrado de animais?
E: É que, na vida real, não daria para ter um gato e meio, por exemplo, mas a média seria entre 1 e 2. Mais perto do 2 do que do 1. Ou seja, tu tens que somar o número de animais que tem ao todo, que é igual a 9, e dividir pelo número de famílias para saber quantos animais tem por família. Então, 9 divido por 5 dá 1,8.

A fala da aluna apresenta um conflito de ideias quanto ao valor da média e sua representação na realidade física. Além disso, apesar de a sua estimativa estar correta quanto ao intervalo que a média se encontrava, seu cálculo estava incorreto, visto que o número total de famílias é 6 e não 5. Desse modo, o valor esperado pela aluna, não correspondeu ao valor calculado pelo GeoGebra. A diferença entre os valores pode ser observada imediatamente por meio do software, induzindo a aluna a perceber que ela havia contado errado a quantidade de famílias, esquecendo-se que a família que não tinha animal de estimação também era considerada. Se não houvesse a possibilidade de conferir o valor correto rapidamente, possivelmente esse erro não seria notado.

Aproveitando os dados representados na escala sobre o número de animais por família, foi solicitado que a aluna estimasse o valor da mediana. Este constituiu o momento de maior dificuldade para a estudante, visto que ela não lembrava do cálculo para chegar à resposta. Sua primeira estratégia, então, foi retomar o conceito de moda ao qual faz uma pequena confusão com a mediana, que rapidamente foi corrigido por ela, conforme a frase a seguir: *"Eu iria falar que mediana é o número que mais aparece, mas agora eu lembrei que isso é a moda"*. Ao relembrar o conceito, a aluna sugere que a moda do conjunto de dados apresentados é 1 e 2. Logo em seguida, sua hipótese é confirmada ao clicar no comando "moda" presente na tela.

No entanto, ainda sem conseguir dizer algo sobre a mediana, solicitou-se à aluna que verificasse o valor mediano por meio da seleção do comando correspondente presente na tela. A figura 26 apresenta as três medidas posicionadas na escala cujos valores também aparecem no canto esquerdo da tela:

Figura 26 – Observação da estudante E sobre a média, mediana e moda na tela do GeoGebra



Fonte: Acervo da pesquisa.

A aluna surpreende-se ao perceber que o valor da mediana e da média coincidiram, ou seja, 1,5. A partir de então, iniciou-se um diálogo com a pesquisadora:

P: O que tu achas disso? O que esse valor 1,5 te faz compreender a respeito da mediana?
E: Ah, que a média é igual a mediana não pode ser, mas nesse caso ela é igual a média.
P: Será que ela sempre será igual a média? Ou tu achas que é apenas nesse caso?
E: Eu acho que apenas nesse caso, porque se fossem sempre iguais não haveria dois conceitos para a mesma coisa.

Para comprovar a sua hipótese a pesquisadora sugeriu que a aluna testasse novas distribuições arrastando os pontos na escala, cujos valores das três medidas automaticamente também eram modificados. Esse processo fez a aluna reconstituir suas ações e conjecturar que a mediana seria a média entre valores que mais aparecem. No entanto, essa hipótese foi rapidamente descartada quando a estudante encontra uma distribuição que refuta a sua ideia. A partir do diálogo com a pesquisadora, diferentes distribuições foram testadas até o instante em que a aluna apresenta a seguinte conclusão:

E: A mediana pode ser o número que está bem no meio. [...] Ah, não isso é a média. [A aluna responde pensando.]
P: Então a média é o número que está no meio?
E: Sim! Não?
P: Não sei! Vamos testando as tuas hipóteses no software. Vamos arrastar os pontinhos. Então para você a média é o número do meio?
E: É! [...]Se bem que tem a média entre três. [...] Não o número do meio em si não, mas em uma reta seria a parte bem no meio. Não, não necessariamente. [A aluna pensa novamente mudando de ideia várias vezes.] A média é a média. [Conclui a aluna sem conseguir definir a média.]
P: E a mediana?
E: Posso fazer um teste?
P: Claro!

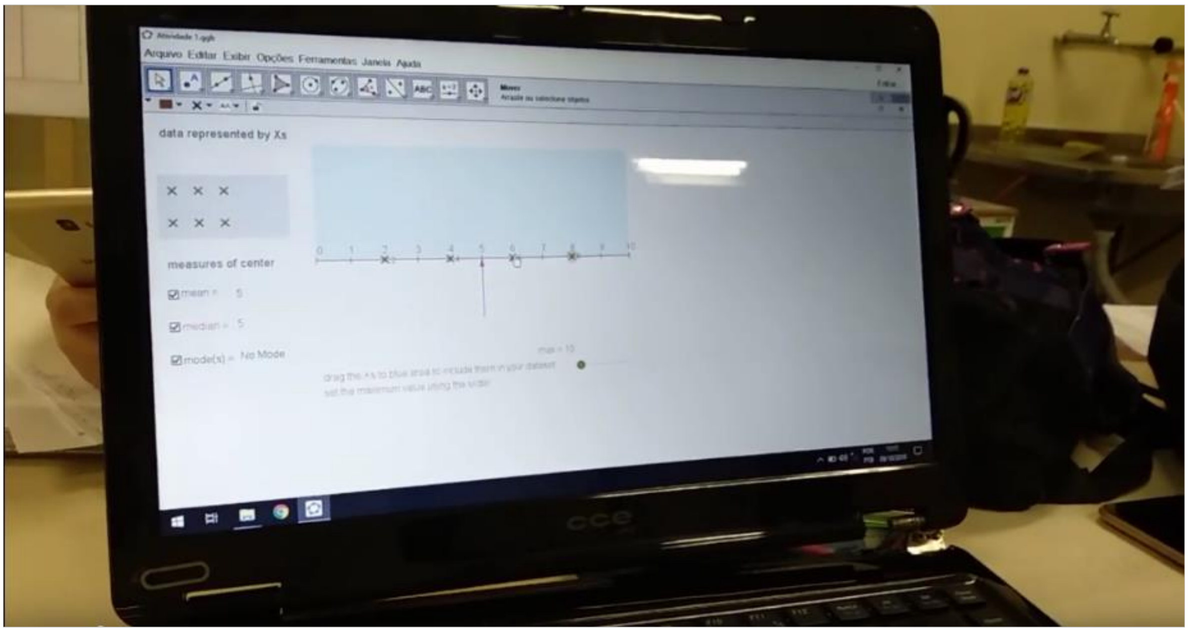
Para tentar encontrar uma resposta, a estudante retira todos os pontos da escala deixando apenas três. A partir de então, começa a arrastá-los observando o movimento da seta que representa o valor da mediana. A partir de alguns movimentos a aluna responde:

E: A mediana dá a entender que é não a média de tudo, mas um número intermediário. Por exemplo: entre 5, 7 e 8 o número do meio seria o 7, porque 5 é menor do que 7 e 8 é maior do que 7. Então a mediana é o 7. Se eu arrastar esse ponto do 8 para o 2 lá na outra ponta, a mediana vira o 5. Se eu arrastar o ponto do 5 para o zero, a mediana vira o 2.
P: Entendi. E a média?
E: A média é literalmente o termo do meio.
P: Qual a diferença então entre a média e a mediana?
E: Sei lá, a mediana seria o número do meio, nem maior nem menor do que os outros. É que se eu fico com apenas dois pontos isso já não acontece. [Responde a aluna, após alguns segundos pensando e arrastando os pontos.]
P: Ok, vamos fazer com dois pontos, então.

E: Com dois a mediana vira a média.
P: Ok, mas como tu defines a mediana nesse momento, a partir do que tu já experimentaste?
E: Tá, entre dois pontos ela seria a média. E entre três pontos, número ímpar, enfim, seria um número que é nem o maior nem o menor, seria o número do meio. E a média vira média aritmética, tu somas todos os pontos que tu tens e divide pelo número de pontos.
P: Então vamos por um quarto ponto na escala.
E: Aí tu destrói a minha ideia.
P: Por quê?
E: Daí já não sei mais. [Responde inserindo o quarto ponto na escala arrastando para a esquerda e para direita.] Tá, para quatro pontos igualmente espaçados a mediana vira a média. Agora se eu mudar o meu pontinho, aí não é mais a média. Aí eu não sei de mais nada.

A figura 27, ilustra o momento em que a aluna insere o quarto ponto na escala e começa a arrastá-lo. O "pontinho" ao qual ela refere-se está localizado em cima do número 6. Ao movê-lo ela percebe que a seta rosa, que indica a mediana, afasta-se da seta azul, que indica a média.

Figura 27 – Investigação da estudante E sobre o valor da mediana para quatro pontos na escala.



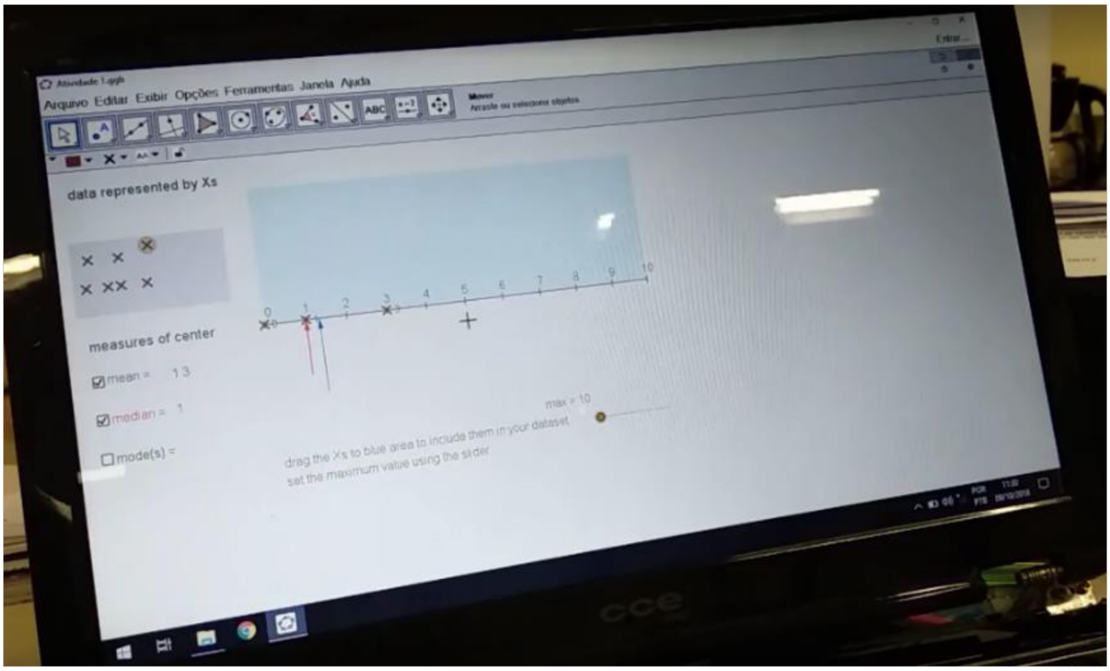
Fonte: Acervo da pesquisa.

Para auxiliar a aluna, foi sugerido que ela realizasse diferentes tipos distribuições entre os pontos, ora arrastando todos para um lado e deixando um mais afastado, ora distribuindo os pontos igualmente na escala, e etc. Além disso, também foram inseridos pontos na escala, fazendo-a observar o que ocorre com o valor da mediana com um, dois, três, quatro, cinco, seis pontos e assim sucessivamente. Sucedeu-se então um longo processo de arrastar os pontos observando o comportamento da mediana, até o momento em que a aluna supõe a seguinte hipótese:

E: A mediana é a média entre os pontos do meio?
P: Será que isso acontece com um ponto?
E: Sim, tinha apenas um ponto.
P: Com dois funciona também?
E: É igual a média.
P: Com três funcionou?
E: Não lembro.
P: Então retira um ponto e observa.

A aluna retira um ponto posicionado no 10 da escala, ficando com apenas três pontos posicionados no zero, no um e no três.

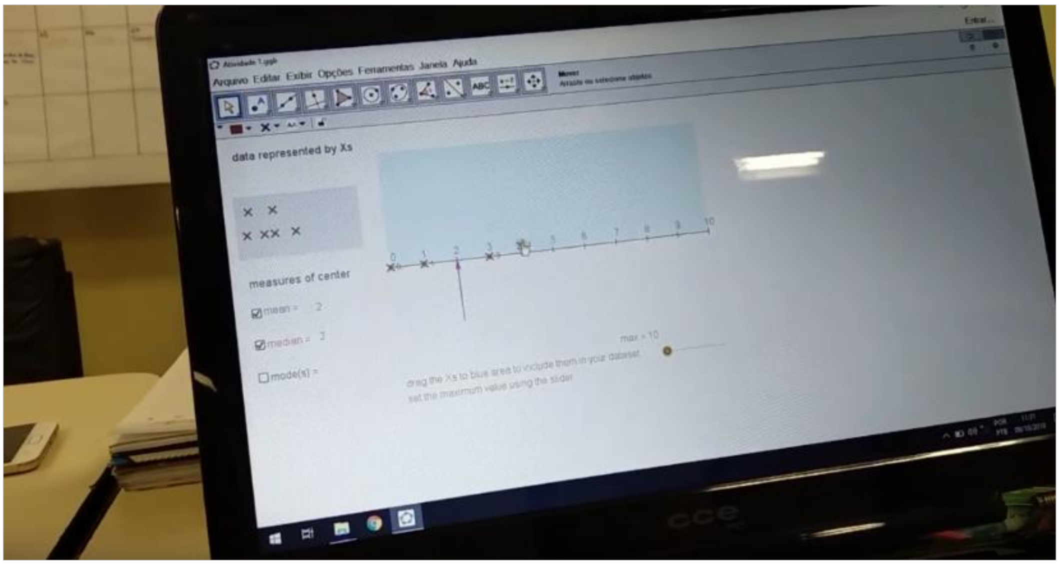
Figura 28 – Investigação da estudante E sobre o valor da mediana para três pontos na escala.



Fonte: Acervo da pesquisa.

P: Tu disseste que a mediana é a média do ponto do meio, isso?
E: Não, a mediana é a média entre os pontos do meio. Ah! Sim, sim!
P: E o ponto do meio quem é nesse caso?
E: É o um.
P: Qual é a média do ponto do meio?
E: Um.
P: Vamos fazer com quatro?
E: Sim. [Responde inserindo um novo ponto em cima do número quatro na escala.]
P: Qual é a média entre os pontos do meio?
E: Dois [...] e continua sempre dois. [Responde arrastando o ponto para a esquerda e verificando que a mediana não altera.]

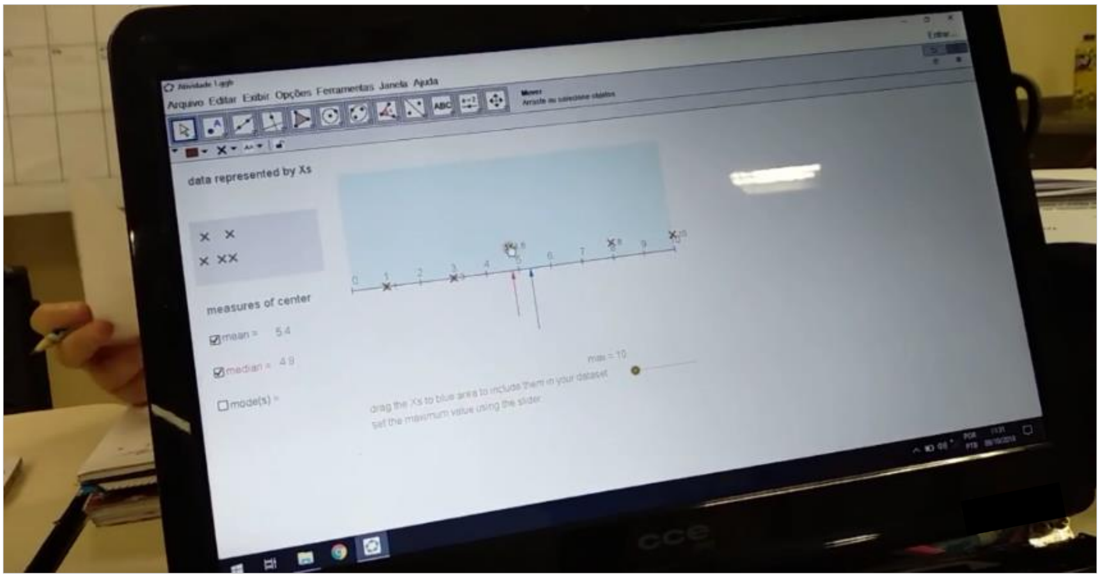
Figura 29 – Estudante E arrastando o ponto para a esquerda.



Fonte: Acervo da pesquisa.

P: Podemos alterar qualquer valor que vai continuar dois?
E: Sim.
P: Então, arrasta o ponto no zero para o outro lado da escala.
E: Ah, daí muda. [Responde deslocando o ponto do zero para o 10 na escala.]
P: Mas mudou por quê? Qual é o ponto do meio?
E: 3 e 8.
P: Qual é a média de 3 e 8.
E: 5,5.
P: Então vamos verificar o que ocorre com 5 pontos.
E: A mediana acompanha o ponto do meio. Se este ponto estiver no meio, a mediana acompanha o ponto do meio. Conclui, arrastando o quinto ponto inserido para esquerda e para direita, conforme ilustra a figura 30.

Figura 30 - Estudante E arrastando pontos na escala.



Fonte: Acervo da pesquisa

P: Qual a diferença entre a média e a mediana?
E: Posso dizer que a média é a média? [Perguntou como se não soubesse responder.]
P: Se ainda não saber dizer, sim.
E: Tá, a média é a média geral de todos eles. A média aritmética de todos. E a mediana é apenas em relação aos dois pontos que estão no meio. Se for par, os dois pontos e, se for ímpar, um ponto.
P: Não entendi. Podes explicar?
E: Se for par a mediana será a média entre os dois pontos que estão no meio. E se for ímpar, a mediana é o ponto do meio.

O diálogo descrito apresenta o processo de desenvolvimento do raciocínio da estudante E sobre a mediana, provocado pelo arrastar dos pontos na escala. A partir de suas ações, a estudante transformava-se a si mesma realizando abstrações reflexionantes do tipo pseudo-empíricas, ou seja, atribuía propriedades à mediana que eram resultado de suas transformações internas. Essas transformações evoluíam de patamar na medida que transitavam entre diferentes níveis de reflexionamento. Conforme esse movimento ocorria, suas ideias sobre mediana eram reelaboradas ficando cada vez mais sofisticadas. Essa evolução de ideias fica evidente quando retomamos as definições apresentadas pela aluna no decorrer da entrevista.

No início, a aluna sugere que mediana e média são iguais, tendo em vista os valores observados das duas medidas no software. No entanto, ela desconfia da sua hipótese inicial justificando não fazia sentido haver dois nomes diferentes para a mesma definição.

A partir de então, para compreender o conceito de mediana, a aluna age sobre o objeto, inserindo e arrastando pontos, observando o movimento da seta que indica esta medida. Suas ações sucessivas levam a compreender que a mediana seria a média entre os números que mais aparecem. Porém sua hipótese é refutada ao encontrar casos em que isso não se aplica. Assim, a estudante reconstitui suas ações sobre os pontos da escala agindo novamente sobre o objeto. A sequência de ações e reconstituição de ações levaram a estudante a observar que a mediana é "*um número intermediário*". Ao transferir por reflexionamento a sua reflexão ao patamar das comparações com a média, a aluna entra em conflito, não conseguindo diferenciá-las completamente, sendo necessário níveis mais elevados de abstração para compará-las.

Desse modo, a aluna reconstitui novamente suas ações, retornando ao patamar anterior de reflexionamento. Neste novo plano, ela reelabora as suas estratégias de ação, colocando e tirando pontos na escala, observando diferentes distribuições através do movimento de arrastar os pontos. A partir de suas ações a aluna observa que, até três pontos na escala, a mediana ou será "*o número do meio*", ou ela acompanhará a média. Para quatro pontos igualmente distribuídos, a aluna percebe que a média e a mediana coincidem. No entanto, quando um ponto é afastado nenhuma das hipóteses se confirmam, ou seja, a mediana não é "*o número do meio*" e, também, não acompanha a média. Então, novamente a aluna reconstitui a sua sequência de ações, desta vez com foco no comportamento da mediana para quatro e cinco pontos.

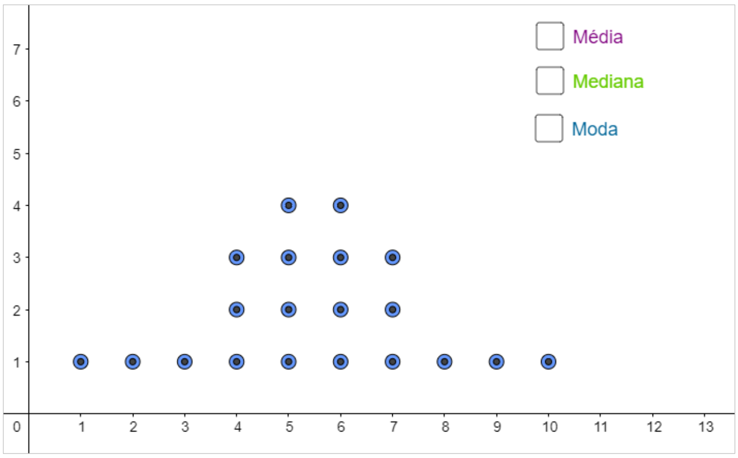
Em determinado momento, a aluna verifica que com cinco pontos igualmente espaçados a média e a mediana coincidem, mas ao arrastar um dos pontos a mediana acompanha o "*ponto do meio*". Assim, finalmente a aluna conclui que a mediana é "*a média entre os pontos do meio*". Ao elevar suas reflexões ao nível das comparações com a média a aluna descreve a mediana como "*a média entre os pontos do meio*". A estudante ainda completa: "*se for par a mediana será a média entre os dois pontos que estão no meio. Se for ímpar a mediana é o ponto médio*". A média, por sua vez, é definida apenas como "*a média geral de todos os pontos*".

As conclusões da aluna ao final da entrevista demonstram que ela considera que a mediana leva em conta apenas o meio da distribuição enquanto a média leva em conta todos os valores. Além disso, as definições apresentadas sugerem que uma certa evolução nos níveis de raciocínio sobre o conceito de mediana, do nível idiossincrático para o nível verbal, conforme proposto por Garfield (2002). No entanto, essa evolução poderá ser comprovada ao longo das próximas atividades, conforme segue.

6.1.1.2 Atividade 2

A segunda atividade tinha o objetivo de analisar as propriedades das medidas de tendência central por meio de um gráfico de pontos, cujos dados representavam as notas de uma turma composta por 20 estudantes na disciplina de Matemática, conforme a figura 31:

Figura 31 - Gráfico da Atividade 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

Inicialmente a pesquisadora sugeriu que a aluna descrevesse o desempenho da turma por meio da análise do gráfico presente na tela. Segundo a estudante, a turma não obteve um bom rendimento, argumentando que a maior parte da turma ficou com notas entre 4 e 7.

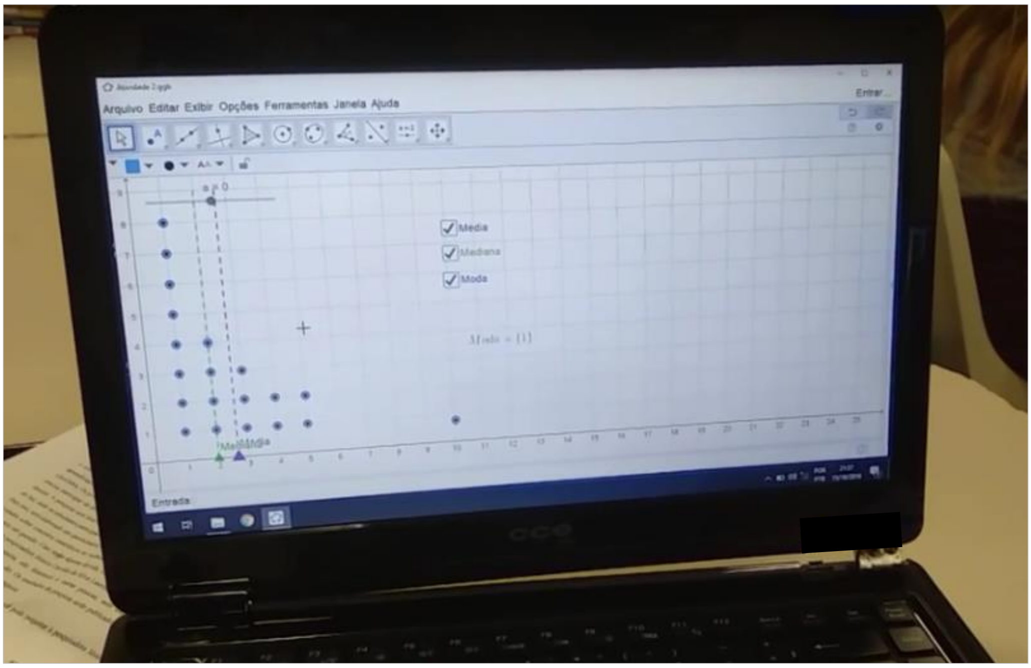
Quando solicitada para escolher uma única nota que representasse o desempenho da turma, a estudante enfaticamente respondeu 5,5 cujo valor representava para ela a média da turma. Sua justificativa para a escolha desse valor era a seguinte: *"porque todas as notas estão bem distribuídas. Os três pontos mais extremos representam apenas uma nota cada um. No quatro e no sete existem três pessoas que tiraram essas notas. E o cinco e o seis ... enfim, os pontinhos estão bem distribuídos no gráfico."* A resposta da estudante, sugere que a média estimada por ela, ou seja, 5,5, é resultante da simetria do gráfico. No entanto, ainda não foi possível confirmar, através dessa distribuição, se a aluna tomou consciência de que a distância dos pontos abaixo da média é igual a distância dos pontos acima dela. Para investigar com mais precisão a sua percepção sobre a média, propomos a verificação de outras medidas buscando, através do patamar das comparações, identificar o conceito de média para a aluna por meio da diferenciação entre as medidas.

Quando solicitada a estimar o valor da mediana a aluna entra, inicialmente, em desequilíbrio parecendo não lembrar de suas conclusões realizadas na atividade anterior, conforme o diálogo a seguir:

P: Qual seria a mediana?
E: Bom, esse é o meu problema. Acho que seria junto com a média. O porquê eu já não sei. Mas eu acho que seria junto com a média. [Respondeu a estudante depois de pensar uns instantes.]
P: O que te levou a pensar isso?
E: Ah, é que eu não lembro bem. Da outra vez eu meio que cheguei à conclusão que a mediana seria o "ponto do meio" digamos assim. Só que não tem um ponto do meio ali. Então a mediana teria que ser junto com a média [...]. É nesse caso, acho que a mediana seria junto com a média, ou seja, 5,5 novamente.
P: Falas isso considerando a tua hipótese de que a mediana seria o ponto do meio. Isso que tu quiseste dizer?
E: É
P: Então confere, clicando na caixa da mediana e verifica se confirma a tua hipótese.
E: 5,5.
P: E a moda?
E: A moda é 5 e 6.
P: Confere no software.

As hipóteses da estudante sobre os valores da mediana e da moda foram confirmados pelo software. No entanto, no gráfico da figura 31 a distribuição é simétrica cuja média e a mediana coincidem. Portanto, não foi possível perceber se a sua compreensão sobre a mediana em distribuições assimétricas seria mantida, ou seja, se para a estudante a mediana continuaria sendo o tal “ponto do meio” conforme ela expressou. Para tentar investigar esse aspecto, solicitamos novas distribuições de modo que mediana e média tivessem valores diferentes. Na medida que a aluna ia experimentando novas distribuições, arrastando os pontos na tela, ela observava a posição da média e da mediana instantaneamente. A figura 32 ilustra o instante em que se estabelece um diálogo a respeito da média e da mediana.

Figura 32 – Estudante E investigando a mediana em novas distribuições.



Fonte: Acervo da pesquisa

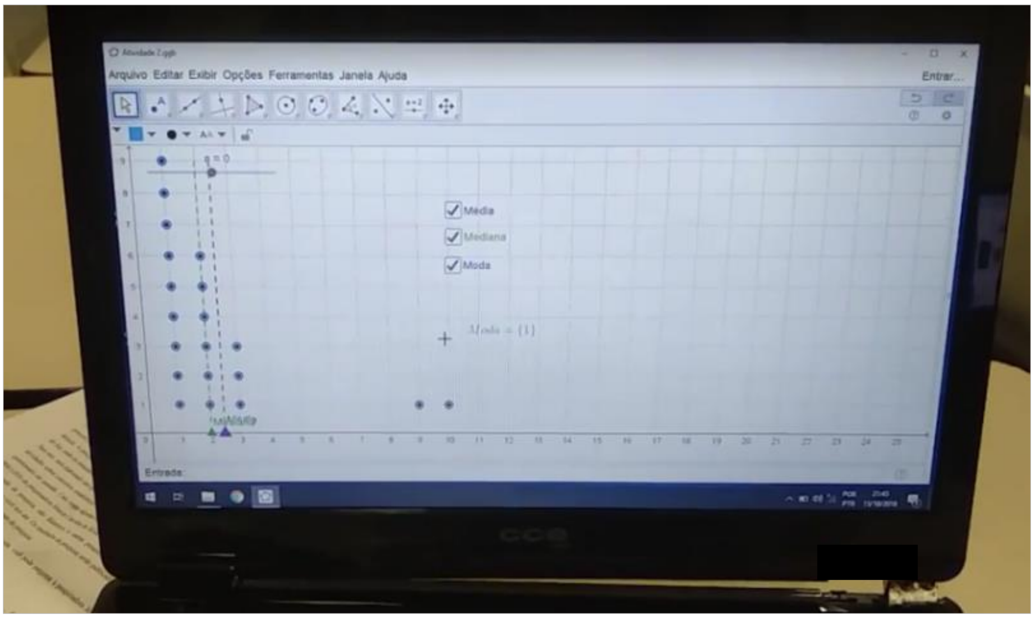
P: Qual a diferença que tu percebes em relação ao desempenho da turma inicialmente e agora com esta nova distribuição?
E: Bom, agora o desempenho está bem pior. A maioria da turma tirou praticamente entre 1 e 2. Alguns conseguiram chegar até 5. Apenas um aluno gabaritou a prova. Mas a média da turma caiu bastante, quase metade do que era. E a mediana também mudou.
P: Por que a mediana mudou?
E: Ah, boa pergunta. A mediana mudou porque foram mais pontos perto do um.
P: E por que que a média e a mediana não estão mais coincidindo?
E: Tá, a mediana continua em cima de algum ponto, mas a média pode ser um valor quebrado. Já a mediana, aparentemente nesse caso, não.
P: A mediana nunca pode ser um valor quebrado?
E: Acho que não nesse caso [...] Ai, não sei o que fazer para mexer a mediana.
P: O que seria a mediana nesse caso? Interpreta essa medida. O que seria a nota mediana da turma? O que isso significa no contexto do desempenho da turma? “A nota mediana”. Qual a ideia que tu tens dessa expressão?
E: A nota do meio? Talvez? Já que não é a média.
P: Me explica melhor.
E: Porque foi mais ou menos a conclusão que chegamos na outra vez: tinham três pontos na malha e a mediana era sempre o ponto do meio. Se tinham cinco, era o ponto do meio ainda sim. E, se tinha um número par, era a média entre os pontos do meio [...]. Ah! Daí, nesse caso, ela pode ter um número com

vírgula! [Percebeu a aluna.] Então é isso. Tem oito pessoas que tiraram nota um. Aí sete tiraram mais do que dois. Então as notas do meio seriam um desses quatro alunos que tiraram dois aqui. [Respondeu contando quantos pontos havia antes e depois da linha indicando a mediana.]
P: Isso tu te referes contando os pontos?
E: É! É que, quando nós fizemos da outra vez, tínhamos um ponto só por número, então era mais fácil de ver.

O diálogo mostra que o gráfico de pontos da atividade 2 provocou um certo desequilíbrio na estudante em relação ao conceito de mediana. Esse desequilíbrio fez com que a aluna reorganizasse suas estruturas de assimilação em patamares inferiores de reflexionamento por meio de novas ações no software. Essas ações são caracterizadas pelo movimento dos pontos à procura por uma distribuição com mediana e média com valores diferentes. Essa sequência de ações levou a aluna a uma distribuição assimétrica dos dados com mediana menor que a moda. Nesse contexto, a estudante parece tomar consciência de suas ações ao retomar sua conclusão sobre a mediana realizada na atividade anterior, percebendo ainda que a mediana também pode ser um número com vírgula.

Na sequência da entrevista foi proposto que a aluna modificasse a nota do aluno que tirou 10 na prova de Matemática afastando o ponto correspondente na escala do gráfico para valores menores. Ao arrastar o ponto no gráfico, a aluna rapidamente percebe que o valor da mediana não se altera, ao contrário do valor da média, que é alterado. Segundo ela: *“conforme eu vou ‘diminuindo’ o ponto, a média vai ‘diminuindo’ junto”*. No entanto quando indagada se a média seria uma boa medida para resumir as notas dos alunos, a aluna ficou em dúvida e não soube responder. Portanto, propomos uma nova distribuição assimétrica das notas, conforme a figura 33. Nessa distribuição, a maior parte da turma ficou entre as notas 1 e 3, e apenas dois alunos tiraram notas 9 e 10. Porém a média, nesse caso, é 2,5.

Figura 33 – Estudante E investigando a média em distribuições assimétricas.



Fonte – Acervo da pesquisa.

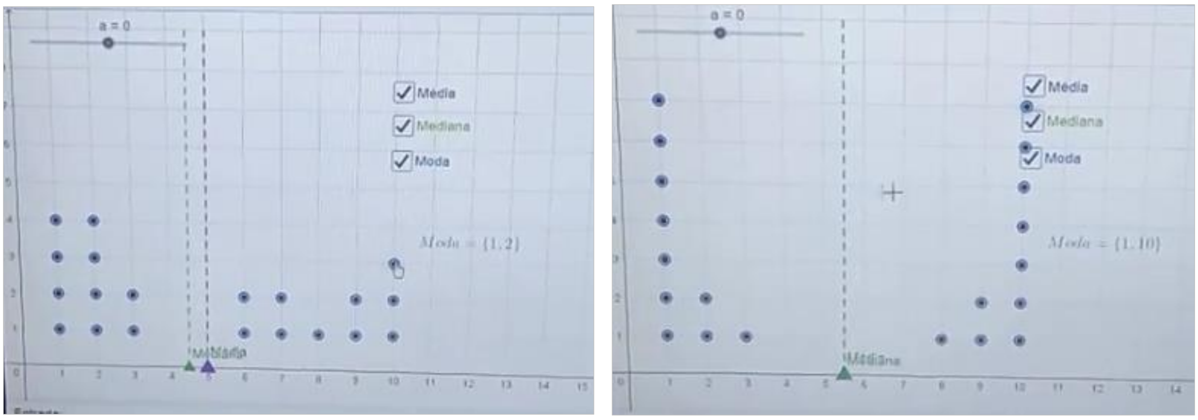
Para a aluna a média, nesse caso, *“representa bem boa parte da turma, mas deixa de representar quem tirou 9 e 10”*. A estudante acrescenta que avaliar o desempenho da turma apenas pelo valor da média (2,5), sem que houvesse o apoio do gráfico, a conduz pensar que a turma inteira foi mal. Ou seja, ela não levaria em conta que poderia haver alguns alunos com um bom desempenho na prova. Segundo ela: *“eu imaginaria no máximo todo mundo tirando 4 [...]suponho que a turma inteira tenha ido muito mal e não que alguém tenha ido muito bem”*.

Neste contexto, iniciou-se um diálogo a respeito das possíveis distribuições para um determinado valor da média:

P: Se a tua professora dissesse que a média da tua turma na prova de Matemática foi 5, sem revelar a nota individual de cada um. O que tu pensarias a respeito do teu desempenho?
E: Eu ficaria preocupada. Porque eu acharia que a turma toda teria ido não muito bem. Porque, para mim, 5 não é bom.
P: Mas como tu imaginarias o desempenho da turma?
E: Mesmo esquema de antes, eu imaginaria a turma tirando no máximo 7.
P: E a menor nota?
E: 3? A eu sempre ponho dois para cima e dois para baixo.
P: Ah, tu irias achar que as notas estariam naquele entorno do 5?
E: Isso.
P: Mas essa seria a única possibilidade?
E: Não, pode ter alguém ido muito bem.

Neste instante foi proposto que a aluna buscasse novas distribuições no gráfico de modo que a média fosse 5, mas que a turma tenha tido um desempenho diferente do que ela teria imaginado. As possibilidades apresentadas pela aluna levaram em conta apenas um único caso onde havia cerca de metade da turma com notas abaixo de cinco e a outra metade acima de cinco, como na figura 34 a seguir:

Figura 34 - Exemplos de distribuições dos dados no gráfico de pontos cujo valor da média é igual a 5.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Na segunda distribuição a aluna mostra que, ao arrastar um ponto para esquerda e outro para a direita na direção do centro, o valor da média não seria alterado. Isso demonstra uma abstração do tipo pseudo-empírica resultante das suas ações sobre o arrastar dos pontos. Neste caso, a estudante parece levar em conta que a média seria um ponto de equilíbrio entre as distâncias dos pontos a sua esquerda e a sua direita.

Ao final da entrevista, a pesquisadora propôs uma revisão de todas as distribuições realizadas ao longo do diálogo através do botão "voltar" presente no canto superior direito da tela. O objetivo era investigar em que distribuições a média e a mediana são iguais e em que distribuições a média e a mediana são diferentes. Ao final da revisão de todas as telas, a aluna responde do seguinte modo: *"A média e a mediana são iguais quando a média for exatamente o valor do meio dos pontos e não tem uns pontos perdidos como estava antes [...]Se tivesse umas quinze notas no 1 e os outras cinco notas no 10, então a média e a mediana não seriam iguais."* A resposta da aluna mostra que ela está pensando na simetria dos dados no gráfico. O contraexemplo da segunda frase complementa o pensamento da primeira, visto que, neste último caso, os dados não estão simétricos em relação à média e à mediana. Ou seja, o "*valor do meio dos pontos*", expresso na primeira frase, significa que a média e a mediana estariam separando metade dos dados para a esquerda e a outra metade para a direita.

Para finalizar a entrevista, sugeriu-se que a aluna interpretasse os dados quando a mediana tem valor igual a 3 e a média tem valor igual a 7. Desta vez, em um novo patamar de reflexionamento sem o apoio da observação de gráficos, mas imaginando uma possível distribuição para essas medidas. Neste caso, a aluna responde da seguinte forma: *"Significa que pelo menos metade da turma tem que ter tido uma nota entre zero e três, mas teve bastante gente que foi bem e conseguiu aumentar a média. Nesse esquema da média ser a soma de todos os valores dos alunos dividido pelo número de alunos que tem."* A resposta da aluna mostra a abstração reflexionante sobre os conceitos de média e mediana no patamar das comparações. De acordo com sua resposta, ela demonstra compreender que a mediana é uma medida que separa em 50% os valores e que a média é uma medida resumo que leva em conta todos os valores da distribuição e, portanto, é sensível aos valores extremos.

Ainda no nível das comparações de reflexionamento, foi sugerido novamente que a aluna apresentasse uma justificativa sobre a utilidade da média e da mediana evidenciando uma diferença entre elas. De acordo com a estudante: *"a média não mostra quantos alunos foram muito mal. [...] com a mediana dá pra ter uma noção de quantos alunos foram muito mal [...] um número mínimo de alunos que teriam ido muito mal. Se a gente considerar que a mediana é o número do meio, com ela dá pra ter uma noção de quantos alunos tiraram notas baixas."*

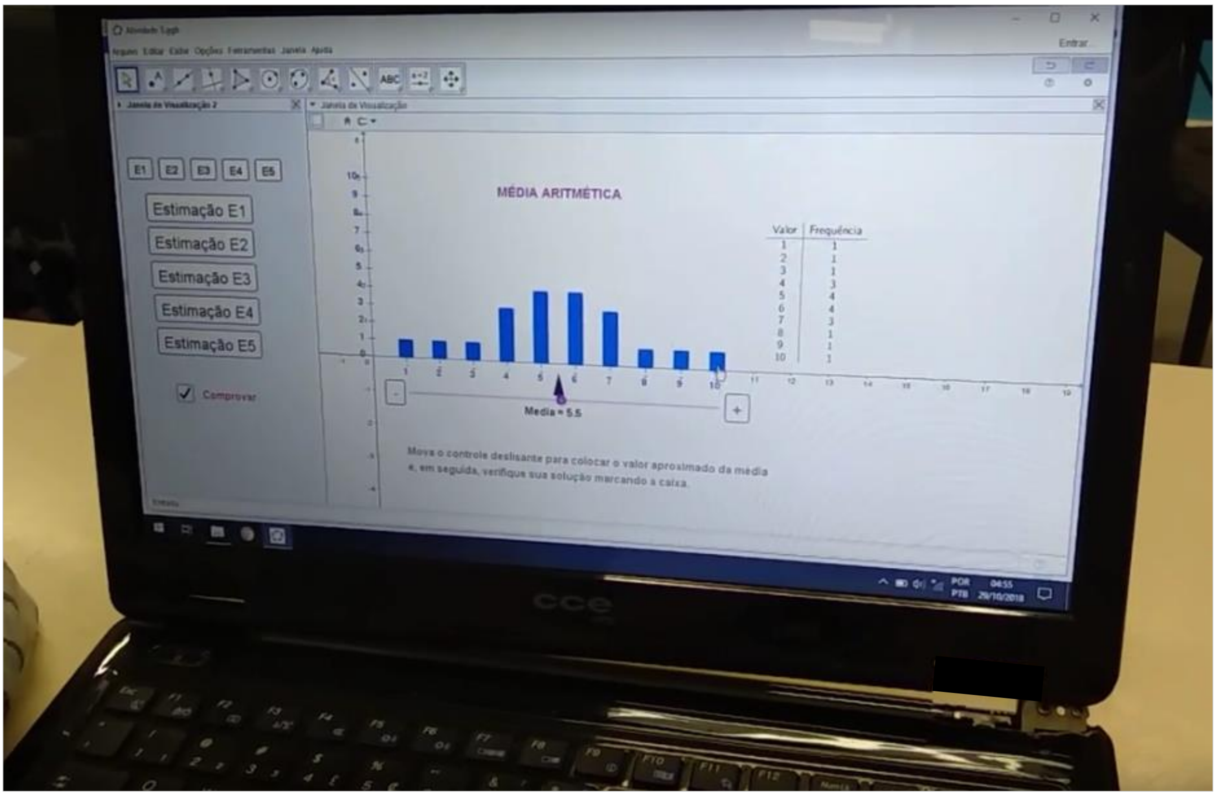
A resposta da estudante demonstra que ela conseguiu tomar consciência a respeito da diferença entre a média e a mediana. Compreendemos que isso foi possível mediante as suas ações no software experimentando diferentes distribuições e observando quando a média e a mediana são iguais e quando a média e a mediana são diferentes.

6.1.1.3 Atividade 3

Esta atividade apresentava dois objetivos: o primeiro era estimar a média dos dados representados em um gráfico de barras; o segundo era perceber que o gráfico de barras se equilibrava quando o eixo está em cima de média aritmética.

Inicialmente observamos que, no primeiro gráfico (figura 35), a estudante não teve dificuldades em estimar a média, visto que a distribuição dos dados era simétrica e, portanto, a média estaria no meio da distribuição. Segundo a estudante: "*nesse caso é mais fácil porque está tudo igual, né. Então a média vai ser literalmente o número do meio dessa vez".* Enquanto a aluna dizia "*está tudo igual*" ela realizava movimentos com a seta na tela, indicando que as frequências representadas pelas barras do gráfico eram simétricas em relação à média. Apesar disso, pela sua justificativa ainda não foi suficiente compreender se a aluna tomou consciência de que a média aritmética leva em conta a igualdade das somas das distâncias dos dados em relação à média em ambos os lados, esquerdo e direito.

Figura 35 - Gráfico de barras com distribuição simétrica.

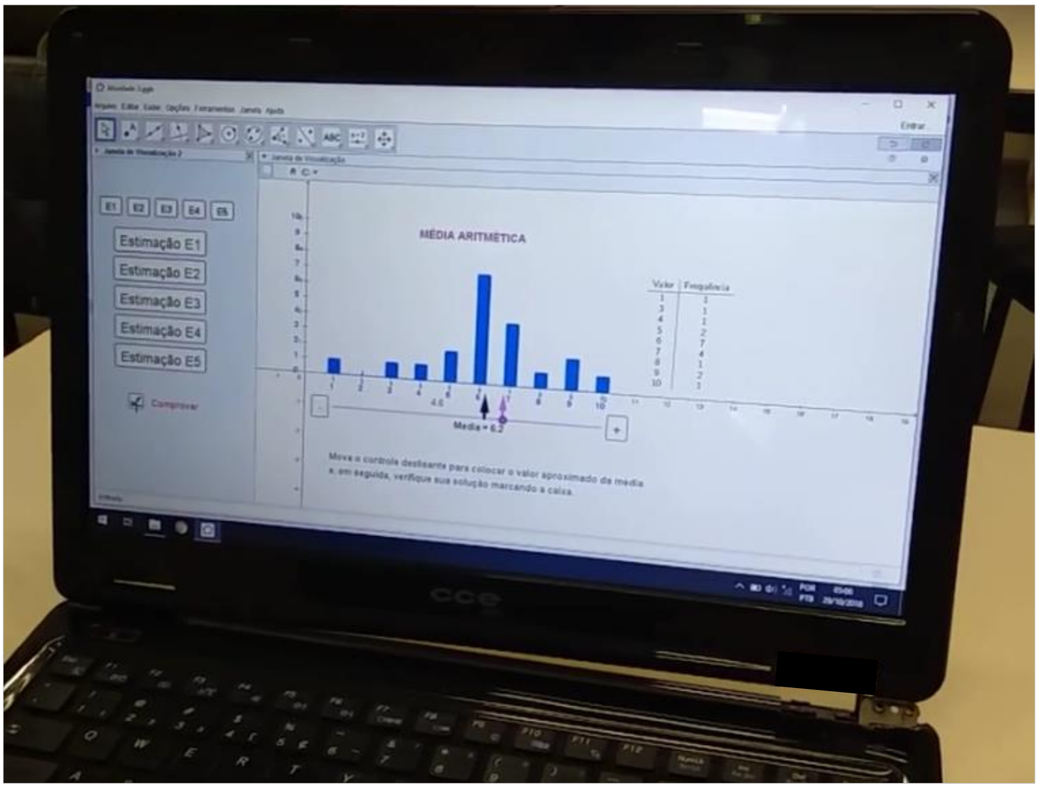


Fonte – Acervo da pesquisa.

Para verificar quais aspectos a estudante leva em conta para estimar a média em distribuições assimétricas, a pesquisadora apresentou outros gráficos presentes no objeto. Neste instante, constatamos que, em todos os casos, ela levou em consideração o intervalo de maior frequência dos dados e, também, a ideia de equilíbrio por meio da compensação das distâncias. O diálogo a seguir sobre a média do gráfico E4 (figura 36) comprova esse fato:

P: Tu estás te baseando pelo o que a maioria tirou para estimar a média?
E: É de certa forma. Pelo o que a maioria tirou e, também, porque está meio que balanceado o número de pessoas que tiraram um, dez, [...] é mais ou menos. Então sei lá, a média está entre 6 e 7, é 7, por aí.

Figura 36 – Estudante E estimando a média aritmética no gráfico E4.



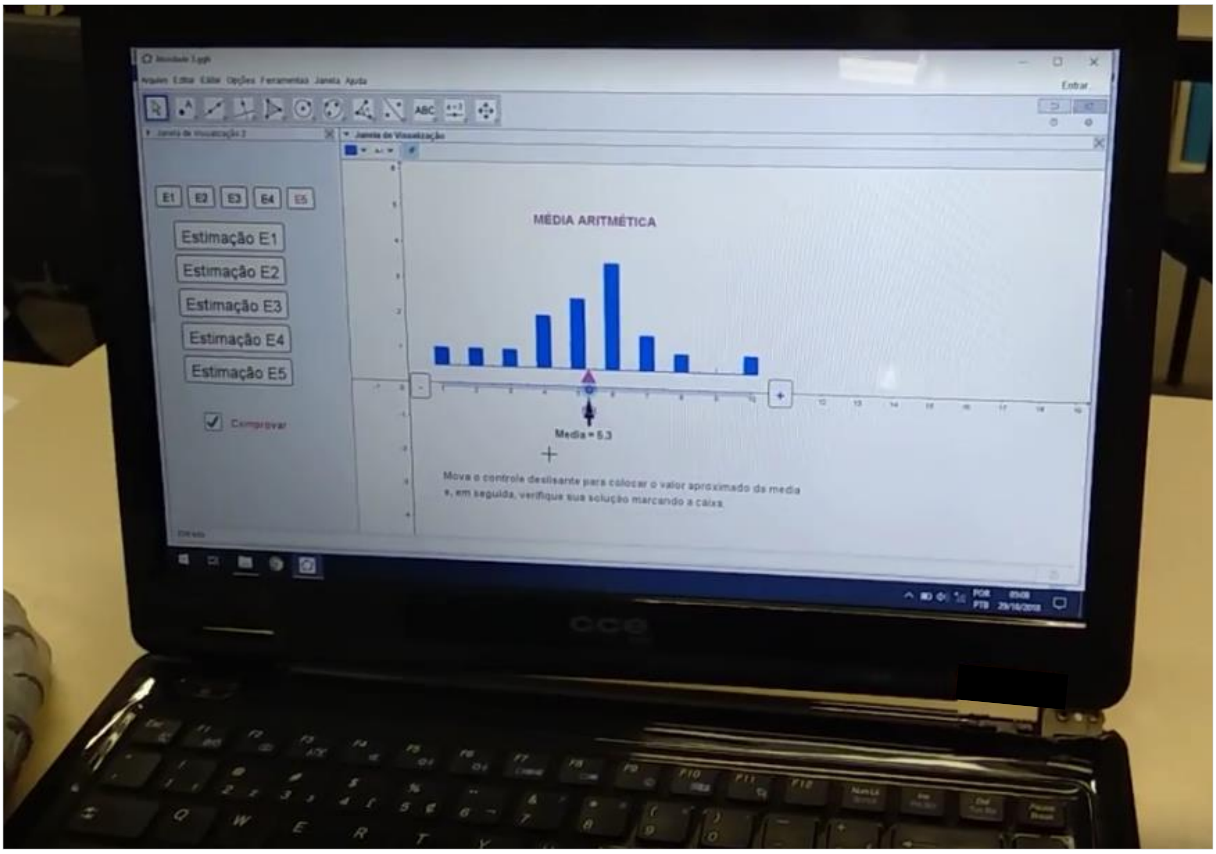
Fonte – Acervo da pesquisa.

Quando a aluna responde "*está meio que balanceado*" ela faz referência a frequência dos dados representados pelas barras presentes no 1 e no 10 da escala, dando a entender que, para ela, está subentendida a ideia de equilíbrio entre os valores. Compreendemos que a estudante leva em consideração as suas observações dos gráficos que ficam equilibrados quando o eixo está posicionado no valor da média dos dados, visto que, após a estimação da média em cada gráfico, o mesmo também era apresentado em desequilíbrio.

Sobre a questão da média como ponto de equilíbrio, a aluna concluiu, ao observar o primeiro gráfico com distribuição simétrica, que o mesmo se equilibrava na média porque ela estava posicionada justamente no meio. Na sequência, ao observar o gráfico seguinte com distribuição assimétrica em desequilíbrio, sua opinião não se manteve, visto que a média não coincidia com o meio do gráfico. Segundo ela: "*Agora eu já não sei mais. Acho que ele se equilibra na média, não sei. Talvez na média? Na média. Porque não é mais o meio né. Não sei, acho que na média".*

Conforme a estudante experimentava equilibrar outros gráficos com distribuições assimétricas, através do arrastar do ponto presente no eixo no gráfico, sua hipótese se confirmava. Ao fazer uma síntese das suas observações nos gráficos a aluna responde: *"É que* *conforme a 'bolinha' se aproximava da média o desequilíbrio ia diminuindo, até que ficava equilibrado o gráfico".* A estudante conclui ainda que "*a média é o ponto de equilíbrio dos valores*". Quando solicitada a explicar o que seria o ponto de equilíbrio da média, no contexto do gráfico E5 presente na tela (figura 37), a aluna responde: *"Não sei. Se somasse todas as notas, a nota que poderia definir a nota da turma, considerando quem tirou 1 e quem tirou 10 [...] considerando toda a diferença que teve, seria 5,3 a nota média. É a nota que representaria a turma, nesse caso."*

Figura 37 – Estudante E estimando a média aritmética no gráfico E5.



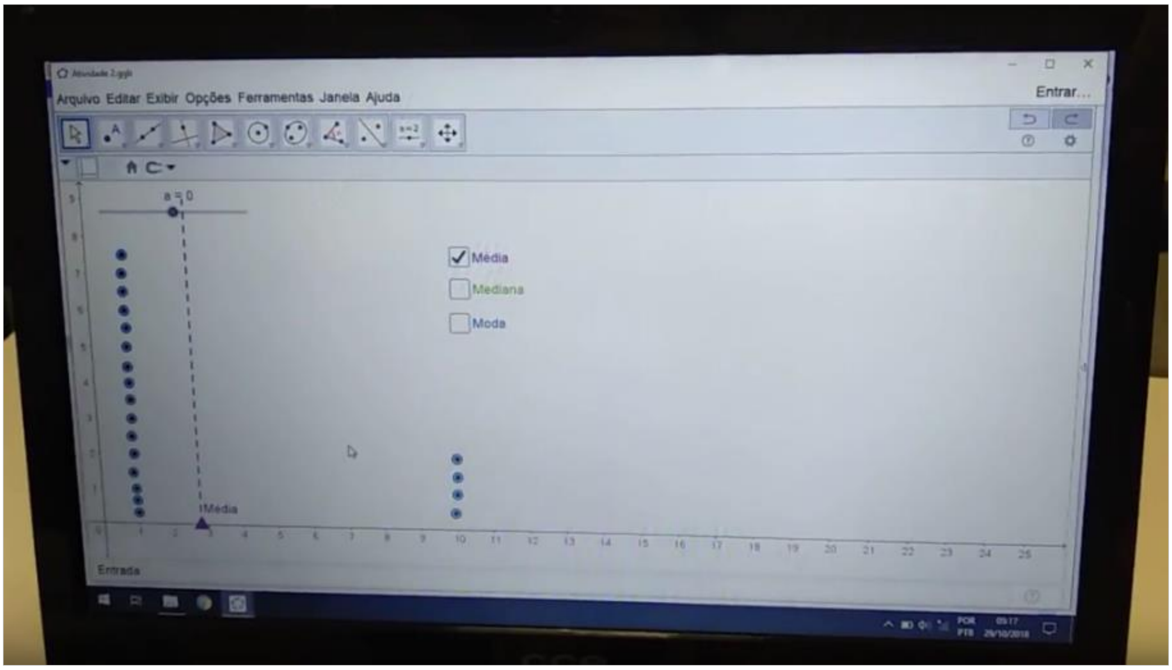
Fonte – Acervo da pesquisa.

A resposta da estudante sugere que ela está levando em consideração as somas das diferenças de cada valor até a média tanto à esquerda quanto à direita dela. Para compreender se a aluna tomou consciência dessa propriedade propomos a seguinte situação:

P: Um aluno justificou o equilíbrio da média porque poderíamos empilhar as barrinhas à esquerda e à direita do gráfico. Gostaria de saber o que tu achas desse raciocínio?
E: Se tu não levares em consideração o peso, não vai ficar equilibrado. Mas se tu levares em consideração que tivesse pesos diferentes, então talvez sim. Ai, eu não sei afirmar se iria ficar equilibrado ou se não iria. [Conclui a estudante após pensar e mudar de ideia várias vezes.]

Observamos que essa pergunta desequilibrou as estruturas de pensamento da aluna, visto que, apesar de haver compreendido a média como ponto de equilíbrio, não sabia justificar esse equilíbrio com suas próprias palavras. Diante dessa situação, a pesquisadora apresentou, em uma outra tela, novamente um gráfico de pontos (figura 38) com distribuição assimétrica. O objetivo era mostrar que a ideia de equilíbrio está relacionada ao princípio do funcionamento da alavanca que leva em conta, no contexto da Estatística, a proporção entre a frequência e a distância dos valores até a média, conforme o diálogo a seguir:

Figura 38 – Estudante E investigando a Média Aritmética como ponto de equilíbrio.



Fonte - Acervo da pesquisa.

P: Me explica essa ideia de ponto de equilíbrio nesse caso. Porque tu estavas me falando sobre essa ideia de ter peso ou não. Me explica agora nesse contexto. Neste caso o que está fazendo com que a média seja esse ponto de equilíbrio?
E: Nesse caso, eu já não sei. Porque se essas bolinhas aqui (à esquerda da média) pesam a mesma coisa que essas bolinhas aqui (a direita da média) aí eu acho... [Respondeu sem conseguir concluir o raciocínio.]
P: Mas o que está fazendo atribuir o peso as bolinhas?
E: O lugar em que elas estão. [...] É porque se tu levares em consideração o peso, daí é diferente. Tipo assim: todas as bolinhas que estão no 1 e as quatro bolinhas que estão no 10 [...] se botar uma barra aqui e o eixo onde está a média, não vai ficar reto. Ou vai? Não, acho que não vai ficar. Ah, ou vai. Não?
P: Se tu pensares em uma gangorra?
E: Ah, vai sim. Estou tentando me lembrar da gangorra. [...] Tá! Vai ficar em equilíbrio. Por que, por exemplo, na gangorra: se o eixo não está bem no meio e tu colocas alguma coisa na ponta do lado que está maior, então tu precisas de vários outros pontos do lado que está menor para conseguir balancear, para deixar reto. É como se o peso contasse mais lá na ponta do que quando está perto do eixo, digamos assim. Sei lá, finge que tem uma barra. Aqui tem 7 cm da barra e aqui tem 2 cm da barra. Põe um peso

onde tem 7 cm lá na ponta. Tu precisas de vários outros pesos iguais lá na ponta de 2 cm para equilibrar a gangorra ou a balança.
P: Entendi. E tu achas que a ideia dele de empilhar barras faz sentido?
E: Aqui no gráfico de barras eu diria que sim, lá no gráfico de pontos eu diria que não. Mas acho que é porque nesse caso a média está bem longe do centro sabe. Lá a média está bem perto do centro. Daí quando a média está quase no centro eu me perco um pouco.

Compreendemos, através desse diálogo, que ao se deparar com uma situação nova a aluna teve que reorganizar as suas estruturas internas de pensamento. Além disso, o gráfico de pontos forneceu elementos observáveis para a realização de abstrações do tipo pseudo-empíricas relativas à ideia de equilíbrio da média. Em particular, a aluna relaciona a ideia de equilíbrio à compensação da soma das distâncias dos pontos à média tanto à direita quando à esquerda dela. Ainda que a estudante tenha apresentado dificuldades ao associar as ideias de equilíbrio em ambos os gráficos (de pontos e de barras), compreendemos que ela tomou consciência do significado de ponto de equilíbrio associado à média.

Para finalizar, a pesquisadora propôs que a aluna expressasse o significado da média sem utilizar a definição da fórmula. Segundo a aluna: *"A média é um ponto de equilíbrio. [...] A média é o ponto do meio. Não, o ponto do meio é a mediana. Sei lá, não sei definir sem usar a fórmula e sem dizer equilíbrio"*. Percebemos que, desta vez, a aluna demonstra mais clareza ao considerar as diferenças entre média e mediana, demonstrando uma elevação de reflexionamento ao patamar das comparações.

Quando interrogada sobre qual a contribuição dessa atividade no GeoGebra para a ideia de média, a estudante faz referência a ideia de equilíbrio. Segundo ela: *"eu nunca pensei nisso na vida"*. Até o presente momento, a estudante apenas conseguia definir a média por meio da fórmula, dando indícios de que ela sabia calcular a média sem compreender e refletir sobre o seu significado, ou seja, fazer sem compreender. Os recursos presentes no GeoGebra possibilitaram transcender os limites do fazer e do compreender, oferecendo movimento à ideia de equilíbrio para a média, permitindo a realização de abstrações reflexionantes, conforme observado nessa atividade.

6.1.1.4 Atividade 4

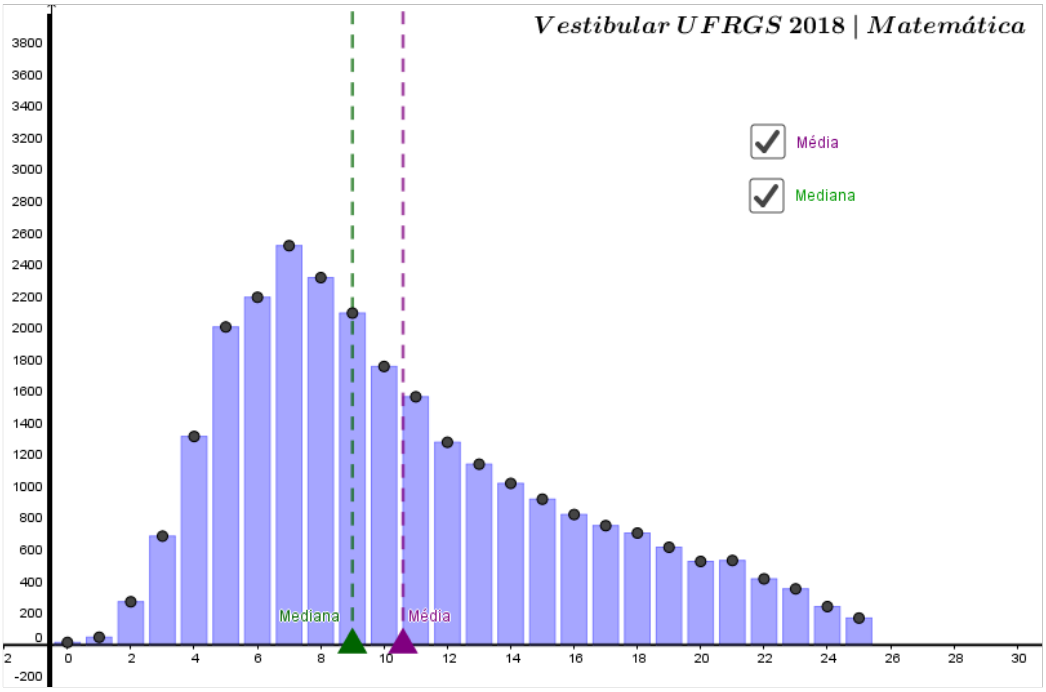
O objetivo central desta atividade é retomar as ideias observadas nas atividades anteriores e interpretar as medidas de tendência central por meio de dados reais em gráficos com diferentes distribuições.

Nessa etapa, observamos inicialmente que, apesar da aluna apresentar certa dificuldade em estimar a média e a mediana, ela demonstrou uma boa noção sobre a posição da média na escala do gráfico (figura 39), estimando-a próximo do número 10. A estudante justifica sua estimação do seguinte modo:

E: a maioria das pessoas acertou 7 questões, mas teve um número "consideravelzinho" que tirou até 25 questões. Então eu acho que 10, por aí. Não vai ser menor do que 7 porque bastante gente tirou uma nota relativamente alta [...]. Mas também não pode ser muito alta porque foram poucas pessoas. Então uns 10.

Interpretamos que a estudante demonstra ter atingido níveis mais elevados de abstração ao levar em conta o número *"consideravelzinho"* de pessoas que acertaram 25 questões e o número de pessoas que *"tirou uma nota relativamente alta"*. Ou seja, suas justificativas sugerem que houve tomada de consciência ao reconhecer, por meio de diferentes contextos, que a média é uma medida afetada por todos os valores da distribuição. Desse modo, as notas mais altas aumentam o valor da média, afastando-a um pouco do intervalo onde os valores estão mais concentrados

Figura 39 – Estudante E estimando os valores da média e da mediana no gráfico sobre a prova de Matemática do vestibular da UFRGS.



Fonte – Acervo da pesquisa.

No caso da mediana a aluna não foi capaz de estimá-la tendo em vista à grande quantidade dos dados representados no gráfico. Segundo ela *"se fosse para chutar eu chutaria perto da média, mas eu não tenho a menor ideia".* A estudante acrescenta que a mediana estaria mais para o lado direito do gráfico, no máximo até o número 12. No entanto, sua estimação foi confrontada com o valor real da mediana calculado no software, ou seja, 9. A aluna também observa que a mediana estaria à esquerda da média e não a direita como havia suposto.

Ao contrário da mediana, a estudante não apresentou dúvidas sobre a moda respondendo que o valor modal seria 7.

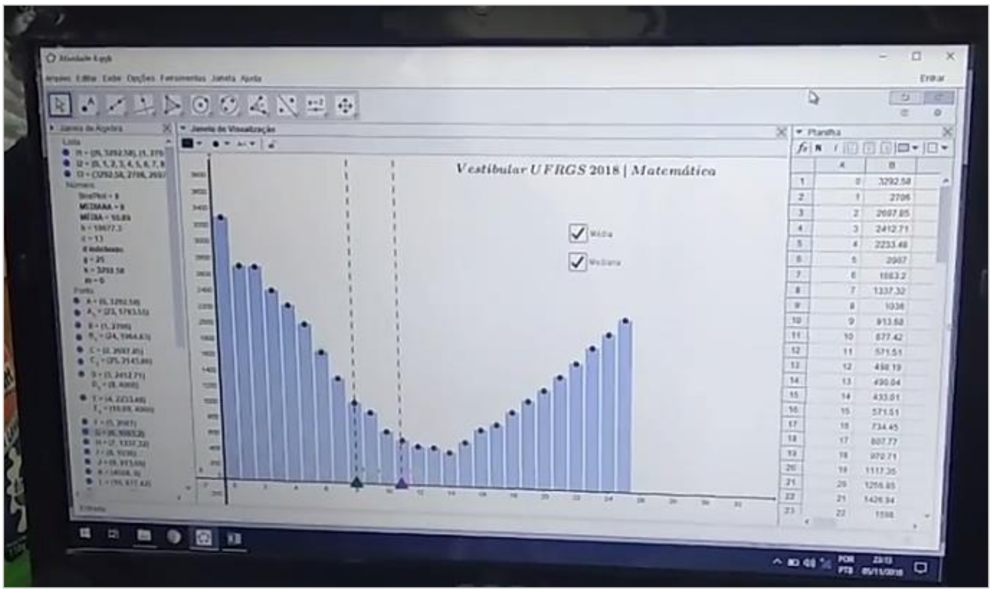
Na sequência, com o objetivo de compreender o raciocínio da estudante sobre as medidas de posição, após a aplicação das atividades anteriores, solicitou-se que a estudante interpretasse a média, a mediana e a moda no contexto do desempenho na prova de Matemática dos candidatos ao vestibular da UFRGS. Segundo a aluna:

E: A média diz qual seria a nota média de todo o vestibular. O número de acertos de todo o vestibular. E a mediana leva em conta o número de pessoas que acertaram um determinado número de questões. Como muita gente acertou menos de 10 questões, digamos assim, e pouca gente acertou mais, a mediana ficou lá pelo 9[...]. Mais ou menos metade das pessoas acertaram no máximo 9 questões. A média diz [...] não sei, a média diz uma [...] diz uma nota [...] uma nota que compreenderia toda a prova, digamos assim. E a mediana literalmente marca o ponto até onde foram metade das pessoas [...]. A moda é o que aparece mais. Que nesse caso é 7.

A resposta da estudante denota que houve reflexão, ou seja, uma reorganização das estruturas internas de raciocínio, no nível das comparações entre as medidas de posição. Neste novo patamar, a aluna torna-se capaz de identificar as diferenças entre as três medidas, ou seja: reconhece a média como uma medida que leva em conta todos os valores; já a mediana como uma medida que identifica centro da distribuição, demarcado, especificamente no contexto do número de acertos no vestibular, pelo número 9. E, por fim, a moda como uma medida que leva em conta o valor mais frequente.

Na sequência a pesquisadora propôs que a aluna apresentasse um outro tipo de distribuição, desta vez com formato semelhante a letra "U" através do arrastar vertical de cada barra do gráfico, conforme figura 40. A distribuição em questão apresenta a média 10,8 e a mediana 8, cujos valores são semelhantes ao gráfico sobre o desempenho em Matemática do vestibular da UFRGS de 2018, constatado anteriormente.

Figura 40 – Estudante E analisando a média e a mediana no gráfico em formato de "U".



Fonte – Acervo da pesquisa.

Enquanto a aluna arrastava os pontos, ela observava o movimento das retas verticais que demarcavam os valores da média e da mediana, constatando, por abstração pseudo-empírica, que *"a média e a mediana 'andam'"*. Segundo ela: *"enquanto eu vou subindo mais para direita elas vão mais para direita"*. O "andar" denotado pela aluna não é uma caraterística da média e da mediana, mas abstrações pseudo-empíricas da aluna a essas medidas ao observar o movimento das retas verticais que as representam no gráfico.

Diante do gráfico apresentado, a pesquisadora sugeriu uma reflexão a respeito da necessidade de outras medidas para a compreender o desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS em Matemática, conforme o diálogo a seguir:

P: Essas medidas seriam suficientes para nos ajudar a compreender o desempenho dos candidatos no vestibular da UFRGS em Matemática?
E: Só a média e a mediana?
P: Isso.
E: Não. Acho que não.
P: Por quê?
E: Porque a mediana só iria dar uma noção sobre a metade das pessoas. E a média nem sempre corresponde com a realidade.

Apesar de a aluna descrever a mediana de maneira informal, dizendo que seria uma medida que "*iria dar uma noção sobre a metade das pessoas*", compreendemos que ela quis dizer que a mediana divide o conjunto de dados ordenados em partes iguais. Isso pode ser comprovado quando a aluna interpreta a mediana do gráfico da figura 39 respondendo que *"[...] mais ou menos metade das pessoas acertaram no máximo 9 questões"*.

No caso da média, quando a aluna responde que *"a média nem sempre é uma medida que corresponde com à realidade"*, compreendemos que ela está fazendo referência às distribuições assimétricas com valores atípicos, observadas nas outras atividades em que a média é "puxada" na direção desses valores.

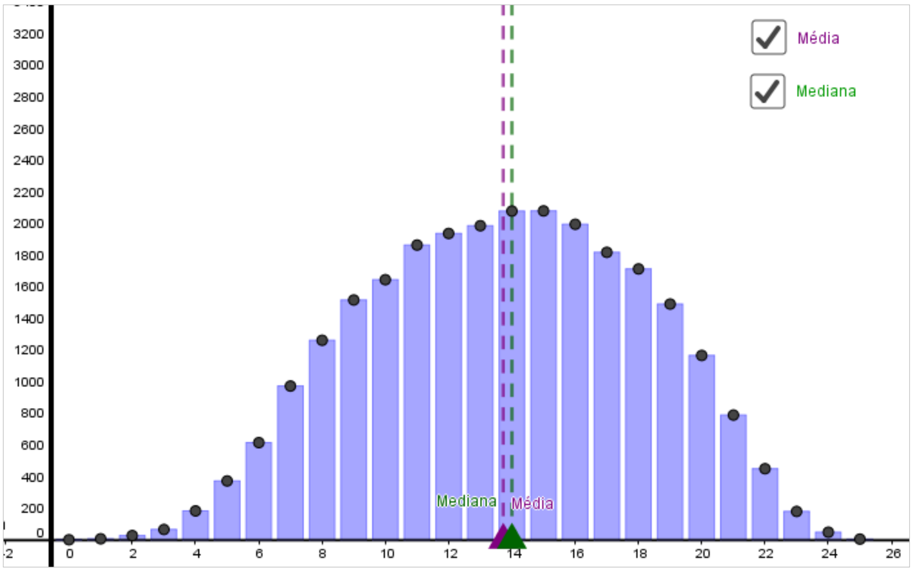
O mesmo pode ser comprovado quando sugerimos uma situação hipotética em que a estudante deveria interpretar o desempenho dos candidatos apenas pelos valores da média (14) e da mediana (7), sem observar o gráfico. Para a estudante: *"quer dizer que metade das pessoas foi bem mal, acertando no máximo 7 questões. Mas teve uma parte deles que foi muito bem a ponto de subir a média para 14."*

Em outro momento da entrevista a estudante destaca que as medidas de posição *"dão apenas uma noção"* justificando que *"tu nunca vais chegar à conclusão de quantas pessoas foram muito bem"*.

Diante do exposto, compreendemos que a estudante percebe que as medidas de posição não dão conta de todas as informações sobre os dados e que são necessárias outras medidas para estabelecer conclusões mais consistentes. Em particular, as medidas de posição não abrangem a variabilidade dos dados, identificando o quanto as observações de uma variável estão próximas ou dispersas umas das outras.

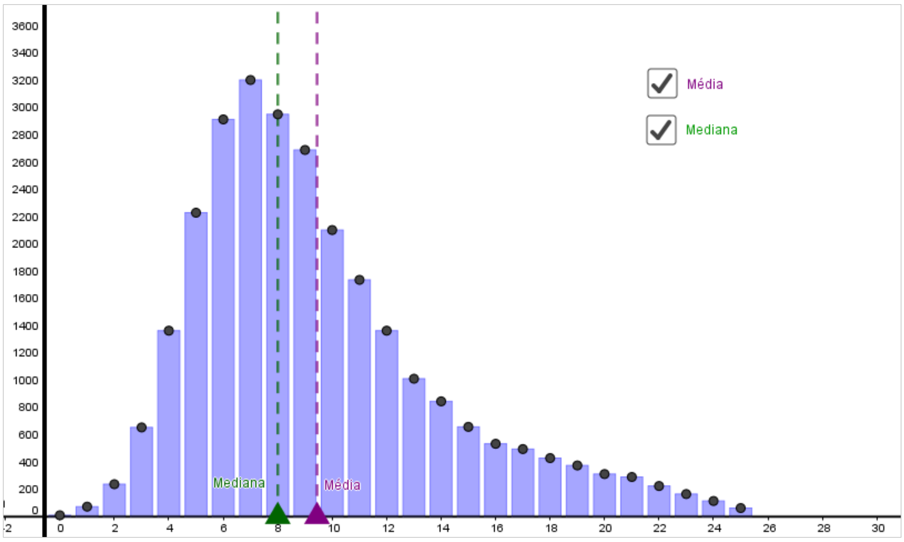
Na sequência da entrevista, a pesquisadora solicitou a análise pela estudante dos gráficos que mostravam o desempenho dos alunos no vestibular da UFRGS nas disciplinas de História (figura 41) e Física (figura 42). Para isso, foram inseridos os valores indicando o número de acertos por questão das provas na planilha do GeoGebra e gerado o gráfico correspondente na janela de visualização do software.

Figura 41 - Desempenho dos candidatos do vestibular da UFRGS em 2018 na prova de História.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Figura 42 - Desempenho dos candidatos do vestibular da UFRGS em 2018 na prova de Física.



Fonte – Acervo da pesquisa.

O gráfico que apresenta o desempenho dos candidatos na prova de História mostra uma curva mais simétrica, conforme a figura 41. De acordo com a estudante, o gráfico é interpretado do seguinte modo:

E:Agora o gráfico está bem mais "bonitinho". No geral as pessoas acertaram de 10 a 18 questões, mais ou menos. A média e a mediana é quase o meio. Tipo uns 14 ou 13 por aí.
P: Por que a média e a mediana estão tão próximas?
E:Ah, não sei. Porque o gráfico está bem distribuído, talvez? Tipo, não teve muita gente que foi muito bem e não teve muita gente que foi muito mal. Está mais ou menos distribuídos, assim [...] então elas ficam no centro e perto uma da outra.

Antes de observar o gráfico de Física a pesquisadora propôs que a estudante imaginasse a forma do gráfico. Segundo a estudante: *"o gráfico vai ficar tipo um 'uzinho'. Aqui começa, depois sobe, e começa a descer de novo [...] um 'U' ao contrário, mas mais para lá pelo 10, sabe? Menor do que 10. É que o pessoal vai mal em Física."* Reponde a aluna fazendo movimentos com as mãos, desenhando no ar uma curva assimétrica, conforme a figura 43. De acordo com o movimento das mãos, a expressão "*mais pra lá, pelo 10*" faz referência a concentração dos dados.

Figura 43 - Interpretação da curva do gráfico de Física pela estudante E.

Fonte – Acervo da pesquisa.

A hipótese da estudante foi confirmada ao inserir os dados no GeoGebra e observar o gráfico na janela de visualização. Neste conjunto de dados a média foi de 9,44 e a mediana foi de 8. A partir desse gráfico a pesquisadora perguntou sobre o motivo pelo qual a média e a mediana não estavam próximas como no gráfico de História. A aluna justifica da seguinte maneira:

E: Porque bastante gente tirou 4 e 8, que no caso é a mediana. Mas teve relativamente bastante gente que conseguiu acertar até 25 questões, quase. Aí foi decaindo esse número. Daí acabou subindo a média. Tipo, se as pessoas não tivessem chegado a tirar nem 20 questões, aí provavelmente a média estaria mais perto da mediana. [...] Se não houvesse candidato que conseguisse acertar 25 questões e tivesse chegado só até 20 ou até 19, aí provavelmente a média iria estar mais perto da mediana porque ia ter menos gente que acertou mais questões.

As justificativas da estudante sobre as medidas de posição de acordo com o formato das curvas comprovam que ela compreende que em distribuições mais simétricas a média e a mediana ficam mais próximas umas das outras. Diferente de distribuições mais assimétricas em que a média e a mediana ficam mais afastadas. No entanto, a aluna não conseguiu abstrair sobre a posição das três medidas em distribuições assimétricas verificando que em distribuições assimétricas positivas a moda<mediana<média e em distribuições assimétricas negativas média<mediana<moda.

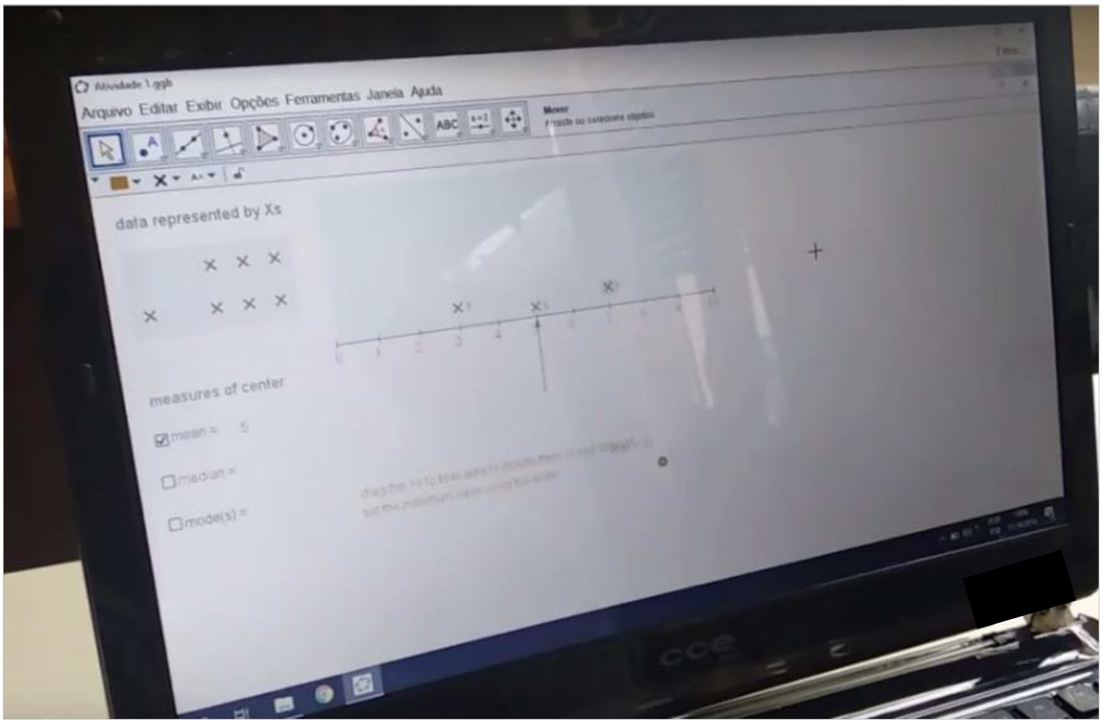
Por fim, diante dos argumentos apresentados pela estudante E sobre as medidas de posição através da análise dos gráficos sobre o desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS em 2018, compreendemos que houve um avanço no raciocínio estatístico em relação as ideias apresentadas na primeira atividade. Inicialmente a estudante demonstrava não compreender totalmente os conceitos de média, mediana e moda, misturando muitas vezes as informações, conforme descrito na atividade 1. Já na atividade 4, compreendemos que a aluna demonstra estar entre os níveis mais elevados estabelecendo diferenças entre as medidas. Ou seja, a aluna demonstra compreender as medidas estatísticas de posição coordenando suas propriedades e explicando o processo com suas próprias palavras. No entanto, não sabemos se ela entende o processo por completo podendo identificar em todos os casos qual a melhor medida de centro pode ser utilizada para representar os dados observados. Apesar disso, compreendemos que a evolução no desenvolvimento do raciocínio estatístico foi possível graças ao aspecto dinâmico do software que, por meio dos seus recursos, pode externar o raciocínio dos alunos, possibilitando patamares mais avançados de abstração reflexionante.

6.1.2 Entrevista com o estudante F

6.1.2.1 Atividade 1

Nesta atividade observamos que o estudante define média por meio da fórmula, ou seja, a soma de todos os valores dividido pelo número de valores somados. Desse modo, toda vez que era necessário estimar a média, o estudante realizava o cálculo mentalmente por meio do algoritmo. Observamos ainda que, ao calcular a média dos valores 3, 3 e 10, o aluno respondeu que a média seria 8. No entanto, ao justificar sua resposta, posicionando os pontos no software, o estudante toma consciência que havia feito o cálculo errado, desconsiderando na divisão a repetição do valor 3. Além disso, ao verificar os possíveis valores cuja média é 5, o estudante pensou em conjuntos de três valores cuja soma é igual à 15, ou seja: (5,5,5), (0,5,10), (1,5,9). Na medida que ele apresentava as possibilidades, também posicionava os pontos na escala, conferindo o resultado da média, indicada pela seta azul, cujo valor também estava presente no canto esquerdo da tela (figura 44). Ao investigar se haveria outras possibilidades ele responde: "*agora é só ir movimentando de um em um, ou seja, (2,5,8), (3,5,7), e os números com vírgula também dá para usar*". Esse "*ir movimentando de um em um*" refere-se às aproximações dos valores ao 5 em uma unidade à esquerda e à direita.

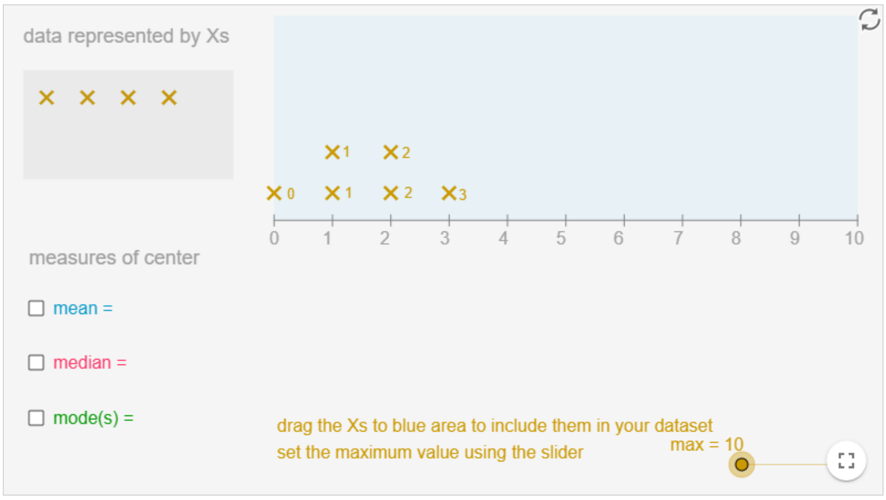
Figura 44 - Combinações de valores cuja média é igual a 5 pelo estudante F.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Sobre o conceito de moda o estudante define como o "*valor que mais aparece*". No entanto, a mediana, foi o conceito que o estudante apresentou maior dificuldade em defini-la, pois parecia ter esquecido de como era o seu cálculo. Sua primeira hipótese, ao observar o gráfico da figura 45, é de que a mediana seria "*a média dos números que aparecem mais*". Em particular a mediana dos dados no gráfico é 1,5.

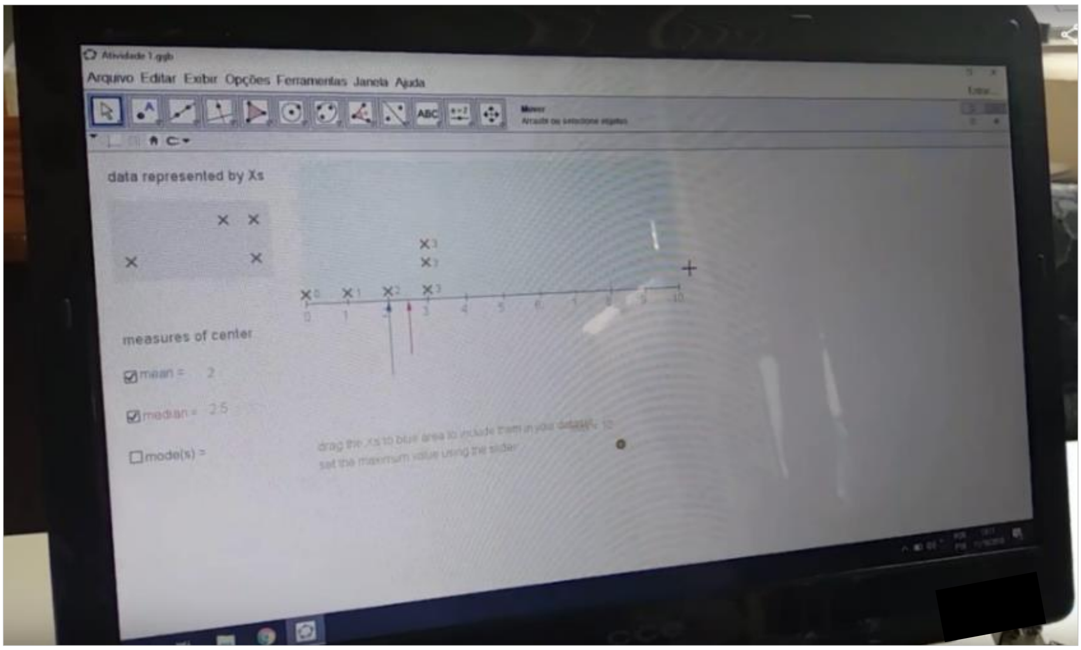
Figura 45 - Investigação do conceito de mediana.



Fonte - Acervo da pesquisa.

Com o objetivo de compreender melhor o raciocínio do aluno, a pesquisadora apresentou uma nova distribuição (figura 46), cujo valor mais frequente é 3, que, para o estudante, seria a mediana dos dados. Porém, ao conferir a mediana no GeoGebra, o aluno percebe que a sua hipótese estava errada, necessitando reorganizar as suas estruturas de raciocínio e buscar novas hipóteses que justificassem o valor presente na tela, ou seja, 2,5.

Figura 46 - Estudante F observando o valor da mediana igual a 2,5.



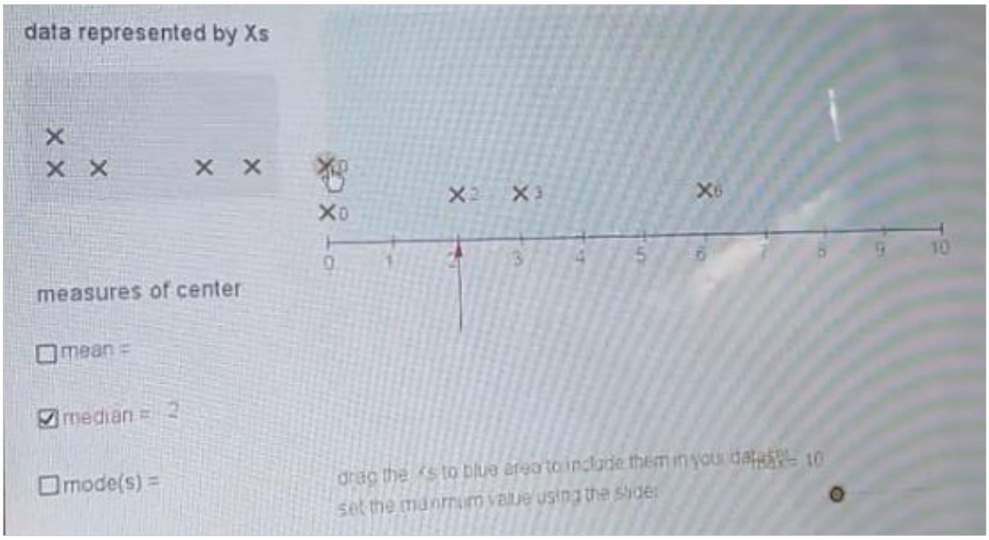
Fonte – Acervo da pesquisa

Diante da dificuldade do aluno em definir a mediana, a pesquisadora propôs uma nova estratégia de investigação. Desta vez, o estudante deveria observar o valor da mediana primeiro com dois pontos na escala, depois três pontos e assim sucessivamente. Com três pontos posicionados na escala (0, 3 e 6) o aluno conclui que a mediana é *"o ponto médio entre o menor e o maior valor"*. A pesquisadora então propôs a inserção de um quarto ponto posicionado no valor 2 da escala. Ao observar o valor da mediana presente no gráfico o aluno conclui:

F: É a mediana é o ponto médio mesmo.
P: Ponto médio do que?
F: Dos dados coletados.
P: E como eu faço isso?
F: Tu vais botando-o numa ordem crescente ou decrescente [...]. Se for um número ímpar de resultados, tu vais ter um número certinho ali. Agora se tu tiveres um número par, vais pegar os dois que ficariam no meio, então tu somas e divide por dois.
P: Então se eu botar um quinto ponto em cima do zero, qual o valor da mediana?
F: Será o dois, porque o resultado que vai estar no meio será o dois.

O valor estimado pelo estudante foi confirmando ao arrastar o quinto ponto na escala (figura 47). Além disso, foram inseridos consecutivamente o sexto e o sétimo ponto, confirmando a conclusão do aluno.

Figura 47 - Estudante F observando o valor mediano com cinco pontos.

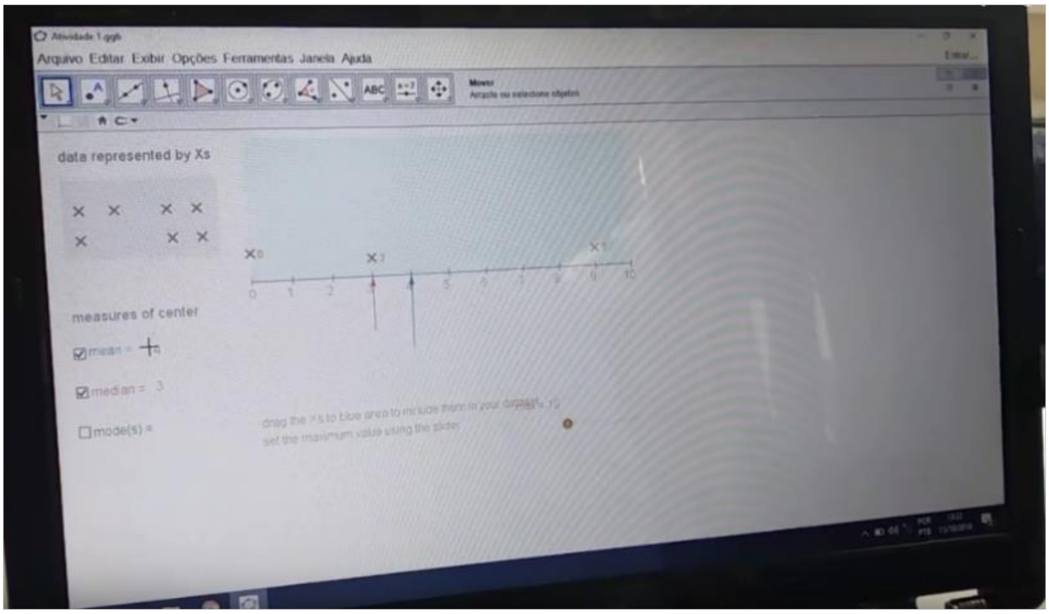


Fonte – Acervo da pesquisa.

Salientamos que o estudante alcançou o conceito de mediana graças ao aspecto dinâmico do software, permitindo mover os pontos presentes na escala e observar instantaneamente o valor da mediana. Consideramos esses aspectos como fundamentais para a aprendizagem dos conceitos estatísticos.

Na sequência a pesquisadora solicitou que o estudante apresentasse uma diferença entre a média e a mediana. Nesse instante, o estudante involuntariamente retirou alguns pontos presentes na escala, deixando apenas três, com o objetivo de observar os valores da média e da mediana quando esses pontos são arrastados para esquerda e para direita, conforme a figura 48.

Figura 48 - Estudante F observando a média e a mediana com três pontos na escala.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Ao observar os três pontos na escala o aluno conclui:

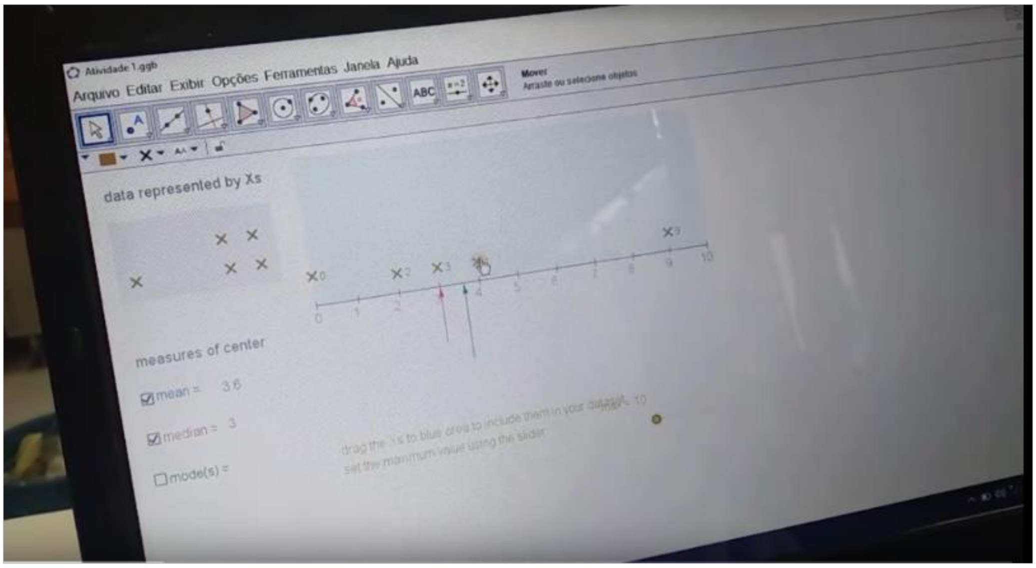
F: A média é a soma dos três valores dividido pelo número de pontos que tu somaste. Então vai dar doze dividido por três que vai dar quatro. E a mediana é o ponto que está entre o menor e o maior valor.
P: Ela sempre vai ser o ponto que está entre o menor e o maior valor?
F: Se for um número ímpar, sim. Se for par, tu vais ter que pegar os dois que estão lá e fazer a média.
P: E qual a diferença entre a mediana e a moda?
F: A moda é o número que aparece mais vezes. E a mediana é o ponto que está na metade do número de pontos...

Na sequência a pesquisadora propôs a inserção do quarto e quinto ponto na escala (figura 49) e sugeriu que o aluno refletisse sobre quais medidas seriam modificadas ao arrastar o ponto que representa o valor 4 na escala. O estudante responde da seguinte forma: *"Se tu moveres para um número maior será apenas a média. Se tu moveres para o número menor, vai ser a média e a mediana".* Na sequência, o aluno arrasta os pontos confirmando a sua resposta.

F: A média é a soma de todos os valores, então se tu mexeres em algum valor vai mudar a média. E a mediana é [...] ai, eu não sei explicar.
P: Quando tu moves o ponto localizado no quatro, a mediana está mudando?
F: Não, apenas a média.
P: Por que que ela não está mudando?
F: Porque o terceiro ponto continua sempre o mesmo. Como são cinco pontos a mediana vai ser o terceiro.
P: E se tu moveres o 4 para a esquerda?
F: Se tu passares do 3, o ponto que é o terceiro muda para o 2. Se tu deixares entre o 2 e o 3, a mediana vai ser o ponto que está mexendo agora. [Responde o estudante movendo os pontos e posicionando um deles entre o 2 e o 3.]

Compreendemos que, apesar do aluno não se sentir seguro em expressar o que é a mediana, ele percebe que é um valor central que separa o conjunto de dados em 50% para a esquerda e 50% para a direita, conforme expresso em sua resposta.

Figura 49 - Estudante F arrastando pontos e observando os valores da média e da mediana.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Enquanto o estudante arrastava alguns pontos da escala para a esquerda e para direita a média e a mediana eram modificadas instantaneamente. Nesse processo, o estudante chegou a conjecturar que, ao inserir um valor, a média seria alterada apenas se esse valor inserido fosse diferente dos outros. Essa afirmação foi refutada imediatamente quando o estudante percebe que o valor da média modifica, ao arrastar um novo ponto na escala, posicionando-o acima dos pontos que estão localizados no 2, no 3 e no 4.

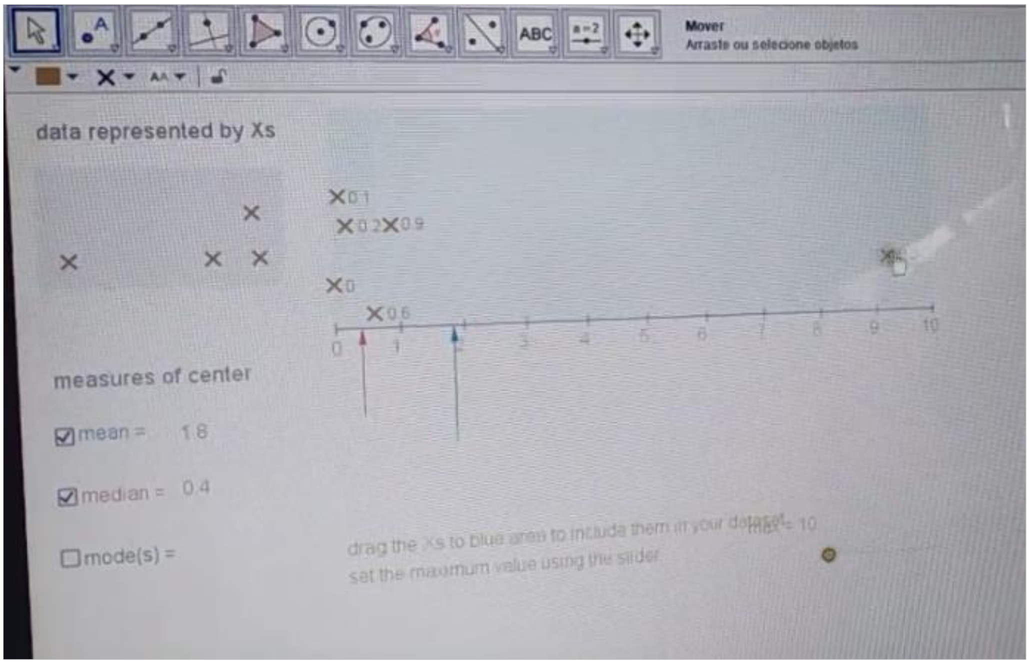
Ao longo das suas experiências de inserir e arrastar pontos na escala, propomos novamente uma diferenciação entre a média e a mediana. Desta vez, o aluno responde do seguinte modo:

F: É que a média é a soma de todos os valores dividido pelo número de pontos e a mediana é o ponto médio [...] é o ponto que está na posição média entre os pontos. Por exemplo: se for três pontos, a posição média é a segunda. Se for cinco pontos a posição média é a terceira. E se for um número par, vai ter dois pontos médios, então vamos ter que somar eles e fazer a média desses dois pontos. Enfim, e se for um número ímpar vai ser sempre o ponto que está no meio.

A resposta do estudante demonstra que houve abstração reflexionante resultante das suas experiências de interação com o GeoGebra. Ou seja, a construção de mediana é fruto da construção e reconstrução do sujeito a partir de suas ações e abstrações ao agir sobre o software, elevando seu raciocínio a novos patamares de reflexionamento. Nesse processo de transição, o estudante passou do nível da representação ao nível das comparações. No primeiro, ele agia sobre o software observando a mediana e buscando encontrar uma definição. Na sequência passa para o nível da reconstituição das ações, reorganizando suas estruturas de pensamento ao perceber que algumas ideias eram refutadas ao agir sobre o GeoGebra. Por fim, passa para o nível da comparação identificando diferenças entre a média e a mediana.

Ainda no nível das comparações, a pesquisadora propôs novas reflexões. Desta vez, solicita uma nova distribuição de pontos onde há uma concentração de valores entre o zero e o dois, com apenas um único valor discrepante, ou seja, afastado dos outros dados, conforme figura 50.

Figura 50- Estudante F comparando média e mediana.



Fonte – Acervo da pesquisa.

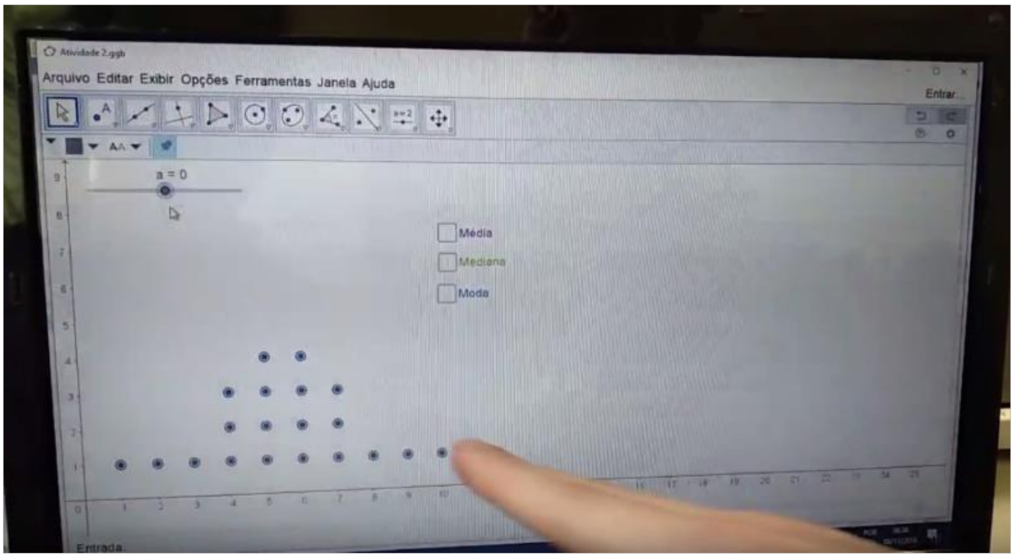
Rapidamente o estudante percebe que, afastando um ponto para a direita, apenas a média era modificada, ao contrário da mediana, que mantinha o mesmo valor. No entanto, demora para justificar o motivo pelo qual isso ocorre. Após algum tempo, observando a tela, ele justifica que o valor da mediana não muda porque os valores que estão na terceira e na quarta posição não são alterados. Diferente da média que leva em conta todos os valores.

Apesar do aluno não saber definir a média sem referir-se a sua fórmula, compreendemos que houve uma evolução de raciocínio sobre a mediana nessa atividade, conforme observado ao longo da descrição da entrevista. Nas próximas atividades serão realizadas novas investigações a respeito do raciocínio do estudante sobre as propriedades das medidas de posição, conforme segue.

6.1.2.2 Atividade 2

Na segunda atividade, o estudante deveria, inicialmente, estimar a média observando o gráfico de pontos que representava as notas de uma turma na disciplina de Matemática, conforme figura 51.

Figura 51 - Estudante F estimando a nota média da turma na disciplina de Matemática.



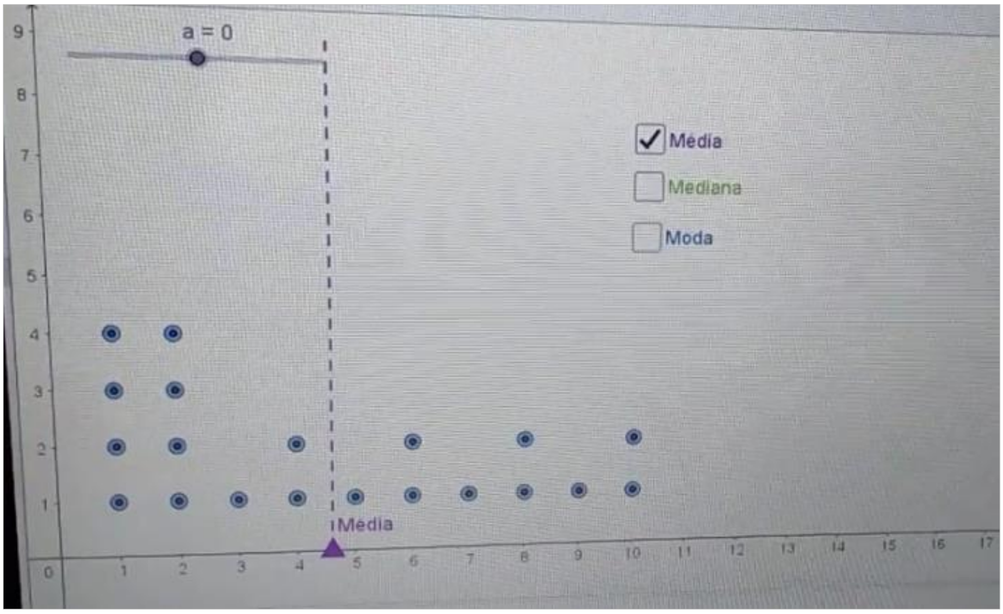
Fonte – Acervo da pesquisa.

Para o estudante a média deveria estar entre o 5 e o 6 justificando esse valor através da distribuição do gráfico. Nas palavras dele: “*parece que está bem dividido aqui o número de pessoas para esquerda e para direita*”. Ou seja, de acordo com a sua resposta, parece que o estudante está levando em consideração que a soma das distâncias dos pontos até a média é nula. No entanto, a justificativa apresentada não demonstrava elementos suficientes para comprovar esse fato, visto que o estudante poderia estar levando, também, em consideração que a média é o meio ou que ela sempre se encontra nos valores de maior frequência. Para investigar esse aspecto, a pesquisadora propõe ao estudante uma reflexão, conforme o diálogo a seguir:

P: Quando eu fiz essa pergunta para outros estudantes, eu obtive alguns tipos de resposta: uns estudantes responderam que a média é uma medida que está no meio. Outros estudantes responderam que a média está entre o 5 e o 6, porque são os valores que mais aparecem. O que tu achas dessas respostas? Tu concordas com essas afirmações?
F: É que se fosse mais distribuído, com mais pontos para a esquerda e alguns pontos à direita, então a média seria puxada. A média cairia um pouco. Ela iria estar mais para esquerda ainda, mas não ficaria lá onde tem mais pontos. Mas como aqui está bem distribuído, eu diria que a média está no meio, 5,5. Está bem distribuído o número de pessoas que tirou mais que 5 e menos que 5.

De acordo com a resposta, a pesquisadora solicitou que o estudante representasse um exemplo no software de modo que a média seria "puxada", conforme ele havia dito. A figura 52 a seguir ilustra o gráfico apresentado pelo aluno.

Figura 52 - Gráfico apresentado pelo estudante F para refutar algumas hipóteses sobre a média.

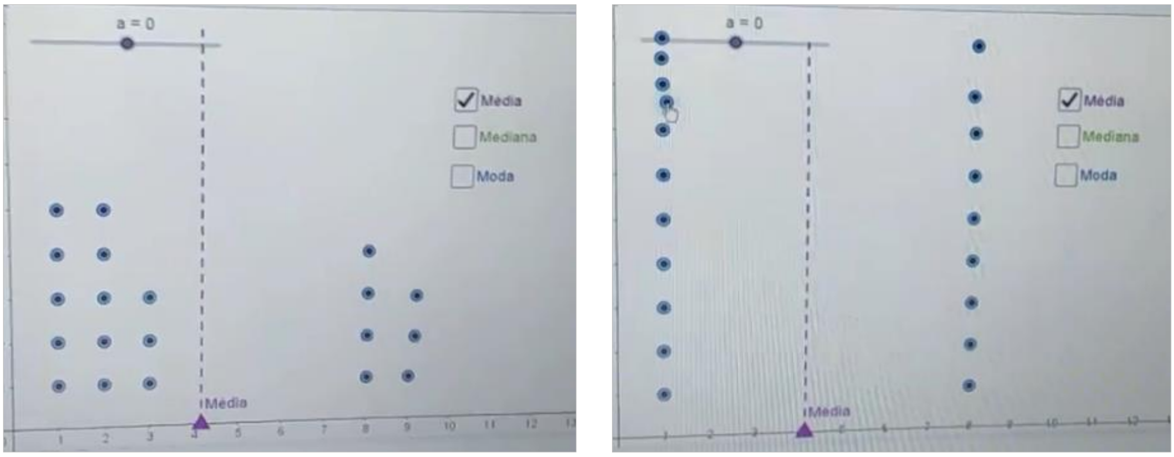


Fonte: Acervo da pesquisa.

O aluno utiliza o gráfico para mostrar que as hipóteses dos outros estudantes estão equivocadas, visto que, no gráfico que ele propõe, há mais dados à esquerda da média, onde a maior frequência está no 1 e no 2, e a média não se encontra entre esses valores e também não está exatamente no meio do gráfico.

Na sequência o aluno deveria apresentar algumas possibilidades de distribuições com média 4, modificando e arrastando os pontos do gráfico presente na tela. Os gráficos a seguir (figura 53) ilustram as diferentes distribuições pensadas pelo aluno:

Figura 53 - Gráficos com diferentes distribuições cujo valor da média é 4 construídos pelo estudante F.



Fonte – Acervo da pesquisa.

O aluno também acrescentou a possibilidade de todos os pontos estarem sobre o valor 4. Nesse caso, a média também seria de 4 acertos.

Na sequência retornou-se ao gráfico da figura 51 e solicitou-se ao estudante estimar a mediana das notas dos alunos. Para ele, o valor mediano das notas da turma também estaria, de acordo com suas palavras, "*junto com a média*", isto é, entre o 5 e o 6. O estudante justifica sua estimação do seguinte modo: "*como é um número par de pessoas, tu tem que pegar os dois temos centrais e fazer a média entre eles, somar os dois e dividir por dois, daí vai ficar 5,5 também*". A resposta do estudante demonstra que ele sabe calcular a mediana. Porém, era preciso investigar se ele compreende o significado desse conceito no contexto em questão, ou seja, das notas da turma em Matemática. Para isso, a pesquisadora propôs ao estudante níveis mais elevados de reflexionamento, solicitando a ele uma diferença entre a média e a mediana, e a interpretação dessas medidas no contexto em questão, conforme o diálogo a seguir:

P: Qual a diferença entre a média e a mediana, nesse caso?
F: A mediana poderia indicar o aluno que está bem no meio entre o pior e o melhor.
P: Mas o que significa a nota mediana da turma ser 5,5?
F: Significa que uma parte da turma foi bem e a outra foi mal.
P: Será que a média e a mediana serão sempre iguais? Qual o sentido se ter uma média e uma mediana?
F: Vamos ver uma aplicação. Eu nunca vi alguém usar a mediana na verdade. No meu boletim no outro colégio chegava a tua média e a média da turma para tu teres uma ideia de como tu fostes em relação ao resto da turma [...]. Mas não sei [...]. Seria um aluno que está entre o pior e melhor mesmo.
P: Mas então quer dizer que existe um aluno que tirou 5,5.

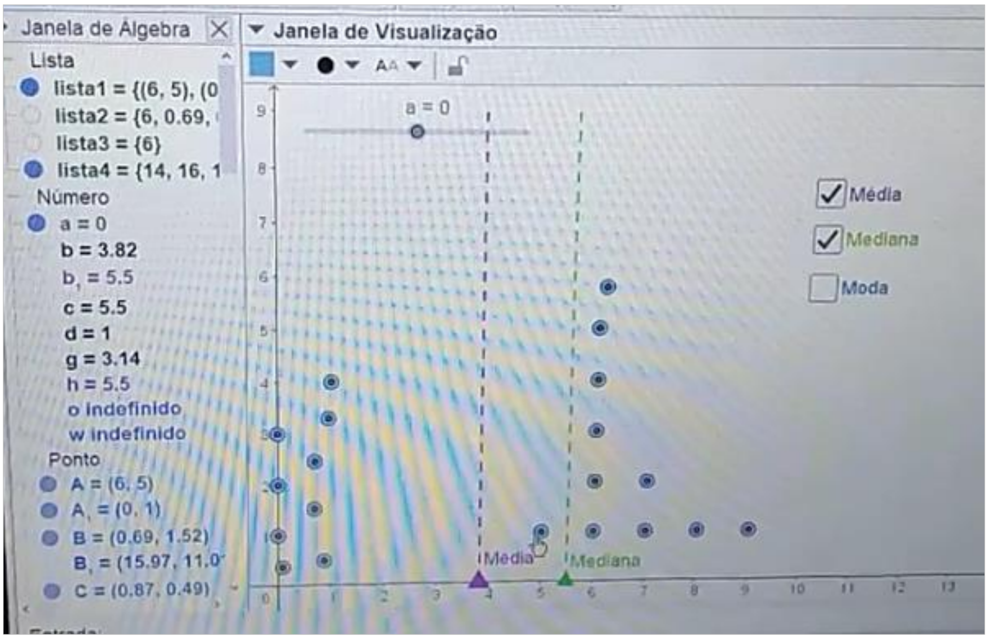
F: Não, não. São oito alunos nesse caso que estão entre o pior e o melhor.

Compreendemos neste diálogo, que apesar do aluno saber estimar a mediana corretamente, ele teve dificuldade em interpretá-la e diferenciá-la da média no contexto do problema. Ou seja, apesar do estudante ter demonstrado um certo avanço de nível de reflexões sobre o conceito de mediana na atividade anterior, observamos que ele ainda não atingiu nível das comparações de reflexionamento.

Diante desse fato, a pesquisadora propõe novas reflexões a respeito da diferença entre a média e mediana. Desse modo, ela investiga se o aluno considera algum caso onde a média e a mediana são diferentes, propondo a investigação de novas distribuições no software por meio da modificação da posição dos pontos no gráfico. Neste instante o estudante, experimenta mover apenas alguns pontos de lugar tentando modificar os valores da média e da mediana. No entanto, a diferença encontrada entre os valores dessas medidas pelo aluno foi sutil, de apenas alguns décimos. O aluno justifica seus primeiros movimentos com os pontos da seguinte forma: "*É que eu estou tentando deixar as duas medidas meio longe, mas desse jeito não deu muito certo*". Sua nova estratégia de ação, portanto, foi mudar a posição de mais pontos buscando uma diferença mais expressiva entre as duas medidas. O estudante começa então a arrastar alguns pontos para a esquerda entre o 0 (zero) e o 1 na escala tentando deixar o valor da média mais baixo que o da mediana. Ao longo desse movimento, ele modifica de lugar o ponto que está na posição 5 da escala e percebe que além da média[27], a mediana[28] também é alterada conforme o diálogo e a figura 54:

[27] O valor da média é representado na janela de álgebra do software, no canto esquerdo da tela, pela letra b.
[28] O valor da mediana é representado na janela de álgebra do software, no canto esquerdo da tela, pela letra c.

Figura 54 - Estudante F afastando os valores da média e da mediana.

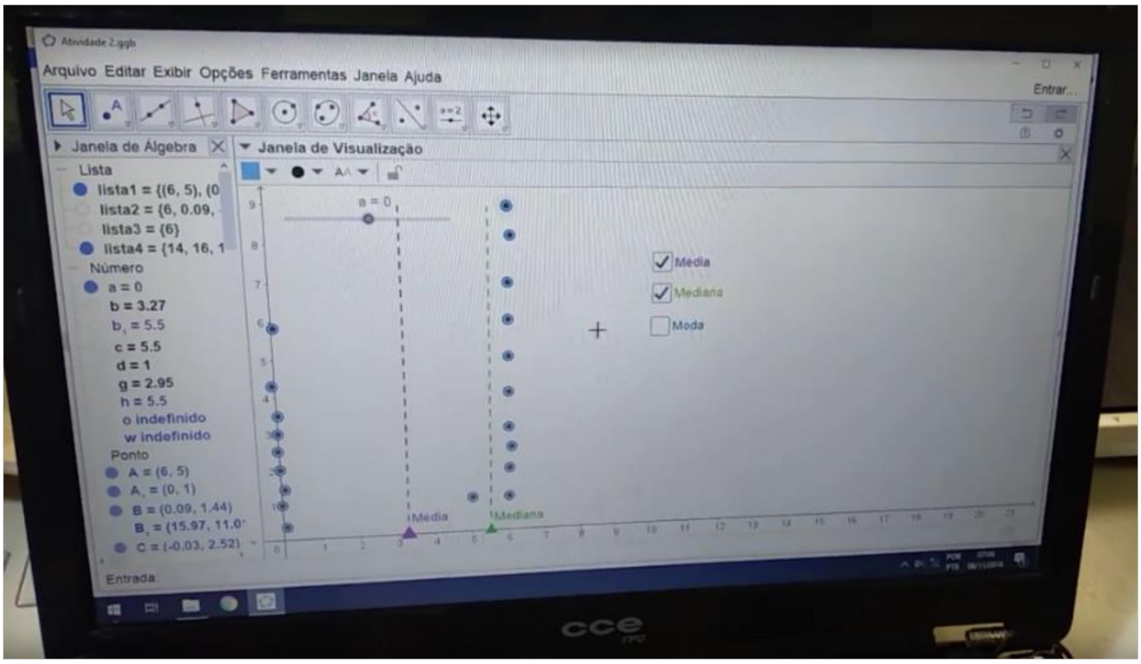


Fonte – Acervo da pesquisa.

F: Opa! Esse tem que ficar.
P: Olha só, espera um pouquinho, antes de tu continuares. Por que esse ponto que tu moveste mudou a mediana? Por que será que isso aconteceu?
F: Porque vai afastar o 5 do 6, que são os valores que estão no centro e determinam a "média da mediana" digamos assim. Então a "média da mediana" também vai "cair" quando tu moves esse aqui. Mas acho que esse é um dos máximos que dá para chegar. Dá para deslocar esses pontos que estão próximos do 1 para cima do 0 (zero). Então a média cai mais um pouco e se afasta da mediana mais ainda.

O aluno também percebe, ao agir sobre o software, que ao arrastar os pontos que estão próximos do 1 para o 0 (zero), na escala, o valor da média diminui e a mediana não se altera. Ele também observa que se mover os pontos que estão sobre o 6 na escala, para a esquerda, a média e a mediana se deslocam também para a esquerda, esta última sob a justificativa de que o centro dos dados seria alterado. Ele ainda percebe que uma estratégia para afastar ainda mais a média da mediana é deslocar os pontos que estão sobre o 7, 8 e o 9 na escala para cima do 6. Nesse último caso a média é alterada, mas a mediana não. Conforme ilustra figura 55.

Figura 55 - Estudante F observando os valores da média e da mediana.



Fonte – Acervo da pesquisa.

O estudante observa, com essa experiência, que a “*média mexe mais fácil*” que a mediana. Ou seja, a média é alterada se for modificado qualquer ponto presente no gráfico. Já a mediana é uma medida mais robusta e se altera apenas se forem modificados os valores que estão sobre o centro da distribuição.

Em seguida, após a sequência de ações no software e as observações realizadas a pesquisadora propôs novamente que o estudante apresente uma diferença entre as medidas conforme o diálogo a seguir:

P: A partir dessa tua experiência no software e as medidas com valores diferentes, tu saberias me dizer qual a função da média e da mediana, nesse contexto?
F: Tá, a média está balanceando a nota de todo mundo. Enquanto a mediana mostra para onde está a maioria das pessoas. É eu não sei explicar melhor que isso. É que eu não sei a aplicação da mediana mesmo. Aqui dá para dizer que ela está ajudando a ver, além da média, como é que a turma está. Se tu olhares para a média parece que muita gente foi mal e alguns foram bem. Mas a mediana está dizendo que não, ou seja, teve bastante gente acima da média da turma.
P: Nesse caso, a mediana ajudaria ou seria irrelevante?
F: Ajudaria a saber melhor como a turma está. Se eu olhasse só para o 3,27 (valor da média), eu iria achar que a maioria da turma estaria mal.
P: Tu disseste que a mediana é onde está a maioria. Era isso que querias dizer?
F: É, tu sabes que a maioria está acima de 5,5.
P: E é a maioria mesmo?
F: Sim. Aqui tem dez que tiraram 6, nove que tiraram 0 (zero).

Observamos nesse diálogo que o estudante entende que a mediana é uma medida que indica "*onde está a maioria*". Ao longo da conversa, deduziu-se que ele havia respondido dessa maneira porque não havia contado corretamente todos os pontos que estavam à esquerda da mediana.

Ao perceber esse equívoco, a pesquisadora solicitou que o estudante estimasse o valor da moda. Nesse caso, o estudante não apresentou dificuldades, respondendo que se os pontos fossem ajustados no gráfico de forma que ficassem perfeitamente alinhados, a moda seria 6. Isso foi confirmado ao ajustar os pontos no gráfico e verificar a moda clicando na aba "moda" presente na tela. Nesse momento novamente inicia-se um novo diálogo:

P: Porque tu estimasses 6 como o valor da moda?
F: Porque, aí sim, dá para dizer que a maioria dos alunos tirou 6. [Responde sorrindo.]
P: Então, pelo o que tu dizes, não há diferença entre mediana e moda. É isso?
F: Tem [...]. Pela mediana tu consegues saber, mais ou menos, se a turma está acima da média ou abaixo da média [...] a maioria da turma. Nesse caso está acima da média da turma mesmo.
P: A média que tu falas é essa que está marcada no gráfico?
F: É, não é a "média do colégio", que seria 5. Eu me refiro a média da turma.
P: Entendi. Então a maioria está acima da média da turma.
F: Sim, são 11 que estão acima.
P: Então a mediana serve para a gente saber onde está a maioria, isso?
F: Não, não. Serve para a gente saber se a maioria passou da média. Tu identificas para que lado está a maioria mais ou menos. [...] É, porque olhando aqui a média, sem ter a mediana, tu não saberias dizer se a maioria foi mal e alguns foram bem. Ou se a maioria foi acima da média da turma e alguns puxaram a média muito para baixo.
P: Entendi. Tá, mas se a mediana indica onde está a maioria. Porque ela deu 5,49?
F: Não, não é onde está a maioria. Ai, como eu posso explicar? [...] Tem pelo menos metade da turma acima dessa mediana, entendeu? Na verdade, vai ter metade da turma acima dessa mediana. Metade da turma vai estar acima dessa mediana, metade da turma vai estar abaixo.

Observamos no diálogo descrito, que quando o estudante se referia a mediana como uma medida que indica se a maioria está acima ou abaixo da média, ele, na verdade, estava fazendo uma comparação entre os valores da média e da mediana. Ou seja, como a mediana era maior que a média, no gráfico da figura 55, então o aluno concluiu que a concentração dos dados estava em um intervalo superior ao valor da média. No entanto, ele teve dificuldades em descrever o conceito de mediana deixando claro, apenas no final do diálogo, que a mediana é medida que separa as notas da turma deixando metade das notas acima dela e a outra metade abaixo dela.

Compreendemos que a ideia de mediana, não estava bem desenvolvida para o estudante. Ao comparar com a definição de moda o aluno entrou em um conflito de ideias, o fazendo perceber que a sua hipótese sobre a mediana não estava correta. Ou seja, os reflexionamentos ao nível das comparações fizeram o aluno reorganizar suas estruturas de raciocínio para diferenciar a mediana da moda.

Para finalizar, propomos que o estudante descrevesse a função de cada uma das medidas: média, mediana e moda. Para ele, a média ainda é definida pela sua fórmula, ou seja, de acordo com suas palavras: “*tu vais somar a nota de todo mundo e dividir pelo número de pessoas*”. Já a moda serve para “*saber a nota que a maioria tirou*”. E por fim, a função da mediana é “*saber se pelo menos metade da turma está acima da média ou não*”. Ou seja, houve um retrocesso nas ideias sobre a mediana, visto que, apesar de ter concluído, em momentos anteriores da entrevista, que a mediana separa as notas da turma abaixo e acima dela, ele não tomou consciência desse conceito. Ou seja, nessa atividade houve abstração reflexionante, especialmente quando observamos a evolução sobre as ideias relativas à mediana, mas sem tomada de consciência. Pois, apesar de ter avançado em patamares mais elevados de raciocínio através das ações no software e da entrevista com a pesquisadora, o estudante ainda tem dificuldades descrever a mediana.

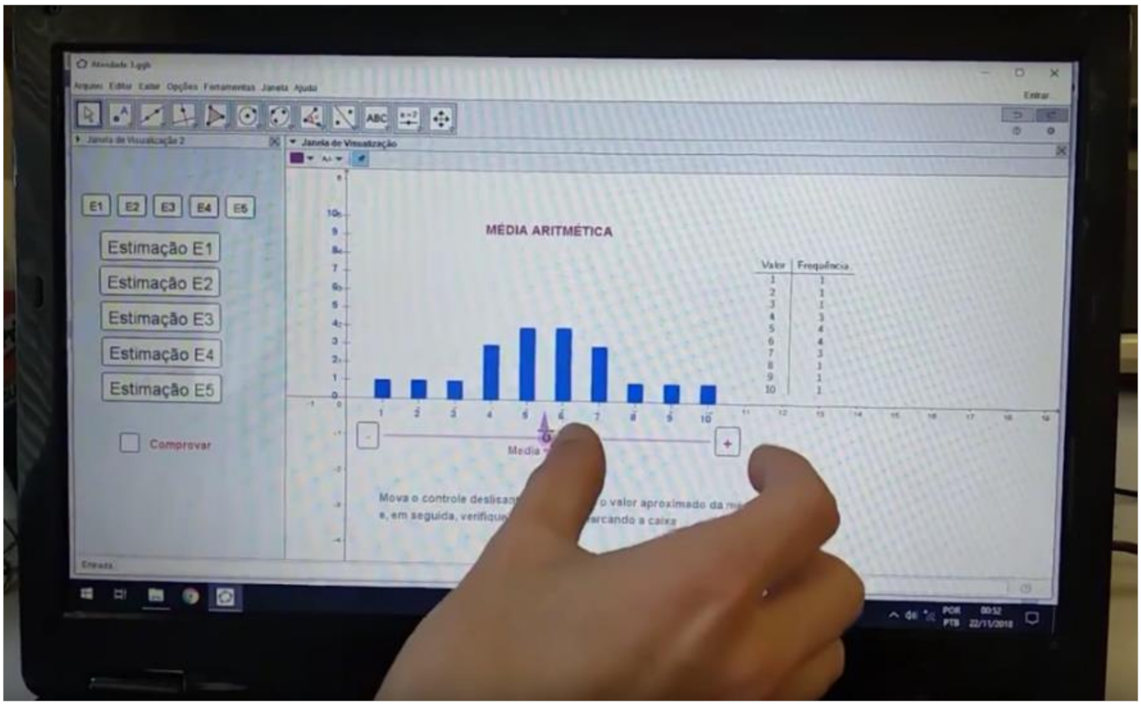
Na próxima atividade, será proposta uma nova perspectiva sobre o conceito de média, conforme segue:

6.1.2.3 Atividade 3

Nesta atividade, o estudante deveria inicialmente estimar a média aritmética observando os gráficos de barras e, na sequência, observar que o gráfico fica equilibrado quando o ponto de equilíbrio coincide com a média aritmética.

No primeiro gráfico, o estudante não apresentou dificuldades em estimar a média, posicionando-a rapidamente no número 5,5 por meio da seta presente na escala. O aluno justifica a sua estimação da seguinte maneira: “*É que visualizando pelo gráfico tu verás que tem uma distribuição igual para cá [esquerda da média] e para cá [direita da média]*”. A figura 56 ilustra o gesto do estudante com as mãos referindo-se à simetria do gráfico em relação à média.

Figura 56 – Estudante F estimando a média no gráfico de colunas.

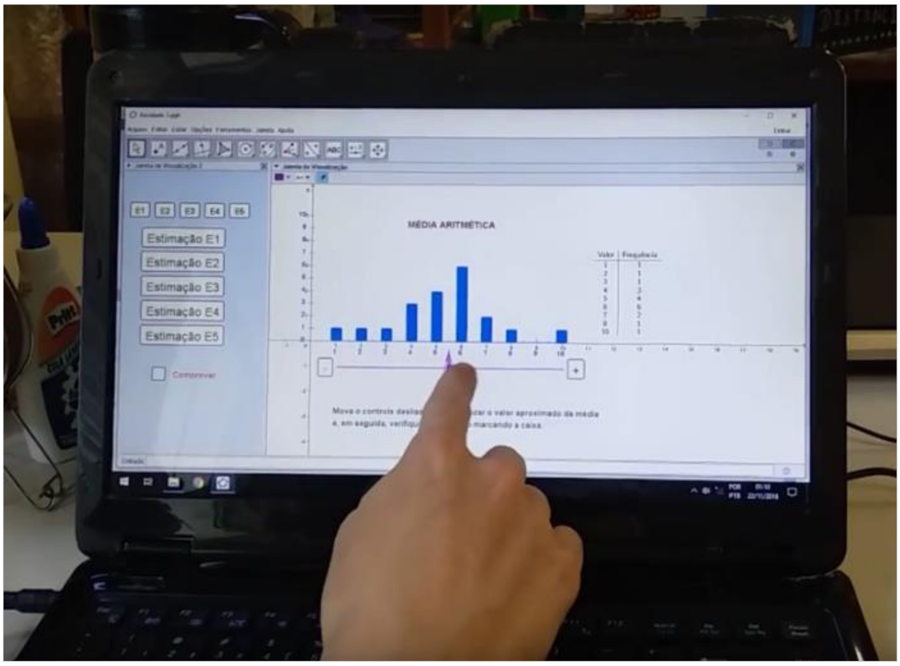


Fonte – Acervo da pesquisa.

Sua estimação foi confirmada no software pelo botão comprovar presente no canto esquerdo da tela. Na sequência, a pesquisadora apresenta uma nova tela onde o mesmo gráfico aparece desequilibrado. Ao tentar equilibrar o gráfico o estudante responde: "*Tá, é como se o lado mais 'pesado', digamos assim, ficasse para baixo. Daí tem uma bolinha embaixo da base que, conforme tu vais mexendo, ela vai alterando o ponto de equilíbrio*".

Observamos que, apesar do aluno falar em ponto de equilíbrio, parece que ele ainda não havia percebido que o gráfico se equilibrava exatamente na média aritmética. Solicitou-se então que ele observasse outros gráficos com distribuições assimétricas. As estimações da média nesses gráficos não foram triviais para o aluno. De acordo com suas palavras: "*Tem que ver agora, não tem um equilíbrio".* Compreendemos que esse equilíbrio ao qual ele se refere significa a simetria do gráfico em relação à média aritmética. No entanto, ainda que de maneira não imediata, como da primeira vez, o estudante fez estimações bem próximas dos valores da média em todos os gráficos. Observamos ainda que ele fazia essa estimação sem utilizar o algoritmo da fórmula e tinha dificuldade em justificar os valores estimados. Apenas ao final da atividade, no último gráfico, o estudante consegue expressar de maneira clara seu raciocínio e justificar que, para estimar a média, ele buscava a barra do meio em um intervalo tendendo ao lado cujas barras são mais altas. Ou seja, no caso do gráfico E5 da figura 57, por exemplo, a barra do meio está no valor 5 da escala. No entanto, a barra que está sobre o valor 6 é mais alta e, de acordo com o estudante, esta barra está "*puxando a média para a direita*". Portanto, a média estaria entre 5 e 6.

Figura 57 – Estudante F estimando a média em gráficos de colunas.



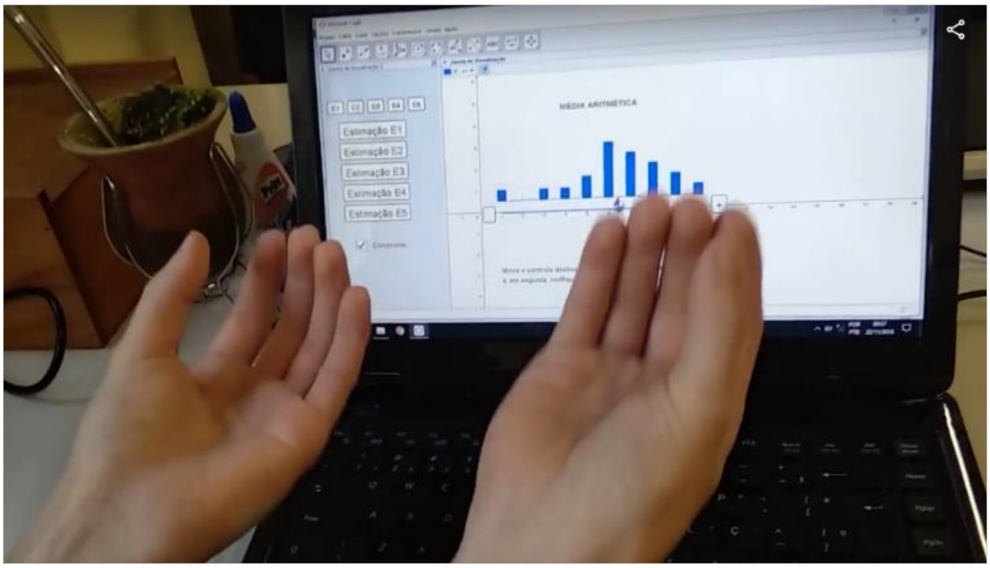
Fonte - Acervo da pesquisa.

Na medida que o estudante estimava a média nos gráficos, era apresentado na sequência outra tela onde o mesmo gráfico aparecia desequilibrado. No segundo gráfico de barras, o primeiro com distribuição assimétrica, o estudante percebe que o gráfico fica equilibrado quando o eixo, representado pela seta rosa, está coincidindo com a média aritmética dos valores. Segundo ele, o gráfico fica equilibrado devido aos "*pesos das barras*", conforme o diálogo a seguir:

P: O que está acontecendo quando tu moves esse ponto? O que tu observas?
F: Ah, esse lado aqui da direita 'pesa mais', digamos. Tem mais notas aqui (lado direito) do que aqui (lado esquerdo). Mas se eu mover a seta para o lado direito da média, próximo do dez, vai pesar mais o lado esquerdo. E bem na média equilibra.
P: Por que será que ele está equilibrando na média?
F: Porque se botasse essas notas como pesos, ficaria o mesmo peso de cada lado. Daí fica equilibrado.

A figura 58 mostra o estudante fazendo gestos com as mãos, referindo-se a ideia de equilíbrio associada aos pesos das notas.

Figura 58 – Estudante F demonstrando o equilíbrio da média associado aos pesos das notas.



Fonte – Acervo da pesquisa.

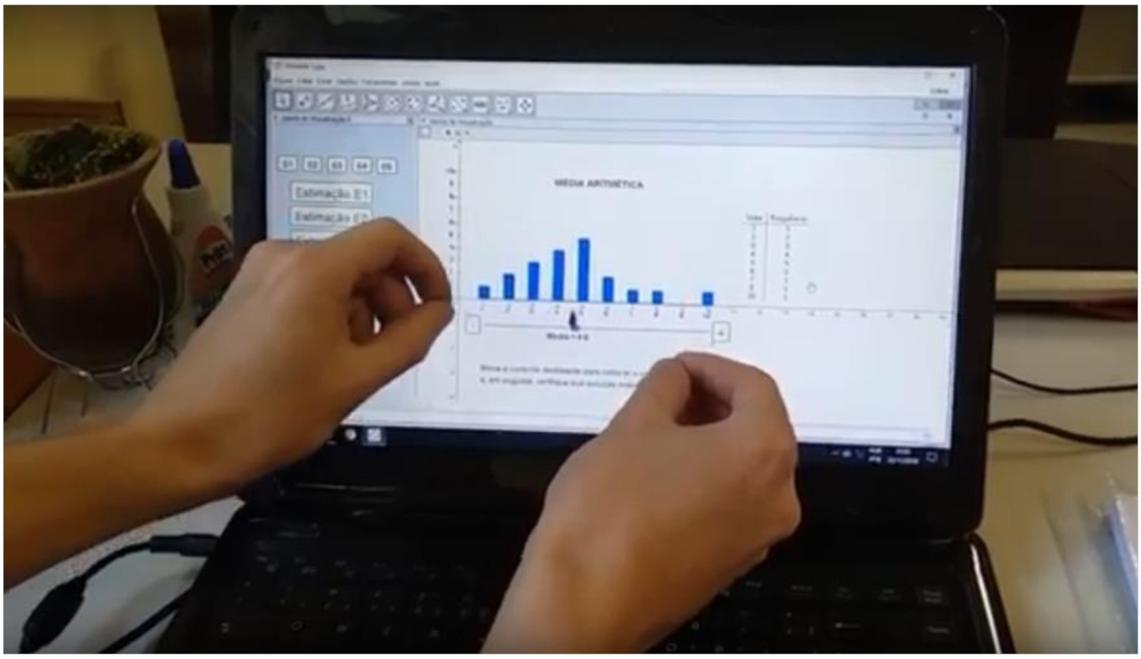
A ideia de atribuir peso às notas é proveniente de uma abstração do tipo pseudo-empírica fruto de uma característica atribuída pelo estudante ao agir no software. A mesma ideia de peso é apresentada pelo aluno no gráfico de estimação E3. Para ele, as barras teriam pesos e a média aritmética demarcaria o ponto ao qual a soma desses pesos são iguais à esquerda e à direita.

Então, a pesquisadora propõe a contagem dos pesos em ambos os lados da média. O aluno realiza o cálculo da média aritmética ponderada e, também, verifica que a soma dos valores associados às suas frequências à esquerda e à direita da média não conferem. O diálogo a seguir, mostra o momento de reflexão do estudante e a reorganização das estruturas de raciocínio sobre a ideia de equilíbrio:

F: É deu bem diferente...[sorrisos]
P: Então, como assim, é o equilíbrio do peso? O que é o peso?
F: Ah, tá, tá, ... [responde o aluno, após observar o gráfico por alguns minutos]. É que se tu botares um quilo aqui no 10, é diferente de colocar um quilo aqui no 6. Tem esse problema. Teria que calcular, eu não sei calcular isso. Eu deveria saber, mas eu não sei.
P: Não entendi. Me explica melhor.
F: É uma alavanca, né. Tipo em física. Acho que é em física que se aprende isso. A força que se faz se tu mexer aqui na ponta esquerda com o eixo posicionado lá, mais para a direita, é menor do que se o eixo estivesse aqui mais para esquerda. Tu terias que fazer muito mais força, por exemplo. É o que se usa em câmera, aquelas câmeras de televisão grandonas. Tu percebes o cara mexendo fácil o cabo grandão por causa disso.
P: A gente poderia pensar em uma gangorra?
F: É isso.
P: Aí a criança se senta lá na ponta e tem uma criança que se senta aqui, próximo do eixo...
F: Daí se eles tiverem o mesmo peso, essa aqui (no ponto no 10) vai ficar mais para baixo.

A figura 59 ilustra o estudante explicando o exemplo da alavanca e representando seu raciocínio com as mãos.

Figura 59 – Estudante F explicando o exemplo da alavanca.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Compreendemos que houve uma evolução no raciocínio do estudante quando, ao entrar em conflito com a desigualdade dos "pesos" atribuídos às barras, toma consciência que, verdade deveria considerar também a posição das barras na escala e suas distâncias em relação à média. Essa tomada de consciência fica evidente na frase: "*se tu botares um quilo aqui no 10, é diferente de colocar um quilo aqui no 6*"; e no exemplo da alavanca na sequência. Essa evolução de raciocínio demarca o processo de abstração reflexionante do tipo refletida, visto que, desta vez ele sabe explicar com clareza a ideia de equilíbrio atribuída à média, apesar do estudante não associar essa ideia ao algoritmo da média aritmética ponderada que leva em conta os valores e as frequências. Ao final da atividade, o estudante descreve a média aritmética como o ponto de equilíbrio dos valores.

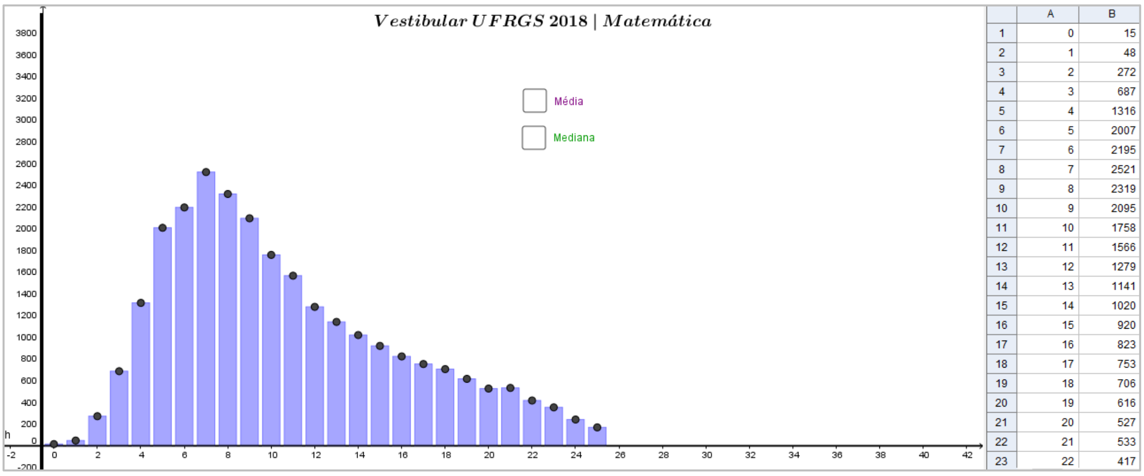
6.1.2.4 Atividade 4

Nesta atividade o estudante deveria interpretar as medidas de posição através dos gráficos que representam o desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS 2018. O primeiro gráfico a ser interpretado é sobre o número de acertos na prova de Matemática.

Observamos que o estudante teve dificuldades em interpretar o gráfico em questão, visto que, para ele, os valores presentes na escala horizontal representavam o número de pessoas que acertaram uma determinada quantidade de pontos representada na escala vertical. No entanto, esse aspecto foi rapidamente corrigido ao perceber que, dessa forma, a quantidade de pessoas que prestaram o vestibular seria muito pequena, não correspondendo com a realidade.

Na sequência, foi solicitado que o estudante interpretasse o gráfico em questão (figura 60), conforme o diálogo a seguir:

Figura 60 – Gráfico sobre o número de acertos na prova de Matemática dos candidatos ao vestibular da UFRGS em 2018.



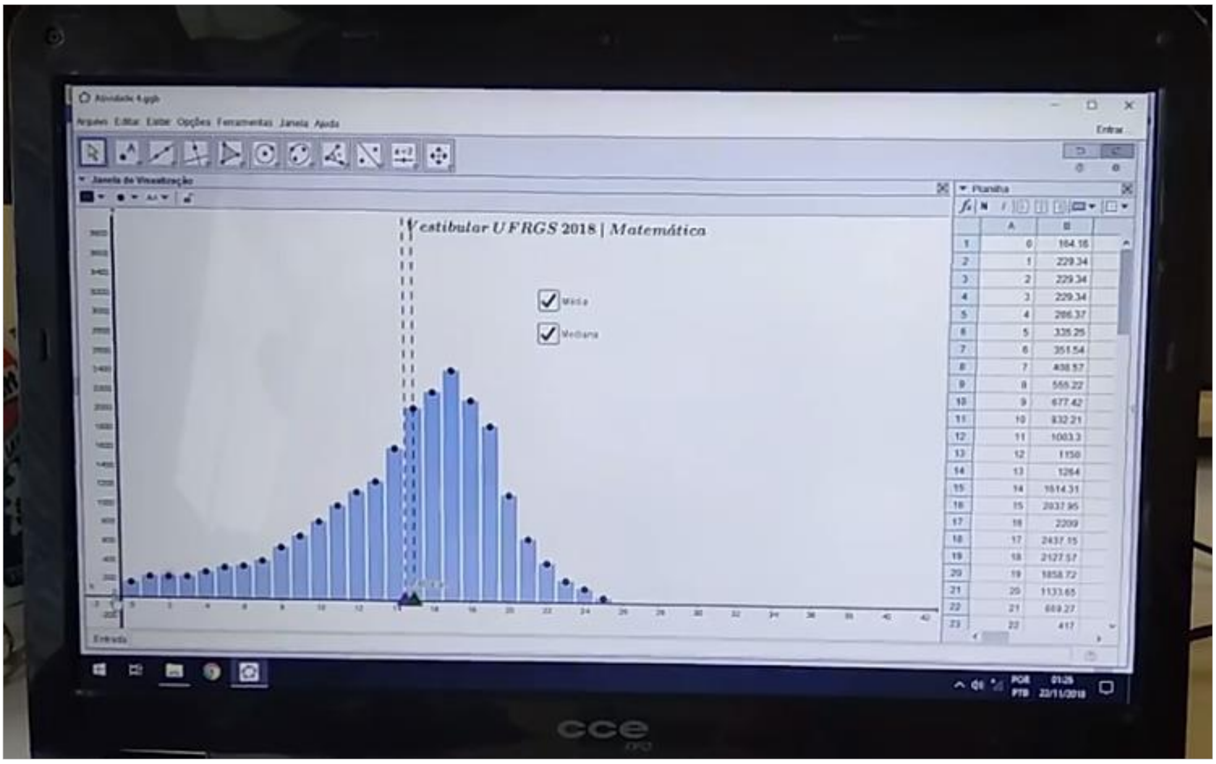
Fonte – Acervo da pesquisa.

P: Explica para mim como foi o desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS 2018 em Matemática.
F: Bom, teve uma boa quantidade de alunos que acertou 7 questões, isso seria a moda. A média estaria um pouco mais para cima, uns 10 ou 11, talvez.
P: E a mediana, onde ela estaria? Depois da média, entre a média e a moda?
F: Parece que está antes da média.
P: E da moda?
F: Antes da moda acho que não está.
P: Então qual é a ordem das medidas no gráfico?
F: Tá, a moda primeiro, a mediana e depois a média. Ou não? Espera! É acho que é isso, vamos ver.

Os valores estimados foram confirmados por meio dos comandos presentes no software. O estudante ainda justifica que a média não está posicionada entre os valores de maior frequência porque havia uma quantidade significativa de candidatos que havia acertado mais que a metade da prova. Segundo ele: "*Mesmo que se duas pessoas tivessem acertado 8 e uma tivesse acertado 25, a média 'subiria', entendeu?*"

Na sequência a pesquisadora indagou sobre a ordem das três medidas se o gráfico tivesse um formato de curva com um pico à direita e uma cauda à esquerda, ou seja, ao contrário do formato da curva presente na tela. Após pensar uns instantes, o estudante sugeriu que, nesse caso, a ordem das medidas seria invertida, ou seja, haveria média < mediana < moda. Em suas palavras: “*O contrário inverte tudo*”. No entanto, para ter certeza da sua resposta, o próprio estudante propôs a “inversão” da curva no gráfico (figura 61) a partir da alteração dos tamanhos das barras por meio do arrastar dos pontos presentes em cada uma delas.

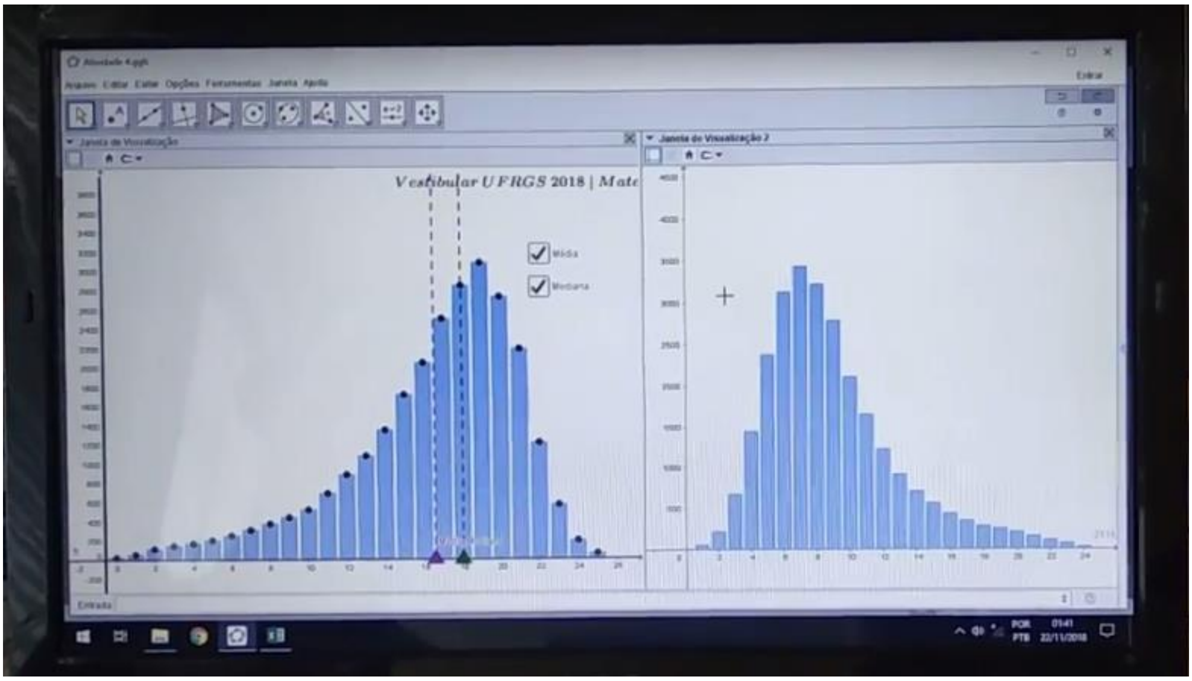
Figura 61 – Estudante F observando o gráfico com média<mediana<moda.



Fonte – Acervo da pesquisa.

O mesmo procedimento de inversão das curvas foi realizado com o gráfico que representa o número de acertos na prova de Física. Desta vez, os gráficos foram construídos através da alteração dos valores na planilha de cálculo e representados simultaneamente através das duas janelas de visualização presentes no software (figura 62).

Figura 62 – Estudante F comparando as medidas de posição e o formato dos gráficos.

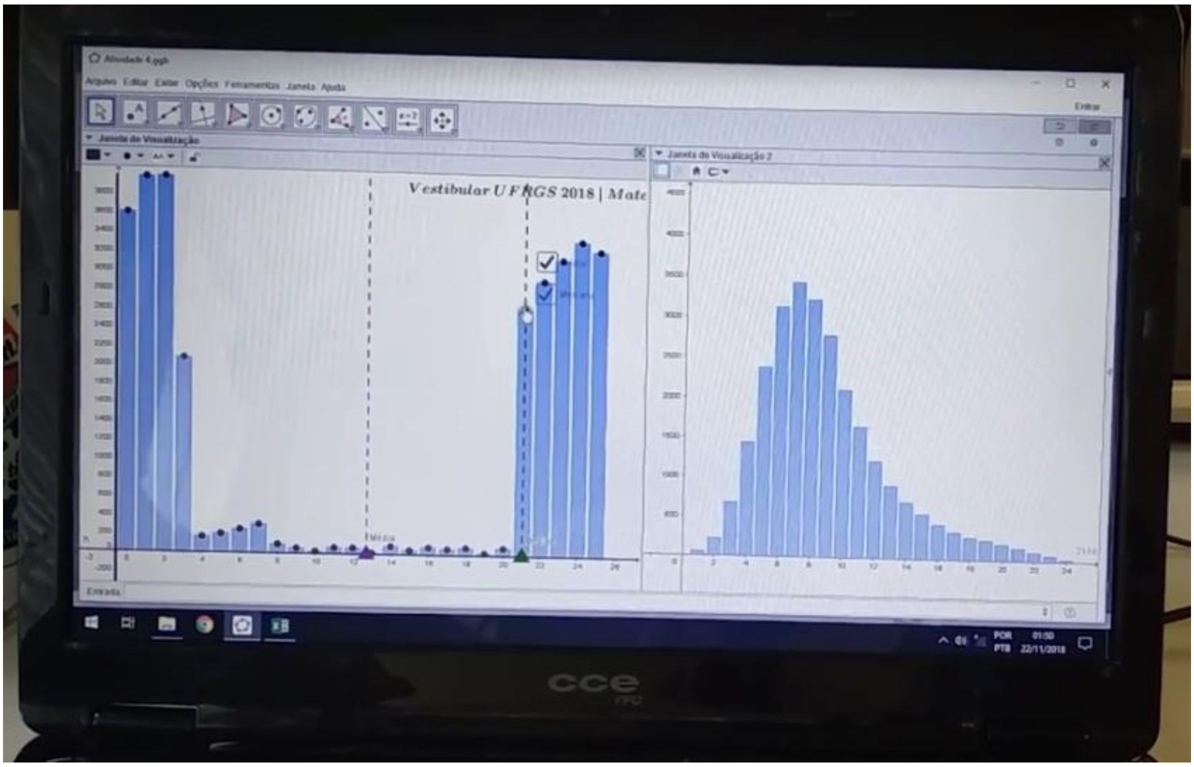


Fonte – Acervo da pesquisa.

Observando os gráficos e comparando as medidas de posição, o estudante conclui que, para que haja moda < mediana < média *"tem que haver uma concentração maior de pessoas aqui [à esquerda] com um valor mais baixo e distribuir bem para as notas maiores"*. Para ele, se as medidas tivessem a ordem contrária o gráfico também deveria ter uma curva com formato ao contrário, ou seja, "*tu terias que concentrar bastante gente com as maiores pontuações lá à direita, e distribuir o resto um pouco 'para baixo'"*.

Diante da conclusão do estudante, a pesquisadora propôs que ele apresentasse um gráfico cuja média seria de 12 acertos e a mediana seria de 22 acertos. Segundo o aluno, com essas medidas "*seria difícil de passar no vestibular*". De acordo com suas palavras, para a mediana ser de 22 acertos significa que "*metade das pessoas que participaram acertaram 22 questões ou mais. A outra metade foi abaixo dos 22*". Ele ainda completa que vai ter bastante gente "*puxando a média*" e, portanto, teve muitas pessoas que foram mal na prova acertando poucas questões. Para representar o seu raciocínio, o estudante vai arrastando os pontos presentes nas pontas das barras, buscando conciliar as medidas solicitadas e a distribuição que havia imaginado. A figura 63 ilustra o gráfico apresentado pelo aluno.

Figura 63 – Exemplo de gráfico construído pelo estudante F com média 12 e mediana 22.

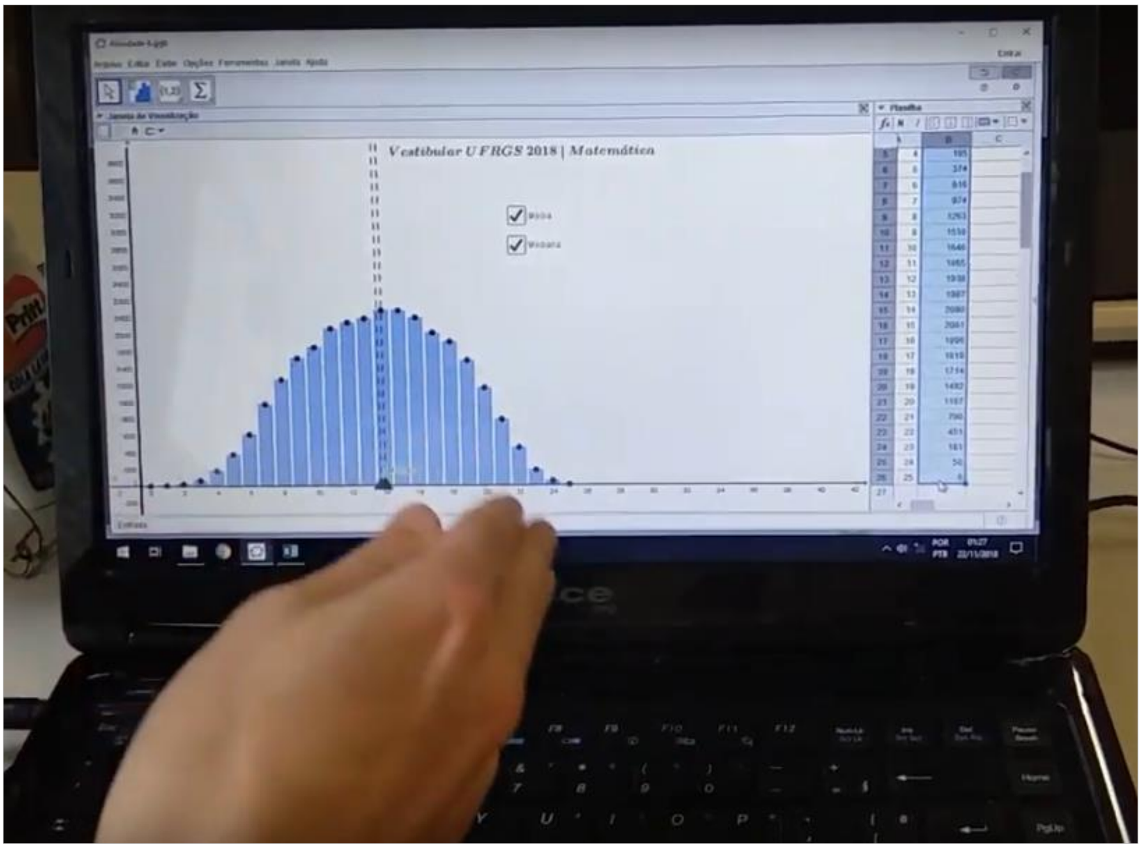


Fonte – Acervo da pesquisa.

É importante salientar que, no gráfico apresentado pelo aluno, os valores da média e da mediana não atingiram exatamente o 12 e o 22 na escala, respectivamente. Além disso, o aluno estava ciente de que a distribuição apresentada por ele não mantinha o mesmo número de candidatos que realizaram a prova de Física como no gráfico da janela de visualização 2. Ou seja, o gráfico do estudante representava apenas um esboço do seu raciocínio sobre uma possível distribuição das notas com média e mediana de aproximadamente 12 e 22 acertos respectivamente.

Após, foram inseridos, na planilha do GeoGebra, os valores que representam o número de acertos por questão da prova de História do vestibular da UFRGS 2018, gerando, na janela de visualização, um gráfico cuja curva é mais simétrica, diferente do gráfico que representa o número de acertos da prova de Matemática. Neste gráfico o estudante não teve dificuldades em concluir que a média, a mediana e a moda estariam, em suas palavras, "*mais juntas*" justificando, através dos movimentos das mãos, (figura 64) que o gráfico "*tem um certo equilíbrio*".

Figura 64 – Gráfico do desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS 2018 na prova de História.



Fonte – Acervo da pesquisa.

Para finalizar, a pesquisadora propõe ao estudante a interpretação das três medidas de acordo com o gráfico invertido da prova de Física do vestibular da UFRGS em 2018, conforme lado esquerdo da figura 62. Nesse momento, o aluno mostra um certo desequilíbrio visto que, apesar das ações no software e das reflexões e abstrações realizadas ao longo das entrevistas, ele apresentava dificuldades em interpretar as medidas de maneira contextualizada, conforme o diálogo a seguir:

P: Para que serve média, mediana e moda? Explica essas três medidas no contexto do desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS.
F: A média tu sabes mais menos a quantidade de acertos de cada aluno [...]. Ai, eu não sei diferenciar mais a média.
P: Ok, então qual a diferença entre a média e a mediana?
F: Tá, a moda vai ser o número que mais apareceu.
P: Ok, e qual a diferença dela para as outras medidas?
F: Que não necessariamente o número que mais apareceu será a média ou a mediana.
P: E o que diferencia a média da mediana, por exemplo?
F: A mediana é o termo médio. Não sei explicar.
P: O que significa esse termo médio?
F: Tu vais saber a distribuição de pessoas que estão, nesse caso, do 18 [nota mediana] para o zero e do 18 para o 25. Tem que ter, mais ou menos, o mesmo número de pessoas.
P: Se eu disser que a mediana é de 18 acertos, o que eu posso afirmar?

F: Que uma maioria foi acima da média. Tem um número maior de pessoas acima da média.
P: Tu me disseste antes que a mediana dividia o mesmo número de pessoas e agora me falas que é a maioria em relação à média. Pode me explicar melhor essas relações?
F: A média equilibrava a nota.
P: Mas o que a mediana faz? Se a mediana é 18, o que isso significa?
F: Que haverá a mesma quantidade de pessoas abaixo e acima de 18 acertos. Ou seja, haverá a mesma quantidade de pessoas que acertaram mais de 18 questões e menos de 18 questões.
P: E a média?
F: A média é um valor que vai representar uma nota de equilíbrio de cada um. Como teve bastante gente que teve um número pequeno de acertos, a média vai "descer". Mas, ainda assim, haverá um número maior de pessoas acima da média do que abaixo.

O diálogo exposto demonstra que o estudante tomou consciência sobre os conceitos de média, mediana e moda, conseguindo interpretá-las no contexto do problema atingindo patamares superiores de reflexões em relação às primeiras atividades realizadas. Compreendemos ainda que o estudante apenas consegue atingir novos patamares de reflexões sobre a média e a mediana no nível das comparações de reflexionamento. Ou seja, é identificando diferenças entre uma medida e outra que o estudante consegue descrever cada uma delas e interpretá-las de maneira contextualizada. Observamos mais uma vez, que as ações no software foram de suma importância nesse processo, pois permitiram externar o raciocínio do aluno, experimentar e refutar ideias.

6.1.3 Entrevista com a estudante G

A estudante G já havia estudado as medidas de tendência central na disciplina de Matemática e, portanto, demonstrou um certo domínio a respeito das fórmulas e dos conceitos de média, mediana e moda. Desse modo, as ações no GeoGebra pouco contribuíram para a reconstrução dos conceitos, visto que, em diversos momentos da entrevista, suas respostas demonstravam certa clareza em relação ao significado e as propriedades das medidas de posição. Assim, descrevemos apenas os trechos das entrevistas que consideramos mais relevantes para a pesquisa sem relatar detalhadamente todo o diálogo como os sujeitos anteriores.

6.1.3.1 Atividade 1

Nesta atividade apresentaremos as concepções iniciais da estudante sobre a média, a mediana e a moda, bem como a evolução desses conceitos ao longo das ações no GeoGebra.

Inicialmente observamos que, assim como os outros sujeitos da pesquisa, a estudante G também demonstrou dificuldade em explicar o significado do conceito de média, apegando-se à fórmula em diversos momentos para descrevê-la. Assim, toda a vez que era proposto a estimação da média aritmética, ela realizava o cálculo mentalmente somando todos os valores e dividindo pelo número de valores somados. Isso foi constatado tanto em casos e que envolviam a média aritmética simples quanto em casos em que envolviam a média aritmética ponderada. O software, portanto, era utilizado apenas para conferir os valores calculados mentalmente.

O raciocínio semelhante ocorreu quando foi proposto que a estudante apresentasse possíveis distribuições com três notas cuja média aritmética seria igual a 5. Nesse caso, rapidamente ela respondeu arrastando os dados na tela que para que a média aritmética seja igual a 5, os valores deveriam ser (5,5,5) ou (0,5,10). Ao arrastar os dados na tela, tentando encontrar novas distribuições a estudante responde que a média aritmética seria igual a 5 para quaisquer três notas cuja soma fosse igual a 15, pois ao dividir por 3 a média seria 5. Ao chegar a essa conclusão, ela apresenta novas distribuições arrastando os pontos na tela. Observamos, porém que o software, nesse caso, apenas serviu como um apoio para demonstrar suas hipóteses, visto que seu raciocínio estava apoiado na realização do cálculo mental de valores cuja soma seria 15.

Ainda no que diz respeito ao significado da média, observamos que a estudante associava a média como um ponto de equilíbrio, mesmo não conseguindo expressar claramente seu pensamento. Constatamos isso a partir da resposta da estudante G a partir da sua interpretação sobre o desempenho de um aluno com média 5 na disciplina de Matemática:

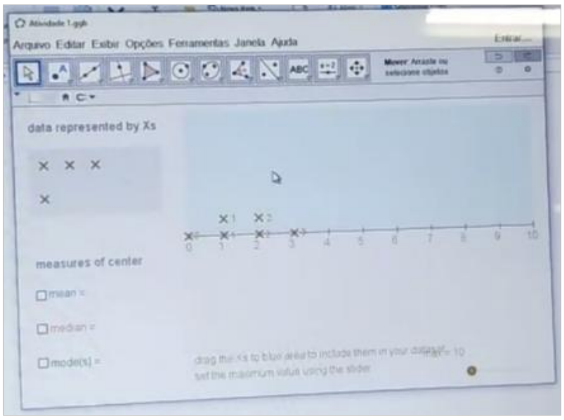
G: Eu sei que em alguma prova ele foi bem. Se ele foi mal em uma prova, na outra ele deve ter ido muito bem para conseguir compensar, ou ele deve ter tirado sempre a mesma nota.

Outro resultado observado é que a estudante, ao analisar o gráfico da figura 65, confundiu inicialmente o conceito de moda com o de mediana, apesar de rapidamente perceber seu equivoco e corrigi-lo respondendo que a moda seria 1 e 2. No caso da mediana, em particular, ao contrário dos outros sujeitos, a estudante não apresentou dificuldades em encontrá-la, organizando os dados mentalmente e separando-os na metade para encontrar o meio da distribuição, conforme pode ser contatado pelo diálogo a seguir:

P: Qual seria a mediana nesse caso?
G: Agora sim, a mediana seria 1,5. [Responde após fazer o cálculo em voz baixa.]
P: Por quê? Como tu fizeste a conta? Podes me explicar?

G: Porque a mediana é o ponto do meio, mas, como é par, tu pegas os dois valores (1 e 2) e divide por 2. Eu organizei primeiro. Tem que organizar primeiro em ordem crescente 0,1,1,2,2 e 3. Depois eu peguei os valores do meio, que seria 1 e 2, somei e dividi por 2.

Figura 65 - Estudante G estimando a mediana no gráfico.



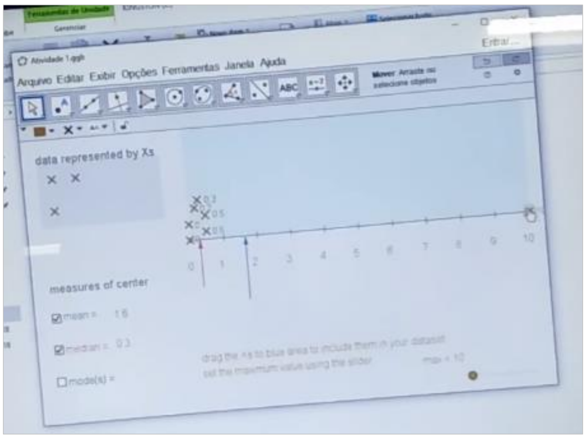
Fonte: Acervo da pesquisa.

Os valores da moda e da mediana foram confirmados através dos comandos no software. Observou-se ainda que a estudante também apresentou o raciocínio correto no cálculo da mediana para um número ímpar de valores, quando propomos a inserção de um sétimo ponto no valor 4 da escala, conforme a resposta a seguir:

G: Para calcular a mediana eu preciso colocar em ordem crescente o 0,1,1,2,2,3 e 4. Depois ficaria 0,1,1 para lá, depois o 2,3,4 para o outro lado e o 2 no meio. Portanto a mediana será 2.

Ao perceber a clareza na compreensão dos conceitos sobre média, mediana e moda. Foi proposto a estudante novas distribuições a partir dos mesmos dados presentes na tela, mas com distribuição assimétrica conforme a figura 66:

Figura 66 - Distribuição assimétrica dos dados observada pela estudante G.



Fonte: Acervo da pesquisa.

No gráfico da figura 66, propomos que o ponto presente no valor 10 da escala fosse arrastando para a esquerda para que a estudante observasse os valores da média e da mediana. Rapidamente G observa que a média é modificada, mas a mediana não. Ao justificar esse fato, a estudante apresenta certa insegurança na resposta, mas sugere que isso ocorre devido ao seguinte fato:

G: A mediana continua o mesmo valor porque sempre vai ter a mesma quantidade para lá e para cá. Não vai interferir no meio. [Responde fazendo gestos com as mãos separando os dados a esquerda e a direita a partir do valor mediana]. Já a média muda porque o valor muda e como a média envolve a soma de todos os valores dividido pelo número de valores somados, ela vai mudar se tiver alguma alteração de qualquer valor.

A partir da análise do raciocínio de G, constatamos que, nesta atividade, o GeoGebra auxiliou na observação instantânea e direta dos valores da média e da mediana em distribuições assimétricas a partir do rastro contínuo dos dados na escala. Essas ações se constituíram como algo novo para a estudante, pois ela confessa que não havia pensado sobre certas propriedades das três medidas em diversificadas distribuições. Esse aspecto provocou certo desequilíbrio nas estruturas de raciocínio de G em alguns momentos. Tais estruturas foram reorganizadas graças as ações observadas no software e ao diálogo com a pesquisadora, elevando o raciocínio da estudante a novos patamares de reflexionamento.

6.1.3.2 Atividade 2

Para explorar ainda mais as propriedades da média e da mediana a partir de novas distribuições, foi apresentada nesta atividade um conjunto mais amplo de dados que representavam as notas na disciplina de Matemática dos estudantes de uma turma.

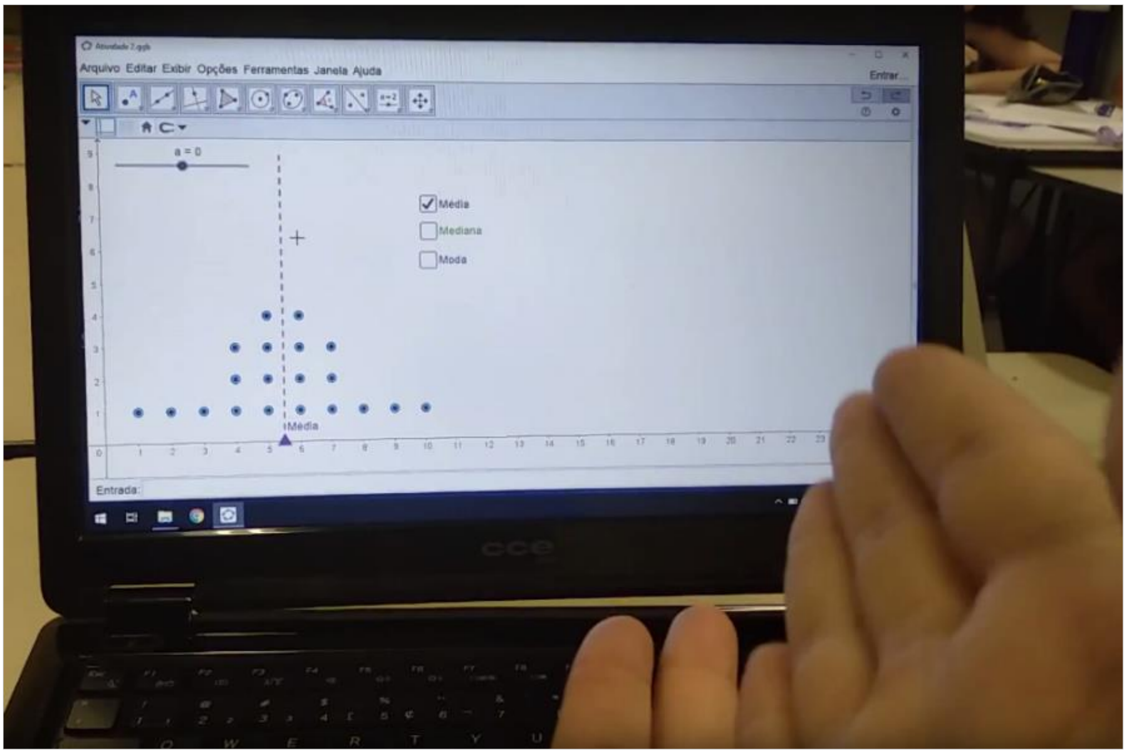
O primeiro aspecto observado foi a dificuldade de G em calcular o valor da média por meio da fórmula, tendo em vista a grande quantidade de dados presentes no gráfico: “*É que eu não sei fazer assim, sem fazer a conta*”, justifica a estudante. Sua estratégia então foi estimar a média sem recorrer ao lápis e papel para realizar cálculos. A resposta a seguir mostra o raciocínio da estudante para encontrar o valor da média aritmética.

G: Eu acho que ficaria entre o 5 e o 6, pois é onde estariam o maior número de dados. Além disso, as notas dos alunos que tiraram 1 se “cancelariam” com as notas dos alunos que tiraram 10, assim como as notas alunos que tiraram 2 se “cancelariam” com as notas dos alunos que tiraram 9 e assim por diante.

Observamos que a expressão “cancelariam” expressa pela estudante demonstra que ela novamente está levando em consideração que a média é o de ponto de equilíbrio dos dados. No entanto, observávamos a estudante ainda tinha dificuldades em expressar a média sem descrever a fórmula: soma de todos os valores dividido pelo número de valores somados.

Em contrapartida, G estimou com facilidade a moda e a mediana, justificando que esta última estaria exatamente no meio dos dados, entre o 5 e o 6, devido a simetria do gráfico, conforme ilustra a figura 67.

Figura 67 - Estudante G justificando o valor da mediana.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Para a aluna o valor que melhor representaria o desempenho da turma seria a média, visto que essa medida leva em conta todos os valores, ao contrário da mediana que indica apenas o meio. Além disso, G acrescenta que uma medida que poderia ajudar a compreender o desempenho da turma junto com a média seria a moda, pois mostraria quanto tirou a maioria.

Na sequência solicitamos novamente que a estudante observasse a média, a mediana e a moda ao afastar o ponto que está posicionado no valor 10 na escala. G não teve dificuldades em observar e justificar que a média seria alterada, mas a mediana não, tendo em vista que a média leva em conta todos os valores da distribuição e a mediana determina apenas o meio. No caso da mediana, em particular, ela arrasta alguns pontos que estão no centro da distribuição para esquerda e para direita mostrando em que casos o meio seria alterado, modificando o valor da mediana.

A mesma clareza sobre os conceitos foi demonstrada pela estudante em distribuições assimétricas do mesmo gráfico, construídas pelo rastro de pontos. A estudante não teve dificuldades em justificar os motivos pelos quais ao arrastar alguns pontos a média modifica e a mediana não.

O diálogo com G nos revela que o software teve poucos efeitos sobre a transformação de conceitos pela estudante nessa atividade. Compreendemos que a função do GeoGebra, nesta tarefa, foi muitas vezes, uma ferramenta para a realização de testagens por G, buscando reafirmar suas hipóteses e ilustrar seu pensamento.

O único aspecto o qual observamos que o software teve um papel importante sobre o raciocínio das três medidas foi em relação as propriedades da média, da mediana e da moda em diferentes distribuições a partir do rastro de alguns pontos do gráfico. A estudante revelou que nunca havia refletido sobre estas questões, ou seja, a mediana ser uma medida mais robusta que a média, etc.

Desse modo, podemos concluir que, embora o GeoGebra não tenha contribuído para a construção dos conceitos das medidas de tendência central, nesta atividade o software ajudou a estudante a ampliar esses conceitos a partir da reflexão sobre essas medidas em diferentes distribuições. Tais distribuições foram possíveis a partir da modificação dinâmica, contínua e direta dos dados no gráfico e da observação valores das três medidas da escala. Ou seja, o rastro de pontos fez com que a estudante realizasse novas reflexões a respeito das propriedades da média e da mediana ampliando ainda mais seus conhecimentos.

6.1.3.3 Atividade 3

O objetivo desta atividade era compreender a média como um ponto de equilíbrio dos dados por meio da observação de gráficos de barras com diferentes distribuições. Em particular, inicialmente a estudante deveria estimar o intervalo onde a média se encontrava no gráfico e, após, observar que o gráfico se equilibrava exatamente sobre o valor da média.

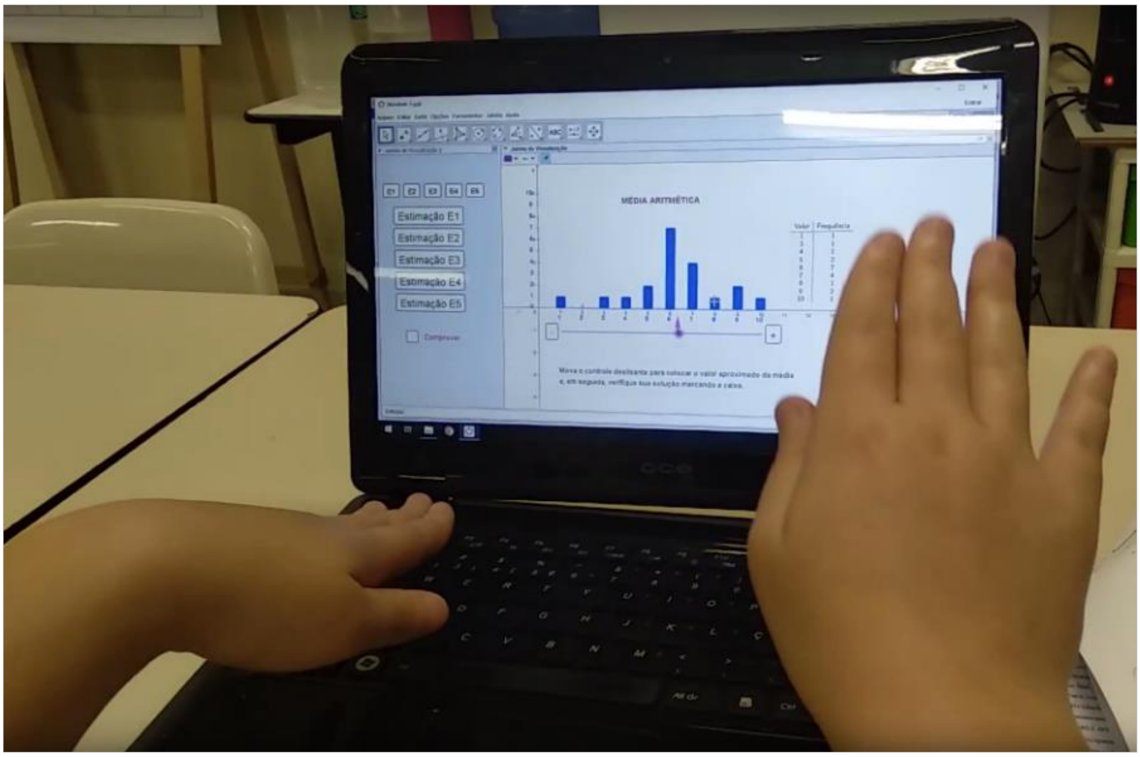
Durante a entrevista, observamos que a estudante não teve dificuldades em estimar a média tanto no gráfico com distribuição simétrica quanto nos gráficos de distribuições assimétricas. De modo geral, suas estimações estavam dentro do intervalo esperado. Além disso, a estudante percebeu rapidamente que os gráficos se equilibravam quando a seta presente na tela estava sobre o valor da média.

Ao buscar compreender qual foi o raciocínio da estudante para a estimações, percebemos que ela estava utilizando a ideia de equilíbrio dos dados sem verbalizar que a média seria o ponto de equilíbrio. O diálogo a seguir comprova o raciocínio da estudante sobre o valor da média no gráfico:

P: Por que tu marcaste aí?
G: Porque esses aqui [barra posicionada no valor 1 da escala] vão se anular com esses aqui [barra posicionada no valor 10 na escala]. Não é bem se alunar, mas estão meio aqui equilibrados. Por exemplo: tem poucos alunos que tiraram notas ruins, mas também tem poucos alunos que tiraram notas boas, então tem que se equilibrar para formar a média. [Explica a estudante fazendo gestos com as mãos conforme a figura 68]. Neste caso aqui eu acho que a média é mais para cá porque tem muitos alunos que tiraram 6. Então eu acho que é próximo do 6 e um pouquinho do 7 também.

Na medida que G ia respondendo ela realizava o movimento com as mãos para reforçar a ideia de equilíbrio, conforme a figura 68.

Figura 68 - Estimação da média no gráfico E4 pela estudante G.



Fonte: Acervo da pesquisa.

A resposta da estudante em conjunto com o movimento das mãos representado na figura 68 mostram que G utiliza a ideia de equilíbrio para encontrar a média de maneira intuitiva. Durante a entrevista ela reforça seu raciocínio sobre a média através do seguinte exemplo: *se um estudante tivesse tirado 1 e outro 10 em uma prova, este último teria notas suficientes para* *doar para o aluno que tirou 1, de modo que a média seria a nota de equilíbrio entre os dois estudantes*.

No final da atividade ela relata que esta atividade a ajudou a perceber que a sua maneira de estimar a média funcionava. Ou seja, o GeoGebra, neste caso, auxiliou a estudante a externar seu raciocínio sobre a média mostrando que é o ponto de equilíbrio entre os valores, conforme propõe a atividade.

6.1.3.4 Atividade 4

Nesta atividade a estudante deveria interpretar um gráfico que expressa o desempenho dos candidatos ao vestibular da UFRGS na prova de Matemática.

Em relação ao gráfico verificamos que a estudante teve dificuldades em interpretá-lo, visto que confundia os eixos pensando que o eixo horizontal expressava o número de alunos e o eixo vertical as notas. Além disso, percebemos que, apesar de compreender os conceitos de medida de tendência central, G teve certa dificuldade em interpretá-los, visto que o número de dados era muito amplo e o raciocínio da estudante era realizar os cálculos da média e da mediana a partir das fórmulas. Desse modo, a estudante teve que reorganizar suas ações e estimar de modo aproximado a posição da média e da mediana.

O valor estimando por G sobre a média estava próximo do valor real conferido pelo software, ou seja, 10. A estudante justifica o seu raciocínio argumentando que a média seria uma medida que determinava o ponto de equilíbrio no qual o tamanho das colunas à direita da média "compensaria" o tamanho das colunas à esquerda da média.

No caso da mediana, porém, a estudante teve dificuldade em estimar, pois, sua lógica de raciocínio era somar as frequências de cada coluna e encontrar o meio dos dados. Ao conferir a mediana na escala (9), a aluna justifica o valor argumentando que tal número representava o meio dos dados onde a quantidade de pessoas à esquerda da mediana seria igual à quantidade de pessoas à direita da mediana. A estudante interpreta as medidas de tendência central no contexto do gráfico do seguinte modo:

G: Na mediana estamos vendo o número de pessoas que acertaram mais que 9 questões ou menos que 9 questões. Na média, nós estamos vendo o número de acertos, considerando todas os candidatos e não a quantidade de pessoas que acertaram determinado número de questões. [...] A moda representa o número de questões que as pessoas mais acertaram.

Constatamos que o gráfico que representa o número de acertos na prova de Matemática no vestibular da UFRGS desequilibrou as estruturas de raciocínio da estudante, visto que, para um conjunto mais amplo de dados, ela demostrou dificuldades em interpretar a média e a mediana. No caso do gráfico em questão, seria necessário calcular a média aritmética ponderada a partir dos dados representados pelo gráfico de barras. Compreendemos que essa representação se constituiu um fator complicador para G, pois observamos que a estudante não sabia o que fazer para calcular a média. Os mesmos resultados foram relatados nos estudos de Boaventura de Fernandes (2004), onde os estudantes tiveram dificuldades em interpretar a média quando a informação era representada na forma de um gráfico.

É claro que não era esperado que a estudante realizasse o cálculo da média para um número tão extenso de dados, mas objetivávamos investigar se G identificaria que a média seria, nesse caso, um valor mais afastado da concentração dos valores no gráfico, tendo em vista o formato assimétrico da curva. No entanto, observamos que a estudante teve dificuldades em associar a ordem as medidas em curvas assimétricas, mesmo testando diferentes assimetrias e acompanhando o movimento das setas que representavam a média e mediana posicionadas na escala do gráfico. Compreendemos, assim, que a extensão do número de dados se constituiu um fator complicador no processo de abstração do raciocínio da estudante, visto que eram muitas colunas para arrastar alterando a simetria do gráfico.

Portanto, concluímos que as ações da estudante sobre o GeoGebra ao longo das atividades não foram tão efetivas no processo de abstração do raciocínio da estudante, como no caso dos sujeitos relatados anteriormente. Um dos fatores para isso, deve-se ao fato da estudante já ter conhecimentos prévios a respeito das medidas de tendência central. Desse modo, suas ações no software possibilitaram poucas experiências que a elevaram a novos patamares de reflexionamento.

Outro fator complicador, foi o fato de a estudante recorrer em diversos momentos à fórmula para realizar procedimento do cálculo da média e da mediana, impedindo que a estudante buscasse novas estratégias de ações para compreender o aspecto conceitual sobre essas medidas.

6.1.4 Entrevista com a estudante H

Nesta seção descreveremos os diálogos realizados durante as entrevistas com a participante H. Esta estudante cursava o primeiro ano do Ensino Médio e já havia estudado as

Medidas de Tendência Central com o professor em sala de aula. No entanto, durante os diálogos, observamos que a aluna teve dificuldade em recordar o conceito de média, mediana e moda, tanto no aspecto conceitual, quanto no aspecto procedimental, misturando algumas ideias centrais sobre essas medidas em diversos momentos. Isso nos fez compreender que H estava inicialmente no nível idiossincrático de raciocínio, conforme classificado por Garfield (2002), pois, apesar de reconhecer as palavras média, mediana e moda, ela não as entendia totalmente, misturando informações. Porém, as ações no software em conjunto com os diálogos com a pesquisadora contribuíram para que a estudante avançasse para novos patamares de raciocínio por meio de uma série de movimentos de reflexões e reflexionamentos ao longo do rastro de pontos na tela. No entanto, as ações no GeoGebra não contribuíram para o avanço das ideias estatísticas em todos os momentos, especialmente nas atividades 3 e 4. Ou seja, a transição entre os diferentes níveis de reflexionamento estão mais evidentes apenas nas atividades 1 e 2, onde observamos claros avanços para novos patamares. Sendo assim, descreveremos com maiores detalhes apenas as duas primeiras atividades, conforme segue:

6.1.4.1 Atividade 1

Nesta seção será descrito o processo de evolução do raciocínio da estudante sobre o conceito de média e de mediana. Medidas as quais a estudante demonstrou maior dificuldade em definir e que as ações no GeoGebra foram imprescindíveis para a evolução de novos patamares de reflexionamento.

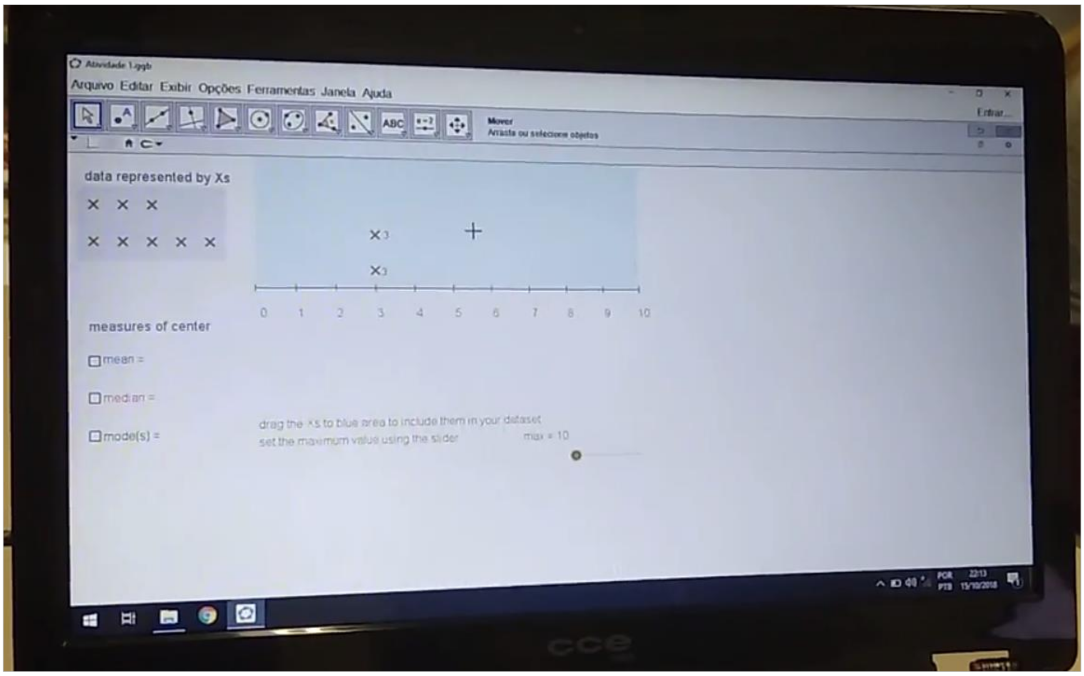
No caso da média aritmética a estudante apresentou dificuldade em descrevê-la, visto que parecia não lembrar do conceito nem do procedimento para seu cálculo. Desse modo, suas ações no GeoGebra a fizeram realizar abstrações reflexionantes as quais a conduziram a construir diferentes estratégias de ação para calcular o valor correto da média, descrevendo-a. Neste texto, apresentaremos a descrição do processo de idas e vindas realizado pela aluna H a respeito da investigação do conceito da média aritmética marcado pelos diálogos e ações no software, conforme segue:

Inicialmente solicitou-se que a estudante H estimasse a média entre 3 e 7, as quais representavam as notas em Matemática de um aluno. Este se constituiu o primeiro desafio, pois a participante não lembrava da fórmula para o cálculo da média. Sua primeira estratégia de ação, neste caso, foi somar ambos os valores e dividir por 10, o que configuraria média igual a 1. Em contrapartida, a estudante revela que, sem a realização de cálculos, estimaria a média igual a 5 para representar o desempenho do aluno. Sua justificativa para a estimação consistia em compreender que a média estaria sempre posicionada no meio entre os dados. Essa concepção converge com os resultados da pesquisa de Mokros e Russell (1995) no qual elencam abordagens gerais que crianças utilizavam para compreensão de média, entre elas, uma medida compreendida como o ponto do meio. Cazorla (2003) também apresenta resultados semelhantes onde 8,7% dos estudantes definem a média como ponto médio, valor central, mediana e outros.

Ao perceber a contradição entre os cálculos e estimação da aluna, a pesquisadora sugeriu a conferência do valor correto no software, o qual apresentou o valor da média igual a 5. Esse valor reforçou a hipótese da aluna de que a média seria uma medida que estaria no meio dos dados.

Para refutar esse raciocínio, a pesquisadora sugeriu a estimação da média no caso em que as duas notas fossem iguais a 3. Para isso, a estudante arrastou os pontos na escala para cima do valor 3 sem que o valor da média no canto esquerdo da tela estivesse marcado, conforme figura 69.

Figura 69 - Estimação da média aritmética pela estudante H.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Segundo a estudante, a média aritmética, nesse caso, seria igual a 6, conforme a justificativa descrita no diálogo a seguir:

P: Como tu pensastes para estimar a média?

H: Eu pensei em somar 3 + 3, daí dá 6. Por isso que eu pensei no 6. É a minha conta, mas, como antes, a conta não deu. [Responde observando os dados na escala e sugerindo que sua nova maneira calcular pudesse estar errada novamente.]
P: E a tua intuição?
H: Minha intuição diz que é 6 também. Não, vou chutar 3. [Responde mudando de ideia.]

Neste diálogo, observamos que a estudante se sentiu insegura quanto a forma de calcular a média. Ou seja, ela demonstrou compreender que todos os valores deveriam ser somados, mas não lembrava se deveria dividir por algum valor específico. Na incerteza, resolveu modificar sua estratégia de cálculo, desta vez, optando por não realizar a divisão.

Ao conferir o valor correto calculado pelo software, a estudante concluiu que a sua intuição estava melhor do que as suas contas, visto que havia uma contradição entre o valor estimado por ela para a média e os seus cálculos. Além disso, a conferência da média no GeoGebra faz com que a estudante desequilibrasse suas estruturas de raciocínio, necessitando, portanto, encontrar novas estratégias, desta vez no patamar da reorganização das ações, assimilando os valores da média na medida em que observava o rastro dos pontos na tela.

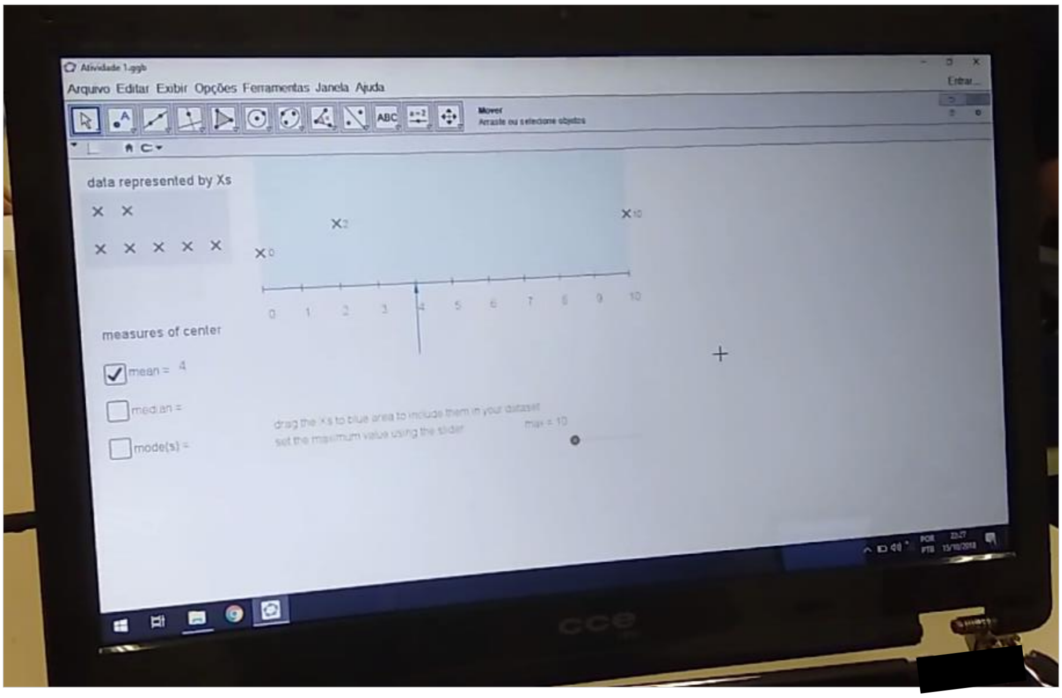
Diante da incerteza da estudante, foi solicitado que ela estimasse novamente a média, mas, desta vez, inserindo uma terceira nota cujo valor era igual a 10. Ou seja, os dados presentes na escala eram (3,3,10). Ao observar os dados, H começou a elaborar novas estratégias de cálculos, pensando alto, reorganizando as suas ações, sugerindo diversos valores para a média e mudando de ideia várias vezes, sem a intervenção da pesquisadora. Após alguns instantes, a aluna concluiu seu raciocínio sugerindo uma nova estratégia, conforme o diálogo a seguir:

H: A média é 8.
P: Por que pensaste no 8? Qual foi a tua estratégia de raciocínio?
H: Porque vai dar 16 ao todo, somando os três (3+3+10), e a metade é 8.
P: E essa média que tu calculaste combina com a tua intuição?
H: Combina, agora combina.
P: Nesse caso, se for 8 a média, está no meio?
H: Não.
P: Isso te deixa desconfortável em relação a tua hipótese anterior de que a média estaria no meio dos dados?
H: Não, porque eu fiz uma conta que, para mim, dá certo.

A nova estratégia da estudante seria somar todos os valores e dividi-los por dois. No entanto, seu raciocínio foi novamente refutado ao conferir no GeoGebra que a média correta não seria 8, mas aproximadamente 5,3. Além disso, a aluna verificou que a média não estaria exatamente no meio como havia pensado. Diante desse conflito, a estudante buscou novamente reorganizar suas ações, arrastando pontos e observando o valor da média marcado na escala.

Para organizar o raciocínio e elevar a novos patamares de reflexionamento, a pesquisadora propôs que a estudante observasse o valor da média, representado pela seta azul na escala, para dois pontos quaisquer. Ela iniciou inserindo os pontos no 0 e no 10, e concluiu que a média seria 5 e estava posicionada no meio dos dados. Na sequência, ela arrasta os pontos 0 e 10 para a direita para a esquerda, reafirmando a hipótese de que a média seria uma medida que estaria sempre no meio dos dados. No entanto, ao inserir um terceiro ponto na escala, a estudante observou que essa afirmativa não se mantinha. A figura 70, ilustra a distribuição em que a estudante percebe que a média nem sempre é uma medida que está no meio.

Figura 70 - Estudante H observando o valor da média para três pontos na escala.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na distribuição presente na tela da figura 70, a média é igual a 4 e não está no meio. Ao observar a média, H sugeriu algumas estratégias de raciocínio, conforme o diálogo a seguir:

H: Eu pensei uma coisa muito louca. Sei lá, eu pensei assim: soma tudo, dá 12. Se 4x3 dá 12, então a média vai ser 4.
P: Ok, e o que representa o 12 ali?
H: É a soma de tudo.
P: E o 3?
H: Não tem. É a ideia para achar o 4 que veio na minha mente. Um número que me veio para encaixar.
P: Não tem nada que possa representar o 3 ali?
H: Marcado não.
P: Quantos pontos temos na escala?
H: Tem 3. Meu deus! Como eu não pensei isso?

P: O que tu pensaste? Me explica.
H: Agora pensando bem são três pontos, então tu divides por três pontos. Tu somas e divides por três pontos.
P: É assim que se calcula.
H: Média para mim é isso, mas eu não sei.
P: Vamos verificar se dá certo para os casos anteriores?

A partir desse instante, a aluna resolveu testar a sua hipótese para os valores já posicionados na escala anteriormente como (3,7), (3,3), (3,3,10), concluindo que seu raciocínio estava correto. Além disso, ela também testou novas distribuições como (2,6,10), observando que a média nem sempre estaria posicionada exatamente no meio dos dados. Isso fez a aluna mudar de ideia em relação à média. Desta vez, H parecia convencer-se que a média é uma medida que nem sempre está exatamente no meio dos dados, conforme a frase a seguir:

H: Acho que vou começar a mudar meu conceito porque a média não está sempre no meio.

Para investigar se o seu raciocínio se mantinha, H ampliou o número de dados na escala. Para todos os casos ela somava todos os valores e dividia pelo número de valores somados, reafirmando seu raciocínio de que a média nem sempre estaria exatamente no meio como havia pensado inicialmente.

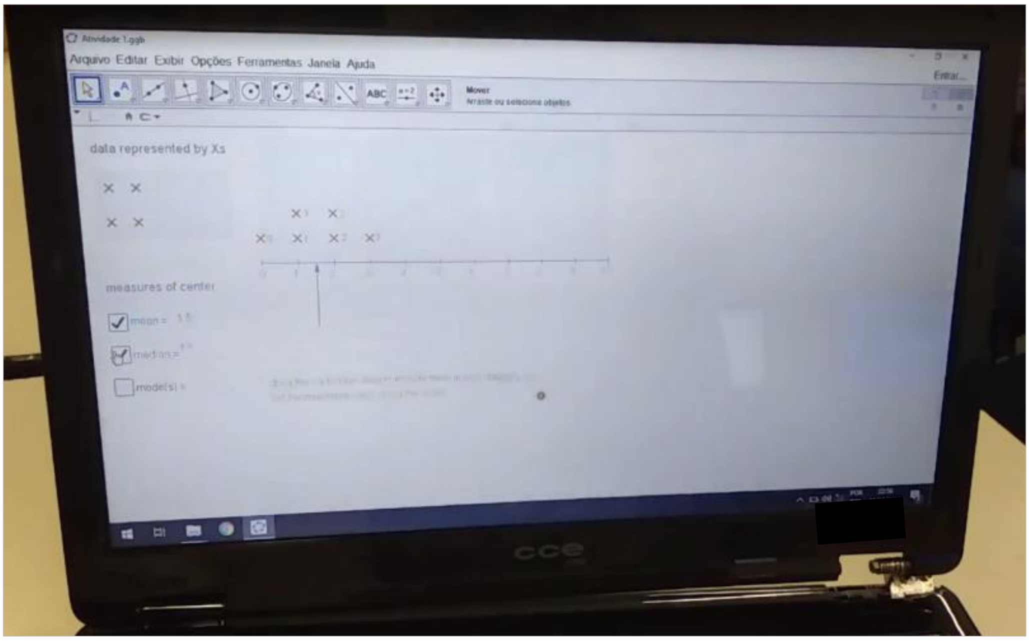
Por fim, propomos que a estudante posicionasse na escala três possíveis notas cuja média seria igual a 5. Ela imediatamente apresentou valores cuja soma seria 15, sabendo que na divisão por três o resultado certamente seria igual a 5.

Tendo em vista a evolução das ideias ao longo da entrevista, compreendemos que as ações de arrastar no software guiadas pelo diálogo com a pesquisadora contribuíram para que a aluna modificasse o seu raciocínio sobre a média, elevando-a a novos patamares de reflexionamento, uma vez que antes parecia estar no nível idiossincrático de raciocínio conforme a pesquisa de Garfield (2002), pois ela não conseguia lembrar a fórmula para calcular a média. Porém, ao final da atividade, H demonstrou relembrar como o cálculo era realizado e que a média nem sempre é uma medida que está exatamente no meio dos dados.

Tendo em vista a evolução de raciocínio da estudante sobre o conceito de média, iniciou-se o processo de investigação a respeito da mediana, conceito no qual, assim como no caso da média aritmética, H também demonstrava não recordar. Iniciou-se, então, novamente uma longa sequência de ações no software e diálogos com a pesquisadora, conforme segue:

Ao observar os valores (0,1,1,2,2,3) no gráfico, a estratégia inicial de H foi somar todos os valores e dividir por 10, que representava o valor máximo na escala. Assim, se houvesse uma escala com valor máximo igual a 60, os valores somados deveriam ser divididos por 60. No entanto, rapidamente a aluna percebeu que sua estratégia de raciocínio estava equivocada ao conferir o valor da mediana no software, conforme figura 71.

Figura 71 – Estudante H conferindo o valor da mediana no GeoGebra.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Diante desse conflito, iniciou-se novamente uma sequência de ações no GeoGebra, primeiro com apenas dois pontos e posteriormente expandindo para um conjunto mais amplo de dados, para que a estudante pudesse observar o comportamento da mediana em diferentes distribuições, do mesmo modo como ocorreu o processo de investigação sobre o conceito de média.

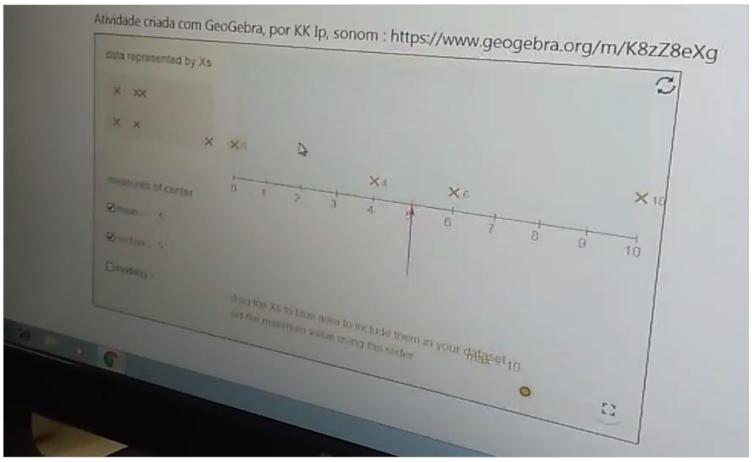
Ao observar o rastro de apenas dois pontos na escala a estudante percebeu que a mediana acompanhava a média, pois tinham o mesmo valor. Já para três pontos, H percebeu que isso nem sempre se verificava, pois ao observar os valores (1,2,7) na escala, o valor da média estava diferente da mediana. Assim, a primeira conclusão da estudante foi que, para calcular a média, todos os valores devem ser somados e o resultado dividido pelo número de valores somados, já para calcular a mediana a soma dos valores deveria ser dividida pelo valor máximo da escala. No exemplo em questão, a mediana seria (1+2+7/10) = 1, divergindo do valor mostrado no software, ou seja, 2. Iniciou-se então novamente uma sequência de ações por meio do rastro de pontos, observando o movimento das setas que representam a média e a mediana posicionadas na escala.

Durante o rastro a estudante observou que a média modificava com facilidade, diferente da mediana. No entanto, ela não sabia explicar para quais casos a mediana se alterava. Em dado momento, os valores da escala estavam posicionados em cima do 2, do 4,2 e do 7. A pesquisadora sugeriu que a estudante arrastasse o ponto sobre o 7 para próximo do ponto sobre o 4,2. Neste caso, H observou que a mediana não mudava. Sugeriu-se também que o rastro do ponto sobre o 7 ultrapassasse o ponto sobre o 4,2 para a esquerda. H arrasta os pontos realizando o movimento repetidas vezes, fazendo o processo semelhante para o valor posicionado no ponto sobre o 2 para a direita do ponto sobre o 4,2. Nesta sequência de ações a aluna concluiu que "*a mediana muda quando passa de um ponto*", no caso o ponto posicionado no 4,2 na escala, mas não conseguia explicar o motivo.

Buscando compreender o comportamento da mediana, a estudante retirou e inseriu pontos na escala arrastando-os sucessivamente. Em dado momento ela concluiu: "*Com três pontos a mediana se mantém o ponto do meio. Com dois pontos ela mantém o ponto da média*". A conclusão de estudante denota o avanço para um novo patamar de reflexionamento, agora no nível das comparações, observando o que ocorre com a mediana para dois e três pontos. Este avanço foi possível devido a observação da média e da mediana por meio do rastro contínuo dos pontos.

Na sequência, a pesquisadora propõe que seja inserido um quarto ponto na escala, na ocasião os pontos presentes na tela estavam sobre os valores 0,4,6 e 10, conforme a figura 72 a seguir:

Figura 72 - Estudante H observando a mediana com quatro valores posicionados na escala.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao arrastar os pontos na tela a estudante concluiu: "*Com quatro pontos a mediana muda também. Mas agora, se eu arrastar a mediana não fica igual a média*". Suas experiências de arrastar os pontos 0 para a direita e 10 a esquerda mostraram que se o ponto sobre o 0 ultrapassasse o ponto sobre o 4, e se o ponto sobre o ponto 10 ultrapassasse o ponto sobre o 6, a mediana seria alterada. Conforme o diálogo a seguir:

P: Quais pontos, ao movermos, alteram o valor da mediana?
H: O 6 e o 4.
P: Independente do sentido?
H: Sim. Já o 0 e o 10 tem que passar deles, ou seja, o 0 tem que passar do 4 para alterar a mediana e o 10 tem que passar do 6 para alterar a mediana.

Na sequência, a estudante inseriu um quinto ponto observando o valor da mediana por meio do rastro de todos os pontos na escala para esquerda e para direita. Após sucessivos movimentos a estudante conclui: "*Se passar pelo ponto que está no meio, tanto para a esquerda quanto para direita vai afetar o valor da mediana. A mediana parece que é um valor que está mais ao meio. Se passar ou mudar o meio vai variar o valor*".

A conclusão da estudante marca a elevação de patamar de raciocínio, visto que ela compreende agora que a mediana é uma medida que está no meio dos dados. Para verificar se a estudante realmente tomou consciência de suas ações, foram retomadas as ações para dois, três, quatro e cinco pontos na escala conforme o diálogo a seguir:

P: Se eu tiver dois pontos qual vai ser a mediana?
Ela arrasta todos os pontos, refaz a experiência e conclui:
H: Vai ficar no meio entre os dois.
P: Se eu tiver três?
Ela insere um ponto na escala, arrasta e responde:
H: Vai ficar no resultado que está mais ao meio.
P: Se eu tiver quatro?
Ela insere um ponto na escala, arrasta e responde:
H: É vai ficar no meio, entre os dois pontos que estão mais ao meio.
Ela arrasta mais pontos e conclui.
H: São os dois pontos que estão mais ao meio que interferem no resultado.

A estudante H reafirma o raciocínio para cinco pontos na escala (0,2,4, 6,10), arrastando cada um deles e observando quais deles alteram o valor da mediana. Sua conclusão é que quando ela arrasta os pontos ultrapassando o ponto sobre o valor quatro na escala a mediana muda.

No final da atividade a estudante H conclui que mediana "*é o ponto que está mais ao meio, pois é ele o que interfere mais*". Observamos que apesar de concluir corretamente ela não conseguiu sintetizar que para um número par de dados a mediana será a média entre os dois valores do meio e para um número ímpar de dados a mediana seria o ponto do meio. No entanto, concluímos que houve avanço na construção do conceito de mediana, visto que incialmente a estudante não conseguia defini-la e inventava estratégias para o seu cálculo. Já, ao final da atividade, ela conseguiu definir a mediana como uma medida que está no meio dos dados.

6.1.4.2 Atividade 2

Nesta atividade, observamos o processo de abstração reflexionante da estudante sobre as medidas de tendência central a partir de um conjunto mais amplo de dados, por meio do gráfico de pontos, investigando se as reflexões realizadas na atividade anterior seriam mantidas.

O primeiro gráfico da atividade representava as notas de um grupo de estudantes na disciplina de Matemática. Ao observar o gráfico simétrico de pontos a estudante estimou que a média estaria posicionada no meio dos dados, justificando que seria a região do gráfico onde tem mais notas. Além disso, para a estudante a mediana também estaria no meio, justificando que é uma medida que está sempre no meio dos dados.

Quando solicitada para destacar uma diferença entre a média e a mediana a estudante respondeu que na atividade anterior observou que a mediana muda com mais facilidade que a média e que a existência de ambas as medidas serviria para analisar o rendimento da turma no contexto do gráfico em questão. No entanto, ela não soube explicar quais análises poderiam ser feitas com essas medidas.

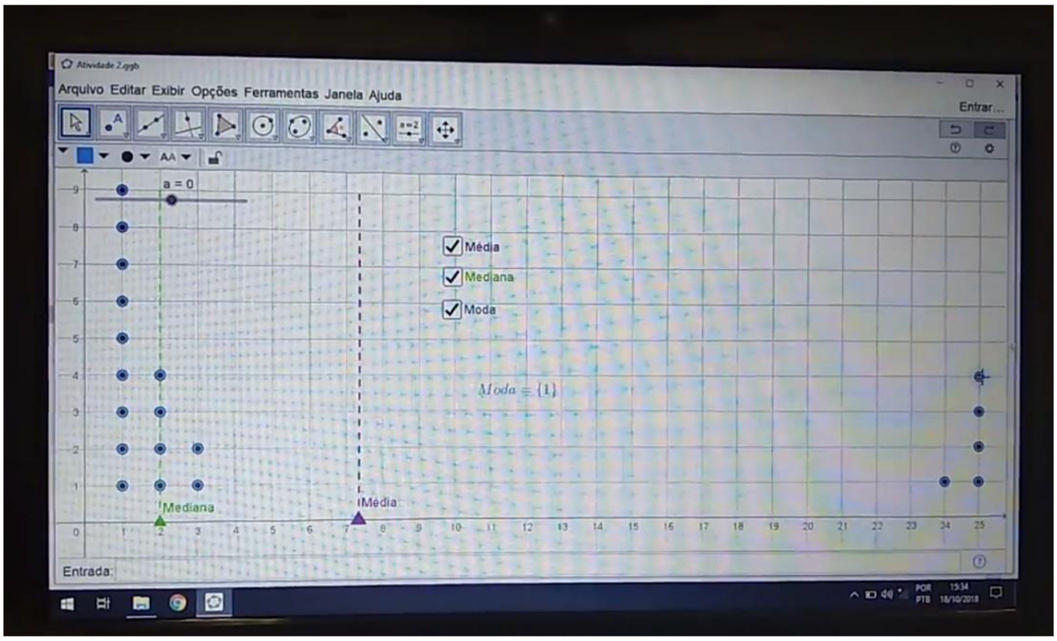
Diante das considerações da estudante, a pesquisadora solicitou que H arrastasse os pontos do gráfico de modo que a média e a mediana tivessem valores diferentes. Conforme o rastro dos pontos, os valores da média e da mediana eram alterados no gráfico simultaneamente. Nesse contexto, foram apresentados diferentes gráficos com distribuições assimétricas, de modo que H pudesse observar a média e a mediana nessas distribuições.

A estudante H foi surpreendida pelo gráfico assimétrico[29] da figura 73, onde a média era igual a 7,2 e não estava localizada na região de maior concentração dos dados no gráfico. H confessa que nunca havia pensado nessa possibilidade anteriormente. Além disso, ela destaca

[29] Destacamos que o gráfico assimétrico da figura 73 foge do contexto apresentado inicialmente, onde o intervalo de notas era de no mínimo 0 e no máximo 10. O gráfico da figura 73 foi construído de maneira natural pela estudante ao longo do rastro de pontos. Na ocasião, H estava experimentando possibilidades em que a média e a mediana pudessem ser diferentes. De qualquer modo, foi lembrado a participante que no caso do gráfico em questão a nota máxima considerada é 25 e não mais 10, como anteriormente. Destacamos ainda que ao longo do rastro de pontos, a estudante teve a oportunidade de observar a média e a mediana em distribuições assimétricas do gráfico com intervalo era de 0 a 10.

que, se soubesse apenas que sua turma teve média 7,2, em Matemática, por exemplo, sem saber as notas de cada um, imaginaria que as notas da maioria das pessoas estariam no entorno de 7,2 e não mais afastada como na distribuição assimétrica observada na tela.

Figura 73 - Estudante H observando o valor da média no gráfico de pontos assimétrico.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Para a estudante o valor da mediana está de acordo com o esperado, caso soubesse apenas do valor sem saber as notas de cada um. Segundo ela: "*Eu iria pensar que a grande maioria tirou um, que a turma foi mal.*"

No entanto, o valor da moda ser igual a 1 constituiu-se uma novidade, visto que, para ela, moda seria a média entre os valores que mais parecem. Neste instante, interpretamos que H parece confundir o cálculo da mediana com a moda. Ao conferir o valor no GeoGebra, ela afirma que estava equivocada e recorda que a moda seria a medida que representa o valor que mais aparece.

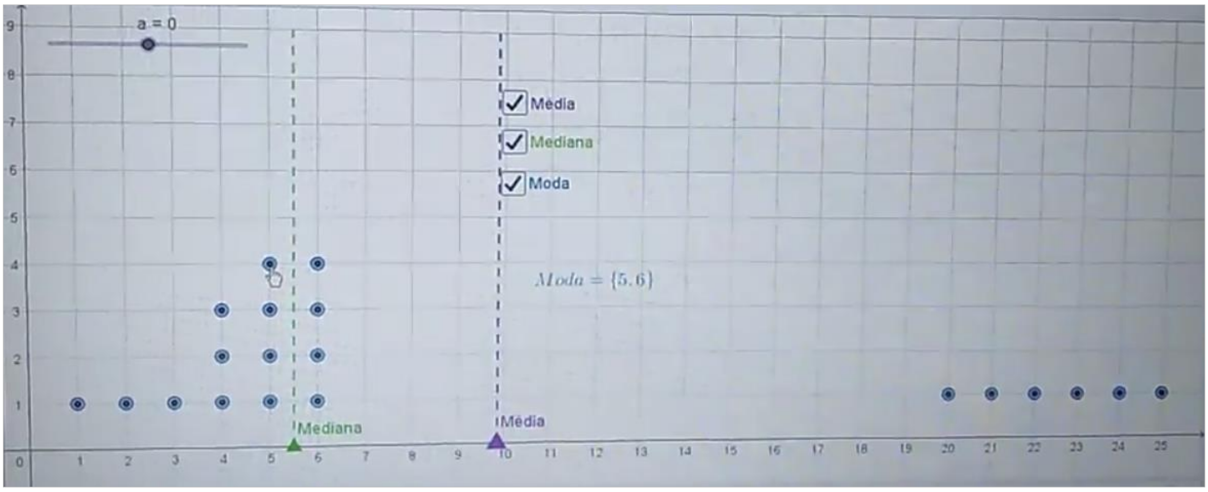
Diante das análises, foi sugerido que H retornasse à distribuição inicial para verificar a interpretação em conjunto das três medidas em uma distribuição simétrica buscando observar, por meio do rastro de cada ponto, a alteração dos valores da média, da mediana e da moda em cada caso.

Ao arrastar apenas um ponto no gráfico simétrico, a estudante observa que a moda e a mediana não modificam. Segundo ela:

H: A moda e a mediana não mudam porque a moda representa o valor que mais aparece.
P: E a mediana:
H: A mediana não muda porque é uma medida que está mais ao meio.
P: E a média?
H: A média muda porque muda muito fácil. [Responde sem saber explicar o motivo.]

Neste instante foi proposto que a estudante fosse arrastando alguns pontos presentes no meio da distribuição e observando a alteração das medidas. Nesse contexto, foi realizado uma sequência de rastros acompanhada de uma análise cuidadosa de H, investigando quais pontos deveriam ser arrastados para que a mediana fosse alterada. A estudante observa que se fosse arrastado o ponto sobre o valor 5 na escala, para a direita a mediana muda de valor, visto que haveria uma modificação do meio da distribuição. No entanto, se o rastro do mesmo ponto fosse realizado na direção da esquerda, apenas a moda seria alterada.

Figura 74 - Estudante H observando a mediana por meio do rastro de pontos.



Fonte: Acervo da pesquisa

A mesma sequência de rastros e investigações foi realizada para um número ímpar de dados presentes na tela. Porém, mesmo com a sequência de ações realizadas no gráfico, a estudante não tomou consciência de como descrever o processo para encontrar a mediana para um número par ou um número ímpar de dados.

No entanto, percebemos que houve uma evolução de raciocínio em relação às três medidas, especificamente no que se refere a observação de quais as medidas seriam alteradas na presença de valores discrepantes. Ou seja, H finaliza a atividade descrevendo a moda como "*o que mais aparece*"; já a mediana como uma medida que "*fica no meio*", que "*divide os pontos*" e "*não se altera com facilidade*"; a média, por sua vez, como uma medida que "*varia conforme os pontos são arrastados*". Além disso, observamos uma melhor compreensão a respeito das medidas em distribuições assimétricas. Segundo ela, teremos média e mediana diferentes "*quando os dados estiverem mais para direita ou para a esquerda*" e poucos dados no sentido contrário.

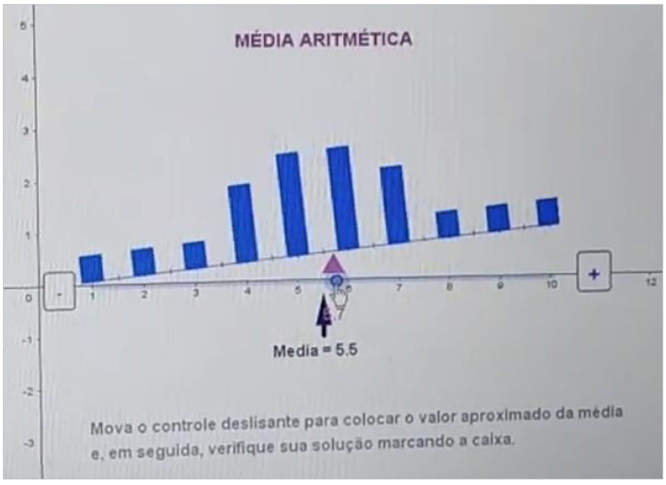
Ou seja, ainda que a aluna não tenha conseguido descrever com clareza todas as propriedades das medidas de tendência central, a observação da média, da mediana e da moda por meio da *manipulação direta, do movimento contínuo* e do *ambiente imersivo*, conforme descreve Finzer e Jackiw (1998), fez com que a estudante atingisse novos patamares de reflexionamento e realizasse abstrações do tipo reflexionantes a respeito de algumas propriedades sobre as três medidas, conforme observado.

6.1.4.3 Atividade 3

Nesta atividade observamos que a estudante teve dificuldade em expressar o seu raciocínio. Desse modo, nesta seção citaremos apenas os principais resultados observados durante a entrevista os quais estão relacionados às estratégias de estimação da estudante em relação à média diante dos gráficos de colunas presentes na tela.

No primeiro gráfico, a distribuição era simétrica. Nele a estudante estimou que o valor da média estaria no meio do gráfico, ou seja, "*entre os valores que mais tem*", justificou ela apontando para as colunas de maior frequência. Além disso, H observou que o gráfico ficava em equilíbrio quando a seta estava posicionada no meio da escala a qual ela acreditava ser o valor da mediana, sem tomar consciência que essa seta indicava o valor da média, ponto no qual o gráfico ficava em equilíbrio.

Figura 75 – Estudante H observando o gráfico de colunas em desequilíbrio.



Fonte - Acervo da pesquisa.

Nos outros gráficos de colunas, onde as distribuições eram assimétricas, a estudante teve dificuldade em estimar o valor da média, pois nestes casos o cálculo realizado deveria ser o da média aritmética ponderada, onde devia-se levar em consideração a frequência dos dados. Os estudos de Boaventura e Fernandes (2004) também mostram a dificuldade dos estudantes em calcular a média ponderada, e de interpretá-la quando a informação apresentada era na forma de gráfico.

Diante da dificuldade em calcular a média, sua estratégia de ação foi estimar o valor entre as colunas de maior frequência. Ao arrastar a seta rosa sobre a escala nos gráficos, a estudante observou que os gráficos ficavam em equilíbrio quando a seta rosa estava sobre o valor da média aritmética e não ao meio como havia pensado inicialmente. Porém, compreendemos que essa atividade não foi suficiente para que a estudante tomasse consciência que a média seria o ponto de equilíbrio dos dados, fazendo-a perceber a igualdade da soma dos valores à esquerda e a direita da média.

6.1.4.4 Atividade 4

Nesta atividade a estudante H deveria interpretar o gráfico de colunas que representa o desempenho dos candidatos a prova de Matemática do vestibular da UFRGS de 2018.[30]

Durante a entrevista, observamos que a estudante teve dificuldade em interpretar o gráfico, pois compreendia que o mesmo representava o número de acertos por questão da prova. No entanto, isso foi ligeiramente corrigido pela pesquisadora.

Ao interpretar as medidas estatísticas no contexto do gráfico em questão, a primeira observação realizada pela estudante foi de que a moda seria igual a 7, visto que sobre esse valor estava a coluna de maior frequência e, portanto, para ela "*a maioria das pessoas acertou 7 questões*". Na sequência ela estimou a média entre 7 e 8, pois segundo ela "*é onde mais tem acertos*", conforme ela havia observado na atividade anterior. Porém, H entra em conflito ao conferir no software e perceber que o valor da média estava diferente, ou seja, igual a 10. Isso a faz refletir sobre os motivos pelos quais o valor estimado não coincidiu com o valor calculado pelo software. Após alguns instantes, ela justifica que a média foi igual a 10 porque é um valor que está próximo ao meio entre o menor número de acertos (0) e o maior número de acertos (25). Em seguida, ela começou a suspeitar que os candidatos que acertaram notas mais altas

[30] A imagem do gráfico encontra-se na atividade 4 (figura 85) do apêndice E deste trabalho.

poderiam ter influenciado no valor da média e por esse motivo ela estaria mais próxima do meio e não entre os valores que mais aparecem.

Em relação a mediana H estimou que seu valor seria menor que a média. No entanto, confunde novamente moda com mediana, observando que este último seria o valor que representa o maior número de acertos. Hipótese que rapidamente foi refutada pela estudante ao observar o valor no software posicionado na escala. Ao arrastar os pontos presentes na parte superior das colunas, modificando a distribuição do gráfico e observando o deslocamento das medidas, a estudante retomou seu raciocínio sobre mediana. Ela recordou que a mediana estava sempre no meio entre os dados e é uma medida mais robusta que a média. Assim, ao retornar à distribuição correta ela começa a contar o número de colunas no gráfico, mas decepciona-se ao observar que o valor não coincidia com o valor correto. Ao longo do diálogo com a pesquisadora ela percebe que estava enganada, pois deveria levar em consideração as frequências de cada coluna, o que torna a tarefa mais complicada, visto que são muitos candidatos. Portanto, decide confiar no valor calculado pelo software.

Apesar de suas conclusões sobre a mediana, a aluna teve dificuldade de interpretá-la no contexto do vestibular da UFRGS, descrevendo que a mediana ser igual a 9 significaria apenas um número que está mais ao meio dos dados, sem fazer referência que este valor significa que metade dos candidatos acertaram menos que nove questões e a outra metade mais que nove questões.

Por fim, constatamos nas atividades 3 e 4 que, apesar de a estudante ter apresentado um avanço no raciocínio por meio de abstrações reflexionantes sobre as medidas de tendência central, ela apresentou dificuldade em interpretar essas medidas em um conjunto mais amplo de dados.

Desse modo, concluímos que, nessas atividades, as ações no GeoGebra não foram suficientes para que a estudante elevasse seu raciocínio a novos patamares de reflexionamento, necessitando talvez de outras atividades e outras formas de abordagem no software para conseguir interpretar as três medidas em diferentes contextos.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> [...] não há uma última resposta, uma solução definitiva, não há compreensão e interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre o "andar em torno... outra vez e outra ainda...". (BICUDO, 1993, p.18)

Pensar é uma atividade inerente a todo o pesquisador que, na busca pela resposta do seu problema também observa, reflete, cria hipóteses, estuda teorias, produz dados, refuta ideias e tece relações. Esse processo de investigação consiste em uma espiral com idas e vindas, repleta de dúvidas e incertezas, de "andar em torno...outra vez e outra ainda". Durante o caminho é preciso buscar provas, pistas que nos conduzam à verdade. O fato é que nem sempre os dados que produzimos são suficientes para revelar tudo o que desejamos saber e muitas vezes erramos. Eis um momento em que é preciso parar, pensar, voltar e fazer novamente até chegar ao ponto final: a resposta.

Durante a aplicação do projeto piloto, muitos desafios foram impostos como a escolha da escola, a aplicação da proposta e a forma de realizar as entrevistas com os alunos a partir do método clínico de Piaget. Além disso, os dados produzidos neste estudo fizeram parte de um ensaio aberto a falhas e a equívocos que serviram como exemplos para reavaliar os planos traçados. Portanto, reavaliamos esses aspectos e elaboramos uma nova proposta buscando produzir dados consistentes para melhor compreensão e interpretação do problema investigado.

Nos capítulos anteriores apresentamos algumas ideias centrais sobre Educação Estatística, e, também, sobre as potencialidades das tecnologias digitais frente o ensino e aprendizagem dos estudantes, tendo como premissa a concepção de que as tecnologias podem mudar a maneira de pensar devido às possibilidades por elas oferecidas. Além disso, apresentamos algumas ideias sobre Abstração Reflexionante (1977/1995) e Tomada de Consciência (1977), de Jean Piaget, buscando entender como ocorre a construção do conhecimento, segundo a teoria do autor.

Concluímos nesta pesquisa que os estudantes, ao interagir com os recursos presentes no software GeoGebra, podem (re)construir representações e ideias sobre conceitos estatísticos a partir de atividades reflexivas. Assim, o processo de abstração pode ser potencializado quando o sujeito pensa com o suporte das tecnologias, visto que elas permitem tornar observáveis as ideias formais. A análise dos dados produzidos tanto no estudo piloto quanto no experimento final comprovam este fato, pois o aspecto dinâmico e multifacetado do software possibilitou aos sujeitos dessa pesquisa novas formas de pensar sobre os conceitos de Estatística, ampliando e reconstruindo ideias.

Quanto ao raciocínio sobre as medidas de tendência central dos estudantes, observamos muitas aproximações e convergências entre as respostas dos alunos do estudo piloto e do experimento final com as pesquisas relatadas na seção 2.3 deste estudo. Em ambos os experimentos (piloto e final) os alunos demonstraram inicialmente estar em um nível Multiestrutural denominado por Watson e Moritz (2000), visto que sabiam apenas explicar a média pelo seu algoritmo. No final das atividades, os estudantes demonstraram atingir novos níveis de raciocínio, ampliando seus conhecimentos sobre a média, a mediana e a moda.

Sobre o entendimento da média como algoritmo pelos sujeitos da pesquisa, foram encontrados resultados semelhantes por Cazorla (2003), onde 47% dos estudantes explicaram a média por meio do seu algoritmo. Além disso, observamos que todos os estudantes entrevistados confundiam os conceitos de média com outras medidas como moda e mediana. Isso pode ser observado ao longo das entrevistas quando os sujeitos participantes descreviam a média de diferentes formas, as mesmas identificadas por Mokros e Russell (1995), como: média como moda; média como algoritmo; média como ponto médio e média como uma medida razoável.

Observamos ainda que a ação no software GeoGebra foi fundamental para refutar as representações sobre a média que os alunos apresentavam e reconstruir os conceitos estatísticos. De acordo com as entrevistas descritas, foi no patamar das comparações entre as medidas e das experiências realizadas no software que os estudantes tomavam consciência que suas ideias estavam equivocadas. Desse modo, o arrastar de pontos, proporcionado graças ao aspecto dinâmico do software, fez com que os estudantes reconstituíssem suas ações e experimentassem novas distribuições e, a partir delas, observassem as posições da média, da mediana e da moda, compreendendo suas propriedades. Sendo assim, concluímos que o processo de abstração reflexionante fica evidente quando se estabelece comparações conceituais com manipulação de dados. Ou seja, o rastro dos pontos no GeoGebra proporciona o "raciocínio em ação", ampliando o olhar sobre as medidas estatísticas, compreendendo propriedades que seriam difíceis de serem observadas no ambiente estático do lápis e do papel.

Além disso, destacamos que software foi fundamental na (re)construção da mediana, conceito no qual os estudantes apresentaram maior dificuldade em definir. Os experimentos proporcionados pelo arrasto de alguns pontos fizeram com que os alunos percebessem que a mediana é uma medida que separa a distribuição ao meio, 50% à direita e 50% à esquerda dela.

No caso da média como ponto de equilíbrio, observamos que inicialmente os estudantes do experimento levaram em consideração apenas a frequência dos valores desconsiderando as distâncias em relação à média. O mesmo resultado foi observado por Hardiman, Bem e Pollatset (1984). Compreendemos que esse equívoco ocorreu devido à forma como a atividade foi apresentada, ou seja, por um gráfico de barras em desequilíbrio onde os estudantes não tiveram a oportunidade de modificar os valores do gráfico, arrastando pontos e observando os movimentos, como nas atividades anteriores. Além disso, apesar de alguns alunos relacionarem a ideia da média como equilíbrio com o funcionamento da alavanca, não foi possível verificar se eles expandem essas ideias para outros tipos de problemas envolvendo média aritmética ponderada. Concluímos que seria melhor desenvolver o conceito de equilíbrio com poucos dados representados por pontos, utilizando a média aritmética simples, e não através da média ponderada com dados dispostos em um gráfico de barras como foi aplicado na atividade. Por isso, projetamos para estudos futuros aprimorar esses aspectos, construindo novas atividades que propiciem melhores experiências em que os estudantes possam ampliar o conceito de média.

Ao longo das entrevistas também observamos que alguns estudantes recorriam ao uso das fórmulas para refletir, necessitando, por vezes, do lápis e do papel para realizar os cálculos. Um ensino apoiado apenas nas fórmulas dificulta o desenvolvimento do raciocínio estatístico e em diversos momentos foi necessário recorrer a outras estratégias de investigação para que os estudantes observassem aspectos além dos cálculos. No entanto, a articulação entre as fórmulas e as ações sobre os dados no GeoGebra foi benéfica, contribuindo para a compreensão dos conceitos, visto que, quando ocorria, dava significado aos cálculos realizados. Portanto, o uso somente do GeoGebra não garante a aprendizagem, sendo necessário um ambiente que promova a articulação de diversos fatores tais como as fórmulas, as ações no software e o diálogo com o professor.

É importante salientar ainda que o GeoGebra pode, por vezes, não contribuir para que o sujeito alcance novos níveis de raciocínio estatístico, visto que depende do tipo de atividade que é proposto e do nível desenvolvimento que cada indivíduo se encontra. Tal fato pode ser comprovado com as estudantes G e H. A primeira tinha certo domínio sobre a média, mediana e moda, cujas ações no software pouco contribuíram a elevar a estudante a novos patamares de reflexionamento. Já a segunda apresentava pouco conhecimento prévio sobre os conceitos estatísticos e, portanto, as atividades 1 e 2 foram mais eficazes para alcançar novos patamares de reflexionamento do que as atividades 3 e 4.

Reconhecemos que nunca é possível dar conta de todos os aspectos do problema abordado e que nossa pesquisa pode ser aprimorada. Em nosso estudo, apresentamos as abstrações reflexionantes de um grupo pequeno de estudantes de uma determinada faixa etária (16 a 18 anos), mas sabemos que novos sujeitos podem apresentar outros tipos de resultados, sugerindo novas análises e conclusões sobre o tema. Portanto, almejamos como perspectivas futuras ampliar o campo de estudo com um grupo maior de sujeitos, buscando identificar similaridades em suas respostas, criando categorias.

No entanto, mesmo reconhecendo que não há uma solução definitiva capaz de dar conta de todas as dimensões do problema investigado como Bicudo (1993) pontua, consideramos que as provas analisadas até o momento nos ajudaram a contemplar os objetivos traçados e investigar como ocorre o processo de abstração de conceitos estatísticos pelos alunos por meio do GeoGebra. Ou seja, esse processo ocorre experimentando, comparando com outras medidas, refutando ideias, arrastando pontos, observando o movimento, reorganizando ações, refletindo e construindo novas hipóteses.

Compreendemos que o GeoGebra tem sido um meio para a disseminação da importância dos estudos sobre o ensino e aprendizagem de Estatística, sobretudo para os professores que atuam na Educação Básica, tendo em vista as características que o compõe e devido ao seu reconhecimento e popularidade na área de Educação Matemática.

Por fim, desejamos que este estudo propicie um novo olhar sobre o ensino e aprendizagem de Estatística com tecnologias digitais e que sirva como uma peça no mosaico de pesquisas sobre o tema.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. R. A. Uma proposta de atividades para o ensino de Medidas de Tendência Central com apoio do GeoGebra. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 69-81, 2018.

ARAÚJO, P. C.; ABAR, C. A. A. P. Sobre o BoxPlot no GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo (IGISP)**, v. 1, p. 013-21, 2012.

BATANERO, C.; GODINO, J. D. **Análisis de Datos y su Didáctica**. Universidad de Granada: Granada, 2001.

BATANERO, C.; GODINO, J. D. Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. **Líneas de investigación en didáctica de las matemáticas**, Badajoz, p. 203-226, 2005. Disponivel em: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Perspectivas.pdf>. Acesso em: 30 mar 2018.

BAYER, A. et al. Preparação do formando em Matemática - Licenciatura Plena para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio. In: V ENPEC Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2006, Bauru. **V ENPEC - Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, 2006. v. 5

BECKER, F. O que é construtivismo? **Revista de Educação AEC**, Brasília, v. 21, n. 83, p. 7-15, abr./jun. 1992.

BECKER, F. O sujeito do conhecimento: contribuições da Epistemologia Genética. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v.24, n.1, p.73-88, jan./jun, 1999.

BECKER, F. **Epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis: Vozes, 2012.

BECKER, F. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, Marília, v. 6, n. Especial, p. 104-128, 2014.

BECKER, F; FERREIRA, R. R. (orgs.). Discussão Virtual sobre "Interação em Epistemologia Genética". Schème – **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 5, n. 1, p 190–235, 2013. Disponível em <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3182>. Acesso em: 10 mar. 2018.

BEN-ZVI, D. Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. **Mathematical Thinking and Learning**, 2, 127-155, 2000.

BEN-ZVI, D.; FRIEDLANDER, A. Statistical thinking in a technological environment. In: GARFIELD, J. B.; BURRILL, G. **Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics.** Voorburg: International Statistical Institute, 1997.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 18-23, 1993.

BIEHLER, R. Software for learning and doing statistics. **International Statistical Review**, 65, 1997, 167-189.

BOAVENTURA, M. G. & FERNANDES, J. A. (2004). Dificuldades de alunos do 12º ano nas medidas de tendência central: O contributo dos manuais escolares. In J. A. FERNANDES, M. V. SOUSA & S. A. RIBEIRO (Orgs.), **Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola** (pp. 103-126). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

BORBA, M.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, v. 39, 2005.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito Geogebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429-440, 2016. Disponivel em: <https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/1804/1749>. Acesso em: 20 mar. 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília. 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília. 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Brasília. 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: ensino médio**. Ministério da Educação. Brasília. 2018.

BURRILL, G. **Statistics Education and the Role of Technology.** Disponivel em: <http://math.math.unipa.it/~grim/EBurrill95-104.PDF>. Acesso em: 20 mar. 2018.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística:** teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

CAZARES, S. I. GeoGebra: una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. In: Congreso Iberoamericano e Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 2014, Buenos Aires. **Anais do Congreso Iberoamericano e Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.** 2014. p. 1-11.

CAZORLA, I. M. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. In: Seminário de Estatística Aplicada, 9., 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: IASI, 2003. p. 01-15.

CAZORLA, I. et al. **Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental.** Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 2017.

CHAN, S. W.; ISMAIL, Z.; SUMINTONO, B. A Framework for Assessing High School Students' Statistical Reasoning. **PLOS ONE**, São Francisco, v. 11, n. 11, p. 1-32, 2016.

CHANCE, B. et al. The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. **Technology Innovations in Statistics Education Journal**, v. 1, n. n. 1, p. 1-26, 2007.

CHANCE, B. L. Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. n. 3, 2002. Disponivel em: <http://ww2.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html>. Acesso em: 20 mar. 2018.

CHICK, H.; PFANNKUCH, M.; WATSON, J.. Transnumerative thinking: finding and telling stories within data. **Curriculum Matters**, Wellington, n. 1, p.86-107, 2005.

COBB, G. W.; MOORE, D. S. Mathematics, Statistics, and Teaching. **The American Mathematical Monthly**, v. 104, n. n.9, p. 801-823, 1997.

COLL, C.; MONEREO, C. **Psicologia da Educação Virtual** - Aprender e Ensinar com Tecnologias da Informação e da Comunicação. Porto Alegre: Artmed, 2010.

COUTINHO, C. Q. S. Transnumeração: o uso do Geogebra na transformação de representações dos dados. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 49, p. 11-25, 2017.

COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 246-265, 2012.

COUTINHO, C. Q. S.; SOUZA, F. S. Aprendizagem da estatística e o uso de ambientes computacionais: uma análise didática de programas para construção de gráficos estatísticos. In: VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. 2013, Montevideo**. Actas del VII CIBEM.** Montevideo: CIBEM. 2013. p. 6240-6247.

COUTINHO, C. Q. S.; SOUZA, F. S. Análise didática do uso dos softwares R e GeoGebra no desenvolvimento do letramento estatístico. In: **Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education**. Rio de Janeiro: IASE. 2015. p. 1-6.

DAVID, M. S. Statistics Among the Liberal Arts. **Journal of the American Statistical Association**, v. 93, n. n. 444, p. 1253-1259, 1998.

DELMAS, R. Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. n. 3, 2002.

DELVAL, J. **Introdução à prática do Método Clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DUARTE, L. R. **A Utilização do Software GeoGebra no Ensino da Distribuição Normal de Probabilidade:** Uma aproximação entre a Geometria Dinâmica e a Educação Estatística. 2010. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão da matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

ESTEVAM, E. J. G.; KALINKE, M. A. Recursos Tecnológicos e Ensino de Estatística na Educação Básica: um cenário de pesquisas brasileiras. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 21, n. 2, 2013.

FINZER, W. (2006). What does dragging this do? The role of dynamically changing data and parameters in building a foundation for statistical understanding. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), **Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics** [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Disponível em <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7D4_FINZ.pdf> Acesso em: 12 jan. 2019.

FINZER, W., & JACKIW, N. (1998). **Dynamic manipulation of mathematical objects.** White paper presented to the NCTM 2000 Electronic Format Group. Disponível em <http://www.dynamicgeometry.com/documents/recentTalks/s2k/DynamicManipulation.doc> Acesso em: 12 jan. 2019.

FRANKLIN, C. et al. **Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report:** a pre-k–12 curriculum framework**.** Alexandria, VA. 2007.

GAL, I. Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. **International Statistical Review**, v. 70, n. n. 1, p. 1-25, 2002.

GAL, I.; GARFIELD, J. **Curricular Goals and Assessment Challenges in Statistics Education.** Amsterdam: IOS Press and the International Statistical Institute, 1997.

GAL, I.; GARFIELD, J. Teaching and evaluation of statistical reasoning**. To appear in NCTM** 1999 Yearbook: Mathematical Reasoning. Reston, VA: National Council Teachers of Mathematics. 1999. p. 207–219.

GARFIELD, J. The statistical reasoning assessment: development and validation of a research tool. In: **Proceedings of the fifth International Conference on Teaching Statistics**. Mendoza/Voorburg: International Statistical Institute. 1998. p. 781-786.

GARFIELD, J. The Challenge of Developing Statistical Reasoning. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. n. 3, 2002.

GARFIELD, J. B., & BEN-ZVI, D. Learning to reason about statistical models and modeling. In J. B. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), **Developing students' statistical 161 reasoning: Connecting research and teaching practice** (pp. 143–163). Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2008.

GODOY, A. S. Introdução a Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, Mar./Abr., 1995.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8ª. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GONÇALVES, P. H. R. **Uma Abordagem da Distribuição Normal Através da Resolução de uma Situação Problema com a Utilização do Software GeoGebra**. 2014. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2014.

HANDAYA, A. **Construção de uma ferramenta tecnológica para determinar as medidas resumo de dados distribuídos por classe.** ENEM. São Paulo. 2016.

HARDIMAN, P., WELL, A. D., & POLLATSEK, A. Usefulness of a balance model in understanding the mean. **Journal of Educational Psychology**, 76, 792–801, 1984.

KONOLD, C., & POLLATSEK, A. Data analysis as the search for signals in noisy processes. **Journal for Research in Mathematics Education**, 33, 259-289, 2002.

LAURINDO, J. C. S.; CAITANO, L.; BASSO, M. V. A. Recursos computacionais e o ensino de estatística na educação básica: possibilidades com software GeoGebra. In: CIEM - Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7., 2017, Canoas. **Anais...**Canoas: ULBRA, 2017. Disponivel em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6796/3237>. Acesso em: 20 mar. 2018.

LEITE, R. F. C. **A utilização de Tecnologia para Estatística no Ensino Médio:** uma proposta de aula com o suporte do Google Docs e do GeoGebra. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

LÉVY, P. **Cibercultura**. 2ª. ed. São Paulo: Editora 34, 2000.

ESPASANDIN, C. A. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. 1998. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.** 2003. 281 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. n.74, p. 57-73, jan./abr., 2008.

LOUZADA, F. et al. **Reflexões a respeito dos conteúdos de probabilidade e estatística na escola do Brasil – uma proposta.** Associação Brasileira de Estatística. [S.l.]. 2015.

MAGINA, S. et al. Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. especial 2, p. 59-72, 2010. Editora UFPR. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/04.pdf> Acesso em: 28 mar. 2018.

MAYÉN, S. et al. Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato.**UNIÓN**, 9, 187-201, 2007.

MARQUES, M.; GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V. Compreensões de Alunos e Professores sobre média aritmética. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática, v.24, p.725 - 746, 2011.

MOKROS, J.; RUSSELL, S. J. Children's concepts of average and representativeness. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26(1), 20-39, 1995.

MOORE, D. **A Estatística Básica e sua prática.** Rio de Janeiro: LTC, 2005.

MOORE, D. S. Should Mathematicians Teach Statistics? **The College Mathematics Journal**, v. 19, n. n. 1, p. 3-7, 1988.

MOORE, D. S. et al. Statistics education fin de siecle. **The American Statistician**, v. 49, n. 3, p. 250-260, 1995.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. de O. **Estatística básica.** 6. ed. rev. atual. São Paulo: Saraiva, São Paulo: Saraiva, 2010.

NASCIMENTO, L. et al. Construção de jogos estatísticos no GeoGebra: uma perspectiva de utilização das novas tecnologias para o ensino. In: CIEM - Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7., 2017, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2017. Disponivel em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6875/4440>. Acesso em: 30 mar. 2018.

NASCIMENTO, L. M. **A utilização de Tecnologia para Estatística no Ensino Fundamental II:** Uma proposta de aula com o suporte do Google Docs e do GeoGebra. 2017. 106 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

NOVAES, D. V.; COUTINHO, C. de Q. S. **Estatística para educação profissional**. São Paulo: RBB, 2008.

PAPERT, S. **Logo:** computadores e educação. 1ª. ed. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PEA, R. D. Cognitive technologies for mathematics education. In: SCHOENFELD, A. H. **Cognitive science and mathematics education**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 89–122. Disponivel em: <http://web.stanford.edu/~roypea/RoyPDF%20folder/A41_Pea_87b.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2018.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2008.

PFANNKUCH, M. Training teachers to develop statistical thinking. the ICMI STUDY 18 and 2008 **IASE Round Table Conference**. México: ICMI/IASE. 2008.

PHAN-YAMADA, T.; MAN, S. W. Teaching Statistics with Geogebra. **North American GeoGebra Journal**, Oxford, v. 7, n. 1, p. 13-23, 2018.

PIAGET, J. **Problemas de psicologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1972.

PIAGET, J. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. São Paulo: Abril Cultural, Coleção Os Pensadores, 1983.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante:** Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução de Fernando BECKER e Petronilha BEATRIZ. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995 [1977].

POLLATSEK, A., LIMA, S. e WELL, A. D. Concept or computation: students' understanding of the mean. **Educational Studies in Mathematics**, 12, 191-204, 1981.

ROCHA, S. M. **Distribuição Binomial e Aplicações**. 2017. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

ROSA, M. **A Construção de Identidades online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância.** Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, p. 263. 2008.

ROSSMAN, A. J. **Workshop Statistics:** Discovery with data. New York : Springer-Verlag, 1996.

RUMSEY, D. J. Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. n. 3, 2002.

SANGIORGI, O. **Matemática e Estatística**. São Paulo: Nacional, 1965.

SANTOS, C. R. **O tratamento da informação:** Currículos prescritos, formação de professores e implementação em sala de aula. 2005. 126 f. Dissertação (Mestrado), PUC-SP, São Paulo, 2005.

SANTOS, E. C. P**roposta de Aplicação da Estatística no Ensino da Matemática na Educação Básica:** Uma Investigação do Cotidiano com o Auxílio do GeoGebra. 2013. 50 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

SANTOS, R. M. **Estado da arte e história da pesquisa em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação**. 2015. 348 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

SCHREIBER, K. P.; FERREIRA, J. I. C.; PORCIÚNCULA, M. Geogebra e Projetos de Aprendizagem na formação em Estatística de futuros professores de Matemática. In: Ciclo de Palestras sobre Novas Tecnologias na Educação. 25., 2017, Gramado. **Anais...** Gramado: CINTED., 2017, p. 303-313.

SILVA FILHO, H. C. **Probabilidade e Valor Esperado Discussão de problemas para o Ensino Médio.** 2016. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pósgraduação em Matemática, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SILVA, A. A. C. **Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal:** uma abordagem no ensino de distribuição normal de probabilidade. 2015. 37 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de São João Del-rei, Ouro Branco, 2015.

SILVA, C. B.; CAZORLA, I. M.; KATAOKA, V. Y. Trajetória e perspectivas da educação estatística no Brasil, 2010-2014: um olhar a partir do GT-12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado das Letras, 2010. p. 19-44.

SILVA, C. V. R. **Estatística no 9º Ano do Ensino Fundamental:** Uma Abordagem Contextualizada e Interdisciplinar. 2018. 47 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.

SOARES, M. E. S.; BECK, V. C. GeoGebra como ferramenta para o ensino de estatística. In: CIEM - Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7., 2017, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2017. Disponivel em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7326/3659>. Acesso em: 20 mar. 2018.

STRAUSS, S. e BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, 19(1), 64-80, 1988.

VALENTE, J. A. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem:** o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. 232 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

VALENTE, W. R. No tempo em que Normalistas precisavam saber Estatística. **Revista Brasileira de História da Matemática**, n. Especial n.1, p. 357-368, 2007.

VERGNAUD, G. Education: the best part of Piaget's heritage. **Swiss Journal of Psychology**, Bern, v. 55, n. 2/3, p. 112-118, 1996.

WATSON, J. M., & MORITZ, J. B. The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. **Educational Studies in Mathematics**, 37(2), 145–168, 1999.

WATSON, J. M., & MORITZ, J. B. The longitudinal development of understanding of average. **Mathematical Thinking and Learning**, 2, 11–50, 2000.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. **International Statistical Review**, v. 67, n. n. 3, p. 223-265, 1999.

APÊNDICES

A - Carta de apresentação para a direção da escola.

Porto Alegre, 29 de junho de 2018.

Prezada Professora Nelma Terezinha Dias

Diretora do Colégio Agrícola Estadual Daniel de Oliveira Paiva

Ao cumprimentá-la, venho solicitar sua permissão para que a Professora Jéssica Carolini da Silva Laurindo, mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, possa realizar atividade relacionada com a coleta de dados para a pesquisa intitulada Estatística na Educação Básica: o estudo de conceitos com o apoio do software GeoGebra desenvolvida pela professora-pesquisadora, sob minha orientação.

A participação dos estudantes nesse estudo tem como finalidade contribuir para atingir os objetivos estritamente acadêmicos da pesquisa, que, em linhas gerais, consiste em:

- Investigar como a aprendizagem de conceitos estatísticos pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra.

Durante a realização das atividades na Escola a professora-pesquisadora coletará produções e registrará a participação dos estudantes na realização de tarefas propostas. Os registros poderão envolver o uso de imagens fotográficas ou em vídeo. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação dos estudantes, solicitamos sua autorização para que possam ser utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação dos alunos. Por oportuno, informamos que os pais ou responsáveis receberão documento de igual teor, no qual poderão manifestar sua concordância na participação dos estudantes nesse estudo.

Desde já agradeço e me coloco à sua disposição para quaisquer esclarecimentos. Cordialmente,

Marcus Basso

B - Termo de Consentimento Informado

Eu, ________________________________, R.G. ______________, responsável pelo(a) aluno(a) _________________________________, da turma ________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Estatística na Educação Básica: o estudo de conceitos com o apoio do software GeoGebra**, desenvolvida pela pesquisadora Jéssica Carolini da Silva Laurindo. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 33086212 ou e-mail mbasso@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, consiste em: investigar como a aprendizagem de conceitos estatísticos pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Av. Bento Gonçalves, 9500 – Campus do Vale – UFRGS, telefone (51) 33086212 ou e-mail mbasso@ufrgs.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

C - Termo de Assentimento do Menor

Você está sendo convidado para participar da pesquisa “Estatística na Educação Básica: o estudo de conceitos com o apoio do software GeoGebra”. Queremos investigar como a aprendizagem de conceitos estatísticos pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra. Os jovens que participarão dessa pesquisa são estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita no Colégio Agrícola Estadual Daniel de Oliveira Paiva, onde os estudantes participarão de um conjunto de atividades sobre conceitos estatísticos. Para isso, será elaborado um questionário cujo tema seja de interesse do estudante e propostas atividades sobre conceitos estatísticos no software através dos dados a serem produzidos pelo questionário em questão. Caso tenha alguma dúvida, você pode nos procurar pelo telefone (XX) XXXXX-XXXX da pesquisadora Jéssica Carolini da Silva Laurindo. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa serão publicados, mas sem identificar os alunos que participaram da pesquisa.

Se você tiver alguma dúvida, você pode perguntar à pesquisadora Jéssica Carolini da Silva Laurindo.

Eu ____ aceito participar da pesquisa Estatística na Educação Básica: o estudo de conceitos com o apoio do software GeoGebra, que tem o objetivo investigar como a aprendizagem de conceitos estatísticos pode ser potencializada no ambiente do software GeoGebra. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir. A pesquisadora esclareceu as minhas dúvidas e comunicou os meus responsáveis. Li esse termo de assentimento e concordo em participar da pesquisa.

______________________________ ______________________________

Assinatura do menor Assinatura da pesquisadora

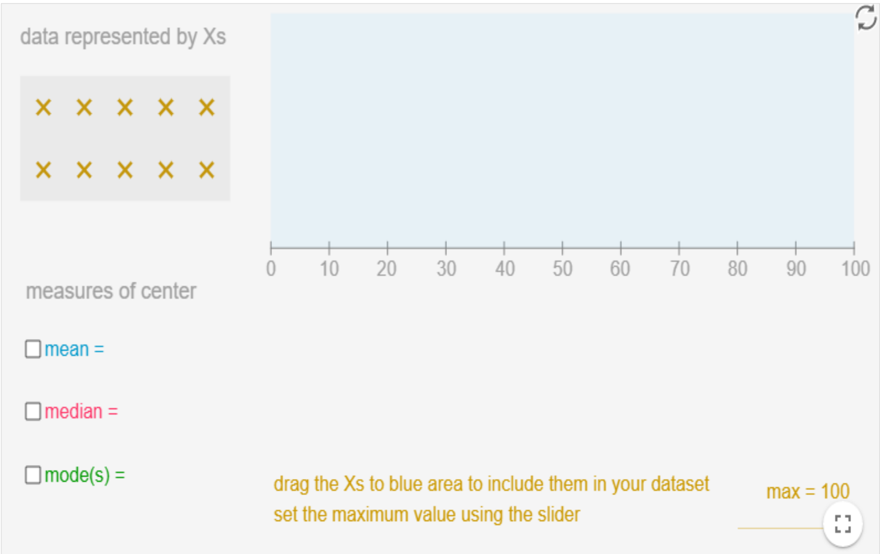
Porto Alegre, ____ de ___________ de 2018.

D - Atividades do Estudo Piloto[31]

Atividade 1 – **Medidas de Posição: a Média Aritmética**

Esta atividade tem o objetivo de tentar compreender as representações dos alunos sobre as medidas de tendência central a partir de um conjunto pequeno de dados. Nesse contexto, objetiva-se observar quais as abstrações que os alunos fazem sobre os conceitos estatísticos quando manipulam o software. Desse modo, primeiro devem ser selecionados alguns dados coletados cujas variáveis são quantitativas discretas. Esses dados devem ser representados graficamente aos poucos, através da escala presente na figura 76. Inicia-se primeiramente com dois dados e, na medida que o sujeito responde as perguntas do investigador, mais dados são inseridos no gráfico. Os Xs amarelos representam os dados que devem ser arrastados e posicionados no eixo horizontal para a construção do gráfico.

Figura 76 – Atividade 1 do estudo piloto.



Fonte – Atividade criada por sonom[32].

Questionamentos

Para você, qual é a média aritmética dos dados apresentados? Identifique-a no gráfico.

---

[31] Proposta didática inspirada no conjunto de atividades sobre Medidas de Posição, idealizado por Ana Maria Lima de Farias. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/medidasposicao/medidasposicao-html/MedidasDePInt.html>. Acesso em: 5 mar. 2017.

[32] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/r3mG5nkD>. Acesso em: 10 mar. 2017.

Por que determinaste esse valor para representar a média aritmética dos dados?

Este valor pertence ao conjunto de dados?

Se acrescentarmos um terceiro ponto[33] *no gráfico, qual seria a média aritmética dos dados? Represente esse valor no gráfico.*

Por que determinaste esse valor para representar a média aritmética dos dados?

Se empilhássemos os pontos, qual seria a média aritmética dos dados?

Por que determinaste esse valor para representar a média aritmética dos dados?

Se empilhássemos dois pontos e afastarmos um, qual será a média aritmética dos dados?

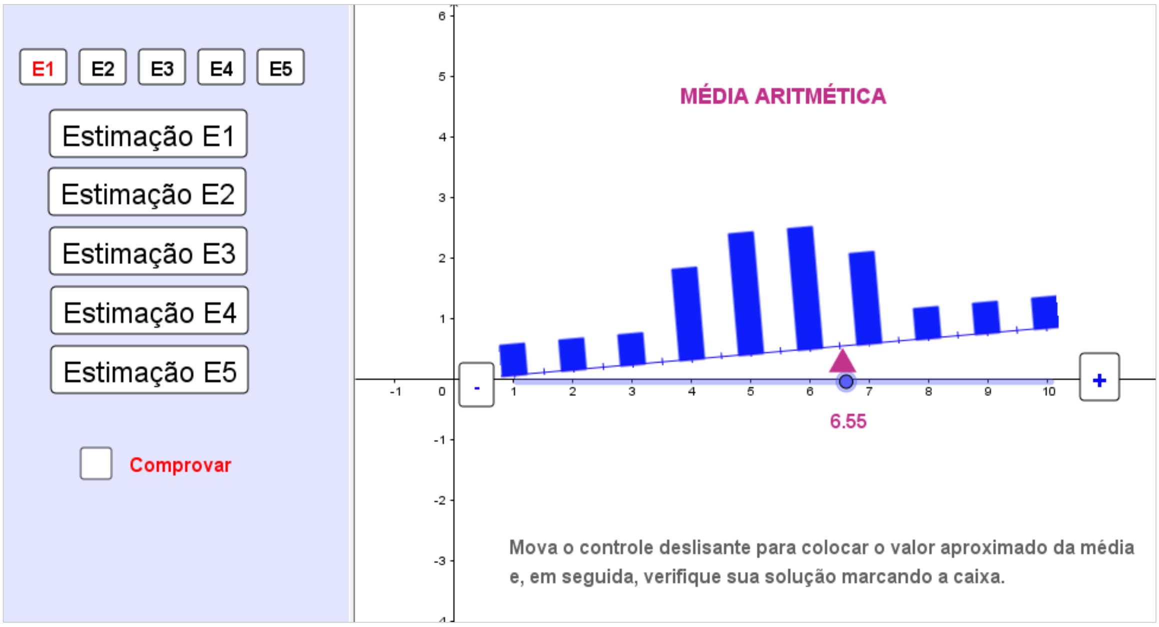
Por que determinaste esse valor para representar a média aritmética dos dados?

Se modificarmos o ponto do gráfico qual será a média aritmética dos dados? Identifique a média no gráfico.

Atividade 2 - **Medidas de Posição: a Média Aritmética**

O objetivo desta atividade é compreender a média como ponto de equilíbrio dos dados. Neste objeto o gráfico fica equilibrado sobre o eixo horizontal quando o ponto coincide com a média aritmética dos dados.

Figura 77 - Atividade 2 do estudo piloto: média como ponto de equilíbrio.

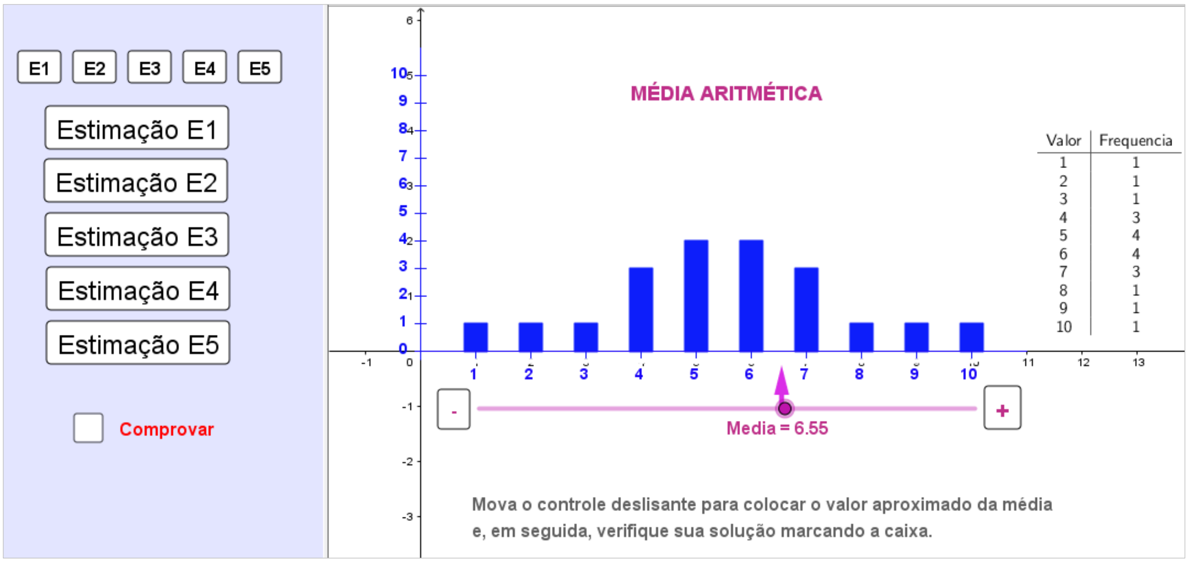


Fonte: Atividade criada por José Luis Álvarez García[34] e adaptada pela autora[35].

[33] Para facilitar a leitura chamaremos os X's do objeto de pontos.
[34] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/fwMmYGtx. Acesso em: 10 mar. 2017.
[35] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/kyfbmzvv>. Acesso em: 10 mar. 2017.

O botão “Estimação E1” mostra o gráfico de barras que representa o conjunto de dados E1. Nesta janela o aluno deverá fazer uma estimação da média aritmética ao arrastar o botão média e posicioná-lo no ponto desejado. Em seguida, o aluno deverá comprovar a sua estimativa selecionando o botão “Comprovar”, conforme ilustra a figura 78:

Figura 78 - Atividade 2 do estudo piloto: estimando a média aritmética.



Fonte - Atividade criada por José Luis Álvarez García e adaptada pela autora.

Após a comprovação, o aluno deverá clicar no botão E1 e arrastar a seta cor de rosa verificando que o gráfico fica equilibrado quando a seta está posicionada no ponto correspondente ao valor da média aritmética.

Questionamentos:

Ao observar os dados representados no gráfico de barras e na tabela de frequência, estime um valor para a média aritmética e posicione no gráfico.

Por que escolheste esse valor?

Comprove o seu resultado clicando no botão comprovar.

A média aritmética coincide com o resultado estimado? Caso não coincida, avalie as razões que possam justificar verdadeiro valor da média aritmética.

Clique no botão “E1”, arraste a seta cor de rosa e explique o que irá acontecer com o gráfico de barras.

Faça o mesmo para outros conjuntos de dados presentes nos outros botões na janela de visualização.

A partir das atividades propostas, para você, o que é média aritmética? Justifique.
Para que serve a média aritmética? Justifique.

Atividade 3 – **Medidas de Posição: a Mediana**

Para compreender o conceito de mediana, deverá ser utilizado novamente o objeto da atividade 1. Nesse caso, devem ser selecionados novamente dois pontos e realizados questionamentos sobre a mediana desses pontos. A partir das respostas dos alunos, novos pontos podem ser acrescentados e novas perguntas realizadas conforme os questionamentos a seguir:

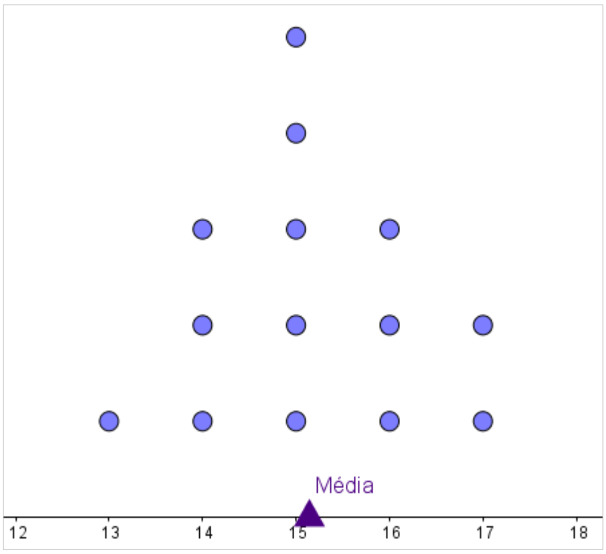
Questionamentos:
Para você, qual é a mediana dos dados apresentados? Represente-a no gráfico acima.
Por que determinaste esse valor para representar a mediana dos dados?
Este valor pertence ao conjunto de dados?
Se acrescentarmos um terceiro ponto no gráfico, conforme a figura a seguir. Qual seria a mediana dos dados? Como você representaria a mediana no gráfico?
Por que determinaste esse valor para representar a mediana dos dados?
Se empilhássemos os dados, conforme a imagem a seguir. Qual seria a mediana dos dados?
Por que determinaste esse valor para representar a mediana dos dados?
Se empilhássemos dois dados e afastarmos um dado, conforme a apresentação a seguir. Qual será a mediana dos dados?
Por que determinaste esse valor para representar a mediana dos dados?
Se modificarmos o ponto do gráfico qual será a mediana dos dados? Posicione a mediana no gráfico.
Para você o que é mediana?

Atividade 4 – **Medidas de Posição: Média, Mediana e Moda**

O objetivo desta atividade consiste em observar e comparar as propriedades das medidas de tendência central a partir da manipulação dinâmica de dados representados por um gráfico de pontos. O gráfico em questão deve ser composto a partir do conjunto de dados coletados pelos estudantes durante a realização da pesquisa estatística.

É importante destacar que o software GeoGebra apresenta um comando específico para esse tipo de gráfico, porém os pontos podem modificados apenas por meio da alteração dos seus valores correspondentes na planilha de cálculos. Ou seja, não é possível mover esses pontos simplesmente arrastando-os na janela de visualização. Desse modo, o gráfico deve ser construído manualmente para que os pontos possam ser arrastados, conforme ilustra a figura a 79:

Figura 79 - Atividade 4 do estudo piloto.



Fonte – Construção da autora[36].

Questionamentos:

A partir do gráfico apresentado na janela de visualização, estime a média aritmética do conjunto de dados?

Por que determinaste esse valor?

Confira a sua estimativa através do comando "média" apresentado.

Escolha um ponto do gráfico e arraste afastando-o do conjunto de dados.

O que você observou? Justifique a sua resposta?

A partir da nova disposição dos dados, você acha que a média aritmética calculada resume o conjunto de dados? Justifique a sua resposta.

Existe uma outra medida que pode resumir melhor o conjunto de dados apresentados?

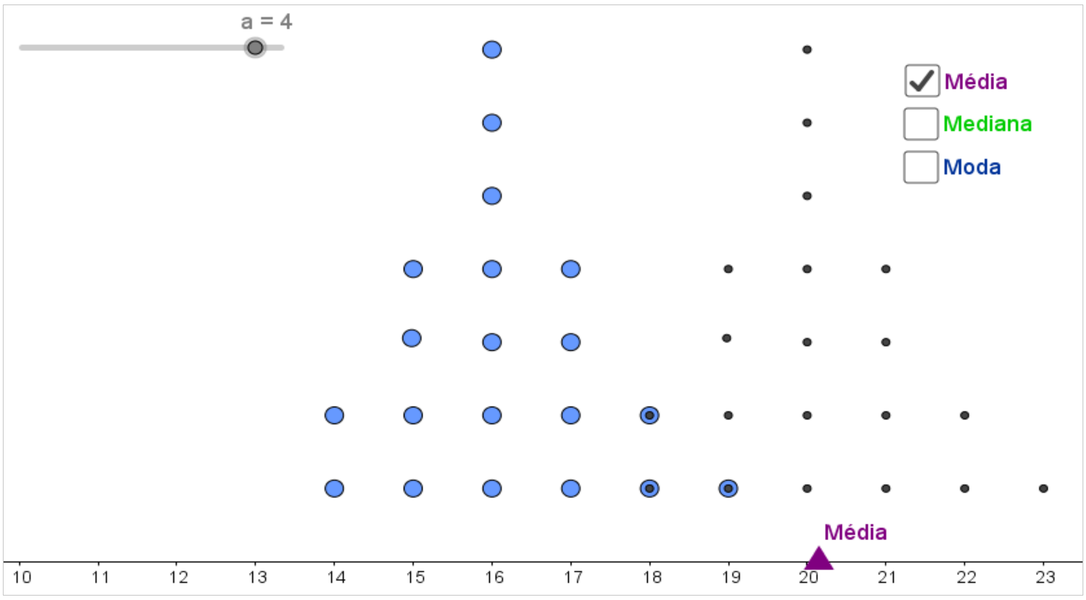
Crie uma medida que possa resumir melhor o conjunto de dados que a média aritmética apresentada.

[36] Disponível em: < https://www.geogebra.org/m/ntxua5z3> Acesso em: 10 mar. 2018.

A partir do gráfico apresentado na janela de visualização, estime a mediana do conjunto de dados?
Por que determinaste esse valor?
Confira a sua estimativa através do comando "mediana" apresentado.
Escolha um ponto do gráfico e arraste afastando-o do conjunto de dados.
O que você observou? Justifique a sua resposta?
A partir da nova disposição dos dados, você acha que a mediana calculada representa o conjunto de dados? Justifique a sua resposta.
Existe uma outra medida que pode resumir melhor o conjunto de dados apresentados?
Utilize o comando "moda" cara calcular a moda do conjunto de dados.
Para você o que é moda?
Identifique as três medidas no gráfico.
Como você interpreta cada uma das medidas (média, mediana e moda) no contexto da sua pesquisa? Justifique a sua resposta.
Qual a medida que melhor representa os dados produzidos? Justifique a sua resposta.
Escolha um ponto e arraste-os no gráfico afastando-o do conjunto de dados.
Observe o que acontece com a média, a mediana e a moda. Justifique a sua resposta.
Se adicionarmos uma unidade em cada elemento do conjunto de dados e projetássemos novamente o gráfico de pontos conforme a figura a seguir. Quais seriam os novos valores para média, mediana e moda?

Nesta pergunta o investigador deverá criar um controle deslizante que irá controlar quantas unidades serão adicionadas em cada elemento no conjunto de dados. Quando o aluno mover o controle deslizante os pontos do gráfico serão deslocados simultaneamente, assim como os pontos que representam as medidas resumo, mostrando o que acontecerá com a média, a mediana e a moda, conforme a figura 80.

Figura 80 - Atividade 4 do estudo piloto: acrescentando uma constante a cada valor do conjunto de dados.



Fonte – Construção da autora.[37]

A modificação dos pontos azuis do gráfico produz novas distribuições e novas intervenções podem ser realizadas com os estudantes a partir deles conforme as perguntas a seguir:

Como podemos distribuir os pontos do gráfico de modo que a média, a mediana e a moda coincidam?
Como podemos distribuir os pontos do gráfico de modo que a média seja maior que a mediana?
Como podemos distribuir os dados do gráfico de modo que a média seja menor que a mediana?

Além das variáveis quantitativas discretas, pode-se estender as ideias sobre média, mediana e moda para outros tipos de variáveis.

É possível calcular a média para todos os tipos de variáveis da sua pesquisa?
É possível calcular a mediana para todos os tipos de variáveis da sua pesquisa?
É possível calcular a moda para todos os tipos de variáveis da sua pesquisa?
Para quais tipos de variáveis faz sentido calcular a média? E a mediana? E a moda?

[37] Disponível em: < https://www.geogebra.org/m/ntxua5z3> Acesso em: 10 mar. 2017.

Salientamos que a mesma análise poderá ser realizada com os dados cujas variáveis são do tipo quantitativas contínuas e podem ser representadas através do histograma e do gráfico de caixas.

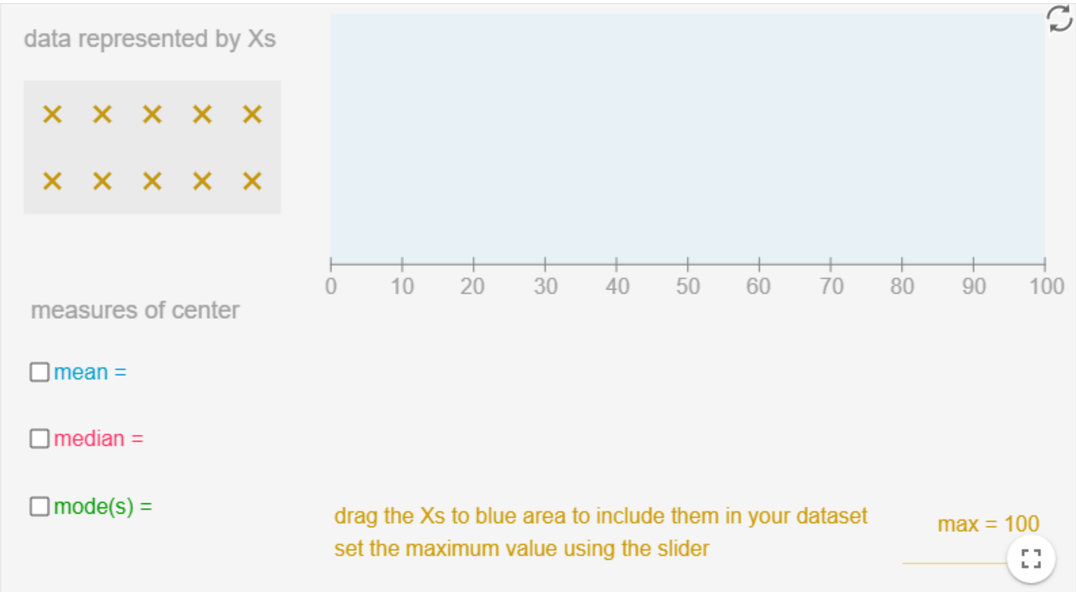
Destacamos ainda que as perguntas e a sequência proposta podem não ser seguidas fielmente como apresentado, podendo ao longo da investigação serem realizados novos questionamentos ou até mesmo modificar a ordem das atividades afim de tentar conduzir de maneira clara os caminhos da investigação. Desse modo, quem irá guiar os passos da investigação serão os alunos sujeitos da pesquisa, sendo suas respostas uma espécie de pistas que poderão indicar a próxima pergunta ou atividade que melhor poderá revelar as ideias construídas conforme seus pensamentos.

E - Replanejamento das Atividades[38]

Atividade 1 – **Medidas de posição em dados não agrupados**

Esta atividade consiste observar as propriedades da média, da mediana e da moda através do arrastar dos pontos “x” posicionados na escala, conforme os questionamentos a seguir. Esses pontos, ao serem arrastados ao longo da reta, modificam simultaneamente a posição da medida de centro selecionada.

Figura 81 - Atividade 1 do experimento final.



Fonte – GeoGebra Materiais; autor sonom[39].

Questionamentos

Imagine que valores 3 e 7 representam as notas de um aluno nas provas de Matemática, cuja nota máxima de cada avaliação é de 10 pontos. Posicione os pontos “x” presentes na janela de visualização do software nas respectivas posições 3 e 7 na escala, conforme as notas obtidas. Para você, qual a nota média em Matemática do aluno? Justifique a sua resposta.

---

[38] Proposta didática inspirada no conjunto de atividades sobre Medidas de Posição, idealizado por Ana Maria Lima de Farias. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/medidasposicao/medidasposicao-html/MedidasDePInt.html>. Acesso em: 5 mar. 2017.

[39] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/r3mG5nkD>. Acesso em: 10 mar. 2018.

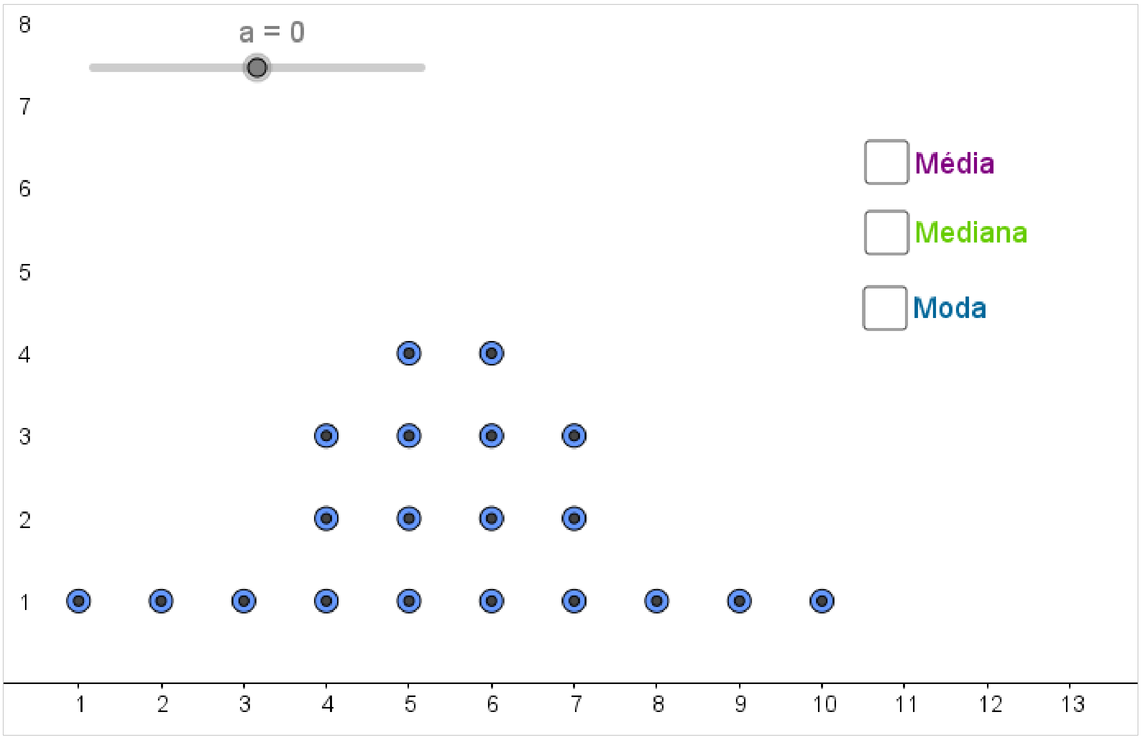
Agora, posicione os pontos na escala de modo que o aluno tenha obtido nota 3 em ambas as provas. Para você, qual a nota média em Matemática desse aluno? Justifique a sua resposta.
Se acrescentássemos um terceiro ponto no gráfico, representando desta vez as notas de três avaliações, ou seja, 3, 3 e 10, por exemplo. Para você, qual a nota média em Matemática desse aluno? Justifique a sua resposta.
Se as notas desse aluno fossem 3, 6 e 10. Qual seria a sua média em Matemática? Justifique a sua resposta.
Se a média em Matemática do aluno fosse de 5. Quais seriam as suas possíveis notas em cada avaliação? Essa será a única possibilidade? Justifique.
Imagine agora uma nova situação: os valores 0, 1, 1, 2, 2, 3, representam o número de animais de estimação de cada família que reside em um condomínio. Estime a média aritmética, a mediana e a moda dos dados e confira suas estimativas através dos comandos "mean", "median" e "mode" respectivamente.
Como você interpreta a média, a mediana e a moda de acordo com o contexto do problema?
Se acrescentássemos uma nova família com 10 animais. Explique o que acontece com a mediana? Se uma nova família, que não tivesse animal de estimação, fosse morar no condomínio. Qual seria a mediana?
Deixe um "x" sobre o ponto 10 na escala e aproxime todos os outros para o ponto zero na escala. Explique o que acontece com a média e a mediana?
Agora inverta a ordem dos pontos deixando apenas um ponto próximo de zero e o restante afastados próximos ao 10. Explique que acontece com a média e a mediana?

Atividade 2 – **Medidas de posição em dados agrupados**.

Nesta atividade os estudantes, sujeitos da pesquisa, terão que interpretar as medidas de posição através de dados agrupados a partir do gráfico de pontos, presente na janela de visualização do software. O gráfico em questão expressa o desempenho em Matemática de uma turma de alunos. O objetivo desta tarefa é verificar como os estudantes interpretam as medidas de posição em um conjunto mais amplo de dados.

Destacamos que o GeoGebra apresenta um comando específico para esse tipo de gráfico. Porém o gráfico representado permite apenas que os pontos sejam modificados através da alteração dos seus valores correspondentes presentes na planilha de cálculos, não sendo possível mover esses pontos apenas arrastando-os diretamente na janela de visualização. Desse modo, o gráfico de pontos será construído manualmente a partir da ferramenta “ponto” para que esses possam ser arrastados pelo aluno, conforme ilustra a figura 82:

Figura 82 - Atividade 2 do experimento final.



Fonte: Construção da Autora[40].

Questionamentos:

Para você, qual é a média aritmética dos dados apresentados?

Por que determinaste esse valor?

Confira a sua estimativa através do comando “média” na janela de visualização.

Para você, qual é a mediana dos dados apresentados?

Por que determinaste esse valor?

Confira a sua estimativa através do comando “mediana” na janela de visualização.

Para você, qual é moda dos dados apresentados?

Por que determinaste esse valor?

Confira a sua estimativa através do comando “moda” na janela de visualização.

Como você avalia o desempenho da turma a partir das medidas identificadas no gráfico?

Escolha um ponto do gráfico e arraste afastando-o do conjunto de dados.

[40] Disponível em: < https://www.geogebra.org/m/ntxua5z3> Acesso em: 10 mar. 2018.

O que você observou? Justifique a sua resposta.

Se aumentarmos um ponto na nota de cada aluno. Qual seria a nota média da turma? Mova controle deslizante presente na tela e veja o que acontece.

Como podemos distribuir os pontos do gráfico de modo que a média, a mediana e a moda coincidam.

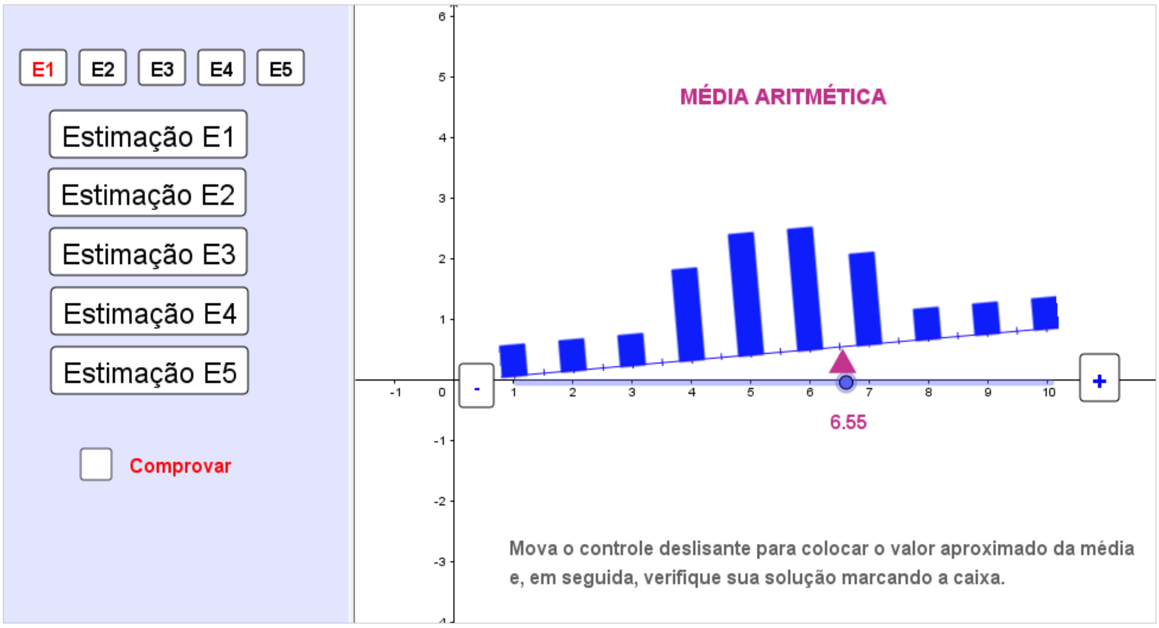
Como podemos distribuir os pontos do gráfico de modo que a média seja maior que a mediana.

Como você interpreta cada uma das medidas a partir da modificação dos dados no gráfico?

Atividade 3 – A **Média Aritmética como ponto de equilíbrio.**

Neste objeto de aprendizagem o gráfico fica equilibrado sobre o eixo horizontal quando o ponto coincide com a média aritmética dos dados. O objetivo dessa tarefa é verificar que a média é o ponto de equilíbrio da distribuição dos dados.

Figura 83 - Atividade 3 do experimento final: média como ponto de equilíbrio.



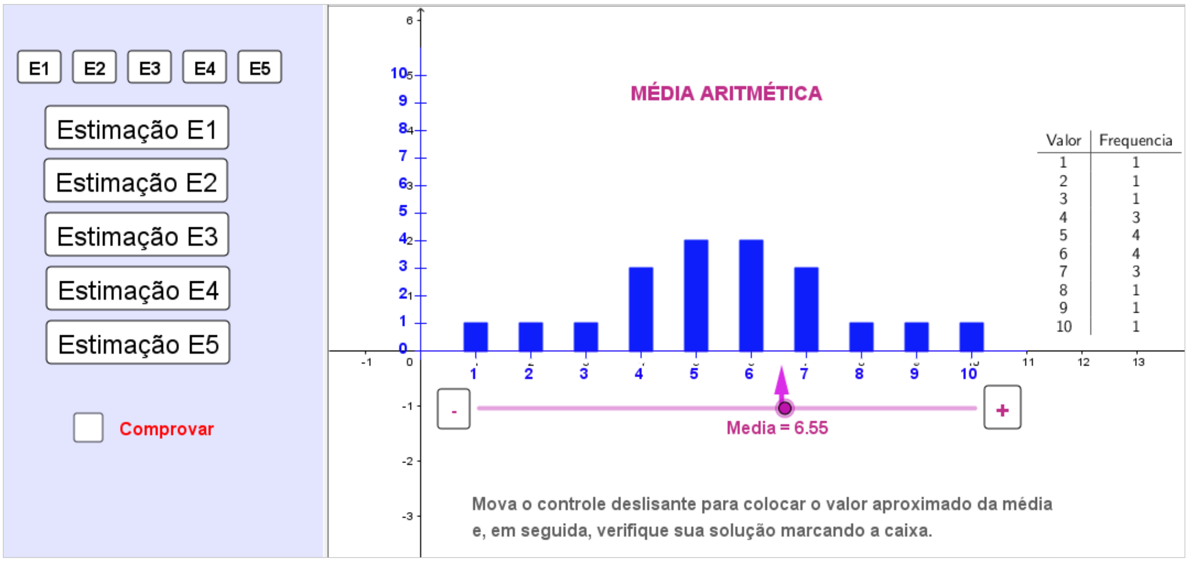
Fonte: Atividade criada por José Luis Álvarez García[41] e adaptada pela autora[42].

O botão “Estimação E1” mostra o gráfico de barras que representa o conjunto de dados E1. Nesta janela o aluno poderá fazer uma estimação da média aritmética ao arrastar o botão

[41] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/fwMmYGtx. Acesso em: 10 mar. 2018.
[42] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/kyfbmzvv>. Acesso em: 10 mar. 2018.

"média" e posicioná-lo no ponto desejado. Em seguida, o aluno poderá comprovar a sua estimativa selecionando o botão "Comprovar", conforme ilustra a figura 84:

Figura 84 - Atividade 3 do experimento final: estimando a média aritmética.



Fonte: Atividade criada por José Luis Álvarez García e adaptada pela autora.

Após a comprovação, o aluno deverá clicar no botão E1 e mover o triângulo vermelho verificando que o gráfico fica equilibrado quando o triângulo está posicionado no ponto correspondente ao valor da média aritmética.

Questionamentos:

O gráfico de barra e a tabela de frequência presentes na tela representam a frequência das notas de 20 alunos de uma turma em uma prova de Matemática. Ao observar os dados, estime um valor para a média aritmética e posicione no gráfico.

Por que escolheste esse valor?

Comprove o seu resultado clicando no botão comprovar.

A média aritmética coincide com o resultado estimado? Caso não coincida, avalie as razões que possam justificar verdadeiro valor da média aritmética.

Clique no botão "E1" e arraste o triângulo rosa. Explique o que irá acontecer com o gráfico de barras.

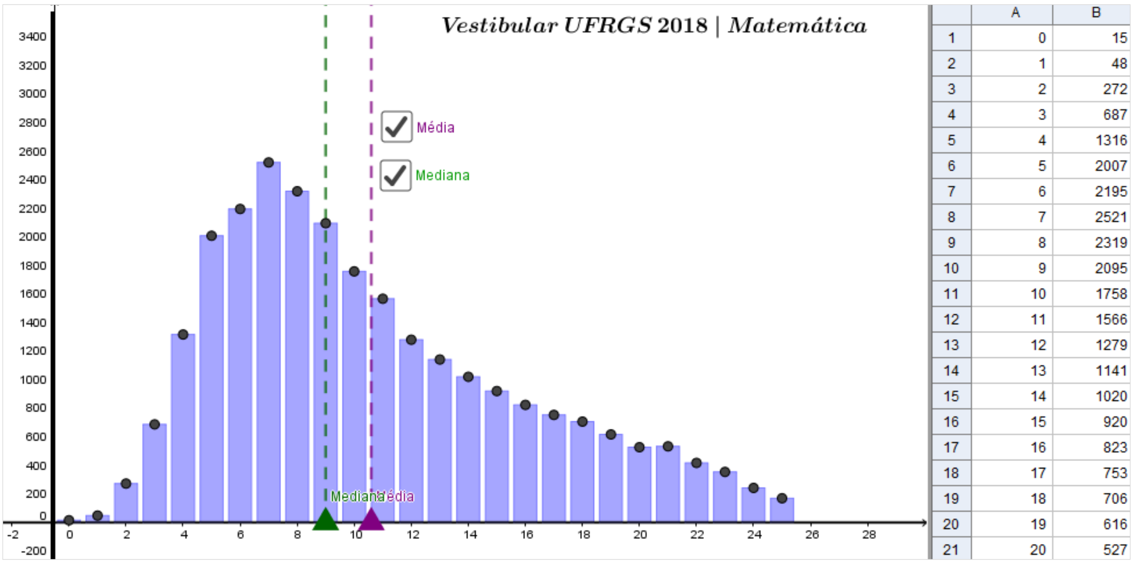
Faça o mesmo para outros conjuntos de dados presentes nos outros botões na janela de visualização.

A partir das atividades propostas, para você, o que é média aritmética? Justifique.

Atividade 4 - **Medidas de posição em diferentes distribuições.**

O objetivo dessa atividade é investigar se o estudante identifica corretamente as posições da média, da mediana e da moda em diferentes tipos de distribuições. Ao contrário das distribuições assimétricas onde a média tende a se deslocar para esquerda ou para a direita. Nesse contexto, será observado o desempenho em Matemática dos alunos que realizaram o vestibular da UFRGS em 2018 a partir do gráfico construído no software GeoGebra, conforme a figura 85.

Figura 85 - Atividade 4 do experimento final.



Fonte: Construção da autora[43].

Questionamentos:

A partir do gráfico identifique a ordem de posição entre a média, a mediana e a moda deste conjunto de dados? Ou seja, a média, por exemplo, está acima ou abaixo da mediana? E a moda? Justifique.

Confira sua estimativa através dos comandos presentes na tela de visualização do software.

Mova os pontos no gráfico de barras e crie uma distribuição de modo que a média esteja entre a mediana e a moda.

Mova os pontos no gráfico de barras e crie uma distribuição em que a média < mediana < moda.

Mova os pontos no gráfico de barras e crie uma distribuição em que a média>mediana>moda.

[43] Disponível em: < https://www.geogebra.org/m/tcyvrhqw> Acesso em: 10 mar. 2018.

O que você pode concluir a respeito da ordem da média, da mediana e da moda?

Faça a mesma estimativa a partir da observação dos gráficos referentes a quantidade de acertos de outras disciplinas.

Considere que a média de acertos de uma das provas do vestibular da UFRGS tenha sido de aproximadamente 12 questões. Modifique o gráfico do software para apresentar uma possível distribuição de acertos na prova. Essa é a única possibilidade?

Como você avalia o desempenho em Matemática dos alunos que realizaram o vestibular da UFRGS em 2018? Interprete o desempenho dos estudantes a partir de cada uma das medidas (média, mediana e moda).