UFRGS EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

Pré-Cálculo

UFRGS
EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

1ª edição: 2012

Projeto Gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão e Editoração eletrônica: Claus Ivo Doering

Os autores são professores efetivos do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, com experiência no ensino das disciplinas de Cálculo oferecidas pelo Departamento. Todos têm se dedicado aos cursos de Pré-Cálculo da UFRGS.

P922 Pré-cálculo / organizado por Claus Ivo Doering, Liana Beatriz Costi Nácul [e] Luisa Rodríguez Doering.– 3. ed. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
140 p. : il. ; 21x25cm

(Série Graduação)

Reimpressão 2018

Inclui respostas selecionadas.

Inclui índice remissivo.

Inclui figuras, gráficos e quadros.

1. Matemática. 2. Cálculo – Pré-cálculo. 3. Álgebra elementar. 4. Funções reais. 5. Geometria analítica. 6. Polinômios. 7. Trigonometria. I. Doering, Claus Ivo. II. Nácul, Liana Beatriz Costi. III. Doering, Luisa Rodríguez Doering.

CDU 517.3

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0182-1

Geometria Analítica e Funções Reais

Alvino Alves Sant'Ana
Liana Beatriz Costi Nácul
Marilaine de Fraga Sant'Ana
Flávia Malta Branco
Maria Paula Gonçalves Fachin
Vânia Kraemer

A necessidade de apresentar modelos que permitam explicar e compreender o mundo físico tem sido um dos grandes fatores motivadores do desenvolvimento da Matemática. Números foram criados para contar e medir, ao passo que desigualdades foram introduzidas para comparar grandezas e funções foram inventadas para expressar dependência entre variáveis.

Inicialmente veremos algumas propriedades dos números reais e em seguida introduzimos conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Atualmente, o uso desses conceitos é bastante comum. Entretanto, na época em que a Geometria Analítica estava sendo desenvolvida, a Geometria e a Álgebra – os dois grandes ramos da Matemática – eram praticamente independentes um do outro. As retas e os círculos pertenciam à Geometria, enquanto que as equações à Álgebra. Usar coordenadas para expressar os pontos de um círculo faz parte do que hoje é conhecido como Geometria Analítica. Nas últimas seções apresentamos as funções reais.

1.1 – NÚMEROS REAIS

Os números reais, suas propriedades e relações são conceitos básicos para o Cálculo. Os reais mais conhecidos são $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, que formam o conjunto dos *números inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$.

Considerando todas as frações $\dfrac{m}{n}$, com m e n números inteiros e $n \neq 0$, com a igualdade definida por $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$, obtemos o conjunto dos *números racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. Note que duas frações com o mesmo denominador serão iguais se, e somente se, tiverem o mesmo numerador, isto é, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{b}$ se, e somente se, $a = c$. Também é verdade que são iguais as frações $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{ak}{bk}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$. No entanto, os números racionais $\dfrac{3}{6}$ e $\dfrac{4}{8}$ são iguais, uma vez que $3 \times 8 = 24 = 6 \times 4$, mas não existe um número inteiro não nulo k para o qual valha $3 \times k = 4$ e $6 \times k = 8$.

Cada número racional $\dfrac{m}{n}$ possui, também, uma representação decimal. Para obtêla, basta efetuar a divisão de m por n. Por exemplo,

$$\frac{1}{4} = 0{,}25, \qquad \frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6},$$

onde a barra acima dos algarismos indica que aquele grupo de algarismos repete-se indefinidamente. Dizemos, nesse caso, que se trata de uma *dízima periódica.*

Reciprocamente, se x for uma dízima periódica, ou possuir uma representação decimal finita, x será um número racional.

Os exemplos a seguir podem ser generalizados para dízimas quaisquer e permitem entender como obter uma fração a partir de uma representação decimal.

Exemplo 1.1. $0{,}25 = \dfrac{2}{10} + \dfrac{5}{100} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}\,.$

Exemplo 1.2. Como $x = 0{,}\overline{142857}$ possui um período de 6 dígitos, multiplicamos por 10^6, para obter $10^6 x = 142857{,}\overline{142857}$. Assim, $10^6 x - x = 142857$, de modo que $(10^6 - 1)x = 142857$ e resulta

$$x = \frac{142857}{10^6 - 1} = \frac{142857}{999999} = \frac{47619}{333333} = \frac{15873}{111111} = \frac{1443}{10101} = \frac{111}{777} = \frac{1}{7}.$$

Regra Geral. $x = 0{,}\overline{c_1 c_2 \ldots c_t} = \dfrac{c_1 c_2 \ldots c_t}{99\ldots 9}$, onde o denominador tem tantos dígitos iguais a 9 quantos forem os algarismos do período (t, nesse caso).

Exemplo 1.3. Como os dois primeiros dígitos da parte decimal de $x = 0{,}41\overline{6}$ não fazem parte do período, multiplicamos x por 10^2 para obter $10^2 x = 41{,}\overline{6} = 41 +\, 0{,}\overline{6} = 41 + \dfrac{6}{9} = 41 + \dfrac{2}{3}$. Logo, $100x = \dfrac{41 \times 3 + 2}{3}$ e, portanto, $x = \dfrac{125}{300} = \dfrac{5}{12}$.

Os números cuja expansão decimal não é finita e nem periódica são denominados *números irracionais.* Por exemplo, o número $2{,}101001000100001\ldots$, onde entendemos que em cada grupo de zeros aparece um zero a mais que no grupo de zeros imediatamente anterior, é um irracional, pois não é uma dízima finita nem periódica. Por razões análogas, também é irracional o número $34{,}67553737737773777773\ldots$.

Observamos que a justificativa de que um número x seja irracional não pode ser feita apresentando algumas (mesmo que muitas!) casas decimais de sua representação decimal.

Apenas para exemplificar, justificaremos a seguir que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Para isso, suporemos que $\sqrt{2}$ seja um número racional e então mostraremos que essa suposição nos levará a uma contradição; portanto, não poderá ser verdadeira.

Suponhamos que existam números inteiros m e n, com $n \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

É claro que podemos supor também que não existam fatores comuns entre m e n: se existissem, simplificaríamos a fração! Decorre, então, que $\sqrt{2}\,n = m$ e, elevando ao quadrado, obtemos $2n^2 = m^2$. Logo, m^2 é um número par e, consequentemente, m também é um número par, ou seja, existe um número inteiro z satisfazendo $m = 2z$.

Segue que $2n^2 = m^2 = (2z)^2 = 4z^2$. Assim, $n^2 = 2z^2$ e, como vimos acima, daí resulta que n é um número par.

Portanto, o número 2 é um fator comum de m e de n, o que é uma contradição, pois tomamos m e n sem fatores comuns. O que nos levou à essa contradição foi supormos que $\sqrt{2}$ seria um número racional. Assim, esta hipótese não pode ser verdadeira e concluímos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

A união dos números racionais com os números irracionais forma o conjunto dos *números reais*, que representamos por $\mathbb{R}$.

Proposição 1.1. *Valem as afirmações seguintes.*

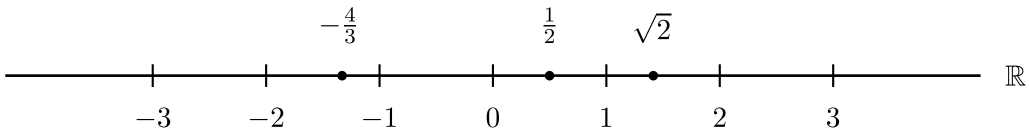
a) O resultado da adição de dois números racionais é um número racional.

b) O resultado da adição de um número racional com um número irracional é um número irracional.

c) O resultado da multiplicação de dois números racionais é um número racional.

d) O resultado da multiplicação de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

Podemos obter uma correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta. Para tanto, escolhemos um ponto arbitrário da reta, que denominamos *origem*, e uma unidade de medida. A origem fica em correspondência com o número 0 (zero). Na semirreta da direita representamos os números reais positivos e, na outra semirreta, os números reais negativos, conforme a figura abaixo. Essa reta, provida da origem e da correspondência com os números reais, costuma ser denominada *reta real*, sendo denotada, também, por $\mathbb{R}$.



Em $\mathbb{R}$, definimos uma relação de ordem da seguinte forma: para quaisquer números reais a e b, dizemos que *a é menor do que b*, e denotamos isso por $a < b$, se, e somente se, $b - a$ for um número positivo; nesse caso, dizemos também que *b é maior do que a*, o que denotamos por $b > a$. Na correspondência com a reta real, $a < b$ significa que a fica à esquerda de b.

Além disso, utilizamos a notação $a \leq b$, que significa que $a < b$ ou $a = b$. De modo análogo, $b \geq a$ significa $b > a$ ou $b = a$. Dados quaisquer números reais a, b e c, a expressão $a < b < c$ significa que $a < b$ e $b < c$.

É possível provar que entre dois números reais distintos quaisquer sempre existem números racionais e, também, números irracionais. Por exemplo, dados os números reais $a = 0{,}123\overline{12}$ e $b = 0{,}123\overline{4}$, temos $a < b$, portanto, é possível encontrar um número racional r e um irracional t para os quais vale que $a < r < t < b$. De fato, escolhendo o racional $r = 0{,}123\overline{432}$ e o irracional $t = 0{,}12344393393339\ldots$, a desigualdade é válida.

Algumas propriedades de desigualdades são análogas a propriedades de igualdades, por exemplo, as seguintes.

Proposição 1.2. *Valem as afirmações seguintes.*

a) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.
b) Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.
c) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Entretanto, devemos prestar atenção ao multiplicarmos os dois lados de uma desigualdade por uma constante não nula. Temos duas situações distintas, uma para constantes positivas e outra para constantes negativas, conforme a proposição seguinte.

Proposição 1.3. *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, de $a < b$ decorre*

$$ac < bc \text{ se } c > 0 \qquad \text{e} \qquad ac > bc \text{ se } c < 0.$$

Assim, uma desigualdade troca de sentido quando multiplicamos os dois lados por uma constante negativa.

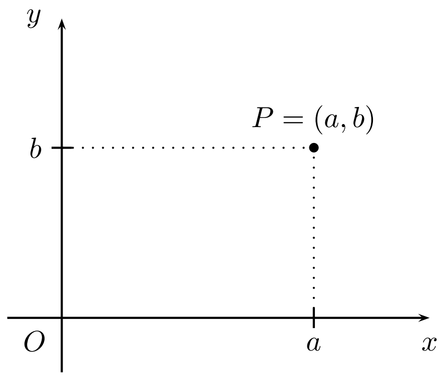
A relação de ordem em $\mathbb{R}$ nos permite definir intervalos, o que fazemos a seguir. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos os intervalos conforme o quadro a seguir.

Notação simbólica	Notação de conjuntos	Representação geométrica	Classificação
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$		finito: aberto
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\}$		finito: fechado
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\}$		finito: semiaberto

Notação simbólica	Notação de conjuntos	Representação geométrica	Classificação
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\}$		finito: semiaberto
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq b\}$		infinito: fechado
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\}$		infinito: aberto
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x\}$		infinito: fechado
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x\}$		infinito: aberto
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$		infinito: aberto

Da mesma forma que representamos os números reais por meio de pontos em uma reta, podemos representar pares ordenados de números reais por meio de pontos em um plano.

Para tanto, construímos um sistema de coordenadas para o plano, denominado *sistema de coordenadas retangulares*, desenhando duas retas perpendiculares, uma horizontal e outra vertical, que se cortam em seus pontos marcados com zero. Esse ponto é denominado a *origem* do sistema de coordenadas e é denotado por O. À reta horizontal damos o nome de *eixo horizontal*, *eixo* x ou *eixo das abscissas* e a reta vertical recebe o nome de *eixo vertical*, *eixo* y ou *eixo das ordenadas*.

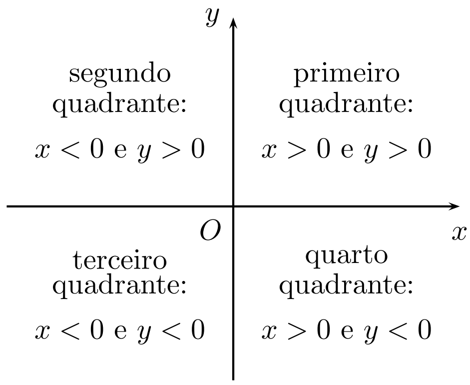


As coordenadas são identificadas por pontos marcados nesses dois eixos, mantendo-se em cada eixo uma mesma medida de distância entre os pontos identificados com os números inteiros. O *semieixo positivo* x está à direita da origem e o *semieixo negativo* x à esquerda, enquanto que o *semieixo positivo* y está acima da origem e o *semieixo negativo* y abaixo.

Consideremos, agora, um ponto P qualquer do plano. Desenhamos um segmento de reta, paralelo ao eixo y, de P até o eixo x, identificando esse ponto de interseção por a. Analogamente, desenhamos um outro segmento de reta, dessa vez paralelo ao eixo x, de P até o eixo y, identificando por b esse ponto de interseção. Os números a e b assim determinados são denominados a *coordenada x*, ou a *abscissa* de P e a *coordenada y*, ou *ordenada* de P. Também dizemos que P tem coordenadas (a, b), como na figura da página anterior. Note que o ponto $(0, 0)$ corresponde à origem O, que os pontos do tipo $(x, 0)$ estão no eixo x e que os pontos do tipo $(0, y)$ estão no eixo y.

Essa correspondência entre o ponto P e suas coordenadas é uma correspondência biunívoca entre todos os pontos do plano e todos os pares ordenados de números reais. De fato, para cada ponto P do plano temos um único par ordenado que representa suas coordenadas e, da mesma forma, a cada par ordenado de números reais podemos associar um único ponto P com tais coordenadas.

Os dois *eixos coordenados*, ou seja, o eixo x e eixo y, dividem o plano em quatro quadrantes, cuja caracterização é dada pelos sinais das coordenadas.



O plano, munido desse sistema de coordenadas, costuma ser denominado *plano coordenado*, *plano xy* ou, ainda, *plano cartesiano*.

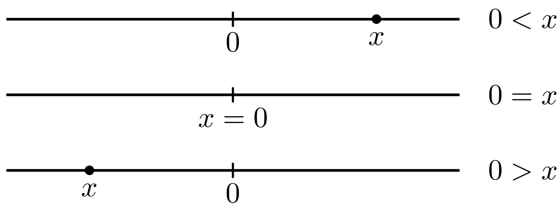
1.2 – VALOR ABSOLUTO

Definimos o *valor absoluto* ou *módulo* de x, que denotamos por $|\,x\,|$, da seguinte maneira:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

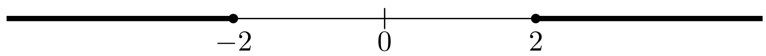
Observe que, se quisermos obter, para cada número real x, a distância entre x e a origem, devemos considerar os casos $x > 0, x = 0$ e $x < 0$. Nos dois primeiros casos, dizemos que a distância entre 0 e x é o próprio x. No terceiro caso, a distância é $-x$. Portanto, geometricamente, $|\,x\,|$ representa a distância entre 0 e x.

Vejamos alguns resultados que decorrem dessa interpretação geométrica do valor absoluto.



Exemplo 1.4. Determinemos todos os números reais x para os quais $|x| \geq 2$.

Para isso, marcamos na reta real os pontos 2 e -2, para os quais a distância até a origem é 2, ficando, então, fácil verificar que, para a distância entre x e 0 ser maior que 2, x deve estar à esquerda de -2 ou à direita de 2, como indica a figura.

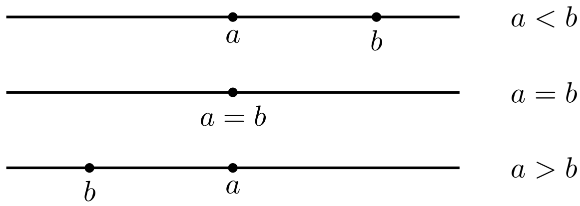


Portanto, $\{x \in \mathbb{R}\,; |\,x\,| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Consequentemente, se quisermos determinar todos os valores reais de x para os quais $|\,x\,| < 2$, teremos como resposta o intervalo complementar $(-2, 2)$.

Em geral, dado $a > 0$, de maneira análoga ao que acabamos de fazer para $a = 2$, obtemos

$$\{x \in \mathbb{R}\,; |\,x\,| \geq a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}\,; |\,x\,| < a\} = (-a, a). \tag{1.1}$$

Para encontrarmos a distância entre dois números reais a e b quaisquer, devemos analisar três situações possíveis para pontos a e b arbitrários da reta real, a saber, $a < b, a = b$ ou $a > b$.



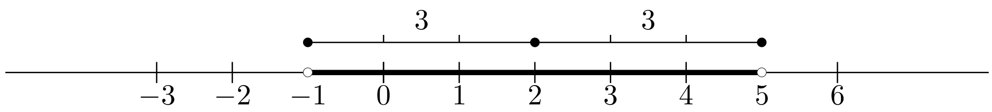
No primeiro caso, como $b - a > 0$, temos $|\,b - a\,| = b - a$; no segundo caso, como $b - a = 0$, temos $|\,b - a\,| = 0 = b - a$; finalmente, no terceiro caso, como $b - a < 0$, temos $|\,b - a\,| = -(b - a) = a - b$. Assim, em qualquer caso, temos

$$|\,b - a\,| = \text{distância entre } a \text{ e } b.$$

Exemplo 1.5. Escrevamos o conjunto $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |\, t-2\,| < 3\}$ como um intervalo, ou união de intervalos.

Pela interpretação acima, esse conjunto consiste em todos números reais t para os quais a distância ao número real 2 é menor do que 3.

Considerando uma régua de comprimento 3, com uma das extremidades fixada em $a = 2$, os números reais t que são atingidos com essa régua estão a uma distância menor do que o comprimento da régua, ou seja, menor do que 3.



Obtemos, assim, a resposta $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |\,t-2\,| < 3\} = (-1, 5)$.

Como poderíamos obter esse resultado algebricamente? Basta usarmos (1.1) com x substituído por $t-2$, como segue.

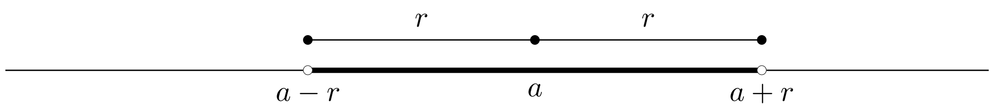
$$|\,t-2\,| < 3 \iff -3 < t-2 < 3 \iff -1 < t < 5.$$

Portanto, novamente concluímos que o conjunto solução é o intervalo $(-1, 5)$.

Generalizando o que foi feito no exemplo acima, vemos que, fixado um número real a e dado $r > 0$, os reais t que estão a uma distância de a menor do que r formam o intervalo aberto $(a-r, a+r)$. Assim,

$$\{t \in \mathbb{R}\,;\, |\,t-a\,| < r\} = (a-r, a+r),$$

como se observa na figura.



Terminamos esta seção relacionando o valor absoluto com a raiz quadrada de um número real.

Para um número positivo arbitrário a, o símbolo $\sqrt{a}$ representa o número real *positivo* cujo quadrado é a, ou seja,

$$\sqrt{a} = b \quad \iff \quad b \geq 0 \quad \text{e} \quad b^2 = a.$$

Por definição, não apenas o número a deverá ser positivo, para que possamos calcular sua raiz quadrada, mas também o resultado obtido ao calcularmos tal raiz deverá ser positivo.

Observações:

a) O resultado obtido ao calcularmos uma raiz quadrada será sempre um único número real. Assim, a afirmação $\sqrt{4} = \pm 2$ não está correta! O correto é afirmarmos que $\sqrt{4} = 2$.

b) As igualdades $x^2 = 4$ e $x = \sqrt{4}$ não são equivalentes, pois, a primeira é satisfeita pelos números reais 2 e -2 e a segunda é satisfeita apenas pelo número real 2.

Para um número real arbitrário x, teremos sempre que $x^2 \geq 0$, portanto, faz sentido calcularmos $\sqrt{x^2}$. O que obteremos nesse caso?

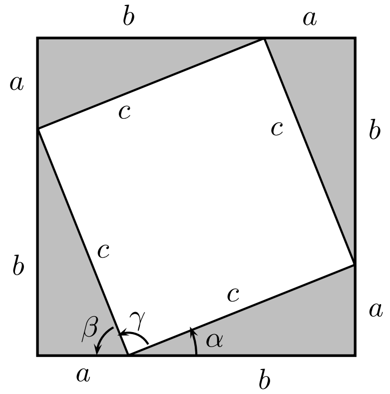
Sabemos que os números reais x e $-x$, são os únicos que, quando elevados ao quadrado, resultarão em x^2. Assim, ambos satisfazem *uma* das condições exigidas na definição dada acima. A raiz quadrada procurada será, então, o próprio x, se $x \geq 0$, ou $-x$, se $x < 0$. Portanto, pela definição de valor absoluto, podemos afirmar que

$$\sqrt{x^2} = |\,x\,|\,.$$

1.3 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO PLANO

Inicialmente provaremos o Teorema de Pitágoras sem fazer uso de coordenadas.

Teorema 1.4 (Teorma de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*



Demonstração. Considere um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b e a hipotenusa mede c. Vamos denotar por α o ângulo oposto ao cateto que mede a e por β o ângulo oposto ao cateto b. Lembre que, por se tratar de um triângulo retângulo, temos $\alpha + \beta = 90°$. Agora forme um quadrado cujo lado mede $a + b$, dispondo quatro réplicas do triângulo nos cantos desse quadrado, como mostra a figura ao lado.

Observe que, assim, obtemos um quadrilátero de lados c. De fato, esse quadrilátero é um quadrado, pois, denotando por γ qualquer um de seus ângulos internos, vemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ e, portanto, γ é um ângulo reto. A área do quadrado maior é igual a quatro vezes a área do triângulo inicial mais a área do quadrado menor, ou seja,

$$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 \iff a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \iff a^2 + b^2 = c^2,$$

demonstrando o Teorema de Pitágoras. $\square$

A fórmula da distância entre dois pontos do plano cartesiano é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

Vamos considerar dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ no plano xy. O segmento que une esses pontos e cujo comprimento, que será identificado por d, nos dá a distância entre eles, é a hipotenusa de um triângulo retângulo. De acordo com a posição dos pontos dados, os catetos desse triângulo medem $x_2 - x_1$ ou $x_1 - x_2$ e $y_2 - y_1$ ou $y_1 - y_2$. Ou, simplesmente, $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$.

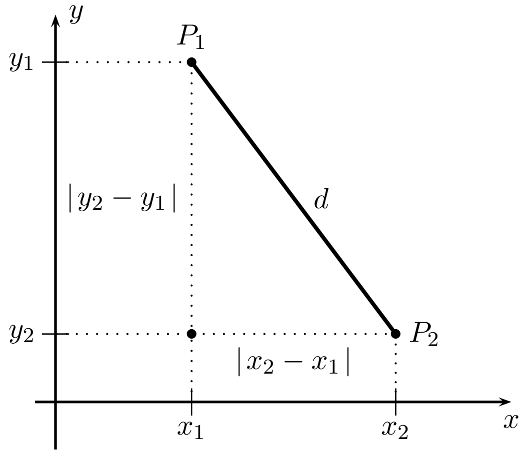
Observe que

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

e

$$|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2,$$

independentemente da posição ocupada pelos pontos P_1 e P_2 no plano xy. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos a fórmula da distância entre dois pontos, a saber,



$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \iff d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

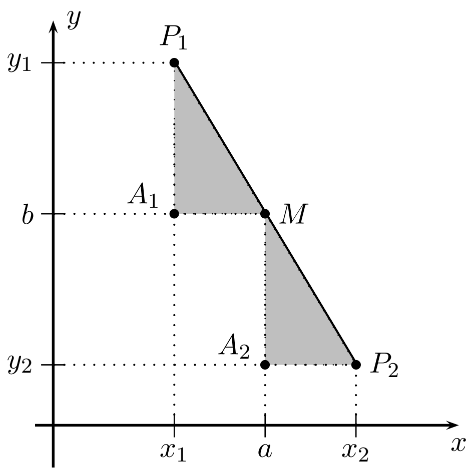
como ilustra a figura acima.

Dados dois pontos P_1 e P_2 no plano xy, pode-se perguntar quais são as coordenadas do ponto médio do segmento que os une. Primeiramente vamos considerar que esses pontos estão sobre o eixo x, isto é, $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$, sendo $x_1 < x_2$. A metade desse segmento mede $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ e, portanto, a coordenada x do ponto médio é dada por

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2 + x_1).$$

Se consideramos $x_2 < x_1$ também obtemos a mesma coordenada x para o ponto médio do segmento que une P_1 e P_2. Isso significa que, independentemente da posição desses pontos, a média aritmética de suas coordenadas define o ponto médio do segmento.

Consideremos, agora, dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ quaisquer do plano xy e seja $M = (a, b)$ o ponto médio do segmento definido por tais pontos. A partir de P_1, P_2 e M definimos os pontos $A_1 = (x_1, b)$ e $A_2 = (a, y_2)$, conforme figura.



Podemos verificar que o triângulo de vértices A_1, P_1 e M é semelhante ao triângulo de vértices A_2, M e P_2 e que, portanto, denotando por d a distância entre os pontos P_1 e P_2, temos

$$\frac{a - x_1}{d/2} = \frac{x_2 - a}{d/2} \iff \frac{2a}{d} = \frac{x_1 + x_2}{d}$$

$$\iff a = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

De forma análoga pode-se mostrar que

$$b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Observe que a é o ponto médio de x_1 e x_2, no eixo x, e que b é o ponto médio de y_1 e y_2, no eixo y.

Assim, concluímos que o ponto médio $M = (a, b)$ do segmento de reta que une dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano é dado por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Exemplo 1.6. Calculemos a distância entre os pontos $P_1 = (-2, 3)$ e $P_2 = (2, 1)$, bem como as coordenadas do ponto médio do segmento de reta que une esses pontos.

Pelo visto, a distância entre esses dois pontos é dada por

$$d = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

e o ponto médio do segmento que une esses pontos é dado por

$$M = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) = (0, 2).$$

Faça um esboço no plano xy marcando esses pontos P_1 e P_2 e verifique, geometricamente, as coordenadas do ponto médio do segmento determinado por esses pontos.

1.4 – COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA NO PLANO

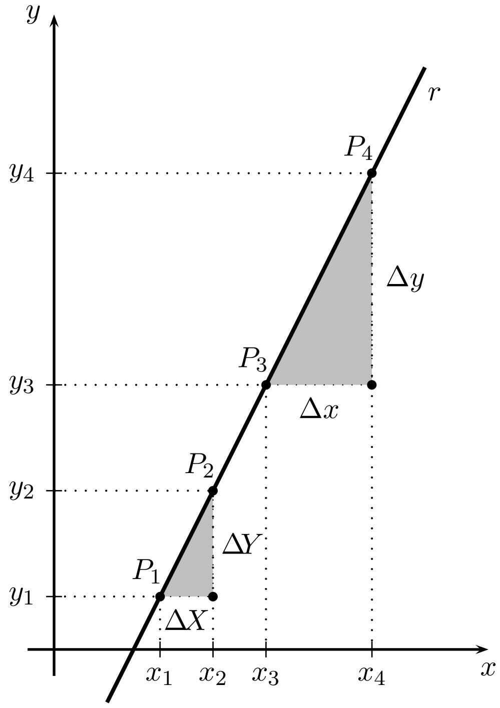
A cada reta não vertical do plano está associado um número que especifica sua direção, denominado *coeficiente angular*, ou então, *inclinação*, *declividade*, ou ainda, *parâmetro angular* da reta. Esse número diz quantas unidades de crescimento (ou decaimento) vertical ocorrem quando fazemos uma variação de uma unidade na horizontal, da esquerda para a direita.

Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o coeficiente angular da reta que contém esses dois pontos (e contém também o segmento que os une) é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

É comum simbolizar a variação na coordenada x por ΔX e a variação em y por ΔY. Assim, podemos reescrever o coeficiente angular de uma reta como

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



É importante salientar que cada reta possui um único coeficiente angular m e essa constante pode ser determinada por meio de quaisquer dois pontos sobre a reta. Podemos observar esse fato através da figura ao lado, onde temos quatro pontos sobre a mesma reta.

Considerando-se os pontos P_1 e P_2, temos $m = \Delta Y / \Delta X$. Por outro lado, se consideramos os pontos P_3 e P_4 concluímos que $m = \Delta y / \Delta x$. Entretanto, os dois triângulos retângulos determinados por esses pontos são semelhantes, o que nos permite concluir que as duas razões são iguais, ou seja,

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

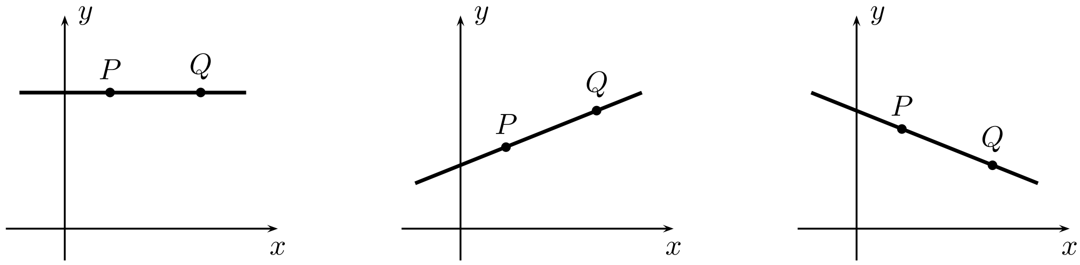
Observe, também, que a ordem em que tomamos os pontos P_1 e P_2 não faz diferença no cálculo de m, já que

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Entretanto, como já foi dito, é preciso manter a coerência com a escolha feita: uma vez escrito o numerador, só existe uma maneira correta de escrever o denominador.

Vamos estudar, agora, como identificar retas através do sinal do seu coeficiente angular. Observe as retas das figuras dadas. Na primeira, temos uma reta horizontal. Podemos verificar que dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ quaisquer nessa reta têm a mesma ordenada, ou seja, $y_1 = y_2$. Assim, o coeficiente angular dessa reta é nulo, pois

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$



Na segunda figura, temos uma reta inclinada para cima na direita. Considerando dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ nessa reta, com $x_2 > x_1$, observamos que $y_2 > y_1$. Dessa forma, $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ e $\Delta y = y_2 - y_1 > 0$. Assim, o coeficiente angular dessa reta é positivo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Já na terceira figura, temos uma reta inclinada para baixo na direita. Nesse caso, se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ são dois pontos distintos nessa reta, com $x_2 > x_1$, então $y_2 < y_1$ e, portanto, $\Delta x > 0$ e $\Delta y < 0$. Assim, obtemos um coeficiente angular negativo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

A inclinação de uma reta qualquer também pode ser determinada considerando-se dois pontos dessa reta tais que a diferença entre as suas abscissas seja 1. Por exemplo, tomando $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_1 + 1, y_2)$, o sinal do coeficiente angular da reta que contém esses dois pontos será dado pelo sinal de $y_2 - y_1$, pois

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 + 1 - x_1} = y_2 - y_1.$$

Dessa forma, fica fácil observar que $m = 0$ se a reta é horizontal, $m > 0$ se a reta é inclinada para cima, à direita, e $m < 0$ se a a reta é inclinada para baixo, à direita.

Exemplo 1.7. Determinemos o coeficiente angular da reta que contém os pontos $P_1 = (-2, 0)$ e $P_2 = (0, 3)$.

Pelo visto, o coeficiente angular é dado por $m = \dfrac{3 - 0}{0 - (-2)} = \dfrac{3}{2}$.

1.5 – EQUAÇÃO DE UMA RETA NO PLANO

Vamos iniciar esta seção apresentando um problema que foi bastante discutido e estudado não faz muito tempo.

Na década de 1990 houve uma discussão sobre a reforma do sistema previdenciário. Para efeitos da aposentadoria de um trabalhador desse sistema, foi estipulada uma combinação entre o seu tempo efetivo de contribuição e a sua idade, de acordo com uma regra, denominada "Fórmula 95". De acordo com essa regra, o trabalhador teria direito à sua aposentadoria quando a soma da sua idade com o número dos anos em que contribuiu comprovadamente para o sistema previdenciário fosse igual a 95.

Segundo essa regra, com que idade um trabalhador poderia se aposentar, considerando que ele iniciou sua vida profissional aos 25 anos e que sempre contribuiu regularmente para o sistema previdenciário? Para responder essa pergunta, denotemos por y a idade procurada. Dessa forma, o número de anos trabalhados deve ser $y - 25$ e, de acordo com a regra, devemos ter a soma de y com $y - 25$ igual a 95, ou seja,

$$y + (y - 25) = 95 \iff 2y = 95 + 25 \iff y = \frac{120}{2} \iff y = 60.$$

Portanto, um trabalhador que tivesse iniciado sua vida ativa aos 25 anos, poderia se aposentar aos 60 anos, desde que tivesse trabalhado durante 35 anos e contribuído regularmente para o sistema previdenciário.

De acordo com a mesma regra, se o trabalhador começasse sua vida profissional aos 35 anos, poderia se aposentar com 65 anos, pois

$$y + (y - 35) = 95 \iff 2y = 95 + 35 \iff y = \frac{130}{2} \iff y = 65.$$

Trabalhamos acima com igualdades denominadas equações. Em geral, uma equação é uma igualdade que envolve uma ou mais grandezas desconhecidas.

Uma equação *de primeiro grau a uma variável* é aquela que pode ser escrita na forma $ay + b = 0$, onde a e b são constantes, $a \neq 0$ e y é a variável ou incógnita. Na equação acima utilizamos y para representar a variável, mas poderíamos ter escolhido qualquer outro símbolo como, por exemplo, a letra x, que é a mais usual. Lembre que o mais importante é manter a coerência, não utilizando mais do que um símbolo para a mesma incógnita.

As equações de primeiro grau a uma variável são de fácil resolução, conforme vimos nos casos acima. De fato,

$$ay + b = 0 \Longleftrightarrow ay = -b \Longleftrightarrow y = -\frac{b}{a}\,.$$

Como um exemplo, observe que a equação $3x - 40 = 104$ pode ser resolvida assim:

$$3x - 40 = 104 \Longleftrightarrow 3x = 104 + 40 \Leftrightarrow x = 48\,.$$

Voltando ao problema inicial, observamos que a idade de aposentadoria de um trabalhador varia de acordo com a idade com a qual ele iniciou sua atividade profissional; conforme vimos,

$$\begin{array}{lcl} \text{início aos 25 anos} & \Longrightarrow & \text{aposentadoria aos 60 anos;} \\ \text{início aos 35 anos} & \Longrightarrow & \text{aposentadoria aos 65 anos.} \end{array}$$

Como a idade de início da vida profissional é uma variável, vamos representá-la por x; continuaremos utilizando y para representar a idade com a qual o trabalhador pode se aposentar, segundo a "Fórmula 95". Desse modo, temos que o número de anos trabalhados é expresso por $y - x$ e a fórmula pode ser escrita como

$$y + (y - x) = 95 \Longleftrightarrow 2y = x + 95 \Longleftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{95}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{2} - y + \frac{95}{2} = 0.$$

Observe que essa equação é diferente das vistas nos exemplos anteriores, pois estabelece uma relação entre duas variáveis. Note que o par de números $x = 25$ e $y = 60$ satisfaz a equação $y = \dfrac{x}{2} + 47{,}5$, o mesmo acontecendo com $x = 35$ e $y = 65$. Qual o valor de y, se $x = 29$? E se $x = 30$? Verifique se existe outro par de números que satisfaz a equação acima. Quantos pares (x, y) satisfazem essa equação?

Vejamos um outro exemplo. Uma indústria paga por hora, a cada operário de um determinado setor produtivo, um valor fixo de 5 reais e mais um adicional de 70 centavos por unidade produzida durante a hora. Encontre a equação que fornece o salário-hora de um operário desse setor, que representaremos pela variável y, em termos do número x de unidades produzidas, por hora, nesse setor.

A solução é dada pela equação $y = 5 + 0{,}7x$. Note que y depende de x; assim, poderíamos escrever $y(x)$ em lugar de y, ficando mais clara a ideia de dependência.

E se o fixo mudasse para 7 reais por hora? E se, além disso, a unidade produzida fosse cotada em 1 real? Esses fatos mudariam a equação? Usando o que já foi estudado nas seções anteriores, tente estabelecer uma maneira de visualizar as respostas encontradas.

Nosso objetivo, a partir de agora, é relacionar equações a uma e duas variáveis com o ponto de vista geométrico de retas que vimos na seção anterior. É assim que vamos responder as questões propostas acima. O que queremos, na verdade, é estabelecer uma equação que identifique uma determinada reta no plano. Assim, dada uma reta poderemos representá-la analiticamente por meio de uma equação e também, dada tal equação, poderemos representá-la geometricamente no plano xy. Essa representação geométrica é conhecida também como o *gráfico* da equação da reta.

Vamos começar respondendo a seguinte pergunta: que condições as coordenadas de um ponto $Q = (x, y)$ devem satisfazer para que esse ponto pertença a uma reta r dada?

Iniciamos com as retas verticais, que têm a característica de que todos os seus pontos possuem a mesma abscissa. Assim, se a reta corta o eixo x num ponto $(x_0, 0)$, então todos os pontos que pertençam a essa reta também têm abscissa x_0, logo o ponto $Q = (x, y)$ pertence a essa reta se, e somente se, $x = x_0$, o que define a equação dessa reta vertical.

$$\text{Equação de reta vertical passando por } P_0 = (x_0, y_0): \qquad x = x_0$$

De maneira análoga, podemos pensar nas retas horizontais, em que todos pontos possuem a mesma ordenada. Dessa forma, se a reta horizontal passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, então seus pontos podem possuir qualquer abscissa, mas precisam ter ordenada y_0, ou seja, um ponto $Q = (x, y)$ do plano pertence a essa reta se, e somente se, $y = y_0$. Essa é a equação procurada.

$$\text{Equação de reta horizontal passando por } P_0 = (x_0, y_0): \qquad y = y_0$$

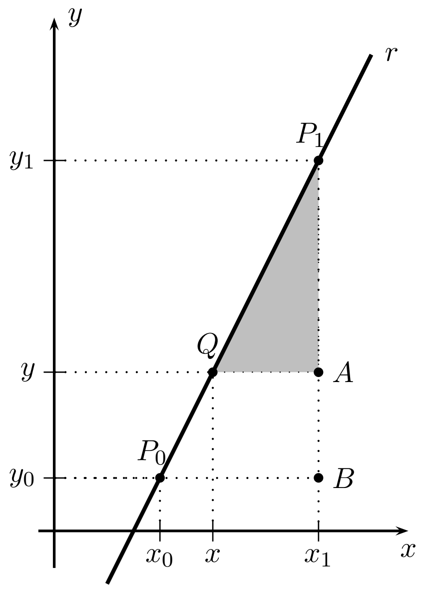
Vamos considerar, agora, uma reta r que não seja vertical nem horizontal e tomemos dois pontos distintos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ pertencentes a essa reta r, conforme figura na página seguinte. A condição necessária e suficiente para que um ponto Q, distinto de P_0, pertença a essa reta r é que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

ou seja, que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{ declividade da reta } r.$$

De fato, se juntarmos aos pontos P_0, P_1 e Q os pontos $A = (x_1, y)$ e $B = (x_1, y_0)$, ficam determinados dois triângulos, T_1, com vértices P_0, B e P_1, e T_2, com vértices Q, A e P_1, que são retângulos (por possuírem catetos paralelos aos eixos coordenados).



Se o ponto Q pertence à reta r, então os triângulos T_1 e T_2 são semelhantes, conforme pode ser observado na figura, de modo que $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Reciprocamente, se $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, então, como esta proporcionalidade ocorre entre catetos de triângulos retângulos, tais triângulos são semelhantes. Portanto, o ângulo oposto ao lado QA no triângulo T_2 deve ser igual ao ângulo oposto ao lado P_0B no triângulo T_1.

Assim, a reta que passa pelos pontos P_1 e Q é igual à reta que passa por P_1 e P_0. Logo, o ponto Q pertence à reta r.

Notemos que a igualdade $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é satisfeita por todos os pontos da reta r distintos de P_0. Porém, todos os pontos que satisfazem essa igualdade também devem satisfazer a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, sendo esta última satisfeita inclusive pelo ponto P_0. Por outro lado, todos os pontos (x, y) que satisfazem a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, com $x \neq x_0$, portanto, distintos de P_0, satisfazem também a igualdade $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e, consequentemente, pertencem à reta r.

Assim, todos os pontos (x, y) da reta r, e apenas estes, satisfazem a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, que será, então, uma equação da reta r. Como vimos anteriormente, a expressão $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é a inclinação da reta. Se a substituirmos por m nessa equação da reta, obtemos a *forma ponto-inclinação* da equação da reta.

Equação de reta passando por $P_0 = (x_0, y_0)$ com inclinação m:	$y - y_0 = m(x - x_0)$

Observe que a equação da reta horizontal pode ser obtida a partir da forma ponto-inclinação, pois ela passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ com inclinação $m = 0$, resultando

$y - y_0 = 0$, ou seja, $y = y_0$.

A equação da reta que passa pelo ponto $P = (0, b)$ do eixo y com inclinação m é dada por

$$y - b = m(x - 0) \Longleftrightarrow y = mx + b.$$

Dizemos que $y = mx + b$ é a *equação reduzida* de uma reta. Qualquer reta que não seja vertical admite uma equação desse tipo. O ponto de interseção b da reta com o eixo y é denominado *coeficiente linear* ou *parâmetro linear* da reta.

Consideremos, agora, a *equação geral de primeiro grau a duas variáveis*

$$Ax + By + C = 0,$$

com A, B e C constantes reais, mas tais que A e B não sejam simultaneamente nulos. Essa é a forma geral de uma equação de primeiro grau com duas variáveis e é denominada *equação geral da reta*, de acordo com o resultado seguinte.

Proposição 1.5. *Toda equação geral de primeiro grau a duas variáveis representa uma reta. Reciprocamente, toda reta possui uma equação dessa forma.*

Demonstração. De fato, seja $Ax + By + C = 0$ uma equação geral de primeiro grau a duas variáveis.

- Se $B = 0$, então $A \neq 0$ e, nesse caso, $x = -\dfrac{C}{A}$, que é a equação de uma reta vertical.
- Se $A = 0$ então $B \neq 0$ e, nesse caso, $y = -\dfrac{C}{B}$, que é a equação de uma reta horizontal.
- Se ambos A e B são não nulos, podemos escrever $By = -Ax - C$ ou, equivalentemente,

  $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

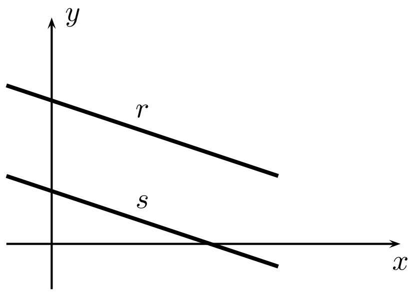
  que é a equação reduzida de uma reta com coeficiente angular $m = -\dfrac{A}{B}$ e coeficiente linear $b = -\dfrac{C}{B}$.

Reciprocamente, toda reta do plano pode ser representada por uma equação na forma geral. De fato, temos três situações.

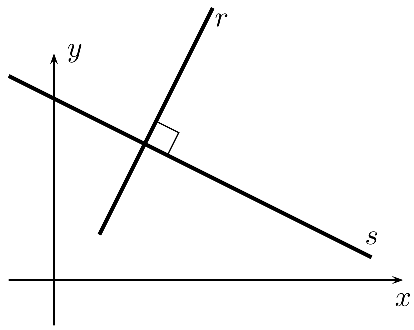
- Reta vertical: a equação $x = x_0$ dessa reta pode ser escrita como $1x + 0y - x_0 = 0$, ou seja, basta considerar $A = 1$, $B = 0$ e $C = -x_0$.

- Reta horizontal: a equação $y = y_0$ dessa reta pode ser escrita como $0x+y-y_0 = 0$, ou seja, basta considerar $A = 0$, $B = 1$ e $C = -y_0$.
- Demais retas: uma reta passando por um ponto $P = (x_0, y_0)$ com inclinação m tem sua equação dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$ e essa equação pode ser reescrita como $-mx + y + (mx_0 - y_0) = 0$, que é a equação na forma geral, com $A = -m$, $B = 1$ e $C = mx_0 - y_0$.

Dessa forma, concluímos a demonstração da proposição. □



Retas Paralelas



Retas Perpendiculares

Valem os dois resultados a seguir; as demonstrações são deixadas como exercícios.

Proposição 1.6. *Consideremos duas retas quaisquer que não sejam verticais.*

a) As retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.

b) As retas são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

De acordo com essas condições, se duas retas r e s têm equações reduzidas dadas por $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$, respectivamente, então

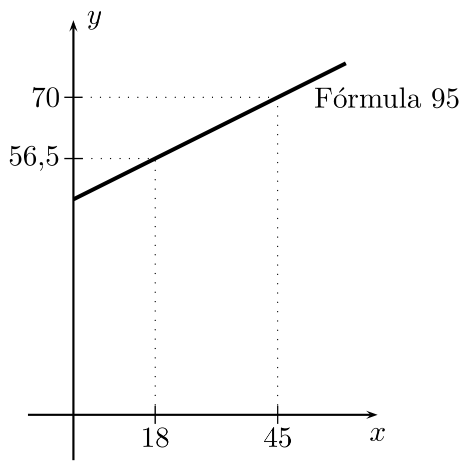
$$r \parallel s \iff m_1 = m_2 \qquad\qquad r \perp s \iff m_1 = -\frac{1}{m_2} \tag{1.2}$$

Terminemos esta seção voltando ao nosso problema inicial, que apresentava a "Fórmula 95". Lembramos que um trabalhador que inicia sua vida profissional aos 25 anos pode se aposentar aos 60 ou, se iniciar aos 35, pode se aposentar aos 65. Vimos que os pares $(25, 60)$ e $(35, 65)$ satisfazem essa fórmula, dada pela equação

$$y = \frac{x}{2} + 47{,}5$$

conforme vimos à p. 23.

Observe que essa equação representa uma reta com inclinação $m = 1/2$, identificada como Fórmula 95 na figura ao lado, que nos mostra o gráfico dessa reta. No eixo horizontal x representamos a idade inicial de um trabalhador regularmente inserido no sistema previdenciário e, no eixo vertical y, a idade apta para o trabalhador se aposentar.



Supondo que a idade mínima para o início da vida profissional com contribuição previdenciária seja de 18 anos e que aos 70 o trabalhador deva se aposentar compulsoriamente, qual será o intervalo de idade com que um trabalhador deve iniciar sua vida profissional a fim de se aposentar "integralmente" segundo o plano previdenciário? A resposta, o intervalo $[18, 45]$, fica clara quando analisamos o gráfico acima.

Podemos também observar que, iniciando aos 18 anos, a idade mínima para a correspondente aposentadoria integral é de 56 anos e meio.

1.6 – CÍRCULOS OU CIRCUNFERÊNCIAS

Uma aplicação direta da fórmula da distância entre dois pontos num plano, vista na Seção 1.3, consiste no cálculo da equação de um círculo no plano.

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto dado no plano xy e r é um número real positivo, então definimos o *círculo* ou, então, a *circunferência* $C(P_0, r)$, de centro P_0 e raio r, como o conjunto de todos os pontos do plano xy, cuja distância até o centro P_0 é igual a r.

Assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos, vista na Seção 1.3, podemos encontrar a equação desse círculo $C(P_0, r)$. De fato, um ponto P, de coordenadas (x, y), está no círculo $C(P_0, r)$ se, e somente se, $d(P, P_0) = r$, ou seja,

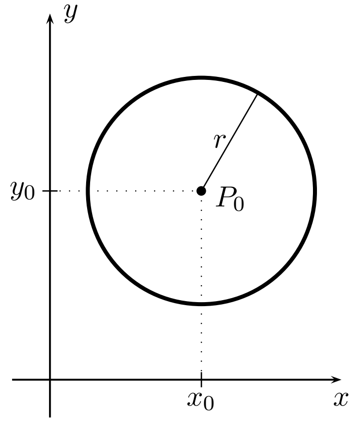
$$
\begin{aligned}
d((x,y),(x_0,y_0)) = r &\iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \\
&\iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,
\end{aligned}
$$

conforme figura na página seguinte. Dizemos que

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

é a *forma padrão* da equação do círculo de raio r e centro $P_0 = (x_0, y_0)$. Observe que todo círculo centrado na origem e de raio r tem sua equação padrão dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Em particular, se $r = 1$, obtemos a equação do *círculo unitário* ou, então, *trigonométrico*, que é, simplesmente, $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 1.8. Determinemos a equação do círculo de centro $P_0 = (-1, 2)$ e raio $\frac{3}{2}$.

Pelo que acabamos de ver, a forma padrão da equação desse círculo é

$$\big(x - (-1)\big)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}.$$

Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

De acordo com o que vimos acima, dado um círculo qualquer, digamos, de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio r, podemos representá-lo pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Será também verdade que a toda equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k \tag{1.3}$$

podemos associar algum círculo? A resposta é não: essa equação só representa um círculo para valores de k maiores do que zero.

Proposição 1.7. *Valem as afirmações seguintes relativas à equação* (1.3).

a) Se $k > 0$, o gráfico dessa equação é o círculo de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio $\sqrt{k}$.

b) Se $k = 0$, essa equação só é satisfeita pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, logo seu gráfico não representa um círculo.

c) Se $k < 0$, então essa equação não representa uma curva, pois não existem pontos no plano que satisfaçam essa condição.

Desse modo, é fácil saber quando a equação (1.3) representa, ou não, um círculo, bastando para isso observar o valor de k. No entanto, se desenvolvemos os quadrados dessa equação, ela pode ser representada por

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - k) = 0.$$

Observe que, dessa forma, temos um caso particular da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

em que $A = B = 1$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = -2y_0$ e $F = x_0^2 + y_0^2 - k$; nesse caso, $D^2 + E^2 - 4AF = 4k > 0$.

A equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com A, B e C não sendo simultaneamente iguais a zero, é denominada *equação geral de segundo grau a duas variáveis.*

Cabe aqui perguntar: tomando $A = B$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, essa equação sempre representa um círculo? Isso poderá ser respondido afirmativamente se conseguirmos reescrever a equação na forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$, com $k > 0$. A boa notícia é que podemos, sim, fazer isso, bastando utilizar um procedimento conhecido como *completamento de quadrados.* Esse método consiste em uma sucessão de operações, a partir da equação dada, tendo por objetivo escrever uma equação equivalente que contenha expressões envolvendo um ou mais quadrados perfeitos.

Nos três exemplos que seguem, exercitaremos essa técnica do completamento de quadrados, sendo que no primeiro deles faremos isto descrevendo detalhadamente cada passo dado; depois consideramos o caso geral.

Exemplo 1.9. Verifiquemos se $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$ representa, ou não, um círculo.

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$	Equação do segundo grau em duas variáveis.
$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = -11$	Agrupamos os termos que dependem da mesma variável, isolando a constante -11 à direita da equação.
$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x) + (y^2 + 8y) = -11$	x^2 representa o quadrado do primeiro termo que, nesse caso, será x, e $-2 \cdot 3 \cdot x$ representa -2 vezes o produto do primeiro termo (x) pelo segundo que, nesse caso, será 3.
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y) = -11 + 9$	Somamos, assim, o quadrado do segundo termo (9) aos dois lados da equação, a fim de não alterá-la.
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y) = -2$	Observe que, agora, os três primeiros termos da equação formam um trinômio quadrado perfeito.
$(x - 3)^2 + (y^2 + 8y) = -2$	Substituímos os três primeiros termos pelo quadrado perfeito equivalente.

$(x-3)^2 + (y^2 + 2 \cdot 4 \cdot y) = -2$	Trabalhando agora com os termos que dependem de y, y^2 nos dá y como primeiro termo e $2 \cdot 4 \cdot y$ nos dá 4 como segundo termo.
$(x-3)^2 + (y^2 + 8y + 16) = -2 + 16$	Somamos o quadrado do segundo termo (16) aos dois lados da equação, novamente temos um trinômio quadrado perfeito.
$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 14$	Substituímos os três termos pelo quadrado perfeito equivalente e obtemos, assim, a equação do círculo na forma padrão.

Como $14 > 0$, temos que a equação obtida representa, efetivamente, o círculo de centro $(3, -4)$ e raio $\sqrt{14}$.

Exemplo 1.10. Escrevamos a equação $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ na forma padrão da equação do círculo.

As igualdades seguintes são equivalentes.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 &= 0 \\ (x^2 + 8x) + (y^2 - 10y) &= -5 \\ (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) &= -5 + 16 + 25 \\ (x+4)^2 + (y-5)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a equação representa o círculo de centro $(-4, 5)$ e raio 6. Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

Exemplo 1.11. Escrevamos a equação $3x^2 + 3y^2 - 9x + 16y - 10 = 0$ na forma padrão da equação do círculo.

As igualdades seguintes são equivalentes.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 9x + 16y - 10 &= 0 \\ (x^2 - 3x) + \left(y^2 + \frac{16}{3}\,y\right) &= \frac{10}{3} \\ \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + \frac{16}{3}\,y + \left(\frac{8}{3}\right)^2\right] &= \frac{10}{3} + \frac{9}{4} + \frac{64}{9} \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{457}{36}$$

Essa equação padrão representa o círculo de centro $\left(\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{457}}{6}$. Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

Vejamos, agora, o caso geral. Consideremos uma equação do segundo grau a duas variáveis, na qual os coeficientes de x^2 e de y^2 são iguais e não nulos e o coeficiente do termo em xy é nulo, portanto, uma equação que pode ser escrita na forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

que satisfaz também as condições $A \neq 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Partindo dessa equação e utilizando o método do completamento dos quadrados, chegaremos à equação padrão do círculo.

Para tanto, basta observar que são equivalentes as seguintes igualdades.

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + A\left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + A\left(y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

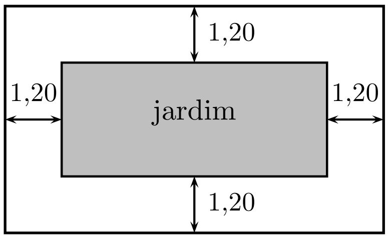
$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

A última igualdade representa o círculo de centro $P_0 = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio dado por $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\,|A|} > 0.$

1.7 – FUNÇÕES REAIS

Na Seção 1.5, vimos que é possível relacionar grandezas por meio de uma equação cujo gráfico é uma reta, como no exemplo da “Fórmula 95”, onde a idade da aposentadoria de um trabalhador dependia de sua idade no início de sua vida profissional. Entretanto, em muitas situações do cotidiano, a dependência entre duas grandezas nem sempre pode ser expressa por meio de uma equação simples como a da reta. A seguir, apresentamos duas dessas situações.

- A Comissão de Obras de um condomínio decide construir uma calçada com 1,20 m de largura, que deverá contornar um jardim retangular, planejado para ter $50\,\text{m}^2$ de área. A área total da calçada a ser construída, que denotaremos por C, depende do comprimento x de um dos lados do jardim. Determine C



  a) se $x = 7{,}5\,\text{m}$ e também se $x = 10\,\text{m}$;

  b) em termos do comprimento x, indicando os possíveis valores para $x \in \mathbb{R}$.

- Um fazendeiro possui 800 m lineares de cerca e pretende utilizá-la toda para cercar um curral retangular. A área A do curral dependerá do comprimento l de um dos lados do mesmo. Determine A

  a) se $l = 10\,\text{m}$;

  b) em termos do comprimento l, indicando os possíveis valores com $l \in \mathbb{R}$.

Em geral, dizemos que uma variável y é uma *função* de uma variável x se, para *cada* valor de x num conjunto D, estiver associado um *único* valor de y. Nesse caso, x é denominada variável *independente* e y variável *dependente*.

No primeiro exemplo acima, o comprimento x de um dos lados do jardim é a variável independente e a área C a ser construída é a variável dependente. Nesse exemplo, temos

$$C = 2{,}4\,x + \frac{120}{x} + 5{,}76$$

e os possíveis valores de x formam o conjunto $D = (0, +\infty)$. Note que não se trata de uma equação da reta, pois temos um x no denominador. No segundo exemplo, o comprimento l de um dos lados do curral é a variável independente e a área A do mesmo é a variável dependente. Nesse exemplo,

$$A = 400\,l - l^2,$$

sendo l um número que pode tomar qualquer valor entre 0 e 400, isto é, os possíveis valores de l formam o conjunto $D = (0, 400)$. Note que, novamente, não se trata de uma equação da reta, pois temos um l ao quadrado.

Com a notação

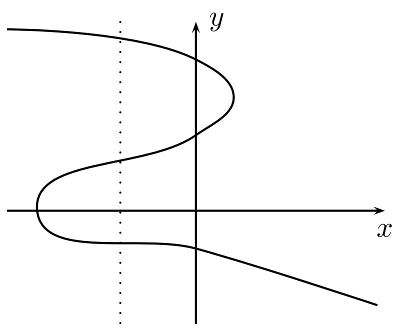
$$y = f(x),$$

que é lida "y é igual a f de x", expressamos o fato de que y é uma função de x e que o nome dessa função é f.

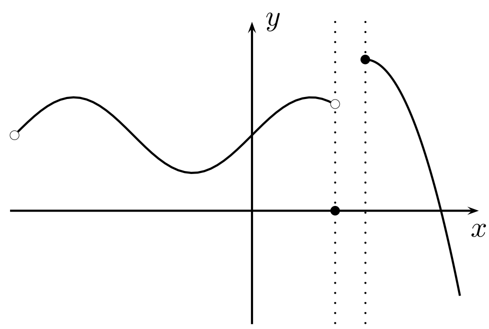
O conjunto D, formado por todos os possíveis valores que a variável independente x de f pode tomar, é denominado *domínio* de f e, aquele formado por todos os valores alcançados pela variável dependente y, é denominado *imagem* de f. O domínio e a imagem de uma função f são denotados por $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$, respectivamente. Observamos que, quando o domínio da função f não está explicitado, consideraremos como o domínio de f o chamado *domínio natural* de f, formado por *todos* os valores reais de x para os quais $f(x)$ também é um número real. Ou seja, excluiremos do domínio natural de f apenas aqueles valores de x para os quais $f(x)$ não resulte número real.

Neste texto, trabalharemos com funções cujo domínio é, sempre, um subconjunto de $\mathbb{R}$, geralmente um intervalo, ou uma união de intervalos, e que associam, a cada elemento desse domínio, um único número real. Essas funções são denominadas funções *reais de uma variável real.* Usa-se a notação $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ para indicar que f é uma função cujo domínio é o conjunto D e que, a cada elemento desse domínio, associa um número real.

O *gráfico* de uma função f é a representação, no plano coordenado xy, de todos os pares (x, y) para os quais $y = f(x)$, com x percorrendo $\text{Dom}(f)$.



Não é gráfico de função.



É gráfico de função.

Podemos representar uma função apenas pelo seu gráfico. Por exemplo, o resultado de um eletrocardiograma é um gráfico que mostra a atividade de um coração como uma função do tempo. O que realmente interessa aos médicos são os padrões de repetição que ali aparecem, e esses são mais facilmente detectados no gráfico do que por meio de uma fórmula. Além disso, dificilmente teríamos uma fórmula para expressar exatamente tal atividade.

Tabelas também aparecem naturalmente em algumas situações. É comum encontrarmos nos jornais tabelas apresentando, para cada dia do mês, a cotação que o dólar atingiu no fechamento do dia. Trata-se de um exemplo de função, na qual o dia é a variável independente e a cotação do dólar a variável dependente.

As funções também podem ser apresentadas verbalmente, ou por meio de um algoritmo. Em alguns casos, essa é a única maneira de fazê-lo, como ocorre quando queremos determinar, para cada número inteiro positivo n, qual o enésimo número primo. Nesse caso, não temos uma fórmula geral, porém, utilizando o algoritmo denominado “crivo de Eratóstenes”, podemos encontrar esse enésimo primo.

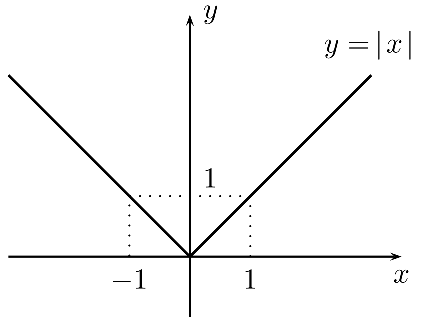
Para que uma curva do plano xy seja o gráfico de uma função, é preciso que se verifique o “teste da reta vertical”, ou seja, cada reta vertical do plano xy deve intersectar a curva em, *no máximo*, um único ponto (ver figuras na página ao lado).

Em algumas situações, é necessário mais de uma fórmula para definir a função desejada. Os dois exemplos seguintes apresentam situações desse tipo.

O primeiro exemplo é o da *função valor absoluto*, ou *função módulo*, dada por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

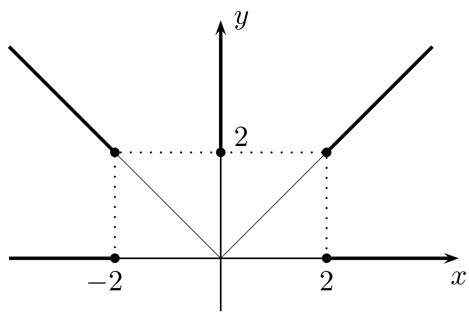
cujo gráfico aparece ao lado.



Se quisermos obter, para algum número real x, a distância entre x e a origem, devemos usar o valor absoluto de x, conforme vimos na Seção 1.2, ou então essa função valor absoluto. Voltemos ao Exemplo 1.4, apresentado à p. 15.

Exemplo 1.12. Determinemos todos os números reais x para os quais $|x|$ é maior do que ou igual a 2.

Para obter todos os números reais x para os quais $|x|$ é maior do que ou igual a 2, podemos usar sua interpretação como distância à origem, conforme visto na Seção 1.2, ou então o gráfico da função valor absoluto.



Usando o gráfico, observamos que tal conjunto é formado pelas abscissas dos pontos do gráfico cuja ordenada y é maior do que ou igual a 2. Verificamos, então, que com $x = 2$ ou $x = -2$, temos como ordenada $y = 2$ e que o conjunto procurado é formado pela união dos intervalos $(-\infty, -2]$ e $[2, +\infty)$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R}\,; |x| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty),$$

utilizando a notação de união de conjuntos.

O segundo exemplo envolve uma situação do cotidiano.

Exemplo 1.13. Em um determinado ano, na página da Receita Federal, o contribuinte interessado em calcular um imposto devido encontrava a tabela seguinte.

Base de cálculo mensal em R$	Alíquota em %	Parcela a deduzir do imposto em R$
Até 1.257,12	—	—
De 1.257,13 até 2.512,08	15,0	188,57
Acima de 2.512,08	27,5	502,58

Essa tabela define uma função I que associa, a cada ganho mensal x, o imposto devido $I(x)$. Novamente, é necessário mais do que uma fórmula para definir essa função. O leitor é convidado a encontrar a expressão de $I(x)$ e interpretar a terceira coluna dessa tabela da Receita Federal no Exercício 1.42.

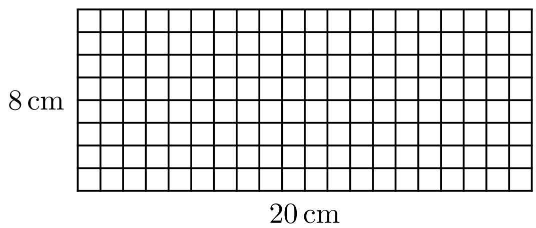
1.8 – UMA FUNÇÃO ÁREA (Leitura complementar)

Nesta última seção abordamos uma questão simples de Geometria Plana, usando uma equação de segundo grau específica, a que descreve uma parábola no plano. Essa equação será estudada no próximo capítulo do ponto de vista de polinômios e o leitor pode verificar (à p. 68) que a equação de segundo grau

$$y = Ax^2 + Dx + F$$

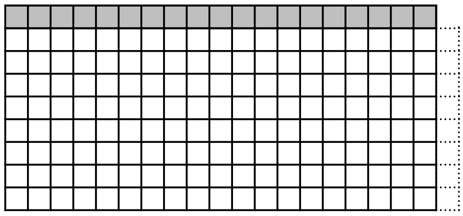
descreve uma parábola cujo vértice tem abscissa $x_v = \dfrac{-D}{2A}$ e cuja concavidade é voltada para baixo no caso $A < 0$. A questão que estudamos pode ser igualmente abordada usando derivadas e, com ferramentas de Cálculo a duas variáveis, pode ser estendida para um problema tridimensional.

Consideremos um retângulo medindo 8 cm de altura e 20 cm de base. Evidentemente, a área desse retângulo é igual a $160\,\text{cm}^2$, ou seja, nesse retângulo cabem 160 quadradinhos com área unitária de $1\,\text{cm}^2$.



Se, agora, diminuirmos uma unidade na medida da base e acrescentarmos uma unidade na altura, a área do retângulo será alterada? Em quantas unidades?

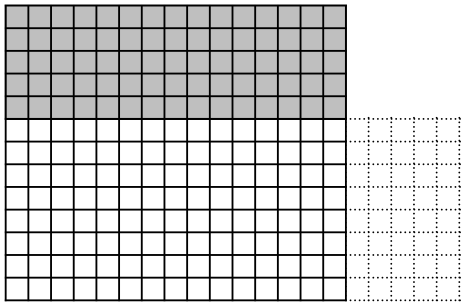
Nesse caso, observamos um aumento de 11 unidades na área (tiramos 8 unidades de área, pontilhadas na figura da página seguinte, e acrescentamos 19 unidades de área, na parte de cima do retângulo, que aparecem hachuradas na figura), de modo que a área fica alterada para $171\,\text{cm}^2$, ou seja, a área agora é de $19 \times 9\,\text{cm}$.



Essa área é maior do que a área original.

Se diminuirmos, no retângulo original, 5 cm na base e aumentarmos o mesmo na altura, o que acontecerá com a área?

Obteremos um retângulo de medidas 15 cm para a base e 13 cm para a altura, ou seja, de área igual a $195\,\text{cm}^2$, maior que as áreas dos dois retângulos anteriores.



Se diminuirmos, no retângulo original, 10 cm na base e aumentarmos o mesmo na altura, o que acontece com a área?

Obteremos um retângulo de medidas 10 cm para a base e 18 cm para a altura, ou seja, de área igual a $180\,\text{cm}^2$, que é maior do que a original e a segunda apresentada, mas é menor do que a do último retângulo acima, obtido retirando 5 cm na base.

Vejamos algumas questões mais gerais envolvendo esses retângulos.

Questão 1.1. Quais são as quantidades que podem ser retiradas da base e acrescentadas na altura?

Inicialmente, observamos que não faz sentido algum retirarmos valores negativos, logo, esses já podem ser excluídos. Poderemos retirar qualquer valor positivo menor do que a medida da base, nesse caso, menor do que 20 cm.

Nos resta apenas analisar os casos extremos, ou seja, a retirada de 20 ou 0 unidades. No caso de retirarmos 20 unidades, o retângulo se deformará, transformando-se num segmento de reta, ou na sobreposição de dois segmentos de reta, de comprimento igual a 28 cm e, evidentemente, com área nula. Sendo assim, podemos excluir esse valor de nossas possibilidades. Já a possibilidade de retirarmos 0 unidades da base é perfeitamente possível, não alterando a situação original.

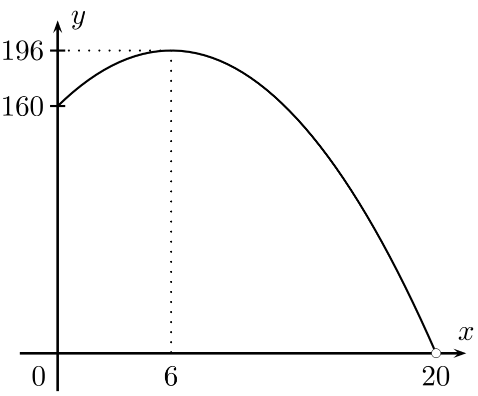
Questão 1.2. A área do retângulo pode ser obtida como uma função da quantidade retirada da base. Qual é a expressão desta função? Qual é o seu domínio? E sua imagem? Como representar graficamente esta função?

O retângulo original tem base medindo 20 cm e altura 8 cm. Portanto, ao retirarmos x unidades da base, obteremos para o novo retângulo uma base de $20 - x$ unidades e, ao acrescentarmos x unidades na altura, obteremos para o novo retângulo uma altura de $8 + x$ unidades. Assim, denotando por $A(x)$ a área do novo retângulo, obtemos:

$$A(x) = (20 - x)(8 + x) = -x^2 + 12x + 160, \quad \text{com} \quad 0 \leq x < 20.$$

Como $A(x)$ é dada por uma equação de segundo grau com o coeficiente do termo de grau dois negativo, seu gráfico será parte de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Essa parábola possui uma raiz igual a 20, intersecta o eixo y em 160 e seu vértice tem abscissa

$$x_v = \frac{-12}{2(-1)} = 6$$



e ordenada $A(6) = 196$. O gráfico da função $y = A(x)$ pode ser visto na figura.

Observamos que a área $A(x)$ toma valores positivos até o valor máximo, que ocorre no vértice da parábola, ou seja, quando $x = 6$. Nesse caso, o retângulo será um quadrado de lado igual a 14 cm e com área $A(x) = 196\,\text{cm}^2$. Assim, o conjunto de valores alcançados por $A(x)$, ou seja, a imagem de A, é o intervalo

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}\,; 0 < y \leq 196\} = (0, 196].$$

Questão 1.3. Supondo que desejássemos obter um retângulo com $160\,\text{cm}^2$ de área, quanto deveríamos retirar da base e acrescentar na altura?

Observamos no gráfico acima que $A(x) = 160\,\text{cm}^2$ para dois valores distintos de x, sendo o primeiro $x_1 = 0$ e o segundo, $x_2 = 12$, uma vez que a equação $A(x) = 160$ equivale a $-x^2 + 12x = 0$. Assim, um retângulo com $160\,\text{cm}^2$ de área é obtido na situação original ou retirando-se 12 unidades da base e acrescentando-as na altura.

Questão 1.4. E para obtermos um retângulo com área maior do que ou menor do que $160\,\text{cm}^2$, quanto deveríamos retirar da base e acrescentar na altura?

Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, teremos $A(x) > 160$ quando $0 < x < 12$. Também $A(x) < 160$ quando x estiver fora do intervalo $[0, 12]$, ou seja, quando x pertencer ao intervalo $(12, 20)$.

Generalizando esse problema de área para o caso de um retângulo qualquer, de base b e altura h, surgem três perguntas naturais:

- Sempre obtemos uma equação de segundo grau para representar a área do retângulo em função da quantidade retirada da base e acrescentada na altura?
- É sempre possível determinar o valor de x que permita obter o retângulo com área máxima?
- Esse retângulo de área máxima será sempre um quadrado?

Para responder essas perguntas, observamos inicialmente que, retirando x unidades da base do retângulo original e acrescentando x unidades na altura, a área do novo retângulo será dada por

$$A(x) = (b - x)(h + x) = -x^2 + (b - h)x + bh, \quad \text{com} \quad 0 \le x < b,$$

o que responde afirmativamente a primeira pergunta.

Para responder a segunda das três perguntas acima, sobre a expressão de $A(x)$, observamos que o gráfico de A é parte de uma parábola com concavidade voltada para baixo, uma vez que o coeficiente do termo de grau dois é negativo. Observamos, ainda, que o vértice dessa parábola tem abscissa

$$x_v = -\frac{b-h}{2(-1)} = \frac{b-h}{2}$$

e ordenada

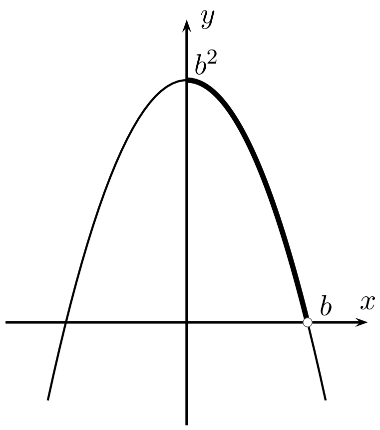
$$A(x_v) = \left(\frac{b+h}{2}\right)^2.$$

É claro que, se x_v pertencer ao domínio de A, ou seja, $0 \le x_v < b$, então o vértice será o ponto de máximo do gráfico de $A(x)$. Dividimos a resposta em três casos.

- $\boxed{b = h.}$ Nesse caso,

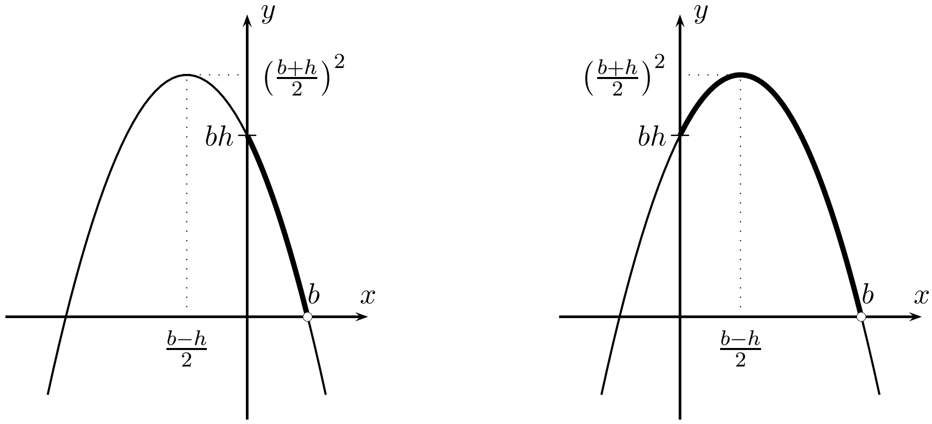
  $$A(x) = b^2 - x^2 \le b^2$$

  e o valor máximo ocorre na abscissa do vértice, em $x_v = \dfrac{b-h}{2} = 0$, que pertence ao domínio de A, como pode ser visto na figura ao lado.



- $\boxed{b < h.}$ Nesse caso, $x_v = \dfrac{b-h}{2} < 0$, ou seja, a abscissa do vértice está fora do domínio da função. Para $0 \leq x < b$, a área estará sempre decrescendo, portanto o valor máximo ocorrerá no extremo $x = 0$ do intervalo, como pode ser visto na figura abaixo, à esquerda.

- $\boxed{b > h.}$ Nesse caso, temos $0 < x_v = \dfrac{b-h}{2}$, ou seja, a abscissa do vértice está no domínio de A, como no exemplo do retângulo com 20 cm de base e 8cm de altura, como pode ser visto na figura abaixo, à direita.



Assim, respondemos afirmativamente a segunda das três perguntas colocadas: sempre é possível determinar o valor de x cujo retângulo correspondente tem área máxima.

Respondemos a terceira pergunta, observando que o máximo da área ocorreu no vértice da parábola apenas no primeiro e terceiro casos, cujos retângulos correspondentes são quadrados. Já no segundo caso, o máximo ocorreu no retângulo original, que não é um quadrado. Assim, a terceira pergunta tem uma resposta negativa.

1.9 – EXERCÍCIOS

Exercício 1.1. Encontre um número racional c e um número irracional d tais que $a < c < d < b$, para os números reais a e b, com $a < b$, dados.

a) $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 0{,}994\overline{327}$ e $b = 0{,}994\overline{328}$

c) $a = 0{,}871\overline{479}$ e $b = 0{,}8714799\ldots$

d) $a = 0{,}10010001\ldots$ e $b = 0{,}10010002$

Exercício 1.2. Justifique os itens da Proposição 1.1 na Seção 1.1, à p. 11.

Exercício 1.3. "O resultado da soma de dois números irracionais é um número irracional." Verifique se é verdadeira ou falsa essa afirmação, justificando sua resposta.

Exercício 1.4. Determine todos os valores reais de x, para os quais temos

a) $3x - 2 < 8$ b) $2x - 1 > 11x + 9$ c) $(x+1)(x-2) > 0$

d) $\dfrac{1}{x+1} > 9$ e) $\dfrac{3x+1}{x-2} < 2$ f) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

Exercício 1.5. Escreva usando valor absoluto o conjunto formado por todos

a) os números reais cuja distância até 7 é menor do que 9;

b) os números reais cuja distância até 3 é maior do que ou igual a 2;

c) os números reais cuja distância até -2 é maior do que 1.

Sugestão: Inicialmente represente os conjuntos na reta, usando uma "régua" de comprimento conveniente.

Exercício 1.6. Escreva os conjuntos seguintes na forma de intervalos ou uniões de intervalos.

a) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-1| < 2\}$ b) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t+3| \leq 5\}$

c) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-3| \geq 3\}$ d) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t+4| > 1\}$

Exercício 1.7. Escreva na forma de intervalo, ou união de intervalos, o conjunto formado por todos os números reais x que satisfazem as condições dadas.

a) $\sqrt{1+x^2}$ é um número real b) $\sqrt{1-x^2}$ é um número real

c) $\sqrt{(x-3)^2-9}$ é um número real d) $\sqrt{x^2+6x+8}$ é um número real

Sugestão: Em d), primeiro complete o quadrado dentro do radical.

Exercício 1.8. Faça um esboço no plano xy do conjunto de todos os pontos cujas coordenadas satisfazem

a) $x \leq 3$ b) $0 \leq x \leq 5$ e $-1 \leq y \leq 4$

c) $-3 < y \leq 2$ d) $x = 1$ e $y > 0$

e) $|\,x\,| < 1$ e $|\,y\,| < 1$ f) $|\,x\,| < |\,y\,|$

Exercício 1.9. Determine a tal que a distância entre os pontos $(1,-2)$ e $(a,2)$ seja igual a 5.

Exercício 1.10. Determine b tal que a distância entre os pontos $(0,0)$ e $(3,b)$ seja igual a 8.

Exercício 1.11. Mostre que o triângulo com vértices $(3,-3)$, $(-3,3)$ e $(3\sqrt{3},3\sqrt{3})$ é um triângulo equilátero.

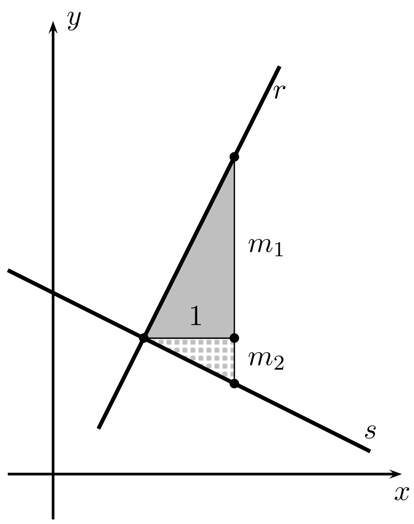
Exercício 1.12. Mostre que o triângulo com vértices $(5,-2)$, $(6,5)$ e $(2,2)$ é isósceles.

Exercício 1.13. Determine a e b sabendo que $(8,-10)$ é o ponto médio do segmento de reta entre $(-6,4)$ e (a,b).

Exercício 1.14. Mostre que os pontos $A=(-2,9)$, $B=(4,6)$, $C=(1,0)$ e $D=(-5,3)$ são vértices de um quadrado.

Exercício 1.15. Mostre que vale a condição de perpendicularidade (1.2), à p. 27.

Sugestão: Considere uma reta r com inclinação m_1 e, usando semelhança de triângulos, tente determinar a inclinação da reta perpendicular s a partir da figura dada.



Exercício 1.15: Retas Perpendiculares

Nos Exercícios 1.16 a 1.27, também esboce a(s) reta(s) envolvida(s) no plano xy.

Exercício 1.16. Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto $(3, -2)$ e tem coeficiente angular $m = -\dfrac{1}{2}$.

Exercício 1.17. Determine a equação reduzida da reta que passa pelos dois pontos $P_1 = (1, 5)$ e $P_2 = (-3, 4)$.

Exercício 1.18. Determine a equação geral da reta que passa por $(-4, 3)$ e é paralela à reta de equação $2x - 8y + 7 = 0$.

Exercício 1.19. Determine a equação da reta que

a) passa pelo ponto $(4, 5)$ e é paralela ao eixo x;

b) passa pelo ponto $(5, 4)$ e é paralela ao eixo y;

c) passa pelo ponto $(-1, -2)$ e é perpendicular à reta $2x + 5y = -8$.

Exercício 1.20. Determine, caso existam, os pontos de interseção dos pares de retas.

a) $2x + y - 3 = 0$ e $6x + 3y - 8 = 0$

b) $x - 2y - 8 = 0$ e $2x - y + 8 = 0$

c) $6x + 3y - 1 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$

Exercício 1.21. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e determine sua interseção.

Exercício 1.22. Determine a equação da reta r que é perpendicular à reta s, sabendo que s passa pelos pontos $P = (2, 8)$ e $Q = (-4, 6)$ e que r divide o segmento PQ ao meio.

Exercício 1.23. Determine a equação da reta que tem declividade -2 e passa pelo ponto de interseção das retas r e s, cujas equações são $3x - 5y - 9 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$, respectivamente.

Exercício 1.24. A reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$ e os eixos coordenados do plano xy formam um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

Exercício 1.25. Determine um ponto sobre a reta $12x - 6y = -9$ que seja equidistante dos pontos $P = (2, 2)$ e $Q = (6, -2)$.

Sugestão: Comece determinando a equação da reta que divide o segmento de reta PQ ao meio e é perpendicular ao segmento. Ou então, utilize distância.

Exercício 1.26. Encontre a equação da reta que relaciona a temperatura em graus Celsius C e em graus Fahrenheit F, sabendo que a água congela a 0°C (igual a 32°F) e ferve a 100°C (igual a 212°F).

Exercício 1.27. Determine o valor da constante k para o qual a reta de equação

$$(5k - 3)\,x - (3k + 6)\,y + 2k - 1 = 0$$

a) é paralela ao eixo x;
b) é paralela ao eixo y;
c) passa pela origem;
d) é paralela à reta de equação $y = 3x - 16$;
e) é perpendicular à reta de equação $2x + y - 1 = 0$.

Exercício 1.28. Determine as equações (padrão e geral) do círculo

a) de centro $(-3, 5)$ e raio 4;
b) que tem um diâmetro com extremidades nos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$;
c) que contém os pontos $(0, 0)$, $(6, 0)$ e $(0, 8)$.

Exercício 1.29. Determine o centro e o raio dos círculos representados pelas equações.

a) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 32y + 37 = 0$
b) $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y = -1$
c) $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

Exercício 1.30. Determine a equação geral da reta que passa pelo centro do círculo de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ e é perpendicular à reta de equação $3x + y - 10 = 0$.

Exercício 1.31. Determine a distância entre os centros dos círculos de equações

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 + 6x - 4y - 25 = 0.$$

Exercício 1.32. Determine a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 + 2x = 9$ no ponto $P = (2, -1)$.

Exercício 1.33. Dado o círculo $x^2 + y^2 = 20$, determine se o ponto $P = (-1, 2)$ está dentro, fora ou sobre esse círculo.

Exercício 1.34. Repita o exercício anterior, considerando o círculo $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ e $P = (3, 5/2)$.

Exercício 1.35. Um ponto (x, y) se move de tal forma que a soma dos quadrados de suas distâncias aos pontos $(4, 1)$ e $(2, -5)$ é 45. Mostre que o ponto se move ao longo de um círculo e determine o centro e o raio desse círculo.

Exercício 1.36. Determine os valores de c para os quais o sistema de equações dado tenha uma solução ou nenhuma solução.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ (x - c)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Exercício 1.37. Determine os valores de c para os quais o sistema de equações dado tenha uma solução, duas soluções ou nenhuma solução.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - c)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Sugestão: Comece esboçando os gráficos dos círculos.

Exercício 1.38. Uma empresa paga a seus vendedores uma diária de R$ 60,00 para acomodações e refeições e ainda R$ 3,00 por quilômetro rodado. Obtenha uma função que forneça o custo diário C, para a empresa, de um vendedor em termos do número x de quilômetros percorridos. Faça também um esboço no plano da reta que representa o custo C.

Exercício 1.39. Uma fábrica compra uma máquina por R$ 3.000,00. Ao final de 10 anos, a máquina estará obsoleta e não terá mais valor algum. Representando o tempo em anos por t, obtenha uma função que expresse o valor V da máquina a cada ano que passa, durante o período desses 10 anos em que será utilizada, sabendo que o custo depende linearmente do tempo. Faça também um esboço no plano da reta que representa V.

Exercício 1.40. Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R$ 38,00 pela assinatura mensal e R$ 0,60 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R$ 1,10.

a) Qual a opção mais vantajosa para 1 hora de conversação mensal?
b) A partir de quanto tempo a outra opção torna-se mais vantajosa?

Exercício 1.41. Uma central de cópias está oferecendo a seguinte promoção.

- O preço da cópia é de R$ 0,10 para até 100 cópias de um mesmo original.
- Caso o número de cópias de um mesmo original seja superior a 100, o preço será de R$ 0,07 para as cópias que excederem 100, até 200 cópias.
- Caso o número de cópias de um mesmo original seja superior a 200, o preço baixa novamente e será de R$ 0,05 para as cópias que excederem 200.

a) Determine o preço pago por 320 cópias de um mesmo original.
b) Obtenha a função que define o preço p em termos do número x de cópias de um mesmo original.

Exercício 1.42. Use a tabela da Receita Federal dada no Exemplo 1.13, à p. 36 para resolver as questões seguintes.

a) Calcule o imposto devido para um ganho mensal de R$ 500,00. Calcule, também, o imposto devido para ganhos mensais de R$ 1.500,00 e R$ 3.000,00.
b) Encontre a função I que associa, a cada ganho mensal x, o imposto devido $I(x)$.
c) Dê uma interpretação para os valores da terceira coluna da tabela acima.

Exercício 1.43. Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e condensou as informações recebidas na tabela seguinte.

Opções	Diária	Preço por km rodado
Locadora 1	R$ 50,00	R$ 0,20
Locadora 2	R$ 30,00	R$ 0,40
Locadora 3	R$ 65,00	R$ 0,00 (km livre)

a) Obtenha uma função que defina o preço y da locação por um dia, em termos do número x de quilômetros rodados, em cada uma das situações apresentadas na tabela.
b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os gráficos dessas funções.

c) A partir de quantos quilômetros rodados num dia o cliente deve preferir a Locadora 1 ao invés da Locadora 2?

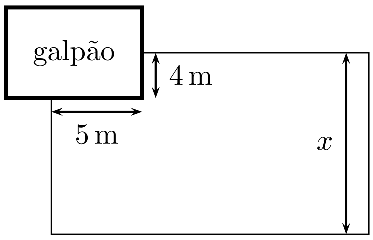
d) A partir de quantos quilômetros o cliente deve optar pela Locadora 3?

Exercício 1.44. Suponha que uma partícula desloca-se em linha reta, a uma velocidade constante, do ponto A até o ponto C, distante 200 cm de A. Esboce o gráfico da função que expressa, para cada tempo t, a distância entre a partícula e o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, no instante t.

Exercício 1.45. Ingerindo uma mistura de soja e lentilha, uma pessoa deseja alcançar a quantidade diária adequada de 70 g de proteínas. Sabendo que cada 100 g de soja seca contêm 35 g de proteínas e que cada 100 g de lentilha seca contêm 25 g de proteínas, obtenha uma relação entre a quantidade x de soja e a quantidade y de lentilha que deverão ser ingeridas para totalizar 70 g de proteínas diárias. E se a pessoa quiser totalizar pelo menos 70 g de proteínas, como fica a relação, em gramas, entre as quantidades de soja e de lentilha?

Os últimos exercícios deste capítulo foram retirados de provas da disciplina MAT01353 Cálculo e Geometria Analítica IA. Alguns poderão ser resolvidos com os conteúdos apresentados neste texto. No entanto, as soluções dos que estão marcados com $\star$ requerem conteúdos que só serão desenvolvidos na disciplina. Para esses problemas, deverão ser resolvidos apenas os itens identificados com o sinal $\checkmark$.

Exercício 1.46.* Um terreno com área de $380\,\mathrm{m}^2$ deve ser cercado. As paredes de um galpão, já construído no terreno vizinho, serão aproveitadas, segundo o esboço ao lado. Determine as dimensões do terreno que minimizem a quantidade de cerca usada. $\checkmark$ *Expresse o comprimento da cerca utilizada em função do comprimento x do lado do terreno indicado.*



Exercício 1.47. Uma caixa aberta é feita a partir de um pedaço retangular de cartolina, removendo em cada canto um quadrado de lado x e dobrando as abas. Sabendo que os lados da cartolina medem 8 e 6 cm, expresse o volume da caixa obtida como função de x.

Exercício 1.48.* Um holofote está no solo, a 20 m de um edifício de 9 m de altura. Um homem de 1,80 m de altura anda a uma velocidade de 1,5 m/s a partir do holofote, em direção ao edifício. ✓ *Resolva somente o item* a).

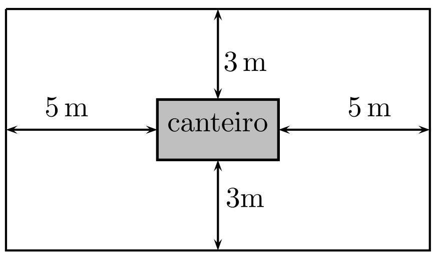
a) Expresse o comprimento s da sombra que o homem projeta sobre o edifício, em função de sua distância x ao holofote.

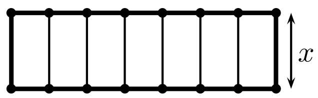
b) Determine a taxa de variação instantânea de s em relação ao tempo, quando o homem estiver a 17 m do edifício. (Indique a unidade da taxa.) Nesse instante, o comprimento da sombra está aumentando ou diminuindo ?

Exercício 1.49.* A areia que está caindo de uma calha de escoamento, cai de tal modo que forma um cone cuja altura é sempre igual ao diâmetro da base. Se a altura do cone cresce a uma taxa constante de 1,5 m/min, com que taxa a areia estará escoando quando a pilha tiver 3 m de altura? ✓ *Expresse o volume do cone em função da altura h do cone.*

Exercício 1.50. Uma caixa sem tampa, com base quadrada, deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine a função que expressa o custo C para fabricar a caixa, em termos da medida x de um dos lados da base dessa caixa.

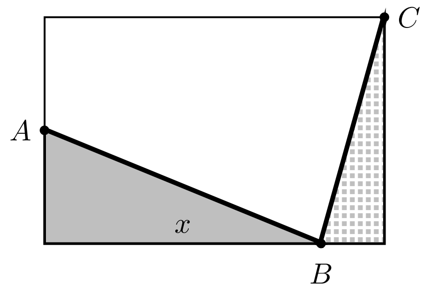
Exercício 1.51. Em uma praça, deseja-se construir um canteiro de 15 m^2 circundado por um gramado, conforme mostra a figura. Sabendo que cada m^2 da grama custa 20 reais, expresse o custo total do gramado em termos da medida x de um dos lados do canteiro. *Atenção: A figura dada é meramente ilustrativa, pois não está em escala!*





Exercício 1.52. Um veterinário deve cercar uma área de 140 m^2 para construir sete canis, primeiro cercando uma região retangular e, em seguida, subdividindo-a em sete retângulos menores, conforme a figura ao lado. Determine a função que expressa o custo total da cerca, em termos do comprimento x indicado na figura, sabendo que o custo da cerca externa é de R$ 6,00 por metro e o custo da cerca usada nas divisórias internas é de R$ 3,00 por metro.

Exercício 1.53. Num jardim retangular com lados de 10 e 15 metros será colocada uma cerca, fixando-a nos pontos A, B e C indicados na figura, para demarcar dois canteiros triangulares, que aparecem hachurados na figura dada. Sabendo que o ponto A está exatamente no meio do lado menor, expresse o comprimento L da cerca, como função da medida x do cateto indicado na figura. Não esqueça de indicar o domínio da função.



Atenção: A figura dada é meramente ilustrativa, pois não está em escala!

1.9.1 – EXERCÍCIOS da SEÇÃO 1.8 (Leitura Complementar)

Exercício 1.54. Considere, como no exemplo da Seção 1.8, um retângulo com 20 cm de base e 8 cm de altura. Dessa vez, retiramos x unidades da base e acrescentamos x unidades na altura. Com quais valores de x a área do novo retângulo é inferior ao dobro desse valor x?

Exercício 1.55. Refaça o exercício precedente, dessa vez usando um retângulo com b cm de base e h cm de altura, sendo $b > h$.