UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

JOÃO MARCOS FLACH

Wittgenstein e o nascimento da Ciência da Computação

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Machado

Porto Alegre
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann
Vice-Reitora: Profª. Jane Fraga Tutikian
Pró-Reitor de Graduação: Prof. Wladimir Pinheiro do Nascimento
Diretora do Instituto de Informática: Profª. Carla Maria Dal Sasso Freitas
Coordenador do Curso de Ciência de Computação: Prof. Sérgio Luis Cechin
Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

"No princípio era o Verbo"

— João 1:1

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meu pais, Rosemari Martinatto e Almir Flach, que, em meio a tantas dificuldades, sempre me apoiaram e fizeram todo o possível para que eu e minha irmã tivéssemos uma boa educação. Agradeço também à minha irmã, Maryana, que sempre acreditou no meu potencial, e à toda minha família.

Agradeço também aos meus amigos, que me acompanharam nesta jornada. Em especial, ao Renato, pelo companheirismo e pelas discussões sobre os mais diversos assuntos, uma das quais deu início à presente monografia. Ao Renan, que tornou a passagem pela graduação menos chata e mais agradável. Ao Lucas, primeiro amigo em uma cidade nova, e à todos com quem interagi positivamente na graduação.

Ao time *Porto Alegre Blades* que, com o hockey inline, me ajudou a relaxar quando precisava e me ensinou muita coisa que não se aprende nos livros.

À Furiosa e Cidinha, que sempre estavam dispostas à me alegrar, principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos professores do Instituto de Informática da UFRGS, por todo o conhecimento aprendido, especialmente ao professor Dr. Rodrigo Machado, orientador do presente trabalho, que abraçou minha ideia desde o primeiro dia e com quem tive longas conversas, que ajudaram muito a esclarecer meus pensamentos embaraçados.

Em especial, quero agradecer à minha companheira de vida, Izabela Garcia Padilha, que esteve ao meu lado desde o começo, me ajudando a superar as angústias e tristezas e a celebrar as alegrias.

Por fim, gostaria de agradecer à todos os pensadores que um dia buscaram expandir o conhecimento humano, pois se hoje podemos enxergar longe, é porque estamos sobre os ombros de gigantes.

RESUMO

No início do século XX, matemáticos, lógicos e filósofos se empenharam a fim de encontrar soluções para a crise dos fundamentos da matemática. A efervescência de ideias resultante dessa crise foi uma das grandes responsáveis pelo nascimento da Ciência da Computação. Este trabalho visa apresentar as ideias e contribuições do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein que foram relevantes nesse contexto. Primeiramente serão expostos os elementos principais de sua filosofia, bem como os fatos mais importantes que levaram ao advento da computação. Depois, identificaremos ideias descritas originalmente em sua obra que posteriormente manifestaram-se em modelos clássicos da computação. Por fim, faremos uma análise de suas contribuições e discutiremos sua importância no nascimento da área.

Palavras-chave: Lógica. Teoria da Computação. Wittgenstein.

Wittgenstein and the birth of Computer Science

ABSTRACT

In the beginning of the 20th century, mathematicians, logicians and philosophers were engaged in finding solutions to the foundational crisis of mathematics. The effervescence of ideas due to this crisis eventually led to the birth of Computer Science. This work aims to present the ideas and contributions of the austriac philosopher Ludwig Wittgenstein that were relevant in this context. First, we review the main elements of its philosophy, and the most important facts which lead to the beginning of Computer Science. Then we identify the concepts originally described in his philosophy that were manifested in the context of classic models of computation. We finally discuss his connections with important precursors of Computer Science, and his overall impact on the area.

Keywords: Logic, Theory of Computation, Wittgenstein.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TLP	*Tractatus Logico-Philosophicus*
IF	*Investigações Filosóficas*
PR	*Philosophical Remarks*
PG	*Philosophical Grammar*
BBB	*The Blue and Brown Books*
PM	*Principia Mathematica*
CV	*Círculo de Viena*
MT	*Máquina de Turing*
CL	*Cálculo Lambda*
OCN	*Artigo de Alan Turing - On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem (1936)*
PT	*Problema da Totalidade*
PP	*Problema da Parada*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> O matemático viu-se forçado a ser um filósofo, para poder seguir sendo matemático
>
> *David Hilbert*

Quando pensamos em computação, imediatamente associamos o termo à máquina "computador". Mas a computação é anterior aos chips, transistores e válvulas. Vista como o ato de computar, ela data de milênios atrás. Já como ciência, ela nasce no início do século XX, logo após o surgimento de um ramo da matemática denominado Teoria da Computação.

Para o surgimento desta área, a crise nos fundamentos da matemática foi de extrema importância. Nessa época, matemáticos e filósofos se debruçavam sobre os problemas na base da matemática e da lógica, tentando encontrar soluções. Turing, considerado por muitos como pai da computação, descreve sua famosa máquina universal buscando encontrar uma solução para o *Entscheidungsproblem*, problema que justamente provém desta crise.

1.1 Motivação

Algumas ideias encontradas na obra *Tractatus Logico-Philosophicus* do filósofo Ludwig Wittgenstein podem chamar a atenção de leitores familiarizados com os modelos clássicos da computação. Por exemplo, em um dos aforismos descritos no livro, Wittgenstein apresenta uma definição de número de uma forma peculiar. Sua definição é muito semelhante à definição de número codificada por Church no Cálculo Lambda, anos depois.

Nesta obra, Wittgenstein explora os limites da linguagem e do pensamento. Partindo dessa ideia, podemos imaginar que haja uma relação entre os limites da linguagem descritos no livro e as limitações das máquinas encontradas nos modelos de computação.

Além disso, Wittgenstein estava familiarizado com resultados matemáticos significativos da época. De fato, ele mantinha contato com pensadores importantes que estavam interessados em resolver os problemas da crise mencionada acima, como Bertrand Russell, seu orientador em Cambridge, e Gottlob Frege, com quem trocou várias cartas.

Em vista das possíveis relações entre o trabalho de Wittgenstein e o nascimento da ciência da computação, e da falta de trabalhos que fizessem uma análise de sua obra por esse viés, essa investigação é relevante para verificar se de fato essas relações existem e, portanto, que as ideias descritas por Wittgenstein foram precursoras na computação.

1.2 Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é traçar paralelos entre ideias oriundas da obra filosófica de Wittgenstein e a materialização dessas mesmas ideias nos primeiros resultados lógico-matemáticos que marcam o surgimento da Ciência da Computação.

1.3 Estrutura

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2, será apresentada uma breve biografia de Wittgenstein, bem como um panorama geral de sua obra, focando na sua filosofia das décadas de 1910 e 1920. O Capítulo 3 conterá uma síntese da história que levou ao nascimento da computação. No Capítulo 4 serão então apontadas e discutidas as relações entre o trabalho de Wittgenstein e dos pensadores importantes para o nascimento da computação citados no capítulo 3. Será feita uma arguição sobre essas relações e será discutida a sua importância na área. O Capítulo 5 apresenta as conclusões gerais, trabalhos relacionados e trabalhos futuros.

2 WITTGENSTEIN: VIDA E OBRA

Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) foi um filósofo austríaco. Expoente da filosofia analítica, é considerado por diversos autores como o maior filósofo do século XX (BILETZKI; MATAR, 2018). Suas contribuições vão desde a lógica e matemática até a ética e religião. Seus trabalhos são geralmente divididos em duas fases: os trabalho de sua juventude, que culminaram no livro *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), e seus trabalhos posteriores, encontrados principalmente na obra póstuma *Investigações Filosóficas* (1953) (BILETZKI; MATAR, 2018).

Antes de começarmos a analisar seu trabalho, é interessante e pertinente conhecer um pouco de sua vida, bem como em que circunstâncias seus trabalhos foram escritos. Com isso, conseguiremos entender melhor em qual contexto suas ideias se desenvolveram, quais eram seus objetivos e como Wittgenstein pretendia alcançá-los.

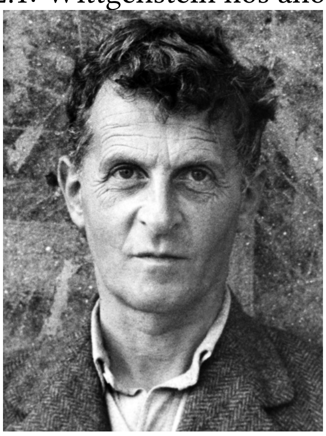
As principais referências para as informações apresentadas neste capítulo são os livros de Kanterian (2007) e Monk (1991).

2.1 Biografia

2.1.1 Família e Criação

Ludwig nasceu e cresceu em Viena, capital da Áustria, na época em que esta cidade era um dos maiores centros culturais do mundo. Vindo de uma família abastada e culta, foi criado em um ambiente aristocrático, sempre em contato com a elite cultural

Figura 2.1: Wittgenstein nos anos 1940s.



Fonte: (KANTERIAN, 2007)

e intelectual de Viena.

Era o mais novo de 8 irmãos: 3 mulheres e 5 homens. Seu pai era um homem de negócios muito inteligente, que veio a se tornar um dos industriais mais ricos de toda a Europa. Patrono das artes, cercava sua família com a *crème de la crème* da sociedade vienense no palácio em que viviam. Era também um homem muito austero, de quem seus filhos tinham respeito e medo. Sua mãe, uma pianista excepcional, se dedicava principalmente à música e à educação musical de seus filhos. Apesar disso, sua relação com eles não era muito íntima. Já a criação e a educação dos filhos do casal ficava sob a responsabilidade de babás e professores particulares.

Suas irmãs viveram uma vida tranquila, voltada às artes. Por outro lado, seus irmãos mais velhos sofreram muito com conflitos familiares. Apesar de muito talentosos artisticamente, seu pai os pressionava para que continuassem os negócios da família. Isso levou ao suicídio de dois de seus irmãos. Outro irmão seu também acabou tirando sua própria vida mais tarde. Apesar da sofisticação cultural, parecia haver algo trágico e mórbido em sua família.

Por essas fatalidades, Ludwig teve uma criação mais branda. Ainda assim, contemplou o suicídio em vários momentos de sua vida conturbada.

2.1.2 Estudos

Tendo recebido aulas particulares até os 14 anos, em 1903 Ludwig foi mandando a uma escola em Linz, especializada em educação científica e técnica. Com sua personalidade reclusa e sua criação elitista, o jovem Wittgenstein não se adaptou bem ao novo ambiente. Para seus colegas ele parecia um alienígena, sendo por eles ridicularizado. Sua performance na escola era medíocre, com exceção de Inglês, Conduta e Religião. Questões sobre fé e religião foram constantes durante toda sua vida.

Depois de terminar os estudos em 1906, ele foi pra Berlin estudar engenharia mecânica, onde se formou em 1908. Em Berlin, desenvolveu interesse por aeronáutica, e depois de formado foi para a Universidade de Manchester para estudar esse novo campo. Lá, Ludwig começou a se interessar por matemática avançada e, eventualmente, pelos fundamentos da matemática.

Wittgenstein então se deparou com o trabalho de Frege e Russell enquanto estava em Manchester, e logo começou a criar soluções para várias questões levantadas. Depois de escrever e se encontrar com Frege, Wittgenstein quis começar a estudar com ele, mas

Frege sugeriu que Ludwig fosse para Cambridge estudar com Russell. Apesar de ainda ser estudante em Manchester, em 1911 Wittgenstein começou a frequentar as aulas de Russell. Muitas vezes, Wittgenstein dominava as aulas, e depois delas, seguia Russell até sua sala, onde tinham discussões filosóficas até tarde da noite. De início, Russell parecia irritado com seu novo aluno. Em cartas, escreveu (KANTERIAN, 2007, p. 37) [a] :

> Eu creio que meu engenheiro alemão é um tolo. Ele crê que nada empírico é conhecível - Eu pedi para ele admitir que não havia rinocerontes na sala, mas ele não admitia.

Isso mostra como Wittgenstein já chegou em Cambridge com suas próprias convicções filosóficas, e era teimoso ao defendê-las.

Nessa época, Wittgenstein estava indeciso sobre o que deveria fazer de sua vida. Russell então o aconselhou a continuar na filosofia. Em 1912, Ludwig então iniciou seus estudos na *Trinity College*, parte da universidade de Cambridge, com Russell como seu orientador. No final do período escolar, Russell acreditava ter ensinado ao seu pupilo tudo que ele sabia e que Wittgenstein estava apto a resolver os grandes problemas filosóficos que ele já estava muito exausto para atacar, depois de concluir seu longo e excepcional trabalho *Principia Mathematica* (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910–1913).

O interesse inicial de Wittgenstein, que era a filosofia da matemática, logo começou a se expandir sobre outros temas, como a natureza e conteúdo da lógica e a relação entre a lógica e a linguagem. Essas questões mantiveram-se em sua mente por vários anos, tornando-se temas centrais de seu livro *Tractatus Logico-Philosophicus* (TLP).

Vale notar que Wittgenstein havia se tornado um homem de difícil convívio, facilmente irritável. Era muito franco e de natureza autoritária e arrogante. Em seu segundo ano em Cambridge, atritos começaram a ocorrer entre ele e Russell. Wittgenstein começou a desenvolver suas próprias ideias sobre lógica e começou a fazer duras críticas aos trabalhos de Russell. Russell sentiu absoluto desânimo com as críticas recebidas.

Ao final de 1913, Wittgenstein acreditava que Russell não tinha mais nada a lhe ensinar, e que não havia ninguém de quem poderia aprender alguma coisa. Então decidiu deixar Cambridge e trabalhar sozinho na Noruega. De lá, trocava cartas com Frege e Russell sobre os fundamentos da lógica. Foi nessa época que Wittgenstein mais contemplou o suicídio. Ele acreditava que resolver os maiores problemas filosóficos era sua missão. Sua busca para encontrar respostas estava o deixando à beira da loucura. Este estado de mente não foi contra-produtivo para seu trabalho, mas afetou gravemente suas amizades. Principalmente sua amizade com Russell, que sofreu um golpe do qual nunca

[a]Tradução do autor.

mais se recuperou. Em cartas trocadas entre eles, Wittgenstein escreveu que não aceitava algumas opiniões de Russell e que, apesar de dever muito a ele, não voltaria a ter contato.

2.1.3 A Grande Guerra

Em 1914, eclode a Primeira Guerra Mundial. Mesmo com uma hérnia que o eximia da obrigação de lutar por seu país, Wittgenstein se alistou ao exército no mesmo ano. Ele viu na guerra uma oportunidade de realizar algo em sua vida que não fosse puramente intelectual. Além disso, acreditava que só descobriria seu verdadeiro valor ao enfrentar a morte de perto. Porém, talvez ele não contasse com as experiências que iria ter que passar. Assim como na escola, Ludwig logo se viu rodeado de pessoas diferentes. Ao contrário dele, a maioria dos soldados que estavam lá eram “simples” operários, com quem Wittgenstein tinha pouco em comum. Ele os enxergava como bêbados, ordinários e estúpidos. Como era de se esperar, o sentimento de aversão era mútuo. Seus companheiros não entendiam o porque de uma pessoa de sua classe estar se submetendo a tal situação. Como se não bastasse, Ludwig ainda abria mão de privilégios que tinha direito por ter se graduado em Linz. Isso demonstra bem a tortura que ele mesmo se afligia. Foi durante a guerra que Wittgenstein tornou a voltar-se para a religião.

Wittgenstein começou a trabalhar no manuscrito do TLP já no início da sua participação na guerra. Ele realizava as anotações de seus *insights* na forma de observações isoladas. Seu trabalho perdurou por todo o período da guerra, mesmo enquanto estava no fronte de batalha, nas trincheiras. Essa experiência deixou marcas na sua obra. Questões sobre vida e morte se tornaram pessoais e não apenas filosóficas para ele nesta época. Suas anotações sobre tais questões estavam lado a lado com as de lógica e linguagem em seu caderno. A parte inicial do TLP quase não foi afetada, mas na parte final Wittgenstein aborda temas como ética e misticismo. Wittgenstein estava ciente que o escopo de sua investigação havia crescido. Como ele mesmo mencionou em 1916 (KANTERIAN, 2007, p. 69) [b]:

> Meu trabalho se estendeu dos fundamentos da lógica para a natureza do mundo.

[b]Tradução do autor

2.1.4 Ostracismo

Após a guerra, com o TLP finalizado, Wittgenstein encontrou grande dificuldade para publicá-lo, tendo sido rejeitado várias vezes. A publicação só ocorreu em 1921, três anos depois da finalização do livro, depois que Bertrand Russell, matemático já bem conceituado na época, escreveu uma longa e atrativa introdução para a obra. Descontente com a má aceitação de seu trabalho, e crendo ter resolvido todos os problemas filosóficos, Wittgenstein decide que a vida acadêmica não lhe interessa mais. Além disso, a guerra havia o transformado. Ele desejava levar uma vida humilde, devota às pessoas simples. Em 1919 ele doou todo o dinheiro que havia herdado de seu pai a seus irmãos e partiu em busca de seu lugar no mundo.

Além de ter trabalhado um tempo como jardineiro, foi como professor de escolas primárias que ele mais se ateve durante esse período. Ao todo, foram 6 anos que Wittgenstein passou lecionando para crianças, de 1920 à 1926. Foi também nessa época (1922) que a amizade de Wittgenstein e Russell de fato chega ao fim.

Sua carreira como professor primário termina em 1926, depois de um infeliz acontecimento. O estilo de ensino de Wittgenstein muitas vezes incluía castigos físicos, e em uma determinada situação, ele bateu tantas vezes na cabeça de um garoto, que ele acabou desmaiando. Assolado, ele mesmo desistiu de continuar dando aulas para crianças.

Em 1926, com a morte de sua mãe, Wittgenstein volta a se relacionar com sua família. Na época, sua irmã estava com o projeto de construir uma mansão em Viena, e Wittgenstein aceitou a proposta de se juntar ao projeto. Essa tarefa ocupou Wittgenstein pelos próximos 2 anos, fazendo inclusive seu nome constar na prefeitura como arquiteto profissional.

2.1.5 Retorno à Cambridge

Em 1929 Wittgenstein resolve voltar à Cambridge, onde permaneceu pelos próximos sete anos. Ele então submeteu o TLP como sua tese de doutorado (*PhD*). Sua banca examinadora foi composta por Russell e outro velho amigo a quem já havia apresentado o livro anos antes. A apresentação de seu trabalho, segundo Russell, foi uma situação absurda. Foi basicamente uma conversa entre colegas, com Russell argumentando sobre as proposições sem sentido do livro. No final Wittgenstein se despediu dando um tapinha nos ombros de seus examinadores e dizendo “Não se preocupem, eu sei que vocês nunca entenderão meu livro" (KANTERIAN, 2007, p. 118).

Assim que retornou à universidade, tentou seguir a linha de pensamento do TLP, sem sucesso. Ele começou a analisar mais profundamente seu antigo livro e a rejeitar suas próprias ideias, até que resolveu abandonar de vez sua concepção de linguagem e substituir por uma nova. O que acabou de vez com o encanto que Wittgenstein tinha com sua filosofia da linguagem foi quando um amigo italiano perguntou para Wittgenstein "Qual a forma lógica disso?", enquanto fazia um gesto de desdém muito conhecido na Itália, esfregando as pontas de seus dedos sob seu queixo. Wittgenstein concluiu que a linguagem não possui apenas um único propósito, como ele acreditava até então. Ela está embutida em vários aspectos de nossa vida. Essa nova concepção faz parte da sua obra *Investigações Filosóficas*, completada parcialmente em 1946 e publicado postumamente.

Em 1930 ele se candidatou a uma bolsa de pesquisa (*research fellowship*) de cinco anos em Cambridge. O trabalho enviado para exame foi um compilado de seus escritos até a data, publicados em 1964 como *Philosophical Remarks*. Conseguindo a bolsa, começou a lecionar filosofia. Sua carreira como professor durou de 1930 à 1947, com algumas interrupções. Nesses anos, muitos pensadores importantes, como Alan Turing, compareceram às suas aulas (KANTERIAN, 2007, p. 126). Suas aulas eram informais, nas quais ele não levava nenhum livro, anotação, ou qualquer material para a aula, fazendo somente uso do quadro negro. Durante a aula, ele falava livremente e improvisava, seguindo as linhas de raciocínio que lhe ocorriam. Ele dava muitos exemplos e utilizava de metáforas para explicar seus conceitos. Seguidamente ele conduzia diálogos com seus alunos, incentivando a participação deles no raciocínio. Em 1939 ele ganha a posição de professor em Cambridge, a honraria mais alta que um filósofo acadêmico pode receber. Ele fica nessa posição até 1947, ano de sua aposentadoria.

2.1.6 Final da vida

O final de sua vida, apesar de produtivo, foi marcado por tristeza e melancolia. De 1947 a 1949, ele morou na Irlanda. No final de 1949, Wittgenstein descobriu que estava com câncer de próstata. Ele passou o resto de seus dias revisando seus trabalhos e escrevendo sobre novos tópicos. Wittgenstein faleceu na manhã de 29 de abril de 1951. Suas últimas palavras foram: "Diga a eles que eu tive uma vida maravilhosa." (KANTERIAN, 2007, p. 197).

2.2 Obra

Originalmente, existem dois períodos distintos do pensamento de Wittgenstein: o "primeiro Wittgenstein" e o "segundo Wittgenstein". Novas escolas de pensamento afirmam que na verdade não há uma divisão entre esses períodos distintos; já outras afirmam que há mais que duas divisões, como por exemplo, o "Wittgenstein intermediário" (BILETZKI; MATAR, 2018).

Apesar de ter publicado apenas um livro de filosofia durante sua vida – o TLP – Wittgenstein produziu bastante material escrito, deixando mais de 20 mil páginas de anotações, manuscritos e cadernos para seus amigos de confiança. Em 1953, o livro *Philosophical Investigations* foi finalmente publicado. Nas próximas décadas, vários de seus escritos também foram publicados, tais como *Philosophical Remarks* (PR), *Philosophical Grammar* (PG) e *The Blue and Brown Books* (BBB). Abaixo está uma breve descrição de suas principais obras.

2.2.1 Tractatus Logico-Philosophicus

O TLP foi o único livro filosófico publicado por Wittgenstein em sua vida. Foi publicado em alemão em 1921, e em inglês em 1922. As circunstâncias nas quais o livro foi escrito – durante a Primeira Guerra Mundial, enquanto Wittgenstein estava nos frontes de batalha – ajudam a explicar o escopo abrangente da obra. Seu conteúdo varia dos interesses que Ludwig já demonstrava pela matemática e lógica até questionamentos sobre o sentido da vida.

O livro resume bem o pensamento do "primeiro Wittgenstein". Ele nasce da reflexão intensa sobre os fundamentos da lógica e da linguagem que Wittgenstein inicia a partir da obra de Frege e das aulas e discussões com Russell em Cambridge. O livro tem o audacioso objetivo de "dissolver" os problemas filosóficos (BILETZKI; MATAR, 2018). Para Wittgenstein, os problemas da filosofia não passam de mal uso da linguagem. Para alcançar esse objetivo, o autor tenta definir os limites da linguagem. Para isso, ele tenta traçar os limites do que se pode expressar por meio de proposições com sentido. Para Wittgenstein, ao traçarmos os limites do discurso significativo, traçamos os limites do pensamento. Ou seja, para determinar os limites daquilo que pode ser pensado, Wittgenstein tenta delimitar o que pode ser dito por meio da linguagem (MARQUES, 2005).

A estrutura da obra é peculiar. É um livro diferente do que estamos acostumados, mesmo para a filosofia. O livro consiste em uma série de proposições, organizadas segundo uma hierarquia definida pelo próprio autor da seguinte maneira:

> Os decimais que numeram as proposições destacadas indicam o peso lógico dessas proposições, a importância que têm em minha exposição. As proposições n.1, n.2, n.3, etc. são observações relativas à proposição nº n; as proposições n.m.1, n.m.2, etc, são observações relativas à proposição nº n.m; e assim por diante.

Assim, por exemplo, a proposição 4.241 é relativa à 4.24 que, por sua vez, é relativa à 4.2, que então é relativa à proposição básica de número 4.

Ao todo, o livro apresenta 7 proposições básicas, mostradas abaixo, e centenas de sub-proposições.

1. *O mundo é tudo que é o caso.*
2. *O que é o caso, o fato, é a existência de estados de coisas.*
3. *A figuração lógica dos fatos é o pensamento.*
4. *O pensamento é a proposição com sentido.*
5. *A proposição é uma função de verdade das proposições elementares.*
(A proposição elementar é uma função de verdade de si mesma.)
6. *A forma geral da função de verdade é:* $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$. *Isso é a forma geral da proposição.*
7. *Sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.*

Como (MORRIS, 2008) aponta, é um livro de leitura complicada. Primeiramente, o estilo em que foi escrito - quase poético - muitas vezes leva os leitores a conclusões divergentes acerca do pensamento de Wittgenstein. A obra parece ter sido escrita de maneira de difícil entendimento propositalmente, para forçar o leitor a pensar por si mesmo. Podemos ter uma ideia disso já no parágrafo de abertura do TLP:

> Este livro talvez seja entendido apenas por quem já tenha alguma vez pensado por si próprio o que nele vem expresso – ou, pelo menos, algo semelhante.

Apesar de sua estrutura e características peculiares, o TLP é uma obra contendo ideias originais importantes e que continuam sendo discutidas nos dias atuais.

2.2.2 Investigações Filosóficas

Como visto anteriormente, o livro Investigações Filosóficas (IF) foi publicado postumamente, embora Wittgenstein tenha ficado anos reescrevendo e revisando seus rascunhos. Essa obra é a epítome do pensamento do “segundo Wittgenstein”.

O livro consiste de duas partes. A primeira já estava pronta em 1946, mas Wittgenstein decidiu não publicá-la. Ela se foca em criticar algumas ideias expostas no TLP. Seus novos *insights* contrastam com suas ideias antigas. Apesar de plausíveis, suas ideias antigas não faziam justiça à totalidade da linguagem humana. Um novo conceito é apresentado: o de *jogos de linguagem*. É um conceito que faz parte de um contexto maior que Wittgenstein chama de *forma de vida*. (BILETZKI; MATAR, 2018)

A segunda parte foi adicionada pelos editores, pessoas de confiança às quais Wittgenstein deixou toda sua obra. Ela cobre os tema da filosofa da mente e da natureza da filosofia.

2.2.3 Outros Trabalhos

No período pós-TLP, quando Wittgenstein retorna à Cambridge, ele escreve muito sobre filosofia. É considerada sua fase transitória, quando ele começa a abandonar alguns conceitos do TLP e formar uma nova abordagem, que culmina no IF. Alguns de seus escritos dessa época viriam a fazer parte do IF, enquanto outros foram publicados separadamente. Alguns desses trabalhos ficaram mais famosos, como o *Philosophical Remarks* (WITTGENSTEIN et al., 1980), *Philosophical Grammar* (WITTGENSTEIN; RHEES; KENNY, 1978), e *The Blue and Brown Books* (WITTGENSTEIN, 1965).

Além disso, existem milhares de páginas de rascunhos, manuscritos e trabalhos que Wittgenstein escreveu durante sua vida. Todos eles são disponibilizados online pelo sítio *The Wittgenstein Archives at the University of Bergen (WAB)*, acessível em:

<http://wab.uib.no/>

É inegável o impacto de seu trabalho. Até o final do século XX, mais de 10 mil livros e artigos haviam sido publicados sobre Wittgenstein (KANTERIAN, 2007, p. 200). Até a presente data – meados de Dezembro de 2019 – o TLP foi citado por mais de 26900 trabalhos segundo a ferramenta Google Scholar[c].

[c]<https://scholar.google.com.br/scholar?q=tractatus+logico+philosophicus>

Neste trabalho estamos particularmente interessado nos trabalhos do “primeiro Wittgenstein”, anteriores ao nascimento da computação. Em particular, no TLP.

3 A ORIGEM DA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

> Numbers is hard and real and they never have feelings
> But you push too hard, even numbers got limits
> Why did one straw break the camel's back?
> Here's the secret
> The million other straws underneath it
> It's all mathematics
>
> *Mathematics*, Mos Def

Quando pensamos em teoria da computação, provavelmente lembramos da máquina universal de Turing. De fato, é o modelo computacional mais conhecido, e talvez o mais intuitivo. Turing apresentou seu modelo em um artigo, em 1936, chamado "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" (OCN) (TURING, 1936). Entretanto, o objetivo de seu artigo não era apenas modelar uma máquina universal por si só, mas também utilizar esse formalismo para resolver um problema lógico-matemático: a determinação da indecidibilidade do problema de decisão (*Entscheidungsproblem*, em alemão). Portanto, os problemas lógico-matemáticos que surgiram no final do século XIX e início do século XX, bem como as técnicas necessárias para sua resolução, foram de extrema importância para o nascimento da computação.

Para entender essa efervescência de ideias, vamos analisar o contexto histórico onde elas foram desenvolvidas. A principal referência para os fatos apresentados neste capítulo é o livro *Engines of Logic* (DAVIS, 2001).

3.1 O Sonho de Leibniz

Muito antes do conceito de computação que conhecemos hoje, muitas pessoas já tinham a ambição de construir máquinas capazes de completar automaticamente alguma tarefa específica. Algumas dessas máquinas foram construídas com objetivos lúdicos ou artísticos, como um simples relógio cuco ou até os autômatos de Heron de Alexandria. Porém algumas foram desenvolvidas com objetivos práticos. Essas máquinas eram capazes de imitar tarefas humanas simples, como a calculadora mecânica *la pascaline* e o tear automático de Jacquard. Esse tipo de máquina tinha como objetivo automatizar o trabalho humano.

Ainda adolescente, Gottfried Leibniz (1646 - 1716) foi introduzido ao pensamento aristotélico. Aristóteles, em seus trabalhos pioneiros sobre a lógica, tentou reduzir nossa racionalidade a um mecanismo, através do processo de dedução. Leibniz então teve sua grande ideia: ao invés de automatizar o trabalho físico, ele sonhou em automatizar o trabalho da mente humana, mecanizando o pensamento.

Aos 26 anos, Leibniz inventou uma máquina capaz de realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Apesar de efetuar somente as 4 operações básicas, ele já percebia o significado mais amplo da mecanização de cálculos. Logo depois, ele descreveu uma máquina que poderia resolver equações algébricas. Seus escritos posteriores já comparavam o raciocínio lógico com um mecanismo, exibindo seu objetivo de tentar reduzir o raciocínio para um tipo de cálculo, e, finalmente, construir uma máquina capaz de computar esses cálculos.

Era claro para ele que os símbolos desempenhavam um papel importante no cálculo. Porém, para seu sonho se tornar possível, era necessário um sistema de símbolos que abrangeria todo o escopo do pensamento humano, o que ele chamou de *characteristica universalis*.

Em sua visão, existiria uma enciclopédia, escrita em uma linguagem matemática, na qual todo conhecimento humano poderia ser expresso, com um conjunto de regras de cálculo que revelariam todas as relações lógicas entre essas proposições, que ele chamou de *calculus ratiocinator*. Além disso, existiria uma máquina capaz de computar tais cálculos.

Apesar de não ter tido progressos práticos em relação à *characteristica universalis*, ele obteve alguns avanços em seu *calculus ratiocinator*, propondo um esboço de uma álgebra da lógica. Alguns de seus resultados são muito parecidos com o que viria a ser obtido novamente um século e meio depois.

Infelizmente, por questões práticas, Leibniz não conseguiu desenvolver seu projeto como havia vislumbrado. Porém, deixou para a história a sua visão - o seu sonho de uma "máquina de raciocínio universal".

3.2 A Lógica vista como Álgebra

Aristóteles (384 a.C.) foi a primeira pessoa a fazer um estudo sistemático da lógica. Sua lógica foi aceita e tida como única por mais de dois milênios[a]. Somente em 1854, com o trabalho de George Boole, que a lógica teve de fato um avanço em relação à lógica aristotélica.

Vale ressaltar que até então, vários conceitos que tomamos como triviais, como conectivos e operações lógicas e tabelas de verdade não eram conhecidos nesta época.

3.2.1 George Boole (1815-1864)

Boole foi quem iniciou a simbolização da lógica, utilizando em uma linguagem artificial para descrever o que Aristóteles havia feito em grego. Ele idealizou que as relações lógicas poderiam ser expressas por uma espécie de álgebra.

Boole percebeu que um conceito importante para o raciocínio lógico é o de classe. A classe representa todas as coisas descritas por uma palavra. Por exemplo, na sentença: "Algumas pessoas falam português", a palavra "pessoas" está se referindo à classe de todas as pessoas[b]. Boole então começou a utilizar letras para representar classes, da mesma forma que já eram utilizadas para representar números. Se a classe x corresponde à classe de "cachorros" e a classe y à classe de "coisas marrons", xy corresponde à classe das coias que pertencem tanto a x quanto à y, ou seja, a classe de "cachorros marrons". Boole percebeu que essa operação era muito semelhante à multiplicação aplicada aos números. Mas havia uma diferença: se x continuasse a corresponder à classe de "cachorros", que classe xx estaria representando? Seriam os cachorros que são cachorros, ou seja, xx = x. Parece um resultado trivial, mas pode-se dizer que Boole baseou todo seu sistema de lógica nesta equação[c].

Boole então pensou: na álgebra tradicional, que números fazem a equação $xx = x$ ser verdadeira? Podemos facilmente verificar que ela só será verdadeira se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$. Isso levou Boole à conclusão de que a álgebra da lógica era igual à álgebra comum, porém com o domínio restringido aos números 0 e 1. Agora, só faltava a interpretação do 0 e 1 como classes: o 0 então corresponderia à classe à qual nada

[a] existiram outras lógicas nesse período. A mais famosa é a dos estóicos. Porém, por ter sido encarada como rival da lógica aristotélica, e não tendo resistido ao tempo, acabou caindo no ostracismo

[b] Aqui podemos pensar em classes como uma terminologia semelhante a de conjunto

[c] Essa operação é muito semelhante a uma que Leibniz havia descrito 2 séculos antes: $A \oplus A = A$

pertence, e o 1 à classe onde tudo pertence[d]. Boole ainda deu interpretações para a operação $x + y$, sendo a classe das coisas que estão em x ou em y, e para a operação $x - y$, representando a classe das coisas que estão em x, mas não em y. Especialmente, $1 - x$ representa a classe de todas as coisas que não estão em x. Essa álgebra apresentada por Boole é o que conhecemos hoje como *álgebra booleana*.

Voltando à regra básica de Boole: $xx = x$. Podemos reescrevê-la como $x - xx = 0$, e então, deixando o x em evidência, $x(1 - x) = 0$. Se analisarmos esta fórmula, ela representa que *nada pode pertencer e não pertencer a uma determinada classe.* Isso representa o que Aristóteles dizia ser o mais certo de todos os princípios, a fonte de todos os outros axiomas: o princípio da contradição.

Boole percebeu que seu sistema capturava todos os silogismos aristotélicos, e ainda outros raciocínios que não eram silogísticos. Apesar de ter ficado longe de completar o sonho de Leibniz, ele mostrou que a dedução lógica poderia ser desenvolvida como um ramo da matemática.

3.2.2 Gottlob Frege (1848 - 1925)

Frege foi um filósofo, lógico e matemático alemão. É considerado por muitos como pai da filosofia analítica e, além de suas notórias contribuições para a lógica e matemática, teve muita importância no desenvolvimento da filosofia da linguagem.

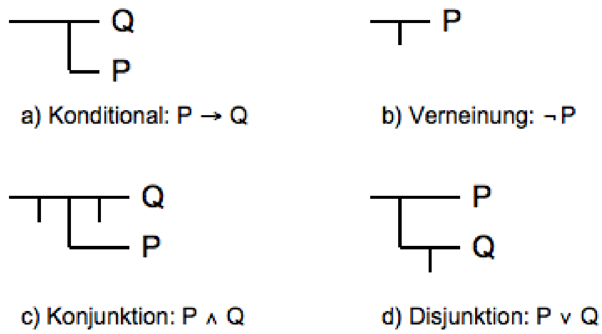
Um de seus principais trabalhos é o livro *Begriffsschrift* (FREGE, 1879). Com menos de 100 páginas, sua tradução grosseira do alemão seria algo como "*ideografia*". O título completo pode ser entendido como "*uma fórmula de linguagem, modelada da aritmética, do pensamento puro*".

Nesse trabalho, Frege buscou formular um sistema lógico que incluísse todas as inferências dedutivas da prática matemática. Mas ao contrário de Boole, que utilizou a álgebra como ponto de partida para representar relações lógicas, Frege queria que a álgebra, assim como outras partes da matemática, fosse construída utilizando a lógica como fundação. Frege então achou importante introduzir seus próprios símbolos para representar as relações lógicas.

Vale ressaltar que a linguagem de Frege é bem diferente do que estamos acostumados hoje. Ela possuía uma notação bi-dimensional e não possuía os conectivos "e" e "ou", utilizando a implicação material combinada com a negação para atingir a mesma

[d] Na notação moderna, chamamos de conjunto vazio e conjunto universal, respectivamente

Figura 3.1: Notação utilizada por Frege em seu livro Begriffsschrift



Fonte: (FREGE, 1879)

semântica, como podemos ver na figura 3.1.

Além disso, Frege foi além da lógica proposta por Boole. Em seu livro, foi introduzido um conceito fundamental para o desenvolvimento da lógica, o conceito de quantificador.

Com a introdução dessa simbologia, Frege não estava apenas desenvolvendo um tratamento matemático da lógica, mas também estava criando uma nova linguagem, com regras de sintaxe bem definidas. Com isso, tornou-se possível mostrar inferências lógicas como operações puramente mecânicas, as então chamadas regras de inferência. Deste ponto de vista, a linguagem de *Begriffsschrift* é a ancestral de todas as linguagens de programação utilizadas atualmente.

Algum tempo depois, Frege publica o primeiro volume de seu trabalho *Grundgesetze der Arithmetik* (1893). Seu objetivo era criar uma teoria puramente lógica para fundamentar a matemática. Essa ideia corresponde a uma corrente de pensamento que conhecemos como *logicismo*, que diz que a matemática é um ramo da lógica. Porém, logo antes de lançar o segundo volume, Frege recebe uma carta que o abalou profundamente.

Em 1902, Bertrand Russell (1872 - 1970) escreve para Frege para contar o que achou de seu trabalho. Na carta, Russell congratula Frege, e diz que concorda com o que Frege havia escrito. Porém, Russell descreveu um ponto do trabalho onde encontrou uma dificuldade. Ele então descreve como conseguiu chegar a uma contradição a partir do sistema formulado por Frege (HEIJENOORT, 1967). Esse problema é o que conhecemos hoje como Paradoxo de Russell. Em linhas gerais, o paradoxo nasce ao tentar criar um conjunto que contém todos os conjuntos que não contém a si mesmo. Esse conjunto pertence a si mesmo? Se sim, ele não deveria conter a si mesmo. Se não, então ele deveria conter a si mesmo.

Com esse paradoxo, Russell mostrou que contradições poderiam ser derivadas das regras fundamentais que constituíam o sistema de Frege. Ou seja, as premissas que o sistema se apoiava eram insustentáveis. Frege nunca se recuperou desse golpe.

3.2.3 Bertrand Russell (1872 - 1970)

Russell também comenta na carta sobre seu próprio trabalho que estava desenvolvendo juntamente com Alfred Whitehead, o *Principia Mathematica.* Constituído de 3 volumes, foram lançados em 1910, 1912 e 1913. Escrito em defesa do logicismo, o livro foi de grande importância no desenvolvimento da lógica matemática moderna, além de servir como impulso na pesquisa sobre os fundamentos da matemática durante o século XX. Juntamente com o *Organon* de Aristóteles e *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, permanece um dos livros mais influentes de lógica já escrito (LINSKY; IRVINE, 2019).

3.3 A Crise nos Fundamentos da Matemática

Entre o final do século XIX e o início do século XX, vários matemáticos (além dos já citados anteriormente) haviam tentado, sem sucesso, criar fundações consistentes para a matemática. Porém, essa busca era sempre desafiada pelos paradoxos que iam sendo descobertos. Essa busca ficou conhecida como a crise dos fundamentos da matemática.

3.3.1 Metamatemática

Em 1900 ocorreu uma conferência internacional de matemática em Paris, para discutir os rumos da área no século que chegava. David Hilbert (1862 - 1943), matemático já famoso na época, propôs 23 problemas inacessíveis com os métodos existentes na época. Em especial, o problema de número 2 era provar que os axiomas da aritmética eram consistentes.

Apenas nos anos 20 Hilbert buscou resolver de fato esse problema. Ele começou suas investigações com o mesmo objetivo de Frege e Russell, tentando definir número de uma forma puramente lógica. Mas ele logo julgou esse objetivo como insustentável. Nesse contexto, Hilbert formula seu novo programa, onde a matemática e a lógica seriam desenvolvidas juntas em uma linguagem simbólica puramente formal.

Pode-se pensar nesta linguagem sob 2 perspectivas: vista de “dentro” e de “fora”. De dentro, é justamente a matemática. De fora, é apenas um aglomerado de fórmulas e símbolos, que podem ser manipulados sem preocupação com seu significado. A ideia de Hilbert era um novo tipo de matemática: a *metamatemática* ou *teoria da prova.*

Em 1928, Hilbert propõe 2 “novos” problemas sobre a lógica do *Begriffsschirift*, também conhecida como lógica de primeira ordem. Os problemas já pairavam no ar há algum tempo, mas o “insight” de Hilbert sobre um sistema lógico poder ser visto “de fora” mudou a formulação dos problemas.

O primeiro problema era provar que a lógica de primeira ordem é *completa.* Para isso, qualquer fórmula que seja válida quando vista de fora do sistema deve poder ser derivada de dentro do sistema, utilizando apenas as regras do próprio sistema. O segundo problema ficou mais famoso, sendo conhecido como *Entscheidungsproblem*, ou *Problema da Decisão.* O objetivo é fornecer um método que, dada uma fórmula da lógica de primeira ordem, determinar em um número finito e bem definido de passos se a fórmula é válida ou não.

Ainda em 1928, em um congresso matemático, Hilbert propôs um novo problema, ainda sobre a lógica de primeira ordem, mas aplicada a um sistema axiomático dos números naturais, conhecidos atualmente como aritmética de Peano. Hilbert queria uma prova de que a AP era *completa*, significando que pra cada proposição que pode ser expressa em AP, deve poder ser provado em AP que a proposição é verdadeira ou falsa.

Dois anos depois, um jovem lógico solucionou esse problema, mas não como Hilbert esperava.

3.3.2 A Solução (in)esperada

Em 1924, nascia o Círculo de Viena. Seus participantes, um grupo de filósofos e cientistas, abordavam metafísica tradicional, enquanto acreditavam que um importante objetivo da filosofia deveria ser o desenvolvimento e estudo de sistemas simbólicos como o desenvolvido em Principia, que abrangeria não apenas a matemática, mas também a ciência empírica. Wittgenstein também foi importante para o nascimento do grupo, mas isso será abordado no próximo capítulo. Kurt Gödel (1906 - 1978) começou a frequentar essas reuniões em 1926.

Como tema de sua tese de doutorado, Gödel escolheu o problema proposto por Hilbert, sobre a *completude* do sistema proposto por Frege. Nessa época, dois estudantes de Hilbert, Ackermann e John von Neumann, pareciam estar caminhando em direção a uma prova da consistência para a AP. Ambos haviam encontrado provas para subsistemas de AP, crendo que apenas dificuldades técnicas os separavam da prova final. Gödel falhou ao tentar encontrar a prova, e ainda acabou provando ser impossível realizar tal façanha. Com isso, Gödel começou a pensar sobre o que seria ver um sistema lógico “de fora”, ao contrário de “de dentro”. Russell e Whitehead mostraram que poderia se construir a matemática comum dentro de um sistema. Hilbert propôs usar a metamatemática para estudar esses sistemas de fora. Então porque a metamatemática não poderia ser desenvolvida dentro de um sistema lógico formal? Visto de fora, esses sistemas envolvem relações entre string de simbolos. De dentro, esses sistemas podem expressar proposições sobre vários objetos matemáticos, incluindo números. Mais ainda, não é difícil pensar em maneiras que strings de símbolos podem ser codificados por números naturais. Usando tais códigos, o “fora” pode ser trazido para “dentro”.

3.4 Nasce a Computação

Em 1936, artigos de Church, Kleene, Turing e Post foram publicados, cada um dando uma definição para a noção de computabilidade efetiva (GANDY, 1988). Todas as definições foram mostradas serem equivalentes. Porém, a definição que mais repercutiu foi a de Turing. Como Gödel afirmou(WARNER, 1994, p. 71)[e]:

> “Parece que a importância [da computabilidade definida por Turing] se deve em grande parte ao fato de que, com esse conceito, pela primeira vez alguém conseguiu dar uma definição absoluta de uma noção epistemológica interessante, isto é, uma que não depende do formalismo escolhido.”

Neste trabalho vamos explorar os trabalho de Church e Turing. Podemos imaginar que Turing e Church chegaram a seus resultados vindo de direções opostas. De um lado, Church havia construído um sistema lógico, e depois o utilizou para fazer qualquer operação possível. Do outro lado, Turing imaginou o que seria realizar uma tarefa mecanicamente e tentou reduzir o máximo possível as ações que um humano deveria fazer para calcular tudo que poderia ser calculado. Depois passou esse conceito para uma máquina.

Por seu aspecto intuitivo, neste trabalho irei focar na computabilidade definida

[e]Tradução do autor.

por Turing, porém, na maioria das vezes, ela se estende aos outros modelos. Além disso, irei utilizar o formalismo proposto por Church - o *Cálculo Lambda* (CHURCH, 1941) como base de comparação para o formalismo definido por Wittgenstein no TLP.

3.4.1 Alan Turing (1912 - 1954)

Na primavera de 1935, Alan Turing, um matemático de Cambridge, participou de um curso sobre os fundamentos da matemática. Nesse curso, estudou sobre o problema da decisão de Hilbert, o *Entscheidungsproblem*, além do teorema da incompletude de Gödel. Depois do trabalho que Gödel desenvolveu, parecia difícil encontrar um algoritmo tal qual Hilbert desejava. Turing começou a pensar em como provar que tal algoritmo de fato não existia.

Mas para encontrar tal prova, Turing deveria primeiro especificar o que algoritmos seriam capazes de fazer. Para isso, ele imaginou o que uma pessoa, seguindo estritamente uma lista de instruções, seria capaz de fazer. Por exemplo, podemos ensinar alguém a multiplicar dois números naturais, seguindo um algoritmo - o que de fato é ensinado na escola para as crianças. Além disso, podemos fazer algoritmos para somar, dividir, subtrair, integrar, diferenciar, fatorar primos, etc. Mas qual é o limite disso? Para qualquer problema existe um algoritmo que o resolve? Para responder isso, Turing tentou focar no que era extremamente necessário para alguém seguir um algoritmo. Ele então chegou à conclusão do que era necessário: uma fita de papel, um instrumento de escrita, um meio de leitura, um conjunto de estados mentais e um conjunto finito de instruções ou regras para computar. Com isso, Turing cria a Máquina de Turing (MT). Com esse formalismo em mãos, podemos dizer então que se não existe uma máquina de Turing que seja capaz de completar alguma tarefa, então não existe um processo mecânico (algoritmo) que possa completar tal tarefa. Utilizando este conceito, Turing então prova que não existe um algoritmo para o *Entscheidungsproblem*.

Além disso, Turing mostrou como construir (matematicamente) uma máquina de Turing capaz de fazer o que qualquer outra máquina de Turing é capaz. Essa máquina é a Máquina Universal de Turing, um modelo do que viria a se tornar o computador de propósitos gerais que conhecemos hoje.

3.4.2 Alonzo Church (1903 - 1995)

Do outro lado do oceano, um jovem matemático americano também estava investigando os fundamentos da matemática. Ele e seu grupo estavam focados em definir objetos matemáticos e raciocínio lógico em um sistema que utilizava os conceitos de função e aplicação. Esse sistema ganhou o nome de *Cálculo Lambda* (CL). Com esse formalismo, Church também conseguiu provar a indecidibilidade do *Entscheidungsproblem*, em seu artigo de 1936 (CHURCH, 1936). Neste mesmo artigo, Church define as funções "efetivamente computáveis" como funções definíveis na linguagem Lambda. É interessante notar que o artigo de Church foi publicado algumas semanas antes do artigo de Turing.

3.4.3 A Tese de Church-Turing

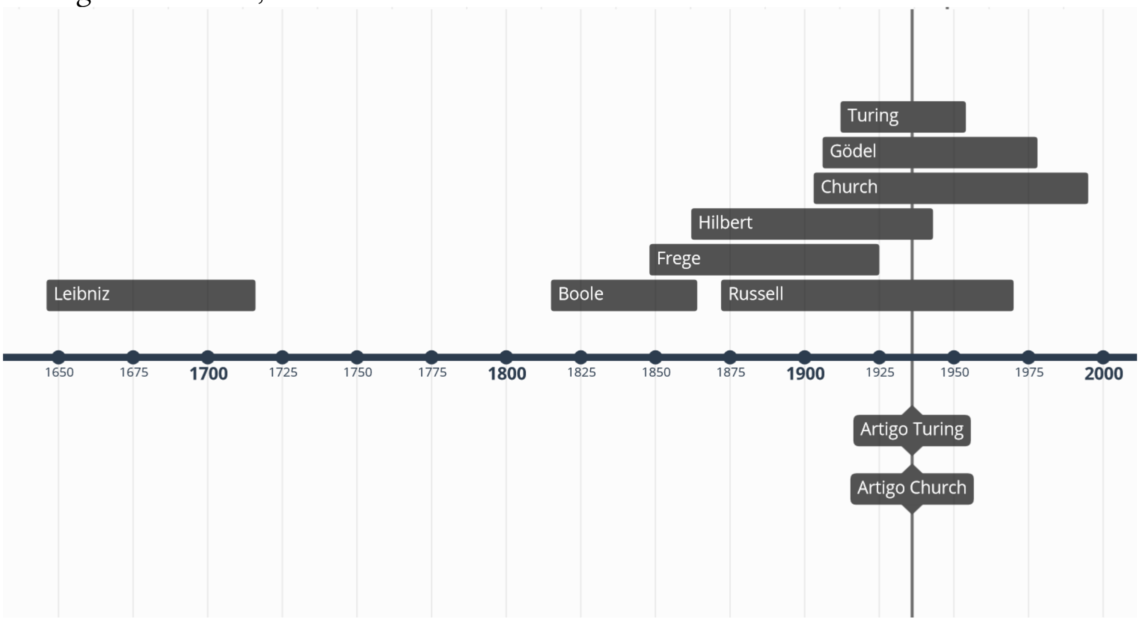
Mas como sabemos que não existe uma função computável que não possa ser computada por uma MT? A resposta é: não sabemos. A teoria da computação se baseia na hipótese de que isso é verdade, conhecida como *tese de Church-Turing*.

Existem várias formulações equivalentes dessa tese. A mais comum afirma que toda computação efetiva pode ser realizada por uma máquina de Turing. Em outras palavras, "A capacidade de computação representada pela máquina de Turing é o limite máximo que pode ser atingido por qualquer dispositivo de computação" (DIVERIO; MENEZES, 1999). Como a noção de função computável é intuitiva, a tese de Church-Turing não é demonstrável.

3.5 Resumo das principais pessoas e eventos

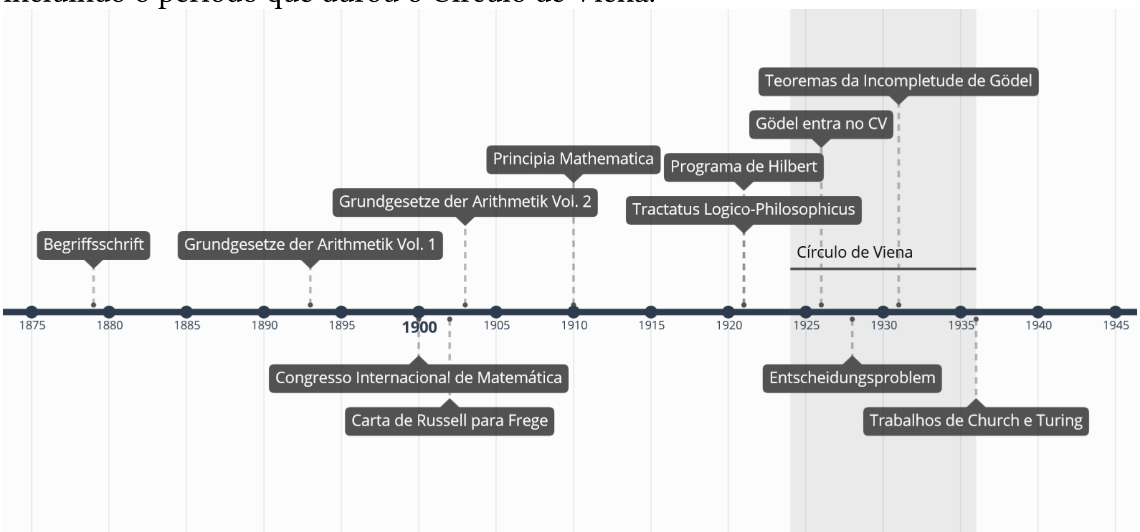
A fim de contextualizar temporalmente os fatos apresentados neste capítulo, foram criadas duas linhas de tempo: a primeira, apresentada na Figura 3.2 apresenta o período de vida dos principais atores mencionados neste capítulo; a segunda, apresentada na Figura 3.3 registra os principais eventos citados, em particular os anos das primeiras publicações de certas obras.

Figura 3.2: Linha do tempo mostrando o período de vida das pessoas citadas neste capítulo. Dois eventos importantes também estão marcados: as publicações dos artigos de Turing e de Church, ambos no mesmo ano.



Fonte: Imagem criada pelo autor.

Figura 3.3: Linha do tempo mostrando os principais eventos descritos neste capítulo, incluindo o período que durou o Círculo de Viena.



Fonte: Imagem criada pelo autor.

4 WITTGENSTEIN E O NASCIMENTO DA COMPUTAÇÃO

> O cérebro eletrônico faz tudo
> Faz quase tudo
> Quase tudo
> Mas ele é mudo
>
> *Cérebro Eletrônico*, Gilberto Gil

Como visto no capítulo anterior, os artigos publicados em 1936 consumaram o nascimento da ciência da computação. Pela primeira vez, foram dadas definições precisas do que seria computabilidade efetiva. Mas também, como vimos, suas definições não apareceram por acaso. Uma série de pensadores foram responsáveis pelos avanços lógicos e matemáticos do final do século XIX e início do XX, que possibilitaram o desenvolvimento dessas novas ideias.

Em geral, os pensadores citados no capítulo anterior são de conhecimento amplo por estudantes de computação. Contudo, Wittgenstein usualmente não se encontra entre eles, apesar de algumas de suas ideias estarem em consonância com a obra dessas figuras históricas. Neste capítulo, irei apresentar ideias e conceitos que aparecem na obra de Wittgenstein, que possuem relação com os artigos de 1936. Para este efeito, estaremos interessados nos trabalhos que Wittgenstein desenvolveu anteriormente a 1936, em especial, na obra *Tractatus Logico-Philosophicus* (TLP).

A análise de suas relações será dividida em três partes:

1. A primeira levará em conta os aspectos da linguagem que Wittgenstein aborda no TLP e a noção de computabilidade apresentada por Turing em seu artigo (TURING, 1936);
2. A segunda parte será mais técnica, comparando o formalismo definido por Wittgenstein no TLP - a *Teoria Geral das Operações* (TGO) com o formalismo proposto por Church no Cálculo Lambda (CHURCH, 1936).
3. A terceira será focada em explorar as influências que o TLP teve sobre o *Zeitgeist* matemático e lógico das décadas de 20 e 30.

4.1 Linguagem e Computação

Como mostrado no capítulo anterior, o conceito de linguagem sempre andou lado a lado com a lógica, matemática e computação. Leibniz imaginou uma linguagem universal, chamada *characteristica universalis*, que abrangeria todo o escopo do pensamento humano. Juntamente com o *calculus ratiocinator* – um conjunto de regras lógicas – seria possível calcular todas as relações lógicas existentes entre as sentenças da linguagem. Já Boole utilizou uma linguagem existente para abarcar a lógica. Utilizando a álgebra convencional, ele conseguiu explicitar relações e raciocínios lógicos entre proposições através do cálculo algébrico. Frege foi além. Ele não só introduziu um novo conceito, o de quantificadores, como também deu um grande passo notacional, criando sua própria linguagem, com regras de sintaxe bem definidas. Russell também criou sua própria linguagem, para tentar contornar o paradoxo que havia encontrado no formalismo de Frege. Hilbert, por sua vez, ao pensar na metamatemática imaginou uma linguagem que falaria sobre outra linguagem, uma *metalinguagem* matemática. Church criou o Cálculo Lambda como uma linguagem formada por termos lambda, com regras de transformação dos termos. Por fim, quando Turing formalizou sua *máquina automática*, imaginou um mecanismo que realizaria nada mais que manipulações simbólicas.

É inegável que há uma relação muito estreita entre linguagem e computação. Ora, Wittgenstein foi um expoente da filosofia da linguagem. Foi ele que iniciou a virada linguística, com o TLP (RORTY, 1992, p. 63), que é a ênfase que os filósofos começaram a dar para a linguagem. A seguir, serão apresentados os conceitos de computabilidade definido por Turing em seu artigo “On computable numbers with and application to the Entscheidungsproblem” e o conceito de linguagem definido por Wittgenstein no TLP. Em seguida, será elaborado um paralelo entre o conceito de computabilidade, em especial, os números computáveis e a ideia apresentada no TLP sobre os limites da linguagem.

4.1.1 Os limites da máquina

4.1.1.1 Números computáveis

Quando Turing escreveu seu artigo OCN (TURING, 1936), ele estava interessado em números reais computáveis. De fato, há pouca diferença entre um número computável e uma função computável (COPELAND, 2019). Para definir o que é um número computável, ele define a *automatic machine (a-machine)*, o que hoje conhecemos como *Máquina de Turing* (MT). Não entraremos em detalhes sobre a definição formal de uma MT, que pode ser encontrada em Diverio and Menezes (1999). Neste mesmo livro, encontramos também uma definição mais intuitiva:

> Basicamente, uma máquina de Turing é um mecanismo simples, que formaliza a ideia de uma pessoa que realiza cálculos, usando um instrumento de escrita e um apagador.

Um número computável, por sua vez, pode ser definido como (MOL, 2019):

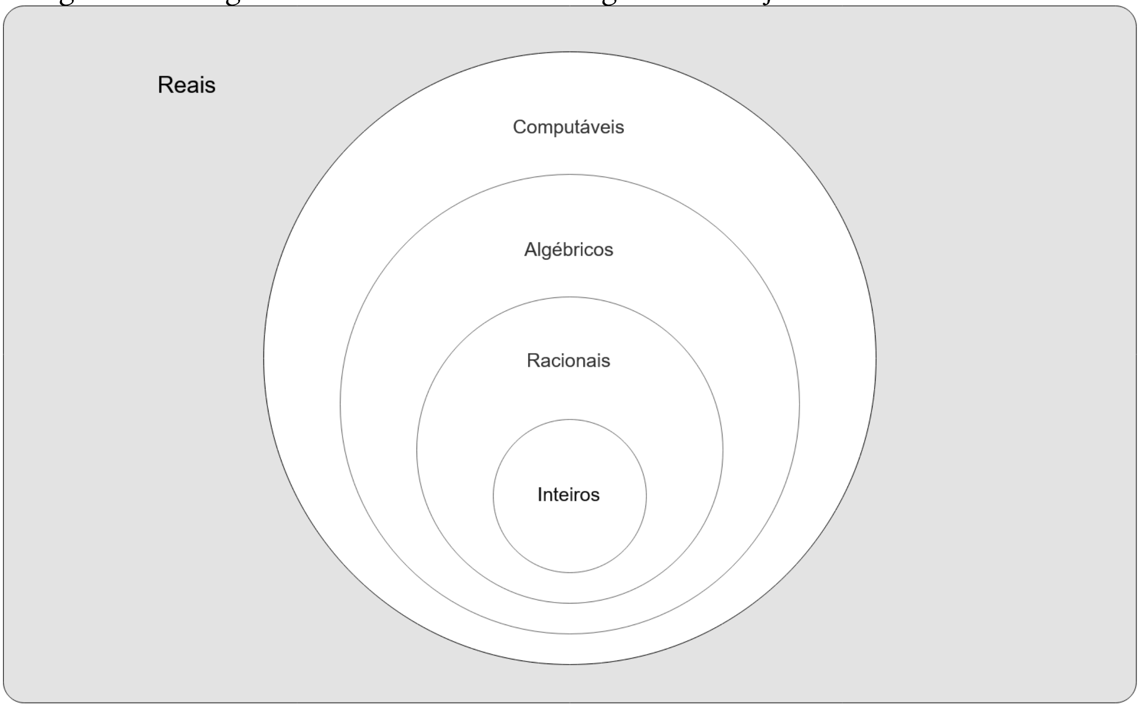
> Um número real é dito computável se existe uma máquina de Turing que computa uma aproximação arbitrariamente precisa daquele número.

Mas o que isso quer dizer, na prática? Bom, se existe uma máquina de Turing para computar o número, é porque existe um procedimento, ou melhor, um algoritmo capaz de computar este número. Logo, todos os números algébricos são computáveis, pois existe uma fórmula algébrica – um método – para obtê-los. Isso inclui os números naturais, inteiros, racionais e alguns irracionais, como $\sqrt{2}$, que pode ser obtido através da equação $x^2 = 2$. Mas também alguns números transcendentais, ou seja, que não são algébricos, também são computáveis. Dois exemplos bem conhecidos são os números e e π, que apesar de não serem algébricos, existem métodos para obtenção de aproximações deles.

Além disso, Turing demonstra que o conjunto dos números computáveis é enumerável, ou seja, é apenas um subconjunto próprio dos números reais. Como Cantor mostrou (FERREIRóS, 2019), a cardinalidade de qualquer conjunto enumerável é igual a cardinalidade do conjunto dos Naturais, denotada por $\aleph_0$ (alef-zero). Cantor também mostrou que a cardinalidade dos números reais, denotada por $\mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo) é maior que a dos Naturais, i.e., $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Com isso, podemos dizer que existem muito mais números reais que não conhecemos, e que não há nenhum método para encontrá-los.

A Figura 4.1 mostra um diagrama que representa os números reais e alguns de seus subconjuntos. A parte em branco representa todos os números que podem ser obtidos através de algum algoritmo. A parte cinza representa os números incomputáveis, ou seja, que não podem ser obtidos por nenhum processo mecânico. Essas definições podem ser entendidas como as formas de descrição dos números: os inteiros podem ser

Figura 4.1: Diagrama de Euler mostrando alguns subconjuntos dos números reais.



Fonte: Imagem gerada pelo autor.

descritos por um número natural com sinal, os racionais pela razão entre dois números inteiros, os algébricos como a raiz de uma equação e os computáveis por um algoritmo.

4.1.1.2 Codificação

No capítulo "Enumeration of computable sequences" de OCN, Turing mostra uma maneira de transformar a descrição de uma MT em um número natural, utilizando o que ele chama de $S.D.$ (*Standard Description*). Ele mostra que cada máquina pode ser associada, de maneira unívoca, a um $D.N.$ (*Description Number*). Turing também provou a existência de uma máquina universal de Turing, cujo comportamento é o de simular qualquer máquina que possa ser construída, apenas dando seu $D.N.$ como entrada.

Dado uma regra d para obter um $D.N.$ a partir de uma Máquina de Turing M, podemos criar o conjunto de todas os números que codificam MT's por

$$T_d = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists M, d(M) = x\}$$

Podemos perceber que, apesar de todas as MT terem um número natural associado, nem todos os números naturais tem uma MT associada. Dado que ambos conjuntos são infinitos contáveis, é possível criar uma função biunívoca de codificação de programas, como podemos ver no capítulo 9.3 de Diverio and Menezes (1999). Vamos denominar tal função $f : T_D \rightarrow \mathbb{N}$ (não entraremos aqui nos detalhes de construção da mesma). Por simplicidade, vamos denotar M_n como a Máquina de Turing associada (biunivocamente) ao natural n.

Dado um $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é computado por M_n quando, ao executar M_n na fita inicialmente vazia, a mesma escreve uma aproximação arbitrariamente precisa para a expansão dos dígitos de x. Indicaremos essa relação como

$$M_n \rightarrow_c x$$

lendo-se *"A máquina M, codificada por n, computa x"*.

4.1.1.3 O incomputável

Com as definições da seção anterior, podemos definir o conjunto de todos os números computáveis:

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (\exists y,\ y \in \mathbb{N} \wedge M_y \rightarrow_c x)\}$$

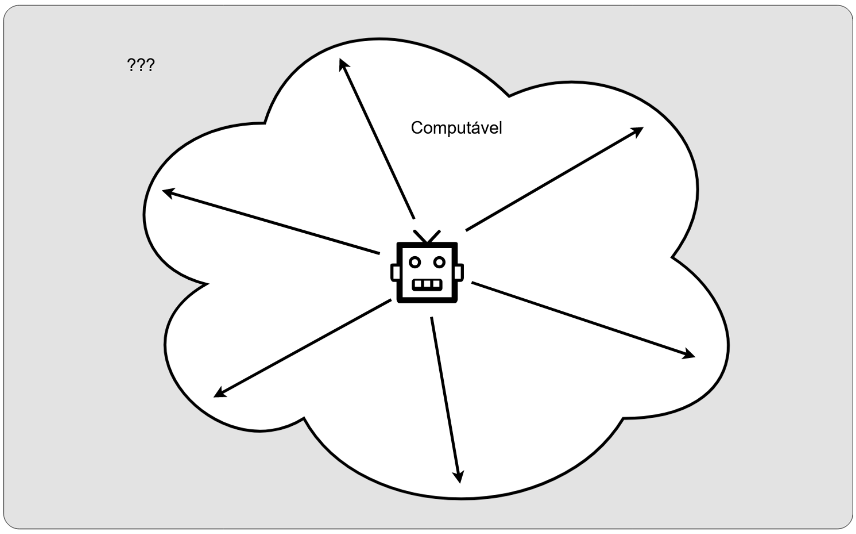
A partir do conjunto C, podemos definir o conjunto I de todos os reais entre 0 e 1 que não são computáveis:

$$I = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge x \notin C\} \tag{4.1}$$

Agora, vamos escolher um elemento qualquer de I, chamando de n. Qual seria um possível valor de n? Não pode ser nenhum número algébrico, pois, como vimos, eles são computáveis. Tampouco podemos escolher o π ou o e, pois existem séries que os aproximam com precisão arbitrária. De fato, não conseguimos apresentar explicitamente nenhum elemento de I, pois, se pudéssemos, teríamos um método para obtê-lo, gerando uma contradição.

A figura 4.2 é uma ilustração do limite das máquinas propostas por Turing, e, por consequência, de todas as máquinas e processos automáticos que possam ser construídos (COPELAND, 2019). No centro está a máquina universal. As setas representam todas as possíveis MT emuladas pela máquina universal. Em branco estão todos os números possíveis de serem obtidos por qualquer máquina. Em cinza, os números incomputáveis, impossíveis de serem obtidos por um algoritmo.

Figura 4.2: Ilustração do limite das máquinas.



Fonte: Imagem gerada pelo autor.

4.1.2 Os limites da linguagem

Como visto em 2.2.1, a construção lógica de um sistema filosófico no *Tractatus Logico-Philosophicus* (TLP) tem um objetivo: encontrar os limites do mundo, do pensamento e da linguagem (BILETZKI; MATAR, 2018). Como o próprio autor descreve na introdução de sua obra:

> O livro pretende, pois, traçar um limite para o pensar, ou melhor - não para o pensar, mas para a expressão dos pensamentos: a fim de traçar um limite para o pensar, deveríamos poder pensar os dois lados desse limite (deveríamos, portanto, poder pensar o que não pode ser pensado). O limite só poderá, pos, ser traçado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contra-senso.

4.1.2.1 Proposições

Wittgenstein apresenta sua solução, baseado na lógica e na natureza da representação. Segundo Wittgenstein, para definir os limites da linguagem, é preciso estabelecer as condições que uma proposição deve seguir para que ela tenha sentido. Tudo o que não segue estas condições estará fora do escopo das proposições dotadas de sentido. Isto não quer dizer que este algo não exista, mas sim que ele não pode ser descrito por meio da linguagem. Estabelecer estas condições é encontrar o que há de comum em todas as proposições dotadas de sentido, a essência da proposição. Mas o que é possuir sentido? Para

Wittgenstein, uma proposição tem sentido se desempenha a função de simbolizar ou representar de uma maneira precisa alguma coisa. Compreender uma proposição consiste em saber que figuração ou modelo da realidade ela projeta. Por meio de uma proposição significativa, formamos uma representação possível da realidade (MARQUES, 2005). Os aforismos *4.01* e *4.024* apresentados abaixo, respectivamente, expressam bem essa ideia:

> A proposição é uma figuração da realidade. A proposição é um modelo da realidade tal como pensamos que seja.

> Entender uma proposição significa saber o que é o caso se ela for verdadeira.

Quando digo "o cachorro está à esquerda do carro", estou descrevendo uma situação que pode fazer parte do mundo. Entendemos seu sentido se soubermos as condições que devem ser satisfeitas pelo mundo para que ela possa ser verdadeira. Nessa definição, é imprescindível que haja um vínculo entre as proposições e a realidade.

4.1.2.2 Sentido vs. Contra-senso

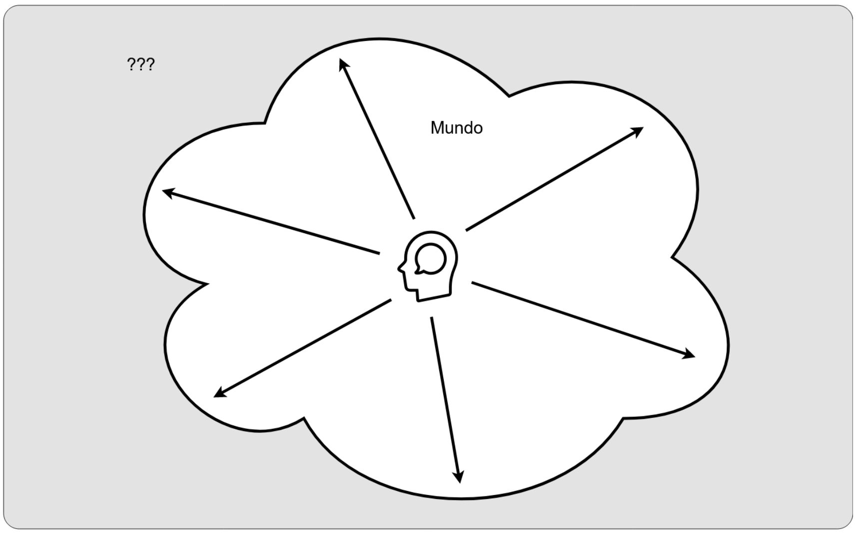
Então, pode-se dizer que o objetivo do TLP, de traçar os limites da linguagem, pode ser entendido como a distinção de proposições com sentido e contra-sensos.

Como vimos, para ter sentido, uma proposição deve poder ser representada ou figurada. As proposições da lógica, por exemplo, não representam estados das coisas, portanto, não possuem sentido. Porém não são contra-sensos. Um contra-senso se dá quando a proposição transcende os limites do sentido. Apenas o que está "dentro" do mundo pode ser descrito. O que está "acima" é excluído. Como vemos no aforismo *4.12*:

> A proposição pode representar toda a realidade, mas não pode representar o que deve ter em comum com a realidade para poder representá-la – a forma lógica.
> Para podermos representar a forma lógica, deveríamos poder-nos instalar, com a proposição, fora da lógica, quer dizer, fora do mundo.

Apesar disso, Wittgenstein não joga tudo que está fora dos limites do sentido para o esquecimento. Ele distingue entre *dizer* e *mostrar*. "O que pode ser mostrado, não pode ser dito" [4.1212]. Isso quer dizer que o que não pode ser colocado em palavras, pode apenas ser mostrado. Isso se aplica, por exemplo, à forma lógica do mundo (BILETZKI; MATAR, 2018). O indizível na filosofia (metafísica, ética, estética), também pertence a

Figura 4.3: Ilustração do limite da linguagem.



Fonte: Imagem gerada pelo autor.

este grupo, que Wittgenstein descreve no aforismo *6.522*:

> Há por certo o inefável[a]. Isso se *mostra*, é o Místico.

Na imagem 4.3, está representado essa ideia de que a linguagem é o limite do nosso mundo. As setas representam as proposições dotadas de sentido. Na parte em cinza estão os contra-sensos.

4.1.3 Máquina vs. Linguagem

Como podemos ver na imagem 4.4, os limites definidos por Wittgenstein para a linguagem e os limites definidos para Turing para a computação são análogos em alguns sentidos. A analogia começa comparando a mente humana e a máquina universal. Não pretendo aqui argumentar em prol de uma teoria computacional da mente, propondo que nossa mente funciona tal qual um computador, mas apenas utilizar esta comparação para a argumentação.

A máquina universal proposta por Turing é capaz de computar números. Não apenas isso, mas, como visto em 3.4.3, ela é capaz de computar qualquer número que possa ser computado.

[a]Que não pode ser nomeado, designado ou descrito, por ser naturalmente complexo, intenso ou belo; indescritível; o que não pode ser expresso verbalmente

4.1.3.1 O incomputável e o indizível

Vamos definir um número ω, tal que ω pertença ao conjunto I, definido em 4.1. Para facilitar, definiremos ele em base binária. Ele inicia com um zero (0) seguido de um ponto. Após o ponto, definimos o dígito da n-ésima casa decimal de ω pela função $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{, se a MT codificada por n não pára com a entrada vazia} \\ 1 & \text{, se a MT codificada por n pára com a entrada vazia} \end{cases}$$

Uma ilustração de ω pode ser vista a seguir:

$$\boxed{0}\;\bullet\;\boxed{g(1)}\boxed{g(2)}\boxed{g(3)}\boxed{g(4)}\boxed{g(5)}\boxed{g(6)}\;\bullet\bullet\bullet$$

Podemos nos perguntar: ω é computável?

É uma conclusão imediata da não computabilidade do problema da parada (MOL, 2019) que ω seja não computável. Então acabamos de definir um número não-computável. Se assumirmos a existência dos números reais, então esse número de fato existe. Em algum lugar, no contínuo dos reais, entre 0 e 1, está o número que acabamos de definir. Porém não consigo escrevê-lo aqui. E mais: nunca ninguém conseguirá escrevê-lo, a não ser que se utilize de algum recurso que vá além do computável.

No TLP, Wittgenstein chega à conclusão, no aforismo número *5.6* de que:

> Os limites da minha linguagem significam os limites de meu mundo.

Isso se parece com a conclusão que Turing chega em seu artigo, sobre os limites da computabilidade. Os limites do formalismo proposto e, consequentemente, da linguagem proposta pelo formalismo, significam os limites do que é computável por ele.

4.1.3.2 Raciocínio reflexivo

Agora voltando ao ω. Sua incomputabilidade se segue da não computabilidade do problema da parada. Porém como sabemos que o problema da parada não é computável? Uma prova pode ser vista em (MOL, 2019). Ou seja, um ser humano (Alan Turing) realizou a prova utilizando o formalismo de Turing como ferramenta. Será que o ser humano é necessário? Ou melhor: uma máquina universal de Turing é capaz de decidir sua própria computabilidade? Isto é:

Teorema 4.1.1. *Dada a descrição de um número, não existe uma máquina capaz de dizer se esse número é computável ou não.*

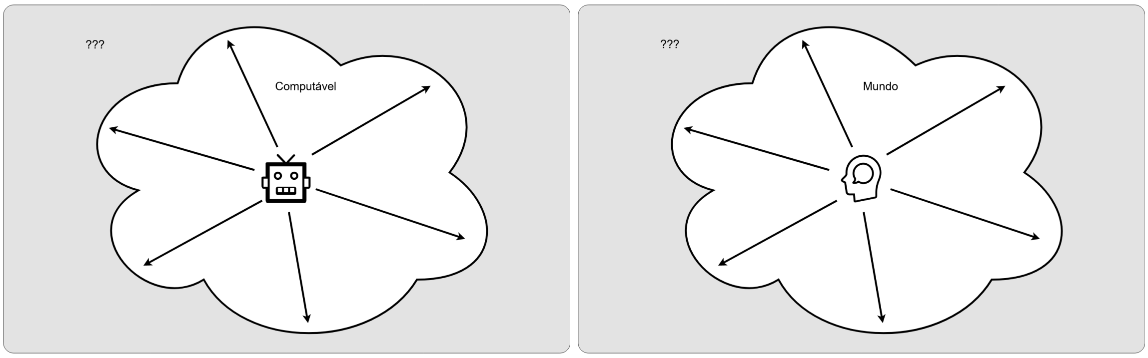
Prova. Assumiremos que tal máquina M_c existe. Sua entrada é a descrição de um número e sua saída é 1 caso o número seja computável, ou 0 caso seja incomputável. Como a descrição de um número entre 0 e 1 em binário pode ser dada por uma função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, tal qual a descrição anterior de ω, a entrada de M_c é dada pelo $D.N.$ de uma outra MT M_{in}, cujo comportamento é de uma função total. Logo, M_c pode ser vista como uma instância do *Problema da Totalidade* (PT), ou seja, uma MT que verifica se o comportamento de outra MT dada como entrada (através do seu $D.N.$, por exemplo) é o de uma função total. Caso seja total, todos os dígitos do número podem ser computados, i.e., o número é computável. Caso contrário, nem todos os dígitos do número podem ser computados, i.e., o número não é computável. O Problema da Totalidade é um exemplo clássico problema indecidível. A prova é realizada através de uma redução do Problema da Parada para ele, sendo tal redução comumente apresentada em livros de introdução à Teoria da Computação tais como (SIPSER, 1996). □

Logo, concluímos que não basta considerarmos algum problema e darmos à máquina para ela dar como resultado sua possível computabilidade. Uma pessoa, através do raciocínio, deve tentar encontrar uma prova de que o problema em questão não pode ser resolvido mecanicamente, utilizando a máquina universal como ferramenta. Com isso, podemos dizer que a definição do que é computável em um formalismo e, consequentemente, do incomputável, não vem de dentro do próprio formalismo, e sim de fora, de um meta-formalismo. Em outras palavras, *a máquina não consegue computar a própria computabilidade.*

No TLP, Wittgenstein afirma que, apesar das proposições poderem representar toda a realidade, elas não podem representar o que deve ter em comum com a realidade para poder representá-la - a forma lógica, como mostrado em 4.1.2.2. Ou seja, As figurações não podem figurar sua própria forma figurativa.

Essa afirmação, além de estar de acordo com a conclusão que acabamos de chegar acerca dos limites do computável, lembra o teorema da incompletude de Gödel. Parece haver algo intrínseco aos sistemas de uma maneira geral, uma barreira sobre o meta-raciocínio, que os impedem de se “ver de fora”. Wittgenstein parecia já estar ciente disso

Figura 4.4: Comparação dos limites da linguagem e da computação.



Fonte: Imagem gerada pelo autor.

ao menos uma década antes dos trabalhos de Gödel e de Turing.

4.2 Teoria Geral das Operações e Cálculo Lambda

Além de aspectos filosóficos sobre o que é a linguagem, operações, proposições, etc, podemos encontrar no TLP algumas definições formais interessantes sob o aspecto da computação. Os principais são as da definições de número e de multiplicação, encontrados nos aforismos *6.02* e *6.241*, respectivamente. Frascolla (1994) já havia notado a semelhança entre a definição de número do TLP e a do Cálculo Lambda, porém apenas citou em uma nota de rodapé. Já Marion (1998) explicita mais essa relação em seu livro[b]:

> A noção de 'operação' [encontrada no TLP] é intensional; isso levou Wittgenstein a uma definição de números naturais que antevê a definição dada no cálculo lambda por Church e outros mais de dez anos após a publicação do Tractatus Logico-Philosophicus.

Neste trabalho, vamos entrar mais profundamente na relação entre as definições dadas por Wittgenstein e por Church, principalmente das operações aritméticas. Para isso, precisamos primeiramente entender as definições do Cálculo Lambda.

4.2.1 Cálculo lambda

Como visto no capítulo anterior, o Cálculo Lambda (CL) foi utilizado por Church em seu artigo de 1936 (CHURCH, 1936) para definir computabilidade efetiva e então

[b]tradução do autor

provar a indecidibilidade do *Entscheidungsproblem*. O Cálculo Lambda é, em sua essência, uma notação simples e elegante para funções e aplicação. O resultado é uma teoria de funções como regras de computação, diferente do conceito de funções sobre conjuntos (ALAMA; KORBMACHER, 2019).

Por exemplo, considere a função polinomial f definida abaixo:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

O que acontece quando avaliamos a função f para $x = 2$? Nós *substituímos* x por 2 na função, como segue:

$$\begin{aligned}
&f(2) = 2^4 - 3 * 2^2 + 4 \\
&f(2) = 16 - 3 * 4 + 4 \\
&f(2) = 16 - 12 + 4 \\
&f(2) = 8
\end{aligned}$$

Na notação lambda, representamos a função f como:

$$\lambda x.(x^4 - 3x^2 + 4)$$

Chamamos isso de *abstração lambda*. Note que a função, que antes tinha um nome (f), agora não tem mais. De fato, uma função não precisa ter um nome. Agora, seguindo no mesmo raciocínio que fizemos para a função f, iremos avaliar o termo lambda para $x = 2$. Para isso, utilizamos o conceito de *aplicação lambda*, como se segue:

$$\begin{aligned}
&(\lambda x.(x^4 - 3x^2 + 4)) \quad 2 \\
&(2^4 - 3 * 2^2 + 4) \\
&16 - 3 * 4 + 4 \\
&16 - 12 + 4 \\
&8
\end{aligned}$$

Para realizar a computação desta função, foi utilizado o principal axioma do Cálculo Lambda (axioma-β), mostrado a seguir:

$$(\lambda x.M)N = M[x \leftarrow N]$$

Podemos ler como: para aplicar o λ-termo N em $(\lambda x.M)$, basta substituirmos todas as ocorrências de x em M por N. Esse é o principal axioma do Cálculo Lambda. Basicamente o que ele afirma é que o resultado de uma aplicação é calculado via substituição. Quando utilizamos essa equação da esquerda para a direita, estamos fazendo uma β-redução. Existe também o axioma-α e a respectiva operação de α-redução, o qual renomeia nomes de parâmetros e suas respectivas ocorrências em um dado termo.

O Cálculo Lambda consiste de uma linguagem e um conjunto de regras que permite a verificação de igualdade entre os termos da linguagem. A seguir, definimos a linguagem e regras do Cálculo Lambda puro.

Primeiramente, vamos definir a *linguagem lambda*. Ela é definica como o conjunto de todos os *termos lambda* sobre um conjunto de variáveis. Vamos utilizar a definição exposta no livro de Diverio and Menezes (1999).

Definição. *Termo Lambda*
*Seja **V** um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Então, um termo lambda (λ-termo) é definido indutivamente como segue:*
i) Variável*:* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *é um λ-termo.*
ii) Abstração Lambda*: Se **M** é um λ-termo e* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$*, então* $(\lambda x.M)$ *é um λ-termo.*
iii) Aplicação Lambda*: Se **M** e **N** são λ-termos, então* (MN) *é um λ-termo.*

As regras são as seguinte:

- *Redução alfa* - renomeação de variáveis ligadas;
- *Redução beta* - aplicação de uma função a um argumento, via substituição;
- *Redução iterada* - sucessiva aplicação de qualquer das reduções acima.

A definição acima corresponde ao Cálculo Lambda *puro*, no qual não existem primitivas para o conceito de número, operação aritmética, tipos booleanos, etc. Isso faz parte de sua simplicidade e elegância. Entretanto, todos esses conceitos podem ser definidos, codificando os mesmos através de funções específicas. No capítulo 8 do livro de Diverio and Menezes (1999) diversas codificações são apresentadas: para esta trabalho estaremos particularmente interessados nas codificações de número e operações aritméticas originalmente propostas por Church.

4.2.2 Codificação de Church

Em seu artigo, Church utiliza uma codificação para representar dados e operações utilizando λ-termos. Essa codificação é conhecida como *codificação de Church.* Termos primitivos em outros sistemas, como inteiros, booleanos, tuplas, são codificados em funções de alta ordem, ou seja, que recebem outras funções como parâmetro. Os *numerais de Church* são funções de alta ordem que recebem dois argumentos, f e x, sendo o número representado definido pela quantidade de vezes que f é aplicada sobre o argumento x. Por exemplo:

$$\begin{array}{rclcll} \lambda f.\ \lambda x.\ x & \rightarrow & 0 & = & 0 & Def. \\ \lambda f.\ \lambda x.\ f\ x & \rightarrow & 0+1 & = & 1 & Def. \\ \lambda f.\ \lambda x.\ f(f\ x) & \rightarrow & 0+1+1 & = & 2 & Def. \\ \lambda f.\ \lambda x.\ f(f(f\ x)) & \rightarrow & 0+1+1+1 & = & 3 & Def. \\ & \vdots & & & & \end{array} \tag{4.2}$$

A função multiplicação usa a identidade:

$$f^{(m \times n)} = (f^n)^m \quad Def. \tag{4.3}$$

Traduzindo para o Cálculo Lambda, temos:

$$(\_ \times \_) = \lambda m.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ m\ (n\ f)\ x \quad Def. \tag{4.4}$$

Exemplo: 2 x 3:

$$\begin{array}{ll} & (\lambda m.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ m\ (n\ f)\ x) \quad (\lambda f.\ \lambda x.\ f(fx)) \quad (\lambda f.\ \lambda x.\ f(f(fx))) \\ \rightarrow & (\lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f(fx))\ (n\ f)\ x) \quad (\lambda f.\ \lambda x.\ f(f(fx))) \\ \rightarrow & \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f(fx))\ ((\lambda f.\ \lambda x.\ f(f(fx)))\ f)\ x \\ \rightarrow & \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f(fx))\ (\lambda x.\ f(f(fx)))\ x \\ \rightarrow & \lambda f.\ \lambda x.\ f(f(f(f(f(fx))))) \end{array}$$

4.2.3 Teoria Geral das Operações

No TLP, encontramos algumas definições acerca de operações. Frascolla (1994) chama isso de *Teoria Geral das Operações*, ou, TGO. Para Wittgenstein, uma operação é como uma proposição pode ser gerada a partir de outra (WITTGENSTEIN; SANTOS, 1994, 6.002). Wittgenstein utiliza o conceito de operação para definir alguns conceitos interessantes. Por exemplo, no aforismo *6.02*, encontramos uma definição de número muito semelhante ao que foi proposto por Church, no Cálculo Lambda:

$$x = \Omega^{0\prime}x \quad Def. \tag{4.5}$$

$$\Omega'\Omega^{v\prime}x = \Omega^{v+1\prime}x \quad Def. \tag{4.6}$$

$$\begin{array}{rcclcll} x = & \Omega^{0\prime}x & = & \Omega^{0\prime}x & \rightarrow & 0 & = & 0 \quad Def. \\ \Omega'x = & \Omega^{0+1\prime}x & = & \Omega^{1\prime}x & \rightarrow & 0+1 & = & 1 \quad Def. \\ \Omega'\Omega'x = & \Omega^{0+1+1\prime}x & = & \Omega^{2\prime}x & \rightarrow & 0+1+1 & = & 2 \quad Def. \\ \Omega'\Omega'\Omega'x = & \Omega^{0+1+1+1\prime}x & = & \Omega^{3\prime}x & \rightarrow & 0+1+1+1 & = & 3 \quad Def. \\ & & & \vdots & & & & \end{array} \tag{4.7}$$

4.2.4 Definição de Multiplicação

Além disso, encontramos no TLP uma definição de multiplicação no aforismo *6.241*, juntamente com o cálculo da expressão 2×2:

$$(\Omega^v)^{\mu\prime}x = \Omega^{v\times\mu\prime}x \quad Def. \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \Omega^{2\times 2\prime}x &= (\Omega^2)^{2\prime}x = (\Omega^2)^{1+1\prime}x \\ &= \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x = \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x \\ &= \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1\prime}x = \Omega^{4\prime}x \end{aligned}$$

Wittgenstein não se aprofundou nessas definições, como mostrado por Frascolla (1994). Por exemplo, em sua computação de 2×2, Wittgenstein utiliza uma regra que não está descrita no TLP, que Frascolla define como:

$$(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi \tag{4.9}$$

com ξ sendo qualquer termo da linguagem.

Agora vamos experimentar fazer uma multiplicação que não está no livro. Por exemplo, 2 x 3:

$$\begin{array}{lll}
 & \Omega^{2\times3\prime}x & \\
= & (\Omega^2)^{3\prime}x & \text{Por 4.8} \\
= & (\Omega^2)^{1+1+1\prime}x & \text{Por 4.7} \\
= & (\Omega^2)'(\Omega^2)^{1+1\prime}x & \text{Por 4.6, com } \Omega^2 \text{ no lugar do } \Omega^{\text{c}} \\
= & (\Omega^2)'(\Omega^2)'(\Omega^2)^{1\prime}x & \text{Idem} \\
= & \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x & \text{Expoente 1 é cortado, assim como os parênteses} \\
= & \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x & \text{Por 4.7} \\
= & (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x & \text{Por 4.9} \\
= & \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x & \text{Por 4.9} \\
= & \Omega^{1+1+1+1+1+1\prime}x & \text{Por 4.6} \\
= & \Omega^{6\prime}x & \text{Por 4.7}
\end{array}$$

Podemos perceber que o cálculo de Wittgenstein também segue a noção de substituibilidade, tal qual apresentada por Church como axioma principal do *Cálculo Lambda*. De fato, Wittgenstein afirma no aforismo de número *6.24* do TLP:

> O método pelo qual a matemática chega a suas equações é o método de substituição. Pois as equações exprimem a substituibilidade de duas expressões, e passamos de um certo número de equações a novas equações substituindo expressões por outras expressões de acordo com as equações.

Logo, além de propor um formalismo muito semelhante ao de Church, Wittgenstein também apresenta de uma maneira menos formal a regra de cálculo mais importante do CL.

[c] (FRASCOLLA, 1994, p. 15)

4.2.5 Estendendo a Teoria Geral das Operações

Como vimos, a definição de número e de multiplicação são muito similares entre o Cálculo Lambda e a TGO. Podemos então tentar estender a TGO para além do exposto por Wittgenstein. Frascolla (1994) faz algo neste sentido definindo a soma, mas ele atinge esse objetivo com uma linguagem modificada em relação à notação definida por Wittgenstein. Aqui, manterei a mesma notação fornecida no TLP.

4.2.5.1 Soma

Partindo da definição de soma no Cálculo Lambda dada por Church, conseguimos chegar a uma definição para a soma na TGO:

$$(\Omega^{v})'(\Omega^{\mu})'x = \Omega^{v+\mu\prime}x \quad Def. \tag{4.10}$$

Exemplo: 2 + 3:

$$\begin{array}{lll} & \Omega^{2+3\prime}x & \\ = & (\Omega^{2})'(\Omega^{3})'x & \text{Por } 4.10 \\ = & \Omega^{2\prime}\Omega^{3\prime}x & \text{Os parênteses são cortados} \\ = & \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1+1\prime}x & \text{Por } 4.7 \\ = & (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega)' & \text{Por } 4.9 \\ = & \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x & \text{Por } 4.9 \\ = & \Omega^{1+1+1+1+1\prime}x & \text{Por } 4.6 \\ = & \Omega^{5\prime}x & \text{Por } 4.7 \end{array}$$

Vamos tentar juntas as duas em um exemplo:

Exemplo 2 * (2 + 3)

$$
\begin{array}{lll}
 & \Omega^{2\times(2+3)\prime}x & \\
= & (\Omega^2)^{(2+3)\prime}x & \text{Por } 4.8 \\
= & ((\Omega^2)^2)'((\Omega^2)^3)'x & \text{Por } 4.10 \\
= & ((\Omega^2)^{1+1})'((\Omega^2)^{1+1+1})'x & \text{Por } 4.7 \\
= & ((\Omega^2)'(\Omega^2)^1)'((\Omega^2)'(\Omega^2)^{1+1})'x & \text{Por } 4.6 \\
= & ((\Omega^2)'(\Omega^2)^1)'((\Omega^2)'(\Omega^2)'(\Omega^2)^1)'x & \text{Por } 4.6 \\
= & (\Omega^{2\prime}\Omega^2)'(\Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}\Omega^2)'x & \text{Expoente 1 e parênteses internos cortados} \\
= & \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x & \text{Parênteses externos cortados} \\
= & \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x & \text{Por } 4.7 \\
= & (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x & \text{Por 4.9} \\
= & \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x & \text{Por 4.9} \\
= & \Omega^{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\prime}x & \text{Por 4.6} \\
= & \Omega^{10\prime}x & \text{Por 4.7}
\end{array}
$$

De fato, a definição parece estar correta. Apesar do objetivo deste trabalho não seja estender a TGO, este exercício nos revelou ainda mais a similaridade com o Cálculo Lambda. Na tabela 4.1 podemos ver um resumo das similaridades descritas nesta seção.

Tabela 4.1: Comparativo entre o Cálculo Lambda e a TGO

	Álgebra	Cálculo Lambda	TGO	Fonte
Número	n	$\lambda f.\ \lambda x.\ f^n\ x$	$\Omega^{n\prime}x$	TLP 6.02
Multiplicação	$n \times m$	$\lambda m.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ m\ (n\ f)\ x$	$(\Omega^n)^{m\prime}x$	TLP 6.241
Soma	$n + m$	$\lambda m.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x)$	$(\Omega^m)'(\Omega^n)'x$	Autor

Como visto, a relação entre o formalismo da TGO, definido por Wittgenstein no TLP tem muitas semelhanças com o formalismo CL, de Church. Isso vai além das definições da linguagem, se estendendo até a maneira que os cálculos são feitos - pelo princípio da substituibilidade. Não sabemos se Church de fato foi influenciado pelas ideias contidas no TLP. Porém, apesar de não ser o primeiro autor a dar importância à operação de substituição (a mesma é mencionada no Principia Mathematica), podemos afirmar que Wittgenstein também já havia reconhecido a sua importância como base para a matemática pelo menos uma década antes de Church.

4.3 Wittgenstein e o Círculo de Viena

Como visto anteriormente, o conceito de computabilidade aparece em mais de um lugar praticamente ao mesmo tempo. O descobrimento de conceitos, métodos e teoremas simultaneamente por pessoas diferentes não é tão incomum na matemática e nas ciências. Um exemplo clássico é o desenvolvimento do cálculo por Newton e Leibniz. Como sugerido por Gandy (1988) em seu artigo, existia alguma coisa "no ar" no início dos anos 1930. Nesta seção vou argumentar que o trabalho de Wittgenstein ajudou a formar o *Zeitgeist* matemático e lógico desta época, que culminou com o nascimento da computação.

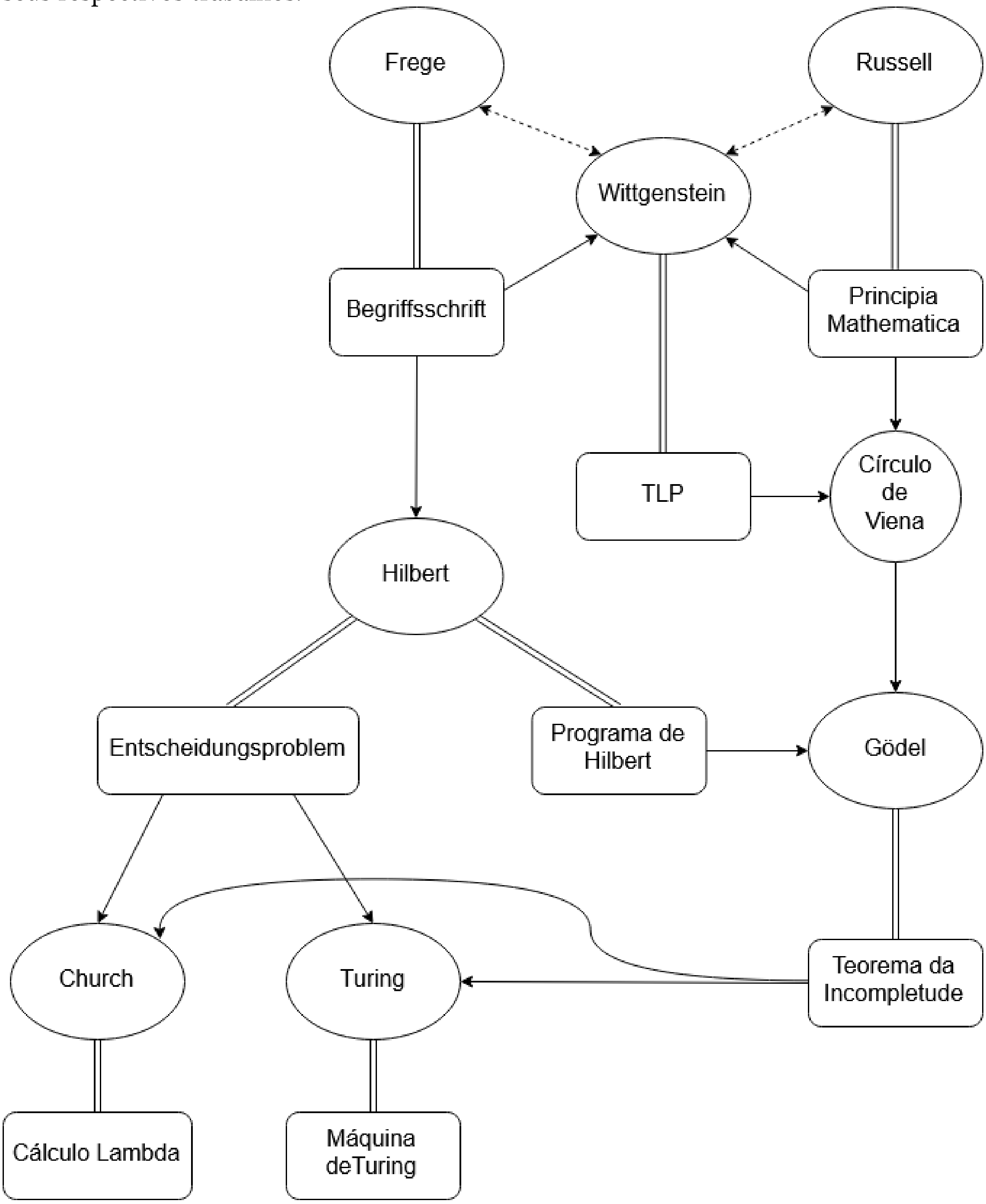
Depois da Primeira Guerra, durante os anos que Wittgenstein passou fora da vida acadêmica e da filosofia, seu recém lançado livro começou a se popularizar. Vários filósofos estavam ansiosos para conhecer o autor do enigmático TLP. Um desses filósofos era Moritz Schlick, que em 1924 iniciou o *Círculo de Viena* (CV), um grupo de acadêmicos, principalmente filósofos, matemáticos, lógicos e físicos, que foi fortemente influenciado pelo TLP, além dos trabalhos de Frege e Russell.

Apesar de haverem discordâncias entre seus membros em vários aspectos, o que os unia era a visão de mundo estritamente científica. Em seu manifesto de 1929, eles aclamaram Einstein, Russell e Wittgenstein como os maiores representantes dessa visão de mundo. Talvez os membros do CV não percebessem ou ignorassem que Wittgenstein não compartilhava dessa visão. Na verdade, Wittgenstein não acreditava no progresso pela ciência. Ele inclusive criticava essa busca incessante pelo conhecimento científico. Mas isso não impediu o CV de enxergar a importância do trabalho de Wittgenstein. Schlick gastou dois anos lendo o TLP linha por linha com seus colegas (KANTERIAN, 2007). Apenas em 1927 Wittgenstein se encontrou pessoalmente com o CV. A relação entre ele e o grupo era como de um guru e seus discípulos. Porém Wittgenstein parecia fazer pouco caso das reuniões, como da vez em que ele se virou de costas para a audiência e começou a recitar poemas (KANTERIAN, 2007, p. 116).

Mas o que o CV tem a ver com o nascimento da computação? Bom, além de ajudar a criar o "ar" filosófico e lógico da época, um de seus membros era Kurt Gödel, matemático já mencionado no capítulo anterior, que foi de suma importância no nascimento da computação. Por ter feito parte do CV, é plausível assumir com um certo grau de segurança que Gödel estava familiarizado com (ou no mínimo conhecia) o trabalho de Wittgenstein.

Na figura 4.5 temos um grafo das relações entre vários dos pensadores que foram importantes na história do nascimento da ciência da computação. Esse grafo não tem a pretensão de ser exaustivo, mas sim de explicitar as relações que estão documentadas e que foram importantes neste contexto. As elipses representam os pensadores. Os retângulos, os trabalhos ou ideias referentes aos autores. As linhas duplas ligam seus autores a suas obras ou ideias. O círculo representa um grupo de pessoas. As setas direcionadas representam relações entre trabalhos/ideias e outros pensadores. As setas bidirecionais serrilhadas representam uma relação pessoal direta entre os pensadores.

Figura 4.5: Grafo mostrando a relação entre os principais nomes descritos no trabalho e seus respectivos trabalhos.



Fonte: Imagem criada pelo autor.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões gerais

Neste trabalho, foi apresentado uma breve biografia de Wittgenstein, bem como uma história resumida do nascimento da computação. Além disso, foi dado um enfoque na obra que Wittgenstein desenvolveu durante a Primeira Guerra Mundial, o TLP, bem como nos artigos de 1936 que consolidaram o nascimento da computação, especialmente os artigos de Church e de Turing.

Após essa contextualização, foram traçados paralelos entre as ideias presentes no TLP e os conceitos encontrados nos artigos.

As similaridades encontradas se dividiram em três pontos: primeiramente, foram investigadas as semelhanças entre o conceito de computabilidade definido por Turing e o limites da linguagem encontrados no TLP. Essa semelhança, apesar de estar em um nível mais filosófico, não deixa de ser relevante. De fato, não temos provas de que Turing já estava familiarizado com o trabalho de Wittgenstein anteriormente à 1936. Sabemos que em 1939, Turing frequentou aulas sobre os fundamentos da matemática lecionadas por Wittgenstein, onde era um aluno ativo (WITTGENSTEIN; BOSANQUET; DIAMOND, 1989). Mas como ambos estudaram em Cambridge, e o TLP havia ficado popular entre seus alunos, há uma boa chance de que Turing já estivesse ciente da obra do filósofo, mesmo antes de frequentar suas aulas.

Na segunda parte, foi feita uma comparação entre o formalismo encontrado no TLP, a TGO, e o formalismo definido por Church, o Cálculo Lambda. Essa relação é mais explícita, tanto que pelo menos dois autores já haviam percebido sua existência (FRASCOLLA, 1994) (MARION, 1998) sem, porém, aprofundar as comparações entre os formalismos. Neste trabalho, conseguimos investigar essas semelhanças em um nível técnico, chegando à conclusão de que os formalismos de fato são muito similares, utilizando as mesmas ideias como base.

Por fim, foram evidenciadas as relações e influências que o trabalho de Wittgenstein teve no “espírito” da época, especialmente no nascimento do Círculo de Viena. Embora o filósofo não compartilhasse de suas visões de mundo, seu trabalho era aclamado pelo círculo. Como visto, as contribuições matemáticas de um de seus membros, Kurt Gödel, foi de grande importância para o nascimento da computação. Novamente, não podemos afirmar que Gödel havia de fato se espelhado em alguma ideia do TLP para chegar aos seus resultados, mas sabemos que o TLP estava intimamente ligado à filosofia do CV.

5.2 Trabalhos relacionados

Como vimos, alguns autores já haviam percebido a ligação entre o formalismo do TLP e do Cálculo Lambda. Frascolla (1994) faz um estudo da TGO, identificando algumas regras ignoradas por Wittgenstein em seu formalismo e então expandindo a notação proposta. Porém, ele apenas cita a semelhança encontrada com o Cálculo Lambda. Já Marion (1998) explicita mais essa relação, mas não entra tanto em aspectos técnicos.

Já o livro de Warner (1994), apresenta uma história do computador partindo da escrita, até chegar à máquina "computador". Ele menciona Wittgenstein em algumas partes, relacionando seu pensamento com a linguagem. Porém, não é encontrado um paralelo explícito entre as ideias dele e a computação propriamente dita.

Saindo do "primeiro Wittgenstein", o trabalho de Leme (2018) busca utilizar conceitos do "segundo Wittgenstein", especificamente o de "forma de vida", para fazer uma crítica ao representacionalismo na teoria da computação.

5.3 Trabalhos futuros

Neste trabalho, o foco da investigação foi o TLP, pois estávamos interessados em sua obra anterior ao nascimento da ciência da computação. Porém, existe uma fase de transição do pensamento de Wittgenstein, que compreende os primeiros anos após seu retorno à Cambridge (1929). Boa parte do trabalho desenvolvido por ele nesta época ainda foi escrito antes de 1936. Seria interessante utilizar as ideias do "Wittgenstein intermediário" e fazer uma investigação semelhante à realizada sobre as ideias do "primeiro Wittgenstein" neste presente trabalho.

Além disso, como visto na seção 4.2.5, podemos pensar em estender o TGO para além do descrito por Wittgenstein. Pode ser relevante investigar até que ponto podemos estender esse formalismo e verificar o que faltaria pra ele ser equivalente ao Cálculo Lambda.

REFERÊNCIAS

ALAMA, J.; KORBMACHER, J. The lambda calculus. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Spring 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

BILETZKI, A.; MATAR, A. Ludwig wittgenstein. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

CHURCH, A. An unsolvable problem of elementary number theory. **American Journal of Mathematics**, v. 58, 1936. ISSN 00029327.

CHURCH, A. **The Calculi of Lambda-Conversion**. [S.l.]: Princeton University Press, 1941.

COPELAND, B. J. The church-turing thesis. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Spring 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

DAVIS, M. **Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer**. [S.l.]: Norton, 2001. ISBN 9780393322293.

DIVERIO, T.; MENEZES, P. **Teoria da computação: máquinas universais e computabilidade**. [S.l.]: Sagra-Luzzato, 1999. (Série Livros Didáticos). ISBN 9788524105937.

FERREIRóS, J. The early development of set theory. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

FRASCOLLA, P. **Wittgenstein's Philosophy of Mathematics**. [S.l.]: Routledge, 1994. ISBN 9780415024839.

FREGE, G. **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens**. [S.l.]: L. Nebert, 1879.

GANDY, R. The confluence of ideas in 1936. In: **A Half-century Survey on The Universal Turing Machine**. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1988. p. 55–111. ISBN 0-19-853741-7.

HEIJENOORT, J. V. **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931**. [S.l.]: Harvard University Press, 1967. (Source books in the history of the sciences). ISBN 9780674324497.

KANTERIAN, E. **Ludwig Wittgenstein**. [S.l.]: Reaktion Books, 2007. ISBN 9781861893208.

LEME, R. R. **Programação como forma de vida : uma crítica ao representacionalismo na teoria da computação**. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2018.

LINSKY, B.; IRVINE, A. D. Principia mathematica. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Fall 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

MARION, M. **Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics**. [S.l.]: Clarendon Press, 1998. (Oxford philosophical monographs). ISBN 9780198235163.

MARQUES, E. **Wittgenstein & o Tractatus**. [S.l.]: Jorge Zahar Editor Ltda, 2005. ISBN 9788571108646.

MOL, L. D. Turing machines. In: ZALTA, E. N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Winter 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

MONK, R. **Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius**. [S.l.]: Penguin Books, 1991. ISBN 9780140159950.

MORRIS, M. **Routledge Philosophy GuideBook to Wittgenstein and the Tractatus**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2008. (Routledge Philosophy GuideBooks). ISBN 9780203003091.

RORTY, R. **The Linguistic Turn: Essays in Philosophical Method**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1992. ISBN 9780226725697.

SIPSER, M. **Introduction to the Theory of Computation**. 1st. ed. [S.l.]: International Thomson Publishing, 1996. ISBN 053494728X.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 2, n. 42, p. 230–265, 1936.

WARNER, J. **From Writing to Computers**. [S.l.: s.n.], 1994. ISBN 041509612X,9780415096126,9780203303412.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. **Principia Mathematica**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1910–1913.

WITTGENSTEIN, L. **The Blue and Brown Books**. [S.l.]: HarperCollins, 1965. (Harper Perennial Modern Thought). ISBN 9780061312113.

WITTGENSTEIN, L.; BOSANQUET, R.; DIAMOND, C. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1989. ISBN 9780226904269.

WITTGENSTEIN, L. et al. **Philosophical Remarks**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1980. (A Phoenix book). ISBN 9780226904313.

WITTGENSTEIN, L.; RHEES, R.; KENNY, A. **Philosophical Grammar**. [S.l.]: University of California Press, 1978. (Philosophical Grammar). ISBN 9780520037250.

WITTGENSTEIN, L.; SANTOS, L. H. L. dos. **Tractatus logico-philosophicus**. [S.l.]: EDUSP, 1994. ISBN 9788531400933.