



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A  
APRENDIZAGEM DE PROJEÇÃO ORTOGONAL**

**LUCAS SIVIERO SIBEMBERG**

Porto Alegre  
2019

**LUCAS SIVIERO SIBEMBERG**

**GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A  
APRENDIZAGEM DE PROJEÇÃO ORTOGONAL**

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2019

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de matemática

**GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A  
APRENDIZAGEM DE PROJEÇÃO ORTOGONAL**

Lucas Siviero Sibemberg

Banca examinadora:

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Márcia Rodrigues Notare Meneghetti  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Dedico este trabalho a meu avô Ângelo  
Siviero (*in memoriam*), pois sei que ele  
estaria orgulhoso de mim.

## AGRADECIMENTOS

Nesta página gostaria de fazer um singelo agradecimento à algumas pessoas que foram importantes para que esse momento chegasse. Por isso, gostaria de agradecer:

à minha namorada - e futura noiva - Gabriela, por ser o amor de minha vida e ter me auxiliado a corrigir esse trabalho nas normas da ABNT;

aos meus pais, Roselia e Francisco, pelo amor incondicional e pelo apoio na minha escolha de curso;

ao meu irmão, Gabriel, por colocar a irmandade acima de tudo;

à minha orientadora, Márcia Notare, por aceitar ser minha orientadora e pela bela orientação feita;

à banca examinadora, Marcus e Vandoir, pela análise e sugestões feita;

à professora regente da turma 2M1 Maria Amélia e a escola Parobé, por ter me permitido aplicar minha sequência na escola e terem confiado em mim;

a todos professores, principalmente os de matemática, que ajudaram na minha caminhada;

aos meus avós, Salomão e Geny, meus primos, meus tios e tias, por todo o carinho e consideração;

à toda família de minha namorada, principalmente meus sogros Miriam e Tarcísio;

a todos meus amigos que me ajudaram no meu caminho;

a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar como o software dinâmico GeoGebra 3D pode potencializar a compreensão de projeção ortogonal no Ensino Médio. Essa pesquisa foi realizada com uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do estado do Rio Grande do Sul. A sequência didática apoiou-se em dez tarefas, distribuídas em seis encontros, em que foi solicitado que os alunos explorassem e construíssem as projeções ortogonais dos mais variados objetos (pontos, retas, sólidos, movimentos, etc.). Os dados coletados foram analisados sob os estudos de Gutiérrez (1996) envolvendo visualização espacial, habilidades espaciais e geometria dinâmica. Concluímos que o GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento das habilidades espaciais de alguns alunos e, principalmente, para a construção de situações onde a projeção ortogonal é solicitada. E, também, acreditamos que há uma necessidade dos alunos explorarem construções com projeção ortogonal antes de se aventurarem em construí-las. A geometria dinâmica foi importante para que os alunos verificassem situações não triviais que aparentam ser.

**Palavras-chave:** Visualização Espacial. Habilidades Espaciais. Geometria Dinâmica. Tecnologia Digital. Geometria Espacial.

## ABSTRACT

This paper aims to analyze how the dynamic software GeoGebra 3D can enhance the understanding of orthogonal projection in high school. This research was carried out with a class of the second year of high school of a school of the state network of the state of Rio Grande do Sul. The didactic sequence was based on ten tasks, distributed in six meetings, in which the students were asked to explore and build orthogonal projections of the most varied objects (points, lines, solids, movements, etc.). The collected data were analyzed under the studies of Gutiérrez (1996) involving spatial visualization, spatial abilities and dynamic geometry. We conclude that GeoGebra contributed to the development of some students spatial skills and, mainly, to the construction of situations where orthogonal projection is required. Also, we believe there is a need for students to explore orthogonal projected buildings before venturing to build them. Dynamic geometry was important for students to verify nontrivial situations that appear to be.

Keywords: Spatial Visualization. Space Skills. Dynamic Geometry. Digital Technology. Spatial Geometry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Questão Sobre Projeção Ortogonal do ENEM 2013.....	15
Figura 2 – Principais elementos de visualização na solução de uma tarefa matemática.....	19
Figura 3 – Questão de geometria espacial.....	21
Figura 4– Solução 1 para questão.....	21
Figura 5– Solução 2 para questão.....	22
Figura 6– Representações convencionais de uma pirâmide.....	23
Figura 7– Representações não convencionais de uma pirâmide.....	23
Figura 8– Desenhos com possíveis representações de um mesmo objeto.....	24
Figura 9– Representações Ortogonais de Um Cilindro.....	24
Figura 10 – Representações ortogonais de um conjunto de cubos.....	25
Figura 11 – O conjunto de cubos (a), a representação desejada (b) e o desenho do estudante (c).....	26
Figura 12– Interface GeoGebra.....	27
Figura 13 – Projeção ortogonal de faces de dois cubos congruentes no plano $xOy$ .....	28
Figura 14 – Diferenças entre as projeções ao movimentar os cubos da Figura 13.....	28
Figura 15 – Exercício relacionando um cubo e diferentes planos.....	31
Figura 16 – Apresentação do assunto Projeção Ortogonal.....	32
Figura 17 – Exercício sobre Projeção Ortogonal.....	33
Figura 18 – Exercício sobre Projeção Ortogonal de um ponto em movimento.....	33
Figura 19 – Exemplificando conceitos de geometria com objetos da realidade.....	34
Figura 20 – Hipercubo.....	34
Figura 21 – Exercícios sobre Projeção Ortogonal.....	35
Figura 22 – Apresentação do conceito de Projeção Ortogonal.....	36
Figura 23 – Projeção Ortogonal de um paralelepípedo.....	36
Figura 24 – Explicação de evento do cotidiano que se relaciona com Matemática.....	37
Figura 25 – Diferentes projeções ortogonais de um avião.....	38
Figura 26 – Exercício sobre Projeção Ortogonal.....	39
Figura 27 – Exercício sobre Projeção Ortogonal.....	39
Figura 28 – Projeção Ortogonal de retas no plano.....	40
Figura 29 – Imagem da entrada da escola.....	45
Figura 30 – Tirinha sobre projeção ortogonal.....	48
Figura 31 – Estrela construída pelo aluno T.....	50
Figura 32 – Construção do aluno T.....	51
Figura 33 – Construção do aluno N.....	51
Figura 34 – Construção do aluno G.....	52
Figura 35 – Definição do aluno X.....	54
Figura 36 – Definição do aluno G.....	54
Figura 37 – Definição do aluno A.....	55
Figura 38 – Definição do aluno Y.....	55
Figura 39 – Construção de T.....	56
Figura 40 – Construção de T no GeoGebra.....	57
Figura 41 – Respostas dos alunos M e V.....	58
Figura 42 – Resposta da dupla T e B.....	60
Figura 43 – Resposta do aluno P.....	60
Figura 44 – Respostas dos alunos F e K.....	60
Figura 45 – Respostas dos alunos T e B.....	62
Figura 46 – Construção do aluno T.....	62
Figura 47 – Construção feita por A e C.....	64
Figura 48 – Construção de A e C, após movimentar o ponto B.....	65



Figura 49 – Construção mostrando a reta perpendicular ao eixo x que passa por B.....	65
Figura 50 – Aluno T observando o arquivo Bob Esponja .....	66
Figura 51 – Arquivo encontrado na internet pelos alunos G e D .....	67
Figura 52 – Construção feita pelos alunos A e C .....	69
Figura 53 – Início da construção de K e F .....	71
Figura 54 – Construção final de K e F .....	71
Figura 55 – Construção de T .....	72
Figura 56 – Rastro do ponto Lua no arquivo de T .....	73
Figura 57 – Sólidos construídos por A e C .....	74
Figura 58 – Y construindo a pirâmide.....	75
Figura 59 – ‘Pirâmide’ construída por G e D .....	76
Figura 60 – Construção de G e D a partir de outro ângulo.....	76
Figura 61 – Construção dos círculos do aluno T.....	78
Figura 62 – Construção do hexágono por T .....	79
Figura 63 – Resultado final de T .....	79
Figura 64 – Arquivo da Tarefa 6.....	81
Figura 65 – Construção das projeções ortogonais dos pontos da Tarefa 6.....	82
Figura 66 – Resposta da dupla T e P .....	83
Figura 67 – Resposta da dupla G e D.....	83
Figura 68 – Construção das projeções por N .....	84
Figura 69 – Segundo arquivo da Tarefa 6 .....	85
Figura 70 – Projeção Ortogonal construídas por F, C e R.....	86
Figura 71 – Respostas da dupla T e B .....	87
Figura 72 – Quatro segmentos que suas projeções ortogonais formam o contorno de um quadrado ...	87
Figura 73 – Resposta de N .....	88
Figura 74 – Posição do cubo encontrada por M e V .....	89
Figura 75 – M e V encontrando o hexágono como Projeção Ortogonal de um cubo .....	90
Figura 76 – Respostas de M e V .....	90
Figura 77 – Respostas de M e V .....	90
Figura 78 – Projeção ortogonal de um cubo feita por T.....	92
Figura 79 – Projeção Ortogonal de um cubo em uma posição não usual feita por T.....	93
Figura 80 – Resposta do aluno T.....	94
Figura 81 – Projeção Ortogonal de uma pirâmide ‘deitada’ feita por T .....	95
Figura 82 – Projeção Ortogonal construída por G e D.....	96
Figura 83 – Construção feita por M e V.....	97
Figura 84 – Resposta feita por Y.....	98
Figura 85 – Momento em que o jogador A toca a bola para o jogador B .....	99
Figura 86 – Perguntas da Tarefa 8 .....	100
Figura 87 – Resposta do aluno P.....	100
Figura 88 – Respostas do aluno G e D.....	101
Figura 89 – Chefe de arbitragem da CBF explicando a construção da linha de impedimento.....	102
Figura 90 – Construção feita pelo pesquisador .....	102
Figura 91 – Demonstração de rotação de um dos cilindros.....	103
Figura 92 – Demonstração de movimento de um cilindro .....	103
Figura 93 – Retrata o ponto do cilindro mais próximo da linha de fundo.....	104
Figura 94 – Retrata a Projeção Ortogonal do ponto mais perto da linha de fundo .....	104
Figura 95 – Respostas dos alunos M e V .....	105
Figura 96 – Resposta dos alunos G e D.....	106
Figura 97 – Resposta de V .....	107
Figura 98 – Resposta de M.....	107
Figura 99 – Construção sugerida para entender a Tarefa 9 .....	108

Figura 100 – Construção sugerida da Projeção Ortogonal do deslocamento do motociclista em movimento da Tarefa 9 .....	109
Figura 101 – Resposta do aluno E.....	110
Figura 102 – Resposta do aluno G .....	110
Figura 103 – Construção sugerida para entender a Tarefa 10 .....	111
Figura 104 – Construção sugerida da Projeção Ortogonal do deslocamento de João da Tarefa 10....	111

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Apresentação dos livros didáticos .....	29
Quadro 2 – Capítulos dos livros didáticos dedicados à Geometria .....	30
Quadro 3 – Planejamento das Atividades.....	46
Quadro 4 – Planejamento das Atividades.....	121

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	13
2 REFERENCIAL TEÓRICO .....	17
2.1 Desenvolvimento de habilidades espaciais .....	17
2.2 Geometria Dinâmica .....	20
2.3 Representações bidimensionais de objetos tridimensionais .....	23
2.4 O Software GeoGebra na Educação Matemática .....	26
2.5 Panorama do ensino de projeção ortogonal no Ensino Médio - uma análise de livros didáticos .....	29
2.6 Trabalhos Correlatos .....	41
3 METODOLOGIA .....	44
3.1 Pesquisa Qualitativa .....	44
3.2 O Colégio .....	45
3.3 Descrição da Oficina .....	46
3.4 Os Dados Coletados/Produzidos .....	48
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS .....	49
4.1 Encontro 1 .....	49
4.2 Encontro 2 .....	59
4.3 Encontro 3 .....	66
4.4 Encontro 4 .....	80
4.5 Encontro 5 .....	91
4.6 Encontro 6 .....	98
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	112
REFERÊNCIAS .....	115
APÊNDICE A - Questões ENEM .....	117
APÊNDICE B - Descrição Detalhada das Atividades .....	120
APÊNDICE C - Carta de Apresentação à Escola .....	138
APÊNDICE D - Termo de Consentimento Informado .....	139
APÊNDICE E - Termo de Assentimento do Menor .....	141

## 1 INTRODUÇÃO

Considero<sup>1</sup> que a Matemática, ultimamente, vem sendo apresentada aos alunos de maneira formal, com aulas principalmente expositivas, fato este que pode colaborar para que seja omitido do aluno o seu sentido como processo de construção de conceitos. Uma das possíveis consequências do uso desta prática pode ser o baixo rendimento dos alunos. Entendo que uma forma alternativa para a construção do conhecimento matemático pode estar associada ao uso das tecnologias digitais. Essa afirmação está fortemente baseada em minha experiência pessoal.

Na disciplina de Educação Matemática e Tecnologia, ministrada pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Márcia Notare, fizemos vários trabalhos no software de matemática dinâmica GeoGebra em que deveríamos utilizar o software para visualizar, entender e, algumas vezes, resolver problemas relacionados à geometria plana e espacial. Para tanto, fizemos construções muitas vezes complexas, que aumentaram muito nossa compreensão das situações geométricas que estávamos sendo envolvidos.

Achei interessante todas aquelas construções e fiquei pensando o quanto privilegiado eu era por estar podendo ver e estudar aquilo, visto que muitos docentes com os quais me comuniquei ao longo de minha trajetória acadêmica, fazendo estágio em escolas municipais e estaduais, não tiveram a oportunidade de ter contato com uma disciplina que aborde com tanto enfoque o GeoGebra. Então pensei que seria interessante levar essa experiência para alunos que não necessariamente estejam num curso de graduação em Matemática e, sim, na escola.

Apesar de ser uma inquietação e desejo pessoal, muitas pesquisas falam sobre a importância do conteúdo de geometria ser não só reforçado, mas também trabalhado de modo a envolver os alunos. Um dos pesquisadores que reforça essa ideia é Leivas (2018). Segundo sua perspectiva, há uma “[...] inegável necessidade de se buscar métodos e metodologias de ensino que tornem a aprendizagem de Matemática mais atrativa, que desperte o interesse do estudante e que este seja um sujeito dinâmico no processo” (LEIVAS e SONZA, 2018, p. 1549).

De acordo com Gutierrez (1996) hoje em dia os livros didáticos ainda são a fonte principal de informação nas escolas e isso, provavelmente deve continuar nos próximos anos.

---

<sup>1</sup> Adotarei a primeira pessoa durante a introdução, pois estarei contando um pouco de minha experiência pessoal.

Nesses livros os estudantes estudam sobre poliedros apenas com a descrição da figura no livro, acompanhada de figuras coloridas com a explicação do professor. Para Gutierrez (1996) uma limitação do livro didático é, que não importa o quão bom ele seja, nunca poderá proporcionar ao aluno um elemento básico da geometria espacial, o movimento.

Para abordar a geometria dinâmica nessa pesquisa, farei uso do software GeoGebra. Este software foi escolhido pois ele “serve como uma ferramenta para pesquisadores e educadores introduzirem inovação no ensino tanto a nível escolar como universitário<sup>2</sup>” (Disponível em <http://www.math.fau.edu/geogebra2019/> acesso em 12/06/2019, tradução nossa) e pode ser usado para construir, explorar, projetar figuras da geometria espacial como por exemplo cubos, prismas, esferas, pirâmides, cones, etc. e, também, representar em um plano bidimensional a trajetória de objetos do espaço tridimensional.

Há uma diversidade de assuntos que podem ser trabalhados no GeoGebra, principalmente sobre funções e geometria. Um assunto, no âmbito de geometria espacial, que pode ser trabalhado usando os recursos do GeoGebra é a ideia de projeção ortogonal. “A projeção ortogonal é a representação de um objeto em um plano de projeção, quando as linhas visuais são perpendiculares a este plano” (HOELSCHER, R.P.; SPRINGER, C.H.; DOBROVOLNY, J.S., 1978).

O ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) é utilizado para avaliar a qualidade do Ensino Médio no país. As notas individuais dos estudantes permitem a inscrição em programas de acesso ao ensino superior em universidades públicas brasileiras. Para realçar a importância do tema projeção ortogonal no ensino de Matemática, destacamos que esse é um dos tópicos utilizados pelo ENEM para avaliar a habilidade 6 da competência de Matemática de área 2, que refere-se a “Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional”.

Questões sobre o assunto são frequentes, como por exemplo a questão 180 do ENEM 2013, Prova Azul (Figura 1) (No Apêndice A podemos ver outros exemplos de questões do ENEM sobre projeção ortogonal).

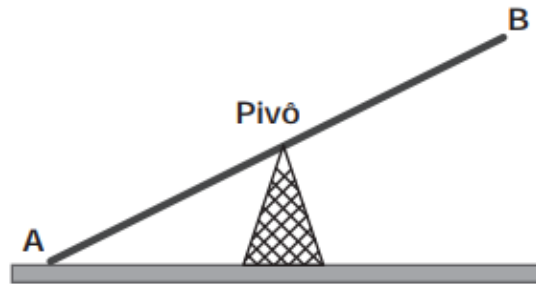
---

<sup>2</sup> “GeoGebra serves as a tool for researchers and educators to introduce innovation in the teaching both at school and university level.” (Disponível em <http://www.math.fau.edu/geogebra2019/> acesso em 12/06/2019, Inglês (EUA))

Figura 1 – Questão Sobre Projeção Ortogonal do ENEM 2013  
**QUESTÃO 180**

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

Fonte: Disponível em:

[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2013/caderno\\_enem2013\\_dom\\_azul.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf) Acesso em: 30/07/2019

Mesmo assim, a pesquisa realizada neste trabalho com livros didáticos mostrou que, provavelmente, o assunto é pouco explorado no Ensino Médio - mesmo o ENEM sendo direcionado para o Ensino Médio. Portanto no presente trabalho exploro as possibilidades e potencialidades da geometria dinâmica no processo de aprendizagem de conceitos de projeção ortogonal com estudantes de Ensino Médio.

Adentrando o tema da geometria espacial, temos, hoje, muitos recursos do GeoGebra 3D, que oferecem novas possibilidades para trabalhar com geometria espacial sem necessariamente manipular sólidos espaciais em papel ou com outros materiais manipuláveis (NOTARE e BASSO, 2016). Seguindo a ideia de Gutiérrez, em que “Seria muito melhor se os estudantes pudessem ter uma experiência tão rica que os permitisse criar uma imagem dinâmica que poderia se mover nas mentes deles de um jeito parecido com um sólido real manuseado<sup>3</sup>” (GUTIERREZ, 1996, p. 23, tradução nossa), a pergunta que irá conduzir a pesquisa é: **Como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar a compreensão sobre projeção ortogonal no Ensino Médio?**

<sup>3</sup> “It would be much better if students could have an experience so rich as to allow them to create a dynamic image that could be moved in their minds in a way quite similar to a real solid being handled” (GUTIERREZ, 1996, p. 23)

O propósito é investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no Ensino Médio.

Os objetivos específicos são:

- Compreender de que forma figuras geométricas são projetadas ortogonalmente em um plano, com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra;
- Projetar ortogonalmente no plano figuras geométricas e/ou o movimento de pessoas/objetos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, conforme a Habilidade 6 da competência de área do ENEM.

Este trabalho contém cinco capítulos, incluindo a introdução, e está organizado da seguinte forma: o segundo capítulo apresenta estudos preliminares sobre o desenvolvimento de habilidades espaciais pelos alunos de Ensino Médio e sobre Geometria Dinâmica. Ainda neste capítulo apresentaremos um panorama do ensino de Projeção Ortogonal no Ensino Médio e, também, traremos alguns trabalhos correlatos. O capítulo 3 apresenta a metodologia utilizada descrevendo cenário, sujeitos, o recurso utilizado, a descrição das atividades e a forma de coleta de dados. No quarto capítulo analisamos os dados coletados durante os encontros da pesquisa. O último capítulo apresenta as considerações finais sobre a presente pesquisa.



## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo visa desenvolver os estudos de Gutiérrez sobre a visualização espacial, desenvolvimento de habilidades espaciais e representações bidimensionais de objetos tridimensionais, dando foco especial para a projeção ortogonal. Também serão abordados seus estudos sobre geometria dinâmica 3D e a importância de estudos nessa área.

No subcapítulo seguinte, fazemos uma breve pesquisa analisando sete livros didáticos, buscando entender como eles abordam o assunto Projeção Ortogonal. Por fim, buscamos verificar o que já foi pesquisado sobre a aprendizagem de Projeção Ortogonal com o uso de recursos tecnológicos.

### 2.1 Desenvolvimento de habilidades espaciais

Para Gutiérrez (1996), a concepção de visualização espacial possui uma ampla variedade, dependendo do ponto de vista. Para a Educação Matemática, o conceito está relacionado com a formação e o uso de representações mentais de informações matemáticas. Assim, entende-se que o conjunto de elementos que integram a visualização espacial pode ser dividido em quatro partes principais: imagens mentais, representação externa, processo de visualização e habilidades de visualização (GUTIÉRREZ, 1996).

Gutiérrez (1996) entende que a imagem mental é o elemento mais básico que o estudante precisa para “aprender a construir, transformar e analisar *objetos geométricos* (grifo nosso) a fim de adquirir uma boa capacidade de visualização espacial<sup>4</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 25, tradução nossa).

Presmeg (1986) mostra alguns exemplos de imagem mental, a imagem concreta é o tipo mais simples de imagem mental, é o tipo de imagem que normalmente usamos para representar poliedros. Já a imagem dinâmica envolve um movimento mental de algum objeto, portanto ela nos permite ver este objeto em qualquer posição desejada. A imagem cinestésica é caracterizada pelo movimento de um objeto utilizando algumas partes do corpo (como por exemplo as mãos ou a cabeça).

---

<sup>4</sup> “[...] learn to construct, transform, and analyze them in order to acquire a good capability of spatial visualization” (GUTIÉRREZ, 1996, p.25).

A representação externa é “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades incluindo fotos, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e no raciocínio visual<sup>5</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.9-10, tradução nossa).

O processo de visualização está dividido em dois processos inter-relacionados, em que o primeiro “é o processo de converter dados abstratos e não figurativos em imagens visuais, e também converter uma imagem mental em outra<sup>6</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26) chamado de processamento visual. O segundo é o processo de interpretação de informação figural, em que este é o “processo de ler, analisar e entender representações espaciais, como representações no plano ou imagens mentais de poliedros, a fim de obter algum dado deles<sup>7</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

A última componente da atividade de visualização são as habilidades de visualização, em que “o aprendizado e a melhoria dessas habilidades é a chave de todo o processo de visualização espacial<sup>8</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26, tradução nossa). Assim o aluno deve escolher qual habilidade de visualização usar, dependendo do problema que ele estiver resolvendo. Os principais exemplos de habilidades de visualização são (GUTIÉRREZ, 1996):

- *Figure-ground perception* (Percepção figura-fundo): nesta habilidade espera-se que o sujeito identifique um certo objeto isolado de um contexto complexo.
- *Perceptual constancy* (Constância perceptiva): nesta habilidade espera-se que o sujeito reconheça que, independente de cor, tamanho, textura ou posição, algumas propriedades de um objeto permanecem as mesmas.
- *Mental rotation* (Rotação mental): nesta habilidade espera-se que o sujeito consiga produzir uma imagem mental dinâmica, isto é, em sua mente consiga visualizar movimentos de um objeto para interpretar alguma configuração dele.

---

<sup>5</sup> “[...] any kind of verbal graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning” (GUTIÉRREZ, 1996, p.9-10).

<sup>6</sup> “[...] is the process of converting abstract and non-figurative data in visual images, and also that of converting a mental image into another one” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

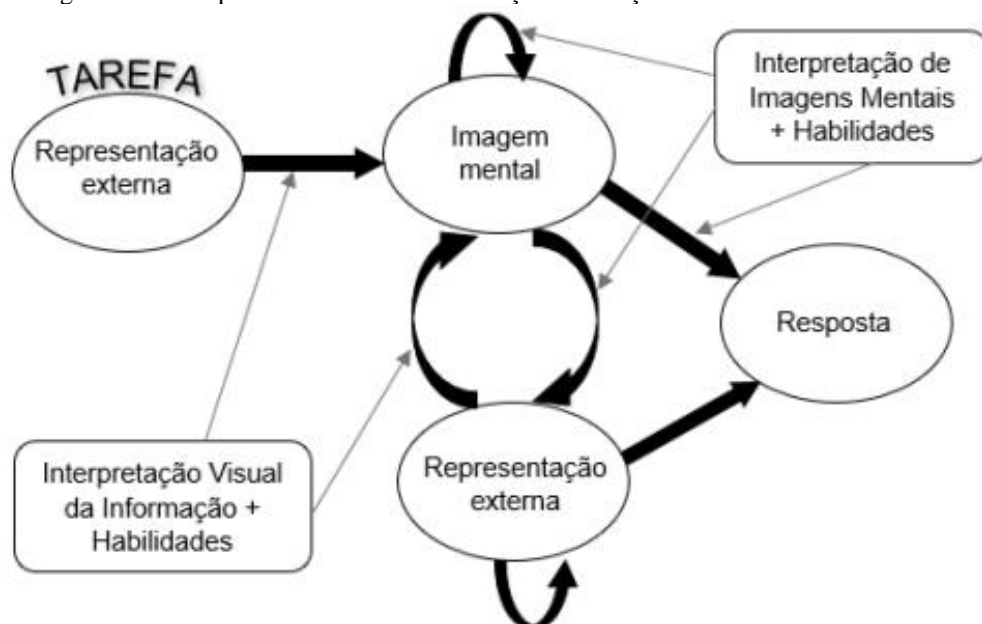
<sup>7</sup> “[...] is the process of reading, analysing and understanding spatial representation, such as plane representations or mental images of polyhedra, in order to obtain some data from them” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

<sup>8</sup> “The learning and improvement of these abilities is the key in the whole process of spatial visualization” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

- *Perception of spatial positions* (Percepção de posições espaciais): nesta habilidade espera-se que o sujeito consiga relacionar um objeto, figura ou imagem mental com ele mesmo.
- *Perception of spatial relationships* (Percepção de relações espaciais): nesta habilidade espera-se que o sujeito consiga relacionar objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros.
- *Visual discrimination* (Discriminação visual): nesta habilidade espera-se que o sujeito compare objetos, figuras e/ou imagens mentais, com o objetivo de identificar semelhanças e diferenças entre eles. (GUTIÉRREZ, 1996)

O diagrama da Figura 2, elaborado por Gutiérrez (1996), traduz como deve ser o processo de resolver uma tarefa, em que é necessário o uso da visualização geométrica. Neste processo, primeiro interpretamos a tarefa utilizando a representação externa, assim geramos a primeira imagem mental. Com essa imagem o aluno realiza um processo de raciocínio visual, em que dependendo da tarefa ou das habilidades dos estudantes podem-se gerar novas imagens mentais e representações externas antes do aluno chegar em uma resposta (GUTIÉRREZ, 1996).

Figura 2 – Principais elementos de visualização na solução de uma tarefa matemática



Na próxima seção procuraremos entender de que forma os recursos tecnológicos, em especial a geometria dinâmica, podem ajudar os professores e alunos na aprendizagem de geometria, enfatizando potencialidades que esse recurso pode trazer para a sala de aula.

## **2.2 Geometria Dinâmica**

De acordo com Santos e Moita (2016), os recursos tecnológicos podem contribuir para o processo de aprendizagem, pois permitem ao professor interpretar, refletir e criar processos de ensino inovadores, numa prática produtiva e dinâmica, reinventando o ato de educar. Com o recurso de geometria dinâmica 3D do GeoGebra, que será apresentado em outra seção desse capítulo, buscamos a aproximação da tecnologia com a aprendizagem, almejando que os alunos possam construir maiores conhecimentos acerca de projeção ortogonal e também desenvolvam a capacidade de visualizar projeções de diferentes objetos em variadas situações. Também observamos que,

O desenvolvimento de sistemas dinâmicos voltados para a aprendizagem de Matemática tem possibilitado novas formas de tratamento para problemas, pela possibilidade de tornar acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos que até então precisavam ser tratados de maneira estática e abstrata. (NOTARE e BASSO, 2016, p.2)

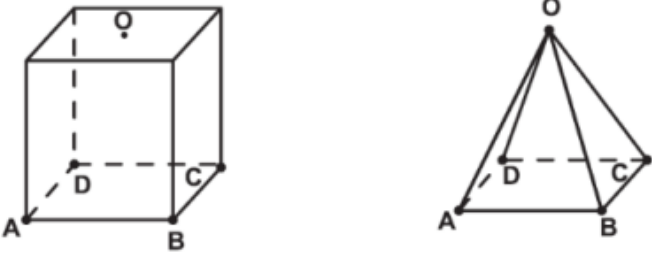
Assim, os recursos de geometria dinâmica 3D podem contribuir para o raciocínio espacial dos alunos, desenvolvendo pensamentos que vão além das possibilidades obtidas com papel e lápis. Atividades nesses ambientes estimulam a participação e com isso a independência do aluno nas atividades para que ele mesmo valorize mais sua capacidade intelectual.

Para exemplificar isso, Notare e Basso (2016) propõem um problema (Figura 3) de geometria espacial para um grupo de alunos do Mestrado Profissional. É percebido que, ao tentar resolver o problema apenas com papel e lápis, de forma estática, alguns estudantes erram a resposta, pois “construíram uma imagem figural equivocada dos sólidos destacados” (NOTARE e BASSO, 2016, p.4).

Figura 3 – Questão de geometria espacial

**1. (ENEM 2011 - Questão 144)**

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

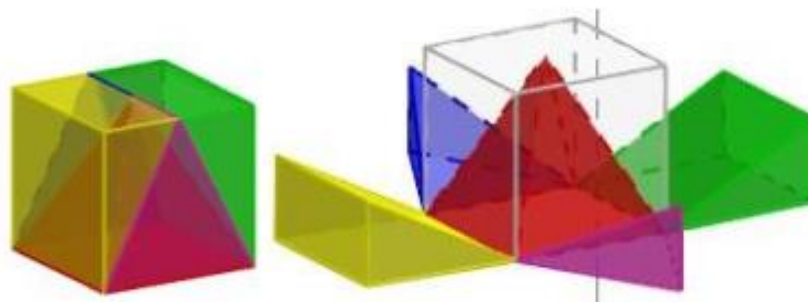
Os formatos dos sólidos descartados são

(A) todos iguais.  
 (B) todos diferentes.  
 (C) três iguais e um diferente.  
 (D) apenas dois iguais.  
 (E) iguais dois a dois.

Fonte: NOTARE e BASSO, 2016, p.5

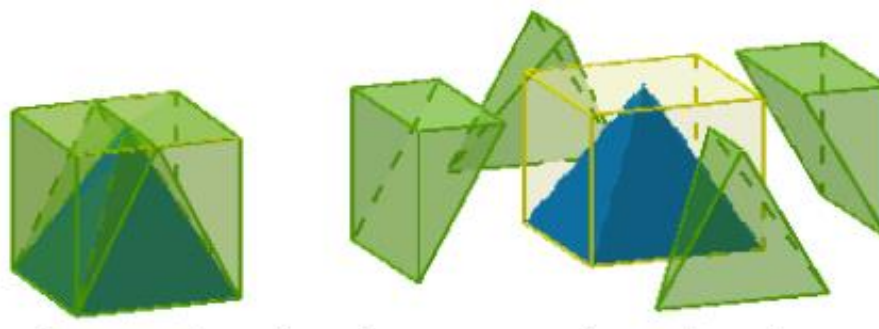
Após essas respostas, os alunos são incentivados a representar a situação problema no GeoGebra 3D, utilizando suas possibilidades e dinamismo. As figuras 4 e 5 ilustram soluções que foram trazidas por Notare e Basso (2016) de construções que podem solucionar o problema. É notado que o GeoGebra 3D permite construção de objetos dinâmicos isomorfos à situação real.

Figura 4– Solução 1 para questão



Fonte: NOTARE e BASSO, 2016, p.6

Figura 5– Solução 2 para questão



Fonte: NOTARE e BASSO, 2016, p.6

Em 1996 Gutiérrez já mencionava a importância do uso de geometria dinâmica como recurso para potencializar o ensino de geometria, inclusive cita que nas aulas do futuro “[...] podemos imaginar salas de aula cheias de computadores, muitos CDs em uma prateleira, e um grande armário contendo muitos aparatos e objetos manipuláveis<sup>9</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.33, tradução nossa). Ele imaginava que quando fossem falar sobre um sólido, como por exemplo uma pirâmide, um cubo ou qualquer objeto espacial que fosse necessário, os professores deveriam dar alguns minutos para os alunos segurarem o sólido e, em seguida, cada um olhar e movimentar na tela de seu computador os sólidos, de forma que, após isso, as crianças conversassem sobre as propriedades que descobrissem.

Isso mostra que, já no século passado, existia uma preocupação em fugir da aula focada somente em livros didáticos, que, naquela época - e continua sendo - era a principal fonte de informação nas salas de aula (GUTIÉRREZ, 1996). Os livros didáticos são ótimos para o aprendizado dos alunos, pois nele encontramos um roteiro do assunto que se pretende aprender, no qual é possível seguir sem o auxílio do professor. O problema consiste no uso exclusivo do livro em sala de aula, pois segundo Gutiérrez (1996) o livro tem uma limitação, nele estão escritas as propriedades dos sólidos com algumas figuras coloridas, em que todas têm alguma informação perdida e o leitor precisará recuperar essa informação quando estudar geometria espacial em um objeto estático. Gutiérrez (1996) ainda salienta que não importa quão bom o livro seja, ele nunca proporcionará ao aluno a experiência de movimentar o sólido geométrico.

Gutiérrez (1996) afirma que, até aquele momento, o contato de alunos com a abordagem dinâmica dava-se somente pelo manuseio de sólidos físicos, em que esta apresentava como limitação o fato de que os alunos faziam movimentos muito rápidos, tal

<sup>9</sup> “[...] we could imagine classroom with plenty of computers, many CDs lying on a shelf, and a big closet containing lots of apparatuses and manipulatives.” (GUTIÉRREZ, 1996, p.33)

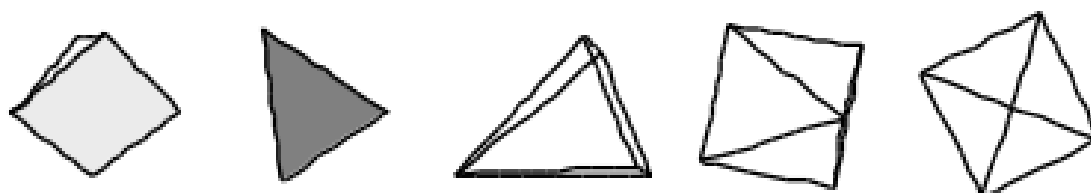
que acabavam movendo os objetos apenas para as representações convencionais, sem utilizar todo o potencial de uma abordagem dinâmica. Ele conclui que essa abordagem, como a abordagem por livros didáticos, normalmente gera imagens estáticas na mente dos alunos. Para mostrar a importância de um software de geometria dinâmica, Gutiérrez (1996) apresenta exemplos de representações de uma pirâmide geralmente usadas pelos livros didáticos (Figura 6). Ele argumenta que com o uso de um computador um aluno poderá reconhecer mais facilmente que as imagens ilustradas na Figura 7 também podem ser representações de uma pirâmide.

Figura 6– Representações convencionais de uma pirâmide



Fonte: GUTIÉRREZ, 1996, p.24

Figura 7– Representações não convencionais de uma pirâmide



Fonte: GUTIÉRREZ, 1996, p.24

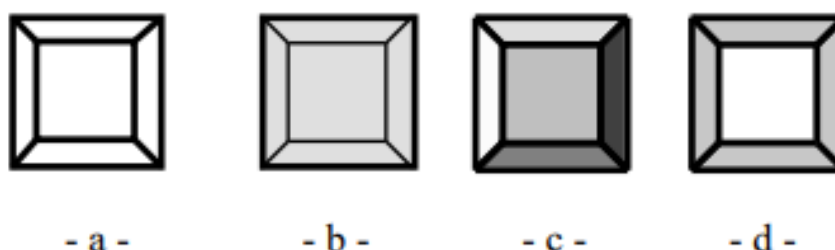
Para compreender melhor sobre como a geometria dinâmica pode auxiliar na análise e compreensão de representações bidimensionais de objetos tridimensionais iremos abordar, na próxima seção, estudos de Gutiérrez que discutem o assunto.

### 2.3 Representações bidimensionais de objetos tridimensionais

Na seção anterior, foi mostrado que os livros didáticos são limitados quanto ao aprendizado de geometria espacial e que a geometria dinâmica pode ser um recurso para potencializar a aprendizagem de vários assuntos dentro da geometria espacial. Uma dessas possibilidades é construir, transformar e analisar representações bidimensionais de objetos tridimensionais, em que uma dessas representações é a projeção ortogonal.

Em seu artigo Gutiérrez (1996) cita um exemplo de limitação de uma representação no plano de um objeto tridimensional. Observando o primeiro desenho representado na Figura 8-a, podemos interpretá-lo de diversas formas, na Figura 8-b, podemos pensar em um quadrado externo como a face da frente de um cubo, na Figura 8-c, vista de bem de perto, pode representar a face da frente de um tronco de pirâmide, na Figura 8-d, um quadro plano, em que a moldura é a parte hachurada e a parte branca o quadro em si, etc.

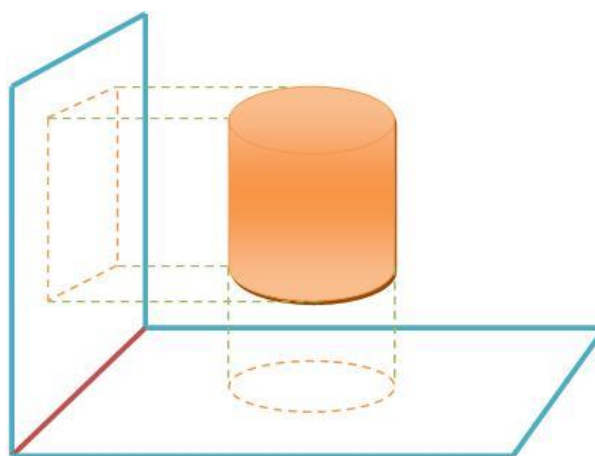
Figura 8– Desenhos com possíveis representações de um mesmo objeto



Fonte: GUTIÉRREZ, p.34, 1996

Então, a partir do que afirma Gutiérrez (1996), podemos notar que uma das representações de uma figura tridimensional no plano é mediante a projeção ortogonal e, a partir da figura no plano, não conseguimos concluir qual era a figura espacial que tínhamos originalmente. Podemos tomar como por exemplo a Figura 9, em que temos duas projeções ortogonais de um cilindro, tal que uma delas é um retângulo e a outra é um círculo. Dessa forma, percebemos que é fundamental o apoio de recursos da geometria dinâmica para termos acesso à representação do sólido original.

Figura 9– Representações Ortogonais de Um Cilindro



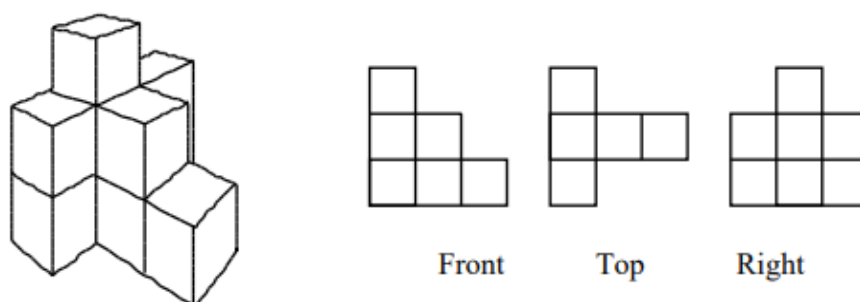
Fonte: Disponível em <https://www.colegioweb.com.br/retas-e-planos-no-espaco/projecoes-ortogonais.html>

Acesso em 12/06/2019



Em sua pesquisa, Gutiérrez (1996), entre outros tipos de visualizações espaciais, quer analisar e “classificar” o nível de dificuldade de alunos ao ter as projeções de um conjunto de cubos e descobrir como esse conjunto está organizado. Além disso, também, ao ter o conjunto de cubos, descobrir quais são as projeções ortogonais. Na Figura 10 temos o exemplo que Gutiérrez apresenta em seu artigo.

Figura 10 – Representações ortogonais de um conjunto de cubos



Fonte: GUTIÉRREZ, 1996, p.35

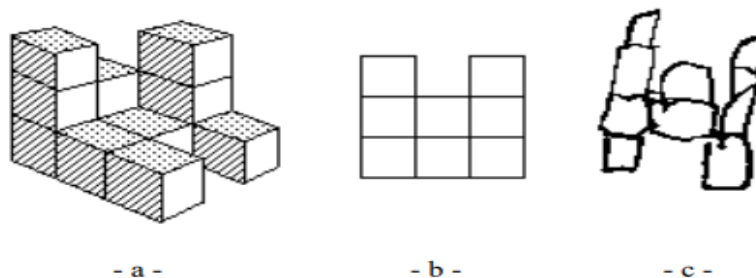
Para avaliar esse conhecimento dos alunos, Gutiérrez estava interessado em observar duas habilidades: “Os estudantes precisam aprender a desenhar as representações de sólidos dados, e também a construir os sólidos de representações dadas (como por exemplo a projeção ortogonal)<sup>10</sup>” (GUTIÉRREZ A., 1996 p.36, tradução nossa). As tarefas pensadas para avaliar essas questões foram em ambas direções: dar diferentes representações do plano de certo conjunto de cubos e dar um conjunto de cubos e pedir que os alunos desenhem diferentes representações no plano.

Nos resultados dessa pesquisa, mais especificamente, nos resultados das tarefas sobre projeção ortogonal, Gutiérrez (1996) verifica que os alunos que têm dificuldade em representar a projeção ortogonal do conjunto de cubos, não conseguiam diferenciar e isolar as faces que estavam vendo das faces que estavam em outros planos, como no exemplo da Figura 11. Gutiérrez (1996) afirma que para estes alunos falta a habilidade chamada *figure-ground* (figura-fundo), em que “esta é a habilidade de identificar uma figura específica isolando ela de um fundo complexo<sup>11</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26, tradução nossa) já citada anteriormente.

<sup>10</sup> “Students have to learn to draw plane representation of given solids, and also to build solids from given plane representations.” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 36)

<sup>11</sup> “This is the ability to identify a specific figure by isolating it out of a complex background.” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26)

Figura 11 – O conjunto de cubos (a), a representação desejada (b) e o desenho do estudante (c)



Fonte: GUTIÉRREZ, 1996, p.39

Na próxima seção apresentaremos o software que será usado como recurso tecnológico para nos auxiliar na prática desta pesquisa e a responder à pergunta diretriz.

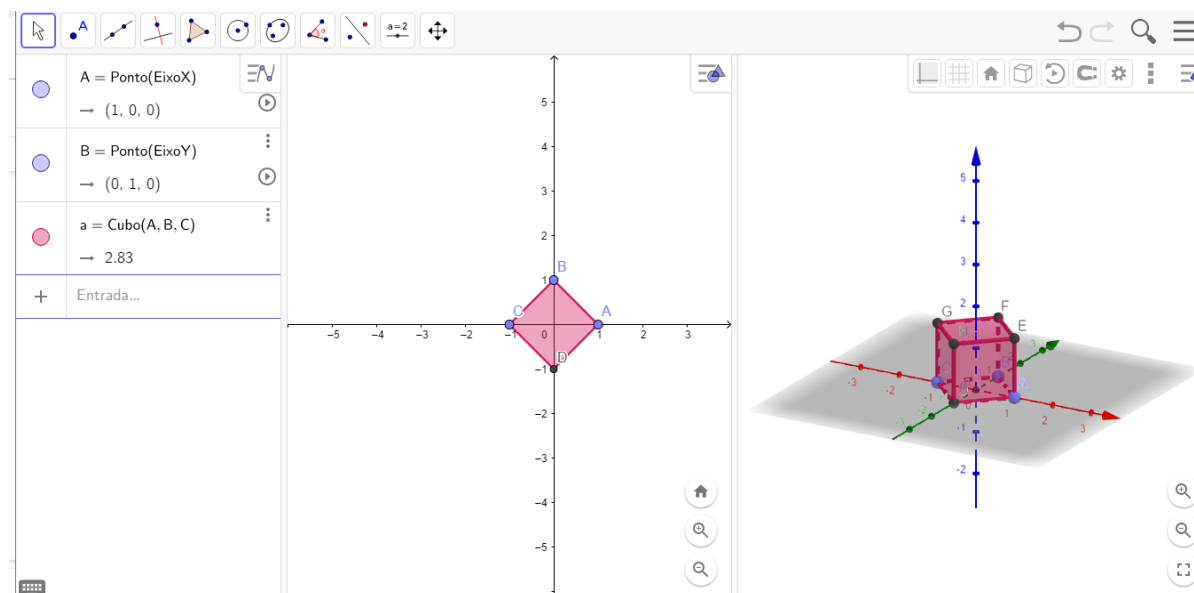
## 2.4 O Software GeoGebra na Educação Matemática

Neste trabalho realizamos uma oficina para estudantes do Ensino Médio com foco em atividades sobre projeção ortogonal com o objetivo de responder à pergunta diretriz. Nessa oficina desenvolvida para a coleta de dados deste trabalho, utilizamos o software de matemática dinâmica GeoGebra, com ênfase na janela de visualização GeoGebra 3D. O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria, álgebra, estatística, gráficos e cálculo em uma única interface. Possui várias ferramentas de criação e manipulação matemática. O GeoGebra é um software livre e gratuito para download, não tendo necessidade de licença para instalação. O software pode ser instalado em sistemas operacionais Windows e Mac e para smartphones e tablets, tornando o acesso disponível e fácil em aparelhos de tecnologia digital em qualquer ambiente.

No GeoGebra podemos criar pontos, retas, segmentos, polígonos, círculos, sólidos, esferas, entre outros objetos geométricos. Nele podemos utilizar régua e compasso virtuais, marcando interseções entre quaisquer dois objetos, construindo retas paralelas ou ortogonais a certos objetos ou utilizar o controle deslizante habilitando o rastro, para explorar o movimento de objetos ao longo do tempo, algo que, pela limitação já citada, os livros didáticos não conseguem abordar. Também podemos fazer transformações geométricas como por exemplo reflexão, translação, rotação. Juntando todas essas ferramentas podemos construir as projeções ortogonais de sólidos e, também, representar no plano bidimensional movimentos de objetos do plano tridimensional. Tudo isso numa interface amigável do

GeoGebra (Figura 12), com uma janela algébrica (à esquerda), janela de visualização 2D (ao meio) e uma janela de visualização 3D (à direita).

Figura 12– Interface GeoGebra



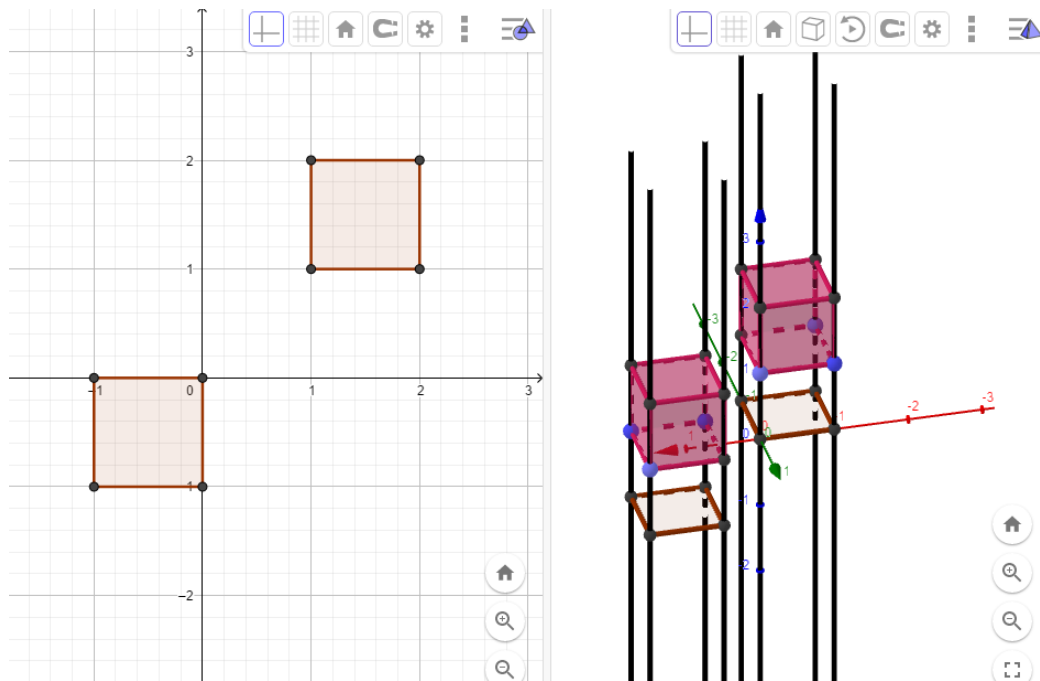
Fonte: Elaboração própria

Pela possibilidade proporcionada pelo GeoGebra de criar as mais variadas situações de geometria plana ou espacial, percebemos uma diversidade de formas para resolver problemas. Isso também pode ser colocado em pauta numa sala de aula, como o exemplo que discutimos a seguir. Na Figura 13 podemos visualizar as prováveis projeções de faces de dois cubos congruentes no plano  $xOy$ <sup>12</sup>, aparentemente da mesma forma. Já na Figura 14 ao movimentarmos cada um dos cubos que estavam representados na Figura 13 percebemos que uma das projeções se deforma e deixa de ser a projeção ortogonal, enquanto a outra se mantém como projeção no plano  $xOy$  de uma face do cubo (que anteriormente estava localizada embaixo e agora está em nova posição oblíqua em relação ao plano  $xOy$ ). A situação dinâmica proporciona uma série de discussões sobre o porquê visualizamos diferentes representações de projeções da face ao movimentar os cubos, observamos que essa situação só pôde ser visualizada graças ao dinamismo proporcionado pelo GeoGebra. Neste caso, o problema que ocorre em um dos cubos está relacionado ao fato de que as retas ortogonais não foram construídas em relação ao plano  $xOy$ , e sim em relação às arestas do próprio cubo, que na posição representada na Figura 13 são paralelas aos eixos  $x$  e  $y$  e, portanto, não gera deformação. Por outro lado, as retas ortogonais do outro cubo foram construídas em relação ao plano  $xOy$  e, portanto movimentando o cubo, elas permanecem

<sup>12</sup> Plano que contém os eixos  $x$  e  $y$ .

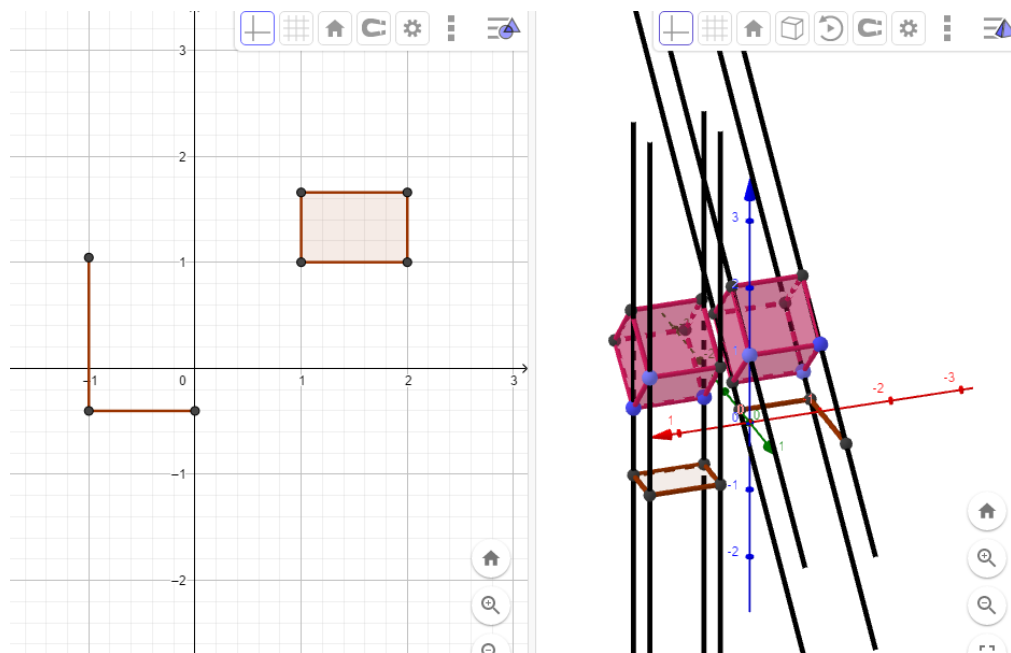
ortogonais ao plano  $xOy$ , ou seja, o problema está na forma como foi construída a projeção ortogonal.

Figura 13 – Projeção ortogonal de faces de dois cubos congruentes no plano  $xOy$



Fonte:Elaboração própria

Figura 14 – Diferenças entre as projeções ao movimentar os cubos da Figura 13



Fonte: Elaboração própria

Ao pensar nesta pesquisa surgiu um questionamento: projeção ortogonal é um assunto trabalhado no Ensino Médio? Na próxima seção buscaremos uma possível resposta a partir de análise de livros didáticos publicados para esse nível de ensino.

## 2.5 Panorama do ensino de projeção ortogonal no Ensino Médio - uma análise de livros didáticos

Nesta seção, abordaremos como alguns aspectos de geometria espacial, mais especificamente, as representações de sólidos e projeção ortogonal, são tratados nos livros do segundo ano do Ensino Médio. Foi escolhido o segundo ano, pelo fato de ser um tema presente em maiores proporções nos livros didáticos de segundo ano. Foram analisados sete livros didáticos. Na turma na qual foi aplicada a prática desta pesquisa solicitou-se à professora titular de Matemática recomendar um livro para análise, que recomendou três livros os quais já havia utilizado em sua carreira (de mais de trinta anos). Dois livros foram escolhidos por serem adotados pelos segundos anos da escola. Os outros dois livros foram escolhidos por serem utilizados por dois professores de Matemática, que o pesquisador mantém contato. Observamos que esta análise não tem por objetivo uma comparação entre os livros ou determinar qual livro é mais apropriado para ser utilizado em sala de aula, visto que estamos buscando entender se são e como são abordadas a representação de sólidos e a projeção ortogonal, somente, nos livros didáticos.

No Quadro 1 apresentamos os livros e, no Quadro 2, apresentamos quantos e quais capítulos de cada livro são dedicados à geometria espacial.

Quadro 1 – Apresentação dos livros didáticos

Título	Autor	Editora	Ano
Matemática Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	Editora Ática	2012
Matemática Contexto & Aplicações (PNLD 2018)	Luiz Roberto Dante	Editora Ática	2016
Matemática Paiva Volume 2	Manoel Paiva	Moderna	2009
Matemática Interação e Tecnologia (PNLD 2018)	Rodrigo Dias Balestri	Leya	2016

MATEMÁTICA Volume único parte II	Felipe Fugita, Marco Antonio Martins Fernandes, Milena Soldá Policastro e William Seigui Tamashiro	sm	2015
Novo olhar matemática	Joamir Souza	FTD	2013
Matemática 2	Eduardo Chavante e Diego Prestes	Quadrante	2016

Quadro 2 – Capítulos dos livros didáticos dedicados à Geometria

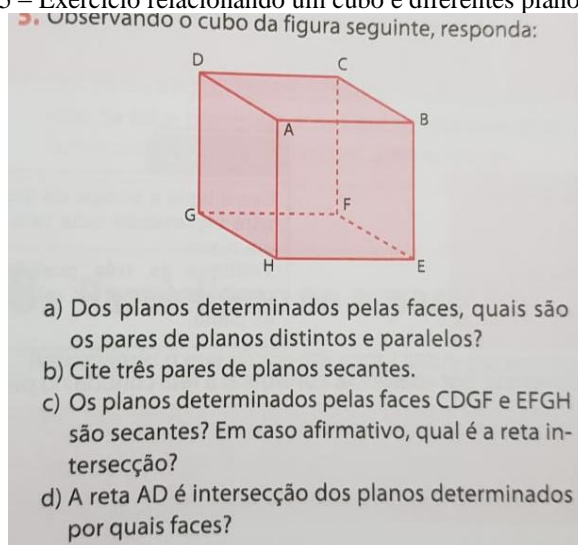
Livro	Capítulos
Matemática Contexto & Aplicações (2012)	Capítulo 10 - Geometria espacial de posição - Uma introdução intuitiva; Capítulo 11 - Poliedros: prismas e pirâmides; Capítulo 12: Corpos redondos: cilindro, cone e esfera.
Matemática Contexto & Aplicações (PNLD 2018) (2016)	Capítulo 7 - Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva; Capítulo 8 - Poliedros: prisma e pirâmides.
Matemática Paiva Volume 2 (2009)	Capítulo 12 - Geometria de posição e poliedros; Capítulo 13 - Prismas e pirâmides; Capítulo 14 - Corpos redondos.
Matemática Interação e Tecnologia (PNLD 2018) (2016)	Capítulo 1 - Geometria Espacial Capítulo 2 - Poliedros Capítulo 3 - Corpos Redondos
MATEMÁTICA Volume único parte II (2015)	Capítulo 19 - Geometria espacial de posição; Capítulo 20 - Sólidos
Novo olhar matemática (2013)	Não há capítulos dedicados a Geometria Espacial
Matemática 2 (2016)	Não há capítulos dedicados a Geometria Espacial

A seguir, apresentamos as análises dos livros selecionados.

### 2.5.1 Matemática Contexto & Aplicações (2012)

É interessante pontuar que o livro começa abordando geometria com o título: Uma introdução intuitiva. Dessa forma o autor constrói a geometria espacial desde relações entre pontos e retas até o volume de sólidos. Quando estamos fazendo uma abordagem intuitiva de geometria espacial é difícil fugir de relações entre objetos no espaço e algum plano de projeção. Durante as primeiras páginas do capítulo o livro busca algumas relações entre a ideia de plano e sólidos, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Exercício relacionando um cubo e diferentes planos

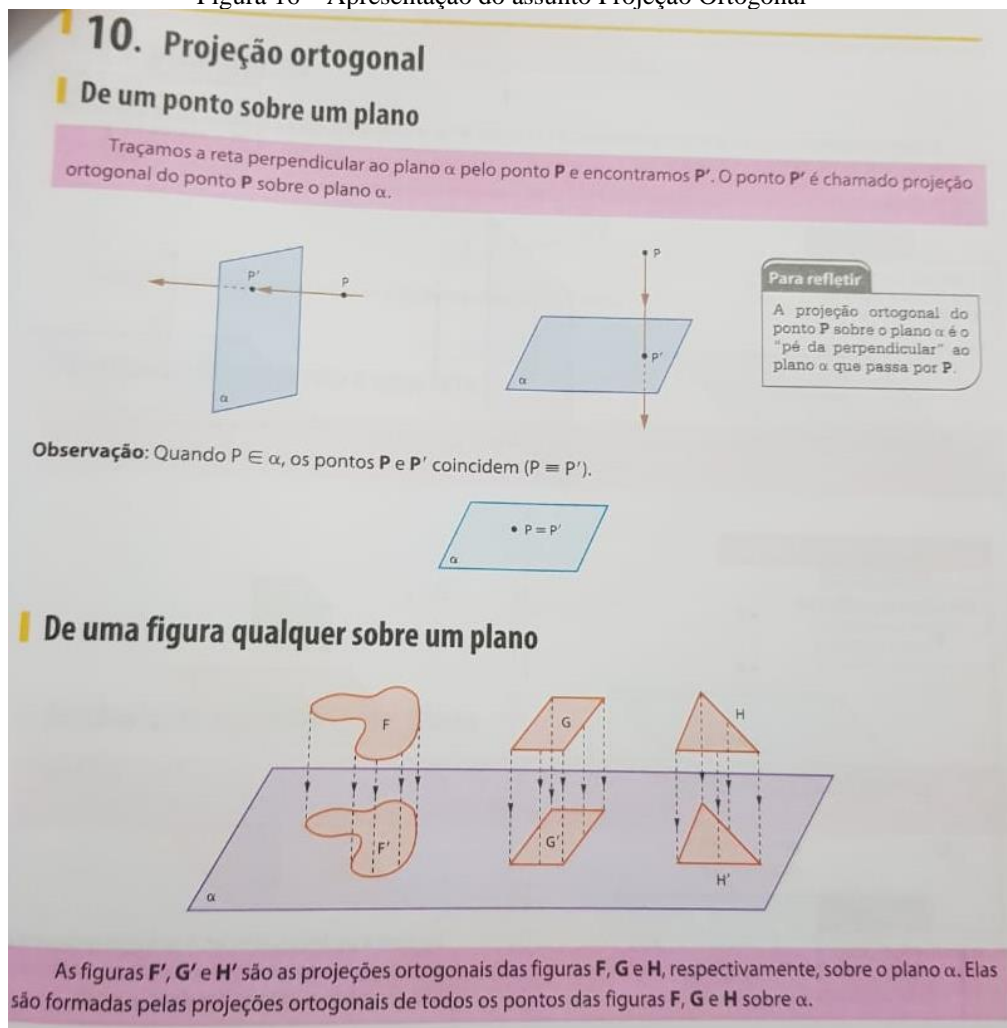


Fonte: DANTE, 2012

Assim como o pensamento geométrico, a criação de imagens mentais da projeção ortogonal demora para ser construída e é feita aos poucos. Para tanto, é necessário acostumar os estudantes a pensar de forma tridimensional, o que o exercício da Figura 15 proporciona. Para entender como construir uma projeção ortogonal é fundamental entender propriedades do paralelismo e do perpendicularismo e saber relacionar as duas definições, inclusive no espaço tridimensional. O livro analisado reserva seis páginas para tal adotando linguagem e rigor matemático, além de demonstrar alguns resultados, abordagem não tão comum no Ensino Médio<sup>13</sup>. Após estes conceitos e propriedades apresentados, o livro reserva duas páginas para abordar projeção ortogonal, em que o autor não contextualiza o conceito e o apresenta apenas em linguagem matemática (como vinha fazendo até esta página), não trazendo exemplos que não sejam relativamente triviais, como mostra a Figura 16. Uma possibilidade de exemplo não trivial poderia ser projetar um quadrado em um plano  $\alpha$ , no qual o quadrado não esteja contido em um plano paralelo a  $\alpha$  (a projeção neste caso poderia ser um retângulo de lados diferentes, figura geométrica diferente de um quadrado).

<sup>13</sup> Não estamos afirmando que esta seja uma abordagem ruim. É apenas uma abordagem da qual os alunos não estão acostumados.

Figura 16 – Apresentação do assunto Projeção Ortogonal

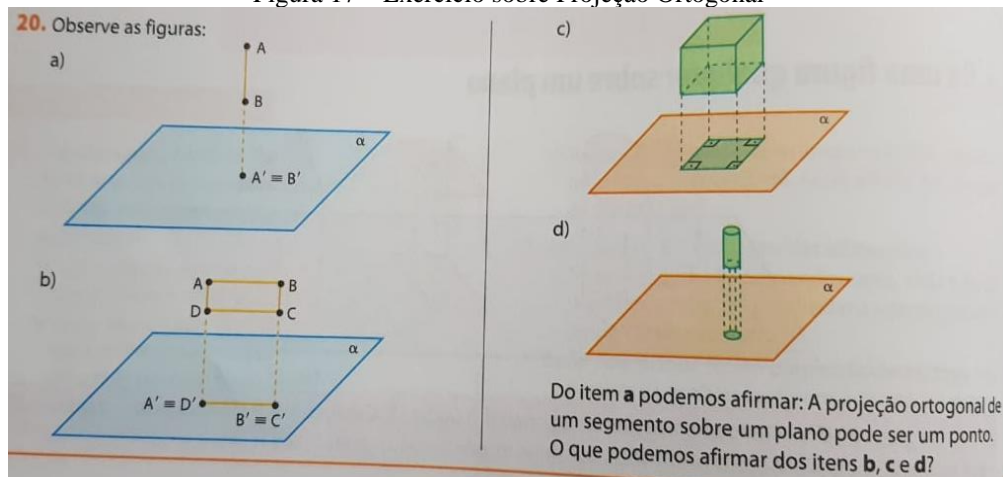


Fonte: DANTE, 2012

O autor coloca frente ao aluno um exercício interessante sobre projeção ortogonal, ilustrado na Figura 17, embora eles ainda sejam representações ortogonais convencionais destes objetos geométricos. No exercício o autor mostra uma projeção ortogonal de cada objeto, um segmento de reta, um retângulo, um cubo e um cilindro, porém, quando abordados o cubo ou o cilindro, a projeção não é nada mais que a base dos objetos em um plano paralelo, o que pode levar o estudante à uma ideia equivocada ou prototípica da projeção ortogonal. Uma ideia que poderia desafiar as habilidades de visualização espacial dos alunos seria projetar o cilindro, porém em posição deitada, em um plano e encontrar um retângulo como projeção ortogonal no plano horizontal.



Figura 17 – Exercício sobre Projeção Ortogonal



Fonte: DANTE, 2012

Ainda nesse livro, em suas últimas páginas são apresentadas algumas questões do ENEM, como exercícios complementares. Buscamos nessas páginas algum exercício de projeção ortogonal e encontramos o exercício apresentado na Figura 18.

Figura 18 – Exercício sobre Projeção Ortogonal de um ponto em movimento

3. Considere um ponto  $P$  em uma circunferência de raio  $r$  no plano cartesiano. Seja  $Q$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $x$ , como mostra a figura, e suponha que o ponto  $P$  percorra, no sentido anti-horário, uma distância  $d \leq r$  sobre a circunferência.

Então, o ponto  $Q$  percorrerá, no eixo  $x$ , uma distância dada por:

a)  $r \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{d}{r} \right)$ .      d)  $r \operatorname{sen} \left( \frac{r}{d} \right)$ .

b)  $r \left( 1 - \operatorname{cos} \frac{d}{r} \right)$ .      e)  $r \operatorname{cos} \left( \frac{r}{d} \right)$ .

c)  $r \left( 1 - \operatorname{tg} \frac{d}{r} \right)$ .

Fonte: DANTE, 2012

O exercício exige um raciocínio interessante para sua resolução, visto que não estamos projetando um objeto estático e sim um ponto  $P$  em movimento. Em 2012, quando este livro foi lançado, não havia tantas questões do ENEM que abordassem a projeção ortogonal de forma não algébrica, assim o exercício está condizente com as habilidades avaliadas pelo ENEM.

## 2.5.2 Matemática Contexto & Aplicações (PNLD 2018) (2016)

O livro do mesmo autor, porém lançado quatro anos após o primeiro, traz uma abordagem um pouco diferente. Uma observação interessante é que este é o livro usado pela turma da Escola Técnica Estadual Parobé que participou desta pesquisa. O primeiro capítulo que aborda geometria foca nas figuras planas e no cálculo de suas áreas. No segundo capítulo destinado a geometria o autor busca, como no livro anteriormente analisado, fazer uma abordagem intuitiva da geometria espacial.

Algo diferente nesta edição é a referência a objetos da realidade para exemplificar alguns conceitos de geometria, como apresentamos na Figura 19.

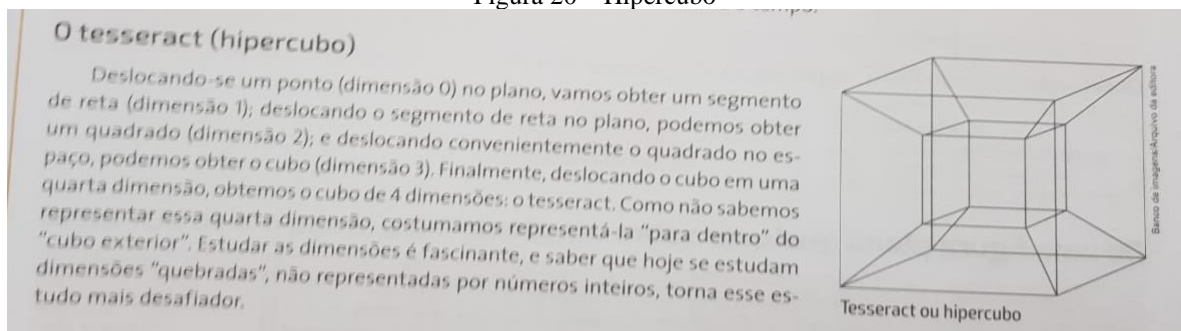
Figura 19 – Exemplificando conceitos de geometria com objetos da realidade



Fonte: DANTE, 2016

Em vários momentos o autor conversa com o leitor, apresentando abordagens interessantes da geometria que, provavelmente, o leitor nunca viu, como por exemplo o cubo em quatro dimensões (Figura 20).

Figura 20 – Hiper-cubo



Fonte: DANTE, 2016

Nesse livro, o autor apresenta a projeção ortogonal de maneira semelhante à edição de 2012. Os únicos exercícios propostos sobre o tema são os dois apresentados na Figura 21.

Figura 21 – Exercícios sobre Projeção Ortogonal

<p><b>16.</b> Verifiquem se cada afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).</p> <p>a) A projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.</p> <p>b) A projeção ortogonal de uma circunferência sobre um plano pode ser um ponto.</p> <p>c) Se a projeção ortogonal de <math>\overline{AB}</math> sobre <math>\alpha</math> é <math>\overline{A'B'}</math>, então a medida de <math>A'B'</math> é menor do que a de <math>AB</math>.</p> <p>d) Se a projeção ortogonal do <math>\triangle ABC</math> sobre um plano <math>\alpha</math> é o <math>\triangle A'B'C'</math> e o <math>\triangle ABC</math> é congruente ao <math>\triangle A'B'C'</math>, então o <math>\triangle ABC</math> está contido em <math>\alpha</math> ou está contido em um plano distinto e paralelo a <math>\alpha</math>.</p>	<p>e) A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.</p> <p>f) As projeções de três pontos não colineares sobre um plano podem ser três pontos colineares.</p> <p><b>17.</b> Considerem um plano <math>\alpha</math>, uma reta <math>r</math> e um ponto <math>P</math> tais que <math>r \not\subset \alpha</math>, <math>P \notin \alpha</math> e <math>P \notin r</math>. Indiquem todas as possibilidades quando se faz a projeção ortogonal, respectivamente, de <math>r</math> e <math>P</math> sobre <math>\alpha</math>.</p> <p>a) Uma reta e um ponto fora dela.</p> <p>b) Um único ponto.</p> <p>c) Dois pontos distintos.</p> <p>d) Uma reta.</p> <p>e) Duas retas distintas.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

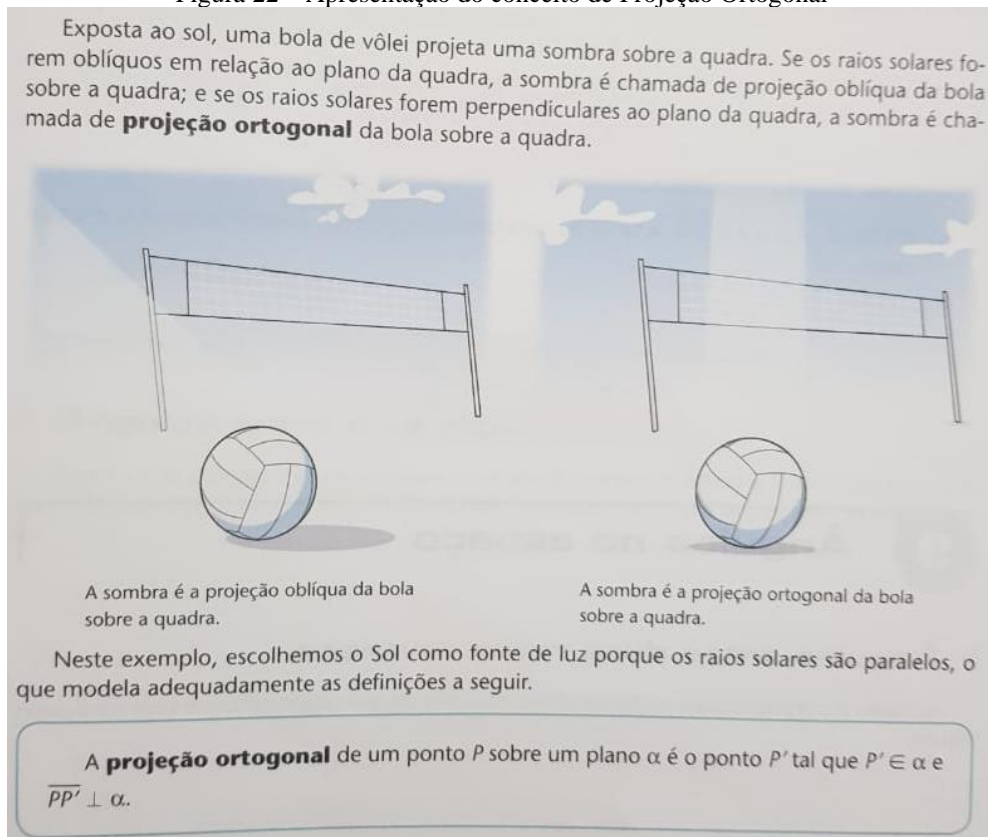
Fonte: DANTE, 2016

No final do livro há questões do ENEM, como no livro anterior, porém neste há poucas páginas de exercícios, além de não haver nenhum sobre projeção ortogonal.

### 2.5.3 Matemática Paiva Volume 2 (2009)

Este livro reserva duas páginas para projeção ortogonal. Ele prepara o aluno para o assunto em mais de dez páginas, abordando paralelismo e perpendicularismo. Um ponto interessante deste livro é o fato de começar falando sobre projeção e, não diretamente projeção ortogonal. Assim, como mostra a Figura 22, o autor faz uma contextualização de projeção, usando-a como motivação para definir a projeção ortogonal.

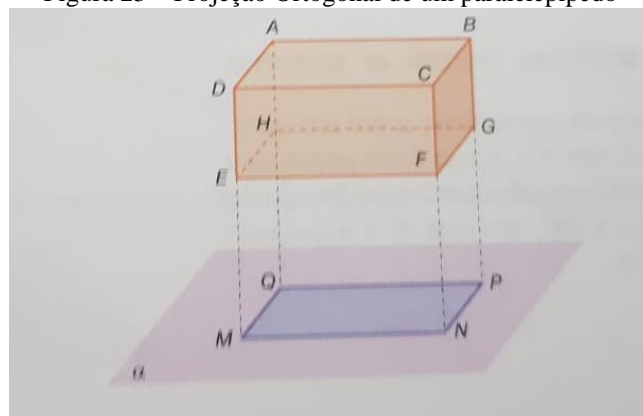
Figura 22 – Apresentação do conceito de Projeção Ortogonal



Fonte: PAIVA, 2009

Na Figura 23 destacamos uma imagem que representa uma projeção ortogonal utilizada como exemplo pelo autor, em que há um paralelepípedo e sua projeção sobre um plano  $\alpha$ , tal que essa projeção é um retângulo. Mais uma vez a projeção utilizada, dentre as diversas possíveis, é a mais comum, na qual a figura geométrica é um retângulo.

Figura 23 – Projeção Ortogonal de um paralelepípedo



Fonte: PAIVA, 2009

Nos exercícios deste capítulo o livro aborda apenas questões algébricas, utilizando a projeção ortogonal de segmentos de reta, que não exigem dos alunos construções de imagens mentais para responder às questões, bastando saber que a linha de projeção forma um ângulo reto com o plano.

## 2.5.4 Matemática Interação e Tecnologia (PNLD 2018) (2016)

Este livro é destinado ao terceiro ano (o único desta análise) e aborda um conteúdo que, geralmente, é estudado no segundo ano, a geometria espacial. O livro contextualiza todo assunto de geometria que aborda, como na Figura 24, que mostra um evento do cotidiano das pessoas, que pode ajudar a entender e a aprimorar a visualização geométrica do aluno. O livro dedica dezoito páginas para discutir geometria espacial antes de entrar nas quatro páginas de projeção ortogonal.

Figura 24 – Explicação de evento do cotidiano que se relaciona com Matemática

**Impedimento no futebol**

A chamada lei do impedimento no futebol se aplica basicamente nos casos em que um jogador lança a bola para um companheiro de equipe no campo de ataque, sem que haja pelo menos dois adversários entre esse companheiro de equipe e a linha de fundo. Em geral, o jogador mais recuado de uma equipe é o goleiro, por isso é comum que se diga que deve haver, entre o jogador que recebe a bola e a linha de fundo, o goleiro e mais um jogador adversário para que não haja impedimento.

Nas transmissões de futebol pela televisão é comum ser mostrado o **tira-teima** para esclarecer possíveis dúvidas em relação a um lance de impedimento. Observe como pode ser feito um tira-teima.

**Tira-teima:** auxílio eletrônico geralmente utilizado em transmissões esportivas pela televisão, capaz de analisar as imagens captadas e fornecer informações sobre determinado lance.

Uma câmera localizada em cada metade do campo é responsável por captar as imagens dos pontos de referência e transferi-las a um computador. O computador congela a imagem do lance escolhido e cria uma imagem em três dimensões (3D). Em seguida, é feita a combinação da imagem do lance virtual com a imagem real.

Estas imagens são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

No caso do impedimento, é determinada a localização dos elementos móveis do lance (os jogadores e a bola) e selecionado o momento exato em que partiu o lançamento. Um programa de computador transforma os jogadores em bonecos virtuais e cria uma animação que dá a sensação de observar a jogada em diferentes ângulos.

O programa de computador utiliza como base os pontos de referência, no caso, a linha de fundo, para mostrar se há impedimento no lance ou não. Com esse recurso é possível ter maior precisão para julgar se houve impedimento. Na representação ao lado, podemos perceber uma jogada entre os jogadores de uniforme listrado que caracteriza um impedimento.

Considerando a linha de impedimento, a linha de fundo e a linha lateral do campo como retas, determine a posição relativa entre as retas correspondentes à linha:

- de fundo e à linha de impedimento, *paralelas*
- de impedimento e à linha lateral, *concorrentes*
- lateral e à linha de fundo, *concorrentes*

Em que outros lances do jogo de futebol é possível utilizar esse tipo de tira-teima?

Possível resposta: Em lances que há dúvida se a bola entrou ou não no gol.

Fonte: BALESTRI, 2016

No subcapítulo de projeção ortogonal o livro começa trabalhando a projeção ortogonal em três planos de projeção distintos, utilizando uma aeronave, como mostra a Figura 25, e depois apresenta o conteúdo em linguagem matemática, iniciando por projeção de um ponto até chegar em projeção de um objeto. Com exceção do início, o subcapítulo é parecido com os livros anteriores ao explicar a projeção ortogonal de uma reta e de sólidos, sem avançar na abordagem de sólidos usados ou de planos de projeção.

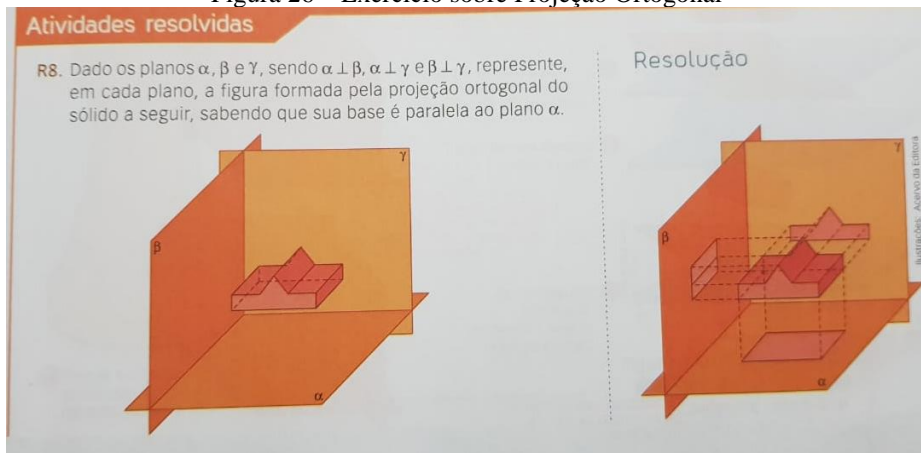
Figura 25 – Diferentes projeções ortogonais de um avião



Fonte: BALESTRI, 2016

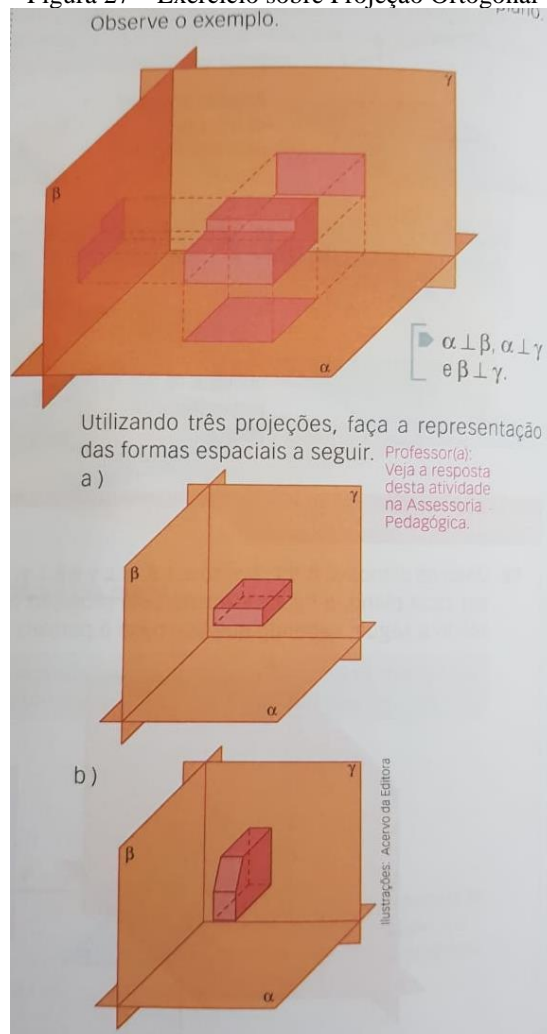
Nos exercícios este livro é o mais completo em relação à quantidade de objetos a serem projetados ortogonalmente, porém os exercícios continuam sendo, em unanimidade, projeções ortogonais de sólidos paralelos aos planos de projeção, como ilustrados nas Figura 26 e Figura 27.

Figura 26 – Exercício sobre Projeção Ortogonal



Fonte: BALESTRI, 2016

Figura 27 – Exercício sobre Projeção Ortogonal



Fonte: BALESTRI, 2016

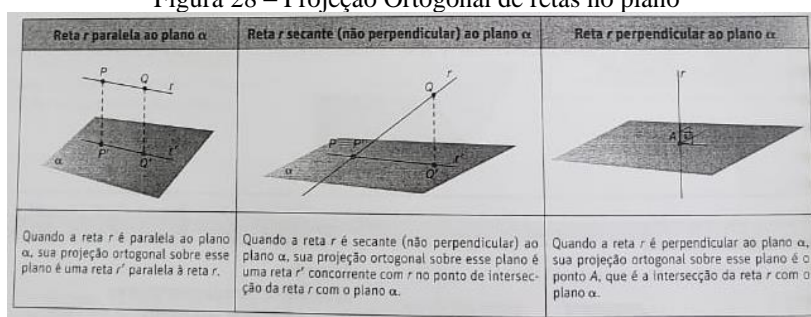
Observamos que, analisando o nome do livro “Matemática Interação e Tecnologia”, poderíamos supor que haveria alguma referência a algum recurso tecnológico (por exemplo

o GeoGebra) ao adentrar o tema de geometria espacial, porém não há nenhuma citação, pelo menos até o final do conteúdo de projeção ortogonal.

### 2.5.5 MATEMÁTICA Volume único parte II (2015)

O livro dedica uma página para Projeção Ortogonal e apresenta o tema timidamente, discutindo a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e de um ponto sobre um plano. O livro ainda discute a projeção ortogonal de retas no plano (Figura 28), dependendo da posição da reta em relação ao plano (paralela, secante não perpendicular, perpendicular). O livro não apresenta exemplos que aproximem-se de contextos da vida real.

Figura 28 – Projeção Ortogonal de retas no plano



Fonte: FUGITA *et al.*, 2015

Finalmente, identificamos que o livro não discute a projeção ortogonal de sólidos, apenas cita que esta é a projeção de todos os pontos do sólido em um plano  $\alpha$ . Também não há exercícios sobre Projeção Ortogonal.

### 2.5.6 Novo olhar matemática (2013)

Neste livro o conteúdo de geometria é muito reduzido. São vinte e sete páginas que abordam áreas de figuras planas, relações entre elas e área do círculo. O conceito de Projeção Ortogonal não é apresentado.

### 2.5.7 Matemática 2 (2016)

Neste livro o conteúdo de geometria é muito reduzido. São trinta e uma páginas que abordam áreas de figuras planas, relações entre elas e área do círculo. O conceito de Projeção Ortogonal não é apresentado.



Percebemos que, nos livros que analisamos, há poucas páginas dedicadas à Projeção Ortogonal e, com raras exceções, a apresentação do assunto é feita de maneira distante da realidade do aluno. Todos os livros que tratam de Projeção Ortogonal, abordam os conceitos necessários para que a Projeção Ortogonal esteja bem definida. Mesmo nos livros que abordam Projeção Ortogonal, algumas vezes, não há exercícios sobre o tema e, quando há são poucos e distantes da vida real do estudante. Nenhum livro trabalha a Projeção Ortogonal de um objeto em movimento no espaço, como, em geral, propõem as questões do ENEM (ver APÊNDICE A).

A partir das análises realizadas, podemos concluir que o tema proposto neste estudo, provavelmente, é pouco abordado no Ensino Médio.

Na próxima seção faremos uma pesquisa para explorar e verificar o que já foi estudado sobre a aprendizagem de Geometria Espacial e Projeção Ortogonal com recursos tecnológicos.

## **2.6 Trabalhos Correlatos**

Durante a pesquisa, procurei Trabalhos de Conclusão de Curso, Dissertações e Teses no repositório do LUME da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, abordando Projeção Ortogonal na Educação, desenvolvimento de habilidades espaciais ou o uso do GeoGebra como recurso para explorar as representações de objetos tridimensionais.

Bernardes (2014) em sua dissertação aborda o estudo do desenvolvimento de habilidades espaciais, como por exemplo a rotação mental, percepção espacial e visualização espacial, procurando utilizar objetos digitais. Seu objetivo foi verificar como os objetos digitais auxiliam o aluno a desenvolver habilidades espaciais. Ele realizou sua experiência com alunos do Ensino Fundamental, que ainda não tinham tido contato com situações de manipulação de objetos espaciais, nesta experiência usou uma sequência didática com objetos digitais e não-digitais de aprendizagem. Além da experiência, Bernardes (2014) faz uma análise de livros didáticos, em que conclui que os livros estão possibilitando atividades que exploram a noção do espaço bidimensional e tridimensional. Nos resultados da pesquisa foi percebido que os alunos desenvolveram habilidades espaciais a partir da sequência didática, também foi notado que a manipulação de objetos digitais pode potencializar o desenvolvimento dessas habilidades. Em nossa pesquisa, também abordamos o

desenvolvimento de habilidades espaciais e utilizamos um objeto digital para tal. Além disso, também realizamos uma análise de livros didáticos.

Mentz (2015) em seu trabalho de conclusão de curso busca analisar contribuições do uso do software GeoGebra 3D para a visualização e compreensão de alguns conceitos de Geometria Espacial, como por exemplo sólidos geométricos, vértices, arestas, faces, área de superfície e volume. Foi feita uma investigação qualitativa com alunos de terceiro ano do Ensino Médio. A sequência de atividades proposta iniciou com um questionário para identificar conceitos prévios que os alunos sabiam e, depois, foram propostas atividades de construção de sólidos geométricos no GeoGebra 3D, guiadas por perguntas que deveriam ser respondidas em papel. A pesquisa concluiu que o GeoGebra 3D contribuiu para a compreensão dos conceitos supracitados, dado principalmente pelo dinamismo proporcionado pelo software. Em nossa pesquisa, utilizamos o GeoGebra 3D e trabalhamos com diversas atividades que necessitavam do estudante desenvolver sua visualização espacial.

Borsoi (2016) discute o processo de aprendizagem sobre Geometria Espacial no Ensino Médio e investiga o potencial do GeoGebra 3D no desenvolvimento de habilidades espaciais. Neste estudo há uma sequência didática que explora os conceitos de Geometria Espacial utilizando o GeoGebra. Esta sequência didática teve como objetivo desenvolver o pensamento geométrico espacial, com foco em interações dinâmicas entre representações do objeto tridimensional e diferentes planos de cortes. Ao final da pesquisa, a autora constata que houve progresso no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial dos alunos, em que ela acredita que essa melhora está relacionada com o uso do GeoGebra no aprendizado dos alunos. Em nossa pesquisa, também utilizamos o GeoGebra 3D, buscando investigar seu potencial no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, mais especificamente no aprendizado de projeção ortogonal.

Aguir (2017) analisou, a partir de uma oficina com alunos do terceiro ano de uma Escola Estadual de Porto Alegre, como o software GeoGebra 3D pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização e para o entendimento de conceitos de Geometria Espacial. Na condução da pesquisa a autora estabeleceu três questões que iriam nortear a experiência, em que elas questionaram de que forma podemos usar o GeoGebra como recurso para o estudo de Geometria Espacial, como o software pode ajudar a visualizar e compreender conceitos de Geometria Espacial e como utilizar a tecnologia na sala de aula concomitantemente com os recursos usuais. Nos resultados da pesquisa a autora percebeu

que o software foi bem aceito pelos estudantes e que alguns deles relataram que o GeoGebra ajudou na visualização e compreensão de sólidos geométricos. Em nossa pesquisa, também utilizamos o GeoGebra 3D e analisamos como o mesmo pode contribuir para o aprendizado de projeção ortogonal.

Lemmertz (2019) realizou uma pesquisa com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. A autora abordou uma sequência de oito encontros, em que os alunos participaram de atividades envolvendo a manipulação de objetos físicos e virtuais com o objetivo de desenvolver habilidades de visualização espacial. A questão que norteou o trabalho foi: De que forma atividades envolvendo a manipulação de objetos tridimensionais físicos e digitais podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial. Nos resultados da pesquisa foi observado que boa parte dos alunos não tinha experiência com Geometria Espacial e que as habilidades de visualização espacial foram necessárias para o raciocínio geométrico, que ajudou os alunos a criarem imagens mentais dos objetos que, provavelmente, não poderiam construir apenas com representações bidimensionais desses sólidos. Em nossa pesquisa, também buscamos desenvolver habilidades de visualização espacial, principalmente com o GeoGebra 3D. Também trabalhamos o raciocínio geométrico dos alunos para ajudar na criação das imagens mentais das construções solicitadas.

No capítulo a seguir apresentaremos os procedimentos metodológicos da pesquisa realizada, o cenário em que ela esteve inserida, a sequência didática e a forma como os dados foram produzidos.

### 3 METODOLOGIA

Esta seção visa estabelecer os aspectos metodológicos para investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar a compreensão sobre projeção ortogonal com alunos do Ensino Médio. Para conduzir a investigação, foi realizada uma oficina com alunos de Ensino Médio, em que eles fizeram uso do GeoGebra 3D para construir figuras espaciais e suas projeções para resolver questões de projeção ortogonal.

Este capítulo apresenta a forma como a pesquisa foi elaborada, a escola, os sujeitos participantes, uma breve descrição do planejamento das atividades aplicadas durante a pesquisa e de que forma os dados foram coletados.

#### 3.1 Pesquisa Qualitativa

Para desenvolver este trabalho, a metodologia escolhida foi a investigação qualitativa.

Utilizamos o termo *investigação qualitativa* como termo genérico que agrupa diversas que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por *qualitativos*, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis [...] (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16).

Para Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa tem por características: constituir o investigador como instrumento principal, sendo o ambiente natural uma fonte de dados, isto é, os dados coletados ao longo da pesquisa são complementados e influenciados pelo contexto que ocorre; ser descritiva, em que não há economia nas páginas contendo narrativas, contendo citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação; o processo de aprendizagem importar mais que os resultados, assim em cada atividade estamos mais interessados em entender os passos de resolução do aluno, do que, simplesmente, o produto final; construir abstrações à medida que os dados vão sendo recolhidos, ou seja, não estamos preocupados em recolher dados ou provas com o objetivo de confirmar uma hipótese pensada anteriormente, privilegiamos, essencialmente, “a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

A investigação qualitativa vai ao encontro da presente pesquisa, pois queremos analisar cada atividade desenvolvida pelos alunos a partir de suas falas, registros escritos e

construções no software, sendo bastante descritivo, em que cada novo movimento representa alguma novidade e algo importante de ser compreendido.

### 3.2 O Colégio

A pesquisa foi realizada a partir dos dados coletados em uma oficina denominada *GeoGebra 3D no Ensino Médio: Uma possibilidade para a aprendizagem de Projeção Ortogonal*, realizada na Escola Técnica Estadual Parobé<sup>14</sup>, localizada na Av. Loureiro da Silva, 945, bairro Cidade Baixa na cidade de Porto Alegre (Figura 29).

Figura 29 – Imagem da entrada da escola



Fonte: Disponível em: <https://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/noticia/2018/11/21/escola-de-porto-alegre-abre-inscricoes-para-cinco-cursos-tecnicos-gratuitos.ghtml> Acesso em 07/12/2019

Foram convidados pelo pesquisador, seus próprios alunos da turma 2M1 (2º ano do Ensino Médio), para participar da atividade. A turma é composta por vinte e cinco alunos, em que todos participaram da oficina proposta. Foram realizados cinco encontros de uma hora e quarenta minutos de duração, durante o horário normal de aula e um encontro extra com sete alunos no contra turno.

---

<sup>14</sup> A carta de ciência e concordância da escola encontra-se no Apêndice C

Na escola há quatro laboratórios de informática, cada um com pelo menos quinze computadores com acesso à internet, em que trabalhamos em todos os encontros.

### 3.3 Descrição da Oficina

A oficina desenvolvida aborda atividades trabalhadas no software de matemática dinâmica GeoGebra que envolvem a familiarização com o software, conceitos de geometria espacial, habilidades de visualização espacial e identificação de representações ortogonais de objetos tridimensionais. A oficina foi organizada em seis encontros que ocorreram na sala de informática da Escola.

Para dar início à utilização do software, foi proposto que os alunos aprendessem a manusear o software GeoGebra enquanto construíam os conceitos de matemática abordados nas atividades. Notare e Basso (2016) já mostraram esta possibilidade ao, em um grupo de alunos do mestrado profissional, fazer os alunos explorarem o GeoGebra 3D pela primeira vez concomitantemente com a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Os alunos puderam trocar ideias durante todo o processo, pois acreditamos que isso pode ajudar no desenvolvimento de ideias e na discussão sobre como criar e projetar os objetos que foram solicitados nas atividades. O papel do professor na pesquisa foi de mediador, isto é, fez questionamentos que instigassem os estudantes, mas os alunos tiveram um papel ativo no seu processo de aprendizagem.

Abaixo no Quadro 3 encontra-se o planejamento das atividades previstas para cada encontro

Quadro 3 – Planejamento das Atividades

Encontros	Data	Duração	Atividades	
Encontro 1	03.10.2019	2 períodos	1 e 2	- Familiarização com o software; - Construir polígonos, observando suas propriedades geométricas.
Encontro 2	10.10.2019	2 períodos	3 e 4 (início)	- Compreender o comportamento do Seno e o Cosseno no círculo Trigonométrico; - Construir um círculo no GeoGebra; - Utilizar o controle deslizante no GeoGebra.
Encontro 3	11.10.2019	2 períodos	4 (final) e 5	- Definir Projeção Ortogonal; - Familiarização com o conceito de projeção ortogonal.

Encontro 4	17.10.2019	2 períodos	6 e 7 (início)	- Construir um cubo, um cilindro e uma pirâmide e analisar a projeção em planos diferentes;
Encontro 5	25.10.2019	2 períodos	7 (final) e 8	- Entender como a projeção ortogonal e conceitos matemáticos podem ser importantes em situações reais.
Encontro 6	04.11.2019	2 períodos	9 e 10	- Resolver, utilizando o software, uma questão do ENEM sobre projeção ortogonal.

Todas as dez tarefas foram entregues aos alunos em uma folha de ofício, em que os alunos fizeram construções com o uso do software GeoGebra. Todas as atividades foram salvas em formato .ggb (extensão aceita pelo GeoGebra) e anexadas e enviadas para o e-mail do professor com o título “Atividade (número da atividade aqui)”. O objetivo da oficina foi investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar a aprendizagem de projeção ortogonal no Ensino Médio. Abaixo segue a descrição das dez atividades elaboradas para a oficina.

Na Tarefa 1 foi solicitado que os alunos fizessem construções simples com o objetivo de familiarizá-los com o GeoGebra e com recursos da matemática dinâmica. Para a Tarefa 2, foi solicitada a construção de figuras geométricas como triângulo, quadrado e paralelogramo, observando as propriedades de cada um. Em algumas atividades foi necessário que os alunos tivessem conhecimento sobre o comportamento de um ponto com coordenadas (cos  $x$ , sen  $x$ ), então a Tarefa 3 teve por objetivo introduzir este conceito. Na Tarefa 4 o objetivo foi a utilização de um recurso interessante e útil do GeoGebra, o controle deslizante. Para tal, foi dada liberdade aos alunos para construir algo no software, utilizando o recurso. A Tarefa 5 teve por objetivo a familiarização dos alunos com a janela de visualização 3D do GeoGebra, em que isso foi feito mediante a construção de sólidos geométricos. A Tarefa 6 teve por objetivo definir e entender o conceito Projeção Ortogonal, assim os alunos projetaram pontos e segmentos de reta no GeoGebra, além de utilizar o recurso digital<sup>15</sup> desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense. Neste recurso, as projeções ortogonais já estavam construídas, assim foi um bom recurso para os alunos começarem a exploração e o entendimento sobre Projeção Ortogonal de sólidos. Tivemos por objetivo, na Tarefa 7, que

<sup>15</sup> Disponível em <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pro/pro-html/pro-br.html> acesso em 19 de Maio de 2019

os alunos realizassem sua primeira construção de projeção ortogonal, em que foi solicitado que os alunos construíssem diferentes projeções ortogonais de um cubo, uma pirâmide e de um cilindro. Além disso, os alunos foram convidados a analisar uma tirinha (Figura 30) e construir as projeções que se encontram nela. Nossa vida cotidiana está envolvida por interações entre plano e espaço, em que a maioria delas implica em algum tipo de relação dinâmica ou informação (GUTIÉRREZ, 1996, p.23), assim, na Tarefa 8 abordamos um lance em um jogo de futebol (Internacional x Bahia ocorrido em 12/06/2019) com os alunos, em que eles analisaram e tiraram suas próprias conclusões sobre o acontecimento. As Tarefa 9 e Tarefa 10 tiveram por objetivo solucionar, com o auxílio do GeoGebra 3D, duas questões no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Mais detalhes sobre as tarefas podem ser visualizados no Apêndice B.

Figura 30 – Tirinha sobre projeção ortogonal



Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XeFXvzbQQMw> acesso em 11/06/2019

### 3.4 Os Dados Coletados/Produzidos

Goldenberg (2004) afirma que, em uma pesquisa qualitativa,

Os dados [...] consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis [...] obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los (GOLDENBERG, 2004, p. 53).

Assim, os dados que foram produzidos durante a oficina foram anotações do pesquisador, filmagens, gravações de voz, fotografias, arquivos do GeoGebra e folhas de atividades entregues. As filmagens, gravações de voz e fotografias foram autorizadas conforme o termo de consentimento assinado pelos responsáveis (APÊNDICE D) e de assentimento assinado pelos alunos (APÊNDICE E).

Os dados foram analisados a partir da teoria de Gutiérrez (1996) sobre o processo de resolução de um problema espacial e o uso (ou não uso) das habilidades espaciais pelos alunos, durante a oficina, em conversas, construções, dúvidas, comentários, respostas, etc.

O capítulo a seguir apresenta a descrição e a análise dos dados.



## 4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Esse capítulo apresenta a descrição dos encontros realizados e a análise dos dados, com o objetivo de verificar como o software GeoGebra 3D e a Geometria Dinâmica contribuíram para a compreensão da Projeção Ortogonal.

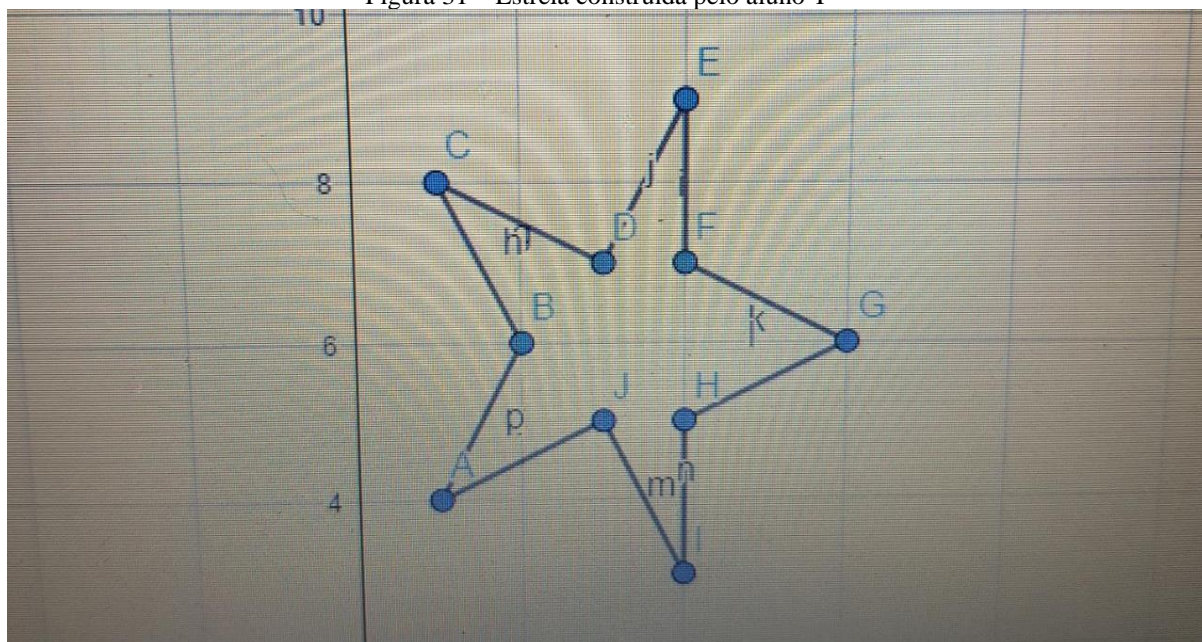
### 4.1 Encontro 1

Este encontro ocorreu no dia 3 de outubro de 2019, com duração de 1h e 40 minutos, estavam presentes vinte e três alunos, sendo que foram formados um trio, nove duplas e dois alunos fizeram individualmente, em que os alunos puderam escolher seus grupos livremente. Durante a descrição e análise dos dados sempre chamaremos de grupo, mesmo se o aluno estiver trabalhando individualmente ou em dupla. Os grupos formados foram mantidos ao longo da sequência didática, a menos de pequenas alterações quando necessárias (quando algum aluno de alguma dupla estava ausente ou não havia computadores suficientes para algum grupo).

Na primeira atividade tínhamos como objetivo que os alunos iniciassem uma exploração no GeoGebra e se familiarizassem com o programa, para tal foi distribuída a folha que continha a Tarefa 1. Nesta tarefa foi solicitado que os alunos utilizassem as ferramentas ponto e segmento de reta para construir figuras a partir de coordenadas cartesianas prontas.

O processo de familiarização foi acontecendo aos poucos, os alunos levaram um tempo para se acostumar a usar as ferramentas de ponto e segmento. Uma dificuldade observada na maioria dos alunos foi de localizar as coordenadas cartesianas dadas no plano cartesiano, sendo necessária a intervenção algumas vezes. Ilustramos essa dificuldade com o exemplo da Figura 31, em que o aluno T conseguiu uma aproximação de uma estrela, porém as coordenadas dos pontos estão trocadas em relação às coordenadas cartesianas presentes na folha com a Tarefa 1 (para mais detalhes: ver Apêndice 2), ou seja, o aluno T trocou abscissa e ordenada.

Figura 31 – Estrela construída pelo aluno T



Fonte: Acervo pessoal

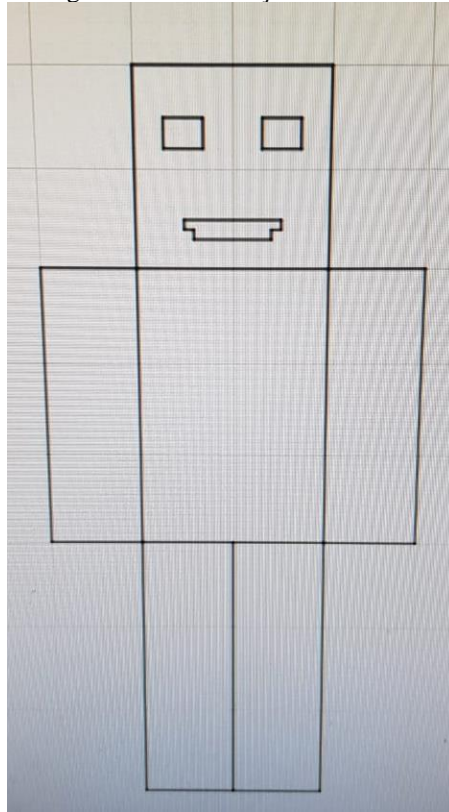
Um fato interessante que aconteceu com vários alunos, foi relacionado à descrição da figura na folha, pois eles respondiam que não sabiam. Ao observar suas construções, percebia-se que esses alunos não haviam ligado os vértices por segmentos, o que tornava difícil a visualização da figura formada.

Com esses acontecimentos a Tarefa 1 levou mais tempo que o previsto, levando cerca de 50 minutos. Porém, ao final, considerando os relatos dos alunos, percebeu-se que houve evolução no domínio das ferramentas iniciais do GeoGebra. Pode-se citar como exemplo o aluno K, que quando estava finalizando a última construção comentou: “*Finalmente eu entendi essa joça*<sup>16</sup>”.

Os alunos construíram suas figuras com agilidade e alguns dos resultados obtidos estão ilustrados nas Figura 32, Figura 33 e Figura 34.

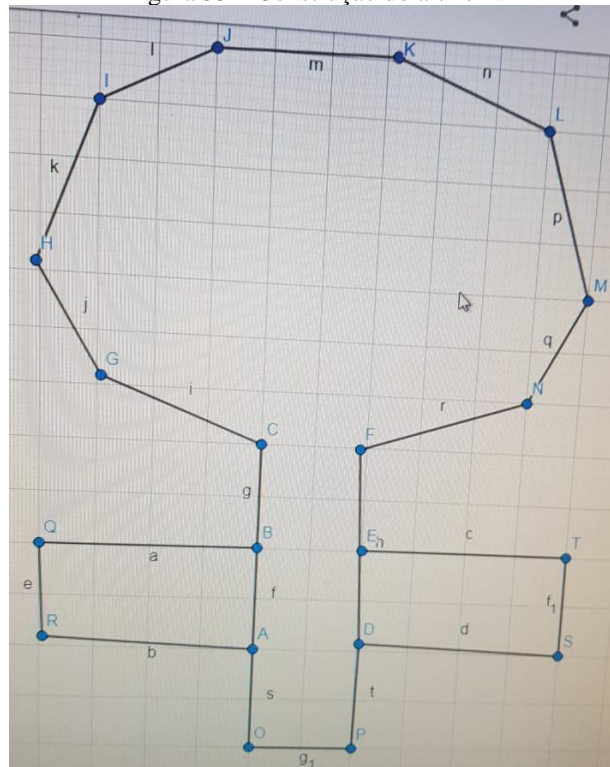
<sup>16</sup> Qualquer coisa que não se possa definir precisamente, que não se conhece.

Figura 32 – Construção do aluno T



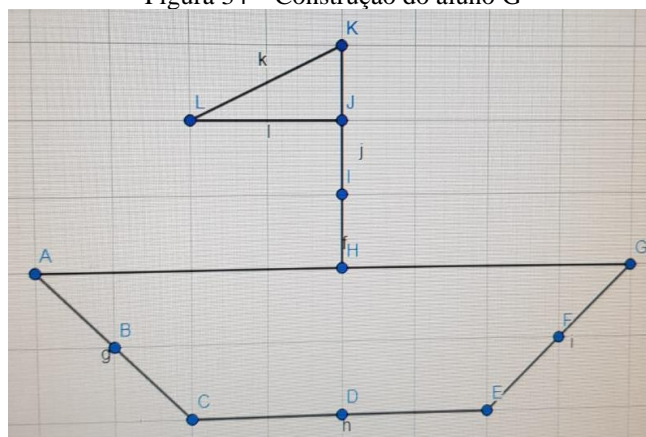
Fonte: Acervo pessoal

Figura 33 – Construção do aluno N



Fonte: Acervo pessoal

Figura 34 – Construção do aluno G



Fonte: Acervo pessoal

Essa atividade proporcionou um diálogo interessante entre o aluno A e o pesquisador, como mostra o extrato abaixo:

Aluno A: *Essa aula só 'tá' legal por que não tem matemática no meio.*

Pesquisador: *Localizar pontos no plano e ligar eles da forma que tu quer é matemática.*

Aluno A: *Por que que tu não faz sempre assim?*

Pesquisador espera um instante para pensar na resposta e complementa:

Pesquisador: *Tem muita coisa que a gente não espera que seja matemática, quando na verdade é. Daqui um tempo a gente vai ver uma outra situação, no futebol, que tu nem imagina que tenha matemática.*

É importante destacar que esta, assim como as próximas atividades, foram realizadas em tempos diferentes do esperado, respeitando o tempo necessário para que os alunos pudessem concluir a tarefa, visto que é essencial um domínio do software e da Matemática envolvida nas últimas tarefas dessa proposta.

A turma estava bem participativa, acredita-se que a mudança de ambiente ajudou neste aspecto (da sala de aula usual para o laboratório de informática), porém duas alunas comentaram que não gostaram de ir para informática e que preferiam que a aula fosse na sala de aula.

A seguir os alunos iniciaram a Tarefa 2. O objetivo nessa Tarefa era que os alunos se familiarizassem com ferramentas do GeoGebra que, posteriormente, seriam fundamentais. Alguns exemplos são, retas paralela e perpendicular, interseção e circunferência. Assim, como iríamos trabalhar com a construção de alguns polígonos, primeiro foi realizado um exemplo em conjunto, com a construção do quadrado. Neste momento estabeleceu-se uma

discussão entre pesquisador e alunos, a partir do questionamento: “*Pessoal, quem sabe o que é um quadrado? Levanta a mão quem souber*”.

Todos os estudantes levantaram a mão. Em seguida, foi solicitado: *Então alguém me descreve o que é um quadrado*. Os alunos ficaram pensativos, até que P tomou a iniciativa e disse: “*Sor, posso desenhar?*” O pesquisador respondeu que sim e, então, P foi ao quadro da sala de informática e desenhou um quadrado. Observando o desenho o pesquisador pergunta:

Pesquisador: *Então o que é um quadrado?*

P: *É isso.*

Pesquisador: *Mas o que é isso?*

Essa discussão permaneceu por cerca de dois minutos, quando o aluno T levantou da cadeira e afirmou:

T: *Tá sor, tu quer que a gente diga o que? Que tem lados iguais?*

Pesquisador: **EXATAMENTE!**

Os alunos ficaram pensativos por um momento e começaram a entender o que o pesquisador queria. A partir desse momento os alunos passaram a complementar a resposta, como por exemplo: *tem quatro lados, tem quatro ângulos de 90°, tem lados opostos paralelos, lados adjacentes perpendiculares*, entre outras. Assim, com a participação dos alunos, foi definido o quadrado no quadro. Aproveitando a situação, o pesquisador comentou com os alunos “*Isso, acabamos de fazer matemática!*”. Dando continuidade, os alunos passaram para a Tarefa 2, que solicitava a definição de quatro polígonos, losango, retângulo, triângulo retângulo e triângulo isósceles, seguindo a ideia discutida sobre o quadrado.

Neste momento, percebeu-se que talvez fosse importante aprofundar mais sobre o que é uma definição, pois alguns alunos definiram os polígonos com mais informações do que o necessário. Os alunos apresentaram como definição, além de elementos da própria definição, propriedades do polígono. Na Figura 35, o aluno X coloca: *Possui um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares*. Identificamos dois problemas nessa definição: primeiro, o que possui um ângulo reto? E, segundo, um triângulo que possua um ângulo reto (como a soma dos ângulos internos é 180°) segue que os outros dois ângulos são menores que 90° (portanto, agudos). A questão é que isso não faz parte da definição, sendo uma propriedade dos triângulos retângulos. Muitos alunos apresentaram este segundo problema, sem saber distinguir o que era necessário para a definição e o que poderia ser consequência

dela, como apresentado, também, na Figura 36. Uma observação importante é que não foi trivial explicar para os alunos que parte do que escreveram poderia ser “desnecessário”. Afinal, é claro que um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos e não é isso que estamos refutando e sim o fato disso ser ou não uma definição. Uma conversa com o aluno G revela essa situação:

Pesquisador: *Olha só, aqui basta dizer que o triângulo possui um ângulo reto, não precisa dizer os outros ângulos são agudos.*

G: *Mas os outros ângulos são agudos, não?*

Pesquisador: *Sim, são, mas (pesquisador foi interrompido).*

G: *Então ‘ta’ certo.*

Pesquisador: *Sim, ‘ta’ certo, mas não faz parte da definição.*

G: *Mas o que é a definição?*

Pesquisador: *São as “coisas” que tu precisa pra ter o triângulo retângulo.*

G (com a voz um pouco mais elevada): *Mas se ele (o triângulo) não tiver dois ângulos menor que noventa ele não é retângulo.*

A discussão não foi fácil e estendeu-se um pouco. Uma possibilidade que pode justificar a inquietação dos alunos pode estar relacionada ao fato de que não foi discutido anteriormente o que é uma definição matemática. Por exemplo, chamamos de cadeira uma peça de mobília composta de um assento individual e de um encosto, assim definimos uma cadeira, o mesmo serve para o triângulo retângulo, e no caso do aluno acima, faltou alguma insistência por parte do pesquisador em desenvolver uma negociação na definição do triângulo.

Figura 35 – Definição do aluno X

d) Triângulo Retângulo: *Possui um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares.*  
 e) Triângulo Isósceles: *É um triângulo equilátero com dois lados iguais.*

Fonte: Acervo pessoal

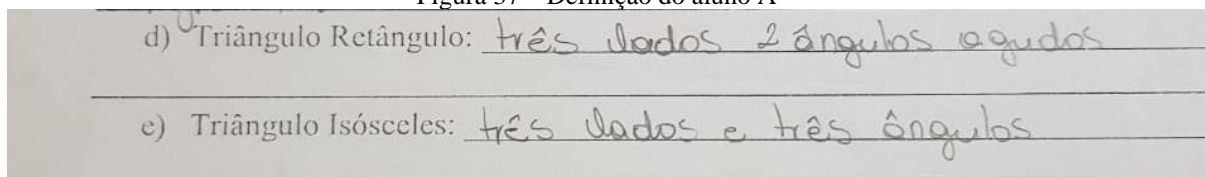
Figura 36 – Definição do aluno G

d) Triângulo Retângulo: *É formado por três lados. Ele possui um ângulo reto, um ângulo medido  $90^\circ$ , e dois ângulos agudos menores que  $90^\circ$ .*

Fonte: Acervo pessoal

Outra situação que ocorreu foi relacionada a definições incompletas, como ilustra a Figura 37. Porém, essa situação foi compreendida com mais facilidade.

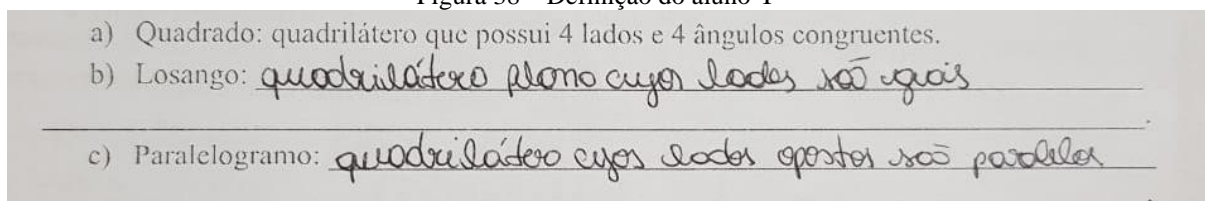
Figura 37 – Definição do aluno A



Fonte: Acervo pessoal

Muitos alunos conseguiram chegar na definição desejada, apesar de parecer algo trivial. Vale lembrar que, ao pesquisar sobre os polígonos em websites de pesquisa, nem sempre são fornecidas respostas prontas, sendo necessário discernir o que faz e o que não faz parte da definição. Alguns alunos conseguiram fazer isso. Foi o caso do aluno Y, ilustrado na Figura 38, que foi sucinta em suas definições. Quando questionei, afirmou: “*Sor, é tudo igual* (referindo-se ao fato de serem quadriláteros) *e diferente* (referindo-se ao fato da relação entre os ângulos e os lados ser diferente)”.

Figura 38 – Definição do aluno Y



Fonte: Acervo pessoal

Mas por que toda essa discussão é importante para nossa pesquisa? É importante lembrar que aqui estamos construindo um processo que, ao final, objetiva que os alunos, a partir de seus conhecimentos de Matemática e domínio do GeoGebra resolvam problemas de projeção ortogonal. Para tal, é preciso conhecer a matemática envolvida em cada situação para, somente depois, construir a situação no GeoGebra. O que fizemos aqui foi exatamente isso e, agora que os alunos conheciam os polígonos que iremos trabalhar, chegou o momento de construí-los!

Primeiro os alunos deveriam construir o exemplo que estava descrito na folha de atividades em seus respectivos computadores. O exemplo refere-se à construção de um quadrado que não se deforma ao ser movimentado no GeoGebra. Enquanto os alunos construíam o quadrado, percebeu-se que o planejamento do tempo não seria suficiente, pois já havia se passado mais de uma hora de aula e os alunos ainda precisavam construir quatro polígonos. Então, foi sugerido que eles escolhessem um dos polígonos para construir e, se sobrasse tempo, construíam mais um.

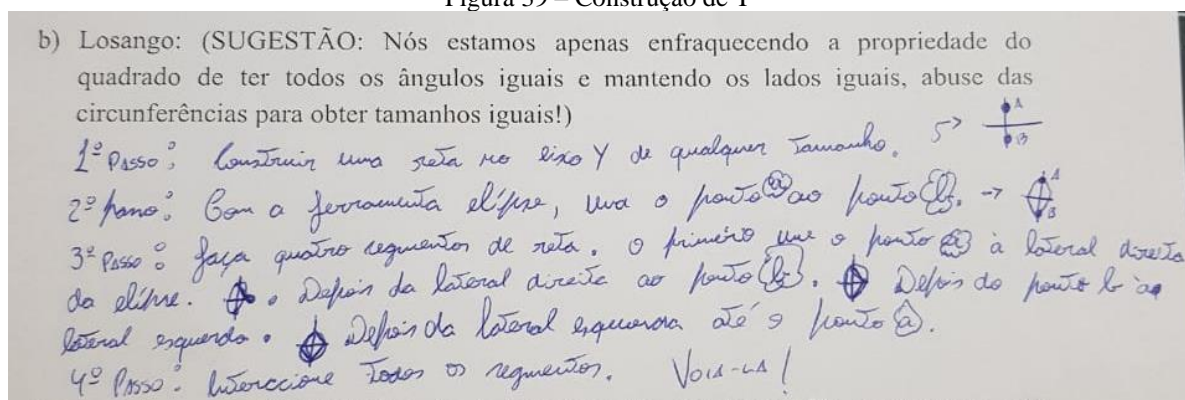
Na construção do quadrado, os alunos não apresentaram dificuldades, pois os passos para esta construção já estavam indicados com régua e compasso virtuais pelo pesquisador. Uma questão foi levantada pelo pesquisador, quando a maioria da turma já havia construído o quadrado (isso foi feito individualmente com cada indivíduo/dupla/trio).

O aluno T<sup>17</sup> respondeu, quando questionado, com certo rigor matemático, que as retas paralelas mantinham a propriedade de os lados adjacentes serem perpendiculares e que as circunferências mantinham a propriedade dos lados serem iguais e que as intersecções mantinham as duas propriedades. Sua resposta foi elaborada na hora e pausadamente (pois foi possível perceber que o estudante pensou em cada etapa do processo de construção). Os demais colegas elaboraram respostas mais simples.

O aluno G, que antes participou da discussão sobre o que é uma definição, quando questionado sobre o processo de construção para não ter deformações no quadrado respondeu: “*Por que senão aquelas tuas definições (com tom irônico e fazendo aspas com a mão) não funcionam*” e, para a surpresa dele, o pesquisador concordou, complementando que, por isso, era importante seguir esse processo.

Então os alunos começaram a última parte da Tarefa 2. Algo surpreendente aconteceu, o aluno T, que nesta aula estava trabalhando sozinho, decidiu construir um losango no GeoGebra. Sua construção foi incrível. Em cada questão há sugestões para os alunos realizarem as construções. O aluno T, entretanto, não utilizou as sugestões e teve uma ideia: Ele conhecia a elipse e perguntou “*tem como eu fazer uma elipse?*”. O pesquisador respondeu que sim, mostrando a ferramenta que poderia ser utilizada. Enquanto o pesquisador auxiliava o restante da turma, o aluno T finalizou sua construção. O resultado está ilustrado nas Figuras 39 e 40.

Figura 39 – Construção de T

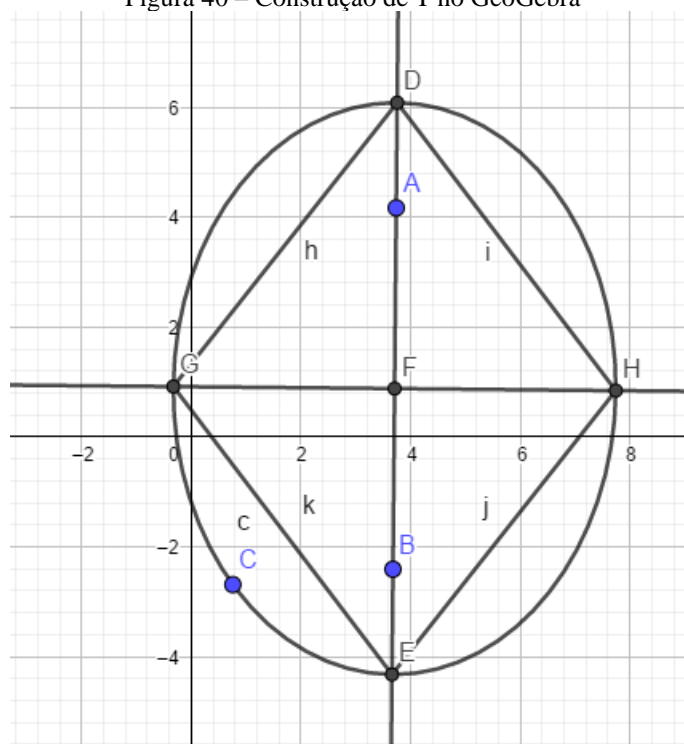


Fonte: Acervo pessoal

<sup>17</sup> T é um aluno diferenciado, posteriormente levei questões de nível 2 e 3 da OBMEP e ele conseguiu fazê-las com êxito. Ele, inclusive, contou em um outro momento que quer ser matemático ou físico no futuro.



Figura 40 – Construção de T no GeoGebra



Fonte: Acervo pessoal

Foi possível identificar que T não pensou na elipse como um objeto matemático, seus elementos e definições; ele afirmou que “*pensei na elipse porque parece um losango*”. Neste caso, a imagem mental da elipse ajudou T a construir a representação externa do losango (GUTIÉRREZ, 1996). Alguns pontos a se destacar pelo seu resultado são que, ao fazer construções em ambiente de geometria dinâmica, queremos movimentar a maior quantidade de pontos possível mantendo as definições e propriedades do polígono. Normalmente é possível movimentar os vértices do polígono construído, mas no caso do losango de T isso foi feito a partir de pontos que foram usados para construir a elipse.

Apesar de T ter feito uma construção inesperada, a maioria dos alunos não apresentou a mesma desenvoltura com matemática ou com o software. A Figura 41 representa a maioria dos resultados dos alunos.

Figura 41 – Respostas dos alunos M e V

b) Losango: (SUGESTÃO: Nós estamos apenas enfraquecendo a propriedade do quadrado de ter todos os ângulos iguais e mantendo os lados iguais, abuse das circunferências para obter tamanhos iguais!)

~~$(-6, 1), (-2, 1), (-3, 3), (-7, 3)$~~   
 $(-6, 4), (-4, 4), (-5, 5), (-5, 3)$

c) Paralelogramo: (SUGESTÃO: Os lados são todos paralelos. Não se preocupe com tamanhos, abuse da ferramenta Reta Paralela)

$(-6, 1), (-2, 1), (-3, 3), (-7, 3)$

d) Triângulo Retângulo: (SUGESTÃO: O triângulo possui apenas três vértices, deixe dois deles livres e construa o terceiro de forma a obter o triângulo desejado)

$(-6, 1), (-6, 4), (0, 1)$

e) Triângulo Isósceles: (SUGESTÃO: Faça uma circunferência com centro em seus dois primeiros pontos com mesmo tamanho do segmento que passa por ambos)

$(-6, 1), (-4, 4), (-1, 1)$

Fonte: Acervo pessoal

É interessante observar que os alunos não estão errados. Suas construções estão certas e, de fato, formam o polígono solicitado. A única ressalva é que, quando movimentamos os vértices, não continuamos com o polígono desejado, porque os alunos não se apoiaram nas propriedades geométricas da figura quando a construíram. Acredita-se que um possível motivo para os alunos resolverem a construção dessa forma (usando coordenadas de pontos), é que na Tarefa 1 aprendemos a usar as ferramentas pontos e segmento de reta e eles estavam usando as ferramentas que aprenderam, o que é ótimo. Pelo tempo curto, não foi possível ampliar as discussões com os alunos sobre isso, e poucos chegaram no resultado esperado (um polígono que não se deforma com o movimento de seus vértices).

Esse foi o primeiro contato da maioria dos alunos com a geometria dinâmica, essa pode ser uma das razões de muitos alunos não perceberem que movimentando um dos vértices deformamos o polígono. Visto isso talvez fosse importante acrescentar uma atividade introdutória envolvendo geometria dinâmica mais simples.

## 4.2 Encontro 2

Este encontro ocorreu no dia 10 de outubro de 2019, com duração de 1h 40min, estavam presentes vinte e um alunos.

Nessa aula os estudantes trabalharam principalmente na Tarefa 3, cujo objetivo era explorar e entender o círculo trigonométrico, assim como as funções trigonométricas. Nesta atividade foi solicitado que os alunos construíssem o círculo trigonométrico e fizessem observações sobre o mesmo.

A aula foi produtiva e alguns grupos alcançaram o resultado esperado, que era compreender que, à medida que se varia um parâmetro real  $a$ , de um ponto do plano, a trajetória desse ponto corresponde a uma circunferência, que pode ser explorada no GeoGebra movendo o ponto  $(\cos a, \sin a)$ . Nós chegamos a iniciar a Tarefa 4, porém não a finalizamos.

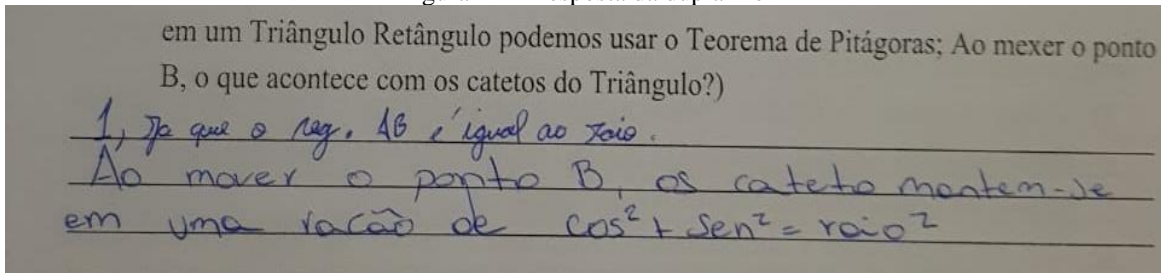
De um modo geral, a turma comporta-se muito bem nas atividades e busca resolvê-las. Nos áudios gravados da aula, é possível ouvir os alunos dialogando sobre as atividades e procurando finalizá-las, apesar de, nem sempre, procurar entender a proposta que está sendo feita.

Alguns alunos comentaram que já haviam estudado o círculo trigonométrico. Os alunos tiveram facilidade em construir o círculo trigonométrico assim como construir o triângulo solicitado e renomear seus catetos para COS e SEN, afinal já haviam se familiarizado com as ferramentas do GeoGebra nas tarefas anteriores. O “problema” dessa agilidade na construção é que os alunos chegaram na construção final muito rápido (movimentar o ponto B) e não notaram as relações que estavam sendo propostas.

A proposta da atividade era proporcionar a identificação do triângulo retângulo (por construção), para que os alunos compreendessem que, pelo Teorema de Pitágoras, tinha-se que  $\cos^2 a + \sin^2 a = AB$ , e que, pela relação trigonométrica que a maioria já conhecia  $AB = 1$ . Apesar disso, nenhum aluno (que descobriu que  $AB = 1$ ) utilizou o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida de  $AB$ . Na Figura 42 temos a resposta da dupla T e B, que descobriram que  $AB$  é 1, pois este é o raio de uma circunferência de raio igual a 1. É

importante observar que os estudantes perceberam que havia uma relação entre cosseno, seno e o raio da circunferência.

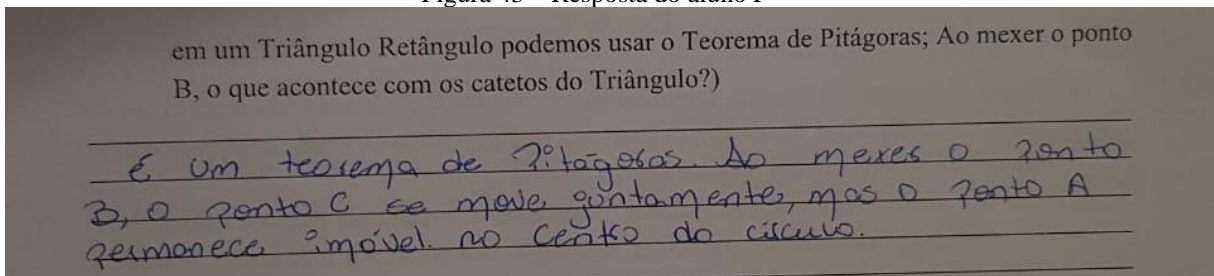
Figura 42 – Resposta da dupla T e B



Fonte: Acervo pessoal

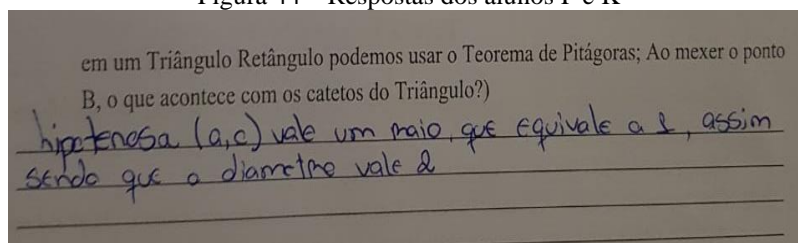
Outras respostas desenvolvidas pelos alunos podem ser observadas nas Figura 43 e Figura 44. Na Figura 45, o aluno P percebeu que os pontos se moviam com alguma relação e, na Figura 45, a dupla F e Z percebeu que a hipotenusa (que no caso desses alunos era o segmento AC), tinha mesma medida do raio da circunferência, o que é uma observação interessante, que foi proporcionada pela exploração do software. Esses alunos também usaram a relação entre raio e diâmetro (o diâmetro é duas vezes o raio) de uma circunferência (que já conheciam) para fazer outra observação sobre o círculo trigonométrico, que seu diâmetro vale dois.

Figura 43 – Resposta do aluno P



Fonte: Acervo pessoal

Figura 44 – Respostas dos alunos F e K



Fonte: Acervo pessoal

A seguir, foi apresentada uma nova ferramenta aos alunos: o controle deslizante. Para isso, foi solicitado que todos apagassem o triângulo que haviam construído. Observamos que, ao apagar suas construções, alguns alunos demonstraram insatisfação dizendo que o que haviam construído não era para nada. Ouvindo esses comentários, o pesquisador ressaltou

aos alunos que as construções realizadas até então eram importantes para entender um processo mais amplo, em que cada etapa é importante.

Os alunos tiveram facilidade para construir o controle deslizante e o ponto a partir dele, pois estava bem detalhado como isso deveria ser feito na Tarefa 3. Foi interessante observar o aluno A<sup>18</sup> que, quando construiu o novo ponto  $B = (\cos a, \sin a)$  a partir do controle deslizante, comentou com sua dupla “*olha que bonitinho*”. Na verdade, observamos vários casos de alunos movendo o controle sem parar, para observar o movimento simultâneo do ponto construído.

Novamente foi solicitado aos alunos que apagassem a construção do círculo trigonométrico mas, neste momento, nenhum aluno mostrou insatisfação. Em seguida, o pesquisador mostrou à turma o recurso de rastro do ponto e com isso, movendo o controle  $a$ , reconstruímos o círculo trigonométrico com um ponto de coordenadas  $\cos a$  e  $\sin a$ .

Uma observação relevante a se fazer é que podemos obter o rastro movendo um ponto sem ter que, necessariamente, usar o controle deslizante, porém o importante é perceber que estamos alterando um parâmetro real, isto é, fazendo uma variável assumir todos os valores dentro de um intervalo e, a partir disso, um ponto de duas coordenadas no plano move-se a partir de determinada relação que depende do parâmetro especificado pelo controle deslizante.

A matemática fundamental aqui é que, em um primeiro momento foi construído um círculo e a partir dele, definido um ponto  $B$ , vértice de um triângulo retângulo com catetos definidos como sendo cosseno e seno, ou seja, começamos com um círculo e terminamos com cosseno e seno. Em um segundo momento foi construído um ponto  $B = (\cos a, \sin a)$ , em que agora estamos definindo o ponto  $B$  em função do cosseno e do seno (e não o contrário) e ao variar o controle deslizante, obtemos o círculo trigonométrico, ou seja, começamos com o cosseno e o seno e terminamos com o círculo.

O único aluno que percebeu essa relação foi o T, que chamou o pesquisador e perguntou “*Sor, por que esse ponto faz a mesma ‘coisa’ que o anterior*” (referindo-se ao ponto  $B$  que foi excluído antes). As respostas de T e B nos itens g e h da Tarefa 3 estão na Figura 45. Seguindo as instruções da Tarefa 3, T conseguiu finalizar o item h utilizando com êxito o GeoGebra. Para isso, o grupo levou o controle deslizante  $a$  até o ponto desejado e identificou as coordenadas no canto esquerdo da Figura 46 para observar os valores aproximados de seno e cosseno.

---

<sup>18</sup> A é um aluno quem desde o início com a turma afirmava “odiar” matemática.

Figura 45 – Respostas dos alunos T e B

g) Mexa loucamente o controle deslizante "a". Que desenho está aparecendo na tela? A medida que o valor de "a" varia, o que acontece com o ponto de coordenada (cos a, sen a)?

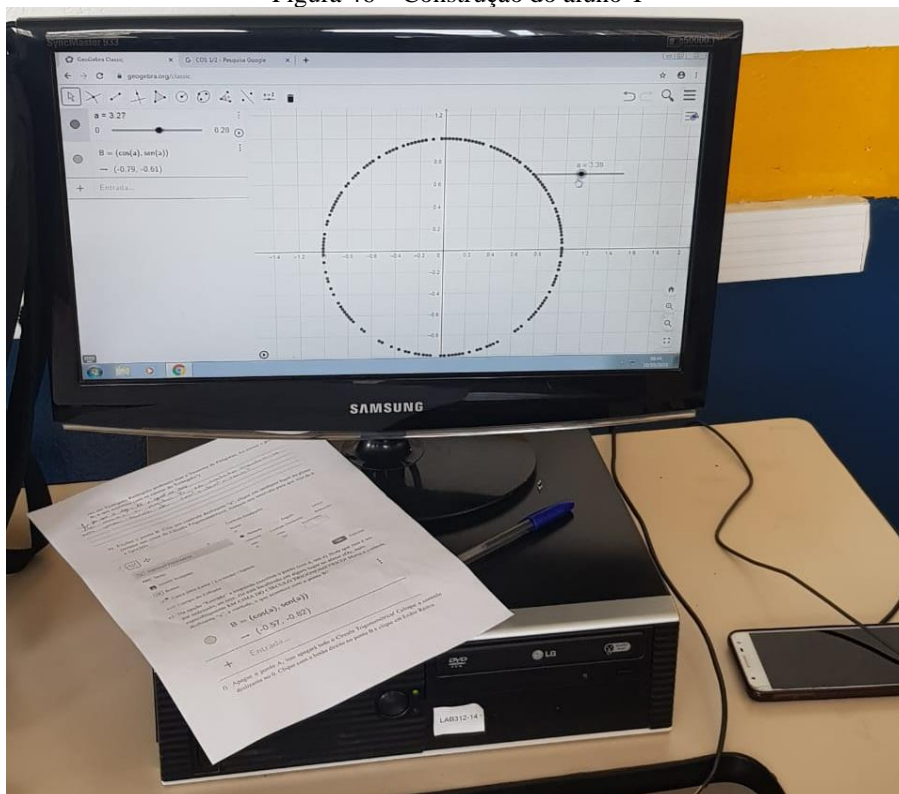
*Após mexer o controle, percebe-se um movimento circular no plano cartesiano. Com isso, as coordenadas variam no eixo x com os valores de 0 à  $2\pi$  (360)*

h) Chegou a hora de calcular o cosseno e o seno de alguns alguns especiais. Apague tudo que fez até agora e construa, novamente, o Círculo Trigonométrico, com o mesmo triângulo do item b) construído nele. Em Entrada coloque  $b = 0$  e depois eric o ponto (cos b, sen b). Preencha a tabela e o plano cartesiano (com os pontos encontrados abaixo). (SUGESTÃO: Podemos trocar o  $b = 0$ , para  $b = \pi$  ou qualquer valor)

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Cosseno b	1	0.87	0.71	0.5	0	-1	0	1
Seno b	0	0.5	0.71	0.87	1	0	-1	0

Fonte: Acervo pessoal

Figura 46 – Construção do aluno T



Fonte: Acervo pessoal

Os demais alunos da turma não apresentaram a mesma desenvoltura na resolução da atividade, pois tiveram dificuldades em entender a segunda parte da tarefa. Nenhum aluno, com exceção de T e B, conseguiu concluir o item h da atividade a partir da exploração dos pontos pelo círculo trigonométrico construído no GeoGebra.

Neste momento, o pesquisador identificou duas dificuldades: primeiro, em atividades com muitos alunos e que contenham vários passos, é inevitável que alguns alunos avancem mais rápido que outros e fica difícil fazer intervenções gerais para a turma, por isso comentários individuais com os alunos se tornam necessários, o que ocasiona uma segunda limitação, o fato da turma ter vinte e cinco alunos, que estavam divididos em treze grupos. Explicar de grupo em grupo foi difícil, ainda mais em um processo que não é simples de ser entendido.

Um diálogo que mostra essa dificuldade está descrito abaixo, quando os alunos A (que tem dificuldade em Matemática) e C estavam construindo o círculo trigonométrico e o triângulo retângulo. A combinação entre o pesquisador e a turma era que, sempre que um grupo finalizava uma etapa, deveria chamar o pesquisador para que ele verificasse as construções e fizesse comentários pertinentes.

A: *Sor, terminamos.* (A estava apontando para o desenho da Figura 47)

Pesquisador: *Deixa eu ver aqui, mexe aquele ponto B.*

Ao mexer o ponto B o aluno A obteve o triângulo da Figura 48

Pesquisador: *Que que vocês acham?*

C: *Legal.*

Pesquisador: *Mas o que vocês acham sobre o triângulo? Ele tá normal?*

C: *'Tá'.*

Pesquisador: *Mas nós não tínhamos construído ele a partir de uma reta perpendicular? Onde ela foi parar?*

Observação: A reta perpendicular está apenas ocultada, porém os alunos haviam construído uma reta perpendicular ao eixo  $x$  que passar por  $B$ . Então A colocou a reta novamente a aparecer na tela, obtendo o resultado da Figura 49.

Neste momento, a dupla ficou analisando e tentando entender o que estava acontecendo. Até que C comentou:

C: *Acho que a gente errou algo.*

A: *É.*

Pesquisador: *O que vocês erraram?*

C: *O ponto C era para estar aqui* (apontando para a intersecção entre o eixo  $x$  e a reta  $f$ ).

Pesquisador: *E como a gente arruma?*

C: *Não sei.*

Pesquisador: *'Tá', vamo lá. Vocês perceberam que o nosso problema é que o ponto C não 'tá' no lugar* (interrompido).

A: *Acompanhando ele* (apontando para o ponto B).

Pesquisador: *Isso! Então a gente tem que fazer ele* (o ponto C) *acompanhar.*

A: *Como eu vou fazer isso?*

Pesquisador: *Vamos fazer o seguinte, marca aquela interseção usando a ferramenta interseção entre dois objetos* (já havíamos usado essa ferramenta anteriormente, portanto os alunos sabiam que tinham que selecionar dois objetos distintos).

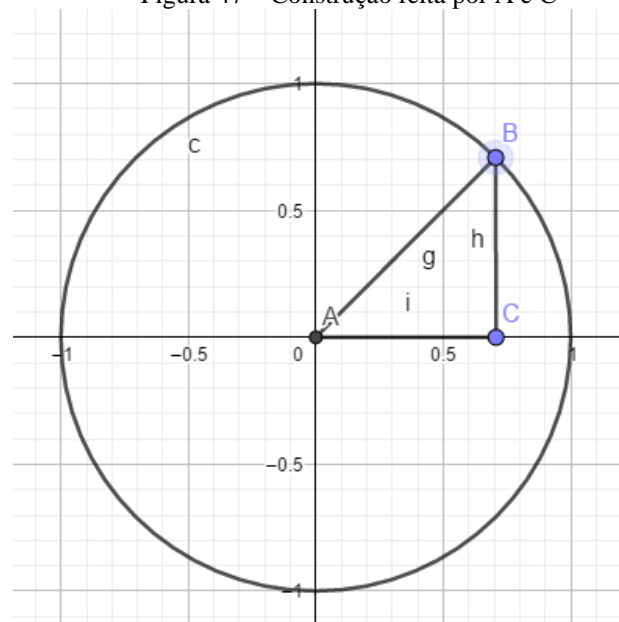
O aluno C pegou o mouse de A, marcou a interseção e disse:

C: *Já entendi* (fazendo a interseção).

Pesquisador: *Isso!*

C então determinou os segmentos construindo, o triângulo correto.

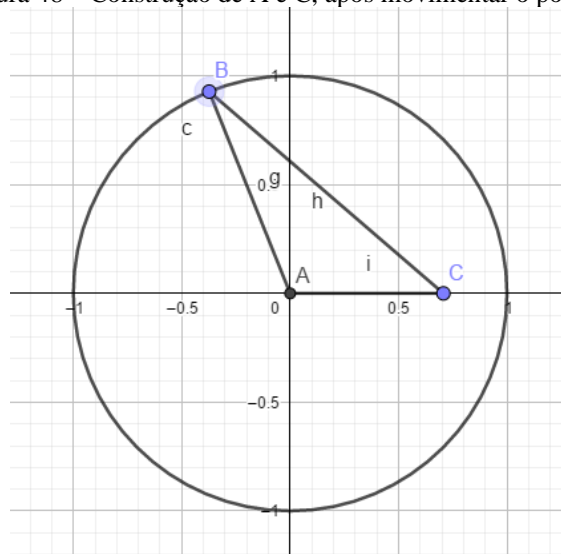
Figura 47 – Construção feita por A e C



Fonte: Acervo pessoal

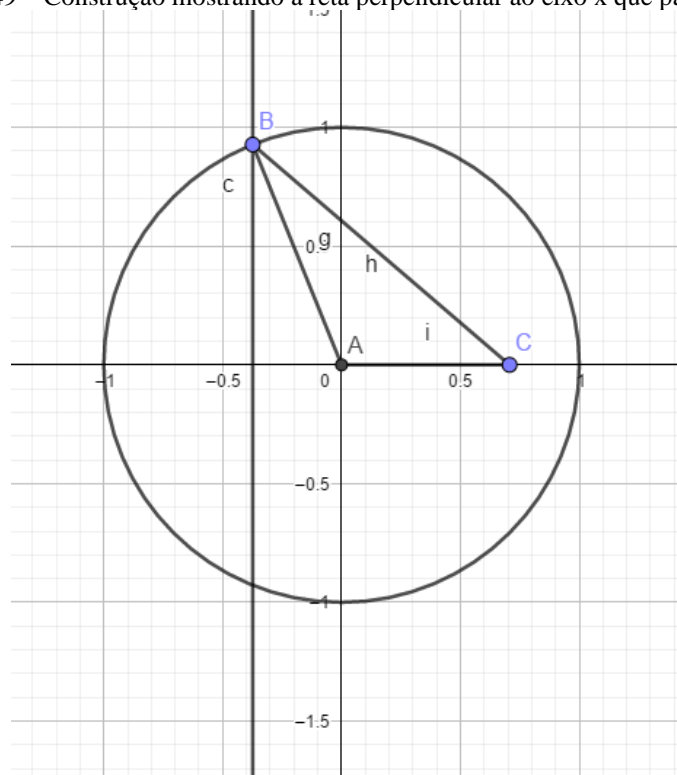


Figura 48 – Construção de A e C, após movimentar o ponto B



Fonte: Acervo pessoal

Figura 49 – Construção mostrando a reta perpendicular ao eixo x que passa por B



Fonte: Acervo pessoal

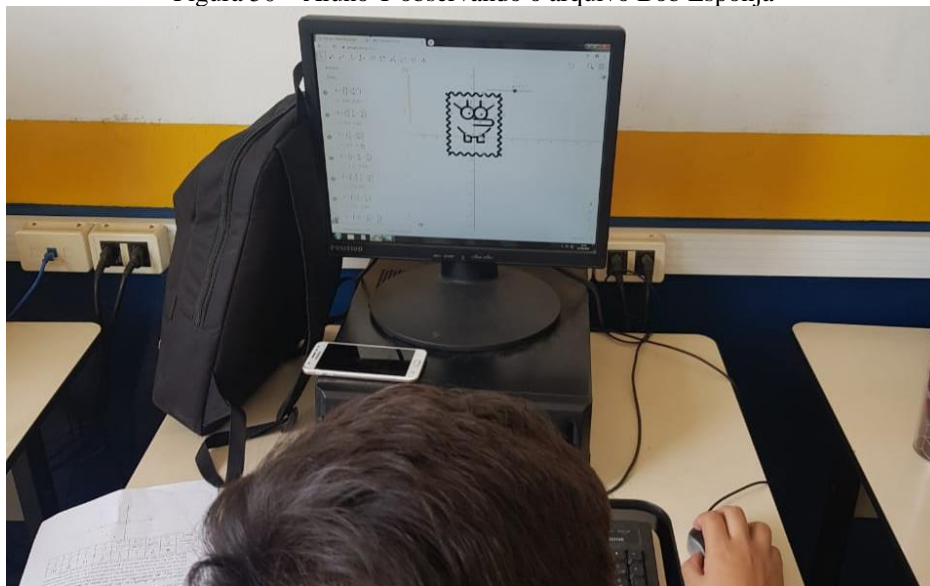
Este diálogo durou aproximadamente cinco minutos, entre conversas e “arrumações” no GeoGebra e, felizmente, os estudantes finalizaram a construção corretamente. Acreditamos que, nesta situação ao mover o ponto, a Geometria Dinâmica ajudou os alunos a entender o que estava errado e a perceber quais propriedades do triângulo não estavam sendo satisfeitas. Porém salientamos que nem sempre é possível fazer intervenções com

qualidade com todos os grupos, o que resulta em grupos que não conseguem finalizar as atividades ou que as finalizam de forma incorreta.

Ainda nesse encontro, nos dez minutos finais, começamos a Tarefa 4. Nesta atividade, o objetivo é compreender melhor o funcionamento do controle deslizante. Em um primeiro momento, os alunos exploraram dois arquivos construídos a partir de um controle deslizante. Um deles foi um dos trabalhos apresentado pela prof. Dr. Márcia Notare na disciplina de Educação Matemática e Tecnologia “a casinha”. O segundo foi um trabalho construído pelo seu orientando e pesquisador nesse trabalho na mesma disciplina, o “Bob Esponja”.

O objetivo deste momento era proporcionar aos alunos a exploração das duas construções, mas muitos alunos perderam o foco por estar perto do final da aula. Portanto somente alguns alunos abriram um ou os dois arquivos. T foi um dos estudantes que explorou o arquivo e, quando o pesquisador percebeu que ele havia aberto o arquivo do Bob Esponja, aproximou-se (Figura 50) e perguntou sobre o que estavam achando do arquivo. T respondeu “*é legal, mas ainda não entendi como que faz*”. O pesquisador respondeu a ele que na próxima aula essas construções seriam abordadas e, depois de explorar e entender as duas construções, cada grupo iria construir seu próprio objeto a partir de um controle deslizante.

Figura 50 – Aluno T observando o arquivo Bob Esponja



Fonte: Acervo pessoal

No próximo encontro serão abordadas as análises da Tarefa 4 (as construções dos alunos) e a Tarefa 5.

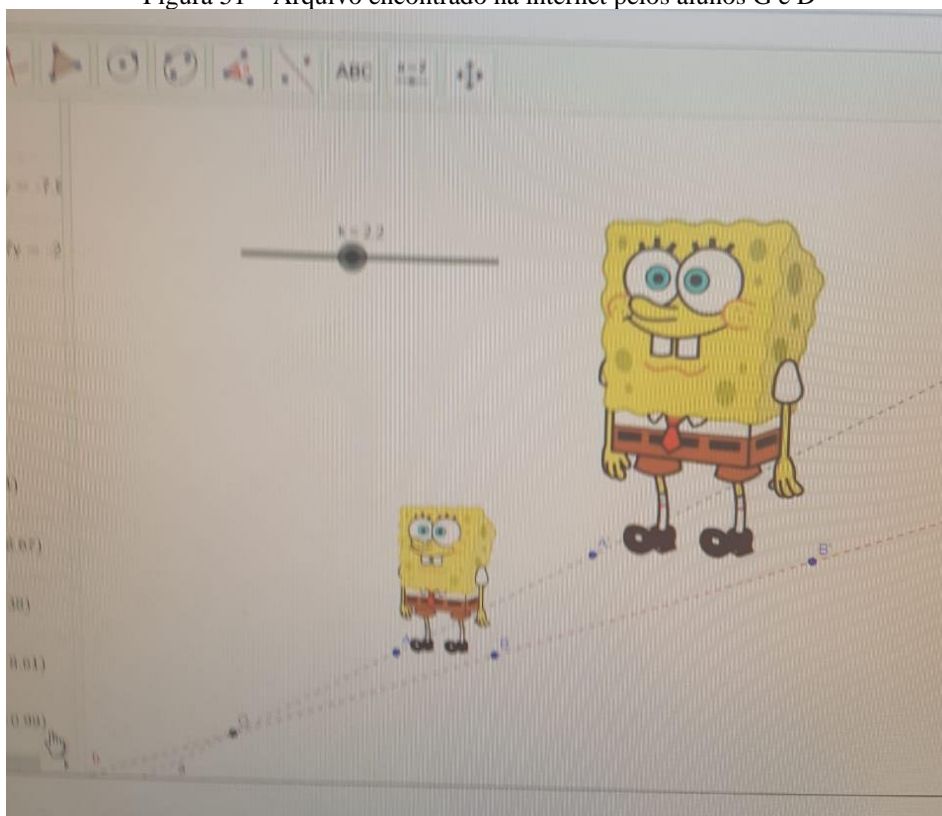
### 4.3 Encontro 3

Este encontro ocorreu no dia 11 de outubro de 2019, com duração de 1h 40min, estavam presentes vinte e um alunos.

Esse encontro começou com os alunos explorando, mais uma vez, as duas construções já realizadas no Encontro 2. Após essa exploração os alunos deveriam realizar uma construção a partir do controle deslizante.

Durante a exploração da construção do Bob Esponja (ilustrada na Figura 51), o aluno G chamou o pesquisador e comentou “*duvido que tu fez isso*” e, ao pesquisador dizer que havia feito, G comentou “*tão tá, eu vou procurar esse desenho na internet e se eu achar eu não preciso fazer isso aqui* (referindo-se à Tarefa 4)”. Em sua busca na internet G encontrou uma construção retratada na Figura 51, que mostra uma imagem do Bob Esponja que muda de tamanho conforme é movimentado o controle deslizante.

Figura 51 – Arquivo encontrado na internet pelos alunos G e D



Fonte: Acervo pessoal

Observando o desenho, G comentou com o pesquisador “*tá loco sor, dá até pra fazer café nesse GeoGebra*”. Essa observação do aluno, apesar de ser em bom humor, é interessante, pois, de fato, o GeoGebra pode ser utilizado para explorar vários campos da Matemática e consegue desempenhar funções surpreendentes.

O pesquisador, ao caminhar pela sala e observar as dúvidas dos alunos percebeu que H estava ligando os pontos do Bob Esponja por segmentos de reta, conforme proposta da

Tarefa 1 que já haviam realizado. Então o pesquisador chamou a atenção de H “*não aqui não é pra tu ligar os pontos, aqui é só pra tu mexer esse cara aqui e ver o que acontece*” e, após movimentar o controle deslizante, H entendeu o que deveria ser feito.

Em geral, os alunos tiveram dificuldade para construir um objeto no GeoGebra em função do controle deslizante. Por isso, observando essa dificuldade dos alunos, o pesquisador decidiu colocar no quadro dicas de coordenadas de pontos que poderiam ser usadas a partir do controle deslizante. No quadro constavam as seguintes equações:

$$(A \cdot \cos a + B, C \cdot \sin a + D)$$

$(a, A)$  ou  $(A, a)$

$$(a, B \cdot a + C)$$

$$(a, A \cdot \sin a + B)$$

$$(a, A \cdot \cos a + B)$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são números reais.

Apesar das sugestões disponíveis no quadro, a maioria dos alunos continuou com muitas dúvidas. A dupla A e C teve dificuldade nesta tarefa, como mostra o diálogo abaixo.

A: *Como que eu faço o comando sor?* (referindo-se ao olho do Bob Esponja) *Não sei fazer.*  
 Pesquisador: *Lembra que ontem a gente pegava o ponto e ele girava?*  
 A ficou pensativo tentando lembrar sobre o que o pesquisador estava falando.  
 Pesquisador: *Aquilo do cosseno a, seno a, do ponto girando*  
 A: *Ah sim essa parte eu fiz! Mas como é que eu faço?*  
 Pesquisador: *Então como que eu faço esse círculo?*  
 A: *Do mesmo jeito?*  
 Pesquisador: *Isso.*  
 A: *Tá mas eu quero o círculo aqui* (referindo-se a outra região do plano que não estaria centrada na origem)  
 Pesquisador: *Vamos fazer o seguinte, soma um aqui e dois aqui* (referindo-se à primeira coordenada e à segunda coordenada, respectivamente).  
 A: *Ah, entendi. Então a gente terminou.*  
 Pesquisador: *Não, agora vocês têm que construir outros pra fazer um desenho.*

C: *Então vai ser um desenho abstrato.*

Pesquisador: *Tentem fazer o menos abstrato possível.*

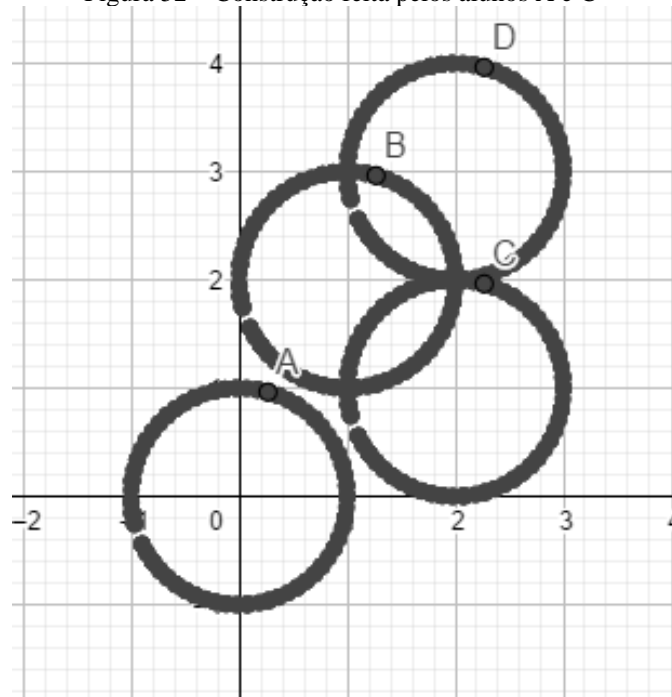
Depois de passar um tempo, enquanto o pesquisador ajudava outros alunos, a dupla A e C chamou o pesquisador, novamente.

A: *Sor, a gente tem uma dúvida.*

C: *Não, a gente não entendeu nada.*

Ao fim desta atividade, o resultado da construção de A e C foram quatro circunferências no GeoGebra que eram construídas a partir do rastro de quatro pontos que dependiam do controle deslizante (Figura 52).

Figura 52 – Construção feita pelos alunos A e C



Fonte: Acervo pessoal

Outra dupla que se empenhou em construir um objeto no GeoGebra em função do controle deslizante foi K e F.

Pesquisador: *Daí, como vocês tão indo?*

K: *Ah sor, tá meio difícil.*

Pesquisador: *Mas onde vocês tão com dificuldade?*

K: *A gente não sabe nada.*

Pesquisador: *Peraí, como que não, vamo lá que eu ajudo vocês. Que que vocês tão*

*querendo fazer?*

K: *A gente quer fazer a casa.*

Pesquisador: *Que nem o primeiro arquivo?*

K e F concordam com a cabeça.

Pesquisador: *Então a gente tem que construir aquelas retas ali né. Vamos fazer o seguinte, vocês têm que usar a segunda e a terceira relação (apontando para o quadro). Tentem entender como funciona e me chama quando vocês avançarem.*

Após aproximadamente 8 minutos o pesquisador voltou a observar os dois alunos, que haviam feito a construção da Figura 53. O pesquisador aproximou-se da dupla e comentou:

Pesquisador: *Isso mesmo, isso tá legal. Como vocês fizeram?*

K: *Trocando os números (referindo-se ao segundo comando).*

Pesquisador: *E testando?*

K: *Isso.*

Pesquisador: *E o resto?*

K: *A gente não sabe fazer.*

Pesquisador: *O que vocês não sabem fazer?*

K: *A parte reta (referindo-se aos três pontos que variam de forma constante).*

Pesquisador: *Mas por que vocês não sabem fazer?*

K: *A gente testo tudo e nenhum deu isso (referindo-se a trocar as letras do terceiro ponto que estava no quadro).*

Pesquisador: *Isso é porque, talvez, vocês tenham que usar outra equação.*

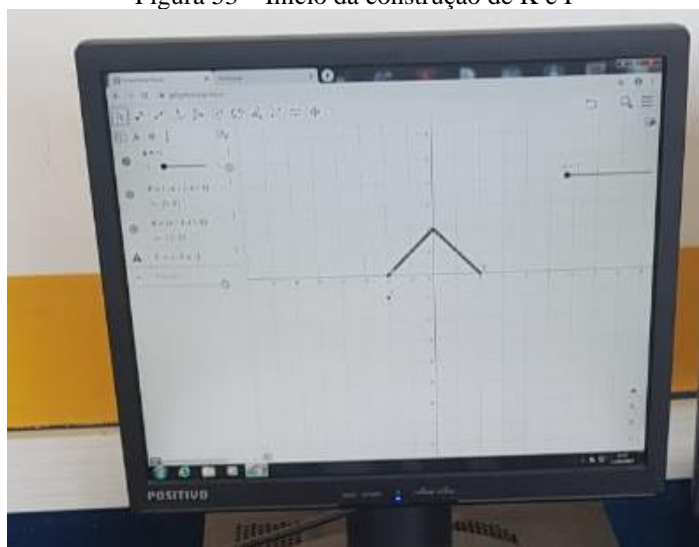
K: *A primeira?*

Pesquisador: *Tenta ela.*

F e K usaram a primeira equação e obtiveram uma circunferência, que não era o desejado.

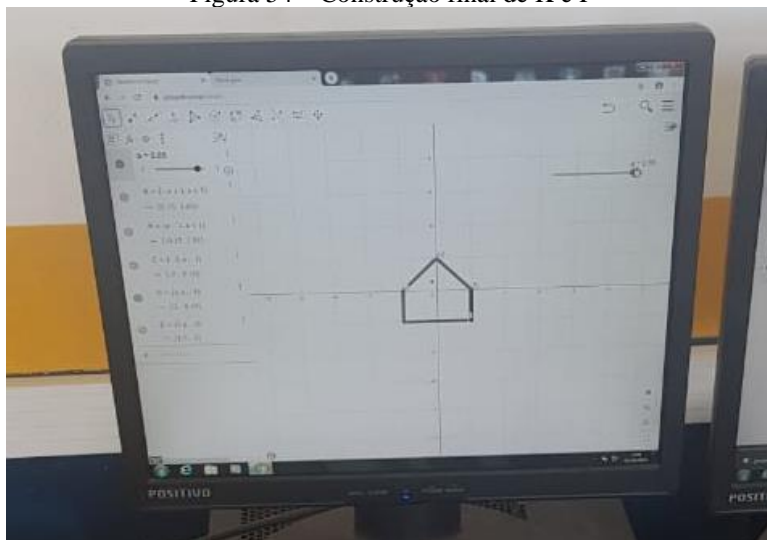
Após mais algumas tentativas e conversas com o pesquisador a dupla encontrou o comando a ser usado, obtendo o resultado ilustrado na Figura 54.

Figura 53 – Início da construção de K e F



Fonte: Acervo pessoal

Figura 54 – Construção final de K e F



Fonte: Acervo pessoal

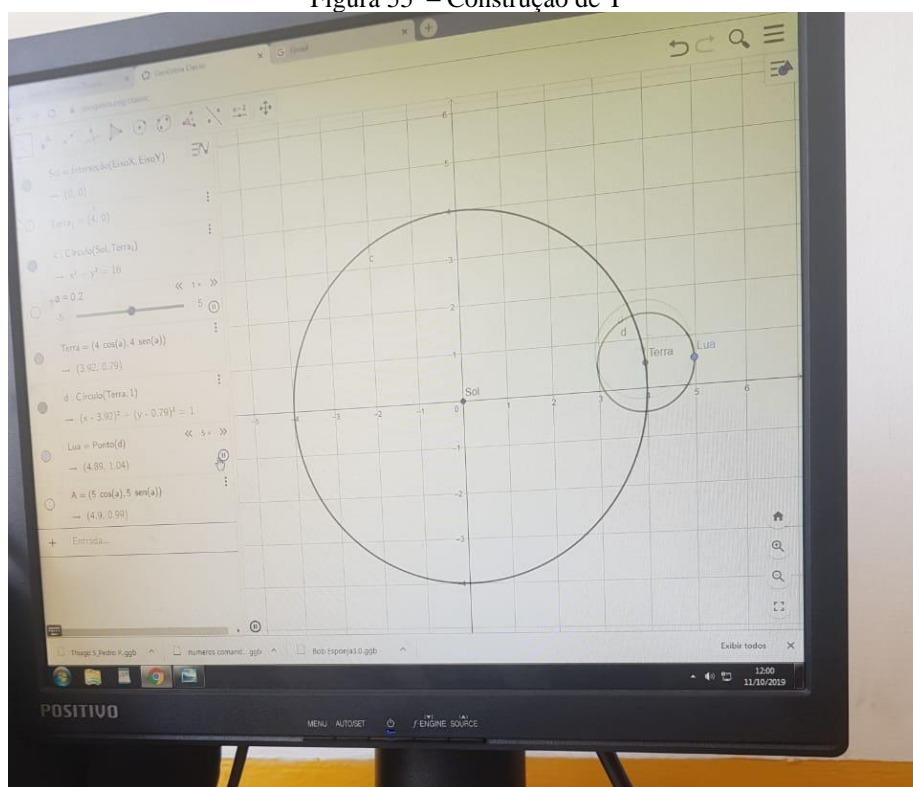
Apesar da dupla F e K ter construído um objeto não abstrato, a dupla chegou nesse resultado a partir de inúmeras tentativas, o que é uma estratégia válida, porém essa atividade tinha o objetivo que o aluno entendesse porque o ponto está descrevendo determinado movimento. Durante a análise percebe-se uma falha do pesquisador ao não instigar os dois estudantes a entender a situação, incentivando ambos a usar da tentativa e erro.

Outro exemplo de sucesso com o controle deslizante foi o de T. Percebendo o funcionamento do controle deslizante nos dois trabalhos prontos, T teve a ideia de construir uma situação real “*eu queria fazer a Terra, girando em torno do Sol, com a Lua girando em torno da Terra*”. Na ideia de T, o sol é representado pelo ponto  $A = (0,0)$ , a Terra é representada pelo ponto B, que respeita um movimento circular em torno do Sol, e a Lua é representada pelo ponto C, que respeita um movimento circular em torno da Terra. No

exemplo de T, o controle deslizante representa o tempo, em que a Terra e a Lua estão em posições distintas em cada valor de tempo. A dificuldade para construir essa situação foi que a distância entre a Terra e o Sol é muito maior que a distância entre a Lua e a Terra, logo essa última circunferência tem um raio muito menor que a primeira (centrada no Sol passando pela Terra). Além disso, a Lua deve girar em torno da Terra, enquanto a Terra gira em torno do Sol e isso, até mesmo para o pesquisador, não é trivial.

Para facilitar e entender a situação o pesquisador e T tiveram a ideia de construir as duas circunferências, para depois construir os pontos que se moveriam em função do controle deslizante. T construiu o ponto Terra em função do controle deslizante e construiu um ponto qualquer no entorno da Terra, como ilustra a Figura 55.

Figura 55 – Construção de T



Fonte: Acervo pessoal

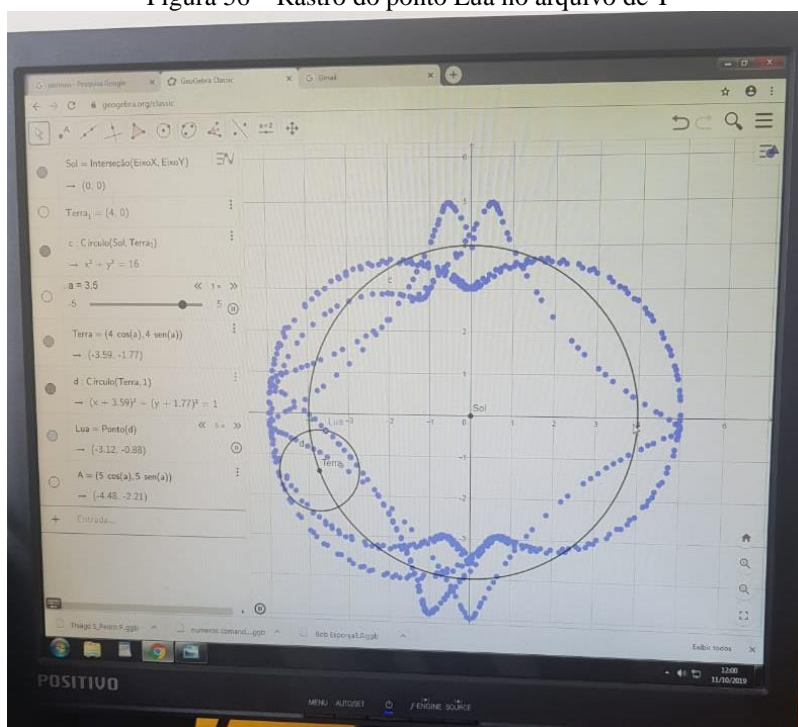
O pesquisador e T tiveram dificuldades para encontrar uma maneira de colocar a Lua em função da Terra. O pesquisador saiu para tentar criar a situação em uma folha de papel para ajudar T, porém quando o pesquisador abriu sua mochila, T o chamou “*sor, conseguiu*”. De fato, T havia conseguido, a Lua estava girando em torno da Terra, porém T não fez isso a partir das relações trigonométricas e sim apertando em um botão de *play* no comando Lua, esse comando a fazia girar em torno da Terra com uma frequência que podia ser aumentada e diminuída (o ponto Lua girava na circunferência construída com centro no ponto Terra e



raio 1)<sup>19</sup>. Foi interessante a maneira que T explorou o GeoGebra, encontrando um recurso que nem mesmo o pesquisador conhecia.

Após a construção de T uma observação se faz necessária. Ao contrário dos exemplos levados pelo pesquisador para a sala de aula, o aluno T não procurou construir um objeto a partir do rastro do controle deslizante e construiu uma representação de uma situação real. Durante a atividade, o pesquisador percebeu isso e comentou “*pele menos vamos habilitar o rastro da Lua pra ver o que ela faz*”. Assim, T habilitou o rastro da Lua para que o pesquisador e T pudessem observar seu movimento (que está ilustrado na Figura 56).

Figura 56 – Rastro do ponto Lua no arquivo de T



Fonte: Acervo pessoal

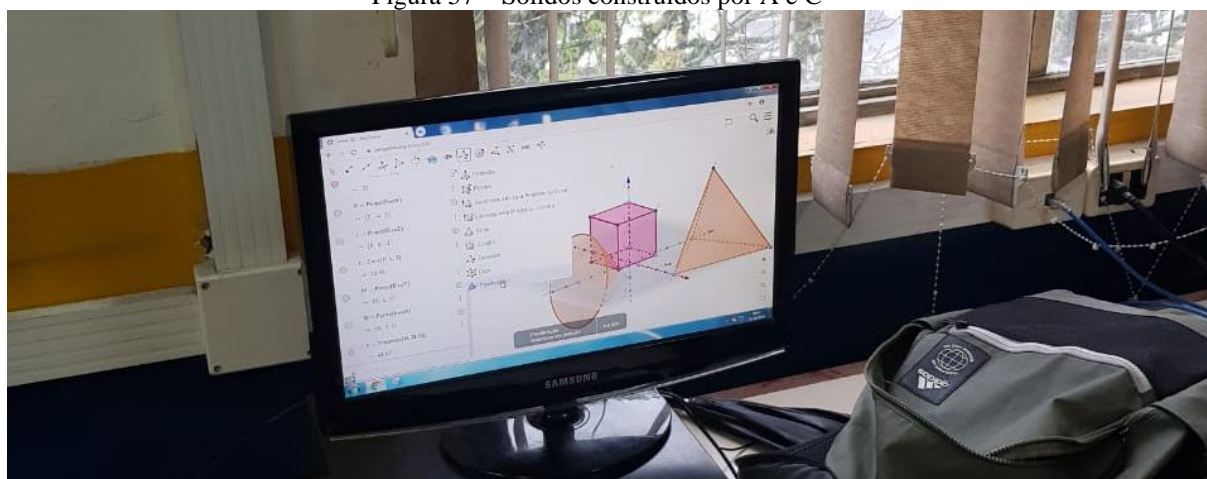
A Tarefa 4 tomou aproximadamente uma hora da aula e, nos momentos finais do Encontro 3, os alunos deram início à Tarefa 5. Nesta tarefa os alunos começaram a explorar o GeoGebra 3D. Foi solicitado que os alunos construíssem um cubo, uma pirâmide regular de base quadrada, um tetraedro e um prisma regular de base triangular. No GeoGebra 3D há ferramentas que fazem essas construções, bastando apenas indicar os pontos que determinam os vértices de cada um dos sólidos. Usar a ferramenta foi fácil para os alunos, porém um problema frequente foi localizar os pontos corretos para obter o sólido desejado. Na maioria dos casos os alunos selecionavam pontos aleatórios do espaço para construir o sólido. Nesta

<sup>19</sup> Caso haja curiosidade sobre essa situação, podemos usar somente cossenos e senos para construí-la. Basta observar que o ponto Lua deve ter coordenadas que respeitem o ponto Terra como centro e faça o movimento circular com frequência maior que um.

dificuldade acreditamos haver duas limitações: a primeira com o próprio software que, na janela de visualização 3D, nem sempre permite que o aluno construa um ponto no espaço onde é desejado (é preciso construir retas ou planos que contenham o ponto, a partir das propriedades geométricas desejadas). A segunda limitação em relação à visualização espacial, em que o aluno não consegue transformar sua imagem mental de um sólido em uma representação externa no GeoGebra, isto é, o aluno constrói uma imagem mental concreta (PRESMEG, 1986), porém não consegue construí-la no software. Acreditamos que este fato possa estar relacionado com o aluno não conseguir fazer a relação entre a sua ideia de objeto, estático, com o objeto dinâmico que deve ser construído.

Os sólidos que os alunos tiveram mais facilidade em construir foram o cubo e o tetraedro, visto que para esses haviam ferramentas específicas que os construíram. A dupla A e C teve poucas dificuldades para construir os dois sólidos e construíram, também, um cone, apesar de não ter sido solicitado (Figura 57).

Figura 57 – Sólidos construídos por A e C

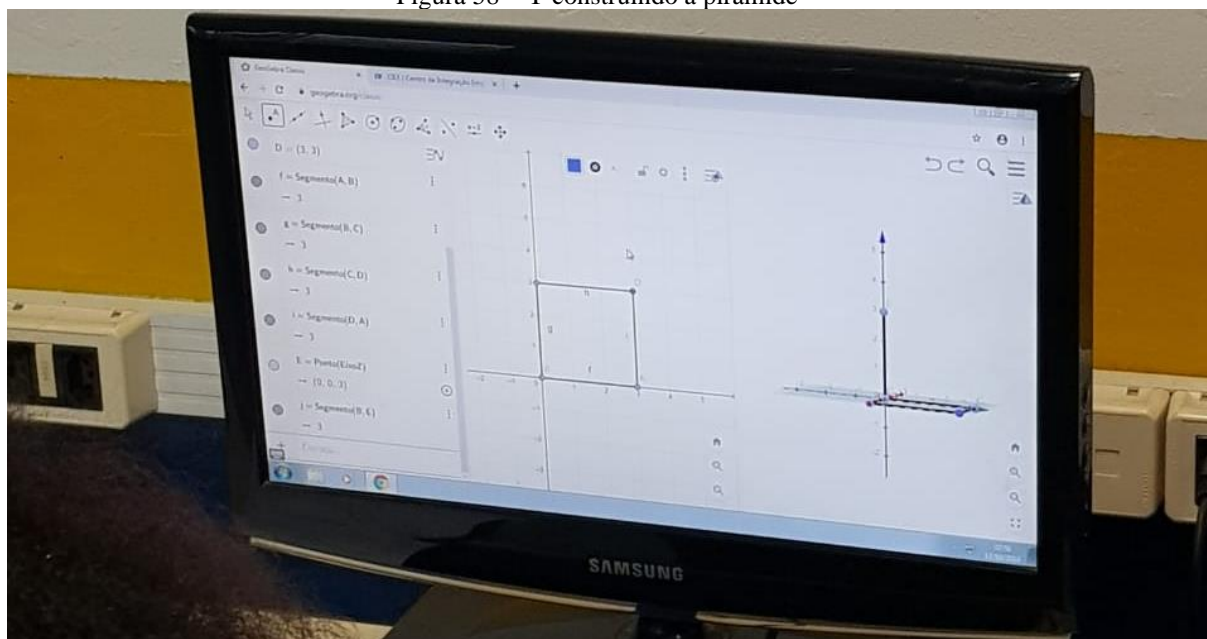


Fonte: Acervo pessoal

Para a construção da pirâmide regular de base quadrada há uma complicação a mais, pois é necessário determinar um ponto que seja equidistante aos vértices do quadrado, para então construir o último vértice e completar a pirâmide. Y estava tentando construir esta pirâmide, o pesquisador observou a situação (representada na Figura 58) e decidiu ajudá-la, pois a aluna estava construindo o último vértice em uma posição que obteríamos uma pirâmide de base quadrada, porém essa não seria regular. O pesquisador interveio “*olha só, a gente tem que cuidar com esse ponto aqui, ele tem que tá no centro do quadrado*”. Y colocou no plano uma projeção daquele ponto faltando apenas mudar sua última coordenada. O pesquisador não sabe se Y finalizou a pirâmide, pois estava nos momentos finais da aula

e, após o comentário e Y construir um ponto equidistante aos vértices do quadrado, o pesquisador foi ajudar outro grupo.

Figura 58 – Y construindo a pirâmide



Fonte: Acervo pessoal

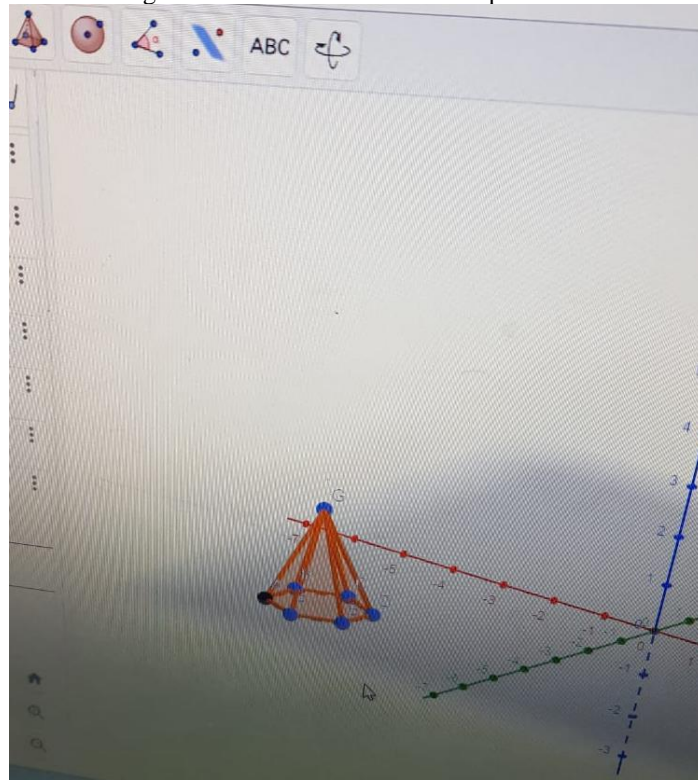
Os alunos G e D chamaram o pesquisador “*sor, fizemos a (pirâmide) do hexágono*”, então o pesquisador observou a construção da dupla e ficou surpreso (Figura 58), pois a construção não é imediata e trivial. Em seguida o pesquisador iniciou um diálogo com os alunos, com o objetivo de entender como eles conseguiram construir uma pirâmide regular de base hexagonal.

Pesquisador: *Como que vocês fizeram?*

G: *Bá, sor. Foi muito difícil. Primeiro a gente pegou aqui (apontando para a ferramenta polígono regular) e fez esse aqui (mostrando o hexágono regular no plano). Depois a gente pegou a da pirâmide (ferramenta que constrói pirâmides) e selecionamos os pontos (os marcados na Figura 59).*

Pesquisador: *Cara, que legal.*

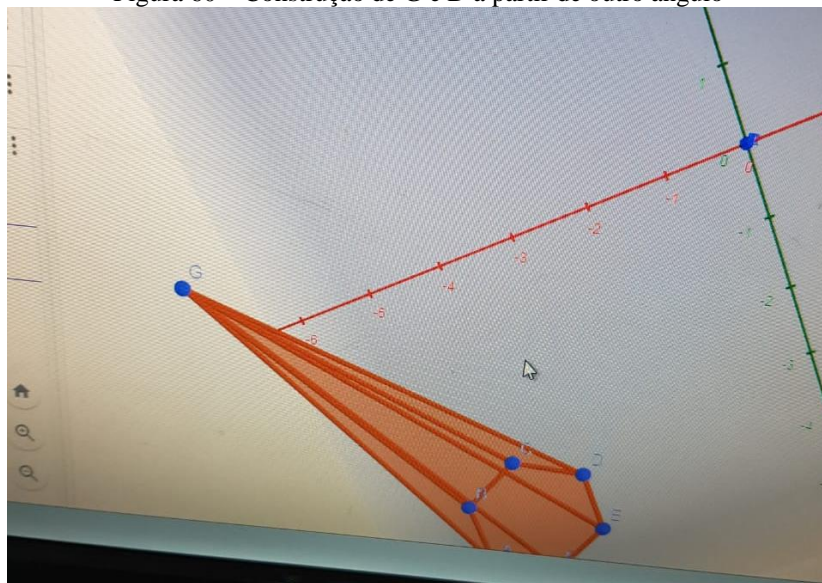
Figura 59 – ‘Pirâmide’ construída por G e D



Fonte: Acervo pessoal

Quando o pesquisador movimentou a tela do GeoGebra para que pudesse visualizar a construção de outros ângulos, deparou-se com a Figura 60, uma figura construída no plano, ou seja o vértice da pirâmide estava construído sobre o plano da base e, do ângulo de visão que os alunos e o pesquisador estavam vendo o sólido, de fato, parecia ser a pirâmide desejada.

Figura 60 – Construção de G e D a partir de outro ângulo



Fonte: Acervo pessoal

Gutiérrez (1996) defende que é fundamental, para resolução de problemas de

visualização espacial, a melhoria de habilidades de visualização. Acreditamos que, nesta atividade, os alunos não conseguiram utilizar, em sua totalidade, as habilidades percepção figura-fundo (identificar o objeto em um contexto complexo), pois os eixos do GeoGebra dão uma noção de altura aos alunos, e percepção de posições espaciais (relacionar um objeto, figura ou imagem mental com o próprio objeto), e os alunos não utilizaram o dinamismo do GeoGebra para observar o objeto em outras perspectivas. Na janela de visualização 3D do GeoGebra não há a possibilidade de marcar um ponto no espaço, somente no plano  $xOy$ , ou no eixo  $z$ . Para construir qualquer outro ponto é necessário, antes, construir uma reta, um plano, etc. que contenha esse ponto. Acreditamos que esta foi uma limitação para os alunos nesta construção.

Analisando a construção do aluno T, que se aventurou em construir a mesma pirâmide e constatou a possibilidade de construir equivocadamente a pirâmide no plano, teve a ideia de marcar os sete pontos (vértices) da pirâmide antes de usar a ferramenta. Assim, T perguntou ao pesquisador “*aqui tem que ter o mesmo tamanho* (referindo-se à distância entre dois vértices) *né, sor?*”. O pesquisador respondeu que sim, devolvendo uma pergunta “*e como a gente faz pra conseguir ter os tamanhos iguais?*” T ficou pensando em como solucionar o problema. Quando o pesquisador voltou T tinha construído no plano três circunferências, destacadas na Figura 61, e o seguinte diálogo se estabeleceu:

Pesquisador: *T, o que tu tá tentando fazer?*

T: *Tu falou (em outra aula) que deixar os tamanhos iguais era só usar círculos, (referindo-se às construções dos polígonos propostos na Tarefa 2) daí eu to tentando usar isso”*

O pesquisador ainda não havia identificado o objetivo de T com os círculos construídos. E então perguntou:

Pesquisador: *Por que tu tá fazendo no plano?*

T: *Por que aqui é mais fácil.*

Então T marcou as interseções entre a circunferência central e as outras duas circunferências, marcando também seus centros. Depois, com a ferramenta segmento de reta, construiu os lados do hexágono. Recriamos a situação no GeoGebra na Figura 62 para que seja mais fácil a visualização.

T: *Viu, tão todos (lados) iguais.*

Pesquisador: *Mas como tu me garante que são todos iguais?*

Parecia que T não esperava essa pergunta, pois ficou pensativo até responder:

T: *Por que são círculos.*

Pesquisador: *Isso sim, mas como tu me garante que esses segmentos que tu fez tem o mesmo tamanho?*

O pesquisador foi atender outro aluno enquanto T pensava no assunto, até que T chamou o pesquisador.

T: *Tá sor, entendi, tá aqui.*

Pesquisador: *Aqui onde?*

T: *Aqui ó, todos são iguais* (na janela de álgebra do GeoGebra é possível visualizar o tamanho dos segmentos e, de fato, todos os segmentos possuíam o mesmo tamanho, como pode ser visto na Figura 62).

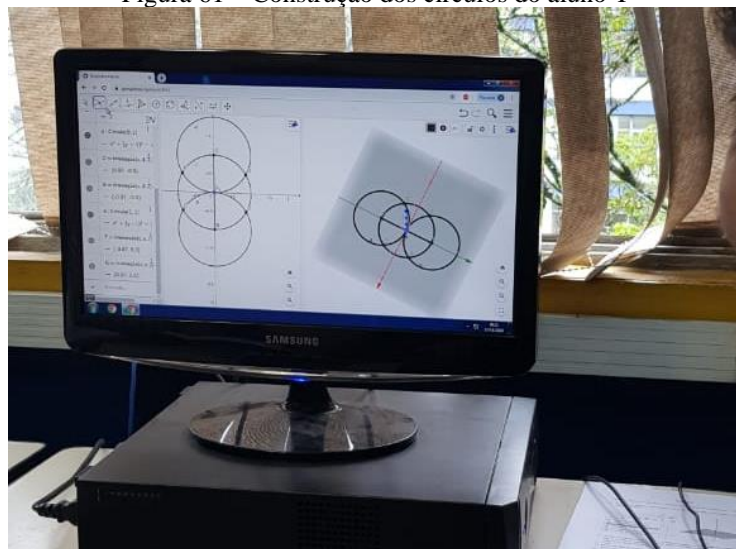
De fato, T estava correto. Mas ainda não havia concluído o desafio da Tarefa 5.

Pesquisador: *Ainda tá faltando um ponto né?*

T: *Sim o vértice da altura.*

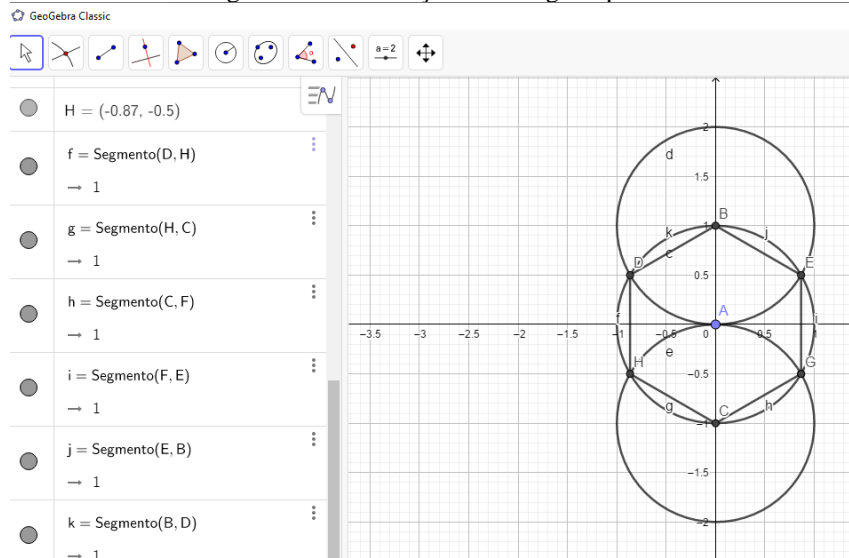
Então T marcou o último ponto e usou a ferramenta pirâmide para construir a pirâmide ilustrada na Figura 63.

Figura 61 – Construção dos círculos do aluno T



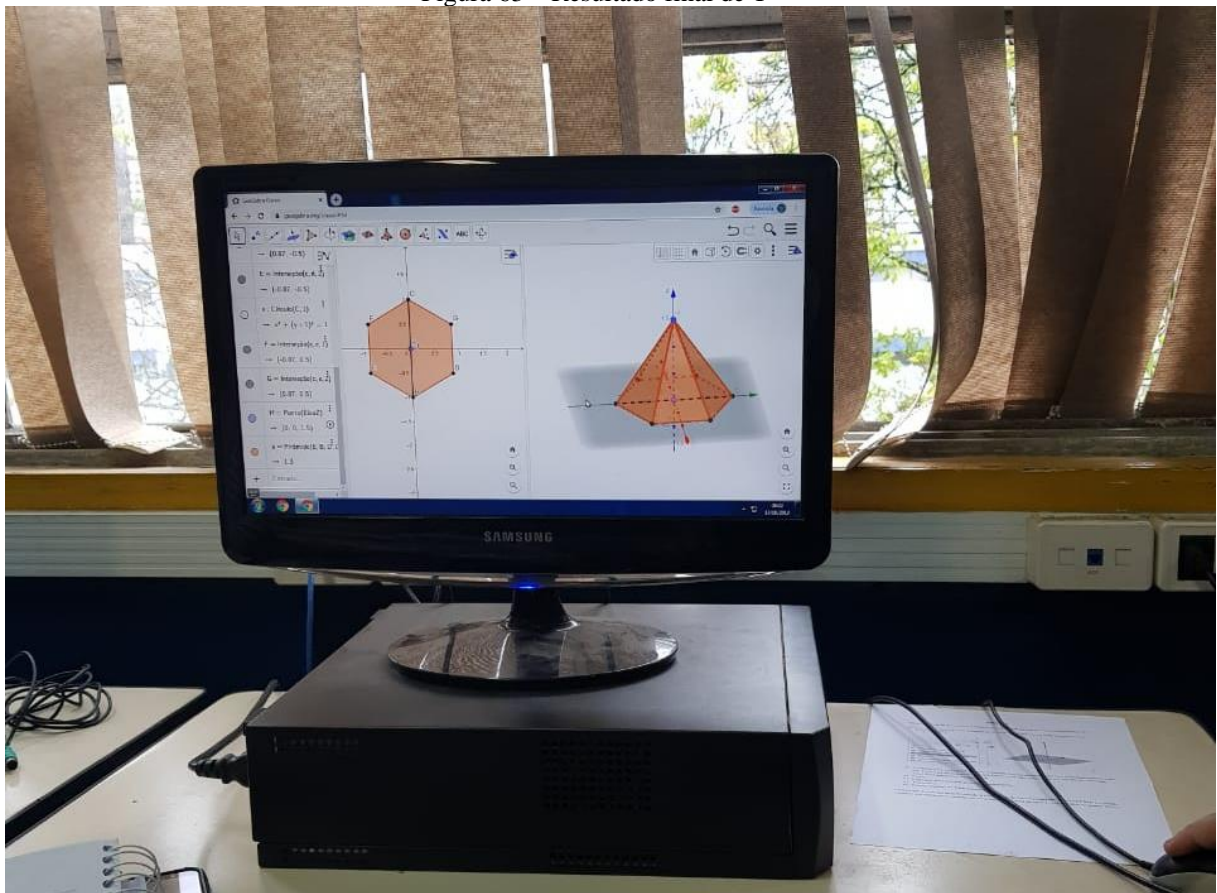
Fonte: Acervo pessoal

Figura 62 – Construção do hexágono por T



Fonte: Acervo pessoal

Figura 63 – Resultado final de T



Fonte: Acervo pessoal

Mas o que tornava essa construção mais complexa e, de fato, um desafio para os alunos? Pode parecer trivial usar a ferramenta polígono regular, selecionar dois pontos e colocar seis lados e de fato é. Porém encontrar o centro deste hexágono para que seja possível

determinar o último vértice e construir a pirâmide não é trivial para os estudantes. Há algumas formas de encontrar esse centro. T construiu uma circunferência centrada na origem e, em seguida, construiu um hexágono inscrito na mesma, pois assim o centro fica determinado. G e D desistiram do desafio quando perceberam esse obstáculo e voltaram aos itens anteriores (eles haviam pulado diretamente para o desafio).

Uma observação sobre a construção de T é ter usado a interface 2D do GeoGebra para construir o hexágono. Essa é uma relação importante, as interfaces do GeoGebra comunicam-se e é fundamental observar essa relação, pois, nas atividades seguintes, o plano de projeção principal é o mostrado na interface 2D do GeoGebra.

É interessante observar como se deu o processo de resolução da tarefa por T. Primeiro ele interpretou e entendeu o que é uma pirâmide regular de base hexagonal, notando que os lados do polígono da base devem ter a mesma medida e que o vértice da pirâmide fora do plano desse polígono deve estar a mesma distância de todos os outros seis vértices. Então o aluno fez um processo de raciocínio visual percebendo que poderiam ser construídas três circunferências para garantir lados iguais e, também, determinar o centro do hexágono. E, em conjunto com seus conhecimentos sobre o GeoGebra, acreditamos que isso ajudou o aluno a concluir a construção.

No próximo encontro será abordada a Tarefa 6.

#### **4.4 Encontro 4**

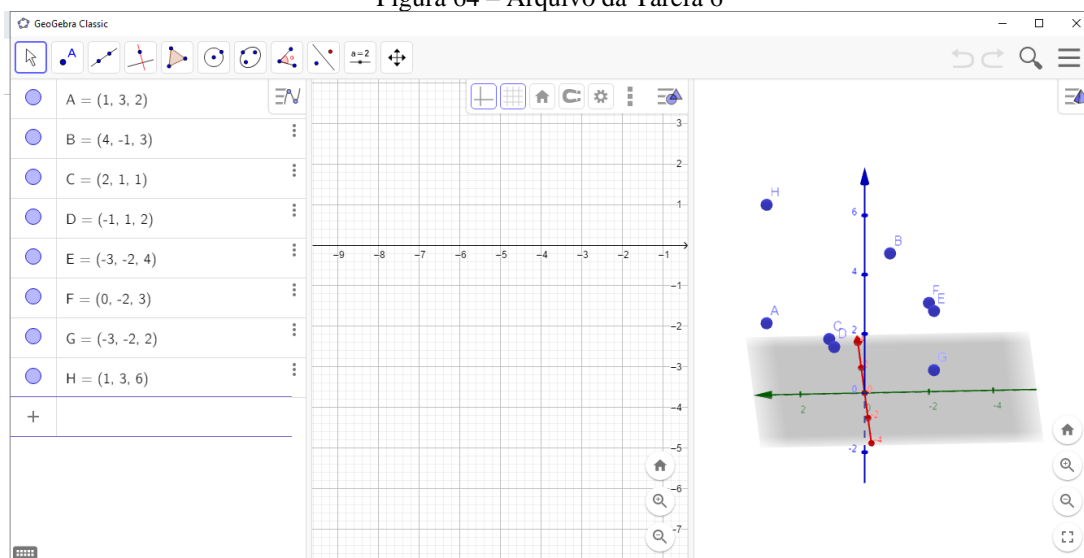
Este encontro ocorreu no dia 17 de outubro de 2019, com duração de 1h 40min, estavam presentes vinte e três alunos.

Na Tarefa 6, tínhamos por objetivo que os alunos iniciassem uma exploração do conceito de projeção ortogonal, observando o que acontece ao projetarmos ortogonalmente pontos e segmentos de reta. No primeiro momento da atividade, o pesquisador discutiu com os alunos a ideia de projeção e projeção ortogonal. Em seguida, os alunos deram início à Tarefa 6.

No início desta tarefa os alunos abriram um arquivo pelo link disponível na Tarefa 6, com a construção ilustrada na Figura 64, com oito pontos construídos no espaço. Foi solicitado aos alunos que construíssem a projeção ortogonal desses pontos no plano  $xOy$ .



Figura 64 – Arquivo da Tarefa 6



Fonte: Acervo pessoal

Muitos alunos ficaram com dúvidas sobre como fazer a construção das projeções. Portanto, o pesquisador decidiu agrupar entre sete e dez alunos para discutir como projetar um ponto no plano, a partir da utilização da ferramenta reta perpendicular. Nos três grupos formados, pelo menos um aluno do grupo salientou que a projeção, então, era a interseção entre a reta perpendicular e o plano  $xOy$ . No primeiro grupo, por exemplo, o pesquisador perguntou:

Pesquisador: *Qual a projeção então?*

Após construir a reta perpendicular T respondeu:

T: *Esse ponto aqui* (circulando o mouse em torno da interseção entre a reta e o plano).

Pesquisador: *Como a gente marca esse cara aí?*

T pensou um pouco e respondeu:

T: *Usando a ferramenta do ponto.*

Depois da conversa do pesquisador com cada grupo, os alunos retornaram aos grupos originais e procuraram concluir o item 1) da atividade. A dupla T e B conseguiu terminar esse item com desenvoltura e quando terminou, chamou o pesquisador, que verificou as projeções ilustradas na Figura 65. Enquanto o pesquisador registrava as construções da dupla, T observou “*dá pra ver as projeções aqui* (janela de visualização 3D do GeoGebra) *e aqui* (janela de visualização 2D do GeoGebra)”. E o pesquisador respondeu “*isso mesmo, e vocês enxergaram algum padrão?*”.

T: *Eu não sei qual é o padrão de semelhança.*

Pesquisador: *Vamos fazer o seguinte, olha pro F (ponto dado) e pro L (projeção de J). Que que eles têm em comum?*

T: *Mesmo eixo x e y (referindo-se às coordenadas de L).*

Pesquisador: *Então o que que muda?*

T: *O último eixo vira zero.*

Na Figura 66 está ilustrada essa resposta da dupla. O pesquisador, buscando responder sua pergunta diretriz, pergunta para a dupla:

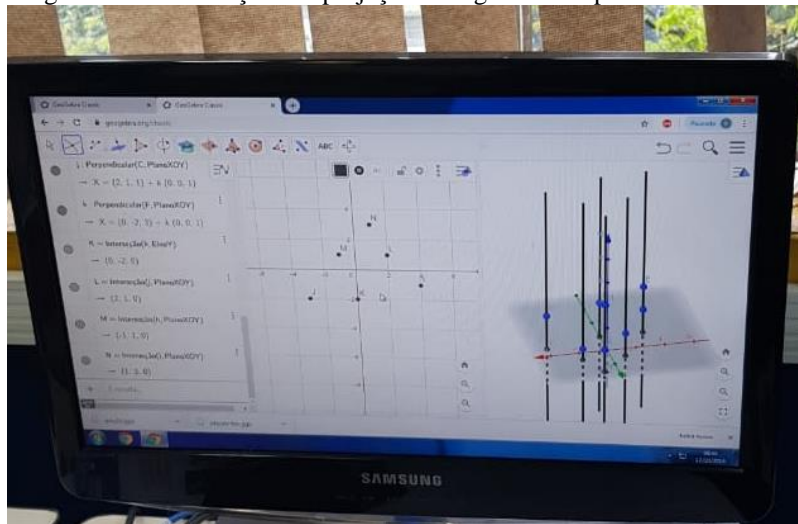
Pesquisador: *Vocês acham que o GeoGebra ajudou vocês a entender o que é a projeção ortogonal de um ponto?*

B: *É, acho que sim. Antes eu não tinha entendido nada, pelo menos agora eu sei que é só colocar zero na última posição.*

Pesquisador: *Só tem que tomar cuidado por que nem sempre é assim, nesse caso foi porque projetamos no plano do chão. E tu T?*

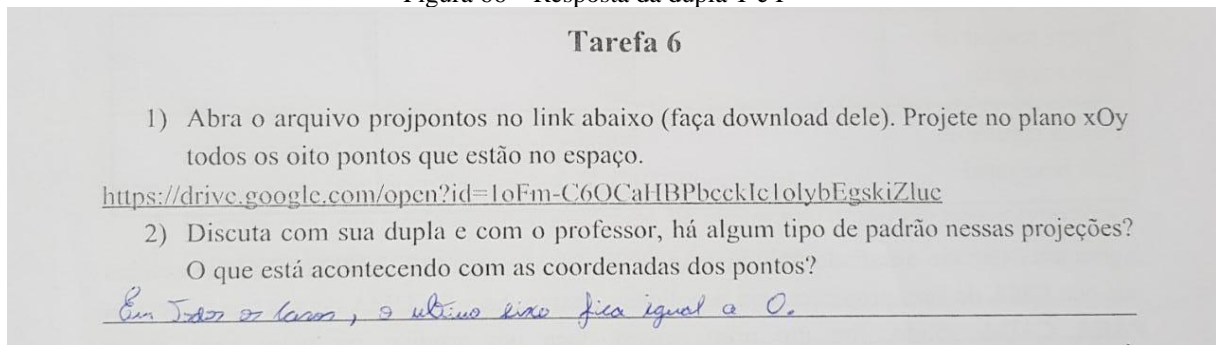
T: *Eu não sei se me ajudou, por que eu já tinha entendido. Mas eu achei legal fazer as projeções.*

Figura 65 – Construção das projeções ortogonais dos pontos da Tarefa 6



Fonte: Acervo pessoal

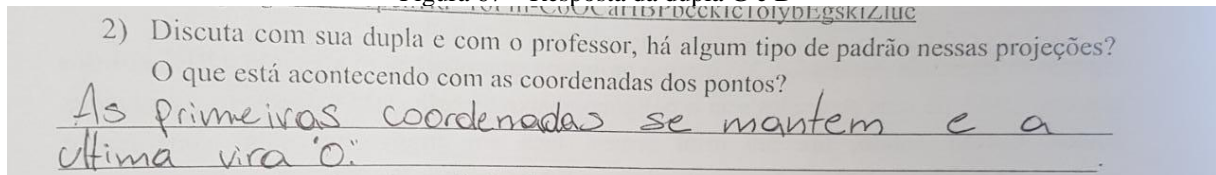
Figura 66 – Resposta da dupla T e P



Fonte: Acervo pessoal

Observamos que a linguagem utilizada pelos alunos não é a mais adequada, do ponto de vista da linguagem matemática, mas compreendemos o que queriam expressar. Por outro lado, a dupla formada pelos alunos G e D apresentou uma resposta com linguagem apropriada, como mostra a Figura 67. Este foi o único grupo que apresentou uma resposta completa, considerando que as primeiras coordenadas se mantêm iguais e a última se torna zero. O pesquisador, ao observar a resposta da dupla, perguntou “*Como vocês chegaram nisso?*”. Sem hesitação, G respondeu “*É só olhar no GeoGebra*”. Um dos objetivos dessa pesquisa é observar em que aspectos o GeoGebra potencializa o ensino de projeção ortogonal e, acreditamos que, essa observação dos alunos foi feita a partir da exploração da projeção ortogonal no GeoGebra.

Figura 67 – Resposta da dupla G e D



Fonte: Acervo pessoal

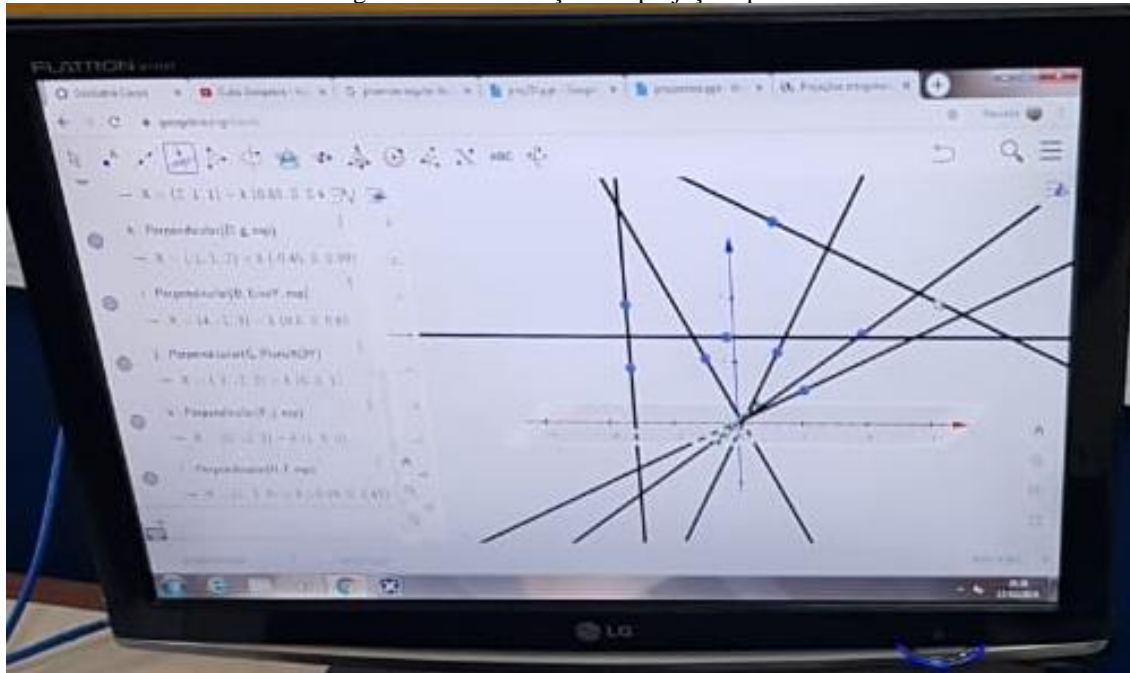
Percebemos que essa relação que o GeoGebra faz entre a janela algébrica e as janelas de visualização ajuda os alunos a observarem propriedades da projeção. Anteriormente, para descobrir valores de certos cossenos e senos, os alunos também tiveram que observar essa relação.

A Tarefa 6, o item 3) pergunta qual a projeção de um ponto P de coordenadas  $(x,y,z)$ . Nenhum grupo respondeu a esse item. Acreditamos que isso se deve ao fato de que esse item estava em um canto da folha de atividades passou despercebido pelos alunos. Nas gravações, não há registro de nenhum comentário dos alunos sobre essa pergunta, o que reforça o fato de que os alunos não a visualizaram.

Alguns alunos apresentaram dificuldade na projeção dos pontos. N apresentou as suas construções, ilustradas na Figura 68. Ao justificar sua construção, N afirmou que utilizou a

ferramenta reta perpendicular selecionando o ponto e o plano. Analisando sua construção, identificamos que N selecionou o eixo x em vez de selecionar o plano xOy e, assim, o GeoGebra construiu retas perpendiculares ao eixo x e não ao plano xOy. Após observar, N finalizou com êxito a atividade.

Figura 68 – Construção das projeções por N

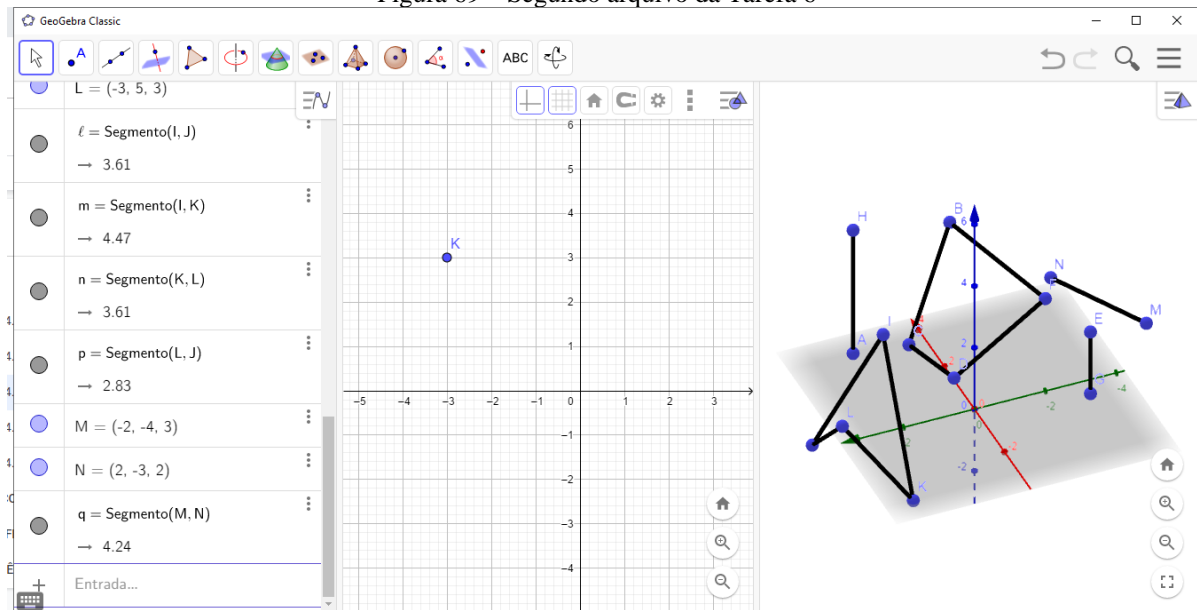


Fonte: Acervo pessoal

Acreditamos que no caso descrito na Figura 68, N teve dificuldade com o domínio do software, pois o próprio software muitas vezes sugere clicar nos eixos (para utilizar a ferramenta reta perpendicular) do que no plano, quando aproximamos o mouse dos objetos geométricos. Não obstante, a aluna pensou que sua construção estava condizente ao finalizá-la. Acreditamos que isso aconteceu porque a aluna ainda não compreendia o conceito de Projeção Ortogonal.

Os alunos que terminavam os dois primeiros itens da tarefa prosseguiram para o próximo arquivo ilustrado na Figura 69.

Figura 69 – Segundo arquivo da Tarefa 6



Fonte: Acervo pessoal

O grupo formado pelos alunos F, Z e R construiu todas as projeções dos pontos, mas pediu auxílio ao pesquisador para projetar os segmentos. O pesquisador respondeu: “*O D e o F tão ligados né, então o que a gente vai fazer é ligar a projeção deles também*”. Os alunos entenderam a ideia e concluíram a atividade, obtendo o resultado ilustrado na Figura 70. Então o pesquisador perguntou ao grupo:

Pesquisador: *Alguma das projeções surpreendeu vocês?*

F: *Um pouco.*

Pesquisador: *Qual delas?*

Nenhum dos três respondeu. Então o pesquisador comentou:

Pesquisador: *Olha só aqui a gente tem quatro segmentos bagunçados mas quando a gente faz a projeção deles a gente consegue um?*

F: *Quadrado. É legal mesmo.*

Para responder o item b) desta atividade os alunos pediram a ajuda do pesquisador.

F: *O sor, a gente não entendeu a segunda pergunta.*

Pesquisador: *Eu quero saber nela, se eu pegar um segmento de reta e projetar ele no plano, se a projeção vai ser um segmento de reta.*

F: *Então a resposta é sim.*

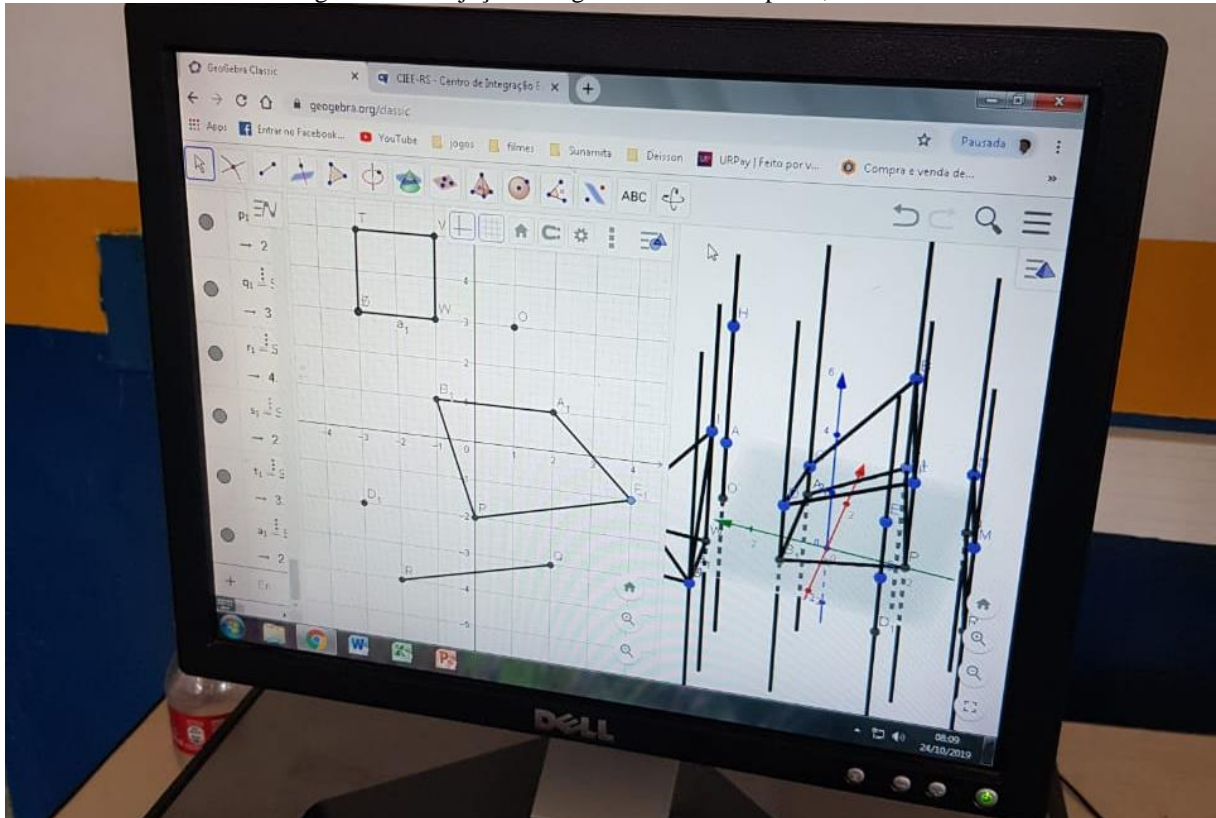
Pesquisador: *Mas peraí, vamos olhar pra projeção do segmento HA.*

F: *É o O.*

Pesquisador: *Isso! E HA é um segmento. Mas a gente viu que ali deu um ponto. Então não é verdade.*

F: *Entendi agora. Então a resposta é não.*

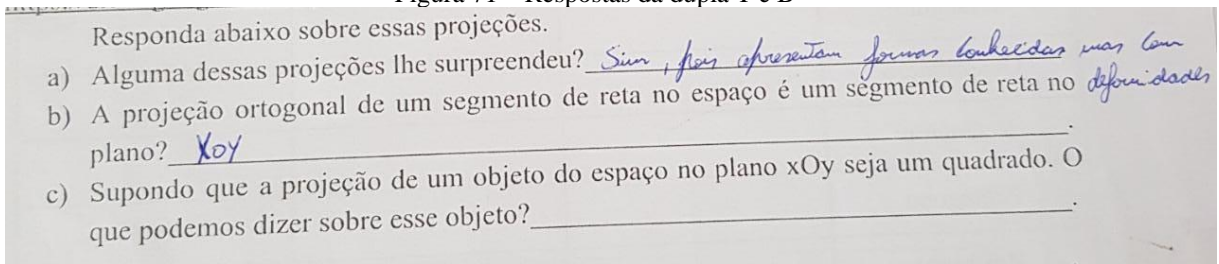
Figura 70 – Projeção Ortogonal construídas por F, C e R



Fonte: Acervo pessoal

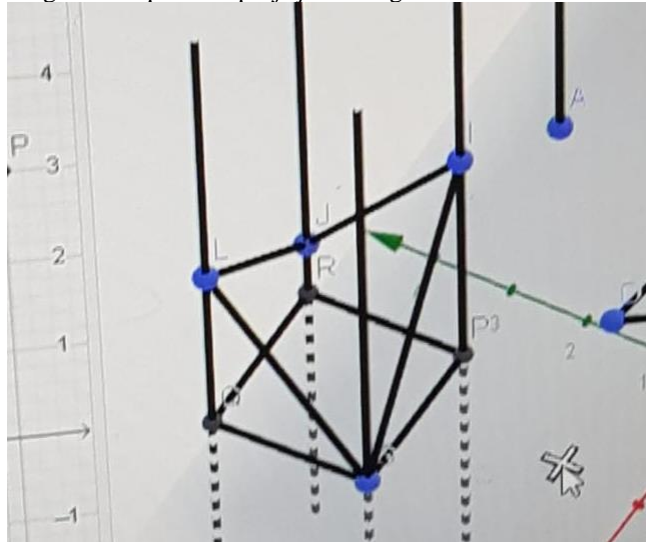
A dupla T e B também teve êxito na solução da atividade, em que as respostas podem ser conferidas na Figura 71. T ainda observou para o pesquisador “*Não é um quadrado no espaço, mas no plano sim*”, observando as projeções ortogonais de quatro segmentos de reta representados no espaço, que tem o formato de um quadrado (Figura 72). Podemos notar que a dupla respondeu ao item b) considerando que a pergunta questionava sobre qual plano estão sendo projetados os segmentos de reta: outros alunos também responderam da mesma forma. Após essa análise, concluímos que a pergunta talvez esteja, de fato, ambígua.

Figura 71 – Respostas da dupla T e B



Fonte: Acervo pessoal

Figura 72 – Quatro segmentos que suas projeções ortogonais formam o contorno de um quadrado

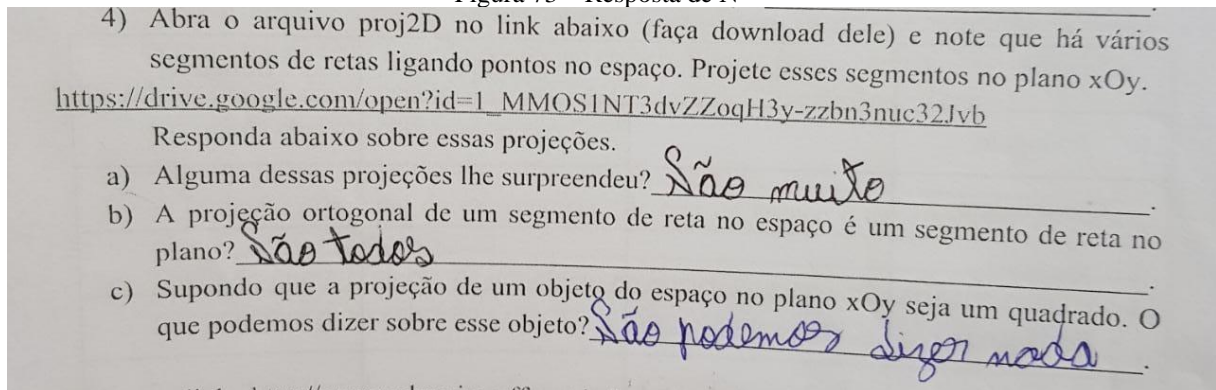


Fonte: Acervo pessoal

Acreditamos que os alunos que conseguem observar o quadrado, como projeção ortogonal dos quatro segmentos na Figura 72, utilizam a habilidade percepção figura-fundo, em que, mesmo com todo o contexto que está inserido o contorno do quadrado, os alunos percebem que segmentos que não tem relação aparente e, mesmo assim, suas projeções (juntas) formam um quadrado.

A aluna N conseguiu responder aos três itens do exercício 4) da Tarefa 6, que podem ser conferidos na Figura 73. É interessante que N coloca que não podemos dizer nada sobre o objeto se uma de suas projeções ortogonais for um quadrado. Acreditamos que a aluna respondeu desta forma, pois uma das projeções da segunda atividade da Tarefa 6 eram quatro segmentos de reta que juntos e projetados em xOy formavam um quadrado. Quando a aluna pensou em responder o item c ela ainda estava apoiada na imagem mental do quadrado e isso, provavelmente, a levou à resposta.

Figura 73 – Resposta de N



Fonte: Acervo pessoal

Muitos grupos deixaram itens em branco na Tarefa 6, o ideal seria que o pesquisador pudesse ajudar todos os grupos para que entendessem o item e respondessem corretamente, porém como eram muitos grupos e não havia muito tempo restante para as atividades seguintes, o pesquisador acabou não ajudando alguns grupos que deixaram algumas respostas em branco.

Na continuação da Tarefa 6 o objetivo era explorar as projeções ortogonais dos seguintes sólidos: cubo, octaedro, tetraedro, pirâmide regular de base triangular, pirâmide regular de base quadrangular, pirâmide regular de base hexagonal, prisma regular de base triangular e prisma regular de base hexagonal. Além de analisar os seguintes polígonos: triângulo, quadrilátero, retângulo pentágono, hexágono e octógono e encontrar respectivos sólidos, em que uma das projeções ortogonais desses sólidos seja o polígono. Para tal foi utilizado o site desenvolvido pela UFF (Universidade Federal Fluminense) <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pro/pro-html/pro-br.html>, em que, neste site, as projeções dos sólidos desejados já estão construídas em três planos de projeção distintos. Como não poderíamos estender para outro encontro essa tarefa, o pesquisador decidiu que cada grupo (que já havia terminado a parte anterior da Tarefa 6) deveria escolher um sólido supracitado e encontrar três das suas projeções ortogonais e escolher um polígono e encontrar três sólidos cujas projeções ortogonais fossem esse polígono.

Sete grupos concluíram essa atividade (apenas os grupos que tentaram). Vamos analisar a resolução da dupla M e V. A dupla escolheu o cubo para investigar as possíveis projeções ortogonais. Os alunos encontraram, com desenvoltura, o quadrado e o retângulo como projeção ortogonal do cubo (Figura 74), mas estavam com dificuldade para encontrar uma terceira projeção. O pesquisador ajudou os alunos nesse processo.



Pesquisador: *Mas vocês não mexeram no cubo?*

M: *Mexemos, mas a gente só conseguiu o retângulo e o quadrado.*

Pesquisador: *Como assim? Mexe um pouco mais o y.*

V movimenta o controle y, resultando na posição do cubo ilustrado na Figura 75.

Pesquisador: *Ali a gente não tem um polígono diferente?* (referindo-se à projeção ortogonal no plano xOy).

M: *Tem, mas isso não é um cubo* (referindo-se ao sólido).

V: *É.*

Pesquisador: *Peraí, vamo vê.*

O pesquisador pega seu estojo e volta para fazer uma observação com os alunos.

Pesquisador: *Se eu movimentar meu estojo ele ainda é um estojo, né?*

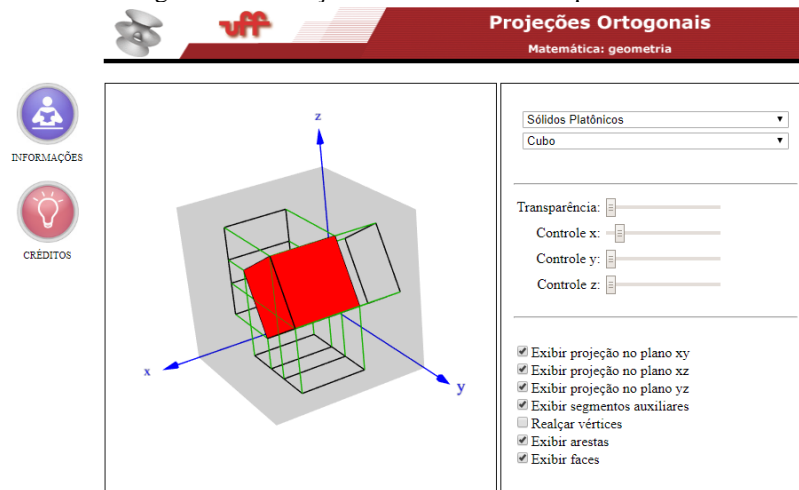
M: *Sim.*

Pesquisador: *Então se eu movimentar o cubo eu continuo com o cubo.*

M: *Tá, então o hexágono é a resposta?*

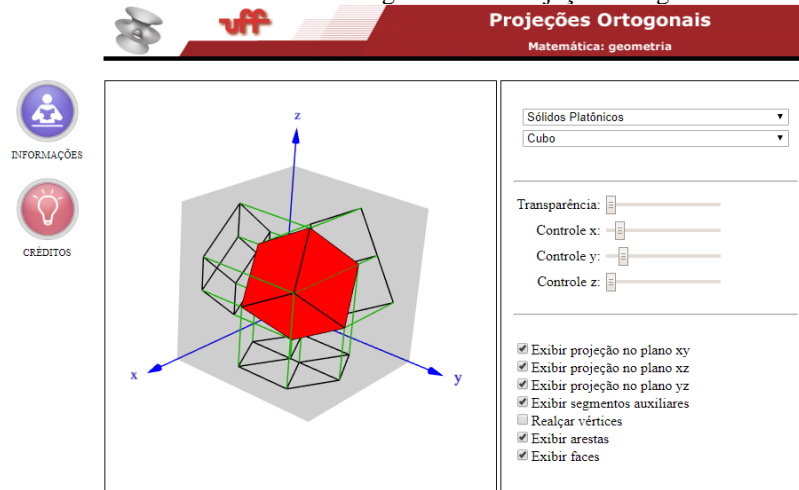
Pesquisador: *Isso.*

Figura 74 – Posição do cubo encontrada por M e V



Fonte: Acervo pessoal

Figura 75 – M e V encontrando o hexágono como Projeção Ortogonal de um cubo



Fonte: Acervo pessoal

Não ficou claro para o pesquisador se os alunos compreenderam que, após o movimento, o sólido tratado ainda era um cubo, porém a dupla colocou, na Tarefa 6, hexágono como resposta, que pode ser conferida na Figura 76. Acreditamos que faltou, aos alunos M e V, a habilidade constância perceptiva (reconhecer que, independente de cor, tamanho, textura ou posição, algumas propriedades do objeto permanecem as mesmas), em que os alunos não perceberam que ao movimentar o cubo, o sólido permanecia sendo um cubo.

Figura 76 – Respostas de M e V

Sólido	Projeção 1	Projeção 2	Projeção 3
Cubo (Sólido Platônico)	Hexágono	quadrado	Retângulo

Fonte: Acervo pessoal

Para resolver a última parte da tarefa os alunos fizeram uma relação interessante. O pesquisador estava auxiliando outro grupo que estava por perto e ouviu a dupla comentando que como uma das projeções do cubo era um retângulo, então o cubo é um sólido que possui o retângulo como uma de suas projeções ortogonais. Foi frequente a confusão de nomenclatura entre quadrado e cubo ou triângulo e pirâmide. A pergunta de D exemplifica essa confusão “Um triângulo pode gerar um retângulo?”. Finalmente, depois de várias tentativas com outros sólidos, a dupla V e M conseguiu concluir a atividade (Figura 77).

Figura 77 – Respostas de M e V

Retângulo	(cubo quadrado)	Pirâmide	octaedro
-----------	-----------------	----------	----------

Fonte: Acervo pessoal

Uma observação necessária para algumas duplas foi que é possível encontrar como projeções ortogonais polígonos nos planos laterais também e não somente no plano  $xOy$ . O diálogo entre o pesquisador e a dupla I e E mostra essa situação: as alunas estavam procurando por uma projeção da pirâmide regular de base triangular e solicitaram ajuda para o pesquisador. Na verdade, as alunas estavam com uma possível projeção ortogonal construída, porém não estavam conseguindo visualizá-la, por que só analisavam o plano  $xOy$ . Então o pesquisador comentou “*Vocês podem botar quadrilátero, aqui em cima é um quadrilátero né?*” (referindo-se a uma projeção ortogonal em um dos planos laterais). E respondeu “*Mas pode ser daqui também?*”, no qual o pesquisador respondeu “*Sim, a projeção pode ser em qualquer plano*”.

Percebemos que os alunos I e E tiveram dificuldade para visualizar a projeção ortogonal em um plano que não fosse o que estávamos trabalhando até aquele momento. Acreditamos que os alunos não conseguiram utilizar a habilidade espacial percepção de relações espaciais, em que os alunos não conseguiram relacionar o sólido com as projeções nos planos laterais.

A Geometria Dinâmica ajudou no entendimento dos alunos da projeção ortogonal dos sólidos mencionados, pois proporcionou aos alunos a visão da projeção ortogonal dos sólidos enquanto eles movimentavam os mesmos. No próximo encontro iremos abordar a análise da Tarefa 7.

## 4.5 Encontro 5

Este encontro ocorreu no dia 25 de outubro de 2019, com duração de 1h 40min, estavam presentes vinte e um alunos.

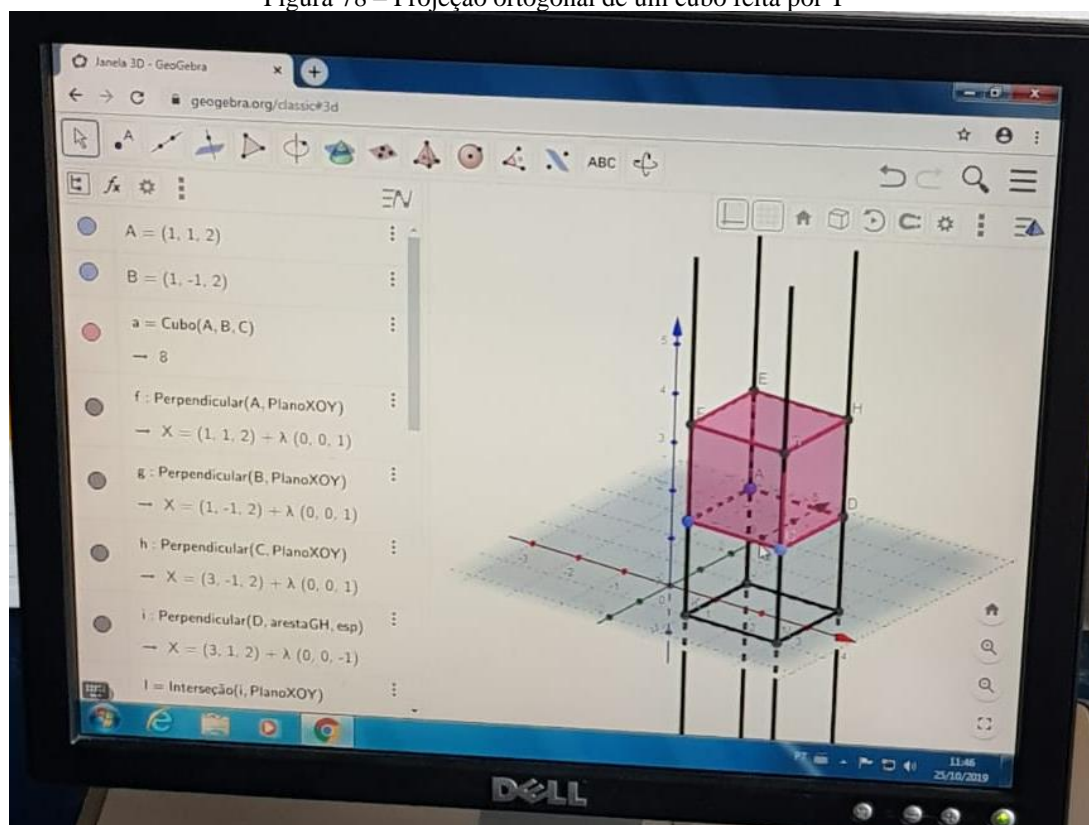
Este encontro foi atípico. No dia 23 de outubro de 2019 as equipes de futebol Grêmio e Flamengo enfrentaram-se por um campeonato internacional, em que o Flamengo saiu vitorioso. Devido à torcida do professor ser diferente da grande maioria dos alunos, estes estavam bastante animados com assuntos que não tinham relação com Matemática, o que deixou o andamento da aula complicado.

O objetivo do encontro era trabalhar com as tarefas 7 e 8. Porém tornou-se inviável trabalhar com Tarefa 8, pois esta abordava uma jogada de futebol da equipe do Internacional de Porto Alegre. A Tarefa 7 solicitava que os alunos construíssem um cubo e uma pirâmide e, também, duas projeções ortogonais de ambos, que fossem polígonos diferentes.

O objetivo da primeira atividade da Tarefa 7 era construir projeções ortogonais de sólidos geométricos no GeoGebra. Para isso, os alunos construíram as projeções ortogonais mais evidentes de três sólidos: cubo (um quadrado como projeção ortogonal), tetraedro (um triângulo equilátero como projeção ortogonal) e pirâmide regular de base quadrangular (quadrado como projeção ortogonal). Salientamos que Gutiérrez (1996) defende que é necessário deixar que os alunos explorem os sólidos de infinitas perspectivas, observando infinitas representações do sólido e, nesse sentido, o objetivo principal da Tarefa 7 era que os alunos explorassem algumas das muitas possíveis projeções ortogonais de um cilindro e uma pirâmide regular de base quadrada, porém acreditamos que a projeção ortogonal mais usual de cada sólido coloque o aluno em uma zona de conforto e isso deixa o aluno mais confiante para construir projeções não usuais. A construção de T segue esta ideia.

No item a) do primeiro exercício da Tarefa 7, T construiu um quadrado como projeção ortogonal do cubo. Para fazer isso, T chamou o pesquisador e perguntou: “*Eu preciso fazer o cubo também?*” O pesquisador respondeu que sim e devolveu uma pergunta “*Como tu vai construir o cubo?*”. Sem hesitação, T respondeu “*Isso eu sei!*”. Momentos depois, T concluiu a construção ilustrada na Figura 78.

Figura 78 – Projeção ortogonal de um cubo feita por T

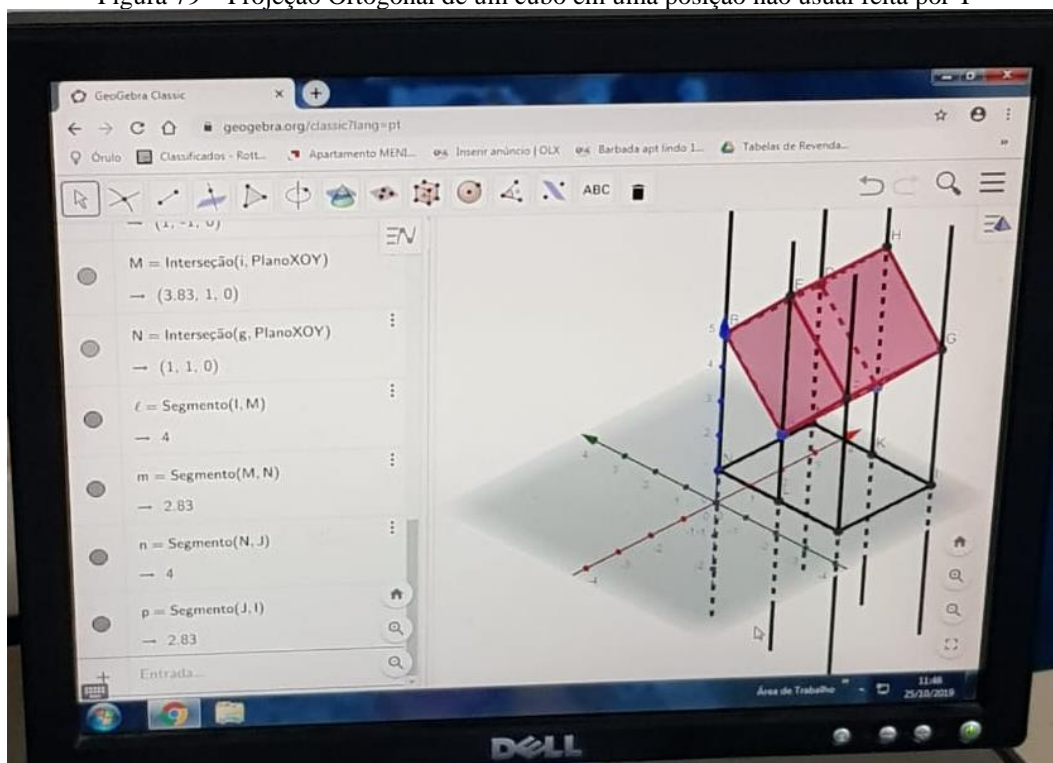


Fonte: Acervo pessoal

Com o intuito de observar se T sabia qual era a projeção ortogonal do cubo sobre o plano  $xOy$  o pesquisador perguntou a T se a projeção ortogonal eram as linhas construídas ou o quadrado inteiro. T respondeu sem hesitação que era um quadrado, então o pesquisador perguntou sobre o quadrado da Figura 72, querendo saber se, naquele momento, a projeção ortogonal dos quatro segmentos era um quadrado. T respondeu que tinha o formato de um quadrado, mas não seria um quadrado pintado (maneira que o pesquisador, anteriormente professor da turma, ensinou área para os alunos).

T estava muito adiantado em relação aos seus colegas, portanto, depois de concluir os itens a), b) e c) do primeiro exercício da Tarefa 7, o pesquisador propôs um desafio para T: Construir um retângulo (com os lados de medidas diferentes) como projeção ortogonal do cubo. O pesquisador comentou com T que o mais desafiador seria a posição que ele iria deixar o cubo. T começou a alterar e testar as três coordenadas dos dois pontos iniciais utilizados para a construção do cubo, até encontrar o cubo na posição representada na Figura 79. Em seguida, construiu a projeção ortogonal do Cubo no plano  $xOy$ . Percebemos que, apesar do aluno estar testando coordenadas nos pontos, já havia gerado uma imagem mental e, a partir de seus testes, conseguiu construir a representação externa.

Figura 79 – Projeção Ortogonal de um cubo em uma posição não usual feita por T



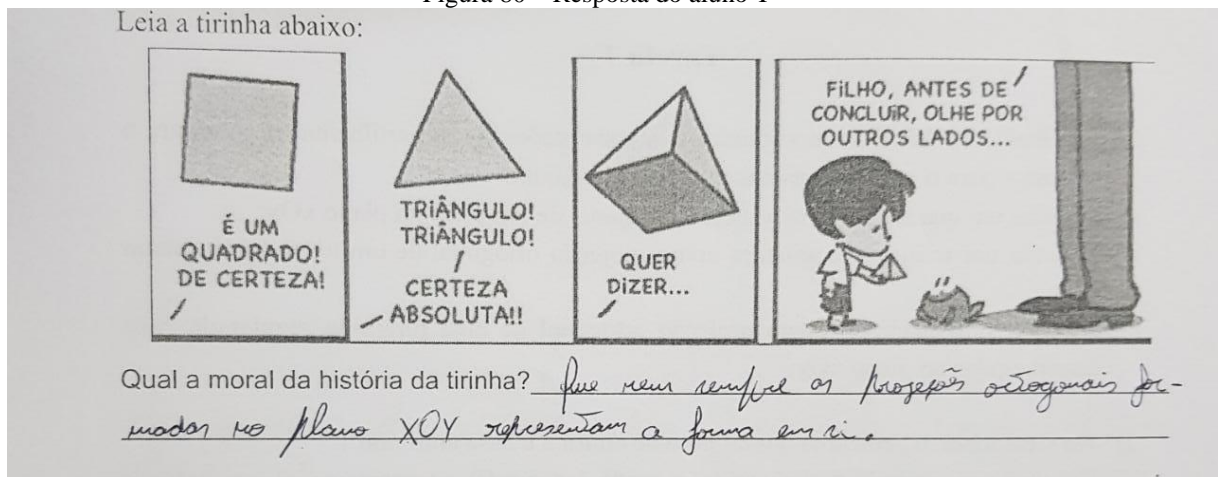
Fonte: Acervo pessoal

O pesquisador observou que havia a construção uma reta perpendicular desnecessária e questionou T, que respondeu que construiu todas as “pontas” do sólido e ligou os pontos

com a ferramenta segmento de reta. Acreditamos que uma das razões para o aluno T ter projetado, desnecessariamente, dois pontos extras, foi a falta da habilidade espacial percepção de relações espaciais (relacionar objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros), em que o aluno não percebeu que a projeção dos pontos já estava contida na aresta que liga a projeção ortogonal de outros dois vértices do cubo. O pesquisador aproveitou para destacar que, em alguns sólidos, a projeção de um vértice não está contida na aresta que liga outros dois vértices.

O aluno T estava com dificuldade para fazer a projeção do cilindro (exercício 3), então realizou o exercício 4 antes. Nesse exercício, T deveria construir um triângulo como projeção ortogonal de uma pirâmide regular de base quadrada (um quadrado como projeção já havia sido construído). Antes de começar o exercício T leu a tirinha e respondeu (Figura 80): “*Nem sempre as projeções ortogonais formadas no plano  $xOy$  representam a forma (sólido) em si*”.

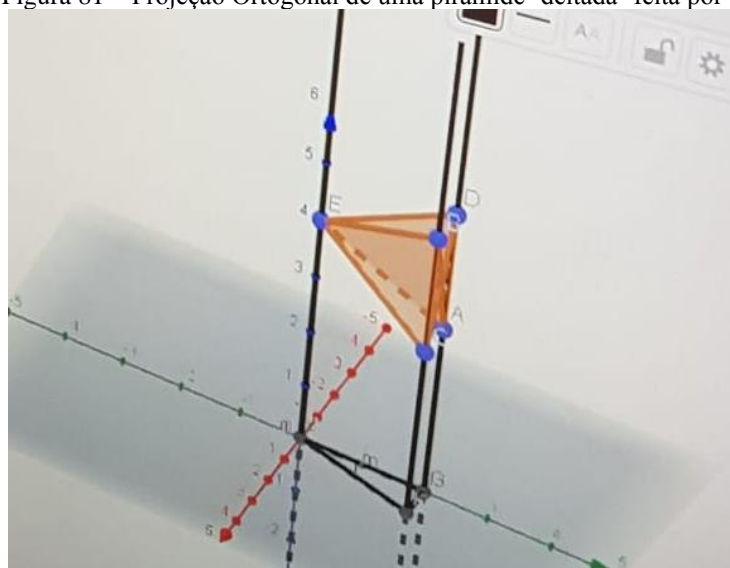
Figura 80 – Resposta do aluno T



Fonte: Acervo pessoal

T construiu a projeção a partir de uma pirâmide não regular. Quando o professor perguntou porque T não usou uma pirâmide regular, o mesmo respondeu que não estava conseguindo construir uma pirâmide regular de base quadrada que estivesse “deitada” em relação ao plano  $xOy$ . Mesmo assim, T construiu um triângulo como projeção da pirâmide de base retangular (Figura 81). Observamos que, anteriormente, T havia conseguido construir uma pirâmide regular de base quadrada “em pé” (Tarefa 5), então T já havia gerado a imagem mental do poliedro desejado, porém, acreditamos, que T teve dificuldade em construir o quadrado da base da pirâmide, de forma que fosse vertical.

Figura 81 – Projeção Ortogonal de uma pirâmide ‘deitada’ feita por T



Fonte: Acervo pessoal

Ao fim da aula, T deu início à Tarefa 9 que aborda uma questão do ENEM sobre projeção ortogonal, concluindo o exercício corretamente sem o auxílio do computador. O principal objetivo era que o aluno T construísse a projeção ortogonal para verificar sua resposta, porém não havia tempo hábil para fazer a construção.

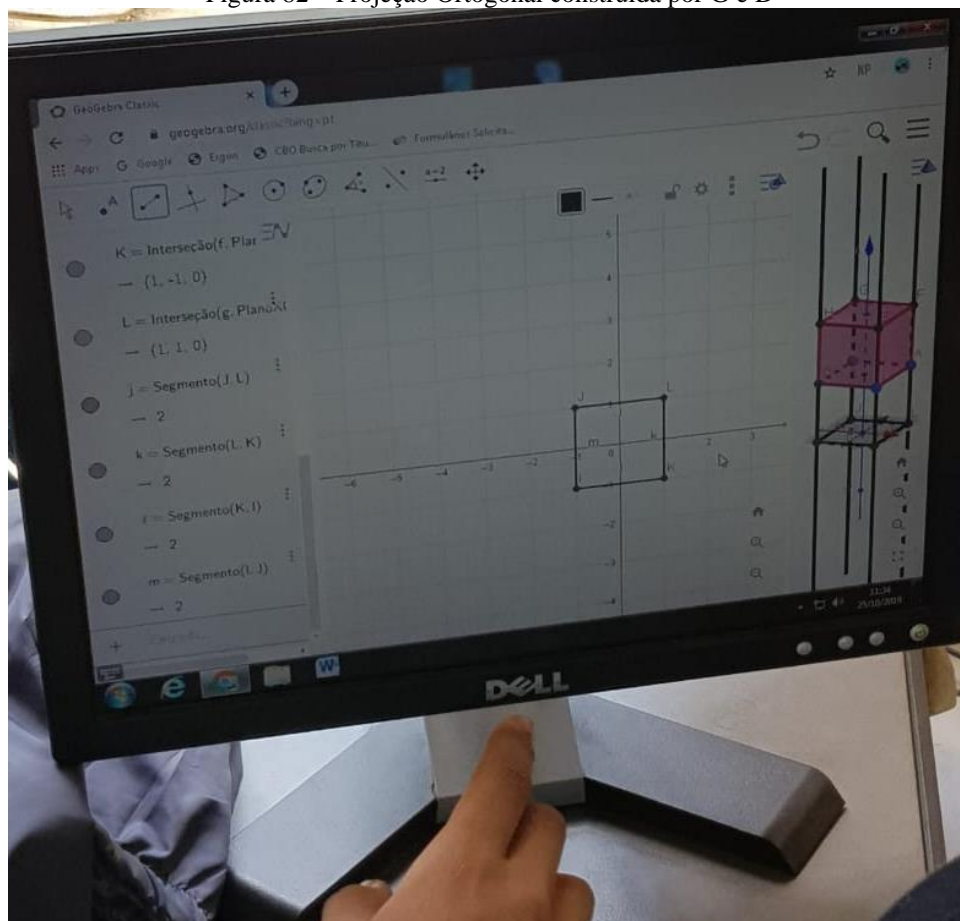
Uma dificuldade dos alunos no primeiro exercício (construir um quadrado como projeção ortogonal de um cubo), identificada pelo pesquisador, foi não conseguir construir o cubo de maneira que o sólido, em sua totalidade, ficasse acima do plano  $xOy$ . O professor então decidiu colocar coordenadas no quadro para que os alunos construíssem o cubo a partir delas, para deixar o processo mais rápido.

Após o cubo estar em uma posição oportuna para ser projetado no plano  $xOy$  os alunos passavam a pensar sobre como construir a projeção ortogonal do cubo no plano  $xOy$ . Foi frequente, entre os alunos, dúvidas sobre quais pontos do cubo deveriam projetar no plano. Por exemplo, no cubo há oito vértices e, para construir a projeção ortogonal do cubo no plano  $xOy$  basta projetarmos cada vértice e depois ligar esses pontos a partir da ferramenta segmento de reta. Porém, dada a posição em que o cubo estava, sempre havia um segundo vértice, tal que sua projeção era a mesma de outro vértice do cubo, o que gerou dúvidas nos alunos. Acreditamos que os alunos apresentaram uma dificuldade na habilidade espacial percepção de relações espaciais, assim como no caso do aluno T, os alunos não perceberam que certos vértices já estavam contidos na projeção ortogonal de outros vértices.

G e D fizeram uma observação interessante: eles notaram que o quadrado aparecendo na janela de visualização 2D (Figura 82) era o mesmo objeto que o quadrado construído como projeção ortogonal do cubo e afirmaram ao pesquisador que o plano da janela de visualização

2D do GeoGebra é o mesmo plano  $xOy$  presente na janela de visualização 3D do GeoGebra. Foi a segunda vez que um aluno percebeu isso, o que evidencia que o aluno está estabelecendo uma relação entre plano e espaço, coordenando ambas as representações.

Figura 82 – Projeção Ortogonal construída por G e D



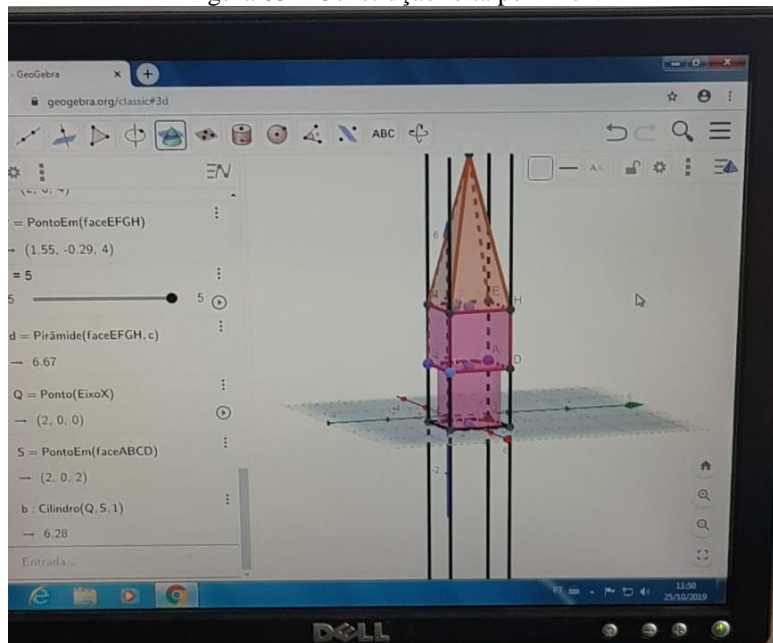
Fonte: Acervo pessoal

A dupla M e V questionou se, como duas das projeções ortogonais solicitadas eram quadrado, poderiam construir a pirâmide e o cubo juntos, de forma que a projeção de ambos os sólidos resultasse no mesmo quadrado. O pesquisador respondeu-lhes que era possível e incentivou a dupla para fazer a construção que desejavam. Após algumas tentativas, a dupla concluiu a construção (Figura 83), em que colocou a pirâmide sobre o cubo. O pesquisador ao observar a construção (Figura 83) ficou surpreso por haver um cilindro construído. M justificou que construiu o cilindro, pois no próximo exercício seria necessário. O pesquisador interessou-se em saber o que M e V responderiam sobre a projeção ortogonal do cilindro (o exercício 3 da Tarefa 7 discute duas projeções ortogonais do cilindro). M comentou (em tom de dúvida) que não havia pensado nisso, mas que provavelmente seria a mesma projeção ortogonal do cubo. Antes de pedir uma justificativa a M, o pesquisador perguntou a V o que ela achava, V respondeu que achava que não, por que o cilindro é um “círculo”. Aproveitando



o comentário de V, o pesquisador explicou que, o que importava não eram, necessariamente, os vértices do sólido, e sim os extremos do sólido, que podem ser vértices, arestas, circunferências, etc.

Figura 83 – Construção feita por M e V



Fonte: Acervo pessoal

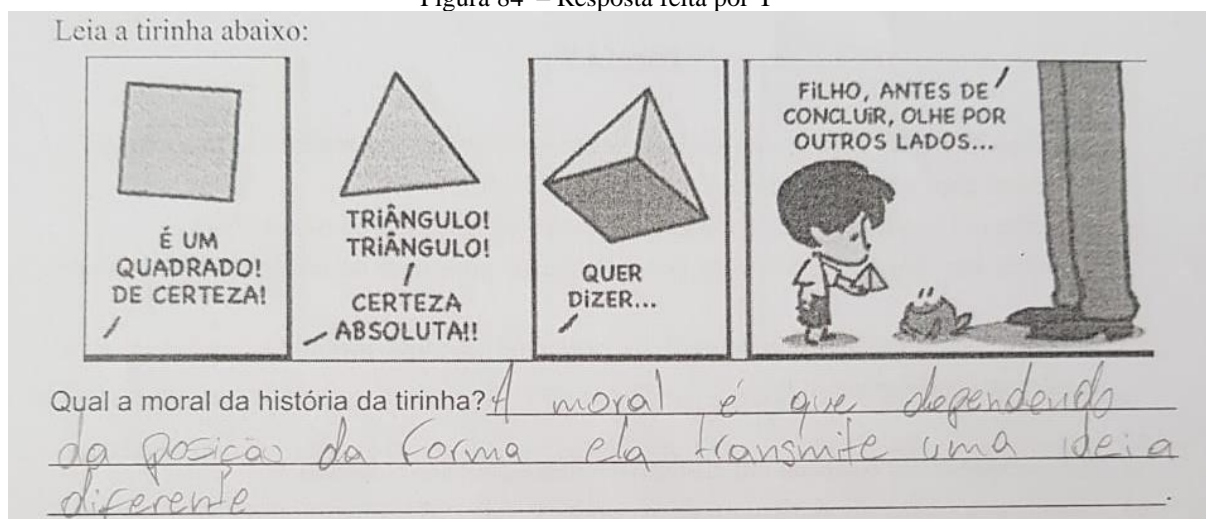
Acreditamos que, da forma como foram planejadas as tarefas, podem induzir o aluno a pensar que são necessários vértices para que seja construída a projeção ortogonal. Essa limitação pode ser contornada com uma mudança na tarefa introdutória de projeção ortogonal, solicitando que os alunos, além de projetar segmentos, projetem circunferências ou semicircunferências. Uma outra possibilidade, mais elaborada, seria trabalhar com a projeção de segmentos de reta a partir do rastro de um controle deslizante. Neste caso, trabalhando com a projeção ortogonal de segmentos de reta, pode ser construído um ponto que depende de um controle deslizante que percorra todo o segmento, depois é construída uma reta perpendicular entre este ponto e o plano de projeção e é construída a interseção da reta com este plano. Então, basta considerarmos o rastro deste último ponto e este rastro será a projeção ortogonal do segmento. Ressaltamos que houve uma tentativa em fazer essa abordagem com a turma, porém como os alunos não tinham conhecimento sobre construção de funções, o pesquisador tomou a decisão de seguir o caminho aqui descrito.

Uma outra possibilidade pode ser uma limitação na visualização espacial dos alunos, que ainda não conseguiam relacionar um sólido do espaço com sua projeção ortogonal no plano. Acreditamos que possa ter faltado ao aluno a habilidade espacial percepção figura-fundo, pois ele não conseguiu distinguir o cilindro dos outros dois sólidos construídos, ou do

quadrado já construído como projeção ortogonal do cubo. Provavelmente, se o cilindro estivesse construído sozinho, o aluno responderia de outra forma.

Quando os alunos estavam finalizando e entregando a Tarefa 7, o pesquisador observou a resposta de um grupo de alunos sobre a tirinha (Figura 84) e perguntou a Y, integrante do grupo, sobre o que seria “*uma ideia diferente*”. Y respondeu que estavam se referindo ao quadrado e ao triângulo dos dois primeiros quadros da tirinha. Insistindo, o pesquisador perguntou porque a pirâmide do terceiro quadro transmite ideias diferentes. A aluna respondeu que era por que a pirâmide está em uma posição diferente em cada quadro. Para provocar a aluna a refletir, o pesquisador perguntou a Y se em todos os quadros seriam projeções de uma pirâmide. Y respondeu que sim e o pesquisador complementou dizendo que em cada quadro há uma projeção diferente da pirâmide.

Figura 84 – Resposta feita por Y



Fonte: Acervo pessoal

No próximo encontro abordaremos as últimas tarefas da pesquisa (Tarefa 8, Tarefa 9 e Tarefa 10).

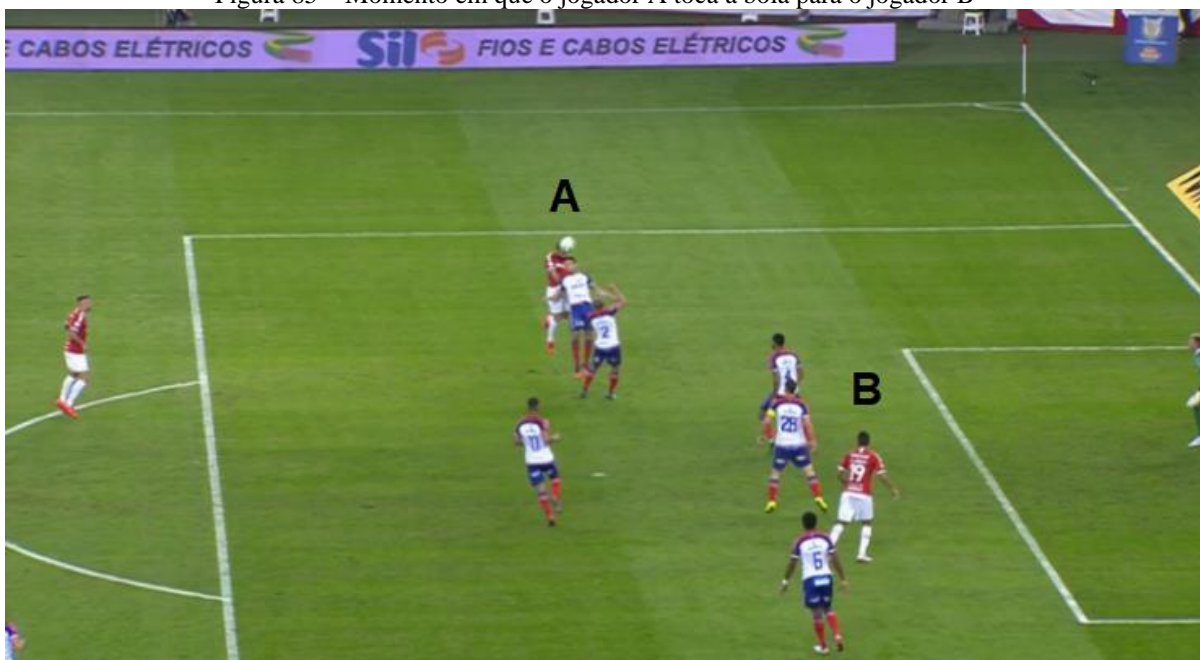
#### 4.6 Encontro 6

Este encontro ocorreu no dia 4 de novembro de 2019, com duração de 1 hora e 30 minutos. Os cinco encontros anteriores aconteceram durante o período letivo, porém este encontro adicional não pôde ser realizado nos horários usuais e ocorreu pela tarde. Por essa razão, somente sete alunos puderam comparecer, formando três grupos de dois alunos que e um aluno trabalhou individualmente. Neste encontro os alunos trabalharam nas Tarefas 8, 9 e 10.

Para que o tempo fosse suficiente, no primeiro momento os sete alunos trabalharam na Tarefa 8 e, em um segundo momento, a turma dividiu-se em dois grupos, em que cada um resolveu uma das questões do ENEM (Tarefa 9 e Tarefa 10).

No primeiro momento da Tarefa 8 os alunos observaram um evento que ocorreu em junho de 2019. Neste evento dois clubes brasileiros de futebol estavam jogando pelo campeonato nacional do país, quando o jogador A do clube que atacava (uniforme vermelho) tocou a bola para o jogador B (considerado em posição irregular) que marcou o gol. Na Figura 85 podemos ver o exato momento em que o jogador A toca a bola para o jogador B.

Figura 85 – Momento em que o jogador A toca a bola para o jogador B



Fonte: Disponível em: <https://sportv.globo.com/site/programas/redacao-sportv/noticia/chefe-de-arbitragem-da-cbf-divulga-imagem-e-explica-lance-polemico-do-var-em-inter-x-bahia.ghtml> Acesso em 10/12/2019

A polêmica desse lance foi que no primeiro momento o árbitro considerou o jogador B em impedimento, invalidando o gol, porém, depois da revisão do VAR<sup>20</sup>, ele considerou que o jogador B não estava em posição de impedimento, validando o gol.

Assim, no exato momento apresentado na Figura 85, surge a polêmica do lance: o jogador B está em impedimento, isto é, o jogador B encontra-se à frente de todos os jogadores do time Bahia (jogadores de branco) com exceção do goleiro - uma observação importante é que os braços do jogador **não** contam para a posição de impedimento. Para grande parte dos

---

<sup>20</sup> Tecnologia para auxiliar na análise de imprecisões e possibilitar uma revisão do jogo e das jogadas a partir de diversos ângulos.

telespectadores e, inclusive, os comentaristas<sup>21</sup> do jogo, o jogador B encontra-se em posição de impedimento, e a imagem da Figura 85 também sugere isso.

Na tarefa, o pesquisador perguntou aos alunos se eles lembravam do evento e todos os alunos tinham conhecimento do lance. Então o pesquisador pediu para que cada grupo respondesse às duas primeiras questões (Figura 86) da Tarefa 8 e essas respostas foram realizadas antes de qualquer tipo de discussão sobre o lance.

Figura 86 – Perguntas da Tarefa 8

Você concorda com a decisão final de validar o gol? Por que? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 Por que você acha que esse lance foi polêmico? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Fonte: Acervo pessoal

Os quatro grupos concordaram com a decisão final do VAR. Uma observação importante é que, como os sete alunos torcem para o time que teve o gol validado, os sete alunos tendem a concordar com a decisão final do VAR (Figura 87 e Figura 88). Sobre explicar a razão do lance ter sido polêmico, o aluno P respondeu que o ângulo da câmera “deixa” o jogador em posição de impedimento (Figura 87). O pesquisador, ao observar essa resposta, perguntou à dupla:

Pesquisador: *Então a câmera deixou o jogador em posição de impedimento? É ela quem decide quem tá em posição de impedimento?*

P: *Não, assim não. O ângulo dela que faz o Jogador B parecer em impedimento*

Pesquisador: *É uma questão de perspectiva né, só tem como o jogador tá ou não tá impedido, mas pra gente saber se tá ou não, tem que pegar o ângulo certo*

Figura 87 – Resposta do aluno P

Você concorda com a decisão final de validar o gol? Por que? *concordo porque pela ajuda do VAR foi possível analisar o posicionamento do jogador.*

Por que você acha que esse lance foi polêmico? *pele fato que olhando pela camera gravada a ilusão deixo o jogador em posição de impedimento.*

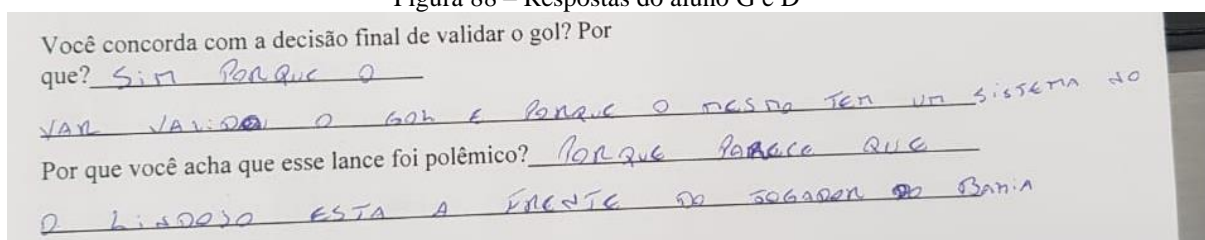
Vamos abrir o seguinte link:

Fonte: Acervo pessoal

<sup>21</sup> Pessoas que, durante a transmissão do jogo na televisão e/ou internet, comentam os lances do jogo.

G e D responderam que o lance é polêmico pois o Jogador B está à frente dos jogadores do time adversário (com exceção do goleiro) (Figura 88). O pesquisador observou a resposta da dupla e comentou “*É exatamente isso! O problema todo é porque o Jogador B parece tá na frente, isso é polêmico. Mas por que que ele parece que tá na frente, se ele não tá?*”. G respondeu “*Por causa da câmera, por que a gente tá olhando pela câmera errada*”. Essa discussão foi feita com os outros dois grupos e as respostas de ambos se assemelham às supracitadas.

Figura 88 – Respostas do aluno G e D



Fonte: Acervo pessoal

Após essa discussão, os sete alunos assistiram ao vídeo solicitado na Tarefa 8. Neste vídeo o chefe de arbitragem da CBF (Confederação Brasileira de Futebol) explica como é a construção da linha de impedimento no software (Figura 89). Ressaltamos que, em dado momento do vídeo, o chefe de arbitragem da CBF comenta que a construção linha de impedimento é realizada a partir de todas as câmeras que mostram ângulos diferentes do mesmo lance. O pesquisador comentou esse fato com os alunos.

Pesquisador: *O que foi fundamental ali? Pra que a linha tivesse certa?*

G: *Alguém com a mão boa, pra acertar* (referindo-se ao fato que uma mão humana encontra o melhor ponto para definir a posição do jogador).

Pesquisador: *Sim, isso sim, mas por que ele tem tanta precisão pra acertar o impedimento?*

G: *Por que ele é um cara treinado.*

Pesquisador: *Vocês não acham que olhar em várias câmeras ajuda?*

D: *Sim, até por que ele pode marca uma coisa numa câmera e fica na outra* (referindo-se a quando é feita uma marcação em uma câmera, esta marcação fica presente em todas as outras câmeras).

Pesquisador: *Sim, daí a gente olha por vários ângulos diferentes.*

P: *Que nem a jogada do Inter. Foi polêmico porque já que a maioria que tava vendo pela tv tiveram uma conclusão, o ângulo muda muito* (referindo-se a jogada ilustrada na Figura 85).

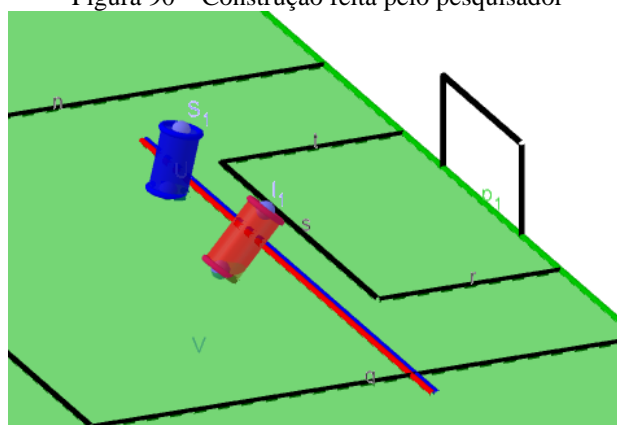
Figura 89 – Chefe de arbitragem da CBF explicando a construção da linha de impedimento



Fonte: Acervo pessoal

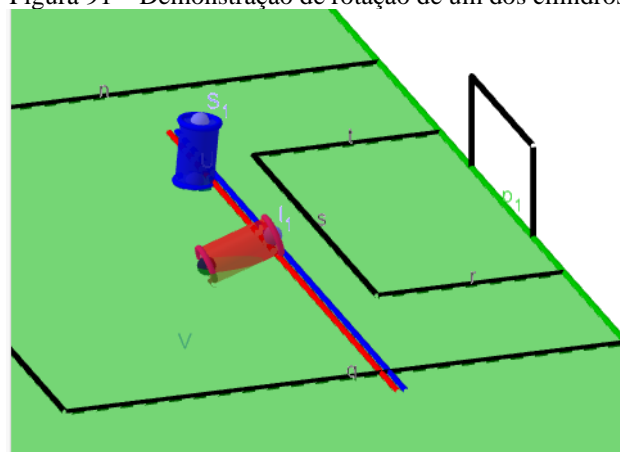
Após assistir ao vídeo e discutir com os alunos sobre a situação, o pesquisador solicitou que todos os grupos abrissem o arquivo presente (Figura 90) na Tarefa 8. Neste arquivo, construído pelo pesquisador, há uma reconstrução da linha de impedimento no GeoGebra, em que os jogadores são substituídos por cilindros, o cilindro azul representa o defensor e o cilindro vermelho o atacante. Uma observação sobre essa construção é que os alunos podem mover o ponto central da circunferência da base superior do cilindro para que este fique mais inclinado (Figura 91). No centro da circunferência da base inferior do cilindro há um ponto que, quando movimentado, move o cilindro para uma outra posição do campo (Figura 92). Observamos que qualquer movimento feito nos cilindros, representados nas Figura 91 e Figura 92, alteram a linha de impedimento do jogador.

Figura 90 – Construção feita pelo pesquisador



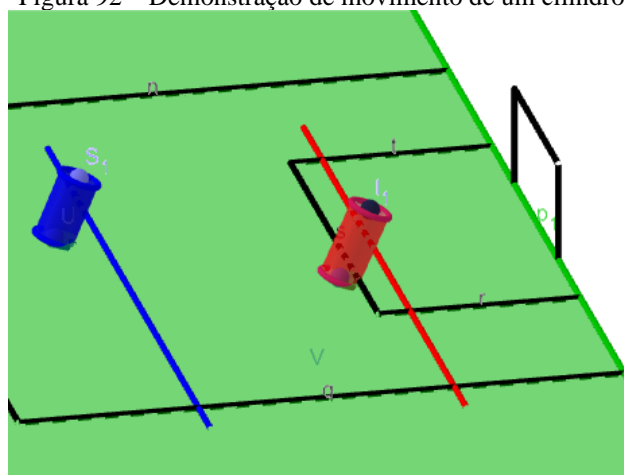
Fonte: Acervo pessoal

Figura 91 – Demonstração de rotação de um dos cilindros



Fonte: Acervo pessoal

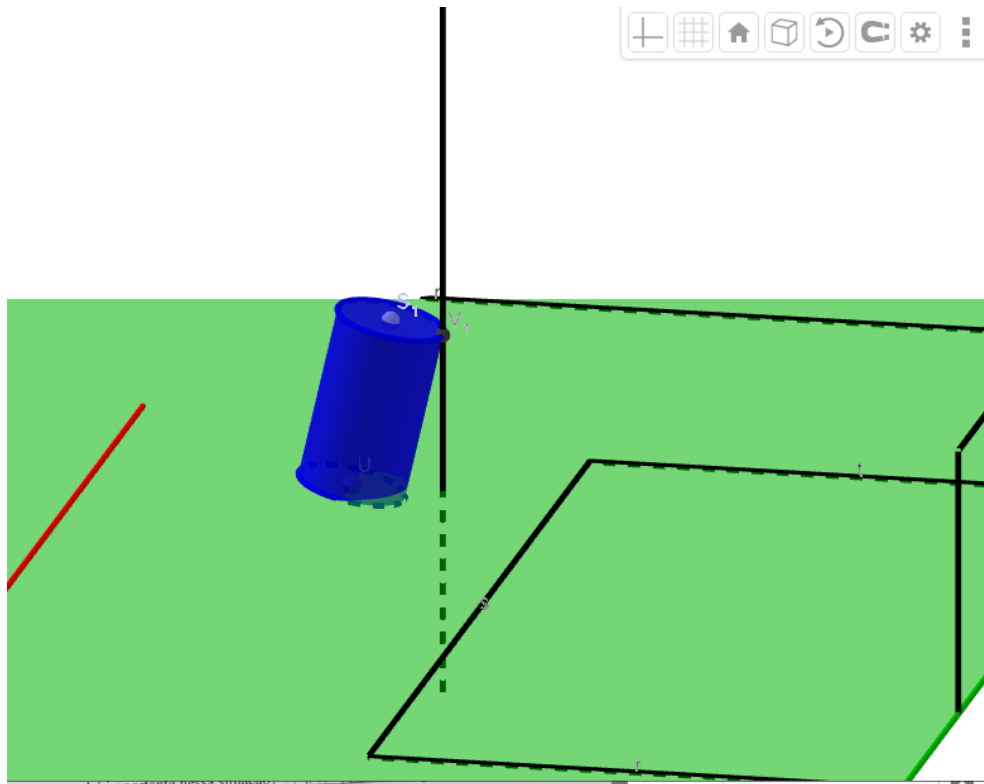
Figura 92 – Demonstração de movimento de um cilindro



Fonte: Acervo pessoal

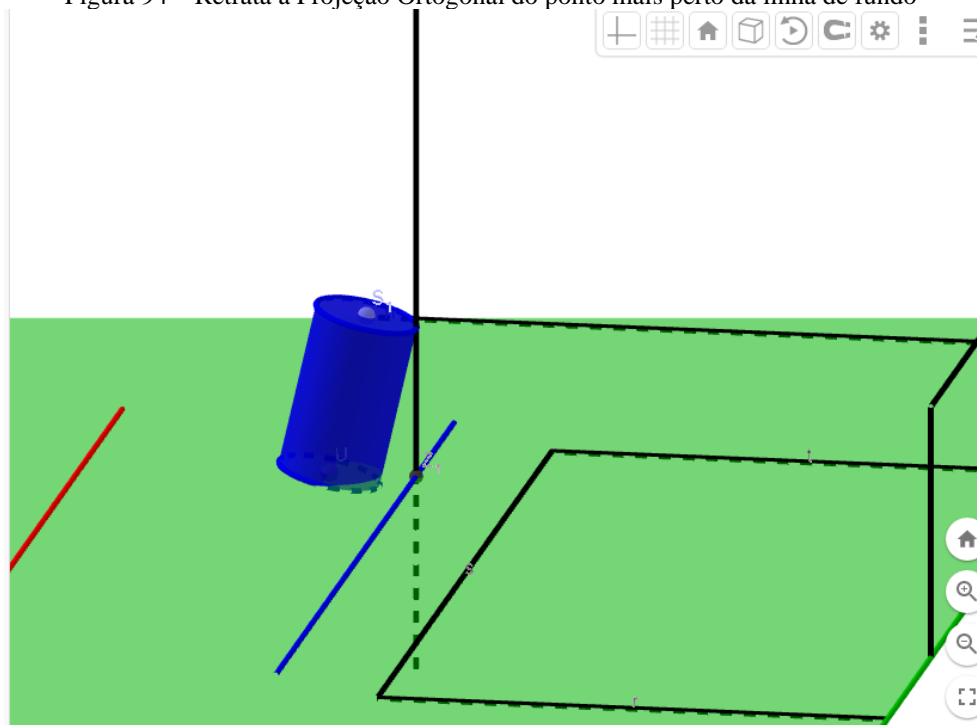
Foi solicitado que os alunos explorassem essa construção com o objetivo de responder à pergunta: “*Onde a projeção ortogonal é importante nessa situação?*”. Nessa construção, há muitas etapas ocultas, em que os alunos podiam, caso quisessem, fazê-las aparecer novamente. Isso foi comentado com os alunos e, como haviam muitas etapas na construção o pesquisador acabou mostrando quais etapas eram importantes de serem exploradas. As duas etapas solicitadas estão ilustradas nas Figura 93 e Figura 94, que realçam as retas perpendiculares construídas para projetar o ponto  $V_I$  no solo, construindo o ponto  $Z_I$ .

Figura 93 – Retrata o ponto do cilindro mais próximo da linha de fundo



Fonte: Acervo pessoal

Figura 94 – Retrata a Projeção Ortogonal do ponto mais perto da linha de fundo



Fonte: Acervo pessoal



Sem mais intervenções do pesquisador, cada grupo respondeu à pergunta supracitada. Duas das quatro respostas podem ser conferidas nas Figura 95 e Figura 96. M e V responderam que “*Ela (a projeção ortogonal) constrói a linha de impedimento*”. Então o pesquisador buscou entender o que a dupla afirmou.

Pesquisador: *Então a projeção constrói a linha, não precisa mais nada?* (Insinuando que bastaria construir a projeção ortogonal do jogador que estaria tudo resolvido)

M: *Não sor, mas é que com a projeção a gente marca esse ponto aqui (ponto  $Z_1$  na Figura 94) e cria essa linha aqui* (referindo-se a reta azul na Figura 94).

Pesquisador: *Mas como tu cria essa linha?*

M: *Com o ponto.*

Pesquisador: *Tá, olha só, tu pega e projeta e marca aquele ponto. Feito? Mas aqui (por esse ponto) pode passar várias retas né? Essa daqui que a gente criou (reta) é especial, não?*

M e V observaram a construção.

M: *Ata.*

Pesquisador: *Essa reta aqui é paralela a linha de fundo. Isso que ela tem de especial. E a projeção é importante, por que ela nos dá onde a gente cria essa linha.*

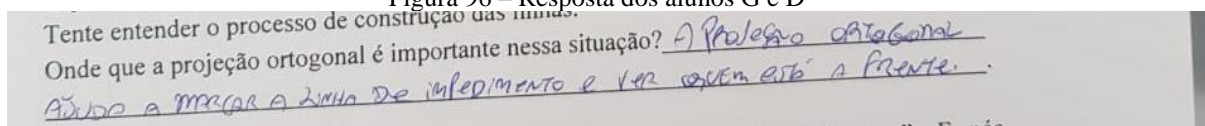
Figura 95 – Respostas dos alunos M e V

Ente entender o processo de construção das linhas.  
Onde que a projeção ortogonal é importante nessa situação? Ela constrói o  
linha de impedimento.

Fonte: Acervo pessoal

G e D estavam comentando com o pesquisador em tom de brincadeira que, na verdade, a projeção ortogonal “*não servia para nada*” para marcar a linha de impedindo. O pesquisador, então, respondeu (em bom humor) “*Então faz o seguinte, a projeção não serve pra nada né? Exclui o ponto ali de baixo*” (o ponto que representa a projeção ortogonal do ponto mais perto da linha de fundo do jogador). O aluno excluiu o ponto e, assim, a linha de impedimento também foi deletada. O pesquisador complementou “*Agora faz a linha de novo, mas sem projetar o ponto*”. G respondeu “*Daí tu me complica, sor*”. O pesquisador complementou “*Mas é isso. Sem ela (projeção ortogonal) tu não marca a linha (de impedimento)*”. Posteriormente, os alunos responderam à pergunta deste exercício, que pode ser conferida na Figura 96.

Figura 96 – Resposta dos alunos G e D



Fonte: Acervo pessoal

Nos trinta minutos finais deste encontro, os alunos trabalharam na Tarefa 9 e na Tarefa 10, em que a turma de sete alunos foi dividida em dois grupos, com os alunos resolvendo individualmente cada questão. Nesta tarefa foi solicitado que os alunos construíssem no GeoGebra as situações das questões do ENEM, porém pela escassez de tempo, o pesquisador fez as construções e os alunos as observaram e exploraram. Foram dados dez minutos para que cada membro do grupo terminasse a questão, os alunos podiam se comunicar e o pesquisador não fez intervenções em nenhum dos grupos. Em cada tarefa todos os membros do grupo responderam de forma igual, porém com justificativas diferentes.

Primeiro discutiremos a Tarefa 9. Ela foi feita por M, V e P. Na Figura 97 está ilustrada a resposta de V. O pesquisador não conseguiu entender o que porquê de V responder “Porquê o ponto A está situado no chão e é em formato de C (semicírculo)”, nem o porquê de M responder (Figura 98) “Pois ele faz esse movimento em relação ao raio do plano”.

Acreditamos que os alunos estavam com dificuldade, para resolver essa questão, no primeiro aspecto que Gutiérrez (1996) menciona na resolução de problemas: a imagem mental. Os alunos não estavam conseguindo interpretar o problema e construir uma imagem mental que fornecesse uma ideia do que estava acontecendo na questão.

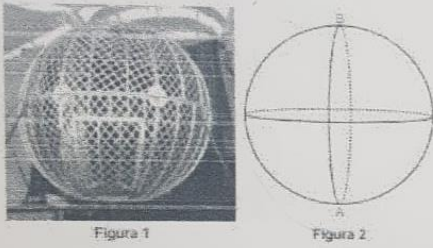
Figura 97 – Resposta de V

**Tarefa 9**


Resolva a questão do ENEM 2012 abaixo:

**QUESTÃO 153**

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.



A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por



Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Por que você marcou essa alternativa? Porque o ponto A, está colocado no chão, e é em formato de "C".

Fonte: Acervo pessoal

Figura 98 – Resposta de M

Por que você marcou essa alternativa? B pois ele faz um movimento no raio do plano

Fonte: Acervo pessoal

Após os alunos terminarem, o pesquisador fez a construção representada na Figura 99 em um computador e os alunos ficaram observando. Então o pesquisador comentou “Vocês concordam que esse ponto aqui é o motociclista?”. Então M respondeu “Mas ele não dá a volta inteira né?”. O pesquisador comentou “O exercício diz que ele vai de A até B e de B até A, uma volta completa”. Acreditamos que M e os demais membros do grupo resolveram a questão tendo em mente que o motociclista dava apenas meia volta no globo da morte. O pesquisador construiu a reta perpendicular e construiu o ponto D, projeção ortogonal do motociclista no solo. Os três alunos concordaram que aquela era a projeção ortogonal. Antes de movimentar o ponto o pesquisador perguntou “O que vocês acham que o ponto D vai fazer?”. Os alunos ficaram em silêncio e M, timidamente, respondeu “Um C?”. Então o pesquisador habilitou o rastro do ponto D e fez, usando o controle deslizante, uma volta

completa do motociclista, resultando na situação representada na Figura 100. A partir da exploração e observação no GeoGebra o pesquisador e os alunos discutiram sobre a construção.

Pesquisador: *Que que vocês acham?*

M: *Que tá errado.*

Pesquisador: *Como assim?*

M: *Não tem essa resposta na folha.*

O pesquisador pensou por alguns instantes no que M quis dizer e percebeu que na Figura 100 a projeção ortogonal do movimento do motociclista está na horizontal e não na vertical como mostra a alternativa correta 'e'.

Pesquisador: *Te entendi agora.* (Pesquisador movimenta a Janela de visualização 3D de forma que a projeção fique na vertical) *E agora, tá certo?*

Nenhum aluno se manifestou. O pesquisador comentou sobre todos passos que havia feito até chegar na linha vertical.

Pesquisador: *Ficou mais ou menos claro?*

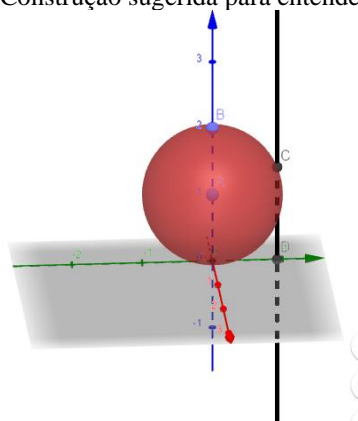
P: *Sim.*

Pesquisador: *M... V?*

M: *Tá, agora faz sentido.*

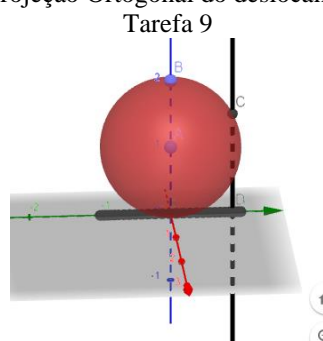
V: *Acho que sim.*

Figura 99 – Construção sugerida para entender a Tarefa 9



Fonte: Acervo pessoal

Figura 100 – Construção sugerida da Projeção Ortogonal do deslocamento do motociclista em movimento da Tarefa 9



Fonte: Acervo pessoal

Acreditamos que a dificuldade do aluno M para entender a construção feita pelo pesquisador foi a falta da habilidade rotação mental, isto é, conseguir visualizar mentalmente movimentos de um objeto para interpretar alguma configuração dele. O aluno M não conseguiu perceber que apenas estávamos visualizando para o movimento do motociclista de outra perspectiva. A habilidade de elaborar uma imagem mental dinâmica também pode não estar bem construída pelo aluno M.

A Tarefa 10 foi feita por G, R, I e E. Nesta atividade todos os alunos acertaram a questão antes de ela ser discutida com a ajuda da exploração do GeoGebra. Porém, ainda sim, somente E (Figura 101) justificou de uma forma mais próxima do que seria o correto. Na discussão entre os alunos, o pesquisador percebeu que E foi a primeira a responder a questão e os demais seguiram sua resposta, provavelmente, buscando justificar de alguma maneira, como por exemplo G (Figura 102).

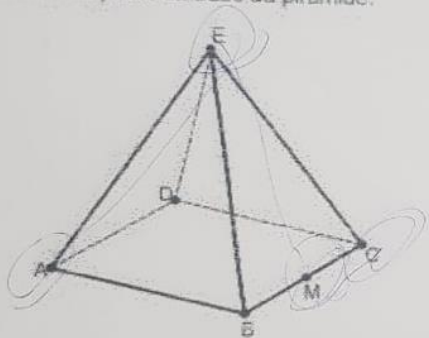
Figura 101 – Resposta do aluno E

**Tarefa 10**

Resolva a questão do ENEM 2012 abaixo:

**QUESTÃO 165**

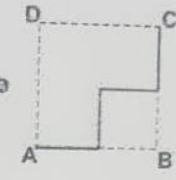
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



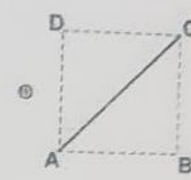
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

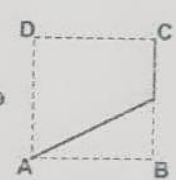
a



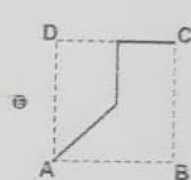
b



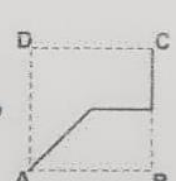
c



d



e



Por que você marcou essa alternativa? Por eu fiz o desenho na mesa e assim fica a alternativa (c)

Fonte: Acervo pessoal

Figura 102 – Resposta do aluno G

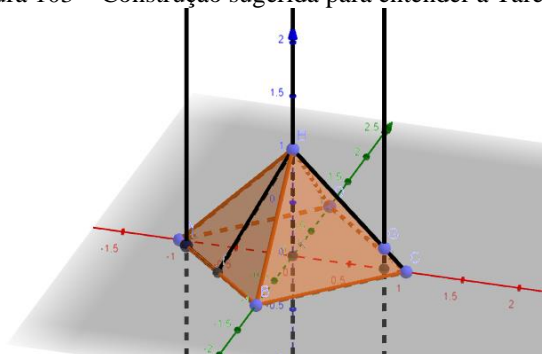
Por que você marcou essa alternativa? Seguindo as linhas

Fonte: Acervo pessoal

Os alunos tiveram, aproximadamente, dez minutos a mais para discutir a questão, enquanto o pesquisador fazia a construção da Tarefa 9 com o outro grupo de alunos. Então o pesquisador fez a construção da pirâmide (Figura 103) com pontos que percorriam o deslocamento de João (personagem da questão). Quando questionados se concordavam que o deslocamento de João era o representado pelos três pontos, todos os alunos concordaram. Então o pesquisador mostrou a projeção ortogonal no solo do deslocamento de João (Figura 104). Quando o pesquisador finalizou, G comentou “Foi exatamente isso que eu pensei, só que eu não preciso do GeoGebra”, revelando ou uma habilidade espacial de rotação mental de G, em que ele conseguiu gerar uma representação externa de um objeto em movimento, ou que o aluno não havia conhecimento da resposta correta e fez um comentário para dar a

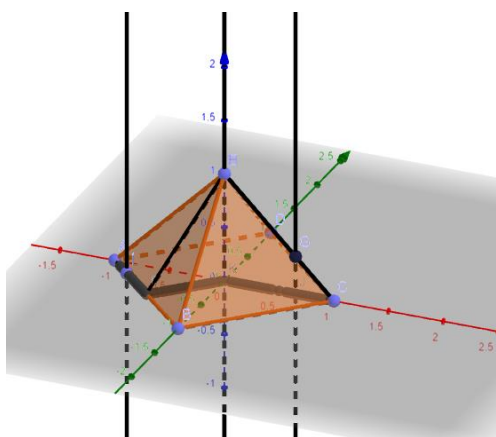
entender que sabia resposta. Ao final o pesquisador perguntou aos quatro alunos se essa construção no GeoGebra havia deixado mais clara a resposta do exercício. Todos concordaram com o professor.

Figura 103 – Construção sugerida para entender a Tarefa 10



Fonte: Acervo pessoal

Figura 104 – Construção sugerida da Projeção Ortogonal do deslocamento de João da Tarefa 10



Fonte: Acervo pessoal

Acreditamos que a geometria dinâmica ajudou os alunos no processo de entender, visualizar e resolver as questões do ENEM, pois com ela foi possível recriar a situação com verossimilhança.

Possivelmente, com mais tempo para os alunos explorarem essas questões do ENEM com o GeoGebra, seria possível que eles mesmo pudessem fazer essas construções e tirar as conclusões descritas acima. Na próxima seção faremos as considerações finais sobre essa prática.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar como o software GeoGebra pode potencializar a compreensão de Projeção Ortogonal no Ensino Médio. Para tal, foi desenvolvida uma sequência didática com dez tarefas para aplicar com alunos de segundo ano com poucos ou nenhum conhecimento sobre geometria plana e espacial. Há muitos trabalhos que mostram que o GeoGebra pode potencializar a compreensão de conceitos de Geometria plana e espacial, além de desenvolver a visualização espacial do aluno (ver 2.6 Trabalhos correlatos, p. 40). Portanto, o principal que buscamos nesta pesquisa foi avaliar como o software pode ser utilizado na compreensão de projeção ortogonal. Em nossas atividades, foi possível perceber que o GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento das habilidades espaciais de alguns alunos e, principalmente, para a construção da representação externa de situações onde a projeção ortogonal é solicitada. Apesar disso, percebemos que, nessa sequência didática, houve um enfoque maior na construção das projeções ortogonais e não na exploração de projeções ortogonais já prontas. Isso pode ter refletido em uma limitação em alguns alunos, em que o aluno sabia como construir a representação externa de algum objeto solicitado, porém não gerava uma imagem mental que lhe mostrasse por onde começar. Notamos que a geometria dinâmica foi fundamental para que os alunos percebessem situações como a exemplificada na Tarefa 7 ou o polígono construído por G e D que, em certa perspectiva, parecia uma pirâmide regular de base hexagonal.

Antes de aplicar uma sequência de tarefas em um ambiente diferente da sala de aula uma questão é necessária: como será a aceitação dos alunos? E, no nosso caso, outra pergunta necessária é como será a familiarização dos alunos com o software GeoGebra? Visto isso, essa sequência preocupou-se em dedicar parte de seus encontros com o objetivo de proporcionar aos alunos conhecerem o software e dominarem o máximo de ferramentas possíveis. Na turma em que a pesquisa foi aplicada, há alunos que aceitaram o software rapidamente, como foi o caso de, por exemplo, T, G, D e Y. Porém, alguns alunos têm dificuldade em trabalhar com o computador, seja por não gostar de ir para a informática, seja por ter dificuldade no manuseio do computador ou do software utilizado, seja pela atenção que os alunos dão para outras coisas no computador (que não são as atividades solicitadas). E, em uma turma diversificada como a que participou da pesquisa, todos os casos aconteceram.



Em uma turma grande (mais de vinte alunos) um problema que o professor pode enfrentar é não conseguir atender individualmente cada aluno com a atenção que este merece. Nesta sequência percebi o quanto um professor sozinho pode ter dificuldades em atender tantos alunos e dedicar um tempo, que eles merecem, para ajudar com dúvidas ou reexplicar atividades. Por muitas vezes nesta pesquisa, percebi que situações como essa tornaram-se uma “bola de neve”, pois em momentos em que eu não conseguia atender a um grupo porque estava atendendo outro, o grupo em espera não fazia nada em relação à atividade e, no momento em que eu conseguia atendê-los, percebia que eles já haviam se dispersado e, algumas vezes, nem lembravam qual era a dúvida. Percebi que isso, muitas vezes, desmotiva os alunos e diminui o desempenho deles durante o restante da atividade.

Ao longo da prática deste trabalho, pude perceber que os alunos, nem sempre, gostam de ficar aulas seguidas no laboratório de informática. Ficou claro certa desmotivação dos alunos ao longo da prática que, associado ao aumento na dificuldade das tarefas, tirava a atenção dos alunos das atividades. Sendo assim, uma ideia que poderia ser posta em prática é fazer os encontros na informática mais espaçados e intercalados com aulas na sala de aula convencional.

A partir das experiências desta pesquisa, acreditamos que talvez não é seja recomendado que um professor utilize cinco a seis encontros durante as aulas com o foco de ensinar Projeção Ortogonal, pois, apesar de ser um assunto interessante contemplado pelo ENEM, a Projeção Ortogonal é apenas um dos muitos assuntos importantes de Geometria. Acredito que na situação de um professor que queira aproveitar alguma dessas tarefas na sala de aula seja interessante planejar todo o ensino de Geometria com encontros no laboratório de informática, espaçados por pelo menos duas aulas, e - quando surgir a oportunidade - trabalhar em um ou dois encontros a projeção ortogonal. Nos encontros no laboratório de informática, os alunos terão contato com geometria plana e espacial e com ferramentas importantes do software, não sendo necessário introduzi-las apenas para o ensino de projeção ortogonal, como foi feito nesta pesquisa durante o período letivo de aula.

Continuei o trabalho na turma 2M1 por mais algum tempo, depois de terminar de aplicar esta prática e algo surpreendeu-me: Quando trabalhei geometria espacial (relação de Euler, área e volume), a maioria dos alunos conhecia (dos encontros na informática) os nomes dos sólidos, além de saber diferenciar os nomes dos sólidos para os nomes das faces (por exemplo, diferenciar um cubo de um quadrado). Acredito que os alunos irão lembrar do que

trabalharam no GeoGebra sempre que estiverem estudando Geometria Plana ou Espacial, o que poderá ajudá-los.

A análise dos livros didáticos mostrou que há pouco espaço dedicado ao estudo de Projeção Ortogonal e que o conteúdo é apresentado de uma forma distante da linguagem que alunos de Ensino Médio estão acostumados. Além disso os conteúdos de Geometria Espacial são, em geral, apresentados em uma linguagem matemática que pode dificultar o aprendizado. Um desafio que fica para o professor é: Como abordar esses conteúdos em uma linguagem que o aluno esteja familiarizado? Ressaltamos que o desenvolvimento das aulas depende mais do professor do que do livro didático em si, mas, a partir dessa análise, podemos ter uma ideia de como os livros procuram apresentar os assuntos supracitados.

Foi desafiador desenvolver as dez tarefas que conduzem essa pesquisa. Essa pesquisa mostrou como é difícil planejar atividades que fujam do comum e, ainda assim, ajudem no aprendizado do aluno. Por isso é necessário valorizar o professor, para que este se dedique a levar para a sala de aula atividades diferentes que potencializam o aprendizado dos alunos.

Uma observação que eu gostaria de fazer é que me sinto privilegiado de ter tido contato com tanta tecnologia que pode ser usada na Educação Matemática. Pois são muitos os educadores, já em atividade, que não têm condições de se dedicar a estudar as inovações e tecnologias que potencializam o ensino de Matemática, cada qual com sua razão.

Acredito que seja fundamental, para o desenvolvimento do ensino de Geometria - e dos assuntos de Matemática em geral -, que sejam feitas cada vez mais pesquisas sobre maneiras de ensinar os estudantes. E, também, que essas pesquisas estejam acessíveis e possam ajudar as pessoas as quais fazem a diferença em sala de aula: os professores.

## REFERÊNCIAS

BOGDAN R. C., BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto Editora, Portugal, 1994. Disponível em: <<http://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-em-ensino/investigacaoqualitativa>>. Acesso em 26 jun. 2019

GOLDENBERG M. **A arte de pesquisar**, 2004. 8ª edição, Editora: RECORD

Disponível em: <[www.ufjf.br/labesc/files/2012/03/A-Arte-de-Pesquisar-MirianGoldenberg.pdf](http://www.ufjf.br/labesc/files/2012/03/A-Arte-de-Pesquisar-MirianGoldenberg.pdf)>. Acesso em 26 jun. 2019

GUTIÉRREZ, A. **Children's ability for using different plane representations of space figures**, en Batturo, A.R. (ed.), *New directions in geometry education* (pp. 3342). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T. Disponível em: <<https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>>. Acesso em 26 jun. 2019

GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial**. In: Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, EspN. 1991. p. 44-59. Disponível em: <<https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut92b.pdf>>. Acesso em 26 jun. 2019

GUTIÉRREZ, A. **The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them**, en Batturo, A.R. (ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T. Disponível em: <<https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>>. Acesso em 26 jun. 2019

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework**. in L. Puig and A. Gutierrez (eds.) *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 1, pp. 319). Valencia: Universidad de Valencia. 1996. Disponível em: <<https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>>. Acesso em 26 jun. 2019

HOELSCHER, R.P.; SPRINGER, C.H.; DOBROVOLNY, J.S. **Expressão Gráfica de Desenho Técnico**. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.

LEMMERTZ A. S. **Visualização espacial via exploração de objetos tridimensionais**. 2019. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Matemática). Programa de Pós-

Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

NOTARE M. R.; BASSO M. V. A. **Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial**. *Renote*, V. 14 N° 2, dezembro, 2016. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/70683>. Acesso em 26 jun. 2019

PRESMEG, N. C. **Visualization in high school mathematics**. *For the Learning of Mathematics* Vol. 6, No. 3, p. 42-46, nov. 1986. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40247826>. Acesso em 26 jun. 2019

SANTOS, J. J. A.; MOITA, F. M. G. S. C. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade**. 2016. Disponível em: [http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf). Acesso em 26 jun. 2019

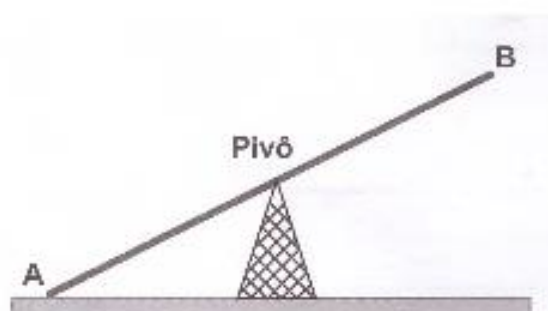
SONZA A. P.; LEIVAS J.C.P. **Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma Oficina Pedagógica**. Thema, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Sul-rio-grandense. Pelotas, RS, Brasil. 2018. Disponível em: <http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1122>. Acesso em 26 jun. 2019

## APÊNDICE A - Questões ENEM

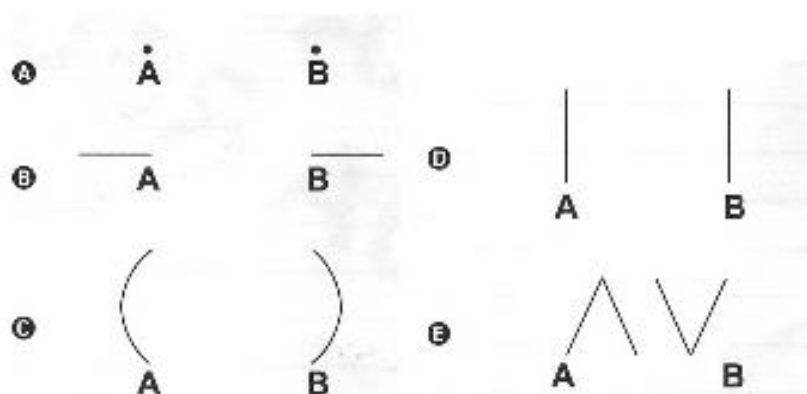
### ENEM 2013, Questão 180 - Prova Azul

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim o movimento de gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô.



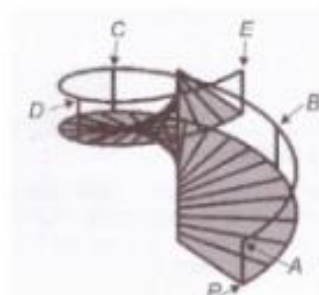
A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando este se encontra em movimento é:



Fonte: Disponível em <https://vestibular.brasilecola.uol.com.br/enem/questao-180---prova-azul---enem-2013.htm> acesso em 15/06/2019

### ENEM 2014, Questão 160 - Prova Azul

O acesso entre dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  sobre o corrimão estão igualmente espaçados e os pontos  $P$ ,  $A$  e  $E$  estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto  $A$  até o ponto  $D$ .



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

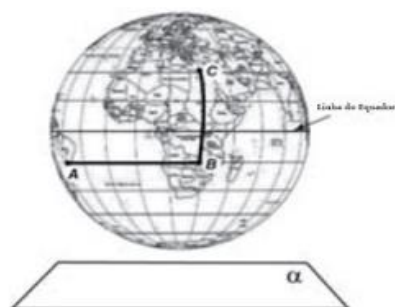


Fonte: Disponível em <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/enem-2014-correcao-da-questao-160/> acesso

em 15/06/2019

### ENEM 2016, Questão 178 - Prova Azul

A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano  $\alpha$  é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano  $\alpha$ , do caminho traçado no globo pode ser representada por

- A**
- B**
- C**
- D**
- E**

Fonte: Disponível em <https://10vendematematica.blogspot.com/2017/07/questao-178-enem-2016-caderno-7-azul.html> acesso em 15/06/2019

## APÊNDICE B - Descrição Detalhada das Atividades

### Objetivo geral das atividades:

- Investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no Ensino Médio.

### Objetivo específico:

- Compreender de que forma figuras geométricas são projetadas ortogonalmente em um plano, com o auxílio do Software de geometria dinâmica GeoGebra;
- Projetar ortogonalmente no plano figuras geométricas e/ou o movimento de pessoas/objetos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, conforme a Habilidade 6 da competência de área do ENEM.

**Relevância:** Esse projeto visa investigar como o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra<sup>1</sup> pode potencializar a compreensão sobre projeção ortogonal no ensino médio. O projeto consiste em uma oficina para os estudantes, na qual eles irão fazer uso deste *Software* para construir figuras dinâmicas, projetá-las e, por fim, resolver questões de projeção ortogonal.

<sup>1</sup> Disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt> acesso em 14 maio 2019

### Conceitos matemáticos na oficina:

- Conceitos Fundamentais de Geometria;
- Figuras e Sólidos Geométricos;
- Projeção Ortogonal.

### Público Alvo:

- Estudantes do Ensino Médio.

### Recursos a serem utilizados:

- Computadores com o software GeoGebra;

### Duração total das tarefas:

- 12 Períodos de 50 min. (10 horas)

Abaixo, no Quadro 4, encontra-se o planejamento das atividades previstas para cada encontro:

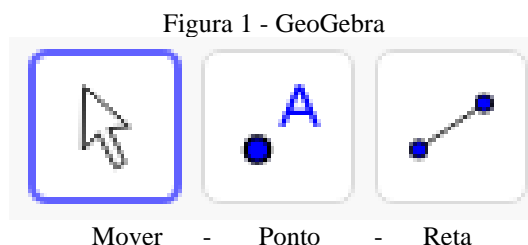


Quadro 4 – Planejamento das Atividades

Encontro	Períodos	Atividades	Objetivos
1	2	1 e 2	- Familiarização com o <i>software</i> ; - Construir polígonos, observando suas propriedades geométricas.
2	2	3 e 4 (início)	- Compreender o comportamento do Seno e o Cosseno no círculo Trigonométrico; - Construir um círculo no GeoGebra; - Utilizar o controle deslizante no GeoGebra.
3	2	4 (final) e 5	- Definir Projeção Ortogonal; - Familiarização com o conceito de projeção ortogonal.
4	2	6 e 7 (início)	- Construir um cilindro e uma pirâmide e analisar a projeção em planos diferentes;
5	2	7 (final) e 8	- Entender como a projeção ortogonal e conceitos matemáticos podem ser importantes em situações reais.
6	2	9 e 10	- Resolver, utilizando o software, uma questão do ENEM sobre projeção ortogonal.

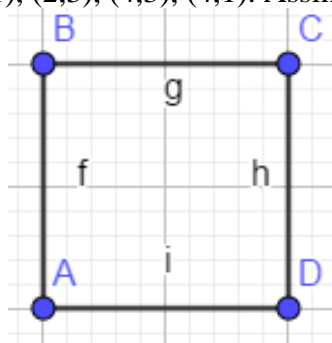
## Tarefa 1

- 1) Abra o programa GeoGebra. Nesta atividade iremos usar as ferramentas ponto e segmento de reta, que se encontram na Figura 1.



Mover - Ponto - Reta

- 2) No plano cartesiano marque os pontos indicados e ligue os que são seguintes. Exemplo: Marque os pontos (2,1), (2,3), (4,3), (4,1). Assim obtemos:



Qual foi a figura encontrada? Quadrado.

Agora é sua vez.

- a) (4,1), (6,2), (8,1), (7,3), (9,4), (7,4), (6,6), (5,4), (3,4), (5,3), (4,1).

Qual figura você obteve? \_\_\_\_\_ .

- b) (6,3), (7,2), (8,3), (7,4), (8,5), (8,6), (7,6), (6,5), (3,8), (2,8), (2,7), (5,4), (4,3), (4,2), (5,2), (6,3) # (5,4), (6,5) # (3,7), (5,5). Você não deve ligar pontos que estão com uma # entre eles!!!

Qual figura você obteve? \_\_\_\_\_ .

- c) (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,8), (5,8), (6,7), (7,6), (8,7), (9,8), (10,8), (11,7), (11,6), (11,5), (10,4), (9,3), (8,2), (7,1).

Qual figura você obteve? \_\_\_\_\_ .

- d) Agora é sua vez de criar. Crie uma figura com pelo menos 15 pontos e coloque abaixo quais foram os pontos usados e qual figura você formou.

Pontos Utilizados:

\_\_\_\_\_

Figura formada:

## Tarefa 2

1) Defina as figuras geométricas abaixo (pode procurar na internet):

a) Quadrado: quadrilátero que possui 4 lados e 4 ângulos congruentes.

b) Losango: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

c) Paralelogramo: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

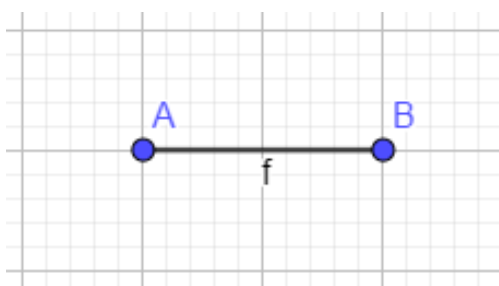
d) Triângulo Retângulo: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

e) Triângulo Isósceles: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

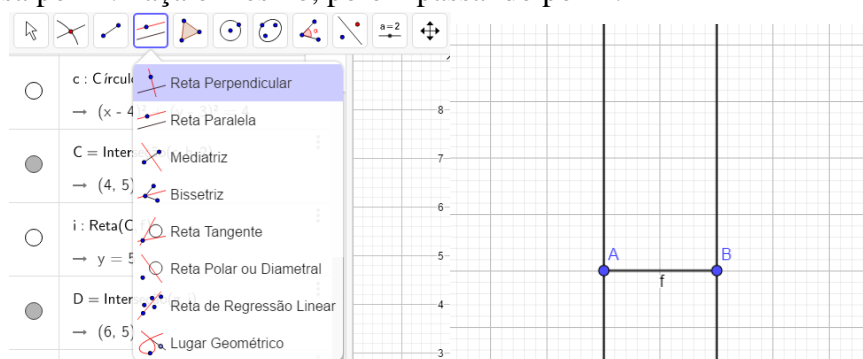
2) Chegou a hora de construir as figuras no GeoGebra. Construa as figuras de modo que ela mantenha as propriedades desejadas, mesmo movendo algum ponto. Indique o processo de construção em cada uma das figuras.

a) Quadrado: Siga os passos abaixo:

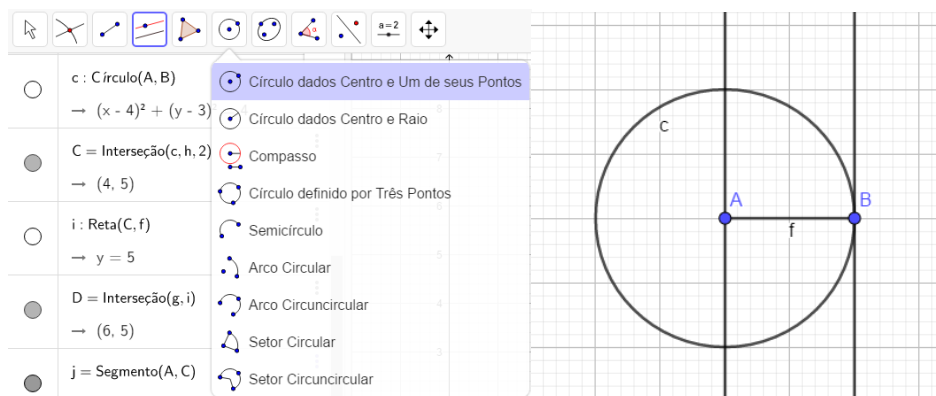
Como você fez na Tarefa 1, use as ferramentas ponto e segmento de reta, construa dois pontos quaisquer e ligue-os.



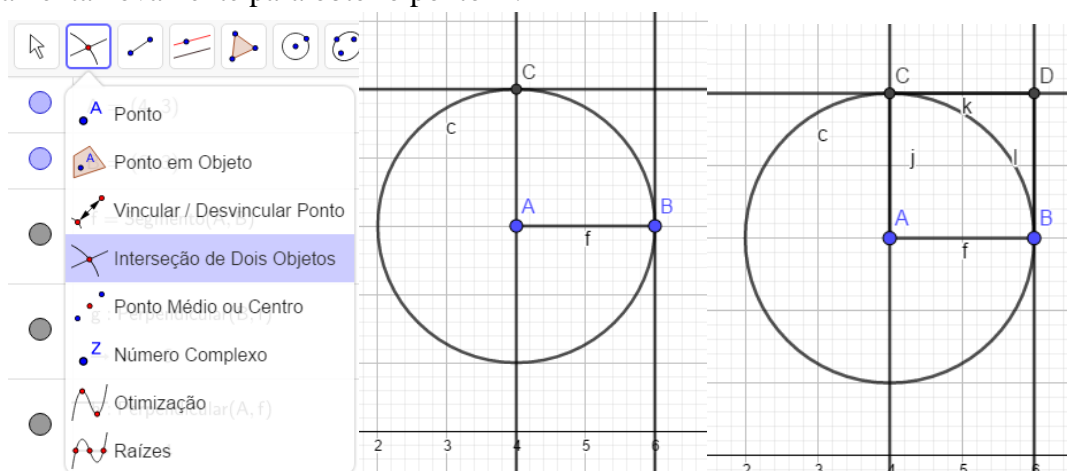
Utilize a ferramenta Reta Perpendicular para construir uma reta perpendicular ao segmento AB que passa por A. Faça o mesmo, porém passando por B.



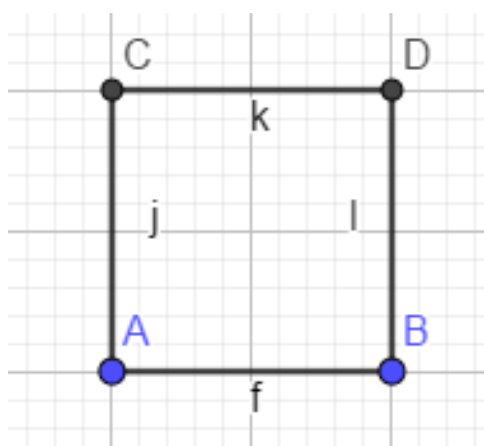
Utilize a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos para construir uma circunferência de centro em A com raio de tamanho igual ao segmento AB.



Utilize a ferramenta Interseção de Dois Objetos para construir o ponto C. E utilize a ferramenta novamente para obter o ponto D.



Clicando nas bolinhas na esquerda nós podemos esconder alguns objetos. Faça isso com todos que não sejam os pontos A, B, C e D. Então crie quatro segmentos de reta entre esses pontos de formar a se obter um quadrado.



Note que você não pode mexer nos pontos C e D. Eles estão fixos! Mova os pontos A e B a vontade, perceba que você sempre mantém as propriedades do quadrado. Discuta com seu colega o porquê disso estar acontecendo, discuta por que fizemos cada um dos passos acima. Depois chame o professor e explique para ele os resultados que vocês encontraram. Chegou o momento de você fazer isso para cada uma das outras figuras geométricas. Nesta Tarefa você deve somente descrever o que está fazendo (No exemplo do quadrado seria: 1°

construir dois pontos A e B e construir um segmento entre eles, 2º traçar duas retas perpendiculares ao segmento AB, umas passando por A a outra por B, 3º ...).

b) Losango: (SUGESTÃO: Nós estamos apenas enfraquecendo a propriedade do quadrado de ter todos os ângulos iguais e mantendo os lados iguais, abuse das circunferências para obter tamanhos iguais!)

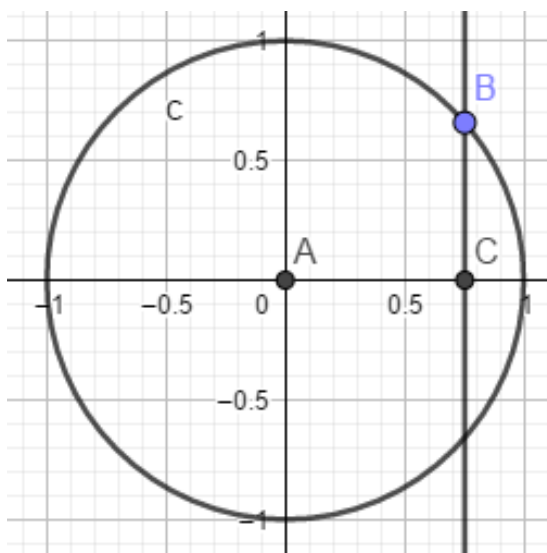
c) Paralelogramo: (SUGESTÃO: Os lados são todos paralelos. Não se preocupe com tamanhos, abuse da ferramenta Reta Paralela)

d) Triângulo Retângulo: (SUGESTÃO: O triângulo possui apenas três vértices, deixe dois deles livres e construa o terceiro de forma a obter o triângulo desejado)

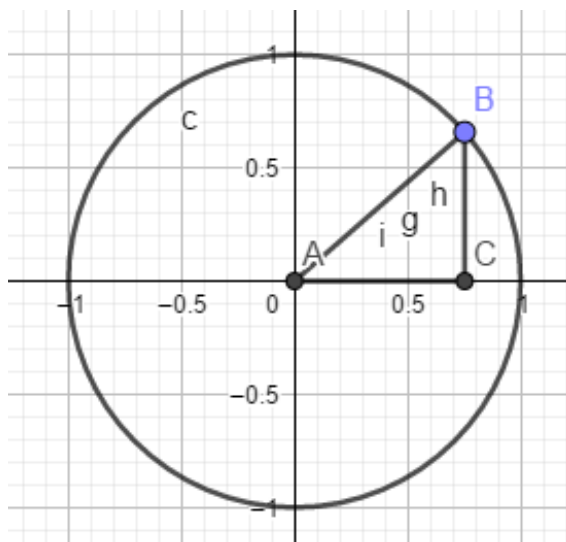
e) Triângulo Isósceles: (SUGESTÃO: Faça uma circunferência com centro em seus dois primeiros pontos com mesmo tamanho do segmento que passa por ambos)

### Tarefa 3

- 1) Vamos construir um Círculo Trigonométrico! No GeoGebra construa um círculo de centro em  $(0,0)$  e raio 1. Pronto! O Círculo Trigonométrico está pronto! Agora vamos brincar um pouco com ele. Siga os passos abaixo:
- a) Crie um ponto sobre a circunferência (basta usar a ferramenta ponto e clicar sobre ela). Construa uma reta perpendicular ao eixo  $x$  que passe por este ponto, marque a interseção da reta com o eixo  $x$ . Obtenha:

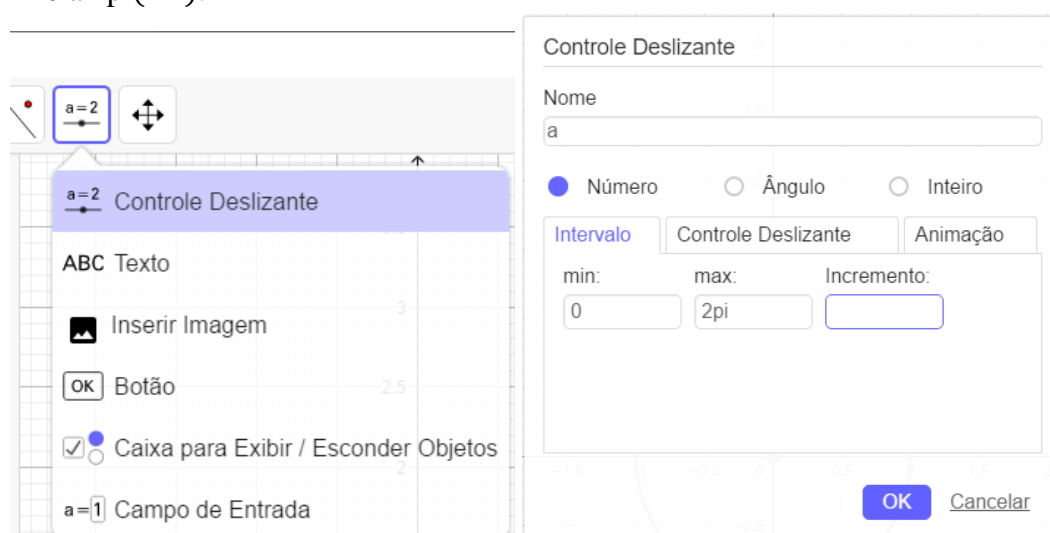


- b) Use a ferramenta segmento para formar um triângulo  $ABC$  e na sua esquerda, na bolinha cinza, apague a reta que passa por  $B$  e  $C$  (não é para deletá-la, somente ocultá-la). Obtenha:

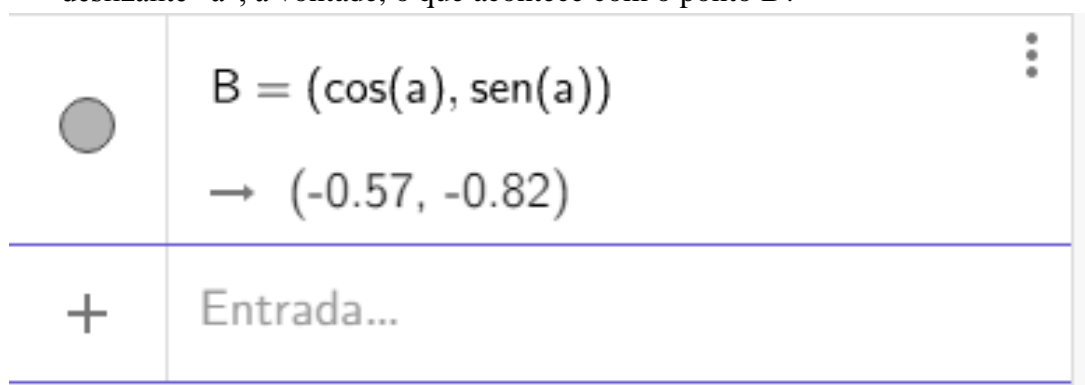


- c) Renomeie o segmento  $AC$  para  $\text{COS}$  e o  $BC$  para  $\text{SEN}$ . Note que o Triângulo  $ABC$  é um Triângulo Retângulo, onde estamos chamando seus catetos de  $\text{COS}$  (cosseno) e  $\text{SEN}$  (seno). Brinque com esse triângulo! Escreva abaixo toda e qualquer propriedade que você observar nele. (SUGESTÃO: Quanto vale o segmento  $AB$ ? Lembre-se que em um Triângulo Retângulo podemos usar o Teorema de Pitágoras; Ao mexer o ponto  $B$ , o que acontece com os catetos do Triângulo?)

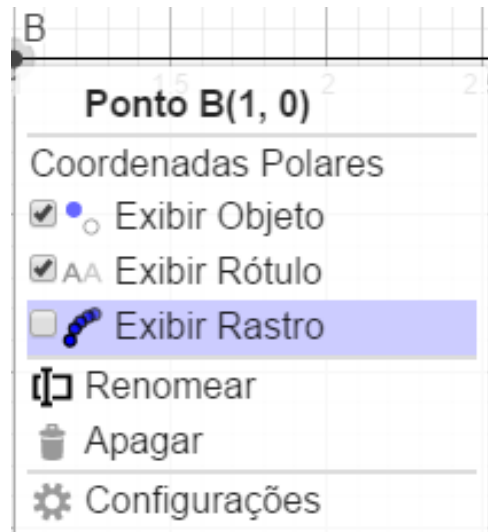
- d) Exclua o ponto B. Crie um controle deslizante “a”, clique em qualquer lugar do plano (menos em cima do Círculo Trigonométrico). Arrume seu intervalo para que seja de 0 a  $2\pi(2\pi)$ .



- e) Na opção “Entrada” a esquerda construa o ponto  $(\cos a, \sin a)$ . Note que isso é um par ordenado, ou seja, ele está localizado em algum lugar no plano  $xOy$ , mais especificamente EM CIMA DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO! Mexa o controle deslizante “a”, à vontade, o que acontece com o ponto B?



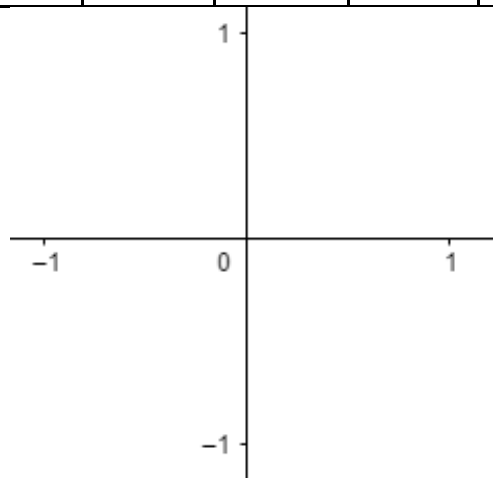
- f) Apague o ponto A, isso apagará todo o Círculo Trigonométrico! Coloque o controle deslizante no 0. Clique com o botão direito no ponto B e clique em Exibir Rastro.



- g) Mexa loucamente o controle deslizante “a”. Que desenho está aparecendo na tela? A medida que o valor de “a” varia, o que acontece com o ponto de coordenada (cos a, sen a)?

- h) Chegou a hora de calcular o cosseno e o seno de alguns alguns especiais. Apague tudo que fez até agora e construa, novamente, o Círculo Trigonométrico, com o mesmo triângulo do item b) construído nele. Em Entrada coloque  $b = 0$  e depois crie o ponto  $(\cos b, \sin b)$ . Preencha a tabela e o plano cartesiano (com os pontos encontrados abaixo). (SUGESTÃO: Podemos trocar o  $b = 0$ , para  $b = \pi$  ou qualquer valor)

	<b>0</b>	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
<b>Cosseno b</b>								
<b>Seno b</b>								





## Tarefa 4

(Tarefa realizada em disciplina Educação Matemática e Tecnologia na UFRGS)

1) Nesta atividade trabalharemos com trajetória de pontos comandados por relações algébricas (como aquela que fizemos na Tarefa 3). Acesse os dois arquivos nos links abaixo. Faça download das atividades e abra o GeoGebra e, nele, abra o arquivo baixado. Tente identificar algumas relações algébricas em cada uma das construções. (SUGESTÃO: Olhe para lugares isolados nas construções, por exemplo: qual relação foi usada no olho do Bob Esponja ou na janela da casinha?)

Link 1: <https://drive.google.com/open?id=1Py4lzi5EzwizwKviA8u8mTq8KGjcWQAN>

Link 2: [https://drive.google.com/open?id=10ah-nUHV-ACCr\\_-wuKRb-JBGEUCZHXqU](https://drive.google.com/open?id=10ah-nUHV-ACCr_-wuKRb-JBGEUCZHXqU)

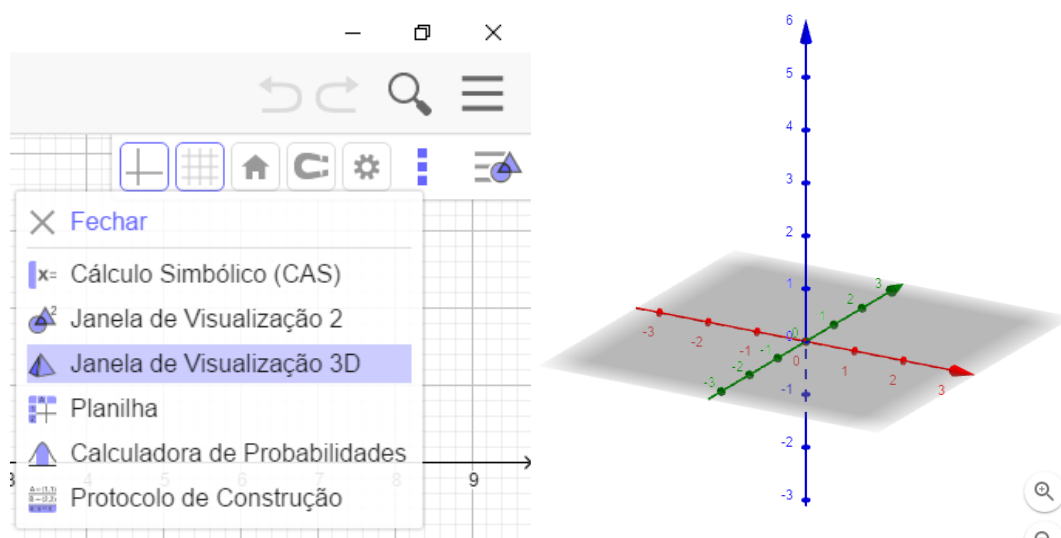
2) Agora é sua vez! Use a imaginação para criar no GeoGebra uma figura rica em elementos geométricos utilizando relações algébricas para comandar os pontos. Para tornar a tarefa mais desafiadora, você deve manter todos os pontos em sincronia e **comandados por um único controle deslizante**. Todos os pontos iniciam e terminam a imagem ao mesmo tempo!

ATENÇÃO: Ao terminar **salve o arquivo** com o nome da dupla (exemplo: nome1\_nome2) e, utilizando o Drive **compartilhe** com o e-mail [lucasmatt.parobe@gmail.com](mailto:lucasmatt.parobe@gmail.com). Caso queira pode **enviar o arquivo** por e-mail.

## Tarefa 5

Chegou a hora de irmos para o espaço! Nesta Tarefa introduziremos o GeoGebra 3D.

- 1) O primeiro passo é abrir a Janela de Visualização 3D, assim siga o comando da imagem abaixo.



- 2) Conheça essa interface! Vamos construir alguns sólidos para nos familiarizarmos com ela. Construa os seguintes sólidos (caso você não saiba qual é o sólido em questão, você deve pesquisar na internet):
  - a) Cubo;
  - b) Pirâmide REGULAR de base quadrangular;
  - c) Tetraedro;
  - d) Prisma regular de base triangular;

**DESAFIO:** Construa uma Pirâmide REGULAR de base hexagonal (SUGESTÃO: no plano, construa um hexágono inscrito em uma circunferência de raio 1, com centro no ponto (0,0))

## Tarefa 6

- 1) Abra o arquivo projpontos no link abaixo (faça download dele). Projete no plano  $xOy$  todos os oito pontos que estão no espaço.

<https://drive.google.com/open?id=1oFm-C6OCaHBPbckIc1olybEgskiZlue>

- 2) Discuta com sua dupla e com o professor, há algum tipo de padrão nessas projeções? O que está acontecendo com as coordenadas dos pontos?

- 3) Seja  $P = (x,y,z)$  qual a projeção de  $P$  no plano  $xOy$ ? \_\_\_\_\_.

- 4) Abra o arquivo proj2D no link abaixo (faça download dele) e note que há vários segmentos de retas ligando pontos no espaço. Projete esses segmentos no plano  $xOy$ .

<https://drive.google.com/open?id=1MMOS1NT3dvZZoqH3y-zzbn3nuc32Jvb>

Responda abaixo sobre essas projeções.

- a) Alguma dessas projeções lhe surpreendeu? \_\_\_\_\_.
- b) A projeção ortogonal de um segmento de reta no espaço é um segmento de reta no plano? \_\_\_\_\_.
- c) Supondo que a projeção de um objeto do espaço no plano  $xOy$  seja um quadrado. O que podemos dizer sobre esse objeto? \_\_\_\_\_.

Abra o link <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pro/pro-html/pro-br.html> e para cada sólido na primeira coluna da tabela cite PELO MENOS três projeções ortogonais dele em algum plano:

Sólido	Projeção 1	Projeção 2	Projeção 3
Cubo (Sólido Platônico)			
Octaedro (Sólido Platônico)			
Tetraedro (Sólido Platônico)			
Pirâmide regular de base triangular			
Pirâmide regular de base quadrangular			
Pirâmide regular de base hexagonal			
Prisma regular de base triangular			

Prisma regular de base hexagonal			
----------------------------------	--	--	--

Agora um exercício desafiador: No mesmo programa encontre PELO MENOS TRÊS sólidos tais que UMA de suas projeções seja o polígono abaixo. Escolha UMA dessas três projeções PARA CADA sólido, tire um print screen, faça um arquivo no paint com ela e envie/compartilhe para/com o professor pelo e-mail [lucasmatt.parobe@gmail.com](mailto:lucasmatt.parobe@gmail.com):

	Sólido 1	Sólido 2	Sólido 3
Triângulo			
Quadrilátero			
Retângulo			
Pentágono			
Hexágono			
Octógono			

## Tarefa 7

- 1) No GeoGebra 3D faça as seguintes três construções e compartilhe/envie com/para o professor para o e-mail [lucasmatt.parobe@gmail.com](mailto:lucasmatt.parobe@gmail.com).
  - a) Obtenha um quadrado como projeção ortogonal de um cubo no plano  $xOy$ ;
  - b) Obtenha um triângulo equilátero como projeção ortogonal de um tetraedro no plano  $xOy$ ;
  - c) Obtenha um quadrado como projeção ortogonal de uma pirâmide regular de base quadrangular no plano  $xOy$ ;
  
- 2) No GeoGebra 3D construa um cilindro de altura 2 e base com raio 1.
  - a) Construa um controle deslizante de  $a$ , onde  $1 \leq a \leq 10$ , construa um cilindro tal que seu raio varie de 1 até 10, com a altura fixa.
  - b) Com o mesmo controle deslizante, exclua o cilindro anterior e construa um novo. Este com a altura variando entre 1 e 10 e raio fixo.

**ATENÇÃO: NAS ATIVIDADES ABAIXO VOCÊ DEVE ENVIAR SUA CONSTRUÇÃO PARA O E-MAIL DO PROFESSOR!**

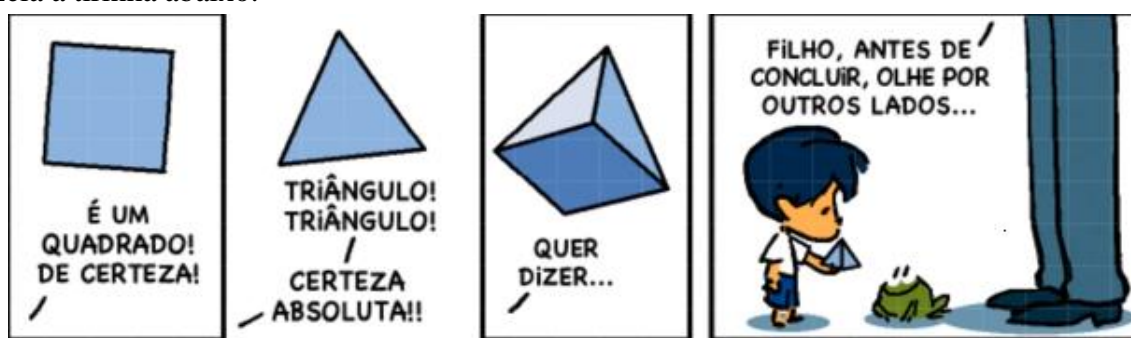
3) Abra o link abaixo e faça download do arquivo nele. Nele há um cilindro e dois planos. Projete ortogonalmente o cilindro em cada um do plano. Quais figuras geométricas foram obtidas?

<https://drive.google.com/open?id=1T-S-9uR9R1XEZaty06q08zLcvStgv-qI>

DESAFIO: Faça download e abra o arquivo no link abaixo. Obtenha TODAS as projeções ortogonais possíveis do cilindro ao mover o controle deslizante  $a$  no intervalo  $(0, 10)$ .

<https://drive.google.com/open?id=1uoVNGpNZlQr9U6v4FwsBWYGY6zNI0hdZ>

Leia a tirinha abaixo:



Qual a moral da história da tirinha?

---



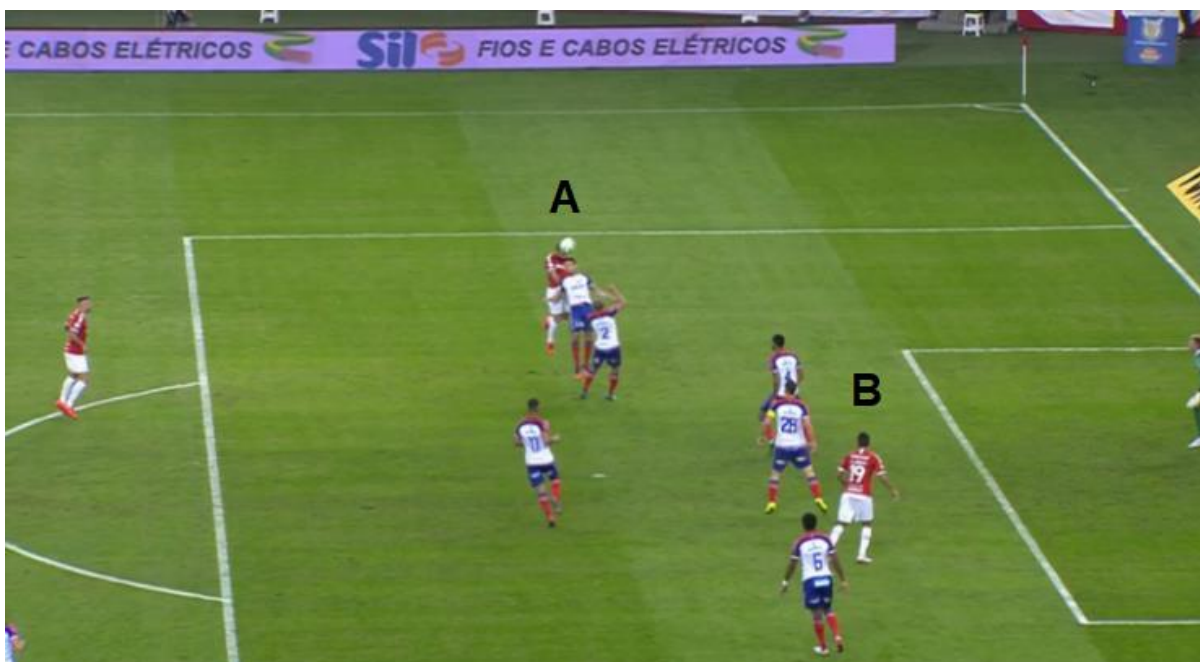
---

4) Nós já construímos a projeção ortogonal de uma pirâmide regular de base quadrada, quando esta projeção é um quadrado. Faça o mesmo agora, porém construa a projeção quando está é um triângulo equilátero.

DESAFIO: Faça download e abra o arquivo no link abaixo. Obtenha TODAS as projeções ortogonais possíveis para a pirâmide regular de base quadrada ao mover o controle deslizante  $\alpha$  no intervalo  $(0, \Pi)$ .

<https://drive.google.com/open?id=16EB9UbnDejBYDr1QwrDTZaCTKEi6ha16>

## Tarefa 8



Você concorda com a decisão final de validar o gol? Por que? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Por que você acha que esse lance foi polêmico? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Vamos abrir o seguinte link:

<https://www.cbf.com.br/cbf-tv/leonardo-gaciba-explica-como-o-var-identifica-o-lance-de-impedimento>

No GeoGebra abra o arquivo:

<https://drive.google.com/file/d/1c5QV21pjzqv51AVX-Wg9sR0acBqqB-u/view?usp=sharing>

Tente entender o processo de construção das linhas.

Onde que a projeção ortogonal é importante nessa situação? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ao final Gaciba fala “Mágica? Não, tecnologia a serviço da arbitragem”. E nós complementamos “Mágica? Não, matemática e tecnologia a serviço da arbitragem”.

## Tarefa 9

Resolva a questão do ENEM 2012 abaixo:

### QUESTÃO 153

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

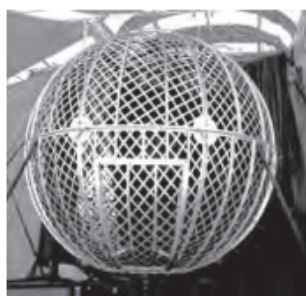


Figura 1

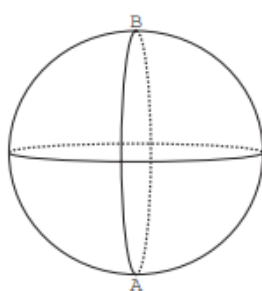
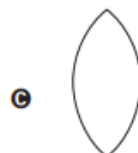
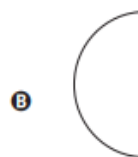
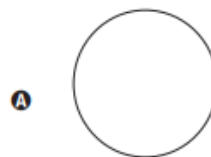


Figura 2

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por



Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Por que você marcou essa alternativa? \_\_\_\_\_

Faça a construção dessa situação no GeoGebra 3D. E conclua, a partir da construção a resposta correta. Envie a construção para o e-mail [lucasmattarobee@gmail.com](mailto:lucasmattarobee@gmail.com).

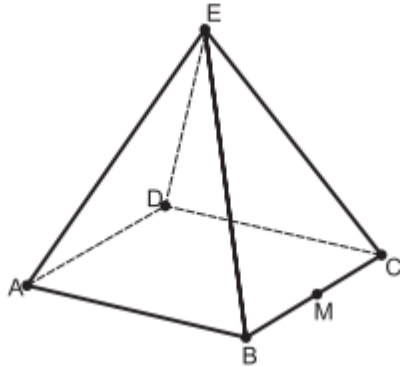


## Tarefa 10

Resolva a questão do ENEM 2012 abaixo:

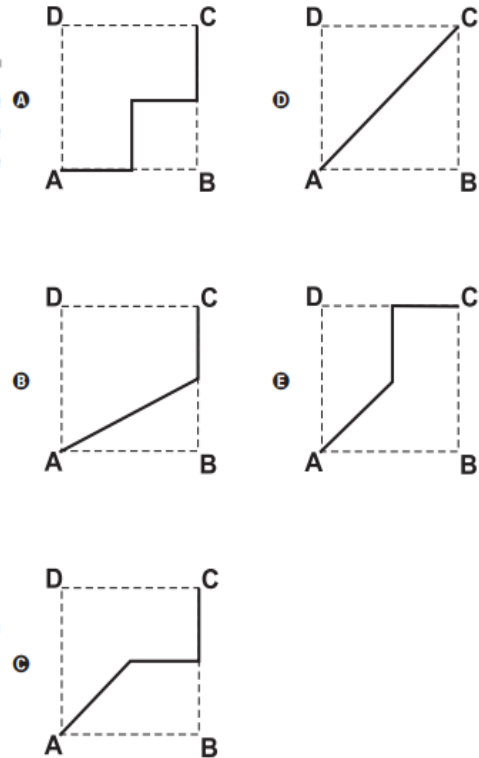
### QUESTÃO 165

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é



Por que você marcou essa alternativa? \_\_\_\_\_

Faça a construção dessa situação no GeoGebra 3D. E conclua, a partir da construção a resposta correta. Envie a construção para o e-mail [lucasmattarobee@gmail.com](mailto:lucasmattarobee@gmail.com).

**APÊNDICE C - Carta de Apresentação à Escola**  
**TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA**

A Escola Técnica Estadual Parobé, neste ato representado pela direção e por intermédio do presente instrumento, autoriza Lucas Siviero Sibemberg, brasileiro, estudante, CPF 864.980.370-91, a aplicar a proposta de ensino: “GeoGebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal” em uma oficina com alunos do Ensino Médio. A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino subsidiará o trabalho de conclusão de curso (TCC) de Lucas Siviero Sibemberg, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e é orientado pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Márcia Rodrigues Notare. O autorizado, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes e docentes da Escola que participarem da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019

The image shows a document with three handwritten signatures and their corresponding printed names, each followed by a horizontal line. The first signature is 'Lucas Siviero Sibemberg' with the printed name 'Lucas Siviero Sibemberg' below it. The second signature is 'Márcia R. Notare' with the printed name 'Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Márcia Rodrigues Notare' below it. The third signature is 'Débora D. Borges' with the printed name 'Débora D. Borges' below it. To the right of the third signature is a circular stamp containing the text: 'Vice - Diretora', 'IF 2925346/02 Gestão 2019/2020', and 'Escola Técnica Estadual Parobé'.

Lucas Siviero Sibemberg

Lucas Siviero Sibemberg

Márcia R. Notare

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Márcia Rodrigues Notare

Débora D. Borges

Vice - Diretora

IF 2925346/02 Gestão 2019/2020

Escola Técnica Estadual Parobé

Direção da Escola

## APÊNDICE D - Termo de Consentimento Informado

### TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, \_\_\_\_\_, RG \_\_\_\_\_, responsável pelo (a) aluno (a) \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo que concordei em que o (a) aluno (a) participe da pesquisa intitulada “GeoGebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal”, desenvolvida pelo pesquisador Lucas Siviero Sibemberg. Fui informado (a) ainda, que a pesquisa é orientada pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Márcia Rodrigues Notare a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 3308-6189 (Comissão de Graduação em Matemática Instituto de Matemática - UFRGS) e/ou e-mail marcia.notare@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo que, em linhas gerais, são:

#### **Objetivo Geral:**

- Investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no ensino médio.

#### **Objetivos específicos:**

- Compreender de que forma figuras geométricas são projetadas ortogonalmente em um plano, com o auxílio do Software de geometria dinâmica GeoGebra.
- Projetar ortogonalmente no plano figuras geométricas e/ou o movimento de pessoas/objetos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, conforme a Habilidade 6 da competência de área do ENEM.

E por fim, temos que a pergunta que irá conduzir a pesquisa é: **Como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no ensino médio?**

E por fim, temos que a pergunta que irá conduzir a pesquisa é: **Como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no ensino médio?**

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestrar, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de formulários escritos, bem como da participação em encontros, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção Nlisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou gravações de áudio e/ou vídeo obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc, sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, em caso de dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o pesquisador responsável no endereço UFRGS e/ou pelo telefone e/ou pelo e-mail [lucassib@terra.com.br](mailto:lucassib@terra.com.br).

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019

---

Assinatura do Responsável

---

Assinatura do Pesquisador

---

Assinatura da Orientadora da Pesquisa

**APÊNDICE E - Termo de Assentimento do Menor**  
**TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Você está sendo convidado (a) como voluntário (a) a participar da pesquisa “GeoGebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal”.

Nesta pesquisa pretendemos:

**Objetivo Geral:**

- Investigar como o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no ensino médio.

**Objetivos específicos:**

- Compreender de que forma figuras geométricas são projetadas ortogonalmente em um plano, com o auxílio do Software de geometria dinâmica GeoGebra.
- Projetar ortogonalmente no plano figuras geométricas e/ou o movimento de pessoas/objetos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, conforme a Habilidade 6 da competência de área do ENEM.

E por fim, temos que a pergunta que irá conduzir a pesquisa é: **Como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar o ensino de projeção ortogonal no ensino médio?**

Para participar desta pesquisa, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo e nem receberá nenhuma vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido (a). O pesquisador irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação.

Os resultados estarão à sua disposição quando a pesquisa for finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 (cinco) anos, e após este tempo serão

destruídos. Este termo de assentimento será impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pelo pesquisador responsável, em Rua João Alfredo, 478, Porto Alegre, e a outra será entregue a você. O pesquisador tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para fins acadêmico e científicos.

Eu, \_\_\_\_\_, portador (a) do documento de Identidade \_\_\_\_\_, fui informado (a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi o termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019

---

Assinatura do Voluntário

---

Assinatura do Pesquisador