UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OS JOGOS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

MATHEUS DA COSTA PEREIRA

Porto Alegre
2019

MATHEUS DA COSTA PEREIRA

OS JOGOS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre
2019

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática

OS JOGOS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

MATHEUS DA COSTA PEREIRA

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Leandra Anversa Fioreze
Faculdade de Educação - UFRGS

Prof.ª Helena Dória Lucas de Oliveira
Faculdade de Educação - UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à pessoa que foi meu alicerce ao longo de toda a minha jornada acadêmica. Mãe, se não fosse por ti não seria possível. Essa conquista também é tua**.**

AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo a pessoa que sempre esteve do meu lado em todas as situações, sejam elas boas ou ruins. És um exemplo de pessoa por sua bondade, simplicidade. Espero que consiga retribuir todo o carinho e zelo que me deste. Te amo mil milhões minha querida mãe.

E como não falar da pessoa que me acompanhou de perto vendo minha evolução ano após ano. Minha querida vó Fátima és como uma segunda mãe. E meu vô, meu parceirão, que contribuiu imensamente na construção dos jogos deste trabalho.

Ao meu pai, que mesmo estando a distância nunca deixou de me estender a mão. Agradeço pelas conversas e auxílios que me deste nesta caminhada. Meu muito obrigado por tudo.

A minha vó Maria Beatriz que sempre esteve na torcida por mim, agradeço imensamente pelo carinho que tens por mim.

A todos meus familiares, que estiveram comigo nesta jornada. Em especial, ao meu dindo Marcio e tio Marcelo por estarem comigo desde meus primeiros passos e nos jogos do tricolor.

Caroline e Talessa, dois exemplos de mulheres. Vocês foram fundamentais na minha trajetória, sejam nos momentos de descontração, ou em realização de trabalhos e estudos para provas. Só tenho a agradecer por ter conhecido vocês. Amo vocês!

Aos queridos amigos Maurício, Yuri, Juliana, Paloma que conheci e levarei comigo para o resto da vida, agradeço pelo companheirismo e ajudas prestadas. Vocês ajudaram a tornar esta jornada mais leve.

Ao grupo de pesquisa MathemaTIC por ter contribuído imensamente com sugestões para este trabalho.

A querida professora e vizinha Marina devo muito a ti nesta minha trajetória. Se hoje me dedico a estudar matemática devo agradecer a ti por ter me colocado nesse caminho.

Às professoras Leandra, Virgínia e Mariângela, pelas orientações e apoio, fazendo com que me tornasse um sujeito melhor. Meu muito obrigado por tudo.

A professora Helena por aceitar o convite para compor a banca.

Não poderia deixar de agradecer ao professor Vilmar por contribuir imensamente com sua grande sabedoria e ter aceitado o convite de ser banca deste trabalho.

Se hoje estou me formando devo muito aos docentes da escola Caetano Gonçalves da Silva. Em especial às professoras Nílvia e Cláudia que fizeram parte da minha formação.

Gostaria de agradecer também aos profissionais da escola Dolores Alcaraz Caldas na qual realizei um dos meus estágios e me receberam de braços abertos. Em especial às professoras Cátia e Gisele.

Aos meus alunos das turmas 9A e 9B, 7A e 7B por terem participado do meu processo de docência fazendo com que aprendesse muito com cada um de vocês.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar as contribuições dos jogos no ensino de Análise Combinatória. Para tanto, assumiu como pergunta diretriz: **Quais as potencialidades dos jogos no ensino de Combinatória?** Para a realização desta pesquisa foram feitas oficinas de jogos com estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual situada no município de Porto Alegre. Como suporte teórico são utilizados os estudos sobre a Investigação Matemática, uma vez que tal tendência pode proporcionar a elaboração de conjecturas, formulação de hipóteses e desta forma proporcionar uma maior autonomia ao discente. Como consequência desse trabalho, conclui-se que a utilização dos jogos em sala de aula proporcionaram noções do pensamento combinatório nos estudantes e possibilitaram um ambiente rico de discussões dando a oportunidade de aprenderem com os colegas.

Palavras-chave: Jogos. Materiais Manipuláveis. Análise Combinatória. Investigação Matemática.

ABSTRACT

This paper aims to study the contributions of games in the teaching of Combinatorial Analysis. To this end, it took as a guiding question: What are the potentialities of games in the teaching of Combinatorics? For this research were made games workshops with students of the 9th grade of elementary school of a state school located in the city of Porto Alegre. As a theoretical support I use the studies on Mathematical Research, since such tendency can provide the student with the elaboration of conjectures, formulation of hypotheses and thus provide greater autonomy to the student. As a consequence of this work, it is concluded that the use of classroom games provided notions of combinatorial thinking in students and enabled a rich discussion environment giving the opportunity to learn from peers.

Keywords : Games. Manipulable Materials. Combinatorial analysis. Mathematical Investigation.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como primeira motivação meu interesse pelos jogos, sejam eles de tabuleiro ou virtuais e a partir de minha inserção no grupo de pesquisa vinculado ao Projeto[1]"O processo de construção dos conceitos de matemática com a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação", coordenado pela professora Dr.ª Leandra Anversa Fioreze possibilitou um vasto contato com jogos que possuem potencialidades para serem trabalhados em sala de aula.

Surgem também como inspiração para a elaboração deste trabalho minhas experiências com o conteúdo de análise combinatória. Ao longo do meu percurso pela Educação Básica tive pouco contato com os fundamentos de combinatória, pois seu ensino se deu a partir da memorização de fórmulas, ocasionando algumas lacunas durante a minha trajetória escolar. Percebi, a partir, desta experiência, que não foi desenvolvida a habilidade de resolver problemas, e enquanto alunos, éramos condicionados a responder alguns problemas-padrão dos conteúdos propostos, ou seja, apenas reproduzíamos aquilo que o professor transmitia. Nessa perspectiva, existe a necessidade de que seja buscada uma metodologia que valorize os conhecimentos dos discentes, de maneira a construir com eles os conceitos combinatórios.

Os jogos, sejam eles de tabuleiros ou até mesmo virtuais, surgem como uma possível alternativa na busca por um trabalho que desafie os estudantes, fazendo com que eles possam sair do senso-comum. Acerca deste aspecto os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997a, p.36) destacam que "[...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar a potencialidade educativa dos diferentes jogos".

No ensino de combinatória não se deve desprezar os jogos como uma possibilidade para a aprendizagem, uma vez que possibilitam aos estudantes pensarem estratégias e alternativas fugindo da mecanização das fórmulas. A fim de proporcionar um aprendizado que oportunize uma maior autonomia aos estudantes, este trabalho consiste em uma sequência de jogos a fim de proporcionar aos educandos aprender matemática de forma lúdica.

---

1 O Projeto tem como objetivo principal oportunizar acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática, mestrandos em Educação Matemática e/ou professores que atuam nas escolas a participação em projetos de ensino e aprendizagem em matemática que contemplem a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação, refletindo e investigando o processo de construção do conhecimento matemático e a própria prática do professor.

Como os conteúdos de análise Combinatória têm como principal foco o estudo de técnicas de contagem, as atividades lúdicas podem possibilitar graus elevados de abstração que são exigidos para este ramo. Evidentemente, a contagem nos problemas combinatórios vai além de uma mera enumeração de objetos expostos, o que desde os primeiros anos da educação infantil é possível fazer. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) conforme citado por Borba, Rocha e Azevedo (2015, p.1351) colocam que há cinco principais tipos de problemas combinatórios:

> a) Existência – observação da possibilidade, ou não, de solução diante dos elementos dados e condições determinadas; b) Enumeração – listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas; c) Contagem – determinação do número total de soluções, sem necessariamente listar todas; d) Classificação – sistematização dos casos segundo critérios apropriados; e) Otimização – busca da melhor condição para a obtenção de determinadas soluções para um problema.

Desta forma, considero que os estudantes da Educação Básica necessitam que todos estes tipos de problemas sejam explorados, pois assim estaremos possibilitando que eles possam atingir os objetivos propostos deste ramo da matemática. Ao limitarmos os tipos de problemas combinatórios tratados negligencia-se as chances de exploração e autonomia dos estudantes condicionando-os a responderem apenas certos tipos de exercícios.

Dado estes fatos que foram elencados acima, este trabalho pretende analisar se a utilização de jogos no ensino combinatório contribui no processo de aprendizagem dos estudantes. Com o intuito de verificar a contribuição dos jogos na aprendizagem de combinatória será realizado uma oficina de jogos com a finalidade de que os estudantes por meio das atividades investiguem alguns conceitos de análise combinatória. Sendo assim, a pergunta que norteará esta pesquisa é: **Quais as potencialidades dos jogos no desenvolvimento do raciocínio combinatório?**

Este trabalho está estruturado em cinco seções organizados da seguinte maneira:
Na segunda seção abordamos o uso de jogos na aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como suas vantagens e desvantagens. Além disso, destacam-se os estudos sobre *Investigação Matemática*, o que caracteriza uma aula investigativa e o papel do docente ao longo do processo investigativo. Na seção seguinte discorremos sobre a combinatória, onde abordamos a importância de se trabalhar o raciocínio combinatório, bem como realizamos uma análise da BNCC e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para este tópico.

A seção 4 apresenta a metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho. Na seção 5 apresenta-se os dados obtidos com a pesquisa, bem como uma análise das atividades realizadas com os discentes. Por fim são trazidas algumas reflexões obtidas ao longo da pesquisa tecidas nas considerações finais.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção trazemos um estudo sobre os jogos, destacando suas vantagens e desvantagens quanto ao uso em sala de aula. Na sequência, abordamos a Investigação Matemática valorizando suas contribuições ao trabalho docente.

2.1 Jogos

No intuito de tornar o discente agente ativo do processo de aprendizagem os profissionais educacionais "[...] concebem os jogos como estratégias pedagógicas favoráveis, inclusive para conceitos matemáticos". (MARQUES; PERIN; SANTOS, 2013, p.63). Incorporar os jogos na aula de matemática pode ser utilizado como uma forma de entretenimento e de socialização podendo possibilitar o desenvolvimento de habilidades diversas incluindo a aprendizagem de conceitos matemáticos. Por serem desafiadores e conduzirem os discentes a constantemente pensarem em melhores alternativas para vencer uma partida, os jogos se tornam um bom ambiente para a investigação.

Para que uma determinada atividade seja considerada como um jogo matemático é imprescindível : "1) Que seja acessível ao maior número de pessoas; 2) Que seu enunciado intrigue, surpreenda, coloque um desafio àquele que o lê; 3) Que a resolução do problema possa divertir, distrair, surpreender aquele que se dispõe a compreendê-lo".(CRITON, 1997, apud MUNIZ,2010, p. 23). Nesta perspectiva, observa-se a questão do desafio como um dos fatores predominantes para determinada atividade ser considerada como um jogo. O estudante ao ser desafiado pode oportunizar o desenvolvimento de sua capacidade de argumentação e o raciocínio matemático. De acordo com Muniz (2010, p.45) o ato de jogar potencializa "[...] o processo de criação ou de resolução de problemas que as lançam a colocar em cena suas capacidades cognitivas, sejam conhecimentos já adquiridos, sejam suas capacidades de criar e de gerenciar novas estratégias do pensamento".

Criar novas estratégias de pensamento não é uma tarefa simples, exige o desenvolvimento de uma certa autonomia do sujeito. Entretanto, ao inserir um desafio matemático por meio de um jogo pode suavizar o efeito de ser "difícil" sobre o discente, uma vez que ganha um caráter lúdico. Além disso, utilizar os jogos nas aulas de Matemática, podem contribuir na aproximação dos estudantes com a disciplina proporcionando um aprender pensando, refletindo e investigando. Na medida que os discentes interagem com seus colegas e naturalmente expõem seus pensamentos e dúvidas, abre-se a possibilidade para o professor de propor questionamentos e realizar intervenções oportunizando assim, um aprendizado baseado no exercício do pensar.

Ao propor atividades com jogos para os alunos, é bem comum que haja uma euforia por parte da turma, afinal estão acostumados a dedicar boa parte do seu tempo à estas atividades. Porém, conforme Grando (2000, p.26) “[...] alguns docentes acreditam que, pelo fato de o aluno já se sentir estimulado somente pela proposta de uma atividade com jogos e estar durante todo o jogo, envolvido na ação, participando, jogando, isto garante a aprendizagem”. É de extrema importância que o jogo abra espaço para que os alunos percebam a matemática presente e que ali façam investigações e reflexões. Para além disso, os jogos podem possibilitar a socialização e interação entre os alunos promovendo o diálogo. De acordo com Grando (2000, p.29) “[...] a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e se justificando. Ao se justificar, argumenta e reflete sobre os seus próprios procedimentos em um processo de abstração reflexiva.”

Conforme Silva (2017, p.92):

> [...] Com os jogos presentes nas aulas de Matemática, geralmente o professor pode partir das necessidades dos alunos em relação a um conteúdo desenvolvido a partir de um tema a ser problematizado nas dificuldades cotidianas, nas situações de vida, valorizando o contexto em que o aluno está inserido, proporcionando condições para que ele se torne crítico-participativo na superação das suas dificuldades.

Partindo da perspectiva de Silva (2017), a matemática passa a ter um papel mais “vivo” para o estudante, de modo que o discentes percebam sua importância na realidade. Nem sempre os jogos proporcionam este ambiente, muitas vezes se baseiam em um caráter mais lúdico. Entretanto, vale ressaltar a importância que possuem para o aprendizado.

Os conteúdos previstos para a disciplina ao serem trabalhados por meio dos jogos podem mostrar o caráter lúdico e prazeroso da matemática. Conforme Lara (2003, p.22):

> [...] o jogo passa a ser visto como um agente cognitivo que auxilia o aluno a agir livremente sobre suas ações e decisões fazendo com que ele desenvolva além do conhecimento matemático também desenvolva a linguagem, pois em muitos momentos será instigado a posicionar-se criticamente frente a algumas situações.

Neste sentido, o trabalho com jogos pode modificar a impressão que muitos dos alunos tem sobre o quão enfadonho é essa disciplina que se faz cálculos e mais cálculos e ninguém sabe para que está sendo feito.

Muito das dificuldades encontradas pelos discentes em matemática se deve a sua falta de contextualização em situações do mundo real. Segundo D'Ambrósio (2002, p.76):

> [...] contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa com o florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV ? E não se pode entender Newton descontextualizado.

Não contextualizar a matemática significa contar apenas uma parte da história e desprezar todo o resto. E quando se trabalha com jogos não é diferente. É necessário que haja um contexto para o jogo, onde a matemática venha à tona a partir do ato de jogar. Portanto, torna-se inevitável que seja realizado um estudo pelo docente antes da aplicação do jogo, avaliando se existe um contexto que potencialize as relações matemáticas de maneira a atingir os objetivos propostos. Esse estudo é uma busca por procurar meios que façam o docente questionar sobre qual a utilidade do jogo, como utilizá-lo e quais situações que podem provocar os discentes de modo que ultrapassem "a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar pela diversão apenas" (BORIN, 2004, p. 10).

Na percepção da criança, a matemática é associada ao trabalho, o que por sua vez não combina com as brincadeiras que são realizadas nos jogos. O diálogo trazido por Muniz (2010, p.9) refere-se a questionamentos de um grupo de meninas que estavam a jogar POG[2]:

> Pesquisador: Podemos jogar POG na sala de aula?
> Carolina: Não, somente no recreio!
> Pesquisador: Para que serve o recreio?
> Carolina: Para brincar.
> Pesquisador: E a aula, serve à que?
> Carolina: Para trabalhar
> Pesquisador: Quando brincamos, podemos aprender alguma coisa?
> Carolina: Sim
> Pesquisador: O que?
> Carolina: A pintar, a desenhar, a ler ou a escrever, se houver letras e palavras no jogo!
> Pesquisador: E Matemática? Podemos aprender matemática quando brincamos?
> Carolina: Eu acho que não.
> Pesquisador: O que devemos fazer para aprender Matemática?
> Carolina: Trabalhar, nós devemos trabalhar!
> Pesquisador: E brincando, isso é possível?
> Carolina: Ah, não!

[2] O POG é um jogo comum entre as crianças na França, que no Brasil corresponde ao jogo Tazzo, que é desenvolvido por meio de fichas redondas de plástico, cada uma com um valor. Ganha a peça aquele que conseguir desvirá-la (como jogo de figurinhas antigamente).

A presença de um valor para cada ficha deste jogo é um elemento que pode servir para aprendizagem de conceitos básicos em matemática, embora não haja o reconhecimento por parte da aluna desta relação entre o jogo e a matemática. De acordo com Muniz (2010, p.11):

> O termo "Matemática" reenvia o sujeito necessariamente em direção ao trabalho escolar. O sujeito não chega a conceber a hipótese da presença de uma atividade matemática no jogo que está praticando, atividade possivelmente ligada aos conteúdos matemáticos tratados dentro da sala de aula de Matemática.

Neste sentido, é importante que o professor ressalte os aspectos matemáticos presente no jogo de modo que o discente possa estabelecer e testar conjecturas pondo os conceitos matemáticos em ação. Muitas vezes, o aspecto diversão passa por cima dos objetivos propostos da atividade com jogos. Sendo assim, é imprescindível que se tenha bem claro o que pretende-se alcançar com a utilização dos jogos em sala de aula.

Em sua tese de doutorado, Grando (2000) estabeleceu um quadro com as vantagens e desvantagens de se trabalhar com jogos em sala de aula. O Quadro 1 é fruto de uma sintetização da autora a partir de ideias trazidas por Kishimoto (1996), Machado (1990), Corbalán (1996), Giménez (1993).

Quadro 1 – Vantagens e desvantagens

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- **fixação de conceitos** já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - **introdução e desenvolvimento de conceitos de** difícil compreensão; - desenvolvimento de **estratégias de resolução de problemas** (desafio dos jogos); - aprender a **tomar decisões** e saber **avaliá-las**; - **significação** para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (**interdisciplinaridade**); - o jogo requer a **participação ativa do aluno** na **construção** do seu próprio **conhecimento**; - o jogo favorece a **socialização** entre os alunos e a conscientização do **trabalho em equipe**; - a utilização dos jogos é um fator de **motivação** para os alunos; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da **criatividade**, de **senso crítico**, da **participação**, da **competição** "sadia", da **observação**, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do **prazer em aprender**; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.	- quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um **caráter puramente aleatório**, tornando-se um **"apêndice" em sala de aula**. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, **sem saber porque jogam**; - o **tempo gasto** com as atividades de jogo em sala de aula **é maior** e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as **falsas concepções** de que se devem **ensinar todos os conceitos através de jogos**. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - **a perda da "ludicidade" do jogo** pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - **a coerção do professor**, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, **destruindo a voluntariedade** pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Fonte: Grando (2000)

A autora elenca várias vantagens de se fazer valer do potencial que os jogos têm na aprendizagem matemática. Dentre essas, destaca-se a participação ativa que requerem dos estudantes para a construção do conhecimento. O ato de aprender envolve dedicação e participação, quanto mais lança-se atividades nas quais oportunizam os discentes a pensar e discutir com os colegas maior será a chance de alcançar os objetivos propostos.

Porém, nem todo caminho é repleto de flores, há alguns espinhos ao longo dessa trajetória. Existe o risco de o jogo perder o seu caráter de jogo devido as sucessivas intervenções do docente. É importante que o jogo acabe se tornando um cenário para investigação, que segundo Skovsmose (2000, p.6) "é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações." Entretanto, não se pode obrigar o estudante a jogar caso não esteja interessado. De acordo com Skovsmose (2000, p.6) " O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos." Cabe ao docente destacar ao aluno que o jogo é também uma atividade de aula que poderá contribuir imensamente na sua formação.

Entre as vantagens e desvantagens trazidas anteriormente, os jogos nas aulas de matemática podem contribuir para a aprendizagem dos discentes, pois possibilitam desenvolver diversas habilidades, tais como a concentração, a motricidade, a convivência, a socialização e o raciocínio lógico. Para além disso, os jogos com um planejamento adequado, podem ajudar a trazer para o espaço escolar o espírito da descoberta, que segundo Muniz (2006, p.23) " O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professores. " Características que são essenciais na *Investigação Matemática*.

2.2 Investigação Matemática

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 13) investigar em Matemática é "[...] procurar o que não se sabe". Tal metodologia possibilita aos estudantes produzirem matemática como se fossem cientistas, aprendendo com seus erros e acertos potencializando o discente a tomar decisões acerca do caminho a seguir em suas investigações e por vezes fazendo matemática de forma criativa, inovadora, na busca de construir seu conhecimento matemático de maneira investigativa. Com relação a estes aspectos elencados, Braumann (2002, p.5) afirma que:

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Entretanto, as ideias abordadas nesta proximidade entre o estudante com o cientista matemático não estão necessariamente concentradas no conhecimento produzido pelo aluno, e sim nas suas tentativas em construir o conhecimento (LAMONATO, 2007). Ou seja, a Investigação Matemática não se concentra apenas em encontrar uma resposta correta e sim nos procedimentos adotados pelos estudantes, como por exemplo, na elaboração de conjecturas, formulação de hipóteses e desta forma convencendo-se dos fatos que tradicionalmente eram lhe ditos sem sua investigação.

Para que haja um aprendizado de conceitos de matemática há necessidade de variar as formas de se ensinar, uma vez que cada discente é singular em sua forma de aprendizagem. Na disciplina de Matemática existe uma visão dualista “onde tudo está certo ou errado” (BORASI, 1990, apud SEGURADO; PONTE, 1998, p. 26). Entretanto, há um percurso a ser percorrido que deve ser valorizado. Num estudo realizado por Frank (1998, apud SEGURADO; PONTE, 1998) são apontados cinco concepções dos alunos de 6º a 8º ano do ensino fundamental, sobre a Matemática e sua aprendizagem:

> (I) A matemática é cálculo; (II) Os problemas de Matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos segundos; (III) Em Matemática, o objetivo é obter “respostas certas”; (IV) O papel do aluno é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriu e (V) O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar o que os alunos adquiriram.

Em (I) notamos a grande e excessiva preocupação que é dado na disciplina para os cálculos numéricos e à aplicação de fórmulas. O que poderá se tornar um empecilho para os discentes se desejamos, por exemplo, que resolvam uma dada tarefa na qual não dispõem previamente de um algoritmo. Já em (II) pode-se observar a visão que os alunos possuem acerca dos problemas de matemática: o professor faz alguns exemplos e os problemas a serem resolvidos cobrará algumas dessas estratégias. Desta forma, procuram resolver um exercício aplicando-lhe um destes métodos aprendidos com problemas nos quais não são necessários muitos minutos, visto que é só repetir a resolução do professor. Em (III) observa-se a máxima de que o importante é chegar na resposta correta, desprezando-se toda a construção oriunda das atividades. Em (IV) e (V) percebe-se uma clara percepção de que o importante é passar em uma prova, em detrimento do pensar sobre os porquês da matemática.

Evidentemente que nem toda aprendizagem matemática se faz por meio de investigações, mas de tais atividades podem emergir aspectos bastantes interessantes no que tange a capacidade do sujeito de pensar matematicamente. As habilidades de argumentação e de provar são um dos grandes objetivos educacionais do ensino da matemática. Acerca destes aspectos os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997, p.37) destacam a importância de "[...] comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas".

E esses objetivos que são previstos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais podem ser abarcados em atividades de investigação uma vez que são caracterizadas por situações ou mecanismos nos quais os alunos tentam compreender, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças de forma a conseguir chegar a generalizações. Segundo Lucas (2017, p.26):

> [...] a Investigação Matemática ressalta a importância do professor pesquisar/estudar/se envolver na construção ou na elaboração de propostas em que o aluno seja envolvido em seu processo de construção de conhecimento, não estando focado a sua aprendizagem na memorização e/ou repetição de tarefas, bem como na resposta certa ou errada.

Neste tipo de abordagem o discente é o principal protagonista de sua aprendizagem, podendo-lhe proporcionar uma maior autonomia, dando a oportunidade de se formular hipóteses, testando-as e assim produzindo matemática. Em atividades investigativas, os discentes são convidados a serem protagonistas, não apenas realizando questões e conjecturas, mas também na discussão de ideias com os colegas e professor.

Desta maneira, os jogos surgem como uma possibilidade para uma metodologia investigativa, uma vez que no jogo não existe uma única estratégia a ser seguida, dando liberdade de exploração aos discentes.

2.1.1 A aula investigativa

Ao propor um exercício para um estudante, o professor já sabe o que esperar como resposta, tratando-se assim de uma *tarefa fechada*, que segundo Ponte (2005, p.7) "é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido". Quando se trata de uma atividade investigativa, os rumos a ser seguido pelos alunos podem ser completamente diferentes. Ponte, Brocado e Oliveira (2006, p.25) afirmam que " [...] a variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação.” Observa-se que as atividades de caráter investigativo podem ser consideradas como *tarefas abertas*, nas quais não existe um caminho único a ser trilhado. Transitar por estas tarefas podem proporcionar um ambiente interessante, uma vez que desempenham objetivos distintos. Segundo Ponte (2005, p.17):

> As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança. As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática. As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc.

O foco deste trabalho está nas atividades investigativas, porém não se abandona os outros tipos de problema. Cada tarefa destina-se a um propósito, no qual o grande objetivo a ser alcançado é propor atividades, que em conjunto, contribuam para "um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo” (Ponte, 2005, p.18).

As aulas investigativas proporcionam um ambiente de formulação de hipóteses, conjecturas e de troca de ideias que possibilita aos discentes um aprendizado que fuja das ‘decorebas’. Mas afinal, quais etapas deve-se percorrer em aulas deste tipo ? Qual o papel do professor ?

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2006, p.25) as atividades investigativas desenvolvem-se em três etapas: *(I) Introdução da tarefa*, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; *(II) Realização da investigação*, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma; *(III) Discussão dos resultados*, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. As etapas podem ser realizadas de diversas maneiras. Aborda-se aqui, a maneira na qual a prática será conduzida: uma breve apresentação do jogo, seguida da realização da investigação, aos pares ou em grupos e, a discussão dos resultados com a turma.

A primeira etapa é fundamental para que a atividade investigativa atinja os propósitos pretendidos pelo professor. É importante que se tenha bem claro, o que significa investigar e o que pretende-se investigar. Aqui o estudante está diante de uma situação na qual não se espera uma resposta exata, mas se propõe, que o próprio aluno realize conjecturas a partir das situações que lhe foram apresentadas. Na fase inicial, as ideias dos alunos devem ser destacadas e trazidas para discussão com os colegas, proporcionando assim, o desenvolvimento da argumentação. Cabe ao professor propor atividades, escolhendo questões ou situações iniciais que, constituam um desafio para os alunos. Entretanto, tarefas que possuem um grau de complexidade exacerbado pode fazer com que os discentes desistam de tentar realizá-la.

Dado a diversidade de alunos com interesses, culturas e conhecimentos diversificados, as tarefas abertas aumentam a possibilidade de envolvimento nas tarefas. Uma vez que este tipo de questão, exige um caráter interpretativo. Ou seja, dois grupos de alunos podem querem investigar situações completamente diferentes. Ao professor, é importante que incentive a criatividade dos estudantes dando-lhes respaldo para que criem um espírito interrogativo que não aceita os fatos como lhes são mostrados.

Na segunda fase, que é o desenvolvimento da investigação, o docente tem a função de orientador da atividade. É de extrema importância que se apoie todo e qualquer progresso no trabalho realizado pelos discentes de forma a garantir que os objetivos propostos para as atividades sejam atingidos. No início dessa etapa, algumas dúvidas podem ocorrer, muito devido a sua falta de hábito com tarefas deste caráter. Segundo Lucas (2017,p.28) "[...] Por não vislumbrarem respostas imediatas, convocam o docente repentinamente, afirmando não saber o que é para fazer, geralmente, quando estes não estão muito habituados ao trabalho de cunho investigativo''.

É muito natural que ocorram diversas dúvidas no processo investigativo, e até mesmo estudantes que não fazem a menor ideia do que é para ser feito. Aí que entra o docente, por hora propondo mais questões de maneira a possibilitar que pensem melhor sobre o problema e por vezes, dando sugestões que acabam sendo norteadoras ao trabalho do discente.

A terceira fase do trabalho investigativo é destinado à discussão dos resultados. Sem dúvidas, a comunicação entre os estudantes tem um papel vital. Nesta etapa, os discentes são convidados a expor suas ideias para os demais colegas a fim de confrontarem suas ideias com o grande grupo. Tornando-se assim um bom ambiente para "[...] explanar ideias, estruturar alguns fechamentos e validar resultados" (LUCAS,2017, p.29). Dar voz aos alunos nestas aulas são fundamentais. Para tanto, é necessário apoiar os avanços ao longo das atividades de maneira a potencializar os estudantes no processo de produção do conhecimento matemático. Segundo Sandovscly (2007, p.73) "Se ensinamos apenas a fazer contas, como há 40 anos, não estamos preocupados em formar indivíduos participativos". Para além disso, trata-se de uma escolha sobre o aluno que pretende-se formar. O processo de argumentação não é simples, não há nenhum modelo que possa ser usado. É necessário a prática e que se possibilite que a sala de aula se torne um grande espaço de discussão, onde os discentes possam cada vez mais aprender um com os outros por meio do diálogo.

As discussões entre os estudantes podem gerar bons frutos em sala de aula, evocando caminhos nos quais nem mesmo o docente havia pensado. Entretanto, podem ocorrer debates que não sejam frutíferos, diante deste fato o docente pode intervir com comentários ou até mesmo revendo e relembrando problemas anteriormente realizados pela turma, nos quais poderão vir a ser utilizadas como estratégia de resolução na atividade.

As atividades propostas à turma precisam proporcionar aspectos que façam os estudantes refletirem e pensarem na matemática. Dessa maneira utilizar materiais palpáveis e jogos nas aulas de matemática podem ser alternativas que tiram o estudante de sua zona de conforto fazendo com que o mesmo busque por si mesmo e/ou pela diálogo com os colegas meios para a realização da tarefa.

3. COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Nesta seção são trazidas discussões pertinentes a análise combinatória no Ensino Fundamental. Destaca-se o raciocínio combinatório como princípio que permeia as estratégias de contagem. Para além disso, trazemos como a combinatória é vista nos documentos oficiais, tais como, os Parâmetro Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

3.1 Raciocínio Combinatório

De acordo com Borba (2010, p.2):

> O raciocínio combinatório pode ser definido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis.

Desenvolver o raciocínio combinatório nos estudantes é de grande importância com intuito de dar ferramentas para pensar em situações cotidianas. Por exemplo, ao escolher rotas de viagem que minimizem a distância, empiricamente, o sujeito usa o raciocínio combinatório, pois estará listando todos os caminhos que são possíveis para assim avaliar qual minimiza a distância. Porém, em alguns casos listar todas as possibilidades pode ser bem trabalhoso, pois há a chance de haver uma grande quantidade de casos, neste sentido precisará recorrer a algum método de contagem, como por exemplo, o *Princípio Fundamental da Contagem*. Além disso, pensar combinatoriamente, auxilia em outras disciplinas, como na, biologia. Imagine que você deseja estudar a probabilidade de um casal ter um filho com olhos azuis, para tanto será necessário contar todos os casos possíveis, nos quais os conceitos pertinentes a Análise Combinatória mostram-se essenciais.

Segundo Inhelder e Piaget (1976), conforme citados por Borba, Rocha e Azevedo (2015, p.5) “o raciocínio combinatório constitui-se em um dos componentes do estágio avançado de pensamento denominado de operacional formal, o qual possui como propriedade geral a distinção entre o real e o possível”. Entretanto, é importante ressaltar que noções do raciocínio combinatório podem ser introduzidas antes mesmo do período operacional formal. Os estudantes, desde muito jovens, fazem escolhas baseadas em ideias combinatórias, como por exemplo, organizar os brinquedos na prateleira; escolher lanches na hora das refeições. Trazer estes elementos nas aulas de matemática podem contribuir no processo de aprendizagem de combinatória.

O ensino mecânico de algumas configurações de contagem, como permutações, arranjos e combinações podem, indiretamente, levar o aluno a não refletir sobre cada situação problema, fazendo com que o mesmo apenas aplique uma das fórmulas "aprendidas", se confundindo com qual deve aplicar para cada situação problema diferente passando a ideia de que Análise Combinatória se resume a fórmulas. Como alternativa à utilização mecânica dos algoritmos é necessário oportunizar os estudantes situações nas quais precisam *investigar* o comportamento do modelo. Embora, de acordo com Siqueira (2001, p.104) "[...] grande parte das escolas e da sociedade, de modo geral, costuma-se não enaltecer nem sequer propiciar atitudes investigadoras, mas, sim, desencadear atitudes de apatia e infertilidade em relação ao poder criativo de cada um."

Em muitos problemas combinatórios a construção de uma árvore de possibilidades proporciona um melhor entendimento sobre a situação a ser estudada, visto que torna possível determinar o conjunto de todos os casos possíveis que satisfazem a situação. De acordo com o que foi elencado, Borba (2016, p.14) destaca que a construção de árvores de possibilidades é um recurso que "[...] pode auxiliar crianças numa melhor compreensão de situações combinatórias – por intermédio de uma maior sistematização – e, dessa forma, contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças em início de escolarização".

Aliar a matemática ao *material manipulável*[3] pode ser uma boa alternativa para a aprendizagem, pois muito do que é feito no "papel" ganha um novo significado. Acerca desses aspectos Gervázio (2017, p.3) destaca que:

> [..] Nesse contexto, uma alternativa para que se consiga avançar na educação matemática, pode ser a mudança de seu tratamento em sala de aula, de maneira única e exclusivamente abstrata para uma abordagem mais prática, pois ao contrário do que muitos imaginam, ela é concreta e manifesta-se através da natureza, nas tecnologias, nas construções humanas, entre outras. E, quando ela é atrelada ao mundo real o aluno passa a dar mais sentido e pode aprender com mais facilidade.

Um material manipulável que se seguido de um planejamento adequado, ou seja, se vier de uma proposta que propicie ao discente espaço para que pense e reflita sobre matemática, são os

[3] Entendemos aqui por materiais manipuláveis como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". (REYS, 1971, apud MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 193).

blocos lógicos, criados por Dienes na década de 1950, constituídos por quatro variáveis: forma, tamanho, espessura e cor, como pode ser visto na Figura 1:

Figura 1: Blocos Lógicos

Fonte: Acervo Pessoal

Muito dos problemas de Análise Combinatória envolvem a contagem de uma grande quantidade de agrupamentos, o que em um primeiro momento pode parecer uma tarefa extremamente complicada. Proporcionar materiais aos estudantes pode auxiliá-los a contar os casos de poucas quantidades, bem como estabelecer conjecturas a partir da observação dos casos iniciais. Assim, conforme Borba (2016, p.8) “as noções inicialmente evidenciadas podem ser aproveitadas para promover o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios – ressaltando-se a necessidade de considerar corretamente escolha e ordenação de elementos e esgotamento de todas as possibilidades”.

Vale destacar que apenas a manipulação do material por si só não garante aprendizagem, é imprescindível o papel do professor no decorrer das observações dos discentes. O professor, enquanto mediador da construção dos estudantes, pode auxiliar no processo de abstração a partir das experiências com os materiais manipulativos.

Os materiais manipuláveis e os jogos podem ser grandes aliados dos professores na busca por atividades que visam o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Sendo assim, é extremamente importante que se pesquise esses recursos refletindo sobre as suas potencialidades no auxílio da compreensão de conceitos matemáticos.

Uma importante estratégia para a resolução de diversos problemas de contagem é o *Princípio Aditivo* que de acordo com Morgado (1991, p.18) é entendido como: “Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos”. Denota-se por $A \cup B$, o conjunto de todos elementos que pertencem a A ou B. Se

A e B não são disjuntos o *Princípio da Inclusão-Exclusão* (PIE) generaliza o princípio aditivo, segundo o projeto Delfos[4], da seguinte maneira:

Figura 2: Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos finitos. Tem-se

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<l} |A_i \cap A_j \cap A_l| -$$
$$\cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_k| =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}| .$$

Fonte: Delfos, 2001

Para além dos princípios aditivo e de Inclusão-Exclusão, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) surge como uma importante estratégia para a resolução de diversos problemas de contagem que segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 125) pode ser enunciado como: “Se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a pq”, podendo facilmente ser estendida para mais decisões. Muitos problemas combinatórios, tais como, arranjos, permutações e combinações podem ser resolvidos utilizando o PFC. Como mostra o quadro elaborado por Lima (2015, p.697):

[4] O Delfos surgiu em 2001 com o objetivo de preparar as equipas portuguesas para as competições internacionais de Matemática, uma vez por mês, organizam-se atividade dedicadas ao enriquecimento curricular em Matemática, no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Quadro 2: Aplicações do Princípio Fundamental da Contagem

TIPO	PROBLEMAS	REPRESENTAÇÃO USANDO O PFC
PRODUTO CARTESIANO	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos X QMP de lápis X QMP de borracha X QMP de canetas.
ARRANJO	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.
PERMUTAÇÃO	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.
COMBINAÇÃO	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta X quantidade de escolhas para o 2º atleta X quantidade de escolhas para o 3º atleta X quantidade de escolhas para o 4º atleta X quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.

Fonte: Lima (2015)

Como visto no quadro acima, o PFC pode ser utilizado nos diferentes problemas de contagem. Sendo assim, o seu ensino precisa ser valorizado. Para além de ser extremamente eficaz para a solução do problema, sua solução não depende de fórmulas.

Pessoa e Borba (2009) propuseram problemas combinatórios para estudantes do ensino fundamental que nunca tiveram contato com os problemas pertinentes deste tópico. Os estudos mostraram que os discentes desenvolveram estratégias válidas para a resolução das situações que foram propostas. Nesse sentido, trabalhar paulatinamente as noções de Combinatória desde o Ensino Fundamental é indispensável para que posteriormente, no Ensino Médio, o discente tenha uma boa base e assim desenvolva as competências necessárias para este tópico.

3.2 Análise Combinatória em documentos oficiais

Nesta seção discorremos sobre as orientações curriculares de documentos oficiais proposto para o ensino da Combinatória no decorrer do Ensino Fundamental. Sendo assim, fazem parte da análise os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Fundamental e a Base Nacional Comum Curricular. Ao longo das orientações trazidas nos documentos realizamos uma análise comparativa, com o propósito de destacar pontos nos quais elas convergem e divergem.

No que diz respeito aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p.20) para os anos inicias, destaca-se a "importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos." Na BNCC (BRASIL,2017, p.275) reafirma o trabalho com situações de contagem desde os anos iniciais, porém, ressalva que:

> [...] Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos.

Se por um lado estes documentos oficias afirmam a importância de se trabalhar Análise Combinatória desde os anos iniciais, por outro, a execução destas orientações figuram como um grande obstáculo para os docentes. Ainda, no que se refere ao ensino de combinatória, Viana (2013, p.27) destaca que:

> [...] Assim como o estudante não gosta de algumas disciplinas, ou de alguns assuntos de certa disciplina, muitos professores não gostam de ensinar certos tópicos. Ao perguntar para três professores experientes quais tópicos não gostam de ensinar, surge uma lista com o binômio de Newton bem no topo, juntinho da análise combinatória.

E esse desgosto por ensinar combinatória pode acabar influenciando na qualidade das aulas sobre este tópico, que em muitas oportunidades é visto por meio de fórmulas, ao contrário do que a BNCC orienta (BRASIL, 2017, p.265): "[...] é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem de matemática. " As aulas de matemática precisam dar espaço ao discente para que investigue certo problemas possibilitando a descoberta de conceitos que antes eram desconhecidos. Desafiar os estudantes é papel do professor, bem como incentivar seus pequenos avanços.

Com o devido planejamento, os materiais manipuláveis podem ser alternativas importantes na resolução de problemas de contagem. Referente a estes aspectos a BNCC (2017, p. 289) destaca a importância de "resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p.45) reforçam a afirmação acima destacando que “Ao explorarem as situações-problema, os alunos deste ciclo precisam do apoio de recursos como materiais de contagem”.

No que diz respeito aos conhecimentos necessários para o 5° ano, em Análise Combinatória, a BNCC (2017, p.289) afirma que o foco está em:

> Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvores ou por tabelas.

Observa-se aqui uma atividade que tem grande potencial para ser explorada, a elaboração de problemas. A criação de situações e sua resolução por parte dos estudantes mobiliza a construção lógica de um problema e a utilização de diversos conceitos matemáticos que serão explicitados pelos estudantes. Conforme Fontaque, Setti e Vertuan (2017, p.2) “além de trabalhar a resolução de problemas com os alunos, faz necessário tornar realidade nas escolas o trabalho com a formulação/elaboração de problemas. Isso porque esta prática apresenta potencialidades para desenvolver a criatividade nos alunos”. Sendo esta atividade um grande diferencial da BNCC com relação aos Parâmetros que em momento algum destaca a criação e/ou elaboração de problemas por parte dos estudantes.

No que se refere aos anos finais do ensino fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017, p.310) enfatiza que “Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo”. Os PCN (BRASIL, 1997, p.52), também se destaca o princípio multiplicativo, afirmando que: “Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo”.

Para além disso, é importante que se utilize deste raciocínio para fazer relações com o estudo de probabilidade. A BNCC (BRASIL, 2017, p.312) salienta a importância de “calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo”. Unir estes conceitos pode ser fundamental para um bom entendimento de Análise Combinatória. Pois, daí o aluno pode perceber que existe algum significado para aquele tópico ser ensinado, nem que seja para outra aplicação dentro da matemática.

Tanto as orientações apresentadas referentes à Combinatória nos PCN como na BNCC no decurso do Ensino Fundamental, contribuem no sentido de orientarem o trabalho do docente com o conteúdo. Ambos os documentos preveem um trabalho com os conceitos de combinatória desde os anos iniciais do ensino fundamental, à esses estímulos desde cedo, Nicolai (2011, p.64) diz que "É provável que a quantidade e a qualidade dos estímulos presentes nessa fase influenciem diretamente o desenvolvimento em idades posteriores."

4. METODOLOGIA

A abordagem metodológica adotada para esta pesquisa é qualitativa, pois se baseia em um método de investigação científica no qual o objetivo principal não está no resultado final, mas sim nos procedimentos e escolhas a serem seguidas durante o processo de construção. Desta forma, a metodologia de pesquisa qualitativa, vista como processo de investigação, não se preocupa “[...] com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc.” (GOLDENBERG, 2000, p. 14).Visto que os dados produzidos pelos estudantes admitem um caráter interpretativo esta pesquisa não pode ser classificada como quantitativa.

Este trabalho tem como objetivo responder a seguinte questão: **Quais as potencialidades dos jogos no ensino de Análise Combinatória?** Visando responder esta pergunta foram realizadas três oficinas de jogos com estudantes do 9° ano do ensino fundamental.

Propomos uma sequência de jogos cuja prática docente baseou-se na perspectiva da Investigação Matemática. Uma vez que tal metodologia permite ao discente “[..] a vivência do processo e não apenas objetiva o resultado final, sendo deste modo um caminho promissor para o aluno “pensar sobre” o que se investiga, buscando que ele não apenas desenvolva o que foi determinado pelo professor” (LAMONATO, 2007, p.77). Neste tipo de abordagem o mais importante é o caminho que o estudante percorre durante todo esse processo de investigação e de descoberta que as atividades investigativas podem proporcionar.

A pesquisa foi realizada em 8 períodos da disciplina de matemática, no laboratório[5] de matemática da escola. A turma, na qual foi realizada a prática, é composta por 20 alunos, sendo 8 meninos e 12 meninas, com idades entre 14 a 16 anos de idade.

---

[5] Este ambiente trata-se de um Laboratório de Matemática construído por bolsistas voluntários do Programa de Extensão Laboratório de Matemática em Escolas Públicas, em desenvolvimento desde 2017. Os recursos para a idealização do LM foram arrecadados a partir de doações e ações em parceria com a comunidade escolar. Este espaço foi construído com a intenção de oportunizar um ambiente de aprendizado que singularize e potencialize o ensino de Matemática desenvolvido na escola, onde alunos e professores sejam sujeitos ativos nas próprias experiências e na busca pelos saberes matemáticos. (Silva e Rodrigues, 2019, p.2)

4.1 Planejamento das Atividades

Foram realizadas três oficinas[6] divididas em quatro encontros com estudantes do 9° ano da Escola Estadual de Educação Básica Dolores Alcaraz Caldas situada no município de Porto Alegre. Em cada oficina buscou-se atingir algumas das noções básicas de Análise Combinatória sendo os objetivos propostos destacados no Quadro 3:

Quadro 3: Objetivos das oficinas

ETAPAS	OBJETIVOS
OFICINA I (Blocos lógicos)	Desenvolver noções referentes ao princípio aditivo e multiplicativo
OFICINA II (Jogo Senha)	Explorar o conceito de permutação e arranjos simples por meio do jogo Senha.
OFICINA III (Jogo da mímica e tabuleiro dos polígonos)	Reforçar o princípio multiplicativo e introduzir noções de combinações.

Fonte: Acervo Pessoal

4.2 Descrição das oficinas

Antes de começarmos as oficinas foi realizada uma breve introdução sobre Análise Combinatória destacando sua finalidade e importância em problemas de contagem. Como exemplo motivacional foram trazidas peças de roupas, 3 camisas e 2 casacos, e com a participação dos estudantes mostrou-se de quantas maneiras poderíamos nos vestir.

Na sequência, prosseguimos com as oficinas da seguinte maneira:

4.2.1 Oficina I

A oficina I ocorreu em 2 etapas, primeiramente, em grupos, foram propostas algumas situações com os blocos lógicos que visavam contribuir para o desenvolvimento de noções dos princípios: aditivo, Inclusão-Exclusão e multiplicativo. Em seguida, trabalhamos com o jogo das Figuras lógicas elaborado para esta pesquisa.

Primeira etapa

[6] Ao longo das oficinas os discentes trabalharam em grupos ou em duplas conforme as atividades que eram propostas.

Inicialmente, os estudantes foram divididos em grupos de 4 estudantes e receberam um jogo de blocos lógicos. Nos jogos que lhes foram entregues algumas peças haviam sido retiradas. Neste sentido, solicitou-se que identificassem quais blocos estavam faltando. Esta primeira atividade teve como objetivo apresentar-lhes o material, bem como desenvolver ideias de agrupamentos para a contagem da quantidade total das peças.

Após, os estudantes foram postos em atividades exploratórias onde precisaram desenvolver estratégias para a contagem total de peças em conjuntos disjuntos e não disjuntos, nos quais o uso dos Princípios Aditivo e de Inclusão-Exclusão se fizeram presentes. Além disso, propusemos situações em que se depararam com o princípio multiplicativo.

Situação 1: Divida as peças em um grupo formado por peças grandes vermelhas e um grupo formado por peças azuis finas.

Situação 2: Divida as peças em dois grupos, um grupo formado por triângulos e um grupo formado por peças azuis.

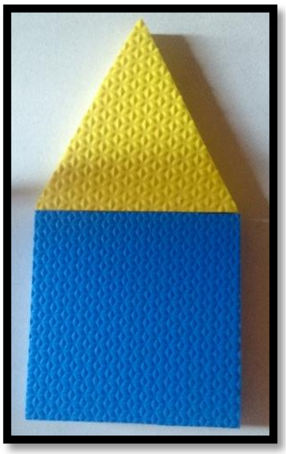
Situação 3: Divida as peças em dois grupos, um grupo formado por quadrados grandes e um formado por triângulos grandes.

Situação 4: Elabore uma situação diferente da anterior que envolva 2 grupos.

Em um primeiro momento, foi realizada uma introdução da tarefa a partir da leitura em voz alta do conjunto das atividades. Esta etapa teve como finalidade esclarecer possíveis dúvidas dos estudantes com relação ao que estava sendo proposto. Na sequência, utilizando os blocos lógicos, solicitou-se que, em grupos, se debruçassem sobre as seguintes questões:

1) Considerando a situação 1, existe alguma estratégia para contar as peças sem precisar contar uma por uma? Essa estratégia é sempre válida?
2) Na situação 2, existe uma estratégia para contar as peças sem precisar contar uma por uma? Existe algo de diferente da situação anterior?

3) Na situação 3, se quiséssemos montar uma "casinha" usando apenas uma peça de cada grupo (como a da figura), quantas casinhas nós teríamos?



4) Na situação criada, quantas figuras teríamos usando apenas uma peça de cada grupo? Existe uma estratégia para contagem de todas as peças desta situação?

Após, a realização das investigações em grupos, os alunos foram convidados a exporem sua solução para os colegas, bem como as conclusões que tiveram a partir da tarefa. Neste momento, buscou-se dar voz aos alunos para desenvolverem sua capacidade argumentativa.

Nesta primeira oficina visamos que, a partir da manipulação dos blocos lógicos, os estudantes criassem mecanismos de contagem em situações envolvendo conjuntos disjuntos e não disjuntos, bem como a construção de árvores de possibilidade introduzindo, assim, o princípio multiplicativo. Para além disso, deseja-se que compreendam a diferença do uso dos conectivos "e" e "ou" em problemas de contagem.

Segunda etapa

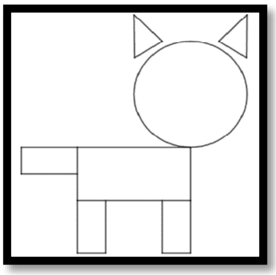
Na segunda parte da oficina, explorou-se mais um pouco das potencialidades dos blocos lógicos. Os grupos foram divididos em duas duplas para disputa do jogo das figuras criado por mim. Distribuiu-se uma figura construída utilizando o software Geogebra[7] para as duplas e as peças dos blocos lógicos ficaram dispostas sobre a mesa dividas pelo seu tamanho e cor. No início da partida, as duplas, alternadamente, escolheram 6 peças para construir a figura. As peças que não foram escolhidas ficaram sobre a mesa para que fossem utilizadas como "compra". Para a construção da figura existem as seguintes regras:

[7] GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única janela gráfica.

I. A dupla que começará escolhe uma das peças, dentre as que foram escolhidas inicialmente, para pôr na figura;
II. Nas jogadas seguintes, a peça colocada na figura deve respeitar a seguinte regra: Uma peça que tenha três características iguais com relação à última peça posta no tabuleiro;
III. Caso um dos jogadores não tenha a peça para ser colocada, escolherá uma peça das que restaram na mesa, sendo esta a sua jogada;
IV. Vence o jogo a dupla que ficar com o menor número de peças. Em caso de ambas as duplas ficarem com a mesma quantidade de peças o jogo termina empatado.

A Figura 3 é um modelo a ser completada pelos estudantes:

Figura 3: Modelo de figura a ser construída



Fonte: Acervo Pessoal

Neste jogo, o raciocínio combinatório se fez presente na construção das figuras, visto que os estudantes tiveram que analisar todas as possibilidades de jogadas do adversário para escolher a peça que fosse mais adequada.

Oficina II

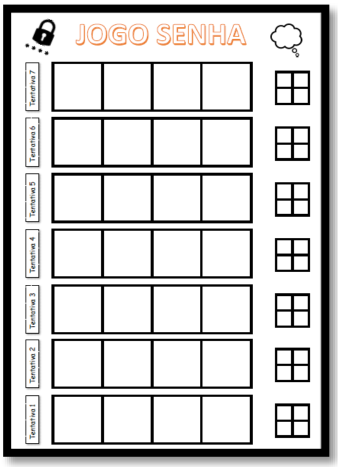
A segunda oficina teve como objetivo central trabalhar com a ideia de permutação e arranjos simples. Para tanto optou-se por utilizar o jogo *Senha*. Segundo Carvalho (2009) o jogo foi criado pelo israelense Mordechai Meirovitz cujo objetivo é descobrir a sequência formada pela sequência de 4 cores distintas, sem repetição, dentre as seis cores disponíveis. Adaptou-se o jogo para que além de arranjos simples pudéssemos trabalhar com permutações simples. Inicialmente, cada estudante recebe três tampinhas de garrafas de cores distintas para formar uma senha. Na medida que os estudantes terminavam de jogar o número de tampinhas foi aumentando

Materiais do jogo

Adaptado do jogo de Mordechai, cada dupla recebeu os materiais[8] que podem ser vistos na Figura 4:

a) Tabuleiro do jogo;
b) Tampinhas de garrafa;
c) Fichas para análise da senha;
d) Esconderijo para senha.

Figura 4: Materiais do jogo "Senha"




Fonte: Acervo Pessoal

Regras do Jogo

Antes do início da partida, escolhe-se o jogador que irá criar a senha e qual tentará adivinhá-la. Definidos os papeis de cada estudante, vamos às regras:

I. O Jogador A elabora uma senha de 3 cores e coloca no "esconderijo" da esquerda para direita. Uma senha é uma combinação de 3 cores diferentes. Por exemplo: Azul, Verde e Vermelho configura uma senha; Azul, Vermelho e Verde configura outra senha distinta da senha anterior. Ou seja, a ordem das tampinhas é importante;

II. O Jogador B, na tentativa de descobrir a senha do Jogador A utiliza as linhas do seu tabuleiro para dar um palpite de senha;

III. Após o Jogador B ter elaborado a senha, o Jogador A analisa a senha que foi proposta e na coluna da direita marcará com uma ficha preta as tampinhas que estão na posição

[8] Material criado pela aluna Talessa dos Reis da Silva na disciplina de Estágio em educação matemática III.

correta. Caso não haja nenhuma tampinha na posição correta não deverá ser colocado nenhuma ficha;

IV. O Jogador B tem até 7 tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte em nenhuma das tentativas, ele contabiliza 7 pontos (O número máximo de tentativas só é atingido, caso o estudante cometa algum equívoco, visto que com 3 cores temos 6 possíveis senhas), após acertar os papéis se invertem;

V. Ganha o jogo o estudante que adivinhar a senha com o menor número de palpites, ou seja, o estude que fizer o menor número de pontos.

Exemplo:

Suponha que o jogador A propôs a seguinte senha conforme a Figura 5:

Figura 5: Exemplo de "Senha" criada

Fonte: Acervo Pessoal

Na tentativa de descobrir a senha criada, o jogador B deu o palpite conforme a Figura 6:

Figura 6: Exemplo de palpite da “Senha”

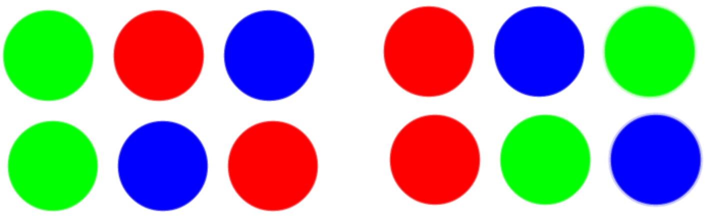
Fonte: Acervo Pessoal

Neste exemplo, nenhuma ficha deve ser colocada sobre os quadrados menores, pois nenhuma tampinha se encontra na posição correta.

Depois de encerrado, foi trabalhado outra configuração do jogo, no qual os estudantes receberam 4 tampinhas de cores distintas e escolheram 3 delas para compor sua senha.

Na sequência das atividades, foram realizadas algumas perguntas exploratórias, em grupos, envolvendo os princípios de contagem relacionados com permutação e arranjo simples.

1) Em uma senha de três cores, um estudante acertou a posição de uma delas e errou as demais. O que deveria fazer para que acerte na próxima tentativa ?
2) Existe outra senha além das apresentadas abaixo? Qual(is) ?



3) Utilizando o tabuleiro do jogo, exiba todas as senhas de 3 cores distintas possíveis.
4) É possível exibir todas as senhas de 4 e 5 cores distintas no tabuleiro do jogo ?
5) Qual a quantidade de senhas de 3 cores distintas que podemos formar dispondo de 5 tampinhas de cores distintas ?

Para estas atividades, esperamos que os estudantes percebam a importância da ordem, de modo que cada troca de tampinha configura uma nova senha. Para além disso pretendemos que os estudantes estabeleçam estratégias que lhes permitam contar a quantidade de senhas e chegar num modelo que seja válido para qualquer quantidade de cor. Tanto no modelo que recebem o mesmo número de tampinhas para compor a senha quanto no que recebem tampinhas a mais do que a senha que precisam criar.

Espera-se que os problemas se tornem um ambiente de discussão entre os estudantes, a fim de possibilitá-los a levantar hipóteses e fazer conjecturas.

Oficina III

Na oficina 3 reforçamos o princípio multiplicativo por meio do jogo da mímica e realizamos atividades exploratórias envolvendo combinações. Por termos um tempo escasso, foi realizada apenas uma parte da última etapa, mas descrevemos tudo o que foi preparado para que auxilie novas pesquisas futuramente.

No jogo da mímica os estudantes se dividiram em duas equipes. Cada uma das equipes recebeu uma lista de verbos e substantivos, de modo que os grupos não saibam a lista da outra equipe. A partir disso, em cada rodada, um grupo formou uma frase com as palavras recebidas e realizaram a mímica correspondente. O outro grupo tinha 30 segundos para adivinhar a frase. A cada frase adivinhada a equipe ganhava um ponto e vencia a partida o grupo que acertar o maior número de frases. A lista de verbos e substantivos entregues para cada um dos grupos encontram-se nos Quadros 4 e 5:

Quadro 4 - Lista de verbos e substantivos da equipe 1

	Verbos	Substantivos
Equipe 1	Ir, chegar, andar, construir, comer, beber, jogar, viajar, estudar, ver	Praia, escola, igreja, shopping, casa, parede, carne, arroz, feijão, português, matemática, história, filme, novela, futebol, vôlei, basquete, carro, ônibus, trem, avião

Fonte: Acervo Pessoal

Quadro 5 - Lista de verbos e substantivos da equipe 2

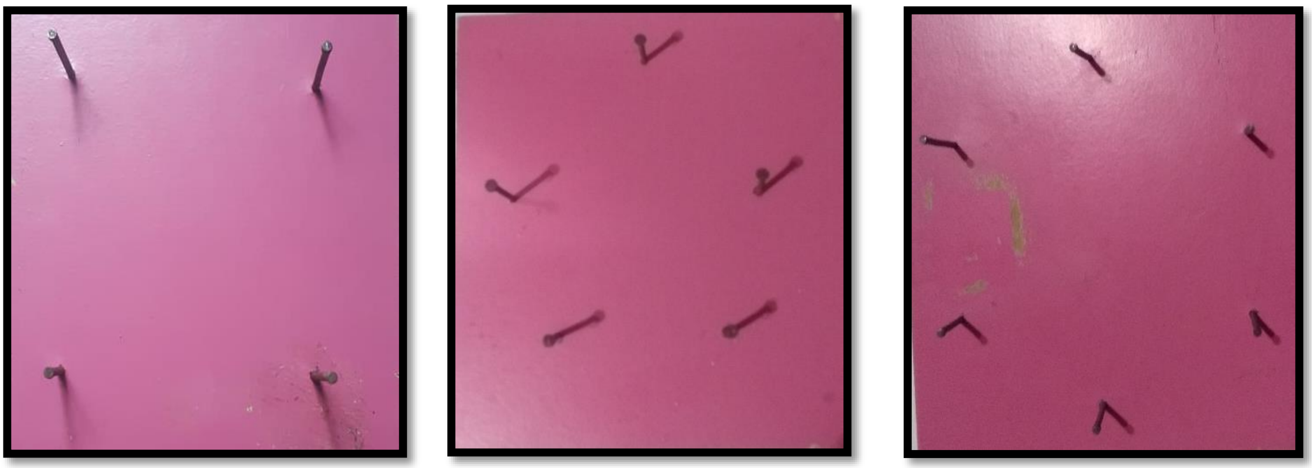
	Verbos	Substantivos
Equipe 2	Voltar, trabalhar, dormir, lavar, tomar, cozinhar, pesquisar, olhar, estudar, pintar	Praia, escola, cinema, shopping, casa, parede, cama, beliche, hotel, português, matemática, história, filme, novela, série, internet, roupa, carne, arroz, massa

Fonte: Acervo Pessoal

O objetivo desta atividade é de proporcionar a reflexão de que para cada escolha de verbo e substantivo uma ação diferente será realizada. Nesse sentido, pensar nas frases que poderiam ser formadas envolve o PFC, uma vez que os verbos escolhidos podem ser usados com mais de um substantivo. Para além disso, esta oficina pode servir para um trabalho interdisciplinar com a disciplina de Português.

Para trabalhar as noções de combinações simples construiu-se, inspirado no jogo Bicolorido citado por Carvalho (2009, p.46), tabuleiros de 4,5 e 6 pontos, como mostrados na figura:

Figura 7: Tabuleiros de 4,5 e 6 pontos



Fonte: Acervo Pessoal

Esta atividade tinha como objetivo trabalhar com o conceito de combinação simples. Para tanto, cada grupo recebeu um tabuleiro com 4,5 e 6 pontos e foram propostas as seguintes questões para os estudantes explorem:

1) Quantos triângulos são possíveis de serem formados nos tabuleiros de 4,5 e 6 pontos ?
2) Quantos segmentos de reta são possíveis de serem formados em cada um dos tabuleiros ?
3) Quantas diagonais podem ser formadas em cada um dos tabuleiros ?
4) No tabuleiro de 6 pontos, quantos quadriláteros podem ser formados ?

Nesta atividade tivemos como objetivo trabalhar a ideia de combinação simples, essencialmente no que se refere a quantidade de triângulos e diagonais de um polígono que podem ser obtidas a partir de 3 pontos do tabuleiro. Após os estudantes passarem por todos os tabuleiros provocamos os jogadores para determinar a quantidade de triângulos e diagonais de um polígono convexo de n lados.

5. ANÁLISE

Nesta seção será relatada a prática pedagógica, que se desenvolveu por meio de uma abordagem investigativa com a utilização de jogos e atividades exploratórias, bem como as observações e análises obtidas durante os processos de explorações dos discentes. Apresenta-se cada uma das atividades realizadas, com descrições das situações que ocorreram ao longo das oficinas, registros dos diálogos captados por áudio e resoluções das folhas de atividades propostas aos estudantes.

Durante a introdução das atividades exploratórias foi realizado uma leitura em conjunto com os estudantes das atividades nas quais investigaram. Esse momento se mostrou necessário para um bom entendimento da turma sobre a atividade que seria desenvolvida. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.26) destacam que "a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados. "

5.1 Oficina I

Descrição da Oficina I- Esta oficina dividiu-se em duas etapas. A primeira etapa se deteve em apresentar aos estudantes os blocos lógicos propondo algumas situações para que os estudantes explorassem. Em um segundo momento, eles jogaram o jogo das figuras lógicas.

Começamos a atividade com os blocos lógicos dispostos sobre as mesas dos discentes, onde os grupos tinham peças faltando no jogo. A partir disso, solicitou-se que identificassem quais peças não estavam presentes no seu jogo. Ocorreram 3 formas de dividir as peças: Um grupo optou por separar pela cor e forma, outro pela forma e espessura e um grupo pela forma e tamanho. Na sequência, foram propostos alguns problemas exploratórios nos quais pretendia-se que os estudantes criassem estratégias de contagem em conjuntos disjuntos e não disjuntos, e também, observassem as diferenças entre os princípios de contagem, como por exemplo o princípio da Inclusão-Exclusão e o Multiplicativo.

Na primeira etapa, 4 dos 5 grupos responderam corretamente. Em geral, os estudantes obtiveram um bom desempenho e o auxílio dos blocos lógicos para o manuseio foi fundamental para a resolução.

No decorrer da oficina, o professor foi passando nas mesas dos grupos para observar e propor questões aos estudantes. Dois grupos logo perceberam que as peças faltantes eram um círculo amarelo pequeno e grosso, um triângulo azul grande e fino e um retângulo azul fino e pequeno. Segue, abaixo, um diálogo do professor com um dos alunos do grupo A:

Professor: *E aí pessoal, conseguiram descobrir a quantidade de peças do jogo?*

Grupo A: *Sim sor, o jogo tem 48 peças.*

Professor: *E que estratégia vocês usaram?*

Grupo A: *Nós separamos as peças pela figura e após pelo tamanho. Daí observamos que deveria haver 6 peças de cada figura e tamanho.*

Professor: *Muito bem! Existe mais alguma maneira de agrupar as peças?*

Grupo A: *Acho que sim.*

Para chegarem na quantidade total de peças o grupo A as separou pela forma e na sequência pelo tamanho e ao fazerem a comparação entre os conjuntos de peças observaram que o conjunto formado por quadrados (que estava completo) tinha uma peça a mais que os outros. Interessante observar a maneira como o grupo A agrupou as peças, o que possibilitou identificarem as que estavam faltando a partir da comparação de um conjunto com outro.

Já o grupo B que dividiu as peças apenas pelo tamanho teve uma maior dificuldade na hora da contagem, conforme diálogo abaixo:

Professor: *E aí pessoal, conseguiram descobrir a quantidade de peças do jogo?*

Grupo B: *Sim, ao todo são 46 peças.*

Professor: *Por quê?*

Grupo B: *A gente dividiu as peças entre grandes e pequenas. E vimos que têm 23 grandes e 22 pequenas*.

Professor: *E vocês têm certeza que as peças grandes estão todas aí?*

Grupo B: *Ahh não sabemos sor.*

Professor: *E se vocês separassem as peças pela cor agora, com essa quantidade de peças que disseram. Todos os grupos teriam a mesma quantidade de peças?*

Grupo B: *Não, porque 23 é um número primo.*

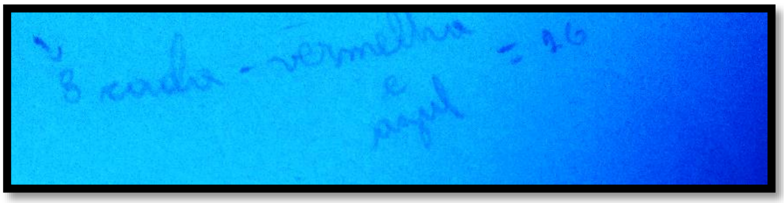
No grupo B, a intervenção do docente foi essencial para atividade. A partir do diálogo, compreenderam que haviam se equivocado na contagem. O que talvez, também, tenha sido um empecilho ao grupo foi a forma na qual agruparam as peças, dificultando a contagem das peças, uma vez que dividiram as peças apenas pelo seu tamanho. Um ponto a ser destacado é os conceitos que foram mobilizados ao longo do diálogo com o docente. Como por exemplo, o de número primo. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2006, p.51) “[...] a realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmos extramatemáticos’’.

Outro ponto que é interessante destacarmos foi a grande quantidade de estratégias utilizadas pelos grupos. Um optou por separar as peças pela cor e forma, outro pela forma e espessura e dois pela forma e tamanho. O que mostra o caráter aberto e investigativo da atividade. Estar atento as oportunidades que surgem nas aulas e estimular os discentes a refletir sobre os conceitos que surgem das investigações é imprescindível. Muitas vezes, uma postura interrogativa por parte do professor pode auxiliar os alunos a confrontar, clarificar e até mesmo orientar suas ideias.

No que se refere aos problemas exploratórios propostos, cujo objetivo principal era explorar os princípios aditivo, de Inclusão-Exclusão e multiplicativo, contou com reflexões interessantes por parte dos alunos.

No problema 1: “Quantas peças são grandes vermelhas ou azuis finas? Existe uma estratégia para essa contagem? Essa estratégia é sempre válida?’’ na qual era exigida uma reflexão sobre a contagem de peças em conjuntos disjuntos, muitos alunos responderam sem muita dificuldade. Como no primeiro momento já haviam separado as peças em conjuntos, sabiam quantas haviam em cada conjunto. Na Figura 8 mostra-se o argumento de um grupo:

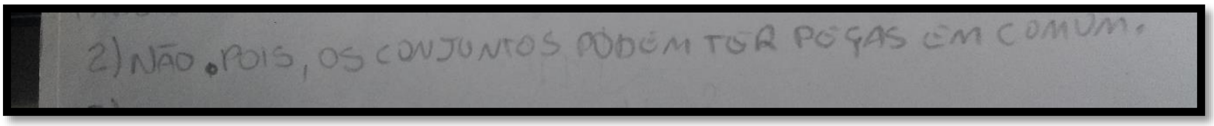
Figura 8: Resolução dos estudantes do problema 1



Fonte: Acervo Pessoal

Já na questão 2: “Quantas peças são triângulos ou azuis? Existe algo de diferente da situação anterior?” que era exigida a contagem em uma situação que havia intersecção o raciocínio não poderia ser repetido, nesta parte os blocos lógico foram fundamentais para a solução o que possibilitou que um grupo A percebesse que a estratégia da questão anterior nem sempre é válida. O grupo A, com o auxílio dos blocos lógicos, respondeu conforme mostrado na Figura 9:

Figura 9: Resolução dos estudantes da questão 2



Fonte: Acervo Pessoal

Na conversa que o docente teve com o grupo A relataram que:

Professor: *E aí pessoal, conseguiram perceberam algo de diferente na situação 2?*

Grupo A: *Vimos que ao dividir as peças entre triângulos e peças azuis, haverá peças que são triângulos e azuis. Daí contamos elas apenas uma vez.*

Professor: *Ótimo! Parabéns!*

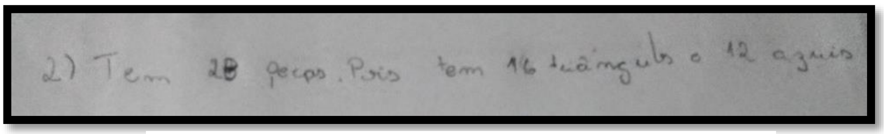
A situação relatada acima, mostra a importância que os blocos lógicos tiveram para a resolução deste problema. Lorenzato (2006, p.22) afirma que:

> É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação.

Utilizar material manipulável nas aulas de matemática pode proporcionar um ambiente para que os estudantes atribuam novos significados a conceitos que pareciam extremamente abstratos. O uso dos blocos lógicos despertou a este grupo uma investigação acerca de conjuntos disjuntos e não disjuntos além de como se conta a quantidade total de peças nesses dois casos. Determinar a quantidade de peças total nesses conjuntos, sem a ajuda do material, poderia ser uma tarefa árdua, porém, tornou-se visual.

Ainda no problema 2, como os discentes sabiam a quantidade de peças em cada conjunto (cor, forma, tamanho e espessura) o grupo B utilizou esse fato para responder o problema como visto na Figura 10:

Figura 10 - Registros dos alunos

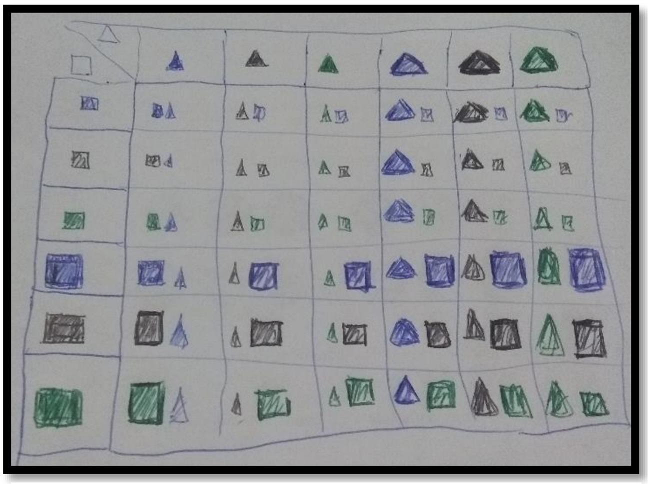


Fonte: Acervo Pessoal

E essa resposta não foi exclusividade deste grupo, o grupo C também não percebeu que havia peças em comum nos conjuntos. Nesse sentido, ao final dos problemas foi realizado uma sistematização dos princípios trabalhados com os discentes.

No que diz respeito ao problema 3: “Quantas “casinhas” poderíamos montar usando uma peça de cada grupo?’’ os estudantes foram colocados em situações que envolviam o princípio fundamental da contagem cujo objetivo era de se pensar na quantidade de figuras que poderiam ser formadas utilizando os triângulos e quadrados grandes. O grupo C utilizou-se de uma tabela para a resolução do problema como mostra a Figura 11:

Figura 11 - Resolução dos estudantes



Fonte: Acervo Pessoal

O uso de tabelas como alternativas para a resolução de problemas de contagem podem ser ótimas alternativas, uma vez que permitem aos estudantes descrever todas as possibilidades possíveis. Por não deixarem espaço suficiente na tabela, os discentes colocaram as peças lado a lado. Após a resolução do problema o grupo C chamou o discente.

Grupo C: *Sor, tá certo nossa solução? (E apontando para a tabela que haviam realizado).*
Professor: *Por que vocês acham que deu 36 ao invés de 12? (Sabendo que os discentes estavam corretos, pretendeu-se verificar a forma na qual haviam chegado na resposta. Além disso, objetivou-se que aprimorassem a capacidade argumentativa.)*
Grupo C: *Porque fizemos uma tabela assim como tu tinha feito no início da aula.*
Professor: Não foi muito trabalhoso construir esta tabela? Será que existe algum princípio que nos permite contar todos os casos sem precisar listar um por um?

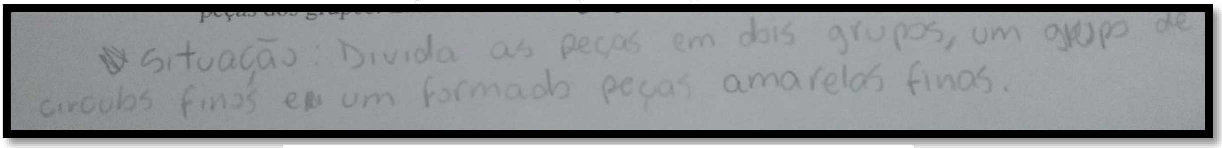
Grupo C: Foi bem trabalhoso sim. Ahh.. que nem tu fez no início da aula com as roupas?

Professor: *Exatamente.*

Percebe-se aqui, que os estudantes se valeram da introdução inicial realizada pelo docente o que de certa forma ajudou os estudantes a resolverem a questão sem precisarem recorrer ao PFC. Mas tal estratégia poderia ser extremamente exaustiva dependendo da situação. Aproveitando esta brecha o professor buscou instigar os estudantes os perguntando como poderiam utilizar o PFC para resolverem.

No quarto problema: “Quantas figuras teríamos usando apenas uma peça de cada grupo? Existe uma estratégia para contagem de todas as peças desta situação?” procurou-se propor que os próprios discentes criassem situações e investigassem o que ocorria com a quantidade de peças. A maior parte dos grupos optou por dividir as peças em situação que não ocorrem intersecções. Já o grupo D optou por separar as peças conforme a Figura 12:

Figura 12 - Situação criada pelos discentes



Fonte: Acervo Pessoal

Ao observar a tarefa dos estudantes, o docente os questionou e um discente respondeu:

Professor: *O que vocês conseguem concluir sobre a quantidade de peças total?*

Aluno A: *Vamos ter ao todo 6 círculos finos e 8 peças amarelas finas. Só que as peças que são amarelas finas já incluem dois dos 6 círculos.*

Professor: *E isso lembra alguma das situações anteriores?*

Aluno A: *Sim, é da mesma forma que contamos na situação 2.*

Professor: *Muito bem ! E o que será que ocorre quando aumentarmos para 3 grupos ?*

O estudantes ficam se olhando com uma cara de surpresos até que os discente responde.

Aluno A: *ahh não sei.*

Professor: *Quem sabe vocês não exploram essa situação ?*

Aluno A: *Vamos sim!*

Apesar de não ter vindo dos próprios estudantes, o professor se valeu da situação para que se explorasse o que ocorre quando se aumenta o número de grupos. Conforme Skovsmose (2000, p.17):

> [...] trabalhar com ambientes diferenciados de aprendizagem, em especial no âmbito da investigação, gera um grau elevado de incerteza, que não deve ser eliminada, mas enfrentada. A inquietude nos meus últimos anos de profissão, fez-me, além de buscar um entendimento maior do que seja essa forma diferenciada em lidar com o ensino da matemática, buscar subsídios para apoiar novas práticas dentro do processo ensino e aprendizagem com meus alunos.

Um dos papéis do docente é propor tarefas que os desafiem os alunos levando-os a sair de sua *zona de conforto*. Não é fácil sair da zona de conforto o desconhecido gera dúvidas nos estudantes, afinal, exige o pensamento, a criatividade. Propor atividades que geram reflexões podem oportunizar a criação de ambientes propícios para a aprendizagem.

Na segunda etapa desta primeira oficina, foi proposto aos discentes o jogo das figuras lógicas. Por estarem mais adaptados aos blocos lógicos e as questões pertinentes a Análise Combinatória, os estudantes trabalharam um jogo no qual as reflexões de combinatória se davam pelo próprio ato de jogar.

Na fase de escolhas, as duplas, alternadamente, escolhiam 6 peças livremente dentre o conjunto total de peças. Na primeira jogada, qualquer uma das peças que foram escolhidas podem ser postas no tabuleiro. Para as jogadas seguintes, existe a seguinte regra: “Uma peça que tenha três características iguais com relação à última peça posta no tabuleiro”. A dupla A, que começou a escolher primeiro, optou pelas peças conforme o Quadro 4:

Quadro 4: Escolha das peças da dupla A

Escolhas	Peças
Escolha 1	Triângulo azul grande e grosso
Escolha 2	Retângulo amarelo pequeno e fino
Escolha 3	Retângulo vermelho grande e fino
Escolha 4	Retângulo azul grande e fino
Escolha 5	Círculo azul grande e grosso
Escolha 6	Triângulo amarelo grande e grosso

Fonte: Acervo Pessoal

Já a dupla B realizou as escolhas como mostra-se no Quadro 5:

Quadro 5: Escolha das peças da dupla B

Escolhas	Peças
Escolha 1	Triângulo azul grande e fino
Escolha 2	Retângulo amarelo grande e grosso
Escolha 3	Retângulo vermelho grande e grosso
Escolha 4	Retângulo amarelo grande e fino
Escolha 5	Círculo amarelo grande e fino
Escolha 6	Triângulo vermelho grande e grosso

Fonte: Acervo Pessoal

No decorrer das observações do docente questionou-se a dupla A sobre a primeira peça colocada gerando o seguinte diálogo:

Professor: *E aí guris, qual foi a primeira peça que colocaram na figura?*
Dupla A: *Nós colocamos primeiro o círculo.*
Professor: *Por que ?*
Dupla A: *Porque era a única peça que obrigava eles (dupla B) a comprarem.*

Nesta situação, pode-se ver um indício do raciocínio combinatório presente na tomada de decisão, visto que tiveram que analisar as possibilidades que a outra dupla teria para cada peça que fosse colocada. Uma clara situação em que, de acordo com Muniz (2010,p.12), o jogo abre "possibilidades de uma nova construção de conhecimento e aquisição de novo saber-fazer a partir de relações do sujeito com a estrutura lúdica." Valendo-se da estratégia adotada a dupla A acabou vencendo o jogo. A Figura 13 mostra a construção dos discentes:

Figura 13 – Construção da figura pelas duplas

Fonte: Acervo Pessoal

Ao término das atividades, discutiu-se com a turma acerca das atividades que foram realizadas nas oficinas. Os apontamentos dos discentes sobre a contagem total da peças foram registrados no quadro, onde destacou-se as seguintes falas:

> Aluno A: *Quando temos peças em comum nos grupos, precisamos retirar da contagem as que fazem parte de ambos os grupos.*
> Professor: *E quando não há peças em comum ?*
> Aluno B: *Só contar quantos tem em cada grupo.*

Este momento foi de grande importância, pois destinou-se ao fechamento da atividade. Os alunos inicialmente se mostraram um pouco tímidos, mas com o passar do tempo e a mediação do docente contribuíram para que houvesse a sistematização dos conteúdos abordados nas atividades.

5.2 Oficina II

Na segunda oficina propusemos uma investigação sobre conceitos de permutação e arranjos por meio do jogo senha. Esta oficina foi realizada em 2 etapas. Inicialmente, os estudantes jogaram livremente o jogo senha e na sequência se propôs algumas questões[9] que envolviam permutações e arranjos. Ao final, foi realizado um fechamento das atividades com os discentes.

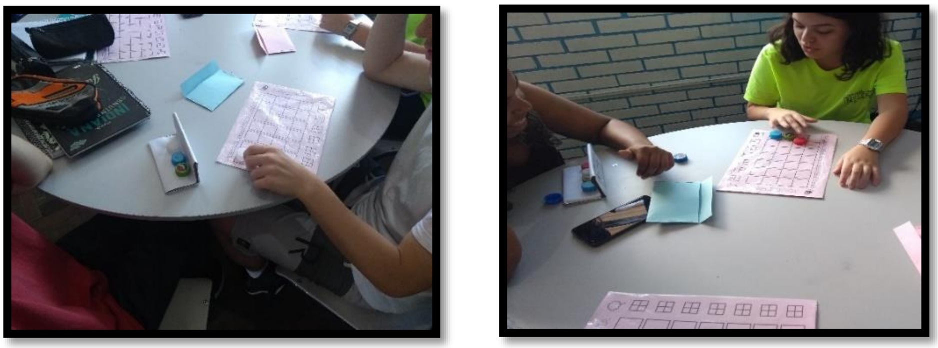
Descrição da oficina II - Assim como na outra oficina, a turma se mostrou bastante empolgada para a realização do jogo. Para dar início a oficina, o docente distribuiu os materiais do jogo e realizou a leitura em voz alta das regras junto com os estudantes. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.26) a leitura em conjunto "[...] poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados."

Na sequência, os estudantes jogaram livremente com os seus pares. Embora estivessem mais quietos com relação a atividade anterior, os discentes mostraram, até certo ponto, interagirem com seus pares.

Enquanto circulávamos pela sala registramos alguns momentos dos jogos entre os discentes conforme a Figura 14:

[9] Todas as questões que foram propostas para esta oficina se encontram no Apêndice D deste trabalho.

Figura 14: Registro do jogo senha



Fonte: Acervo Pessoal

Como as classes do laboratório de matemática são circulares os discentes podem sentar em grupos, proporcionando uma troca constante de duplas. E isto contribuiu para uma maior interação entre cada discente.

Na senha com quatro cores distintas, surgiu um diálogo interessante entre duas alunas e o professor.

Aluna A: *Sor, ela (se referindo a aluna B) já deu 7 palpites e ainda não acertou. Não era pra ter acertado ?*

Professor: *E o que vocês acham ?*

Aluna A: *Que sim, pois são só 7 senhas.*

Professor: *Por que ?*

Aluna A: *Porque só tem 7 espaços no tabuleiro.*

Professor: *Mas o tabuleiro ter 7 linhas não significa que existam só 7 senhas possíveis com 4 cores distintas.*

Aluna A: *Ahhh.....*

Neste instante, o aluno B dirige a palavra ao aluno B

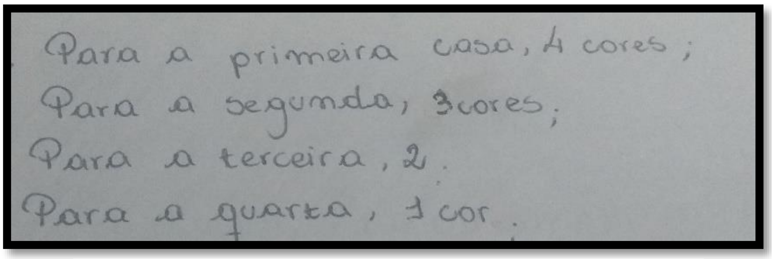
Aluna B: *Viuuuuu, eu te falei......*

Professor: *Mas afinal, quantas senhas são possíveis ? Dica: Usem as tampinhas e façam registros.*

As alunas se mostram intrigadas com a questão que foi proposta e começam a fazer anotações na busca da solução. Vale ressaltar o pensamento extremamente genuíno do estudante. Afinal, só haviam 7 espaços no tabuleiro.

Depois de um tempo a dupla apresenta a seguinte solução:

Figura 15: Resolução das alunas



Para a primeira casa, 4 cores;
Para a segunda, 3 cores;
Para a terceira, 2.
Para a quarta, 1 cor.

Fonte: Acervo Pessoal

A partir da solução apresentada pelas discentes, o professor questiona a dupla no intuito de que argumentassem.

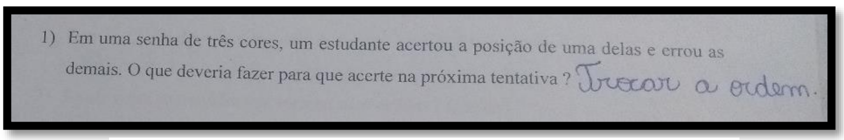
> Professor: *Então pelo que vocês estão dizendo aqui temos 10 senhas ?*
> Aluna B: *Não né sor ! É a mesma lógica das roupas. A gente multiplica. Daí dá 24.*
> Professor: *Exatamente ! Este é um exemplo do PFC com mais decisões.*

Apesar de não observarem imediatamente o PFC a partir da situação do jogo, a intervenção do docente possibilitou uma importante observação das alunas. Promover discussões entre os alunos, os colocando constantemente a questionar pode permitir que façam cada vez mais descobertas.

Buscando incitar mais questionamentos, foi entregue uma folha com atividades exploratórias para os estudantes resolverem em grupos.

Na questão 1: “Em uma senha de três cores, um estudante acertou a posição de uma delas e errou as demais. O que deveria fazer para que acerte na próxima tentativa?” todos os estudantes observaram a necessidade de mudança. Porém, algumas respostas, como a da Figura 16, não foram tão precisas:

Figura 16: Resolução com baixa precisão



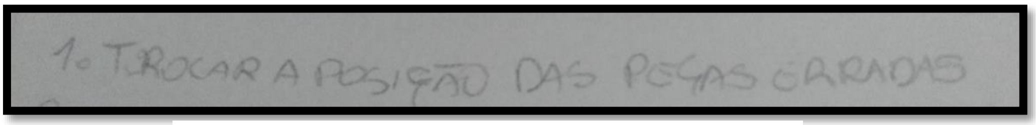
1) Em uma senha de três cores, um estudante acertou a posição de uma delas e errou as demais. O que deveria fazer para que acerte na próxima tentativa ? Trocar a ordem.

Fonte: Acervo Pessoal

A resposta dada por este grupo mostrou o entendimento que deveriam mudar as posições das tampinhas, entretanto faltou argumentarem o que deveria ser trocado. Afinal, a peça na posição correta poderia ser trocada configurando uma senha errada.

Já este outro grupo, cuja solução encontra-se na Figura 17, argumentou que deveria trocar as posições das tampinhas que não estavam corretas:

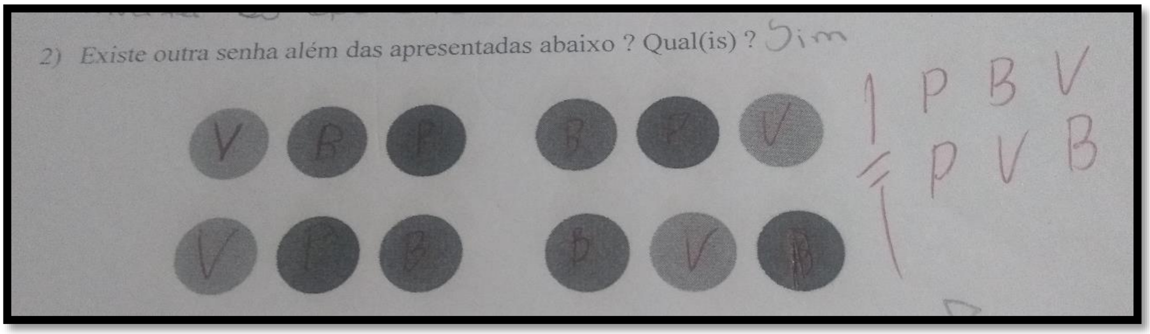
Figura 17: Resolução precisa das alunas



Fonte: Acervo Pessoal

Para resolverem a questão 2: “Existe outra senha além das apresentadas abaixo? Qual (is)?”, cujo objetivo era que os estudantes por meio do PFC determinassem a quantidade de senhas, vários estudantes criaram siglas para as cores, pois a folha impressa saiu em preto e branco. Na Figura 18, o “P” representa a cor preta, o “B” a cor branca e o “V” a cor vermelha:

Figura 18: Criação de siglas

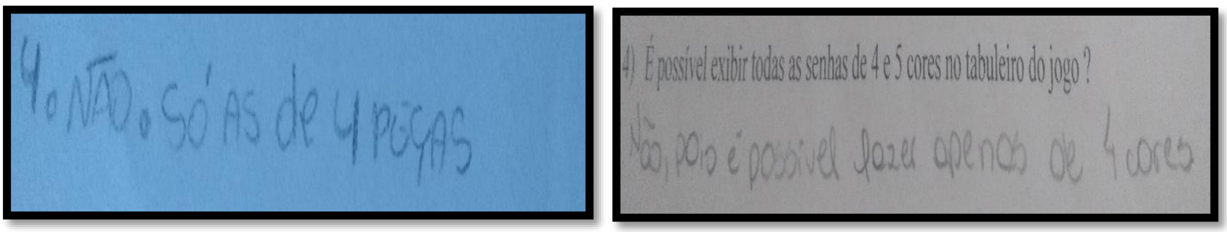


Fonte: Acervo Pessoal

Assim como ocorreu na oficina dos blocos lógicos, o material do jogo contribuiu para resolução dos estudantes, uma vez que dava possibilidade dos discentes criarem hipóteses e testá-las com o tabuleiro. Conforme Monzon (2010, p.3) “Os recursos nas aulas de matemática, sendo digitais ou não digitais, auxiliam no processo de aprendizagem, fazem com que os alunos explorem e contextualizem seus conceitos e propriedades.”

Na questão 4: “É possível exibir todas as senhas de 4 e 5 cores distintas no tabuleiro do jogo?” os discentes apresentaram dificuldades, eis algumas respostas mostradas na Figura 19:

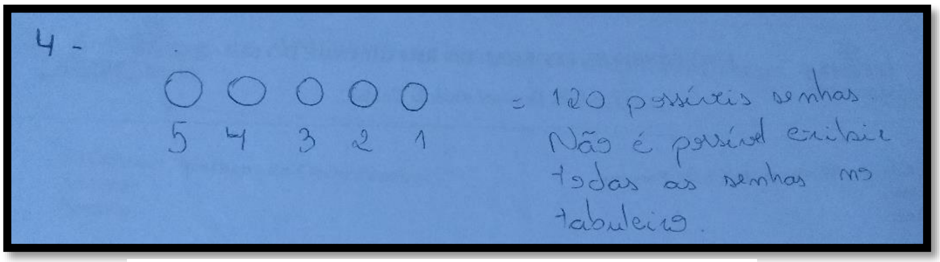
Figura 19: Respostas da questão 4



Fonte: Acervo Pessoal

Entretanto, um grupo já na etapa anterior havia compreendido como deveriam contar a quantidade total de senhas. Como só há 7 espaços no tabuleiro perceberam que não conseguiriam exibir todas as senhas. A estratégia utilizada pelo grupo se baseou no PFC sendo mostrada na Figura 20:

Figura 20: Respostas da questão 4



Fonte: Acervo Pessoal

Estas situações mostram um ensino-aprendizagem exploratório que, segundo Ponte (2005, p.13) “a sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem”. Aqui, a discussão dos grupos teve papel preponderante na resposta dos alunos, o que mostra uma aprendizagem pela troca de saberes entre os componentes do grupo.

Assim como na questão 4, os alunos mostraram dificuldades no problema 5: “Qual a quantidade de senhas de 3 cores distintas que podemos formar dispondo de 5 tampinhas de cores distintas ?” e dificilmente teria sido respondido se não houvesse as tampinhas de garrafas para manuseio. Em determinado momento da atividade um grupo chama o docente proporcionando o seguinte diálogo:

Aluno A: *Professor, são 60 senhas.*

Professor: *Como vocês chegaram a esta conclusão?*

Aluno A: *Nós fixamos uma tampinha na primeira posição e vimos que poderíamos criar 12 senhas diferentes com a primeira posição fixada.*

Professor: *Então são 12 senhas ?*

Aluno A: *Não, a ideia pode ser repetida para cada uma das tampinhas. Então teríamos 60 senhas.*

Professor: *Excelente estratégia, não havia pensado assim. Gostariam de expor para turma ?*

O grupo mostrou expressão de satisfação e não hesitaram em responder.

Aluno A: *Pode ser!*

A pergunta que foi proposta aos alunos tinha caráter mais fechada, porém, por não conhecerem as fórmulas de arranjos, tiveram que criar estratégias que possibilitassem a contagem da quantidade de senhas.

Os momentos finais da aula foram destinado às discussões das atividades em grande grupo. Como mediador do trabalho dos discentes, registramos os aspectos que foram levantados ao longo das discussões no quadro. Segundo Lucas (2017, p.29):

> O registro desempenha um papel fundamental principalmente na etapa de discussão pois além do aluno conseguir apresentar seus resultados, o professor acompanha o que cada grupo realizou durante a investigação. Sob outra perspectiva, podemos apontar a importância dos estudantes em adquirirem a capacidade de comunicar-se matematicamente; devido serem suas ideias próprias, acaba por permitir que seja trabalhado de maneira genuína e espontânea tais conhecimentos.

Os discentes discutiram que a ordem de colocação da tampinha era de extrema importância, uma vez que uma tampinha em outra posição configurava uma nova senha. Alguns fizeram relação com as senhas numéricas do celular.

Aluno D: *Sor, as senhas* (se referindo as senhas numéricas) *do celular é a mesma coisa né?*

Professor: *Como assim?*

Aluno D: *Ah, tipo se a gente trocar um número de lugar caracteriza uma nova senha.*

Professor: *Exatamente. Todos concordam ?*

Alunos: *Simm* (Os alunos respondem em coro).

Na sequência formalizamos o PFC e em conjunto com os alunos resolvemos o problema de encontrar a quantidade de senhas possíveis de serem formadas por 4 dígitos distintos.

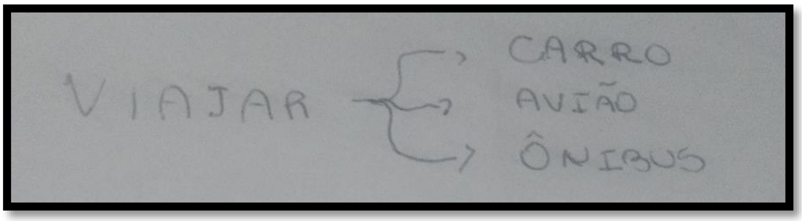
5.3 Oficina III

Para concluir as oficinas trabalhamos com o jogo da Mímica, que visava explorar o Princípio Fundamental da Contagem, e com problemas para serem resolvidos com o auxílio dos tabuleiros construídos objetivando uma primeira noção com o conceito de combinação simples. Devido ao tempo escasso para explorar todas as questões que elaboramos para serem respondidas com o auxílio dos tabuleiros nos detemos a descobrir o número de diagonais e triângulos em cada um dos tabuleiros.

Descrição da oficina III- Na primeira etapa, os estudantes foram divididos em duas equipes, e cada uma recebeu uma lista de palavras com verbos e substantivos. O objetivo é formar frases usando um vocábulo.

Para que a tarefa não ficasse caracterizada apenas pelo diversão e pudesse proporcionar aos discentes o pensamento combinatório, os verbos que foram escolhidos podiam ser associados a mais de um substantivo. Um grupo ao elaborar a mímica fez o seguinte registro:

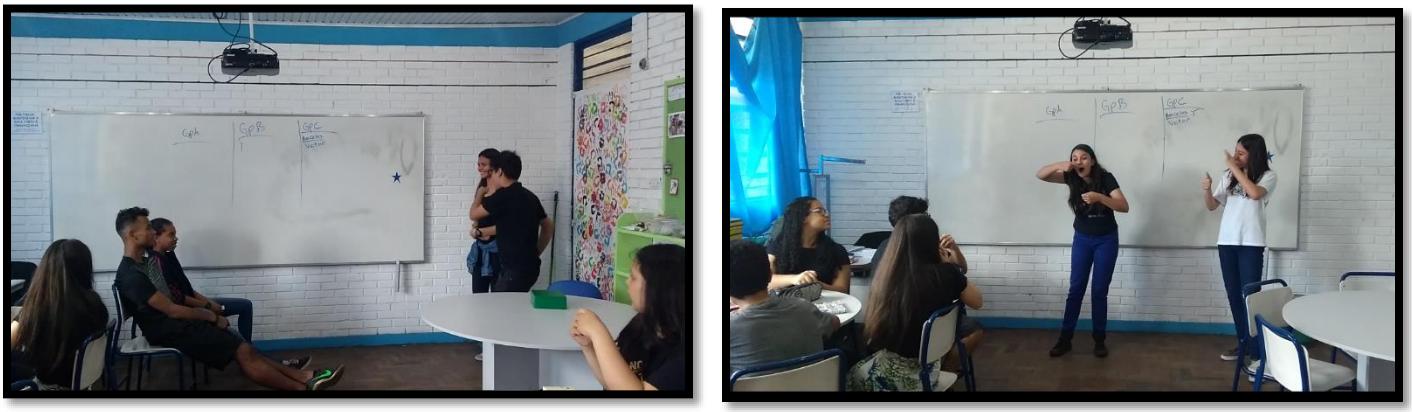
Figura 21: Pensamento combinatório na mímica



Fonte: Acervo Pessoal

Os "atores" iam se revezando para a realização da mímica de modo que todos os integrantes do grupo participassem da atividade. Registramos alguns momentos da atividade:

Figura 22: Jogo da mímica



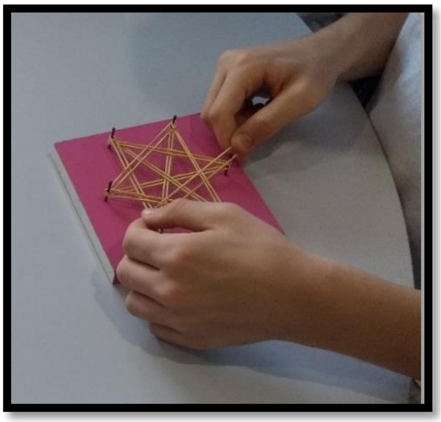
Fonte: Acervo Pessoal

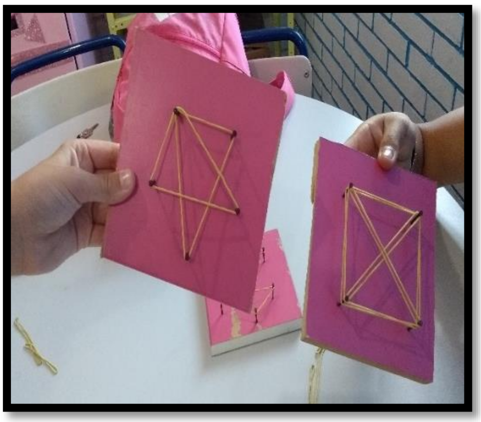
Após o término da partida, questionamos os alunos sobre os saberes matemáticos que estavam presentes na atividade. Um estudante prontamente levantou a mão e identificou o raciocínio lógico, pois as ações que estavam sendo realizadas deveriam ser associadas as palavras. Já o aluno A afirmou o seguinte: "Essa atividade parece aquela das maneiras de se vestir". Este aluno fez uma relação da mímica com a primeira atividade das roupas que realizamos com a turma, onde o princípio multiplicativo se fez presente na quantidade de maneiras que poderíamos nos vestir. O comentário desse discente mostra que o mesmo identificou o PFC nas escolhas da frase, uma vez que a cada verbo poderia ser associado mais de um substantivo.

Na segunda etapa devido ao tempo que restava optamos por trabalhar com as seguintes perguntas “Quantas diagonais podem ser formadas em cada um dos tabuleiros?” e “ Quantos triângulos são possíveis de serem formados nos tabuleiros de 4, 5 e 6 pontos?”. As outras questões podem ser encontradas no Apêndice E e na metodologia deste trabalho. Iniciamos esta etapa da atividade definindo o conceito de diagonal de um polígono com intuito de relembrá-los, pois ao questionarmos se lembravam todos ficaram em silêncio. Prosseguiu-se com a exploração, em grupos, do número de diagonais em cada tabuleiro, nos quais os estudantes utilizaram atilhos para conectarem dois vértices. Diferente das outras oficinas, devido a falta de tempo não houve uma discussão ao final das atividades realizadas.

Ao decorrer das explorações observamos atentamente as discussões do discentes e registramos alguns momentos como visto na Figura 22:

Figura 22: Diagonais e número de triângulos

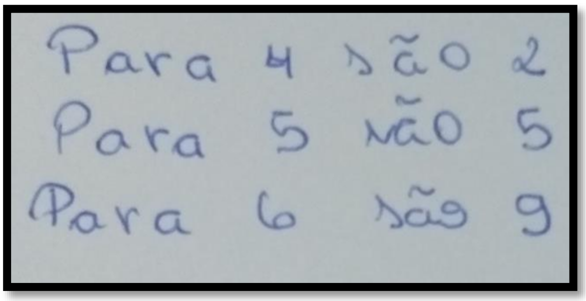




Fonte: Acervo Pessoal

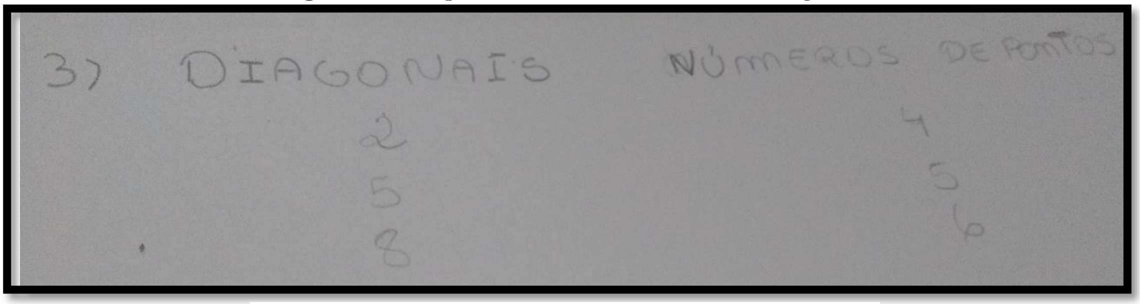
Questionamos se os discentes lembravam da expressão para o número de diagonais de um polígono convexo, no qual a totalidade da turma afirmou não recordar, de certa forma, foi interessante não saberem, pois assim poderiam explorar mais o tabuleiro para descobrir. Ao serem questionados sobre a quantidade de diagonais, dois grupos responderam da seguinte maneira:

Figura 23: Resolução correta dos alunos – número de diagonais



Fonte: Acervo Pessoal

Figura 24: Resposta dos alunos – número de diagonais



Fonte: Acervo Pessoal

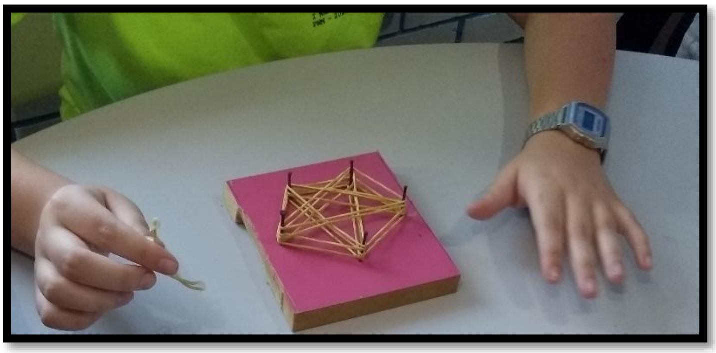
Ambos os grupos se deram conta que a ordem não era importante, ou seja, bastaria contar uma única vez uma diagonal que parte de um vértice ao outro. Entretanto, um dos grupos acabou se esquecendo de contar uma diagonal no tabuleiro de 6 pontos. E conseguiram descobrir o número de diagonais para polígonos convexos com mais vértices, como visto no diálogo:

> Professor: *E aí pessoal, quantas diagonais acharam em cada um dos tabuleiros?*
> Aluno A: *Achamos 2,5 e 9.*
> Professor: *Ótimo, e para 7 pontos?*
> Um outro aluno do grupo responde
> Aluno B: *Vão ter 14.*
> Professor: *Por que ?*
> Aluno B: *Porque de 4 para 5 aumentou 3 diagonais, de 5 para 6 aumentou 4. Então de 6 para 7 vai aumentar 5*
> Professor: Bem observado ! Parabéns.

Aqui podemos perceber o raciocínio recursivo utilizado pelos estudantes, embora não fosse nosso objetivo pela liberdade dada na tarefa possibilitou esse pensamento. Provavelmente se colocássemos a fórmula no quadro encontrariam muito mais facilidade em resolver, entretanto, é preciso deixar uma parte da tarefa ao aluno. No que diz respeito a mostrar as fórmulas aos discentes, Braumann diz que (2002, p.21) “[...] elas poderiam ter sido apresentadas como conhecimento já feito, mas ao não o serem, vão permitir ao estudante a prática (e, assim esperamos, o prazer) da investigação matemática”.

No que se refere a quantidade de triângulos, observamos que nos tabuleiros de 4 e 5 pontos foram facilmente encontrados, já no tabuleiro de 6 pontos os alunos encontraram uma maior dificuldade uma vez que aumentava consideravelmente o número de triângulos.

Figura 25: Resposta dos alunos – número de triângulos



Fonte: Acervo Pessoal

Ao final das investigações, devido as dificuldade que os alunos encontraram em descobrir a quantidade de triângulos no tabuleiro de 6 pontos o professor explicitou a ideia com a contribuição dos alunos como é descrito no diálogo:

Professor: *Quantos triângulos vocês acharam no tabuleiro de 4 pontos?*

Aluno A: *4 triângulos.*

Professor: *Isso aí. E no de 5?*

Aluno B: *Encontramos 10.*

Professor: *Exatamente! E no de 6?*

(Uns instantes de silêncio).

Aluno C: *Bahh professor, nós nos perdemos nessa.*

Professor: *Então vejam só, quantas possibilidades pontos nós precisamos para formar um triângulo?*

Aluno A: *3 pontos.*

(Como os pontos que estão dispostos no tabuleiro não são colineares a afirmação do aluno é verdadeira. Porém fez a ressalva de que os pontos não podem estar alinhados).

Professor: *Exatamente, e no tabuleiro de 4 pontos temos quantas possibilidades para escolher um ponto?*

Aluno A: *4 possibilidades.*

Professor: *Exatamente, como queremos formar um triângulo precisamos de mais 2 pontos. Para escolher outro ponto temos quantas possíveis escolhas?*

Aluno B: *Ahh... Isso é aquelas "coisinhas" de multiplicar. Vai ser* $4 \times 3 \times 2$.

Professor: *Está quase lá, o que falta?*

Aluno A: *Sor, mas são 4 triângulos.* $4 \times 3 \times 2$ *não dá 4.*

Professor: *E o que devemos fazer para que dê 4?*

Aluno B: *Não tem triângulos que estão sendo contados mais de uma vez?*

Professor: *É isso aí. A ordem nesse problema não importa, então os triângulos* ΔABC *e* ΔBAC *configuram o mesmo triângulo por exemplo. Logo, devemos dividir pelo número de triângulos que podem ser formados com 3 pontos. Que são 6.*

Aluno A: *Então para 6 teremos 20 triângulos.*

Professor: *Ótimo!*

A discussão é uma importante ferramenta das aulas investigativas, pois a partir da interação social entre os sujeito abre-se as portas para o confronto de ideias, ou ainda, colocação de novos questionamentos que podem auxiliar os alunos para que desenvolvam o raciocínio.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das grandes tarefas do professor é deixar que os estudantes tenham o prazer pela descoberta produzindo ciência de forma de forma criativa. Nesse sentido, é necessário desafiá-los a criarem estratégias e, por vezes, enxergando o que ninguém enxergou. Tyson (2018) afirma que:

> [...] se você é uma criança, é curiosa pelo seu ambiente. Estará revirando pedras, arrancando folhas das árvores, pétalas de flores e observando.
> Estará fazendo coisas que criam desordem na vida dos adultos à sua volta. E os que os adultos fazem? Eles dizem: "Não arranque as pétalas da flor, gastei dinheiro nisso! Não brinque com isso, vai quebrar! Tudo é "não"!
> Passamos os primeiros anos ensinando a andar e falar e o resto da vida dizemos para sentarem e calarem a boca. Então, basta sairmos do caminho deles. E deixem coisas no meio deles que ajudem a explorar. Por que não deixar um par de binóculos por aí algum dia? Vão fazer todo o tipo de coisa.

Neste estudo investigou-se a utilização de jogos e materiais manipuláveis como uma possibilidade para o ensino de conceitos de análise combinatória com alunos do nono ano do Ensino Fundamental. No decorrer desta pesquisa foi possível constatar a importância de realizar atividades que vão desde tarefas mais fechadas a tarefas de cunho investigativo. Cada tarefa desempenha um papel importante na aprendizagem de conceitos de matemática, tarefas mais fechadas podem ser úteis quando se pretende fixar determinado conteúdos, já as tarefas mais abertas, como exploratórias e investigativas, permitem que o discente analise a situação, sendo uma possibilidade para um aprendizado mais autônomo.

Ao longo desta pesquisa buscou-se responder como os jogos podem contribuir para o ensino de Análise Combinatória e a partir da realização das atividades planejadas observamos algumas situações oriundas do jogo que promoverem uma reflexão proporcionando noções do pensamento combinatório nos sujeitos.

Constatou-se que o uso de jogos e materiais manipuláveis, além de contribuírem para o ensino de noções de combinatória, promoveu discussões entre os discentes levando-os constantemente a elaborarem argumentos para que explicassem determinado acontecimento. Pode-se perceber, no decorrer das oficinas, o trabalho em equipe, proporcionado que os alunos aprendam com o outro por meio da cooperação. O trabalho com os matérias manipuláveis, tabuleiros e blocos lógicos, permitiu que os estudantes pudessem abstrair ideias de combinações simples, bem como noções pertinente a teoria de conjuntos, como por exemplo: União e Intersecção. Além, é claro, de noções de contagem, não apenas listando os elementos, mas procurando generalizar o pensamento, como por exemplo, ao utilizarem o princípio multiplicativo em algumas situações envolvendo contagem cujo seu uso em Análise

Combinatória é essencial para resolver alguns problemas essencialmente aqueles que envolvem uma grande quantidade de casos.

Os jogos que foram trabalhados, figuras lógicas, senha e mímica, contribuíram para que os alunos se envolvessem na atividade, possibilitando assim, um ambiente colaborativo onde se sentissem a vontade para colocarem suas ideias sem o medo de pensarem que estão errando. Para além disso, possibilitaram a aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem em sua forma generalizada que é o principal meio de resolução de problemas de contagem.

O referencial teórico adotado para esse trabalho, mostrou que não se pode olhar apenas o resultado final, mas sim os caminhos que foram trilhados no decorrer da explorações dos discentes propiciando em muitos momentos uma matemática criativa que não se restringe apenas aos algoritmos. Não se trata de excluir os algoritmos, há momentos que são essenciais, entretanto é imprescindível que se faça esse movimento de ir e vir variando as situações a serem trabalhadas com os alunos. Ainda no que se refere a investigação matemática observamos o quão importante é valorizar os avanços dos alunos por menor que sejam, de maneira que se sintam confiantes para enfrentar outros problemas.

Além disso, estudou-se as potencialidades dos jogos e de materiais manipuláveis no ensino de Análise Combinatória, entre os materiais destacaram-se o jogo senha e os blocos lógicos. É trazido, também, as vantagens e desvantagens quanto a sua utilização em sala de aula, onde destaca-se que os jogos não devem ser usados somente pela diversão. É necessário que o jogo traga elementos que façam os alunos pensar em situações matemáticas pondo a teoria em prática. Nesse sentido, o docente precisa realizar um planejamento no qual avalie o potencial do jogo para ser trabalhado em sala de aula.

Um aspecto bastante interessante que levantamos dos jogos é o seu espírito desafiador que pode instigar a curiosidade nos discentes levando-os constantemente a buscarem novas estratégias. É importante que o professor alimente estas curiosidades dos alunos sempre com novas indagações, proporcionando que cada vez mais o discente se torne um sujeito pensante, que saiba questionar e se permite aventurar por novos caminhos, e por vezes realizando descobrimentos.

A prática que foi desenvolvida empolgou imensamente o docente pela beleza de ver os estudantes em constante trocas entre si buscando-se convencer um ao outro. Por não ter tanto contato com a Investigação Matemática desenvolver aulas baseadas nessa perspectiva se mostrou desafiante, afinal possuem um caráter aberto, sendo assim é impossível prever todos os caminhos que as discussões levam, bem como as soluções por eles encontradas. Ter tido essa experiência com aulas investigativas foi uma caminho que permitiu sair da zona de conforto com a busca incessante de se envolver cada vez mais no processo de aprendizagem dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C.; GODINO, J. & NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio.** Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BORBA, R. **O raciocínio combinatório na educação básica.** In: Anais... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador-BA, 2010.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO; Juliana. **Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica.** In Bolema [on line], Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem.** Dissertação de mestrado. Programa de pós-graduação em ensino de matemática. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática. **Elo entre as tradições e a modernidade**. 2a Edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 110 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

FIOREZE, L.A. **O processo de construção dos conceitos de matemática com a utilização de Tecnologias de Informaçãoe Comunicação.** Projeto de pesquisa, Porto Alegre, 2016.

FONTAQUE, V. B.; SETTI, E. J. K.; VERTUAN, R. E. **Elaboração de problemas no ensino de matemática: um estudo a partir dos anais XIII EPREM.** Encontro paranaense de educação matemática, Cascavel, 2017.

GERVÁZIO, S. N. **Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa.** C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 9, p. 42-55, jul. 2017.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2000.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Tese de Doutorado. Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000.

LAMONATO, M. **Investigando Geometria: Aprendizagens de Professoras da Educação Infantil.** 245f. Dissertação de Mestrado. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos 2007.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série.** São Paulo: Rêspel, 2003. PARANÁ. Departamento de Educação Básica. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. Curitiba: DEB/SEED, 2008.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. **Temas e problemas elementares.** Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, A. **Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias**. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

LUCAS, Patrícia da Silva. Poliminós no ensino da matemática: uma experiência baseada na investigação**.** Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Licenciatura em Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

MARQUES, Marilaine de Castro Pereira; PERIN, Claiton Lira; SANTOS, Edinalva dos. CONTRIBUIÇÃO DOS JOGOS MATEMÁTICOS NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DA 2ª FASE DO 1º CICLO DA ESCOLA ESTADUAL 19 DE MAIO DE ALTA FLORESTA-MT. Revista da Faculdade de Alta Floresta (REFAF), S. L., v. 2, n. 1, p.62-67, 2013. Disponível em: . Acesso em: 26 set. 2017.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar**: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica: Belo Horizonte, 2010.

PONTE, J. P. (2005). **Gestão curricular em Matemática.** In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11–34). Lisboa: APM.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Editora Autêntica. Belo Horizonte, 2005**.**

RODRIGUES, C. O.; SILVA, T. R. **Dividindo com a Anabela: Uma proposta para o ensino de divisão.** In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, Cuiabá/MT. Anais do evento, 2019.

Ré AHN. **Crescimento, maturação e desenvolvimento na infância e adolescência: implicações para o esporte.** Motricidade 2011; 7(3):55-67.

SEGURADO, I., & PONTE, J. P. (1998). **Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo**. Quadrante, 7(2), 5-40.

SKOVSMOSE, O. (2000). **Cenários para investigação**. *Bolema, 14*, 66-91.

TYSON, Neil deGrisse. **Quer ensinar ciência aos filhos? Saia da Frente deles.** Vídeo. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=oAgl6KRx3Ug> Acesso em: 27 de fev. de 2018.

APÊNDICE A

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, __ de ______ de _____.

Prezada Professora ____
Diretora da ____

O aluno(a) Matheus da Costa Pereira, atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador(a) e professor(a) responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo(a) graduando(a), reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51) 995391963.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

____

Prof[a]. Dr[a] Leandra Anversa Fioreze
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

APÊNDICE B

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Os jogos no ensino de combinatória**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) **Matheus da Costa Pereira**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Leandra Anversa Fioreze**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone **(51) 99539-1963** ou e-mail **leandra.fioreze@gmail.com**.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, tem como finalidade **investigar e analisar as potencialidades dos jogos no desenvolvimento do raciocínio combinatório.**

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre ___________________________, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço _____________/telefone__________/e-mail_________.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
E.E.E.B. Dolores Alcaraz Caldas

Professor: Matheus da Costa Pereira
Turma:
Nomes:

Atividades Investigativas

Divirtam-se!!

Situação 1: Divida as peças em um grupo formado por peças grandes vermelhas e um grupo formado por peças azuis finas.

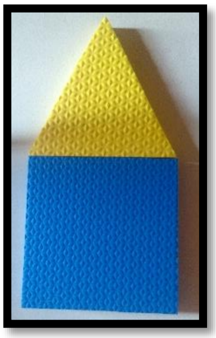
Situação 2: Divida as peças em dois grupos, um grupo formado por triângulos e um grupo formado por peças azuis.

Situação 3: Divida as peças em dois grupos, um grupo formado por quadrados grandes e um formado por triângulos grandes.

Situação 4: Elabore uma situação diferente da anterior que envolva 2 grupos.

A partir da discussão com os colegas das situações acima explore as questões abaixo.

1) Considerando a situação 1, existe alguma estratégia para contar as peças sem precisar contar uma por uma? Essa estratégia é sempre válida?
2) Na situação 2, existe uma estratégia para contar as peças sem precisar contar uma por uma? Existe algo de diferente da situação anterior?
3) Na situação 3, se quiséssemos montar uma “casinha” usando apenas uma peça de cada grupo (como a da figura abaixo), quantas casinhas nós teríamos?



4) Na situação criada, quantas figuras teríamos usando apenas uma peça de cada grupo? Existe uma estratégia para contagem de todas as peças desta situação?

APÊNDICE D

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
E.E.E.B. Dolores Alcaraz Caldas

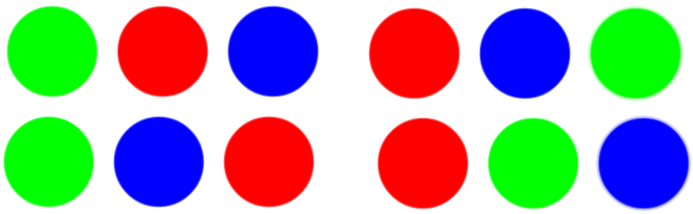
Professor: Matheus da Costa Pereira
Turma:
Nomes:

Atividades Investigativas

Divirtam-se!!

1) Em uma senha de três cores, um estudante acertou a posição de uma delas e errou as demais. O que deveria fazer para que acerte na próxima tentativa ?

2) Existe outra senha além das apresentadas abaixo ? Qual(is) ?



3) Utilizando o tabuleiro do jogo, exiba todas as senhas de 3 cores distintas possíveis.

4) É possível exibir todas as senhas de 4 e 5 cores distintas no tabuleiro do jogo ? Justifique.

5) Qual a quantidade de senhas de 3 cores que podemos formar dispondo de 5 tampinhas de cores distintas ?

APÊNDICE E

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
E.E.E.B. Dolores Alcaraz Caldas

Professor: Matheus da Costa Pereira
Turma:
Nomes:

Atividades Exploratórias

Divirtam-se!!

1) Quantos triângulos são possíveis de serem formados nos tabuleiros de 4,5 e 6 pontos ?
2) Quantos segmentos de reta são possíveis de serem formados em cada um dos tabuleiros ?
3) Quantas diagonais podem ser formadas em cada um dos tabuleiros ?
4) No tabuleiro de 6 pontos, quantos quadriláteros podem ser formados ?