



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Modelos Paramétricos para Dados Categóricos com Aplicações

Cleonis Viater Figueira

Porto Alegre, Dezembro de 2015.

Tese submetida por Cleonis Viater Figueira¹ ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora:

Dra. Sílvia Regina Costa Lopes (PPGMAT - UFRGS)

Comissão Examinadora:

Dra. Gabriela Bettella Cybis (UFRGS)

Dr. Guilherme Pumi (UFRGS)

Dr. Roberto Molina de Souza (UTFPR - Cornélio Procópio)

Dra. Taiane Schaedler Prass (StatSoft South America)

Data de Apresentação: 8 de Dezembro de 2015.

¹bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

*“As lágrimas dos bons não caem por terra,
mas vão para o céu.”
(biscoito da sorte - sembei, em 01.03.2012)*

AGRADECIMENTOS

À Sílvia, minha orientadora, pela oportunidade, orientação, apoio e paciência. Pelo exemplo de profissional e de mulher que sempre tem sido para mim.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS e à Universidade Federal Tecnológica do Paraná - UTFPR - Campus Pato Branco pela oportunidade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática, em especial à Adriana Neumann de Oliveira, pelo comprometimento com a qualidade de ensino da universidade.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Ao LCPM/UFRGS - Laboratório de Computação e Pesquisa em Matemática pelo espaço e materiais disponibilizados e à COGETI/UTFPR - Coordenadoria de Gestão de Tecnologia da Informação pela Máquina Virtual que possibilitou realizar as simulações apresentadas neste trabalho, em especial à Rudinei Silvestro.

À banca examinadora pela atenção e comentários que auxiliaram no aprimoramento deste trabalho.

À Rosane, nossa querida secretária do Programa de Pós-Graduação, pelo auxílio prestado a todos os alunos.

À advogada Pauline Tonial Motizuki e à psicóloga Rosemarie de Carli pelo profissionalismo e competência com que me ampararam em minhas dificuldades familiares durante o período do doutorado.

À minha mãe Iria Lucia (in memoriam) e ao meu pai Antonio pelo apoio incondicional, carinho, incentivo, compreensão e confiança. Se consegui ir adiante foi porque sempre senti suas mãos velando por mim em todos os momentos alegres e nem tão alegres. Ao meu filho Vicente, sua presença foi imprescindível, fonte de força e esperança para me ajudar a superar todas as intempéries que a vida me trouxe neste período.

Aos amigos que estiveram ao meu lado ao longo dessa caminhada, vocês foram verdadeiros irmãos e irmãs que a vida me proporcionou.

A Deus.

RESUMO

Este trabalho aborda a análise de dados espaço-temporais através da metodologia Bayesiana e de modelos lineares generalizados. A característica dos efeitos aleatórios espaciais é modelada através do modelo condicional auto-regressivo intrínscio (CAR) e do modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR). A característica temporal dos dados é modelada através de estrutura linear aditiva, suavização com *B-spline* sem intercepto e modelo auto-regressivo de primeira e segunda ordens. É realizada análise de dados reais que correspondem a cinco conjuntos de observações. A primeira envolve o conjunto de dados dos efeitos adversos pós-vacinação notificados no período de 2005 a 2010, nos estados brasileiros, utilizado no trabalho de [Perin \(2014\)](#). A segunda aplicação analisa o conjunto de dados de óbitos infantis (com menos de um ano de idade) por residência nos estados brasileiros entre 1991 e 2013 (fonte *MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade*) usados em [Silva e Dean \(2006\)](#). A terceira aplicação corresponde ao conjunto de pacientes do sexo masculino hospitalizados com infarto do miocárdio na província de Québec entre os anos de 1993 e 2000, utilizados em [Silva et al. \(2008\)](#). A quarta aborda o conjunto de dados sobre a incidência da radiação solar disponíveis no *USA National Solar Radiation Data Base (NSRDB)* em períodos mensais entre janeiro de 1960 a dezembro de 2010, utilizados no trabalho de [Pumi et al. \(2015\)](#). A quinta aplicação apresenta o indicador de resistência a 13 diferentes antibióticos para a bactéria *Salmonella Typhimurium* DT104 com sequências de DNA obtidas a partir de animais e humanos na Escócia no período de 1990 a 2011, utilizados nos trabalhos [Cybis et al. \(2015\)](#) e [Mather et al. \(2013\)](#). São realizados estudos de simulação com o enfoque clássico com base nos métodos *shrinkage* (*ridge*, *lasso* e *elastic-net*). Apresentamos, também, estudos sobre a ocorrência de Ilhas de *CpG* e sobre a proteína citoplasmática *p53* com base em sequências de DNA de alguns seres vivos e da proteína *p53* de pessoas com câncer.

ABSTRACT

This work deals with the analysis of spatio-temporal data using Bayesian methodology and generalized linear models. The spatial random effects characteristic is modeled through the intrinsic conditional autoregressive model (CAR) and the proper conditional autoregressive model (PCAR). The temporal characteristic of data is modeled through linear additive structure, smoothing with *B-spline* without intercept and autoregressive model of first and second orders. Real data corresponding to five sets of information are analyzed. Adverse Event Following Immunization reported in the 2005-2010 period, in the Brazilian states, used in research of [Perin \(2014\)](#). The second data set analyzes the number of infant deaths data (under one year of age) per household in the Brazilian states between 1991 and 2013 (source *MS/SVS/DASIS - Mortality Information System*) used in [Silva e Dean \(2006\)](#). The third application corresponds to the number of male patients hospitalized with myocardial infarction in the province of Quebec between 1993 and 2000 used in [Silva et al. \(2008\)](#). The fourth data set examines the data set on the incidence solar radiation available in the *USA National Solar Radiation Data Base* (NSRDB) in monthly periods from January 1960 to December 2010, used in research by [Pumi et al. \(2015\)](#). The fifth data set displays resistance indicator to 13 different antibiotics for the bacteria *Salmonella Typhimurium* DT104 with DNA sequences obtained from animals and humans in Scotland from 1990 to 2011, considered by [Cybis et al. \(2015\)](#) and [Mather et al. \(2013\)](#). Simulation studies are performed with the classical approach based on the methods *shrinkage* (*ridge*, *lasso* and *elastic-net*). Additionally, this research includes studies on the occurrence of *CpG* islands and the cytoplasmic protein *p53* microarray-based DNA sequences of certain living beings and protein *p53* in people with cancer.

ÍNDICE

1	Introdução	3
2	Metodologia	5
2.1	Modelos Lineares Generalizados	6
2.2	Modelo Condicional Auto-Regressivo	9
2.2.1	Modelo Condicional Auto-Regressivo Intrínseco	14
2.2.2	Modelo Condicional Auto-Regressivo Próprio	15
2.3	Modelo Auto-Regressivo	16
2.4	Funções <i>B-Splines</i>	19
2.5	Algoritmos Computacionais Bayesianos	21
2.5.1	Metropolis-Hastings	23
2.5.2	Amostrador de Gibbs	24
2.6	Testes de Diagnóstico de Convergência	25
2.6.1	<i>Gelman-Rubin</i>	25
2.6.2	<i>Raftery-Lewis</i>	26
2.6.3	<i>Geweke</i>	27
2.6.4	<i>Heidelberger-Welch</i>	27
2.7	Distribuição Gama Invertida	28
2.8	CrITÉRIOS de Seleção do Modelo	32
2.8.1	CrITÉRIO de Informação da Função Desvio (<i>Deviance Information Criterion - DIC</i>)	32
2.8.2	Ordenada Preditiva Condicional (<i>Conditional Predictive Ordinate - CPO</i>)	33
2.8.3	Logaritmo da Pseudo Verossimilhança Marginal (<i>Logarithm of the Pseudo Marginal Likelihood - LPML</i>)	34
2.8.4	ResÍduos de Pearson (Q_P)	34
2.8.5	CrITÉRIO de Informação Amplamente Aplicável (<i>Widely Applicable Information Criterion - WAIC</i>)	35

2.8.6	Crítério de Informação Bayesiano (<i>Bayesian Information Criterion - BIC</i>) e Crítério de Informação Amplamente Aplicável Bayesiano (<i>Widely Applicable Bayesian Information Criterion - WBIC</i>)	36
2.9	Modelos Usados nas Análises e Simulações	36
2.10	Especificação dos Modelos	37
2.10.1	Distribuições <i>a priori</i>	37
2.10.2	Distribuições <i>a posteriori</i>	40
3	Aplicações	47
3.1	Exemplo 1: Efeitos Adversos Pós-Vacinação	47
3.2	Exemplo 2: Mortalidade Infantil	58
3.3	Exemplo 3: Revascularização	71
3.4	Exemplo 4: Radiação Solar	81
3.5	Exemplo 5: Resistência de Bactéria a Antibióticos	88
4	Modelo de Regressão Penalizada	97
4.1	Regressão <i>Ridge</i>	98
4.2	Regressão <i>Lasso</i>	100
4.3	Regressão <i>Elastic-Net</i>	101
4.4	Estudo de Simulação	102
4.4.1	Ruídos Usados nas Simulações	102
4.4.2	Medidas de Desempenho e <i>Signal-Noise-Ratio - SNR</i>	104
4.4.3	Modelos Usados nas Simulações	105
4.4.4	Simulações com o Pacote <i>Glmnet</i>	107
4.4.5	Simulações com o Pacote <i>Glmnet</i> e a função <i>larFORTRAN</i>	116
5	Análise de Sequências de DNA	119
5.1	Ilhas de <i>CpG</i>	119
5.1.1	Sequências Analisadas	121
5.1.2	Estudo de Simulação	126
5.2	Proteína <i>p53</i>	127
5.2.1	Análise da Proteína <i>p53alpha</i>	128
5.2.2	Comparação da Proteína <i>p53alpha</i> com a Proteína <i>p53</i> Mutante	130
6	Conclusão	137
	Referências Bibliográficas	140

Apêndice	146
A Gráficos Auxiliares às Análises para o Exemplo 1 do Capítulo 3	147
B Gráficos Auxiliares às Análises para o Exemplo 2 do Capítulo 3	159
C Gráficos Auxiliares às Análises para o Exemplo 3 do Capítulo 3	173
D Gráficos Auxiliares às Análises para o Exemplo 4 do Capítulo 3	187
E Gráficos Auxiliares às Análises para o Exemplo 5 do Capítulo 3	199
F Gráficos e Tabelas dos Resultados das Simulações do Capítulo 4	205
G Artigo Figueira e Lopes (2013)	383

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A Estatística Clássica ou frequentista associa probabilidades apenas a variáveis aleatórias, enquanto a Estatística Bayesiana permite a associação de probabilidade a qualquer grau de crença ou incerteza sobre uma quantidade aleatória, evento ou hipótese. Essa abordagem leva à definição de probabilidades *a priori* e *a posteriori*.

A probabilidade *a priori* é obtida com base nas informações que cada indivíduo traz consigo de experiências passadas. A probabilidade *a posteriori* é obtida à medida que experimentos são realizados e novos dados coletados. Assim, neste contexto, as probabilidades associadas a um evento são definidas previamente e atualizadas ao se introduzir novas informações ao estudo.

Neste trabalho, as análises com o enfoque Bayesiano são realizadas através de simulações utilizando o ambiente computacional R em conjunto com o *software OpenBUGS* com base no método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). A interface entre o ambiente computacional R e o *software OpenBUGS* é feita através da biblioteca *R2OpenBUGS*.

Este trabalho aborda a análise de dados espaço-temporais através da metodologia Bayesiana com uso de modelos lineares generalizados. A característica dos efeitos aleatórios espaciais é modelada através do modelo condicional auto-regressivo intrínscico (CAR) e do modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR). A característica temporal dos dados é modelada através de estrutura linear aditiva, suavização com B-spline sem intercepto e modelo auto-regressivo de primeira e segunda ordens. Os modelos auto-regressivos seguem estruturas de primeira e segunda ordens para o efeito temporal e foram motivados com base no trabalho de [Waller et al. \(1997a\)](#) que apresenta um modelo linear auto-regressivo através de uma distribuição *a priori*. Os modelos auto-regressivos propostos em nosso trabalho são inseridos no modelo linear generalizado de forma aditiva e, também, como distribuição *a priori*. As definições associadas a estes conceitos e referências sobre o tema encontram-se no Capítulo 2.

A partir dos conceitos e metodologias apresentados no Capítulo 2, é realizada análise de dados reais no Capítulo 3. Os dados reais analisados correspondem a cinco conjuntos de informações. A primeira envolve o conjunto de dados dos efeitos adversos pós-vacinação (EAPV) notificados no período de 2005 a 2010, nos estados brasileiros, utilizado no trabalho de [Perin \(2014\)](#). A segunda aplicação analisa o conjunto de dados de óbitos infantis (com menos de um ano de idade) por residência nos estados brasileiros entre 1991 e 2013 (fonte *MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade*), utilizado em [Silva e Dean \(2006\)](#). A terceira aplicação corresponde ao conjunto de pacientes do sexo masculino hospitalizados com infarto do miocárdio na província de Québec entre os anos de 1993 e 2000, utilizados e gentilmente fornecidos por [Silva et al. \(2008\)](#). A quarta aborda o conjunto de dados sobre a incidência radiação solar disponíveis no *USA National Solar Radiation Data Base (NSRDB)* em períodos mensais entre janeiro de 1960 a dezembro de 2010, utilizados no trabalho de [Pumi et al. \(2015\)](#). A quinta aplicação apresenta o indicador de resistência

a 13 diferentes antibióticos para a bactéria *Salmonella Typhimurium* DT104 com sequências de DNA obtidas a partir de animais e humanos na Escócia no período de 1990 a 2011, usados e gentilmente fornecidos por [Cybis et al. \(2015\)](#) e [Mather et al. \(2013\)](#).

No Capítulo 4 são realizados estudos de simulação com o enfoque clássico com base nos métodos *shrinkage* utilizando o ambiente computacional R. A ideia de se escolher apenas alguns preditores do modelo em estudo e se descartar os demais (ocasionando que, alguns ou até vários, parâmetros se anulem) produz um modelo resultante que é mais fácil de ser interpretado e que possivelmente possua menor erro de predição do que o modelo original (modelo completo). Entretanto, esta ideia corresponde a um procedimento discreto, ou seja, algumas variáveis são inseridas ou descartadas do modelo. Segundo, [Hastie et al. \(2009\)](#) este procedimento, na maioria das vezes, exibe um resultado com alta variância e não reduz o erro de predição para o modelo completo. Os métodos *shrinkage* são: *ridge*, *lasso* e *elastic-net*. Tais métodos apresentam a característica de “continuidade” e não apresentam a característica de alta variabilidade.

No Capítulo 5 são apresentados estudos sobre a ocorrência de Ilhas de *CpG* (*ICpG*) e sobre a proteína *p53* com base nas sequências de DNA de alguns seres vivos e da proteína *p53* de pessoas com câncer. A proteína *p53* é uma proteína citoplasmática, sintetizada pela própria célula e conhecida por ter a propriedade de ser supressora de tumores. No trabalho [Figueira e Lopes \(2013\)](#) (ver Anexo G) são apresentadas comparações entre as sequências de DNA de três cromossomos de diferentes organismos: cromossomo 12 do *Saccharomyces cerevisiae* (fermento do pão), o cromossomo 22 do *Homo sapiens* e o cromossomo 3L da *Drosophila melanogaster* (mosca da fruta). O objetivo é analisar a incidência de dinucleotídeos *CpG* em intervalos da sequência de DNA de cada cromossomo, procurando a existência ou não de ilhas *CpG* (*ICpG*). Algumas simulações de Monte Carlo da ocorrência de metilação em *ICpG* são também apresentadas.

No Capítulo 6 estão as conclusões e considerações sobre o trabalho desenvolvido, bem como, sugestões de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA

Este capítulo apresenta as definições e os resultados que embasam a análise de dados espaço-temporais através da metodologia Bayesiana com uso de modelos lineares generalizados. A característica dos efeitos aleatórios espaciais é modelada através do modelo condicional auto-regressivo intrínseco (CAR), na Seção 2.2.1, e do modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR), na Seção 2.2.2. A característica temporal dos dados é modelada através de estrutura linear aditiva, suavização com B-spline sem intercepto (ver Seção 2.4) e modelo auto-regressivo de primeira e segunda ordens (ver Seção 2.3). Os modelos auto-regressivos seguem estruturas de primeira e segunda ordens para o efeito temporal e foram motivados com base no trabalho de Waller et al. (1997a) que apresenta um modelo linear auto-regressivo através de uma distribuição *a priori*. Os modelos auto-regressivos propostos em nosso trabalho são inseridos no modelo linear generalizado de forma aditiva e, também, como distribuição *a priori*. São apresentados os critérios para a seleção dos modelos em estudo e os algoritmos computacionais envolvidos.

O modelo estudado é dado por

$$\begin{aligned}\mu_{it} &\equiv \mathbb{E}(Y_{it}) \\ g(\mu_{it}) &= \alpha_0 + S_i(t) + R_i,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde Y_{it} é o número de ocorrências ou contagem de um fenômeno aleatório, μ_{it} é a sua esperança matemática, α_0 é uma constante, $S_i(t)$ é o efeito temporal associado à região i e R_i é o efeito aleatório associado à região i , para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$ e $g(\cdot)$ é uma função de ligação. O efeito $S_i(t)$ é modelado através de estrutura linear aditiva, suavização com *B-spline* sem intercepto (ver Silva e Dean, 2006) e modelo auto-regressivo de primeira (ver Torabi, 2013 e Branscum et al., 2008) e segunda ordens. A componente R_i pode ser entendida como uma soma dos efeitos aleatórios correlacionados espacialmente (b_i) e efeitos aleatórios não-correlacionados espacialmente (h_i), ou seja, $R_i = b_i + h_i$.

O vetor \mathbf{b} , de efeitos aleatórios espacialmente correlacionados, é dado por $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)'$ e o vetor \mathbf{h} , de efeitos aleatórios não estruturados espacialmente, é dado por $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)'$.

A expressão (2.1) oferece muitas possibilidades de estruturas para as correlações temporal, espacial e espaço-temporal. Vários trabalhos trazem estas abordagens, tais como Rampaso et al. (2015), Torabi (2013), Silva et al. (2008), Banerjee et al. (2004), Branscum et al. (2008), Waller et al. (1997a) e Besag et al. (1991).

Para a parcela dos efeitos aleatórios correlacionados espacialmente (b_i) do efeito R_i , são apresentados dois modelos com estrutura condicional auto-regressiva. O primeiro deles é o modelo condicional auto-regressivo intrínseco (CAR), apresentado na Seção 2.2.1, proposto por Besag (1974) e utilizado, por exemplo, nos trabalhos de Silva et al. (2008), Branscum et al. (2008) e Torabi (2013).

O segundo modelo para o efeito aleatório associado à região i é o modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR), apresentado na Seção 2.2.2, que tem suas ideias iniciais apresentadas em Cressie (1993) e detalhes adicionais em Stern e Cressie (2000). O modelo PCAR foi utilizado, por exemplo, em Rampaso (2014) e Rampaso et al. (2015).

Para os efeitos aleatórios não-correlacionados espacialmente assume-se que $h_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$. Segundo Waller et al. (1997b) estas correlações do efeito R_i podem ser ignoradas completamente se $b_i = h_i = 0$.

A função de ligação $g(\cdot)$, na expressão (2.1), corresponde a qualquer função monótona e diferenciável. Entretanto, na Seção 2.1, são apresentados alguns casos particulares para $g(\cdot)$. Na expressão (2.1) a função $g(\cdot)$ está relacionada com o modelo geral em estudo e na expressão (2.2), abaixo, a função $g(\cdot)$ corresponde à função identidade associada ao modelo de regressão linear clássico.

2.1 Modelos Lineares Generalizados

Modelos lineares ou modelos de regressão lineares são assim chamados os modelos que apresentam uma relação entre variáveis que seja linear nos parâmetros. Essa linearidade implica que a variação de cada parâmetro é independente da variação dos demais parâmetros do modelo.

Definição 2.1. (Modelo de Regressão Linear). Sejam $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$ e $Y_{it} \sim \mathcal{N}(\mu_{it}, \sigma^2)$ a variável aleatória associada a (i, t) -ésima observação y_{it} . O modelo de regressão linear é dado por

$$\mu_{it} \equiv \mathbb{E}(Y_{it}) = \mathbf{X}'_{it}\boldsymbol{\beta}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{X}_{it} é o vetor de variáveis explicativas, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos.

O termo $\mathbf{X}'_{it}\boldsymbol{\beta}$ que aparece na expressão (2.2) é denominado preditor linear. Para o modelo de regressão linear (ver Definição 2.1) temos a igualdade entre μ_{it} e o preditor linear.

A generalização do modelo de regressão linear apresentado na Definição 2.1 foi proposta por Nelder e Wedderburn (1972) e é obtida através da alteração de duas de suas características:

- (i) a inserção de uma função de ligação $g(\cdot)$, onde $g(\mu_{it}) \equiv \mathbb{E}(Y_{it})$, com $g(\cdot)$ uma função monótona e diferenciável;
- (ii) a variável aleatória Y_{it} deixa de ser exclusivamente uma variável com distribuição de probabilidade normal e passa a ser assumida ter distribuição de probabilidade pertencente à família exponencial uniparamétrica.

A família exponencial (ver Definição 2.2) inclui muitas das distribuições de probabilidade comumente utilizadas na Estatística, tanto distribuições contínuas quanto discretas.

Definição 2.2. (Família Exponencial Uniparamétrica). Sejam $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, Y_{it} uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f_{Y_{it}}(y_{it}|\theta_{it})$ e y_{it} uma realização da variável aleatória Y_{it} . A distribuição de Y_{it} pertence à família exponencial uniparamétrica se $f_{Y_{it}}(y_{it}|\theta_{it})$ puder ser escrita na forma

$$f_{Y_{it}}(y_{it}|\theta_{it}) = S(y_{it}) \exp [Q(\theta_{it})T(y_{it}) - D(\theta_{it})], \quad (2.3)$$

onde θ_{it} é o parâmetro canônico, $S(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $T(\cdot)$ e $D(\cdot)$ são funções conhecidas que assumem valores em subconjuntos dos números reais.

As funções $S(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $T(\cdot)$ não são únicas. Por exemplo, na expressão (2.3), $Q(\theta_{it})$ pode ser multiplicado por uma constante não-nula e $T(y_{it})$ pode ser dividido pela mesma constante.

A expressão (2.3) pode variar em sua forma escrita (ver Bickel e Doksum, 2001 e Rohatgi e Saleh, 2001). Na Definição 2.2, utilizamos a notação empregada por Nelder e Wedderburn (1972), Christensen (1997), Cordeiro e Demétrio (2007) e Fox (2015).

Várias distribuições importantes podem ser escritas na forma (2.3), tais como: Poisson, binomial, Rayleigh, normal, gama e normal inversa (as três últimas com a suposição de que um dos parâmetros é conhecido). Mas detalhes sobre a família de distribuição exponencial uniparamétrica, bem como, sobre sua generalização, podem ser obtidos em Bickel e Doksum (2001) e Rohatgi e Saleh (2001). As distribuições Uniforme e Cauchy não pertencem à família exponencial.

A teoria de Nelder e Wedderburn (1972) para o modelo linear generalizado (*generalized linear model* - GLM) requer que a função de densidade de probabilidade da variável aleatória Y_{it} , $f_{Y_{it}}(\cdot|\theta_{it})$, pertença à família exponencial uniparamétrica, de forma que

$$f_{Y_{it}}(y_{it}|\theta_{it}) = \exp \left[\frac{\omega_{it}}{\nu_{it}} (\theta_{it} y_{it} - r(\theta_{it})) \right] h(\nu_{it}, y_{it}, \omega_{it}), \quad (2.4)$$

onde θ_{it} , ν_{it} e ω_{it} são escalares.

Na expressão (2.4), ω_{it} é uma constante conhecida, ν_{it} é uma constante não-nula, não-conhecida mas não é um parâmetro (ver Nelder e Wedderburn, 1972). Dessa forma, a distribuição de densidade de probabilidade $f_{Y_{it}}(y_{it}|\theta_{it})$ pertence à família exponencial uniparamétrica. De fato, com ν_{it} constante, basta tomar $D(\theta_{it}) = \omega_{it} r(\theta_{it})/\nu_{it}$, $Q(\theta_{it}) = \omega_{it} \theta_{it}/\nu_{it}$, $T(y_{it}) = y_{it}$ e $S(y_{it}) = h(\nu_{it}, y_{it}, \omega_{it})$ em (2.2).

A ideia de Nelder e Wedderburn (1972) para o GLM consiste em abrir o leque de opções para a distribuição da variável resposta, permitindo que a mesma pertença à família exponencial de distribuições uniparamétrica, bem como dar maior flexibilidade para a relação funcional entre a média da variável resposta μ_{it} e o preditor linear $\mathbf{X}'_{it}\beta$. Os autores propuseram, também no mesmo artigo, um processo iterativo para a estimação dos parâmetros e introduziram o conceito de desvio (*deviance*) que tem sido largamente utilizado na avaliação da qualidade do ajuste dos GLMs, bem como, no desenvolvimento de resíduos e medidas de diagnóstico.

Apresentamos a generalização da Definição 2.1 dada pela Definição 2.3 proposta por Nelder e Wedderburn (1972) para o modelo linear generalizado.

Definição 2.3. (Modelo Linear Generalizado). Sejam $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, Y_{it} a variável aleatória com distribuição pertencente à família exponencial uniparamétrica e y_{it} uma realização da variável aleatória Y_{it} . O *modelo linear generalizado* é dado por

$$\begin{aligned} \mu_{it} &\equiv \mathbb{E}(Y_{it}), \\ g(\mu_{it}) &= \mathbf{X}'_{it}\beta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{X}_{it} é o vetor de variáveis explicativas, β é o vetor de parâmetros desconhecidos e $g(\cdot)$ é a função de ligação monótona e diferenciável.

Observação 2.1. Em princípio, qualquer função $g(\cdot)$ monótona e diferenciável pode ser usada como função de ligação. Entretanto, as mais utilizadas e matematicamente convenientes são as funções de ligação canônicas. O termo canônica é utilizado porque estas funções de ligação relacionam μ_{it} (ver expressões (2.1) e (2.5)) ao parâmetro canônico θ_{it} (ver expressão (2.3)) da distribuição de probabilidade assumida para Y_{it} , com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$, de forma que $g(\mu_{it}) = \theta_{it}$.

As funções de ligação canônicas, que aparecem na Definição 2.3, a serem utilizadas em nosso trabalho através da expressão (2.1), são as seguintes:

$$\begin{aligned} g_1(\mu_{it}) &= \ln(\mu_{it}), && \text{no contexto da distribuição Poisson,} \\ g_2(\mu_{it}) &= \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right), && \text{no contexto da distribuição Binomial e} \\ g_3(\mu_{it}) &= \mu_{it}, && \text{no contexto da distribuição Normal.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

A respeito das funções de ligação dadas em (2.6), apresentamos as Proposições 2.1 e 2.2 que tratam dos contextos da distribuição Binomial e da distribuição de Poisson, respectivamente.

Proposição 2.1. *Sejam $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, n_{it} o total de ensaios Bernoulli associados, μ_{it} a probabilidade de sucesso, Y_{it} a variável aleatória com distribuição Binomial, isto é, $Y_{it} \sim \mathcal{B}(n_{it}, \mu_{it})$, $\mu_{it} > 0$ e y_{it} uma realização da variável aleatória Y_{it} . A função de ligação para a distribuição Binomial é dada por*

$$g(\mu_{it}) = \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right). \quad (2.7)$$

Prova: Seja y_{it} uma realização da variável aleatória Y_{it} com distribuição Binomial, $Y_{it} \sim \mathcal{B}(n_{it}, \mu_{it})$. A função densidade de probabilidade de Y_{it} , no valor $y_{it} \in \{0, 1, \dots, n_{it}\}$ com $0 < \mu_{it} < 1$, é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{it}}(y_{it}|\mu_{it}) &= \binom{n_{it}}{y_{it}} (\mu_{it})^{y_{it}} (1-\mu_{it})^{n_{it}-y_{it}}, \\ &= \binom{n_{it}}{y_{it}} (1-\mu_{it})^{n_{it}} \left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)^{y_{it}}, \\ &= \exp[n_{it} \ln(1-\mu_{it})] \exp\left[y_{it} \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)\right] \binom{n_{it}}{y_{it}} \\ &= \exp\left[n_{it} \ln(1-\mu_{it}) + \left[y_{it} \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)\right]\right] \binom{n_{it}}{y_{it}} \\ &= \exp\left[y_{it} \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right) + n_{it}(\ln(1-\mu_{it}))\right] \binom{n_{it}}{y_{it}} \\ &= \exp\left[1 \left(\ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right) y_{it} - (-n_{it}(\ln(1-\mu_{it})))\right)\right] \binom{n_{it}}{y_{it}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Com base nas expressões (2.8) e (2.4), identificamos $\theta_{it} = \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)$, $\omega_{it} = 1$, $\nu_{it} = 1$, $r(\theta_{it}) = -n_{it} \ln(1-\mu_{it})$ e $h(\nu_{it}, y_{it}, \omega_{it}) = \binom{n_{it}}{y_{it}}$.

É conhecido que se $Y_{it} \sim \mathcal{B}(n_{it}, \mu_{it})$ então $\mathbb{E}(Y_{it}) = n_{it}\mu_{it}$ e, a partir da fatoração obtida em (2.8) e da expressão (2.4), sabemos que $g(\mu_{it}) = \theta_{it} = \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)$.

Dessa forma, pela Observação 2.1, a função *logit*, dada por, $g(\mu) = \ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$, é a função de ligação canônica para a distribuição Binomial. ■

Proposição 2.2. *Sejam Y_{it} a variável aleatória com distribuição Poisson, isto é, $Y_{it} \sim \mathcal{P}(\mu_{it})$, $\mu_{it} > 0$ e y_{it} uma realização desta variável aleatória, para $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$. A função de ligação canônica para a distribuição de Poisson é dada por*

$$g(\mu_{it}) = \ln(\mu_{it}). \quad (2.9)$$

Prova: Seja y_{it} uma realização da variável aleatória Y_{it} com distribuição Poisson, $Y_{it} \sim \mathcal{P}(\mu_{it})$. A

função densidade de probabilidade de Y_{it} , no valor $y_{it} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ com $\mu_{it} > 0$, é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{it}}(y_{it}|\mu_{it}) &= \frac{\exp(-\mu_{it})(\mu_{it})^{y_{it}}}{y_{it}!}, \\ &= \exp(-\mu_{it}) \exp(y_{it} \ln(\mu_{it})) \left(\frac{1}{y_{it}!}\right), \\ &= \exp[1 \ln(\mu_{it})y_{it} - \mu_{it}] \left(\frac{1}{y_{it}!}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Com base nas expressões (2.10) e (2.4), identificamos $\theta_{it} = \ln(\mu_{it})$, $\omega_{it} = 1$, $\nu_{it} = 1$, $r(\theta_{it}) = \mu_{it}$ e $h(\nu_{it}, y_{it}, \omega_{it}) = 1/y_{it}!$.

É conhecido que se $Y_{it} \sim \mathcal{P}(\mu_{it})$ para $\mu_{it} > 0$ então $\mathbb{E}(Y_{it}) = \mu_{it}$ e, a partir de (2.10), sabemos que $g(\mu_{it}) = \theta_{it} = \ln(\mu_{it})$.

Dessa forma, pela Observação 2.1, $g(\mu) = \ln(\mu)$ é a função de ligação canônica para a distribuição de Poisson. ■

Mais informações sobre o modelo GLM e diferentes funções de ligação podem ser obtidas em [Agresti \(2015\)](#), [Gelman e Hill \(2007\)](#), [Dey et al. \(2000\)](#), [Hastie e Tibshirani \(1990\)](#) e [McCullagh e Nelder \(1983\)](#).

2.2 Modelo Condicional Auto-Regressivo

A característica dos efeitos aleatórios espaciais ou efeitos aleatórios correlacionados espacialmente, denotados por b_i , para $i \in \{1, \dots, N\}$, é dada através do modelo condicional auto-regressivo intrínscio (CAR) e do modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR), ambos conhecidos na literatura como modelos condicionais auto-regressivos. O efeito aleatório b_i é parte integrante da parcela R_i (parcela de efeitos aleatórios) na expressão (2.1).

A distribuição normal multivariada é utilizada para representar a distribuição conjunta dos efeitos aleatórios correlacionados por ser de fácil manipulação e bastante flexível. Dessa forma assume-se que

$$\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (2.11)$$

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$ é um vetor de médias e $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz de variâncias-covariâncias que considera a estrutura espacial que apresenta a estrutura de vizinhos e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)'$ é o vetor de efeitos aleatórios correlacionados espacialmente.

Seja N o número de regiões em estudo. De um modo geral, considera-se que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{\Phi} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Phi} = (\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}, \quad (2.12)$$

em que σ^2 é o parâmetro de variância, \mathbf{I} é a matriz identidade $N \times N$, κ é o parâmetro de dependência espacial, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ é a matriz de associação espacial com zeros em sua diagonal principal que apresenta a estrutura de vizinhos e $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ é uma matriz diagonal.

Os modelos para \mathbf{b} na expressão (2.11) são especificados com base em N distribuições condicionais $f(b_i|\mathbf{b}_{-i})$, onde $\mathbf{b}_{-i} = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_N)'$ é o vetor \mathbf{b} sem a i -ésima componente. Para que estes modelos sejam válidos é preciso que $\boldsymbol{\Phi}$, apresentada em (2.12), seja matriz simétrica e positiva definida.

Na sequência serão apresentados alguns resultados a respeito do modelo condicional auto-regressivo. Estes resultados irão nos permitir a conclusão (ver Proposição 2.6) de que a especificação condicional de $b_i | \mathbf{b}_{-i}$ corresponde à distribuição conjunta normal multivariada.

Proposição 2.3. *Sejam $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ e $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ como na expressão (2.12). Se $m_{jj}c_{ij} = m_{ii}c_{ji}$, para $i, j \in \{1, \dots, N\}$ então Φ é matriz simétrica.*

Prova: Basta analisar Φ^{-1} , pois se uma matriz é simétrica sua inversa também é simétrica. A partir da expressão (2.12) temos que Φ^{-1} é dada por

$$\Phi^{-1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I} - \kappa\mathbf{C}). \quad (2.13)$$

A matriz identidade corresponde à sua própria matriz inversa e a matriz \mathbf{M}^{-1} é uma matriz diagonal de forma que $\mathbf{M}^{-1} = (1/m_{ii})_{i=1}^N$. Para haver simetria em Φ^{-1} é preciso que o termo de posição (i, j) seja equivalente ao termo de posição (j, i) . Segue por propriedade de multiplicação de matrizes que o termo de posição (i, j) no produto dado por (2.13) é dado por $\kappa c_{ij}/m_{ii}$ e o termo de posição (j, i) é dado por $\kappa c_{ji}/m_{jj}$.

Por hipótese, $m_{jj}c_{ij} = m_{ii}c_{ji}$ segue que $\kappa c_{ij}/m_{ii} = \kappa c_{ji}/m_{jj}$. Portanto, isso nos garante que Φ é matriz simétrica. ■

Proposição 2.4. *Sejam $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$, $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ e κ como na expressão (2.12). Então a matriz Φ pode ser expressa como*

$$\Phi = \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{I} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2})^{-1}\mathbf{M}^{1/2}, \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{M}^{-1/2}$ é $(\mathbf{M}^{-1})^{1/2}$.

Prova: Aqui usamos novamente a expressão para Φ^{-1} apresentada em (2.13). Usando recursos de álgebra de matrizes, temos que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I} - \kappa\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{I} \\ &= \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{-1/2} \\ &= \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{M}^{-1/2} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{-1/2}) \\ &= \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{I} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2})\mathbf{M}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{M}^{-1/2}$ é $(\mathbf{M}^{-1})^{1/2}$.

Calculando a inversa da expressão obtida em (2.15), através de álgebra matricial, segue o resultado dado pela expressão (2.14). ■

Proposição 2.5. *Sejam $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ e $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ como na expressão (2.12). Então o traço da matriz $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ é igual a zero, isto é, $\text{tr}(\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}) = 0$.*

Prova: Como a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ tem termos nulos na diagonal principal, resulta que os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ também são todos nulos. Logo, segue que o $\text{tr}(\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}) = 0$. ■

Corolário 2.1. *Sejam as hipóteses da Proposição 2.5. Sejam λ_{\min} e λ_{\max} os valores corresponden-*

tes, respectivamente, ao menor e maior autovalor da matriz $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$. Então $\lambda_{\min} < 0 < \lambda_{\max}$.

Prova: Seja λ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ autovalor de $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$. Segue da Proposição 2.5 que a soma dos autovalores da matriz $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ é nula, ou seja, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$. Dessa forma, existem l_1 e l_2 , com $l_1, l_2 \in \{1, \dots, N\}$, tais que $\lambda_{\min} = \lambda_{l_1} = \min_j(\lambda_j)$ e $\lambda_{\max} = \lambda_{l_2} = \max_j(\lambda_j)$. E, ainda, $\lambda_{\min} < 0$ e $\lambda_{\max} > 0$. ■

Nosso objetivo é verificar se a matriz Φ , definida na expressão (2.12), é positiva definida. Para tal apresentamos a Definição 2.4 e o Lema 2.1.

Definição 2.4. (Matriz positiva definida). Uma matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ é positiva definida se $\mathbf{u}'\mathbf{B}\mathbf{u} > 0$, para todo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)'$ não-nulo.

Lema 2.1. Seja $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ uma matriz simétrica e invertível. Então $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ é uma matriz positiva definida se, e somente se, $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}$ é matriz positiva definida.

Prova: Seja $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)'$ não-nulo como na Definição 2.4. Assuma por hipótese que $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ é matriz positiva definida. Como \mathbf{A} é invertível temos que $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}$ o que nos dá a informação que $\mathbf{A}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. E, desta forma, $(\mathbf{u}'\mathbf{A})\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{u}) > 0$, para qualquer \mathbf{u} não-nulo. Assim, $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}$ é matriz positiva definida.

Considere, por hipótese, que $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}$ é matriz positiva definida. Por um argumento semelhante ao feito anteriormente, temos que

$$\mathbf{u}'\mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})'\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) > 0, \quad (2.16)$$

ou seja, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ é uma matriz positiva definida. ■

Teorema 2.1. Sejam $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$, $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ e κ como na expressão (2.12) e λ_i , com $i \in \{1, \dots, N\}$, os autovalores em ordem crescente da matriz $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$. Então $\kappa \in \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_N}\right)$ se, e somente se, $\Phi = (\mathbf{I} - \kappa\mathbf{C})^{-1}\mathbf{M}$ é matriz positiva definida.

Prova: Vamos provar a afirmação para Φ^{-1} pois decorre de propriedade de matrizes se Φ^{-1} for positiva definida, sua matriz inversa Φ também será.

Suponha que $\kappa \in \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_N}\right)$. Nosso intuito é verificar se Φ^{-1} possui todos os autovalores positivos.

Usando a Proposição 2.4 e fazendo $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ no Lema 2.1, temos que Φ^{-1} é matriz positiva definida se, e somente, se $\mathbf{I} - \kappa\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ for matriz positiva definida.

Sabemos que $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ é matriz simétrica e, portanto, existe uma matriz ortonormal \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (2.17)$$

onde a expressão $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ no lado direito da equação (2.17) denota a matriz diagonal com entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

A partir da equação (2.17) temos

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2})\mathbf{P} = \mathbf{I} - \kappa\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \text{diag}(1 - \kappa\lambda_1, \dots, 1 - \kappa\lambda_N). \quad (2.18)$$

Uma consequência da expressão (2.18) é que as matrizes $\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{1/2}$ e $\text{diag}(1 - \kappa\lambda_1, \dots, 1 - \kappa\lambda_N)$ são similares, ou seja, possuem os mesmos autovalores. Para concluir a prova, basta verificar

que $1 - \kappa\lambda_i > 0$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$.

Usando o Corolário 2.1, $\lambda_1 < 0 < \lambda_N$. Para $\lambda_i > 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda_1} < \kappa < \frac{1}{\lambda_N} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < \kappa\lambda_i < \frac{\lambda_i}{\lambda_N} < 1. \quad (2.19)$$

Para $\lambda_i < 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda_1} < \kappa < \frac{1}{\lambda_N} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_N} < \kappa\lambda_i < \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1. \quad (2.20)$$

Em ambos os casos, representados pelas expressões (2.19) e (2.20), temos que $1 - \kappa\lambda_i > 0$, para qualquer i .

Agora vamos mostrar que $\kappa \in \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_N}\right)$ é necessário para que Φ seja matriz positiva definida. Suponha, por absurdo, que $\kappa \notin \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_N}\right)$. Ou seja, $\kappa \leq \frac{1}{\lambda_1}$ ou $\kappa \geq \frac{1}{\lambda_N}$.

Para o caso $\kappa \leq \frac{1}{\lambda_1}$, lembrando que $\lambda_1 < 0$, segue que

$$\kappa \leq \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow \kappa\lambda_1 \geq 1 \Rightarrow 1 - \kappa\lambda_1 \leq 0. \quad (2.21)$$

Para o caso $\kappa \geq \frac{1}{\lambda_N}$, segue que

$$\kappa \geq \frac{1}{\lambda_N} \Rightarrow \kappa\lambda_N \geq 1 \Rightarrow 1 - \kappa\lambda_N \leq 0. \quad (2.22)$$

Em ambos os casos representados pelas expressões (2.21) e (2.22) temos absurdo e, portanto, $\kappa \notin \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_N}\right)$. Concluimos que Φ^{-1} é matriz positiva definida. ■

Em situações práticas, a dependência espacial denotada por κ é um número positivo. Dessa forma, assume-se que $\kappa \in (0, 1/\lambda_N)$. Conseqüentemente, um valor de κ nulo corresponde ao caso em que há independência espacial.

Definição 2.5. (Vizinhança). Duas regiões i e j , para $i, j \in \{1, \dots, N\}$, são ditas *vizinhas* se i e j partilham fronteira em comum.

A notação $i \sim j$ é usada para especificar que as regiões i e j são vizinhas. A relação de vizinhança não é uma relação de equivalência. De fato, se $i \sim j$ e $j \sim k$ não é verdade que $i \sim k$. Existem outras formas de definir vizinhança neste contexto. Mais informações a respeito podem ser encontradas em Cressie (1993).

As distribuições condicionais completas de um modelo CAR podem ser definidas como

$$b_i | \mathbf{b}_{-i} \sim \mathcal{N} \left(\mu_i + \kappa \sum_{j: i \sim j} c_{ij} (b_j - \mu_j), \sigma^2 m_{ii} \right). \quad (2.23)$$

Para mostrar que a especificação condicional dada por (2.23) resulta na distribuição conjunta normal multivariada apresentada em (2.11) é preciso o Teorema 2.2 conhecido como Teorema da Fatoração (ver Besag, 1974, Cressie, 1993 e Rampaso, 2014).

Para provar o Teorema 2.2 assumimos a Condição de Positividade de Hammersley e Clifford (1971), apresentada na Definição 2.6.

Definição 2.6. (Condição de Positividade). Sejam a coleção finita de variáveis aleatórias X_i que

estão associadas às regiões i e x_i uma realização da variável aleatória X_i , para $i \in \{1, \dots, N\}$, respectivamente. Se x_1, \dots, x_N podem ocorrer individualmente nas regiões $1, \dots, N$, então x_1, \dots, x_N podem ocorrer conjuntamente. Matematicamente, se $\mathbb{P}(x_i) > 0$, para $i \in \{1, \dots, N\}$, então $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_N) > 0$.

Teorema 2.2. (Teorema da Fatoração). *Seja a Condição de Positividade apresentada na Definição 2.6. Seja o espaço amostral $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbb{P}(\mathbf{x}) > 0\}$ o conjunto de todas as possíveis realizações de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)'$ para, $i \in \{1, \dots, N\}$, e seja $\mathbb{P}(\cdot)$ a função de probabilidade conjunta. Então, para duas realizações \mathbf{x} e \mathbf{y} de Ω , temos que*

$$\frac{\mathbb{P}(\mathbf{x})}{\mathbb{P}(\mathbf{y})} = \prod_{i=1}^N \frac{\mathbb{P}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)}{\mathbb{P}(y_i | x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)}. \quad (2.24)$$

Prova: Pela definição de probabilidade condicional, temos que

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(x_N | x_1, \dots, x_{N-1}) \mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1}).$$

Aqui, $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1})$ não pode ser fatorada já que $\mathbb{P}(x_N | x_1, \dots, x_{N-1})$ não é facilmente obtida das distribuições condicionais dadas. Com a introdução de y_N no termo $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1})$, segue que

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{P}(x_N | x_1, \dots, x_{N-1})}{\mathbb{P}(y_N | x_1, \dots, x_{N-1})} \mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N).$$

Por hipótese, temos que o denominador é sempre positivo. Usando agora x_{N-1} em $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N)$, tem-se a expressão

$$\mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N) = \frac{\mathbb{P}(x_{N-1} | x_1, \dots, x_{N-2}, y_N)}{\mathbb{P}(y_{N-1} | x_1, \dots, x_{N-2}, y_N)} \mathbb{P}(x_1, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}, y_{N-1}, y_N),$$

com a mesma introdução para y_{N-1} . Usa-se novamente a hipótese $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_N) > 0$, e continuando este processo obtemos a expressão (2.24). ■

Observação 2.2. O Teorema 2.2 tem uma versão para variáveis aleatórias contínuas, em que a função de probabilidade conjunta $\mathbb{P}(\cdot)$, na expressão (2.24), é substituída pela função densidade de probabilidade $f(\cdot)$ (para maiores detalhes ver Cressie, 1993).

Para os próximos resultados é necessário definir a matriz de associação espacial, denotada por $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$. Os elementos da matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ (ver expressão (2.12)) são dados por

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j}^N = \begin{cases} 1/N_i, & \text{se as regiões } i \text{ e } j \text{ forem adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.25)$$

sendo N_i o número de vizinhos da região i .

A partir do Teorema 2.2, podemos apresentar a Proposição 2.6.

Proposição 2.6. *Sejam σ^2 , $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ como na expressão (2.25), $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ e $\kappa \in [0, 1]$ como na expressão (2.12). A especificação $b_i | \mathbf{b}_{-i} \sim \mathcal{N}(\mu_i + \kappa \sum_{j:i \sim j} c_{ij} (b_j - \mu_j), \sigma^2 m_{ii})$ implica que $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 (\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M})$, com $(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})$ invertível e $(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}$ simétrica e positiva definida.*

Prova: Utilizando o Teorema 2.2 para densidades de probabilidade e fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}$ na

expressão (2.24), tem-se que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{f(\mathbf{b})}{f(\boldsymbol{\mu})}\right) &= -\frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \left(b_i - \mu_i - \kappa \sum_{j=1}^n c_{ij}(b_j - \mu_j) \right)^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \left(\kappa \sum_{j=1}^n c_{ij}(b_j - \mu_j) \right)^2 \\
&= -\frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n (b_i - \mu_i)^2 + \frac{1}{\sigma_i^2} \kappa \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(b_i - \mu_i)(b_j - \mu_j) \\
&= -\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

O lado direito em (2.26) é o expoente de uma distribuição normal multivariada N -dimensional com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de variâncias-covariâncias $(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}$. ■

Uma consequência da Proposição 2.6 é que a função de densidade de probabilidade conjunta do modelo CAR em (2.26) pode ser expressa como

$$f(\mathbf{b}) = (2\pi)^{-N/2} \det(\mathbf{M})^{-1/2} \det(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{C})(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \tag{2.27}$$

onde $\det(\cdot)$ indica a função determinante.

2.2.1 Modelo Condicional Auto-Regressivo Intrínseco

Um dos modelos CAR mais simples é o modelo condicional auto-regressivo intrínseco (CAR) proposto por Besag et al. (1991). Neste modelo a matriz de variâncias-covariâncias $\sigma^2 \boldsymbol{\Phi}$, apresentada em (2.12), não é positiva definida. Devido a esta característica o modelo CAR é dito impróprio e a expressão (2.27) não pode ser usada para se obter a função de verossimilhança para os dados mas somente como uma função de distribuição *a priori*.

O modelo CAR assume que os elementos da matriz diagonal $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ (ver expressão (2.12)) são dados por $m_{ii} = 1/N_i$, sendo N_i o número de vizinhos da região i , que $\kappa = 1$ (ver Assunção e Krainski, 2009 e Besag et al., 1991) e os elementos da matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ de associação espacial são dados como na expressão (2.25).

Proposição 2.7. *Seja a matriz diagonal $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ cujos componentes são tais que $m_{ii} = 1/N_i$, onde N_i é o número de vizinhos da região i . Seja $\kappa = 1$ e seja $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ a matriz de associação espacial dada pela expressão (2.25). Então, a distribuição condicional completa de $b_i | \mathbf{b}_{-i}$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, pode ser expressa como*

$$b_i | \mathbf{b}_{-i} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j, \frac{\sigma^2}{N_i}\right). \tag{2.28}$$

Prova: Usando as especificações para os elementos c_{ij} dadas em (2.25), $m_{ii} = 1/N_i$ e $\kappa = 1$, a média na expressão (2.23) fornece

$$\mathbb{E}(b_i | \mathbf{b}_{-i}) = \mu_i + \kappa \sum_{j:i \sim j} c_{ij}(b_j - \mu_j) = \mu_i + \sum_{j:i \sim j} \frac{1}{N_i}(b_j - \mu_j). \tag{2.29}$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\mu_i = 0$, para $i \in \{1, \dots, N\}$. O somatório $\sum_{j:i \sim j}$, na expressão (2.29), está comparando todos os vizinhos de i . Portanto, N_i , que é o número de vizinhos da região i , está fixo e pode ser retirado da soma. Dessa forma, $\mathbb{E}(b_i | \mathbf{b}_{-i}) = \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j$. Para a variância, a expressão (2.23) diz que $\text{Var}(b_i | \mathbf{b}_{-i}) = \sigma^2 m_{ii}$. Como $m_{ii} = 1/N_i$ segue que

$$\text{Var}(b_i | \mathbf{b}_{-i}) = \frac{\sigma^2}{N_i}. \quad \blacksquare$$

A expressão (2.28) obtida na Proposição 2.7 pode ser interpretada como se a esperança condicional do efeito aleatório b_i para a região i é a média dos efeitos aleatórios dos vizinhos à região i . Se olharmos para a estrutura de variância temos que quanto maior o número de vizinhos da região i , representados por N_i , maior a precisão condicional de b_i . A força de dependência espacial entre os efeitos aleatórios é considerada máxima pelo fato de considerar $\kappa = 1$.

Dado que o modelo CAR é um modelo impróprio é conveniente assumir que os efeitos tem média zero e, também, é necessária uma restrição para que os efeitos aleatórios somem zero, ou seja, $\sum_{i=1}^N b_i = 0$. Esta restrição é feita numericamente às amostras de b_i em torno de sua própria média (para maiores detalhes ver Rampaso, 2014 e Best et al., 2005).

2.2.2 Modelo Condicional Auto-Regressivo Próprio

O modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR) ou modelo de Cressie é uma alternativa quando o nível de dependência espacial não está fixo no valor máximo e se deseja captar κ em diferentes níveis. Detalhes sobre esse modelo podem ser encontrados em Cressie (1993) e Stern e Cressie (2000).

A mesma especificação usada no modelo CAR para as matrizes $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ e $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ são consideradas aqui. Ou seja, c_{ij} é dado pela expressão (2.25) e $m_{ii} = 1/N_i$, onde N_i é o número de vizinhos da região i , para $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Observação 2.3. Conforme visto na Proposição 2.7 o valor máximo para κ é 1 e corresponde ao modelo CAR. Assim, é plausível para o modelo PCAR que $0 \leq \kappa < 1$.

Proposição 2.8. *Sejam $\mathbf{M} = (m_{ii})_{i=1}^N$ com $m_{ii} = 1/N_i$, onde N_i o número de vizinhos da região i , $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ com c_{ij} como na expressão (2.25) e $\kappa \in [0, 1)$. Então, a distribuição condicional completa de $b_i | \mathbf{b}_{-i}$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, pode ser expressa como*

$$b_i | \mathbf{b}_{-i} \sim \mathcal{N} \left(\kappa \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j, \frac{\sigma^2}{N_i} \right). \quad (2.30)$$

Prova: Semelhante à prova da Proposição 2.7. \blacksquare

A variância condicional para o modelo PCAR (ver expressão (2.28)) é a mesma que foi obtida para o modelo CAR (ver expressão (2.30)). Entretanto, a esperança condicional do modelo PCAR pode ser interpretada como a média ponderada entre a média local dos efeitos aleatórios, com peso κ , e a média geral nula, com peso $1 - \kappa$:

$$\mathbb{E}(b_i | \mathbf{b}_{-i}) = (1 - \kappa) \times 0 + \kappa \times \frac{1}{n_i} \sum_{j:i \sim j} b_j.$$

Observação 2.4. Quando $\kappa = 0$ considera-se o caso de independência espacial, já que os valores irão se concentrar ao redor da mesma média zero. Valores próximos de 1 para κ indicam forte correlação espacial.

2.3 Modelo Auto-Regressivo

A componente $S_i(t)$, para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$, na segunda equação da expressão (2.1), pode ser apresentada como um modelo auto-regressivo de ordem p , denotado por $AR(p)$, associando o efeito temporal para a região i através de uma estrutura auto-regressiva de ordem p para o tempo t .

Esta estrutura temporal auto-regressiva para o efeito temporal pode ser inserida no modelo através de uma distribuição *a priori* ou de um efeito linear aditivo. Vamos descrever, abaixo, os oito modelos $AR(p)$ a serem considerados neste trabalho, denotados por A_ι com $\iota \in \{1, \dots, 8\}$.

Os modelos A_ι com $\iota \in \{1, \dots, 4\}$ correspondem a um modelo auto-regressivo de ordem 1, sendo que os modelos A_1 e A_2 são definidos através de uma distribuição *a priori* e os modelos A_3 e A_4 são definidos através de uma estrutura aditiva. Os modelos A_ι com $\iota \in \{5, \dots, 8\}$ correspondem a um modelo auto-regressivo de ordem 2, sendo que os modelos A_5 e A_6 são definidos através de uma distribuição *a priori* e os modelos A_7 e A_8 são definidos através de uma estrutura aditiva. Todos estes modelos correspondem à parcela $S_i(t)$ na segunda equação da expressão (2.1).

Modelo A_1 : O modelo A_1 denota um processo auto-regressivo de ordem 1 para o efeito temporal através de uma distribuição *a priori* e é dado pela expressão

$$A_1(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_1(t-1) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_1}^2), \quad (2.31)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$ e $|\rho| < 1$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Este modelo foi proposto por Waller et al. (1997b) para a modelagem do efeito temporal em dados com estrutura espaço-temporal e tendência linear. Para este modelo, os autores deixam o valor de ρ livre, entretanto, em nosso trabalho foi considerado $|\rho| < 1$ para garantir convergência das cadeias de Markov, associadas aos modelos, quando nas simulações de Monte Carlo. Com base no modelo dado por (2.31), apresentamos o modelo A_2 dado pela expressão (2.32).

Modelo A_2 : O modelo A_2 denota um processo auto-regressivo de ordem 1, estacionário, para o efeito temporal através de uma distribuição *a priori* e é dado pela expressão

$$A_2(t) \sim \mathcal{N}(\phi_0 + \phi_1 A_2(t-1), \sigma_{A_2}^2), \quad (2.32)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$ e $|\phi_1| < 1$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Observação 2.5. O modelo A_2 pode ser visto como um caso particular do modelo A_1 quando $\phi_1 = 0$ (no modelo A_1) e $\phi_1 = \rho$ (no modelo A_2).

Os modelos A_1 e A_2 (respectivamente, expressões (2.31) e (2.32)) são especificados como distribuições *a priori*. A principal diferença entre estes modelos é que no modelo A_1 temos o hiperparâmetro ρ que pondera o efeito da parcela ϕ_t , para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Observação 2.6. O modelo A_2 é caso particular do modelo A_1 quando, simultaneamente, $\phi_t = 0$ (no modelo A_1) e ϕ_0 e $\phi_1 = \rho$ (no modelo A_2).

Modelo A_3 : O modelo A_3 corresponde a um efeito temporal auto-regressivo de ordem 1 estacionário, aditivo e linear, dado por

$$A_3(t) = \phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t, \quad (2.33)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Conforme apresentamos na Proposição 2.9, a seguir, temos que $\mathbb{E}(A_3(t)) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ e $\text{Var}(A_3(t)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2}$.

Proposição 2.9. *Considere o modelo auto-regressivo de ordem 1, estacionário, como na expressão (2.33). Se $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ então, para $t \in \{1, \dots, T\}$,*

$$(i) \quad \mathbb{E}(A_3(t)) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1},$$

$$(ii) \quad \text{Var}(A_3(t)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2}.$$

$$(iii) \quad A_3(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1}, \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2}\right).$$

Prova: Calculando a esperança da expressão (2.33), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_3(t)) &= \mathbb{E}(\phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t) \\ &= \phi_0 + \phi_1 \mathbb{E}(A_3(t-1)). \end{aligned}$$

Usando a hipótese de estacionariedade, ou seja, $\mathbb{E}(A_3(t)) = \mu_{A_3}$, para todo t e $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, então para $|\phi_1| \neq 1$ temos que

$$\begin{aligned} \mu_{A_3}(1-\phi_1) &= \phi_0 \\ \mu_{A_3} &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1}. \end{aligned}$$

Para o cálculo de $\text{Var}(A_3(t)) = \sigma_{A_3}^2$ temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(A_3(t)) &= \text{Var}(\phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t) \\ &= 0 + \phi_1^2 \text{Var}(A_3(t-1)) + \sigma_\epsilon^2, \end{aligned} \tag{2.34}$$

já que $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Como o processo é estacionário, da expressão (2.34), e sabendo que $|\phi_1| < 1$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(A_3(t))(1-\phi_1^2) &= \sigma_\epsilon^2 \\ \sigma_{A_3}^2 &= \text{Var}(A_3(t)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2}. \end{aligned}$$

Usando a hipótese $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e a expressão (2.33), temos $A_3(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1}, \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi_1^2}\right)$. E assim segue o resultado. ■

Semelhante ao modelo A_3 apresentamos também o modelo A_4 .

Modelo A_4 : O modelo A_4 corresponde a um efeito temporal auto-regressivo de ordem 1, aditivo e linear, dado por

$$A_4(t) = \phi_t + \rho(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \epsilon_t, \tag{2.35}$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho| < 1$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Conforme apresentamos na Proposição 2.10, a seguir, determinamos a esperança matemática e a variância de $A_4(t)$, para todo $t \in \{1, \dots, T\}$.

Proposição 2.10. *Considere o modelo auto-regressivo de ordem 1, aditivo e linear, como na expressão (2.35). Então, para $t \in \{1, \dots, T\}$,*

$$(i) \mathbb{E}(A_4(t)) = \phi_t,$$

$$(ii) \text{Var}(A_4(t)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2}.$$

Prova: Seja $A_4(t) = \phi_t + \rho(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \epsilon_t$, para $t \in \{1, \dots, T\}$. Assumindo que $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, para $\forall t \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\begin{aligned} A_4(t) &= \phi_t + \rho(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= \phi_t + \rho[\mathcal{B}(A_4(t)) - \phi_{t-1}] + \epsilon_t, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde \mathcal{B} é o operador defasagem dado por $\mathcal{B}^k(X_t) = X_{t-k}$, para $k \in \mathbb{Z}$. Isolando o termo $A_4(t)$ em (2.36), temos

$$\begin{aligned} (1 - \rho\mathcal{B})A_4(t) &= \phi_t - \rho\phi_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \phi_0 + \phi_1 t - \rho(\phi_0 + \phi_1(t-1)) + \epsilon_t \\ &= \phi_0(1 - \rho) + \phi_1\rho + \phi_1(1 - \rho)t + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dessa forma, com base na expressão (2.37), segue que

$$\begin{aligned} A_4(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \mathcal{B}^k [(\phi_0(1 - \rho) + \phi_1\rho) + \phi_1(1 - \rho)t + \epsilon_t] \\ &= (\phi_0(1 - \rho) + \phi_1\rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k + \phi_1(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (t - k) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \epsilon_{t-k}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

para $|\rho| < 1$. Como $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, o cálculo da $\text{Var}(A_4(t))$, a partir da expressão (2.38), resulta em

$$\text{Var}(A_4(t)) = \text{Var} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \epsilon_{t-k} \right) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2},$$

onde $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$ é obtido através da soma de uma progressão geométrica infinita com primeiro termo 1 e razão ρ , com $|\rho| < 1$.

Agora, usando as igualdades

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1 - \rho} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2},$$

e aplicando o operador esperança matemática na expressão (2.38), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_4(t)) &= \mathbb{E} \left((\phi_0(1 - \rho) + \phi_1\rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k + \phi_1(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (t - k) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \epsilon_{t-k} \right) \\ &= (\phi_0(1 - \rho) + \phi_1\rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k - \phi_1(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k + \phi_1(1 - \rho)t \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k + 0 \\ &= \phi_0 + \phi_1 \frac{\rho}{(1 - \rho)} + \phi_1 t \\ &= \phi_0 + \phi_1 t \\ &= \phi_t. \end{aligned}$$



Observação 2.7. O modelo A_4 é caso particular do modelo A_3 quando, simultaneamente, $\phi_t = 0$ (no modelo A_3) e ϕ_0 e $\phi_1 = \rho$ (no modelo A_4).

Com base no modelo A_1 , proposto por Waller et al. (1997b), apresentamos também o modelo A_5 .

Modelo A_5 : O modelo A_5 denota um efeito temporal auto-regressivo de ordem 2, não-estacionário, através de uma distribuição *a priori*, dado pela expressão

$$A_5(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho_1(A_5(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_5(t-2) - \phi_{t-2}), \sigma_{A_5}^2), \quad (2.39)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho_1| < 1$ e $|\rho_2| < 1$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Com base no modelo A_5 , proposto em (2.39), apresentamos também o modelo A_6 .

Modelo A_6 : O modelo A_6 denota um efeito temporal auto-regressivo de ordem 2, não-estacionário, através de uma distribuição *a priori*, dado pela expressão

$$A_6(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_6(t-1) + A_6(t-2) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_6}^2), \quad (2.40)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$ e $|\rho| < 1$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Os modelos A_5 e A_6 são especificados por distribuições *a priori* na parcela $S_i(t)$ da expressão (2.1).

Modelo A_7 : O modelo A_7 corresponde a um efeito temporal auto-regressivo de ordem 2, não-estacionário, aditivo e linear, dado por

$$A_7(t) = \phi_t + \rho_1(A_7(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_7(t-2) - \phi_{t-2}) + \epsilon_t, \quad (2.41)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Modelo A_8 : O modelo A_8 corresponde a um efeito temporal auto-regressivo de ordem 2, não-estacionário, aditivo e linear, dado por

$$A_8(t) = \phi_0 + \phi_1 A_8(t-1) + \phi_2 A_8(t-2) + \epsilon_t, \quad (2.42)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$, $|\phi_2| < 1$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

Observação 2.8. Nos modelos A_5 , A_6 e A_7 assumimos $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ e no modelo A_8 assumimos $|\phi_1| < 1$ e $|\phi_2| < 1$ para garantir a convergência das cadeias de Markov, associadas aos modelos, quando nas simulações de Monte Carlo.

Observação 2.9. O modelo A_8 será estacionário se $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$.

Mais informações a respeito de modelos auto-regressivos de ordem p , $AR(p)$, podem ser encontradas em Jiru (2008), Hamilton (1994) e Brockwell e Davis (1991).

2.4 Funções B-Splines

A componente $S_i(t)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$, na expressão (2.1) pode ser suavizada com uso de *B-splines* (ver Silva e Dean, 2006, Silva et al., 2008 e Torabi, 2013).

Uma *B-spline* é uma generalização da curva de Bézier. A curva de Bézier é obtida através de uma soma com a ponderação de funções que formam uma base (base de Bézier) e que são usadas como pesos. Para maiores detalhes sobre a curva de Bézier e a base de Bézier indicamos Gallier (1999) e Prautzsch et al. (2002).

Observação 2.10. As funções que definem uma base *B-spline* são usadas de forma semelhante à base de Bézier, entretanto, sua estrutura é mais complexa. Uma base *B-spline*, assim como uma base de Bézier, possui duas propriedades muito importantes

- (i) o domínio da função está subdividido em nós,
- (ii) as funções que compõem a base são não-nulas em todo o intervalo.

Existem muitas formas de se determinar uma base *B-spline*, como por exemplo, o algoritmo apresentado em De Boor (2001) que é descrito a seguir.

Seja $\mathcal{S}(\tau_1, \dots, \tau_l; k)$ um espaço linear de todos os *splines* de grau k com uma sequência de posições de fronteira (τ_1, \dots, τ_l), conhecidos por nós internos (*inner-knots*), que particionam um intervalo $[a, b)$. Pode-se verificar que a dimensão do espaço é igual a $l + k + 1$, ou seja, esse é o total de parâmetros necessários para descrever um membro de $\mathcal{S}(\tau_1, \dots, \tau_l; k)$.

A construção da base *B-spline*, denotada por $(B_{-k,k}, \dots, B_{-1,k}, B_{0,k}, B_{1,k}, \dots, B_{l,k})$, é então feita usando o Algoritmo 2.1 (ver De Boor, 2001 e Silva e Dean, 2006):

Algoritmo 2.1. (Algoritmo Recursivo de De Boor). Sejam k o grau do *spline* e l o número de nós internos que particionam o intervalo $[a, b)$. Para se obter a base *B-spline*, denotada por $(B_{-k,k}, \dots, B_{-1,k}, B_{0,k}, B_{1,k}, \dots, B_{l,k})$, seguem-se as seguintes etapas:

- (i) Assume-se que existem $k + 1$ nós coincidentes com cada um dos limites do intervalo $[a, b)$ e l nós internos, ou seja,

$$\tau_{-k} = \dots = \tau_{-1} = \tau_0 = a < \tau_1 < \dots < \tau_l < b = \tau_{l+1} = \dots = \tau_{l+k+1}.$$

- (ii) Para $k = 0$, define-se $B_{r,0}(x)$ em termos de funções indicadoras, para todo $r \in \{0, \dots, l\}$, por

$$B_{r,0}(x) = \mathbb{I}_{[\tau_r, \tau_{r+1})}(x). \quad (2.43)$$

- (iii) Para $k \geq 1$, os termos $B_{r,k}(x)$ são definidos recursivamente, para todo $r \in \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, l\}$, como

$$B_{r,k}(x) = \frac{x - \tau_r}{\tau_{r+k} - \tau_r} B_{r,k-1}(x) + \frac{\tau_{r+k+l} - x}{\tau_{r+k+l} - \tau_{r+l}} B_{r+1,k-1}(x). \quad (2.44)$$

Se $\tau_{r+k} = \tau_r$, define-se convencionalmente por 0, qualquer termo para o qual $\tau_{r+k} - \tau_r$ apareça no denominador.

Exemplo 2.1. Seja o grau da *B-spline* $k = 3$ e um único nó interno ($l = 1$). Seguindo o item (i) do

Algoritmo 2.1 temos os seguintes nós para a base:

$$\tau_{-3} = \tau_{-2} = \tau_{-1} = \tau_0 = a < \tau_1 < b = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5.$$

Como $k = 3 > 0$, não usamos o item (ii) do Algoritmo 2.1. Usando o item (iii) do Algoritmo 2.1, para $k = 3$, temos as funções da base *B-spline* $\mathcal{S}(\tau_1; 3)$, denotadas por $(B_{-3,3}, B_{-2,3}, B_{-1,3}, B_{0,3}, B_{1,3})$, ou de forma compacta, $B_r(x) = B_{r-3,3}(x)$, para $r \in \{0, \dots, 4\}$, seguindo notação de Silva e Dean (2006), são dadas por

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \left[\frac{(\tau_1 - x)^3}{(\tau_1 - a)^3} \right] \mathbb{I}_{[a, \tau_1)}(x), \\ B_1(x) &= \frac{(x - a)}{(\tau_1 - a)} \left[\frac{(\tau_1 - x)^2}{(\tau_1 - a)^2} + \frac{(b - x)(\tau_1 - x)}{(b - a)(\tau_1 - a)} + \frac{(b - x)^2}{(b - a)^2} \right] \mathbb{I}_{[a, \tau_1)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{(b - x)^3}{(b - a)^2(b - \tau_1)} \right] \mathbb{I}_{[\tau_1, b]}(x), \\ B_2(x) &= \frac{(x - a)}{(b - a)} \left[\frac{(x - a)(\tau_1 - x)}{(\tau_1 - a)^2} + \frac{2(x - a)(b - x)}{(b - a)(b - \tau_1)} \right] \mathbb{I}_{[a, \tau_1)}(x) \\ &\quad + \frac{(b - x)}{(b - a)} \left[\frac{(b - x)(x - \tau_1)}{(b - \tau_1)^2} + \frac{2(x - a)(b - x)}{(b - a)(b - \tau_1)} \right] \mathbb{I}_{[\tau_1, b]}(x) \\ B_3(x) &= \left[\frac{(x - a)^3}{(b - a)^2(\tau_1 - a)} \right] \mathbb{I}_{[a, \tau_1)}(x) + \frac{(b - x)}{(b - \tau_1)} \times \\ &\quad \left[\frac{(x - a)^2}{(b - a)^2} + \frac{(x - a)(x - \tau_1)}{(b - a)(b - \tau_1)} + \frac{(x - \tau_1)^2}{(b - \tau_1)^2} \right] \mathbb{I}_{[\tau_1, b]}(x), \\ B_4(x) &= \left[\frac{(x - \tau_1)^3}{(b - \tau_1)^3} \right] \mathbb{I}_{[\tau_1, b]}(x). \end{aligned} \tag{2.45}$$

◆

Observação 2.11. No Exemplo 2.1, o termo $B_0(\cdot)$ corresponde ao intercepto da *B-spline*. A base *B-spline* obtida é composta dos elementos $B_r(\cdot)$ para $r \in \{0, \dots, 4\}$, ou seja, tem 5 elementos. Isto ocorre pois $l + k + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$, onde temos $k = 3$ (grau da *B-spline*) e $l = 1$ (número de nós internos).

Assim, assumindo uma *B-spline* cúbica com um nó interno, sem termo de intercepto (sem o termo $B_0(\cdot)$) e avaliada no tempo mediano ($t = 0$), conforme a expressão (2.45), a função suavizada $S_0(t)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$, é dada por

$$S_0(t) = \alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t) + \alpha_3 B_3(t) + \alpha_4 B_4(t), \tag{2.46}$$

onde α_r e B_r , $r \in \{1, \dots, 4\}$, são os coeficientes e as funções da base *B-spline*, respectivamente.

Apesar dos modelos de regressão *B-spline* serem atrativos devido à sua flexibilidade em modelar contextos não lineares, conforme Silva e Dean (2006), é necessário decidir sobre qual o grau do *B-spline* utilizado e qual a quantidade de nós internos para particionar o intervalo em estudo.

Nas aplicações, em geral, utiliza-se a *B-spline* cúbica pois o grau $k = 3$ é o primeiro valor para o grau da *B-spline* em que é possível uma curva contínua e suave com a primeira e a segunda derivadas contínuas. Sendo o caso $k = 3$ o caso mais parcimonioso. Mas detalhes podem ser encontrados em Knott (1999) e Ueberhuber (1997).

Mais informações a respeito de técnicas usando *B-spline* podem ser encontradas em Hastie e Tibshirani (1990), De Boor (2001) e Prautzsch et al. (2002).

2.5 Algoritmos Computacionais Bayesianos

O *software* mais popular em inferência Bayesiana surgiu de um projeto chamado *BUGS* (*Bayesian inference Using Gibbs Sampling*) de 1989. Este projeto culminou no *software* livre *WinBUGS* na versão para o sistema operacional Windows (ver Lunn et al., 2000) e *OpenBUGS* para os demais sistemas operacionais (ver Lunn et al., 2009).

Outras opções de *softwares* para o uso da inferência Bayesiana foram desenvolvidas na sequência, como por exemplo: bibliotecas do ambiente computacional *R* (ver *R Core Team*, 2015) e o programa *JAGS* (*Just another Gibbs sampler*) (ver Plummer, 2003).

As aplicações dos modelos propostos neste capítulo bem como os procedimentos de inferência e simulações terão seus resultados obtidos a partir do *software* *OpenBUGS* com conexão com o ambiente computacional *R* através da biblioteca *R2OpenBUGS* (ver Sturtz et al., 2005) com base no método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). A interface utilizada dentro do *OpenBUGS* foi o *GeoBUGS* (ver Thomas et al., 2014) sistema especializado para modelagem de dados espaciais. A distribuição CAR para o modelo intrínseco (CAR) está disponível no *GeoBUGS*, entretanto, a distribuição do modelo de Cressie (PCAR) não está disponível e foi implementada nesta linguagem.

Na maioria dos casos, a distribuição *a posteriori* do vetor de parâmetros do modelo não pode ser obtida por meio de um método analítico devido à sua complexidade. Nessas situações, é necessário utilizar métodos numéricos que, graças à evolução computacional do último século, se tornaram facilmente disponíveis, implementáveis, e de obtenção de resultados em um período de tempo relativamente curto.

Os métodos de MCMC são uma alternativa aos métodos não iterativos em problemas complexos (nos métodos não iterativos, os valores são gerados de forma independente e não há preocupação com a convergência do algoritmo, bastando que o tamanho da amostra seja suficientemente grande).

A ideia é obter uma amostra da distribuição *a posteriori* e calcular estimativas amostrais de características de interesse desta distribuição. A diferença é que, neste caso, são usadas técnicas de simulação iterativa, baseadas em cadeias de Markov, implicando em que os valores gerados sejam dependentes, diferente do que acontece nos métodos não iterativos.

O termo simulação refere-se ao tratamento de problemas reais a partir de reproduções em ambientes controlados pelo pesquisador, sendo que, muitas vezes, esses ambientes são os equipamentos computacionais. Alguns problemas apresentam componentes aleatórios, os quais não podem ser descritos de forma exata e são baseados em informações probabilísticas. O processo de simulação é estocástico, ou seja, baseado em distribuições de probabilidades.

Apresentamos, a seguir, uma breve descrição de dois dos métodos de simulação que utilizam cadeias de Markov: o algoritmo Metropolis-Hastings e o algoritmo amostrador de Gibbs (*Gibbs Sampler*). Este último está implementado no *software* *OpenBUGS*, utilizado neste trabalho.

Os algoritmos Amostrador de Gibbs (ver Gamerman, 1996) e Metropolis-Hastings (ver Hastings, 1970) utilizam-se da seguinte terminologia:

- (i) **Aquecimento:** o período de aquecimento ou *burn-in* corresponde a simular a cadeia por um número de iterações pré-determinado antes que os parâmetros amostrados sejam usados na distribuição *a posteriori*;
- (ii) **Salto:** o salto ou *thinning interval* de tamanho l corresponde a se descartar as $l - 1$ primeiras observações da cadeia gerada e usar somente a l -ésima observação e se repetir este processo até que se consiga o comprimento de cadeia estipulado. O intuito aqui é reduzir a correlação ou

relação de dependência que possa a vir a existir entre os valores obtidos na cadeia de Markov durante o processo de rejeição/aceitação do algoritmo Metropolis-Hastings.

- (iii) **Comprimento da Cadeia:** o comprimento da cadeia ou *chain length*, denotado por S , corresponde ao quão grande deve ser a cadeia para que o processo de rejeição/aceitação do algoritmo Metropolis-Hastings possa aproximar, de forma razoável, a distribuição *a posteriori*.

O método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) busca simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$, o qual converge para uma distribuição estacionária que, em estatística Bayesiana, é a distribuição *a posteriori*, onde p indica o número de parâmetros do modelo.

À medida que o número de iterações aumenta, a sequência atinge a característica de estacionariedade com um comportamento assintótico.

Assim, segundo [Nogueira et al. \(2004\)](#), a convergência é atingida em uma iteração cuja distribuição esteja arbitrariamente próxima da distribuição de equilíbrio, ou seja, a distribuição marginal desejada, e não no sentido formal e inatingível do número de iterações tendendo para o infinito.

2.5.1 Metropolis-Hastings

Os algoritmos de Metropolis-Hastings usam a ideia de rejeição ou aceitação, ou seja, um valor é gerado a partir de uma distribuição auxiliar e aceito com uma dada probabilidade. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio que, neste caso, é a distribuição *a posteriori*.

Seja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ o vetor (ou coleção) de parâmetros desconhecidos a serem estimados no modelo. O intuito é simular um passeio aleatório no espaço de θ que converge para uma distribuição estacionária, que neste caso é a distribuição de interesse.

Seguindo este princípio, os algoritmos de Metropolis-Hastings (ver Metropolis et al., 1953 e Hastings, 1970) utilizam uma distribuição auxiliar para a geração de uma cadeia de pontos, que são aceitos ou rejeitados com uma determinada probabilidade. Isso garante que a cadeia convirja para uma distribuição de equilíbrio, que neste caso é a distribuição *a posteriori* de θ , sobre a qual se tem interesse.

O algoritmo Metropolis-Hastings é apresentado no Algoritmo 2.2. Este algoritmo pode ser resumido de forma que a partir de uma função de densidade de probabilidade proposta (*proposal density* ou *jumping distribution*), $q(\cdot|\theta^{(s)})$, um novo valor $\theta^{(*)}$ é gerado, conforme [Chib e Greenberg \(1995\)](#).

Suponha que a cadeia esteja no estado $\theta^{(s)}$, com $s \in \{1, \dots, S\}$ e que um novo valor $\theta^{(*)}$ é gerado a partir dela. Este novo valor é aceito com probabilidade

$$\alpha(\theta^{(s)}, \theta^{(*)}) = \min \left\{ 1, \frac{f(\theta^{(*)})q(\theta^{(s)}|\theta^{(*)})}{f(\theta^{(s)})q(\theta^{(*)}|\theta^{(s)})} \right\}, \quad (2.47)$$

onde $f(\theta)$ denota a densidade de probabilidade *a posteriori* de θ e $q(\cdot|\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade proposta.

A escolha usual para a função de densidade de probabilidade proposta é a função de densidade

de probabilidade normal truncada dada por

$$f(x; \mu, \sigma, a, b) = \begin{cases} \frac{\sigma^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são, respectivamente, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada para a distribuição normal-padrão, $a, b \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os limites inferior e superior da distribuição suporte; μ e σ denotam, respectivamente, a média e o desvio-padrão da distribuição normal não-truncada.

Algoritmo 2.2. (Algoritmo Metropolis-Hastings). Sejam $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ o vetor de parâmetros desconhecidos, $q(\cdot|\theta^{(s)})$ uma distribuição de probabilidade proposta, $s \in \{0, \dots, S\}$ o estado atual da cadeia, S o comprimento da cadeia e $\theta^{(*)}$ um novo valor gerado. Para se obter a cadeia de Markov, seguem-se as seguintes etapas:

- (i) Escolha um núcleo de transição $q(\cdot|\cdot)$ conhecido para o processo.
- (ii) Seja um valor inicial arbitrário para o vetor de parâmetros em análise θ , isto é, $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})'$. Seja $s = 0$ e siga ao Passo (iii).
- (iii) Gerar $\theta^{(*)}$ a partir de $q(\cdot|\theta^{(s)})$.
- (iv) Calcular $\alpha(\theta^{(s)}, \theta^{(*)}) = \min \left\{ 1, \frac{f(\theta^{(*)})q(\theta^{(s)}|\theta^{(*)})}{f(\theta^{(s)})q(\theta^{(*)}|\theta^{(s)})} \right\}$.
- (v) Obter $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$.
- (vi) Defina $\theta^{(s+1)} = \begin{cases} \theta^{(*)}, & \text{se } u < \alpha(\theta^{(s)}, \theta^{(*)}) \\ \theta^{(s)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- (vii) Enquanto $s + 1 < S$, faça $s = s + 1$ e retorne ao Passo (iii).

O Algoritmo 2.2 deve ser executado até a convergência da cadeia. Feito isso, a cadeia resultante, isto é, os pontos gerados, podem ser considerados como uma amostra da distribuição *a posteriori* em estudo.

Observação 2.12. No item [(iv) do Algoritmo 2.2, definimos $q(\cdot|\theta^{(*)})$ como $q(\theta^{(*)}|\theta^{(s)}) = f(\theta^{(*)}; \theta^{(s)}, \sigma, a, b)$, $\forall \theta^{(*)} \in \mathbb{R}$ e, analogamente, $q(\theta^{(s)}|\theta^{(*)}) = f(\theta^{(s)}; \theta^{(*)}, \sigma, a, b)$, $\forall \theta^{(s)} \in \mathbb{R}$.

Para maiores detalhes a respeito do algoritmo Metropolis-Hastings recomenda-se ?, [Ntzoufras \(2009\)](#), [Gelman et al. \(2004\)](#), [Hastings \(1970\)](#) e [Metropolis et al. \(1953\)](#).

2.5.2 Amostrador de Gibbs

O algoritmo amostrador de Gibbs é essencialmente um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas. É uma técnica utilizada para gerar variáveis aleatórias de uma distribuição marginal sem que se conheça a sua função densidade explícita.

Este algoritmo é um caso especial do algoritmo Metropolis-Hastings, mas com duas particularidades:

- (i) todos os pontos gerados pelo algoritmo são aceitos não havendo a etapa de rejeição;
- (ii) os pontos são gerados a partir das distribuições condicionais completas $f(\theta_k|\boldsymbol{\theta}_{-k})$, onde $\boldsymbol{\theta}_{-k} = (\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_p)'$. A função distribuição condicional completa pode ser obtida a partir da distribuição conjunta, fazendo

$$f(\theta_k|\boldsymbol{\theta}_{-k}) = \frac{f(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{\theta})d\theta_k},$$

onde $f(\boldsymbol{\theta})$ é a função densidade de probabilidade *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ e $k \in \{1, \dots, p\}$.

Sabe-se que, na maioria das situações, gerar uma amostra diretamente da função densidade de probabilidade *a posteriori*, $f(\boldsymbol{\theta})$, pode ser difícil ou mesmo impossível. Felizmente, se as distribuições condicionais completas são conhecidas, então pode-se utilizar o Algoritmo 2.3, dado a seguir.

Algoritmo 2.3. (Algoritmo Amostrador de Gibbs). Sejam $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ o vetor de parâmetros desconhecidos, $s \in \{0, \dots, S\}$ o estado atual da cadeia e S o comprimento da cadeia. Para se obter a cadeia de Markov, seguem-se as seguintes etapas:

- (i) Seja um valor inicial arbitrário para o vetor de parâmetros em análise $\boldsymbol{\theta}$, isto é, $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})'$. Seja $s = 0$ e siga ao Passo (ii).
- (ii) Dada a amostra $\boldsymbol{\theta}^{(s)} = (\theta_1^{(s)}, \dots, \theta_p^{(s)})'$,
- gerar $\theta_1^{(s+1)}$ a partir de $f(\theta_1|\mathbf{y}, \theta_2^{(s)}, \theta_3^{(s)}, \dots, \theta_p^{(s)})$;
 - gerar $\theta_2^{(s+1)}$ a partir de $f(\theta_2|\mathbf{y}, \theta_1^{(s+1)}, \theta_3^{(s)}, \dots, \theta_p^{(s)})$;
 - \vdots
 - gerar $\theta_p^{(s+1)}$ a partir de $f(\theta_p|\mathbf{y}, \theta_1^{(s+1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(s+1)})$;
- (iii) Quando o vetor $\boldsymbol{\theta}^{(s+1)} = (\theta_1^{(s+1)}, \dots, \theta_p^{(s+1)})'$ é obtido, retornar ao Passo (ii), fazendo $s = s + 1$, até que $s = S$.

Gamerman (1996) comenta que apesar dos resultados teóricos garantirem a convergência do algoritmo Amostrador de Gibbs, sua utilização na prática pode ser bastante complicada quando se têm modelos muito complexos.

Para maiores detalhes a respeito do algoritmo Amostrador de Gibbs recomenda-se Ntzoufras (2009), Gelman et al. (2004) e Gamerman (1996).

2.6 Testes de Diagnóstico de Convergência

Todas as amostras serão submetidas a testes de diagnóstico de convergência. Os testes de diagnósticos mais utilizados são os seguintes: *Gelman-Rubin*, *Raftery-Lewis*, *Geweke* and *Heidelberger-Welch*. E serão aplicados às cadeias de Markov obtidas através da biblioteca CODA do ambiente computacional R.

2.6.1 Gelman-Rubin

Teste apresentado por Gelman e Rubin (1992), usa componentes da variância de sequências de cadeias múltiplas, simuladas a partir de uma variedade de pontos iniciais dispersos. O método funciona do seguinte modo:

- (i) Simulam-se $m \geq 2$ sequências, cada uma de comprimento $2n$, a partir de pontos iniciais simulados de uma distribuição sobredispersa relativamente à distribuição de equilíbrio. Usam-se apenas as n últimas iterações de cada cadeia.
- (ii) Seja U a quantidade de interesse que se pretende estimar (geralmente uma função do parâmetro θ). Seja u_{ij} o valor de U na j -ésima iteração (entre as últimas n das $2n$ geradas) da i -ésima cadeia. Calculam-se $\bar{u}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{ij}$, $s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (u_{ij} - \bar{u}_i)^2$, a média e a variância amostrais, respectivamente, de U para cada sequência $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (iii) Estima-se a média de U como uma média amostral de todos os mn valores simulados de U , isto é, $\bar{u}_{..} = \frac{1}{m} \sum_i \bar{u}_i$.
- (iv) Calculam-se as seguintes componentes de variância, onde $W = \sum_i \frac{s_i^2}{m}$, é a média das m variâncias dentro das sequências, cada uma baseada em $n-1$ graus de liberdade, e $B/n = \sum_i \frac{(\bar{u}_i - \bar{u}_{..})^2}{m-1}$, a variância entre as médias das m sequências, \bar{u}_i , cada uma baseada em n valores de U .
- (v) Estima-se a variância de U como uma média ponderada de W e B , dada por $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}W + \frac{1}{n}B$. A variância amostral $\hat{\sigma}^2$ superestima σ^2 se a distribuição inicial for sobredispersa e é não viciada sob estacionaridade.
- (vi) Cria-se uma distribuição *t-Student* conservativa (com poucos graus de liberdade) para U com localização $\bar{u}_{..}$, dispersão $\sqrt{\hat{V}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{B}{mn}}$ e graus de liberdade $\nu = 2\hat{V}^2 / \text{Var}(\hat{V})$, onde

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{V}) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{m} \text{Var}(s_i^2) + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \frac{2}{m-1} B^2 \\ &\quad + 2 \frac{(m-1)(n-1)}{mn^2} \frac{n}{m} [\text{Cov}(s_i^2, \bar{u}_i^2) - 2\bar{u}_{..} \text{Cov}(s_i^2, \bar{u}_i)]. \end{aligned}$$

As variâncias e covariâncias são estimadas a partir dos m valores amostrais de s_i^2 , \bar{u}_i e \bar{u}_i^2 .

- (vii) Estima-se o *fator de redução da escala* (o fator de redução que sofreria o parâmetro de escala da distribuição *t-Student* para U se as simulações continuassem) como $\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{V}}{W} \frac{\nu}{\nu-2}}$. Esta razão decresce para 1 quando n tende ao infinito. Valores de $\sqrt{\hat{R}} \approx 1$ sugerem que o período de aquecimento pode terminar e o processo iterativo continuar.

2.6.2 Raftery-Lewis

Este teste proposto por [Raftery e Lewis \(1992\)](#), centra-se na obtenção de um grau de precisão pré-especificado para quantis específicos. Como anteriormente, considera-se U uma função do parâmetro θ . Suponha-se que se pretende estimar $\mathbb{P}(U > u|x)$ com um erro de $\pm\epsilon$ com probabilidade s quando o valor correto é q . O método busca encontrar o número de iterações necessárias para atingir convergência, quando se considera a simulação de uma única cadeia. O teste segue as seguintes etapas:

- (i) Para cada iteração j , $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ calcula-se U_j (representa o valor de U na j -ésima iteração) e forma-se $Z_j = \mathbb{I}_{(-\infty, u]}(U_j)$, onde $\mathbb{I}(\cdot)$ é a função indicadora. O processo $\{Z_j\}$ é um processo binário que não é uma cadeia de Markov, embora seja deduzido a partir de uma cadeia de Markov.
- (ii) Considera-se um novo processo $\{Z_j^{(k^*)}\}$, de forma que $Z_j^{(k^*)} = Z_{1+(j-1)k^*}$, constituído a partir de cada iteração k^* da cadeia original. Este processo será aproximadamente uma cadeia de

Markov desde que k^* seja suficientemente grande. Admitindo que se tem uma cadeia de Markov com estados 0 e 1, seja $P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$, a matriz de transição de $\{Z_j^{(k^*)}\}$, onde $\mathbb{P}(Z_j = 1 | Z_{j-1} = 0) = \alpha$ é a probabilidade de passagem do primeiro estado para o segundo e $\mathbb{P}(Z_j = 0 | Z_{j-1} = 1) = \beta$ é a probabilidade de passagem do segundo para o primeiro. A distribuição de equilíbrio é dada por $\pi = (\pi_0, \pi_1) = (\alpha + \beta)^{-1}(\beta, \alpha)$, onde $\pi_0 = \mathbb{P}(U > u | x)$ e $\pi_1 = 1 - \pi_0$. Assim, pode-se mostrar (ver Raftery e Lewis, 1996) que o número inicial de iterações, correspondente ao período de aquecimento, é dado por $l = k^* m^*$, onde

$$m^* = \frac{\ln \left(\frac{d(\alpha + \beta)}{\max(\alpha, \beta)} \right)}{\ln(1 - \alpha - \beta)},$$

e d é a distância entre $\mathbb{P}(Z_{m^*}^{(\epsilon^*)} = a | Z_0^{(k^*)} = b)$ e π_a , para $a, b \in \{0, 1\}$.

- (iii) Dado que, para uma dimensão n da amostra, $\mathbb{P}(U > u | x)$ é estimado por $\bar{Z}_{m^*}^{(k^*)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j^{(k^*)}$, e $\bar{Z}_{m^*}^{(k^*)}$ é, de forma aproximada, Gaussianamente distribuído com valor médio q e variância $\frac{1}{n} \frac{\alpha\beta(2 - \alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)^3}$, de modo que $\mathbb{P}(q - \epsilon \leq \bar{Z}_{m^*}^{(k^*)} \leq q + \epsilon) = s$, é preciso que

$$n = \frac{\alpha\beta(2 - \alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)^3} \left\{ \frac{r}{\Phi(\frac{1}{2}(1 + s))} \right\}^{-2},$$

onde Φ é a função de distribuição da normal padrão. Assim, $m = nk^*$.

2.6.3 Geweke

O método proposto por Geweke (1992) baseia-se precisamente na aplicação de técnicas usuais em séries temporais para averiguar a convergência da cadeia obtida. Este método tem as seguintes etapas:

- (i) Seja $g(\theta)$ a função do parâmetro que se deseja estimar. Os valores simulados de que se dispõe correspondem aos valores θ^j de uma determinada cadeia de Markov. A estimativa do valor esperado *a posteriori* de $g(\theta)$ é então dada pela média dos $g^j = g(\theta^j)$. Dessa forma, a função real $g(\theta)$ define, em sua trajetória, g^1, g^2, \dots , uma série temporal que é construída a partir da sequência de valores $g^j = g(\theta^j)$.
- (ii) Observa-se a série ao longo de um número n suficientemente longo de iterações e calcula-se a média $g_a = \frac{1}{n_a} \sum g(\theta^t)$ com base nas n_a primeiras iterações, bem como a média $g_b = \frac{1}{n_b} \sum g(\theta^t)$ com base nas n_b últimas iterações.
- (iii) Se a cadeia é estacionária, então a média da primeira parte da cadeia dever ser semelhante à média da segunda parte da cadeia. Admitindo que n_a/n e n_b/n são fixos e $n \rightarrow \infty$ pode-se mostrar que

$$\frac{g_a - g_b}{\sqrt{(s_a^2/n_a) + (s_b^2/n_b)}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

onde s_a^2 e s_b^2 são estimativas independentes das variâncias assintóticas de g_a e g_b . De acordo com o resultado desta estatística pode-se averiguar se há ou não a convergência da cadeia.

2.6.4 Heidelberger-Welch

O método proposto por Heidelberger e Welch (1981) é um diagnóstico de convergência da cadeia de Markov desenvolvido em duas etapas e tem como estatística de teste a estatística de Cramer-

Von Mises para aceitar ou rejeitar a hipótese nula de que a cadeia é oriunda de uma distribuição estacionária. A primeira parte consiste em:

- (i) Gerar uma cadeia com S iterações e definir o nível α .
- (ii) Calcular a estatística de teste em toda a cadeia e, desta forma, aceitar ou rejeitar a hipótese nula de que a cadeia é originária de uma distribuição estacionária.
- (iii) Se a hipótese nula for rejeitada, descartam-se as 10% primeiras iterações e se repete o cálculo da estatística de teste, aceitando ou rejeitando-a. Repete-se esta etapa até que a hipótese nula seja aceita ou até que 50% das iterações da cadeia sejam descartadas.
- (iv) se o teste continuar rejeitando a hipótese nula, então a cadeia falhou para o teste e é necessário uma nova cadeia com mais elementos.

A segunda parte consiste em:

- (i) Se a cadeia passou na primeira parte do diagnóstico, então consideram-se apenas os elementos da cadeia que não foram descartados na primeira parte para prosseguir.
- (ii) Calcula-se o teste *half-width* com a metade do comprimento do intervalo de credibilidade de $(1 - \alpha)\%$ para a média. A estatística calculada é a “meia largura relativa” (*relative half-width*) do intervalo, denotada por RHW e dada pela expressão

$$RHW = \frac{z_{(1-\alpha/2)}(\hat{s}_n^2)^{1/2}}{\hat{\theta}}, \quad (2.48)$$

onde $z_{(1-\alpha/2)}$ é o escore z para o $100(1 - \alpha/2)$ -ésimo percentil, n é o comprimento da cadeia de Markov, $\hat{\theta}$ é a média estimada do parâmetro e \hat{s}_n^2 é a variância estimada da cadeia de Markov através do método da densidade espectral. Detalhes sobre o método da densidade espectral podem ser encontrados em Heidelberger e Welch (1981).

- (iii) O teste de estacionariedade é unilateral e a rejeição ocorre quando o p -valor é maior do que $1 - \alpha$. É necessário escolher um nível ϵ de tolerância. Caso $RHW > \epsilon$, conclui-se que não há dados suficientes para estimar com precisão a média com nível de confiança $1 - \alpha$ e tolerância ϵ .

2.7 Distribuição Gama Invertida

A variável aleatória (v.a.) X tem distribuição Gama Invertida com parâmetros de forma γ_1 e de escala γ_2 , denotada por $X \sim \mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$, quando a função densidade associada é dada por

$$f_X(x|\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} x^{-(\gamma_1+1)} \exp(-\gamma_2/x), \quad (2.49)$$

para $x > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$ é a função Gama.

A Proposição 2.11, apresentada a seguir, traz as propriedades básicas de uma variável aleatória X com função de distribuição $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$. Essas propriedades são importantes para o desenvolvimento do presente trabalho.

Proposição 2.11. *Seja X a v.a. com função de distribuição $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ cuja função densidade é dada pela expressão (2.49). Então,*

$$(i) \mathbb{E}(X^r) = \frac{\gamma_2^r}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 2) \cdots (\gamma_1 - r)}, \text{ para } r > 0, \gamma_1 > i \text{ e } i \in \{1, \dots, r\},$$

$$(ii) \mathbb{E}(X) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - 1}, \text{ para } \gamma_1 > 1,$$

$$(iii) \text{Var}(X) = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_1 - 2)}, \text{ para } \gamma_1 > i \text{ e } i \in \{1, 2\},$$

$$(iv) \text{Mo}(X) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + 1}, \text{ onde } \text{Mo}(X) \text{ denota a moda da v.a. } X.$$

Prova: Suponha que $\gamma_1 > i$, para $i \in \{1, \dots, r\}$. Se $X \sim \mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$, então para $r > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r) &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \int_0^\infty x^r x^{-\gamma_1-1} \exp(-\gamma_2/x) dx \\ &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \int_0^\infty x^{r-\gamma_1-1} \exp(-\gamma_2/x) dx \\ &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \frac{\Gamma(\gamma_1 - r)}{\gamma_2^{\gamma_1-r}} \\ &= \frac{\gamma_2^r \Gamma(\gamma_1 - r)}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 2) \cdots (\gamma_1 - r) \Gamma(\gamma_1 - r)} \\ &= \frac{\gamma_2^r}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 2) \cdots (\gamma_1 - r)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pela expressão (2.50) temos a validade de (i). Em particular, para $\gamma_1 > 1$ e $r = 1$ (ver expressão (2.50)), $\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - 1}$, provando (ii).

Para $\gamma_1 > 1$ e $\gamma_1 > 2$ (ver expressão (2.50)), $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 2)}$, dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 2)} - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 - 1} \right)^2 \\ &= \frac{\gamma_2^2(\gamma_1 - 1) - \gamma_2^2(\gamma_1 - 2)}{(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_1 - 2)} \\ &= \frac{\gamma_2^2\gamma_1 - \gamma_2^2 - \gamma_2^2\gamma_1 + 2\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_1 - 2)} \\ &= \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_1 - 2)}, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (iii).

Para se obter (iv) é preciso encontrar o ponto crítico da função dada por (2.49) e verificar que este ponto crítico é ponto de máximo. Para se investigar a existência de pontos críticos, aplicamos a primeira derivada em (2.49) com respeito a x e igualamos a expressão obtida a zero. Então,

$$\begin{aligned} f'_X(x|\gamma_1, \gamma_2) &= 0 \Leftrightarrow \\ -(\gamma_1 + 1) \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} x^{-\gamma_1} \exp(-\gamma_2/x) + \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} x^{-(\gamma_1+1)} \frac{\gamma_2}{x^2} \exp(-\gamma_2/x) &= 0 \Leftrightarrow \\ -(\gamma_1 + 1)x^{-\gamma_1} + x^{-\gamma_1-1}\gamma_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + 1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Como a função $\exp(\cdot)$ é sempre positiva para $x > 0$, $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$ segue a segunda equivalência em (2.51). E, pela última equivalência da expressão (2.51), temos que o candidato a ponto crítico

para a função densidade de probabilidade dada pela expressão (2.49) é o valor $x = \gamma_2/(\gamma_1 + 1)$.

Por um processo semelhante, usando a segunda derivada em (2.49), se verifica que o candidato obtido em (2.51) é ponto de máximo. Para tal, vamos analisar o sinal da segunda derivada com respeito a x quando avaliada para o candidato a ponto crítico obtido em (2.51).

Com base na expressão (2.49) e salvo por multiplicação por uma constante positiva φ , temos que a segunda derivada com respeito a x pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varphi f_X''(x|\gamma_1, \gamma_2) &= \frac{x^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1)^2 \exp(-\gamma_2/x)}{x^2} + \frac{x^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1) \exp(-\gamma_2/x)}{x^2} \\ &\quad - 2 \frac{x^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1) \exp(-\gamma_2/x)}{x^3} - 2 \frac{x^{-(\gamma_1+1)}\gamma_2 \exp(-\gamma_2/x)}{x^3} \\ &\quad + \frac{x^{-(\gamma_1+1)}\gamma_2^2 \exp(-\gamma_2/x)}{x^4}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Substituímos o candidato a ponto de máximo, $x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}$, na expressão obtida em (2.52) e obtemos

$$\begin{aligned} \varphi f_X''\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}|\gamma_1, \gamma_2\right) &= \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1)^2 \exp\left(-\gamma_2/\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^2} + \\ &\quad \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1) \exp\left(-\gamma_2/\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^2} + \\ &\quad - 2 \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}\gamma_2 \exp\left(-\gamma_2/\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^3} + \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}\gamma_2^2 \exp(-\gamma_2/x)}{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^4} + \\ &\quad - 2 \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}(\gamma_1 + 1) \exp\left(-\gamma_2/\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^3}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Na expressão (2.53), os termos positivos $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^{-(\gamma_1+1)}$, $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)^2$ e $\exp\left(-\gamma_2/\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}\right)\right)$ são comuns a todas as parcelas e podem ser ignorados. Estamos interessados no sinal de $f_X''\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}|\gamma_1, \gamma_2\right)$ para avaliar se o ponto analisado é ponto de máximo ou ponto de mínimo.

Assim, após algumas simplificações, salvo multiplicação por uma constante positiva, a expressão (2.53) é proporcional a $-(\gamma_1 + 1)^3$. Por definição, $\gamma_1 > 0$ e, dessa forma, $-(\gamma_1 + 1)^3 < 0$. Logo, temos, pelo critério da segunda derivada, que o ponto $x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+1}$ é ponto de máximo. ■

Considere Y a v.a. com distribuição Gama com parâmetros de forma γ_1 e de escala γ_2 , denotada por $Y \sim \mathcal{G}(\gamma_1, \gamma_2)$. A função de densidade de Y é dada por

$$f_Y(y|\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} y^{\gamma_1-1} \exp(-\gamma_2 y), \quad (2.54)$$

para $y > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, onde $\Gamma(y) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{y-1} dt$ é a função Gama.

Algumas propriedades da função de distribuição Gama são apresentadas na Proposição 2.12.

Proposição 2.12. *Seja Y a v.a. com função de distribuição $\mathcal{G}(\gamma_1, \gamma_2)$ cuja função densidade é dada pela expressão (2.54). Então:*

$$(i) \mathbb{E}(Y^r) = \frac{\Gamma(r + \gamma_1)}{\gamma_2^r \Gamma(\gamma_1)}, \text{ para } r > 0 \text{ e } r > -\gamma_1,$$

$$(ii) \mathbb{E}(Y) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \text{ para } \gamma_2 > 0,$$

$$(iii) \text{Var}(Y) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2}, \text{ para } \gamma_2 > 0,$$

$$(iv) \text{Mo}(Y) = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2}, \text{ para } \gamma_1 \geq 1 \text{ e } \gamma_2 > 0, \text{ onde } \text{Mo}(X) \text{ denota a moda da v.a. } X.$$

Prova: Semelhante à prova da Proposição 2.11. ■

Proposição 2.13. *Seja X a v.a. com função de distribuição $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ cuja função densidade é dada pela expressão (2.49). Então $Y = 1/X \sim \mathcal{G}(\gamma_1, \gamma_2)$ cuja função densidade é dada pela expressão (2.54).*

Prova: Seja $F_Y(\cdot)$ a função de distribuição da v.a. $Y = 1/X$ e $F_X(\cdot)$ a função de distribuição da v.a. X . Temos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(1/X \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq 1/y) = 1 - F_X(1/y). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ao derivarmos a expressão obtida em (2.55) e usando a função densidade de probabilidade apresentada em (2.49), segue

$$\begin{aligned} f_Y(y|\gamma_1, \gamma_2) &= -f_X(1/y|\gamma_1, \gamma_2)(-1/y^2) \\ &= -\frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \left(\frac{1}{y}\right)^{-(\gamma_1+1)} \exp\left(-\frac{\gamma_2}{1/y}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\ &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} y^{(\gamma_1-1)} \exp(-\gamma_2 y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

A expressão obtida em (2.56) corresponde a função densidade de probabilidade da v.a. $Y \sim \mathcal{G}(\gamma_1, \gamma_2)$ dada por (2.54). ■

No intuito de investigar a influência da especificação *a priori* para os componentes da variância espacial, σ_b^2 e σ_h^2 , assumimos diferentes distribuições *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$. O componente de variância σ_b^2 está associado aos efeitos aleatórios correlacionados espacialmente, b_i , e o componente de variância σ_h^2 está associado aos efeitos aleatórios não-correlacionados, h_i . Os efeitos aleatórios b_i e h_i integram a parcela R_i da expressão (2.1).

Em particular, para nosso estudo, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.001, 0.001), B = (0.01, 0.01), C = (0.1, 0.1), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$. Estes valores são sugeridos nos trabalhos de Waller et al. (1997a), Branscum et al. (2008) e Silva et al. (2008). Segundo Gelman (2006) tais escolhas para distribuições *a priori* para os parâmetros de variância correspondem ao contexto de distribuição *a priori* não-informativa, entretanto, o autor deixa a ressalva que valores muito próximos de zero para os elementos γ_1 e γ_2 podem ocasionar, em alguns contextos, uma distribuição *a posteriori* imprópria. Realizamos também análises com os valores $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{F = (1, 100), G = (2, 0.001), H = (10, 0.25)\}$. Estes últimos valores foram descartados pois para todos os casos estudados nas aplicações (ver Capítulo 3) apresentaram os piores resultados e, em alguns casos, comportamentos anômalos.

Tabela 2.1 apresenta, a título de ilustração, os valores da moda para variável aleatória $Y \sim \mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ com $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.001, 0.001), B = (0.01, 0.01), C = (0.1, 0.1), D = (0.2, 0.0004), E =$

Tabela 2.1: Moda para os cinco diferentes casos de (γ_1, γ_2) , onde $Y \sim \mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$.

Caso	<i>Medida</i>	
	(γ_1, γ_2)	$Mo(Y)$
<i>A</i>	(0.001, 0.001)	0.0009
<i>B</i>	(0.01, 0.01)	0.009
<i>C</i>	(0.1, 0.1)	0.090
<i>D</i>	(0.2, 0.0004)	0.0003
<i>E</i>	(0.5, 0.0005)	0.00003

(0.5, 0.0005)}. Os valores de média e variância para estas variáveis aleatórias não estão definidos. Estas distribuições serão utilizadas como distribuições *a priori* não informativas para os parâmetros de variância.

Observação 2.13. Quando $(\gamma_1, \gamma_2) \rightarrow (0, 0)$ para a distribuição $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ temos que esta distribuição se aproxima da distribuição *a priori* de Jeffreys que é conhecida por ser uma distribuição *a priori* não-informativa.

2.8 Critérios de Seleção do Modelo

A seleção de modelos é uma etapa importante em uma análise estatística. Os avanços computacionais permitem manusear modelos cada vez mais complexos com relativa facilidade, o que estimula a busca de modelos mais realísticos para a descrição de um dado problema. O aumento desta complexidade, no entanto, conduz, na maioria das vezes, a um aumento do número de parâmetros a serem estimados, o que muitas vezes é indesejável. Qualidade de ajuste e parcimônia são os principais objetivos ao se escolher um modelo.

Os critérios utilizados para a seleção de modelos são: Critério de Informação da Função Desvio (*Deviance Information Criterion - DIC*), Ordenada Preditiva Condicional (*Conditional Predictive Ordinate - CPO*), Logaritmo da Pseudo Verossimilhança Marginal (*Logarithm of the Pseudo Marginal Likelihood - LPML*), Resíduos de Pearson (Q_P) e Critério de Informação Amplamente Aplicável (*Widely Applicable Information Criterion - WAIC*).

2.8.1 Critério de Informação da Função Desvio (*Deviance Information Criterion - DIC*)

Na inferência Bayesiana, o método mais comum para avaliar a qualidade do ajuste de um modelo estatístico é uma generalização do critério de informação de Akaike (*Akaike Information Criterion - AIC*). Em inferência frequentista, o desvio ou *deviance*, denotado por D , corresponde a -2 vezes a relação de verossimilhança de um modelo reduzido em comparação com um modelo completo, enquanto que em inferência Bayesiana, é simplesmente -2 vezes o logaritmo da função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$, isto é,

$$D = -2 \ln(L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})) = -2 \ln(f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})), \quad (2.57)$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros, \mathbf{y} corresponde aos dados e $f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ é a função de verossimilhança.

Devido sua definição, D pode assumir valores positivos ou negativos.

A partir da expressão (2.57), a medida p_D , para a complexidade do modelo, estima o número

efetivo de parâmetros. Esta estatística é denotada por p_D e é dada por

$$p_D = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}}(D) - D(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})), \quad (2.58)$$

ou seja, p_D é a esperança *a posteriori* da *deviance* menos a *deviance* da esperança *a posteriori* dos parâmetros.

Dessa forma, temos que

$$\hat{p}_D = \bar{D} - \overline{D(\boldsymbol{\theta})}, \quad (2.59)$$

onde \bar{D} é a média *a posteriori* da *deviance* e $\overline{D(\boldsymbol{\theta})}$ corresponde à *deviance* avaliada pela média *a posteriori* dos parâmetros.

Assim, com base nas expressões (2.57) e (2.58), definimos *DIC* como segue

$$\begin{aligned} DIC &= D(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})) - 2p_D \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}}(D) + p_D. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por si só, o valor D é insuficiente, porque não leva em conta a complexidade do modelo. O valor p_D , é usado como o "número efetivo de parâmetros" de um modelo Bayesiano, fornecendo assim uma estimativa da complexidade do modelo. A estatística p_D pode ser pensada como o número de parâmetros "sem restrição" do modelo, onde um parâmetro conta como: 1, se for estimado sem restrições ou informação prévia; 0, se ele é totalmente limitado ou se todas as informações sobre o parâmetro vem da distribuição *a priori* ou, ainda, um valor intermediário se ambos os dados e a distribuição *a priori* são informativos.

É possível que a estatística p_D apresente valores negativos, o que indica um ou mais problemas: a função $\ln(L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}))$ pode não ser côncava, um conflito entre a distribuição *a priori* e os dados ou que a distribuição *a posteriori* fornece um estimador pobre.

A soma dos valores \bar{D} e \hat{p}_D é o \widehat{DIC} . Os valores de *DIC* podem ser comparados para diferentes modelos e até mesmo para diferentes métodos, enquanto a variável dependente não muda entre os modelos, tornando o ajuste do modelo pela estatística *DIC* flexível. Entretanto, *DIC* é válido apenas quando a distribuição *a posteriori* conjunta é de aproximadamente uma normal multivariada. A escolha do melhor modelo *a posteriori* segue o critério do menor valor para o *DIC*. Resumidamente, as medidas para avaliação dos modelos que envolvem o *DIC*, são dadas por:

- $\bar{D} = -2\overline{\ln(L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}))}$;
- $\hat{D} = -2\ln(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{y}))$;
- $\hat{p}_D = \bar{D} - \hat{D}$;
- $\widehat{DIC} = \bar{D} + \hat{p}_D = \hat{D} + 2\hat{p}_D$.

Mais informações sobre *DIC* podem ser encontradas em Spiegelhalter et al. (2002), Paulino et al. (2009) e Congdon (2006).

2.8.2 Ordenada Preditiva Condicional (Conditional Predictive Ordinate - CPO)

Se \mathbf{y}_{-it} é o conjunto de dados sem a sua *it*-ésima observação, denotada por y_{it} , com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$, a distribuição preditiva de validação cruzada é definida pela expressão

$$f(y_{it}|\mathbf{y}_{-it}) = \int f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_{-it})f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_{-it})d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.61)$$

onde $f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_{-y_{it}})$ é a densidade amostral condicional da observação y_{it} , sendo igual a $f(y_{it}|\boldsymbol{\theta})$ se as observações forem condicionalmente independentes dado $\boldsymbol{\theta}$, e $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_{-y_{it}})$ é uma distribuição *a posteriori* conjunta.

A densidade preditiva dada pela expressão (2.61) é conhecida como *CPO* e um estimador de Monte Carlo é obtido através do monitoramento do inverso da função de verossimilhança em cada uma das n iterações após o período de aquecimento (*burn-in*) é dado pela expressão:

$$\widehat{CPO}_{it} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})} \right)^{-1}, \quad (2.62)$$

onde $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ é o valor do k -ésimo $\boldsymbol{\theta}$ gerado a partir da distribuição *a posteriori* conjunta.

A expressão (2.62) é a média harmônica da função de densidade de probabilidade avaliada em y_{it} para cada $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ (ver Gelfand, 1996 e Congdon, 2006).

O estimador apresentado em (2.62) é obtido a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned} f(y_{it}|\mathbf{y}_{-y_{it}}) &= f(\mathbf{y})/f(\mathbf{y}_{-y_{it}}) = \frac{\int f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}}{\int f(\mathbf{y}_{-y_{it}}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{f(\mathbf{y})}{\int \frac{f(\mathbf{y}_{-y_{it}}|\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})} f(\mathbf{y})f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\int \frac{1}{f(y_{it}|\boldsymbol{\theta})} f(\mathbf{y})f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Pequenos valores de CPO_{it} indicam que a observação y_{it} não é suportada pelo modelo. Quando dois valores de CPO_{it} são comparados, maiores valores de CPO_{it} (em média) indicam um melhor modelo.

Mais detalhes a respeito da *CPO* podem ser encontrados em Paulino et al. (2009), Lawson (2009) e Congdon (2006).

2.8.3 Logaritmo da Pseudo Verossimilhança Marginal (Logarithm of the Pseudo Marginal Likelihood - LPML)

Como os valores *CPO* são calculados para cada observação, estes poderiam ser resumidos em um único valor por modelo da mesma forma que é feito com a estatística *DIC*, por exemplo.

Define-se a estimativa de Monte Carlo de CPO_{it} com base na expressão (2.62) e então a estimativa para o *LPML* é definida como

$$\widehat{LPML} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln(\widehat{CPO}_{it}). \quad (2.64)$$

Quando dois valores de *LPML* são comparados, o modelo com maior valor de *LPML* indica o melhor ajuste (ver Souza, 2015 e Congdon, 2006).

2.8.4 Resíduos de Pearson (Q_P)

Suponha que para cada região i , com $i \in \{1, \dots, N\}$ e cada tempo t , com $t \in \{1, \dots, T\}$, haja o total N_{it} de indivíduos e o número de ocorrências do fator em estudo y_{it} .

Os resíduos de Pearson, denotados por Q_P , são definidos por

$$Q_P = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - N_{it}\theta_{it})^2 / (N_{it}\theta_{it}(1 - \theta_{it})).$$

Estes resíduos comparam as diferenças entre as quantidades observadas e os seus valores preditos de forma padronizada. O melhor modelo será aquele que apresentar o menor valor para a estatística Q_P .

Mais detalhes a respeito dos Resíduos de Pearson recomenda-se [Paulino et al. \(2009\)](#).

2.8.5 Critério de Informação Amplamente Aplicável (Widely Applicable Information Criterion - WAIC)

O critério *WAIC* foi introduzido por [Watanabe \(2013a\)](#) e [Watanabe \(2013b\)](#). Este critério pode ser visto como uma melhoria no critério *DIC* para modelos Bayesianos e está baseada no logaritmo da função densidade preditiva *a posteriori*, em cada uma das n iterações após o período de aquecimento (*burn-in*), denotada por *LPPD*, dada por

$$LPPD = \ln \left(\prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}) \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \int f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta}|y_{it}) d(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.65)$$

onde $f(\boldsymbol{\theta}|y_{it})$ corresponde a $f_{post}(\boldsymbol{\theta})$.

A expressão dada por (2.65) pode ser avaliada, na prática, através do cálculo

$$\widehat{LPPD} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \right). \quad (2.66)$$

O critério *WAIC* penaliza a expressão (2.65) de duas formas diferentes

$$\begin{aligned} p_{WAIC_1} &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln \left(\mathbb{E}_{post}(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta})) - \mathbb{E}_{post}(\ln(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}))) \right), \\ p_{WAIC_2} &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T Var_{post}(\ln(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}))), \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde \mathbb{E}_{post} corresponde à esperança *a posteriori* e Var_{post} corresponde à variância *a posteriori*.

Ambas as expressões apresentadas em (2.67) podem ser calculadas através de simulações. Para a estatística \hat{p}_{WAIC_1} é necessário fazer a troca da esperança *a posteriori* pela média sobre n dos valores obtidos para $f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$, com $k \in \{1, \dots, n\}$, de forma que

$$\hat{p}_{WAIC_1} = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})) \right], \quad (2.68)$$

onde $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ é o valor do k -ésimo $\boldsymbol{\theta}$ gerado a partir da distribuição *a posteriori* conjunta.

Para a estatística \hat{p}_{WAIC_2} usa-se a variância do logaritmo da função densidade preditiva dos valores obtidos na amostra n , de forma que

$$\hat{p}_{WAIC_2} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(y_{it}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})) \right)^2 \right]. \quad (2.69)$$

Podem ser usados tanto o critério p_{WAIC_1} quanto o critério p_{WAIC_2} para a correção do vício, e assim, segue

$$WAIC = LPPD - p_{WAIC}, \quad (2.70)$$

onde p_{WAIC} pode ser avaliado tanto por (2.68) como por (2.69).

Mais detalhes sobre $WAIC$ podem ser encontrados em [Vehtari e Gelman \(2015\)](#) e [Gelman et al. \(2014\)](#).

2.8.6 Critério de Informação Bayesiano (Bayesian Information Criterion - BIC) e Critério de Informação Amplamente Aplicável Bayesiano (Widely Applicable Bayesian Information Criterion - WBIC)

O critério BIC foi introduzida por [Schwarz \(1978\)](#) que corresponde ao ajuste do número de parâmetros ajustados e uma penalidade que aumenta à medida que o tamanho da amostra n cresce.

A expressão para o BIC é dada por

$$BIC = -2 \ln(f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})) + d \ln(n), \quad (2.71)$$

onde n representa o tamanho amostral e d o número de parâmetros do modelo.

A expressão (2.71), para grandes amostras, apresenta uma penalidade muito alta e acaba por favorecer modelos com menos parâmetros.

[Watanabe \(2013a\)](#) também apresentou, análogo ao $WAIC$, a estatística $WBIC$ que funciona inclusive em casos singulares e irrealizáveis (ver [Gelman et al., 2014](#)).

O critério BIC e sua variante $WBIC$ diferem dos outros critérios considerados neste trabalho pelo fato de ser motivado não por uma estimativa de ajuste preditivo mas sim por uma aproximação global da função densidade de probabilidade marginal dos dados. Apesar de muitos autores considerarem esta abordagem útil, [Gelman et al. \(2014\)](#) e [Gelman e Shalizi \(2013\)](#) acreditam que é preferível usar outros critérios de seleção em detrimento ao BIC . Dessa forma, é completamente possível que um modelo possa vir a ter valores baixos para AIC , DIC e $WAIC$, mas, por causa da função de penalidade, ter um valor relativamente alto para BIC .

Observação 2.14. Em algumas situações práticas é interessante utilizar como critério de seleção para os modelos em estudo os gráficos que descrevem comportamento dos valores preditos em relação aos valores observados.

2.9 Modelos Usados nas Análises e Simulações

As variações adotadas para $S_i(t)$ na expressão (2.1) expostas nas seções anteriores estão resumidas na Tabela 2.2.

Na Tabela 2.2, δt é um efeito temporal linear aditivo independente da região i (ver primeira linha da Tabela 2.2), onde $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$.

Ainda na Tabela 2.2, os efeitos A_1 e A_2 , auto-regressivos de ordem 1, e os efeitos A_5 e A_6 , auto-regressivos de ordem 2, correspondem a modelos auto-regressivos na média da distribuição normal *a priori*. Enquanto que os efeitos A_3 e A_4 , auto-regressivos de ordem 1, e os efeitos A_7 e A_8 , auto-regressivos de ordem 2, correspondem a modelos auto-regressivos aditivos.

A notação *Mibh* indica que a componente R_i é modelada usando efeitos aleatórios espacial-

Tabela 2.2: Efeito temporal $S_i(t)$ associado à região i .

Modelo	$S_i(t)$	Especificação
$M1$	δt	efeito linear aditivo constante temporal para cada região i
$M2$	$S_0(t)$	<i>B-spline</i> cúbica sem intercepto
$M3$	$A_1(t)$	$A_1(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_1(t-1) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_1}^2)$
$M4$	$A_2(t)$	$A_2(t) \sim \mathcal{N}(\phi_0 + \phi_1 A_2(t-1), \sigma_{A_2}^2)$
$M5$	$A_3(t)$	$A_3(t) = \phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t$
$M6$	$A_4(t)$	$A_4(t) = \phi_t + \rho(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \epsilon_t$
$M7$	$A_5(t)$	$A_5(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho_1(A_5(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_5(t-2) - \phi_{t-2}), \sigma_{A_5}^2)$
$M8$	$A_6(t)$	$A_6(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_6(t-1) + A_6(t-2) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_6}^2)$
$M9$	$A_7(t)$	$A_7(t) = \phi_t + \rho_1(A_7(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_7(t-2) - \phi_{t-2}) + \epsilon_t$
$M10$	$A_8(t)$	$A_8(t) = \phi_0 + \phi_1 A_8(t-1) + \phi_2 A_8(t-2) + \epsilon_t$

mente correlacionados b_i através do modelo CAR e efeitos aleatórios não-correlacionados h_i , para $i \in \{1, \dots, 8\}$. A notação Mib e Mic indica que a componente R_i é modelada seguindo, respectivamente o modelo CAR e o modelo PCAR e o caso em que temos Mih representa quando se assume não haver correlação espacial entre os efeitos aleatórios, para $i \in \{1, \dots, 8\}$.

2.10 Especificação dos Modelos

Considerando o modelo proposto em (2.1), as variações adotadas para $S_i(t)$ (ver Tabela 2.2) e as variações adotadas para R_i dadas pelo modelo CAR (ver Proposição 2.7) e PCAR (ver Proposição 2.8), sob a abordagem Bayesiana, é preciso especificar as distribuições *a priori* para cada parâmetro e as distribuições *a posteriori* conjuntas para o vetor de parâmetros de cada modelo.

2.10.1 Distribuições *a priori*

Na expressão (2.1), assumiu-se que a parcela R_i é a soma da componente espacialmente correlacionada (b_i) com a componente independente (h_i), com $i \in \{1, \dots, N\}$.

Para o vetor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)'$ de efeitos aleatórios não estruturados espacialmente, assume-se uma distribuição Normal Multivariada, dada por

$$\mathbf{h} | \sigma_h^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_h^2 \mathbf{I}), \quad (2.72)$$

onde \mathbf{I} denota a matriz identidade de ordem N e σ_h^2 é o hiperparâmetro que controla a quantidade de heterogeneidade não observada nas regiões.

Com base em (2.72), temos que as distribuições univariadas (independentes) são dadas por

$$h_i | \sigma_h^2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2). \quad (2.73)$$

O modelo condicional auto-regressivo intrínseco (ver expressão (2.28) e Proposição 2.7) é assumido para o vetor de efeitos aleatórios espacialmente correlacionados $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)'$, de forma que

$$b_i | (\mathbf{b}_{-i}, \sigma_b^2) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j, \frac{\sigma_b^2}{N_i}\right), \quad (2.74)$$

onde σ_b^2 é o hiperparâmetro que controla a quantidade de variação espacial, N_i o número de vizinhos da região i , com $i \in \{1, \dots, N\}$.

Outra abordagem utilizada para o vetor de efeitos aleatórios espacialmente correlacionados $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)'$ é o modelo condicional auto-regressivo próprio (ver expressão (2.30) e Proposição 2.8), de forma que

$$b_i | (\mathbf{b}_{-i}, \sigma_b^2, \kappa) \sim \mathcal{N} \left(\kappa \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j, \frac{\sigma^2}{N_i} \right), \quad (2.75)$$

onde $\kappa \in [0, 1)$, σ_b^2 é o hiperparâmetro que controla a quantidade de variação espacial, N_i o número de vizinhos da região i , com $i \in \{1, \dots, N\}$.

Por outro lado, na expressão (2.1), assumiu-se que a parcela $S_i(t)$ é um efeito temporal associado à região i (ver Tabela 2.2), com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$.

Para o efeito linear aditivo δ assume-se uma distribuição Normal dada por

$$\delta | \sigma_\delta^2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2), \quad (2.76)$$

onde σ_δ^2 é o hiperparâmetro de dispersão do efeito linear aditivo.

Ao se considerar as funções *B-splines* cúbicas sem intercepto para a estrutura $S_i(t)$ em (2.1), assumem-se frequentemente distribuições *a priori* Normais independentes para os coeficientes *splines* (ver Exemplo 2.1 e expressão (2.46)) α_r e B_r , com $r \in \{1, \dots, 4\}$ e $i \in \{1, \dots, N\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_r | \sigma_\alpha^2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha^2), \\ B_r | \sigma_B^2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde σ_α^2 e σ_B^2 são os hiperparâmetros de dispersão de α_r e B_r , respectivamente.

Para os modelos auto-regressivos *AR*(1) (A_1 como em (2.31), A_2 como em (2.32), A_3 como em (2.33) e A_4 como em (2.35)) e, também *AR*(2) (A_5 como em (2.39), A_6 como em (2.40), A_7 como em (2.41) e A_8 como em (2.42)) na modelagem de $S_i(t)$ em (2.1) são utilizadas as seguintes distribuições *a priori*, para $t \in \{1, \dots, T\}$:

(i) para o modelo A_1 como em (2.31) temos por definição,

$$A_1(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_1(t-1) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_1}^2), \quad (2.78)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$, e $\sigma_{A_1}^2$ é o hiperparâmetro de dispersão.

(ii) para o modelo A_2 como em (2.32) temos por definição,

$$A_2(t) \sim \mathcal{N}(\phi_0 + \phi_1 A_2(t-1), \sigma_{A_2}^2), \quad (2.79)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho| < 1$ e $\sigma_{A_2}^2$ é o hiperparâmetro de dispersão.

(iii) para o modelo A_3 como em (2.33) temos como consequência da Proposição 2.9,

$$A_3(t) = \phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t, \quad (2.80)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e σ_ϵ^2 é o hiperparâmetro de dispersão.

(iv) para o modelo A_4 como em (2.35) temos por definição,

$$A_4(t) = \phi_t + \rho(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \epsilon_t, \quad (2.81)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$ e $|\rho| < 1$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e σ_ϵ^2 é o hiperparâmetro de dispersão.

(iv) para o modelo A_5 como em (2.39) temos por definição,

$$A_5(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho_1(A_4(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_4(t-2) - \phi_{t-2}), \sigma_{A_5}^2), \quad (2.82)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ e $\sigma_{A_5}^2$ é o hiperparâmetro de dispersão.

(vi) para o modelo A_6 como em (2.40) temos por definição,

$$A_6(t) \sim \mathcal{N}(\phi_t + \rho(A_6(t-1) + A_6(t-2) - \phi_{t-1}), \sigma_{A_6}^2), \quad (2.83)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho| < 1$ e $\sigma_{A_6}^2$ é o hiperparâmetro de dispersão.

(vii) para o modelo A_7 como em (2.41) temos por definição,

$$A_7(t) = \phi_t + \rho_1(A_7(t-1) - \phi_{t-1}) + \rho_2(A_7(t-2) - \phi_{t-2}) + \epsilon_t, \quad (2.84)$$

onde $\phi_t = \phi_0 + \phi_1 t$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e σ_ϵ^2 é o hiperparâmetro de dispersão.

(viii) para o modelo A_8 como em (2.42) temos por definição,

$$A_8(t) = \phi_0 + \phi_1 A_8(t-1) + \phi_2 A_8(t-2) + \epsilon_t, \quad (2.85)$$

onde $\phi_0 \in \mathbb{R}$, $|\phi_1| < 1$, $|\phi_2| < 1$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e σ_ϵ^2 é o hiperparâmetro de dispersão.

O intercepto α_0 possui distribuição *a priori* Uniforme na reta real, ou seja, $\alpha_0 \sim \mathcal{U}((-\infty, \infty))$.

Para os hiperparâmetros das componentes de variâncias σ_h^2 , σ_b^2 , definidos em (2.73), (2.74) e (2.75) atribui-se distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$, conforme apresentado em (2.49). Os valores utilizados para (γ_1, γ_2) estão listados na Tabela 2.1.

Como o hiperparâmetro de dependência espacial do modelo PCAR (ver Propriedade 2.8) é o parâmetro κ definido no intervalo $[0, 1)$, assume-se uma distribuição *a priori* normal truncada dada por

$$\kappa \sim \mathcal{N}(0, 1) \mathbb{I}_\kappa(0, 1) \quad (2.86)$$

onde $\mathbb{I}_\kappa(0, 1)$ denota a função indicadora para o parâmetro κ com valores entre 0 e 1.

Para o hiperparâmetro da componente de variância σ_δ^2 , em (2.76), e para os hiperparâmetros de variâncias σ_α^2 , σ_B^2 apresentados em (2.77), atribui-se distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$.

Para os hiperparâmetros dos modelos auto-regressivos $AR(1)$ (A_1 como em (2.78), A_2 como em (2.79), A_3 como em (2.80) e A_4 como em (2.81)) e $AR(2)$ (A_5 como em (2.83), A_6 como em (2.83), A_7 como em (2.84), e A_8 como em (2.85)) são utilizadas as seguintes distribuições *a priori*, para $t \in \{1, \dots, T\}$:

- (i) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_1 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1) \mathbb{I}_{\phi_1}(-1, 1)$ e $\sigma_{A_1}^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.
- (ii) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_2 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1) \mathbb{I}_{\phi_1}(-1, 1)$ e $\sigma_{A_2}^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.
- (iii) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_3 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1) \mathbb{I}_{\phi_1}(-1, 1)$ e $\sigma_\epsilon^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.
- (iv) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_4 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\rho \sim \mathcal{N}(0, 1) \mathbb{I}_\rho(-1, 1)$ e $\sigma_\epsilon^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.

(v) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_5 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\rho_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\rho_1}(-1, 1)$, $\rho_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\rho_2}(-1, 1)$ e $\sigma_{A_5}^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.

(vi) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_6 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\rho \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\rho}(-1, 1)$ e $\sigma_{A_6}^2 \sim \mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.

(vii) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_7 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\rho_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\rho_1}(-1, 1)$, $\rho_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\rho_2}(-1, 1)$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 10^3)$.

(viii) as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo A_8 são dadas por: $\phi_0 \sim \mathcal{N}(0, 10^6)$, $\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\phi_1}(-1, 1)$, $\phi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)\mathbb{I}_{\phi_2}(-1, 1)$ e $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 10^3)$.

2.10.2 Distribuições *a posteriori*

Assumindo independência *a priori* entre os parâmetros do modelo e entre os hiperparâmetros do modelo (2.1) e as distribuições *a priori* referidas na Subseção 2.10, a distribuição *a posteriori* conjunta para todos os parâmetros de (2.1) é então proporcional a

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t)) \left(\frac{1}{\sigma_b^2} \right)^{\frac{N}{2}+\gamma_1+1} \exp \left(\frac{-1}{\sigma_b^2} \left(\gamma_2 + \kappa \sum_{i=1}^N \frac{N_i(b_i - \bar{b}_i)^2}{2} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{\sigma_h^2} \right)^{\frac{N}{2}+\gamma_1+1} \exp \left(\frac{-1}{\sigma_h^2} \left(\gamma_2 + \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{2} \right) \right) \exp \left(-\frac{\kappa^2}{2} \right) \mathbb{I}_{\kappa}(0, 1), \end{aligned} \quad (2.87)$$

onde $\pi(\cdot)$ é uma função de distribuição *a priori*, $S_i(t)$ é um dos modelos da Tabela 2.2, $L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ representa a verossimilhança para o vetor de dados \mathbf{y} e o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}$ com componentes dadas por κ , h_i , b_i , α_0 , σ_b^2 , σ_h^2 , com $i \in \{1, \dots, N\}$, e que inclui, conforme a especificação de $S_i(t)$, os parâmetros δ , δ_i , σ_δ , α_r , B_r , com $r \in \{1, \dots, 4\}$, σ_α^2 , σ_B^2 , ϕ_0 , ϕ_1 , ρ , ρ_1 , ρ_2 , $\sigma_{A_1}^2$, $\sigma_{A_2}^2$, $\sigma_{A_3}^2$, $\sigma_{A_3}^2$, $\bar{b}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j$ e $\mathbb{I}_{\kappa}(0, 1)$ é a função indicadora para κ com valores entre 0 e 1.

Quando $\kappa = 1$ na expressão (2.87) temos o modelo CAR e quando $\kappa \in [0, 1)$ na expressão (2.87) temos o modelo PCAR. Para se obter a expressão (2.87) é necessário o uso do Teorema de Bayes, para detalhes sobre este teorema recomenda-se Bernardo e Smith (2000) e Paulino et al. (2009).

A seguir apresentamos, na Proposição 2.14, como obter a expressão (2.87) a partir da função de verossimilhança dos dados, das distribuições *a priori* dos parâmetros envolvidos e da hipótese de independência entre os parâmetros.

Proposição 2.14. *Seja a variável aleatória $\mathbf{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{NT})'$, com distribuição de probabilidade $\pi(\mathbf{Y})$, $\mathbf{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{NT})'$ uma realização desta variável aleatória, $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de parâmetros independentes associados ao modelo apresentado em (2.1), com função de distribuição *a priori* dadas, respectivamente, por $\pi(\alpha_0)$, $\pi(\mathbf{S}(t))$ e $\pi(\mathbf{R})$, onde $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_N(t))$ e $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$ e $R_i = b_i + h_i$, para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$. Então, a distribuição *a posteriori* conjunta para todos os parâmetros de (2.1) apresenta estrutura de proporcionalidade dada como em (2.87).*

Prova: Com base na definição de probabilidade condicional, temos que

$$\pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})\pi(\mathbf{y}) = \pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.88)$$

A partir da expressão (2.88), podemos obter a seguinte igualdade

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y})}, \quad (2.89)$$

e dessa forma, se retirarmos o termo $\pi(\mathbf{y})$ em (2.89), chegamos a uma expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &\propto \pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0, \mathbf{S}(t), \mathbf{R}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t))\pi(\mathbf{R}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t))\pi(\mathbf{b}, \mathbf{h}, \kappa) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t))\pi(\mathbf{b}, \sigma_b^2, \kappa)\pi(\mathbf{h}, \sigma_h^2) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t))\pi(\mathbf{b})\pi(\sigma_b^2)\pi(\kappa)\pi(\mathbf{h})\pi(\sigma_h^2). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Na passagem da primeira para a segunda linha em (2.90) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados, de forma que $\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$. Nas passagens das demais linhas utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos.

As funções de distribuição *a priori* $\pi(\sigma_b^2)$ e $\pi(\sigma_h^2)$, na última linha em (2.90), são dadas através da função de distribuição Gama Invertida $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ apresentada em (2.49), de forma que

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_b^2) &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \sigma_b^{-2(\gamma_1+1)} \exp(-\gamma_2/\sigma_b^2), \\ \pi(\sigma_h^2) &= \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \sigma_h^{-2(\gamma_1+1)} \exp(-\gamma_2/\sigma_h^2), \end{aligned} \quad (2.91)$$

para $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$ é a função Gama.

A função de distribuição *a priori* $\pi(\mathbf{b})$, na última linha em (2.90), é dada através da função de distribuição apresentada em (2.74), para o contexto do modelo CAR e (2.75) para o contexto do modelo PCAR. A função de distribuição *a priori* $\pi(\mathbf{h})$ é dada pela função de distribuição apresentada em (2.72) e a função de distribuição *a priori* $\pi(\kappa)$ é dada por (2.86), de forma que

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{b}) &= \prod_{i=1}^N N_i^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_b^2} \right)^{N/2} \exp \left(-\frac{1}{\sigma_b^2} \frac{\kappa \sum_{i=1}^N N_i (b_i - \bar{b}_i)^2}{2} \right), \\ \pi(\mathbf{h}) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_h^2} \right)^{N/2} \exp \left(-\frac{1}{\sigma_h^2} \frac{\sum_{i=1}^N h_i^2}{2} \right), \\ \pi(\kappa) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\kappa^2}{2} \right) \mathbb{I}_\kappa(0, 1), \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde $\bar{b}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j$, para $i, j \in \{1, \dots, N\}$, N_i é o número de vizinhos da região i e $\mathbb{I}_\kappa(0, 1)$ é a função indicadora para κ com valores entre 0 e 1.

Substituindo as funções de distribuição *a priori* dadas em (2.91) e (2.92) na expressão obtida

em (2.90) e eliminando os termos multiplicativos que não dependem dos parâmetros, temos

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t))\prod_{i=1}^N N_i^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_b^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_b^2} \frac{\kappa \sum_{i=1}^N N_i (b_i - \bar{b}_i)^2}{2}\right) \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \sigma_b^{-2(\gamma_1+1)} \\ &\times \exp(-\gamma_2/\sigma_b^2) \left(\frac{1}{2\pi\sigma_h^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_h^2} \frac{\sum_{i=1}^N h_i^2}{2}\right) \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} \sigma_h^{-2(\gamma_1+1)} \exp(-\gamma_2/\sigma_h^2) \\ &\times \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2}\right) \mathbb{I}_{\kappa}(0, 1). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Eliminando os termos multiplicativos que não dependem dos parâmetros e agrupando fatores comuns, a partir de (2.93) temos o resultado como apresentado na expressão (2.87)

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\alpha_0)\pi(\mathbf{S}(t)) \left(\frac{1}{\sigma_b^2}\right)^{\frac{N}{2}+\gamma_1+1} \exp\left(\frac{-1}{\sigma_b^2} \left(\gamma_2 + \kappa \sum_{i=1}^N \frac{N_i (b_i - \bar{b}_i)^2}{2}\right)\right) \\ &\times \left(\frac{1}{\sigma_h^2}\right)^{\frac{N}{2}+\gamma_1+1} \exp\left(\frac{-1}{\sigma_h^2} \left(\gamma_2 + \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{2}\right)\right) \left(-\frac{\kappa^2}{2}\right) \mathbb{I}_{\kappa}(0, 1). \end{aligned}$$

■

A distribuição *a posteriori* dada por (2.87) é de difícil trato, visto que as distribuições *a posteriori* marginais dos seus parâmetros não são obtidas de forma explícita. Entretanto, as distribuições marginais *a posteriori* podem ser avaliadas usando métodos *MCMC* (ver Chen et al., 2000). Conforme Silva e Dean (2006), a amostragem de Gibbs trabalha com amostras geradas iterativamente para cada parâmetro a partir da sua distribuição *a posteriori* condicional completa, obtida da distribuição dada em (2.87) fixados os outros parâmetros do modelo.

São necessárias, também, as distribuições *a posteriori* condicionais completas para cada parâmetro com distribuição *a priori*, cada modelo e cada função de ligação.

As distribuições *a posteriori* condicionais completas, denotadas por $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}_{-\theta_i})$, para alguns dos parâmetros θ_i do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, no contexto da distribuição Binomial (como usado nas Seções 3.1, 3.3 e 3.5 do Capítulo 3), são dadas a seguir.

Observação 2.15. Para apresentar as distribuições condicionais completas é preciso lembrar que, no contexto da distribuição Binomial (ver Proposição 2.1), a função de ligação $g(\cdot)$ é dada por $g(\mu_{it}) = \ln\left(\frac{\mu_{it}}{1-\mu_{it}}\right)$. Dessa forma, se denotamos $g(\mu_{it}) = \eta_{it} = \alpha_0 + S_i(t) + R_i$ temos que sua inversa é dada por $\mu_{it} = \frac{\exp(\eta_{it})}{1 + \exp(\eta_{it})} = \exp(\eta_{it}y_{it} - n_{it} \ln(1 + \exp(\eta_{it})))$.

Observação 2.16. É importante ressaltar, com base na Observação 2.15 e no contexto da distribuição Binomial, que a expressão $\mu_{it}^{y_{it}}(1-\mu_{it})^{n_{it}-y_{it}}$ é equivalente a $\frac{\exp(\eta_{it}y_{it})}{(1 + \exp(\eta_{it}))^{n_{it}}}$.

As distribuições *a posteriori* condicionais completas, a seguir, foram obtidas com base no Teorema de Bayes, nas distribuições *a priori* de cada parâmetro e na função de verossimilhança dos dados, onde $\eta_{it} = \alpha_0 + S_i(t) + R_i$, com S_i e R_i seguindo as especificações em cada modelo (ver Tabela 2.2 e Seção 2.10.1) e no contexto da distribuição Binomial (ver Observações 2.15 e 2.16), conforme apresentado na Proposição 2.15, a seguir.

Proposição 2.15. *Sejam a variável aleatória $\mathbf{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{NT})'$, com distribuição de probabilidade $\pi(\mathbf{Y})$, $\mathbf{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{NT})'$ uma realização desta variável aleatória e $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de*

parâmetros independentes associados ao modelo apresentado em (2.1). Considere as funções de distribuição a priori dadas na Seção 2.10.1, no contexto da distribuição Binomial. Então, as distribuições a posteriori condicionais completas para α_0 , b_i , h_i , σ_b^2 e σ_h^2 , são dadas, respectivamente, por

$$(i) \quad \pi(\alpha_0 | \boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0}, \mathbf{y}) \propto \exp \left(-\alpha_0 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{t=1}^T n_{it} \ln(1 + \exp(\eta_{it})) \right) \pi(\alpha_0)$$

$$(ii) \quad \pi(b_i | \boldsymbol{\theta}_{-b_i}, \mathbf{y}) \propto \exp \left(b_i \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{t=1}^T n_{it} \ln(1 + \exp(\eta_{it})) - \kappa \frac{N_i}{2\sigma_b^2} (b_i - \bar{b}_i)^2 \right)$$

$$(iii) \quad \pi(h_i | \boldsymbol{\theta}_{-h_i}) \propto \exp \left(h_i \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{t=1}^T n_{it} \log(1 + \exp(\eta_{it})) - (h_i^2 / 2\sigma_h^2) \right)$$

$$(iv) \quad \pi(\sigma_b^2 | \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2}) \sim \mathcal{GI}(\gamma_1 + N/2, \gamma_2 + \kappa \sum_{i=1}^N N_i (b_i - \bar{b}_i)^2 / 2)$$

$$(v) \quad \pi(\sigma_h^2 | \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2}) \sim \mathcal{GI}(\gamma_1 + N/2, \gamma_2 + \sum_{i=1}^N h_i^2 / 2),$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, $\eta_{it} = \alpha_0 + S_i(t) + R_i$, $\bar{b}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j:i \sim j} b_j$ e N_i é o número de vizinhos da região i .

Prova: (i) Sabemos que

$$\pi(\alpha_0 | \boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0}, \mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0})}. \quad (2.94)$$

Os demais parâmetros, com exceção de α_0 , sempre são tratados como constantes e, dessa forma, com base na equação (2.94), temos a expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_0 | \boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0}, \mathbf{y}) &\propto \pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0}, \alpha_0) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\alpha_0}) \pi(\alpha_0) \\ &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\alpha_0) \\ &\propto \exp \left(-\alpha_0 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T n_{it} \ln(1 + \exp(\eta_{it})) \right) \pi(\alpha_0). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (2.95) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados e nas demais passagens utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos. Na última linha de (2.95) foi empregada a expressão para a função de verossimilhança no contexto da distribuição Binomial com base nas Observações 2.15 e 2.16.

(ii) Sabemos que

$$\pi(b_i | \boldsymbol{\theta}_{-b_i}, \mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{-b_i})}. \quad (2.96)$$

Os demais parâmetros, com exceção de b_i , sempre são tratados como constantes e, dessa forma,

com base na equação (2.96), temos a expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned}
\pi(b_i|\boldsymbol{\theta}_{-b_i}, \mathbf{y}) &\propto \pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}_{-b_i}, b_i) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}_{-b_i})\pi(b_i) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(b_i) \\
&\propto \exp\left(b_i \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{t=1}^T n_{it} \ln(1 + \exp(\eta_{it})) - \kappa \frac{N_i}{2\sigma_b^2} (b_i - \bar{b}_i)^2\right). \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (2.97) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados e nas demais passagens utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos. Na última linha de (2.97) foi empregada a expressão para a função de verossimilhança no contexto da distribuição Binomial com base nas Observações 2.15 e 2.16.

(iii) Sabemos que

$$\pi(h_i|\boldsymbol{\theta}_{-h_i}, \mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{-h_i})}. \quad (2.98)$$

Os demais parâmetros, com exceção de h_i , sempre são tratados como constantes e, dessa forma, com base na equação (2.98), temos a expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned}
\pi(h_i|\boldsymbol{\theta}_{-h_i}, \mathbf{y}) &\propto \pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}_{-h_i}, h_i) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(\boldsymbol{\theta}_{-h_i})\pi(h_i) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})\pi(h_i) \\
&\propto \exp\left(h_i \sum_{t=1}^T y_{it} - \sum_{t=1}^T n_{it} \log(1 + \exp(\eta_{it})) - (h_i^2/2\sigma_h^2)\right). \quad (2.99)
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (2.99) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados e nas demais passagens utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos. Na última linha de (2.99) foi empregada a expressão para a função de verossimilhança no contexto da distribuição Binomial com base nas Observações 2.15 e 2.16.

(iv) Sabemos que

$$\pi(\sigma_b^2|\boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2})}. \quad (2.100)$$

Os demais parâmetros, com exceção de b_i , sempre são tratados como constantes e, dessa forma,

com base na equação (2.100), temos a expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma_b^2 | \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2}) &\propto \pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2}, \sigma_b^2) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\sigma_b^2}) \pi(\sigma_b^2) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\mathbf{b}) \pi(\sigma_b^2) \\
&\propto \left(\frac{1}{\sigma_b^2} \right)^{\frac{N}{2} + \gamma_1 + 1} \exp \left(\frac{-1}{\sigma_b^2} \left(\gamma_2 + \kappa \sum_{i=1}^N \frac{N_i (b_i - \bar{b}_i)^2}{2} \right) \right). \tag{2.101}
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (2.101) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados e nas demais passagens utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos. Note que o parâmetro \mathbf{b} depende de σ_b^2 . Na última linha de (2.101) foi cancelada a função de verossimilhança pois não contém o parâmetro σ_b^2 . A expressão resultante na última linha de (2.101) corresponde ao núcleo da função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória inversa gama $\mathcal{GI}(\gamma_1 + N/2, \gamma_2 + \sum_{i=1}^N N_i (b_i - \bar{b}_i)^2 / 2)$.

(v) Sabemos que

$$\pi(\sigma_h^2 | \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2}) = \frac{\pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2})}. \tag{2.102}$$

Os demais parâmetros, com exceção de σ_h^2 , sempre são tratados como constantes e, dessa forma, com base na equação (2.102), temos a expressão de proporcionalidade como segue

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma_h^2 | \boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2}) &\propto \pi(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2}, \sigma_h^2) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{-\sigma_h^2}) \pi(\sigma_h^2) \\
&\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\mathbf{b}) \pi(\sigma_h^2) \\
&\propto \left(\frac{1}{\sigma_h^2} \right)^{\frac{N}{2} + \gamma_1 + 1} \exp \left(\frac{-1}{\sigma_h^2} \left(\gamma_2 + \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{2} \right) \right). \tag{2.103}
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (2.103) usou-se a definição da função de verossimilhança dos dados e nas demais passagens utilizou-se, repetidamente, a hipótese de independência entre os parâmetros dos modelos. Note que o parâmetro \mathbf{b} depende de σ_h^2 . Na última linha de (2.103) foi cancelada a função de verossimilhança pois não contém o parâmetro σ_h^2 . A expressão resultante na última linha de (2.103) corresponde ao núcleo da função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória inversa gama $\mathcal{GI}(\gamma_1 + N/2, \gamma_2 + \sum_{i=1}^N h_i^2 / 2)$. ■

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Serão apresentadas cinco aplicações dos modelos em estudo. A primeira envolve o conjunto de dados dos efeitos adversos pós-vacinação (EAPV) notificados no período de 2005 a 2010, nos estados brasileiros, utilizado no trabalho de [Perin \(2014\)](#). A segunda aplicação analisa o conjunto de dados de óbitos infantis (com menos de um ano de idade) por residência nos estados brasileiros entre 1991 e 2013 (fonte *MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade*) usados no trabalho de [Silva e Dean \(2006\)](#). A terceira aplicação corresponde ao conjunto de pacientes do sexo masculino hospitalizados com infarto do miocárdio na província de Québec entre os anos de 1993 e 2000, utilizados em [Silva et al. \(2008\)](#). A quarta aborda o conjunto de dados sobre a incidência de radiação solar disponíveis na *USA National Solar Radiation Data Base (NSRDB)* em períodos mensais entre janeiro de 1960 a dezembro de 2010, utilizados no trabalho de [Pumi et al. \(2015\)](#). A quinta aplicação apresenta o indicador de resistência a 13 diferentes antibióticos para a bactéria *Salmonella Typhimurium* DT104 com sequências de DNA obtidas a partir de animais e humanos na Escócia no período de 1990 a 2011, utilizado nos trabalhos [Cybis et al. \(2015\)](#) e [Mather et al. \(2013\)](#).

3.1 Exemplo 1: Efeitos Adversos Pós-Vacinação

Foram feitas análises com base no conjunto de dados dos efeitos adversos pós-vacinação (EAPV) notificados no período de 2005 a 2010 utilizado no trabalho de [Perin \(2014\)](#).

Entende-se por evento adverso pós-vacinação qualquer ocorrência clínica indesejável em indivíduo que tenha recebido algum imunobiológico. Segundo [Perin \(2014\)](#), um evento está temporalmente associado ao uso de uma vacina, nem sempre tendo relação causal com a vacina aplicada. Quando esta relação causal é confirmada, denomina-se uma reação adversa (Ministério da Saúde, 2008).

A área de estudo compreendeu todo o território brasileiro, composto de 26 estados e um Distrito Federal. O calendário infantil de vacinação é previsto para crianças de até 10 anos (Ministério da Saúde, 2010). Desse modo, a população-alvo envolveu crianças brasileiras menores do que 10 anos de idade que receberam ao menos uma dose das vacinas abaixo:

- (i) vacina contra formas graves de tuberculose (BCG - dose única);
- (ii) vacina contra hepatite B (HB - três doses);
- (iii) vacina contra difteria, tétano, coqueluche, meningite e outras infecções por *Haemophilus influenzae* tipo b (Tetraivalente - DTP + hib - três doses);
- (iv) vacina oral contra poliomielite (VOP - três doses mais um reforço);

- (v) vacina oral contra diarreia por rotavírus (VORH - duas doses);
- (vi) vacina contra febre amarela (FA - uma dose a cada dez anos);
- (vii) vacina contra sarampo, caxumba e rubéola (SCR - duas doses);
- (viii) vacina reforço a Tetravalente, prevenindo a difteria, tétano e coqueluche (DTP - duas doses reforço).

A Figura 3.1 apresenta o número de casos reportados, que levaram ou não à hospitalização para cada uma das 8 vacinas consideradas. Observa-se que dentre as 8 vacinas consideradas, as vacinas TETRA, VOP e VOHR são as que apresentam proporção de hospitalização maior ou igual a $2/3$ do total de casos reportados, associados à vacina correspondente. Segundo Perin (2014), o número de casos reportados para a vacina TETRA é muito maior do que o número de casos reportados para todas as demais vacinas.

As frequências com que ocorreram os EAPVs na amostra em estudo são apresentadas na Tabela 3.1. Alguns indivíduos reportaram mais de um EAPV após receber uma dose de alguma das vacinas em questão. Sendo assim, o total de eventos reportados é maior do que o total de casos analisados.

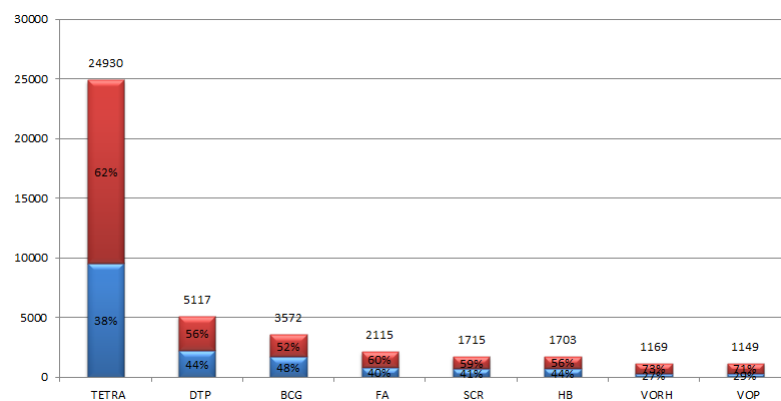


Figura 3.1: Número de casos (elementos distintos) reportados, por vacina, envolvendo um ou mais eventos adversos, que levaram (em vermelho) ou não (azul) à hospitalização - Exemplo 1.

Tabela 3.1: Frequência de ocorrência de EAPV, por tipo de evento, na amostra em estudo - Exemplo 1.

Evento	Frequência	%
Episódio hipotônico hiporresponsivo (EHH)	10395	20.02
Febre maior ou igual a $39.5^{\circ}C$	7230	13.93
Febre menor que $39.5^{\circ}C$	5308	10.22
Reação local	5046	9.72
Convulsão febril	3344	6.44
Outros	20596	39.67

Selecionou-se, para este estudo, os dados referentes à imunização pela vacina TETRA (previne sarampo, caxumba, rubéola e catapora), o efeito adverso pós-vacinação “convulsão” e as unidades federativas do Brasil, no período de 2005 a 2010. A vacina TETRA e o efeito adverso “convulsão”, separadamente, apresentam o maior número de informações coletadas e/ou de casos reportados.

A metodologia apresentada no Capítulo 2, nos permite dar o modelo (2.1) no contexto da

distribuição Binomial (ver segunda linha da expressão (2.6)), como

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.1)$$

onde a função de ligação é dada por

$$g(\mu_{it}) = \ln \left(\frac{\mu_{it}}{1 - \mu_{it}} \right),$$

onde $i \in \{1, \dots, 27\}$ e $t \in \{2005, \dots, 2010\}$.

As variações adotadas para $S_i(t)$ e R_i na expressão (3.1) estão listadas na Tabela 2.2. Para os modelos em análise foram simuladas 600.000 amostras de Gibbs usando o *software OpenBugs* a partir do *software R* (biblioteca *R2OpenBugs*) com aquecimento (*burn-in-sample*) de 300.000 amostras e salto de 150. Resultando em uma amostra de 2.000 observações. Para as análises, consideramos duas cadeias, cada uma delas com 2.000 observações, onde se consideram diferentes condições iniciais.

A taxa do efeito adverso “convulsão” é um índice demográfico que reflete o número de casos de convulsão notificados em um determinado estado brasileiro para os anos de 2005 a 2010. Assim, uma taxa do efeito adverso convulsão de 2.5 em uma população de 100 crianças vacinadas em determinados estado e ano significa a ocorrência de 25 casos de convulsão naquele estado e naquele ano.

As taxas do efeito adverso “convulsão” pós-vacinação nos estados brasileiros no período de 2005 a 2010 correspondem a valores inferiores a 0.06 ou seja, 6%. A taxa do efeito adverso “convulsão” pós-vacinação é obtida dividindo-se a quantidade de casos de “convulsão” notificados em cada ano, y_{it} , pela quantidade de crianças vacinadas em cada ano, n_{it} , onde i representa uma das 27 unidades federativas e $t \in \{2005, \dots, 2010\}$, respectivamente.

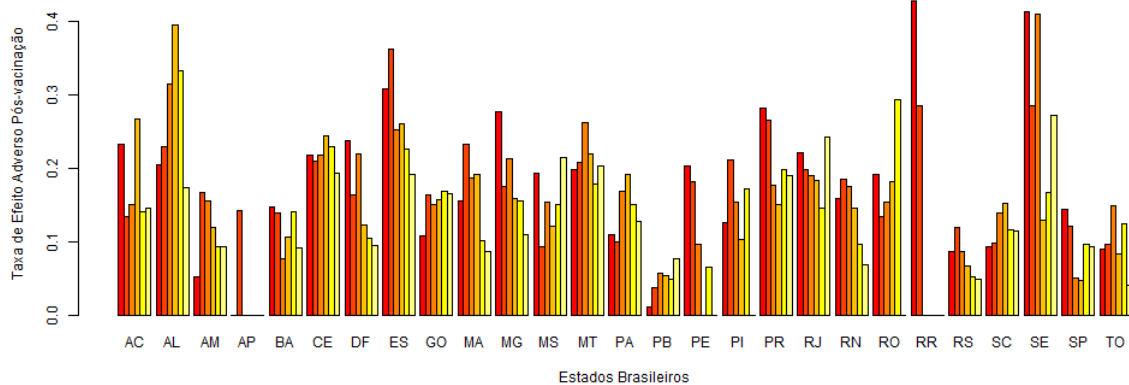


Figura 3.2: Taxas do efeito adverso “convulsão” nos estados brasileiros no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

A Figura 3.2 apresenta as taxas do efeito adverso “convulsão” nos estados brasileiros no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos no período de 2005 a 2010. As taxas do efeito adverso “convulsão” variam entre 0 e 0.4, indicando que em alguns estados houve algo próximo a 40% dos casos notificados de efeito adverso “convulsão” para as crianças que receberam dose da vacina TETRA. Nos estados do Amapá, Pernambuco, Piauí, Rondônia e Roraima não há dados para alguns anos desse período.

As Figuras 3.3 - 3.7 trazem as informações da Figura 3.2 separadas por regiões geográficas

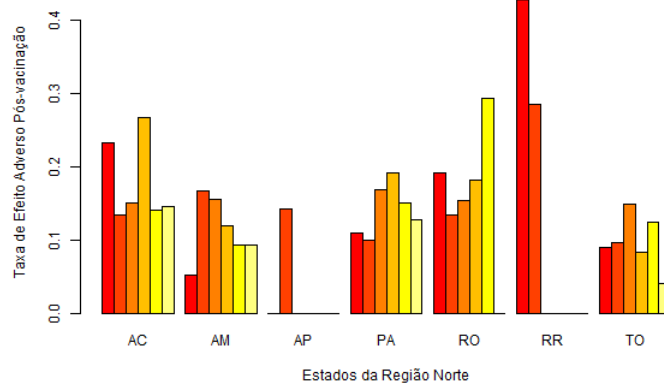


Figura 3.3: Taxas do efeito adverso "convulsão" nos estados da região Norte no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

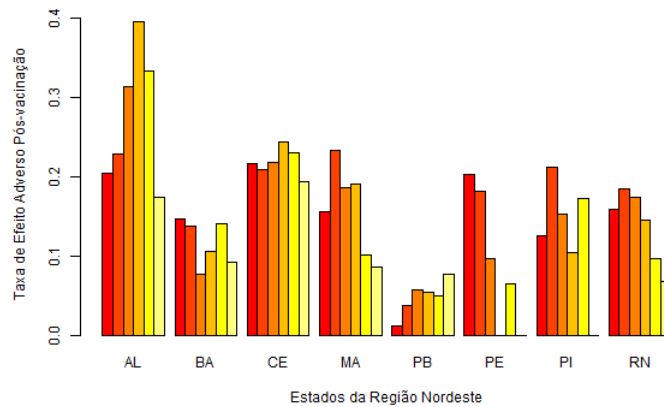


Figura 3.4: Taxas do efeito adverso "convulsão" nos estados da região Nordeste no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

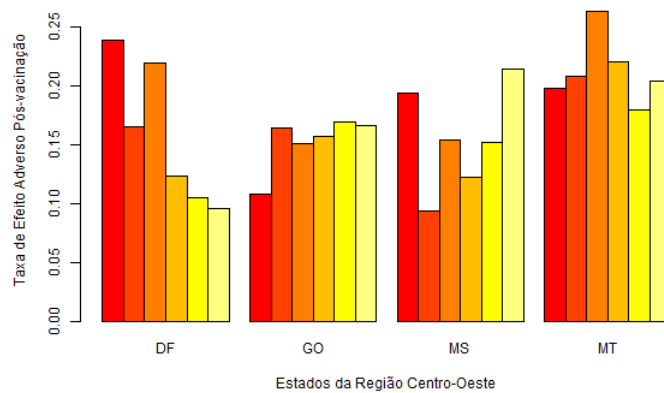


Figura 3.5: Taxas do efeito adverso "convulsão" nos estados da região Centro-Oeste no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

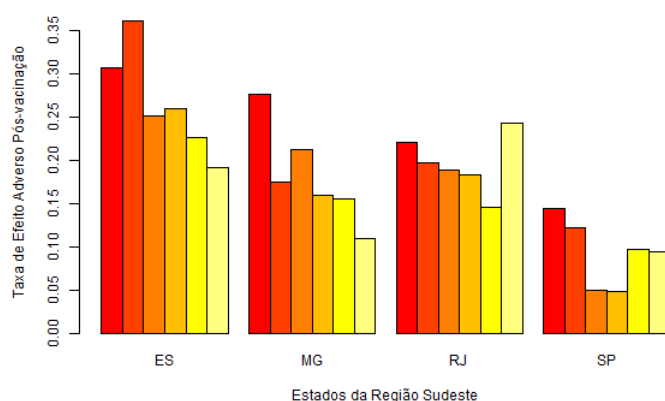


Figura 3.6: Taxas do efeito adverso “convulsão” nos estados da região Sudeste no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

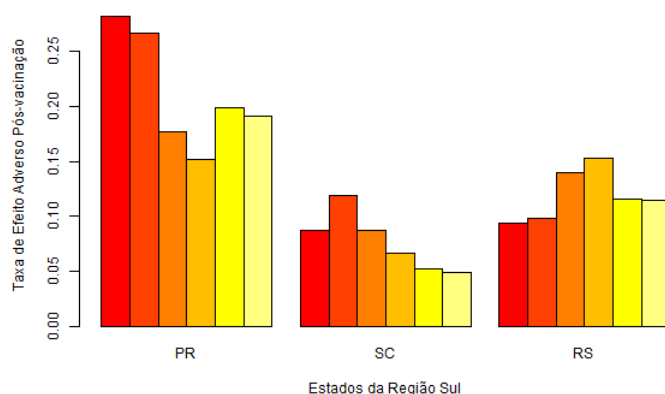


Figura 3.7: Taxas do efeito adverso “convulsão” nos estados da região Sul no período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos seis anos - Exemplo 1.

brasileiras. Para os estados da região centro-oeste os valores das taxas de efeito adverso “convulsão” são semelhantes e para os estados das demais regiões (norte, nordeste, sudeste e sul) há discrepância entre os valores da taxa de efeito adverso “convulsão”.

As comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ estão apresentadas nas Tabelas 3.2 e 3.3. As estimativas das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para tais casos estão apresentadas na Tabela 3.4.

Com base nos critérios de seleção dos modelos apresentados na Seção 2.8, temos que os modelos M_5 (ver Tabela 3.2) e M_9 (ver Tabela 3.3) são descartados por apresentarem valores negativos para DIC .

Nas Tabelas 3.2 e 3.3 estão em negrito os menores valores ocorridos para cada critério quando comparados entre os diferentes modelos (ver informações por coluna). Em linha geral, o modelo que apresentou menores valores para os critérios de seleção foi o modelo M_1 .

Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para o modelo M_1 (M_{1bh} , M_{1b} , M_{1h} , M_{1c}) para os diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros de variância como posto na Tabela 2.1.

Os resultados obtidos na análise de sensibilidade para o modelo $M1$ estão apresentados nas Tabelas 3.5 e 3.6, respectivamente, para os critérios de seleção dos modelos e para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos.

Existem algumas diferenças entre os valores obtidos nas Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 com as Tabelas 3.5 e 3.6. Essa diferença ocorre devido à aleatoriedade da semente utilizada para gerar as cadeias de Markov associadas.

Houve um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade. Não houve alterações significativas para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos (ver Tabela 3.6) e para os critérios de seleção (ver Tabela 3.5).

Tabela 3.2: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Parte A - Exemplo 1.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
M1bh	262.88	-485.96	831.10	957.69	970.19	262.88	-485.96	831.10	957.69	970.19
M1b	264.28	-488.38	924.70	959.82	972.36	264.28	-488.38	924.70	959.82	972.36
M1h	262.77	-486.04	946.50	957.43	970.03	262.77	-486.04	946.50	957.43	970.03
M1c	262.86	-486.61	946.60	957.48	969.85	262.86	-486.61	946.60	957.48	969.85
M2bh	265.59	-492.35	930.20	964.59	980.81	265.59	-492.35	930.20	964.59	980.81
M2b	265.91	-493.24	932.90	965.00	982.18	265.91	-493.24	932.90	965.00	982.18
M2h	265.75	-491.94	951.40	964.26	980.57	250.46	-463.45	897.20	907.71	923.16
M2c	265.56	-492.95	951.30	964.22	981.01	265.52	-492.20	950.80	963.72	980.01
M3bh	265.16	-492.43	782.30	965.07	982.17	264.86	-492.85	934.00	964.53	981.29
M3b	265.70	-492.91	918.90	965.37	982.48	265.86	-493.69	926.60	965.58	983.20
M3h	264.70	-492.36	950.70	964.10	980.94	264.92	-492.11	950.90	964.11	980.53
M3c	264.83	-492.08	950.50	963.45	979.95	265.04	-493.57	950.50	963.74	980.45
M4bh	265.29	-493.23	930.30	964.84	981.67	265.45	-493.94	935.00	965.59	982.18
M4b	266.94	-495.60	934.00	967.40	985.44	266.31	-493.96	929.40	966.20	984.23
M4h	265.73	-493.21	951.80	965.17	982.12	265.34	-493.65	951.60	964.72	981.84
M4c	265.60	-492.73	951.50	964.75	981.53	265.25	-492.53	950.70	964.43	981.07
M5bh	266.88	-495.81	-183.50	968.21	987.58	267.05	-497.15	797.60	970.10	990.84
M5b	281.57	-562.62	-52050.00	1005.21	1062.97	282.53	-586.81	-13370.00	1007.47	1069.00
M5h	266.19	-495.35	-45890.00	966.55	985.44	266.50	-496.12	-17870.00	967.54	986.14
M5c	266.44	-495.50	-42270.00	967.15	986.03	266.25	-496.58	-21720.00	966.66	985.92

Tabela 3.3: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Parte B - Exemplo 1.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$
<i>M6hh</i>	267.13	-497.79	409.10	968.76	988.20	266.75	-497.18	515.20	968.71	987.82
<i>M6b</i>	279.23	-544.45	832.10	1001.73	1051.52	276.22	-533.64	268.20	992.08	1035.01
<i>M6h</i>	265.95	-495.06	947.20	966.54	984.95	266.50	-495.86	873.20	967.88	986.96
<i>M6c</i>	266.34	-495.67	952.60	967.17	986.47	267.23	-495.75	654.70	968.10	987.33
<i>M7bh</i>	265.22	-494.15	902.90	965.38	982.05	264.90	-492.21	923.00	964.12	981.88
<i>M7b</i>	266.00	-493.57	922.90	965.24	982.54	265.86	-492.98	925.30	965.11	982.26
<i>M7h</i>	265.11	-493.35	951.10	964.35	981.10	265.30	-493.67	951.30	964.90	981.64
<i>M7c</i>	264.89	-493.95	950.40	963.94	981.21	265.33	-492.89	951.10	964.60	981.81
<i>M8bh</i>	264.72	-493.47	902.70	963.48	980.43	265.02	-492.72	936.80	964.62	981.11
<i>M8b</i>	266.03	-494.98	915.00	965.43	983.65	265.77	-492.92	925.90	964.85	981.81
<i>M8h</i>	265.38	-492.33	951.30	964.00	980.55	265.25	-493.47	951.40	964.49	981.46
<i>M8c</i>	265.08	-493.30	950.90	963.98	981.35	264.82	-491.55	950.20	963.02	979.78
<i>M9bh</i>	266.10	-496.23	938.40	967.10	987.02	266.10	-496.23	938.40	967.10	987.02
<i>M9b</i>	278.54	-554.68	-5779.00	996.97	1043.75	276.53	-533.89	-1293.00	991.27	1033.37
<i>M9h</i>	266.43	-495.11	-4115.00	966.47	985.14	266.46	-495.05	945.20	966.57	985.20
<i>M9c</i>	266.62	-494.91	945.90	966.40	984.96	266.69	-496.98	459.80	968.27	987.90
<i>M10bh</i>	267.26	-500.14	887.70	970.08	991.51	267.26	-500.14	887.70	970.08	991.51
<i>M10b</i>	277.60	-535.50	861.70	995.02	1039.46	279.69	-542.23	925.60	998.96	1045.63
<i>M10h</i>	266.44	-498.21	549.70	966.96	986.53	266.75	-495.18	-686.60	966.76	985.79
<i>M10c</i>	267.06	-495.41	681.40	967.84	987.36	266.48	-494.44	-343.90	966.73	984.72

Tabela 3.4: Estimativas das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para a distribuição a priori $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 1.

Cadeia	Modelo	Parâmetro	M1		M2		M3		M4		M5	
			média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
1	<i>Mibh</i>	σ_b^2	0.047	0.132	0.055	0.151	0.059	0.159	0.065	0.177	0.045	0.112
		σ_h^2	0.193	0.078	0.191	0.083	0.188	0.081	0.187	0.081	0.195	0.076
		σ_{total}^2	0.128	0.237	0.135	0.263	0.143	0.264	0.150	0.273	0.128	0.228
		σ_b^2	0.674	0.218	0.684	0.237	0.675	0.226	0.674	0.219	0.677	0.219
2	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.213	0.068	0.215	0.072	0.218	0.073	0.215	0.073	0.211	0.067
		σ_h^2	0.677	0.226	0.673	0.220	0.681	0.232	0.676	0.225	0.681	0.228
		σ_{total}^2	0.047	0.132	0.055	0.151	0.063	0.159	0.061	0.155	0.053	0.123
		σ_b^2	0.193	0.078	0.191	0.083	0.186	0.085	0.189	0.083	0.192	0.080
1	<i>Mibh</i>	σ_b^2	0.128	0.237	0.135	0.263	0.155	0.276	0.151	0.272	0.145	0.251
		σ_h^2	0.674	0.218	0.684	0.237	0.678	0.229	0.674	0.227	0.683	0.221
		σ_{total}^2	0.213	0.068	0.255	0.088	0.213	0.068	0.216	0.070	0.221	0.075
		σ_b^2	0.677	0.226	0.677	0.223	0.688	0.227	0.672	0.214	0.678	0.212
2	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.045	0.118	0.049	0.130	0.051	0.137	0.059	0.139	0.077	0.170
		σ_h^2	0.197	0.078	0.192	0.078	0.192	0.080	0.190	0.077	0.185	0.081
		σ_{total}^2	0.128	0.230	0.130	0.246	0.135	0.248	0.155	0.260	0.185	0.292
		σ_b^2	0.671	0.216	0.665	0.211	0.671	0.205	0.675	0.225	0.681	0.233
1	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.213	0.068	0.215	0.069	0.213	0.070	0.216	0.071	0.211	0.066
		σ_h^2	0.683	0.220	0.678	0.227	0.681	0.227	0.682	0.229	0.689	0.226
		σ_{total}^2	0.049	0.128	0.058	0.154	0.053	0.150	0.059	0.139	0.077	0.170
		σ_b^2	0.195	0.082	0.193	0.085	0.191	0.081	0.190	0.077	0.185	0.081
2	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.133	0.238	0.147	0.267	0.132	0.249	0.155	0.260	0.185	0.292
		σ_h^2	0.667	0.222	0.666	0.208	0.679	0.232	0.675	0.227	0.676	0.218
		σ_{total}^2	0.212	0.067	0.215	0.070	0.214	0.071	0.212	0.067	0.213	0.068
		σ_b^2	0.685	0.230	0.675	0.216	0.682	0.236	0.679	0.230	0.679	0.219

Tabela 3.5: Análise de sensibilidade para as comparações dos ajustes, com distribuição *a priori* para os componentes de variância dada por $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ com $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.001, 0.001), (0.001, 0.001), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$, para os modelos $M1bh, M1b, M1h$ e $M1c$ - Exemplo 1.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$									
$M1bh$	249.46	-463.12	773.40	905.96	921.61	249.75	-463.06	752.40	906.55	921.78
$M1b$	249.66	-462.39	876.60	906.34	921.89	249.53	-462.69	876.90	906.08	921.64
$M1h$	250.18	-463.02	897.10	907.68	922.36	250.13	-463.68	896.90	907.45	922.63
$M1c$	248.63	-461.63	894.60	904.64	919.34	248.83	-461.99	894.90	904.85	919.54
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.01, 0.01)$									
$M1bh$	250.07	-463.89	790.70	907.39	923.41	249.42	-463.88	792.50	906.42	922.15
$M1b$	250.01	-463.90	859.00	906.93	922.53	250.07	-463.39	877.10	907.05	923.34
$M1h$	250.11	-463.58	897.00	907.75	922.96	250.23	-463.10	897.10	907.76	923.04
$M1c$	248.85	-462.93	895.20	905.35	920.89	249.00	-462.93	895.20	905.45	921.23
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$									
$M1bh$	249.81	-463.21	665.10	906.97	922.92	250.05	-463.71	736.20	906.87	923.28
$M1b$	249.42	-464.16	884.90	905.55	921.53	249.77	-464.76	872.10	906.56	922.90
$M1h$	250.42	-464.07	897.30	907.72	923.69	249.72	-462.58	896.50	906.88	921.88
$M1c$	248.87	-462.53	894.90	905.38	920.95	248.89	-462.94	894.90	905.35	921.03
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.2, 0.0004)$									
$M1bh$	250.12	-464.42	828.90	907.27	923.38	249.67	-462.31	792.00	906.97	922.29
$M1b$	249.60	-463.93	870.00	905.65	921.21	249.84	-464.12	870.00	906.67	923.38
$M1h$	250.24	-463.78	896.90	907.27	922.64	250.35	-464.83	897.40	908.14	923.90
$M1c$	249.13	-462.47	895.10	905.50	921.06	249.12	-462.85	895.10	905.71	920.85
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.5, 0.0005)$									
$M1bh$	249.83	-463.56	825.00	907.79	922.91	249.75	-463.67	830.00	906.91	921.70
$M1b$	250.06	-463.84	881.20	906.90	923.04	249.74	-463.52	874.00	906.74	922.11
$M1h$	249.98	-463.50	897.10	907.36	922.96	249.95	-463.57	896.70	907.25	922.38
$M1c$	248.84	-461.96	894.90	905.37	920.39	248.72	-462.43	894.50	905.03	920.30

Tabela 3.6: Análise de sensibilidade das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para os modelos $M1bh$, $M1b$, $M1h$ e $M1c$ para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), B = (0.01, 0.01), C = (0.001, 0.001), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$ - Exemplo 1.

Modelo	Parâmetro	A		B		C		D		E	
		média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
Cadeia 1											
$M1bh$	σ_b^2	0.336	0.304	0.330	0.276	0.326	0.226	0.278	0.321	0.211	0.311
	σ_h^2	0.138	0.110	0.140	0.099	0.159	0.083	0.153	0.119	0.174	0.123
	σ_{total}^2	0.593	0.348	0.610	0.299	0.623	0.210	0.488	0.398	0.359	0.413
$M1b$	σ_b^2	0.770	0.266	0.775	0.271	0.775	0.268	0.743	0.254	0.736	0.265
$M1h$	σ_h^2	0.272	0.093	0.274	0.096	0.276	0.094	0.263	0.088	0.258	0.089
$M1c$	σ_c^2	0.819	0.276	0.818	0.281	0.818	0.273	0.799	0.276	0.780	0.271
Cadeia 2											
$M1bh$	σ_b^2	0.330	0.315	0.337	0.281	0.326	0.231	0.278	0.318	0.212	0.309
	σ_h^2	0.141	0.109	0.136	0.095	0.163	0.090	0.154	0.119	0.170	0.123
	σ_{total}^2	0.577	0.350	0.623	0.294	0.617	0.218	0.487	0.399	0.369	0.416
$M1b$	σ_b^2	0.775	0.265	0.785	0.277	0.777	0.281	0.758	0.264	0.733	0.255
$M1h$	σ_h^2	0.270	0.093	0.270	0.093	0.280	0.096	0.263	0.088	0.254	0.086
$M1c$	σ_c^2	0.809	0.279	0.804	0.280	0.817	0.280	0.804	0.283	0.774	0.260

As Figuras A.1 e A.2 (ver Apêndice A) apresentam informações a respeito do parâmetro α_0 para os modelos $M1bh$ e $M1b$ (Figura A.1) e para os modelos $M1h$ e $M1c$ (Figura A.2), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras A.3 e A.4 (ver Apêndice A) apresentam informações a respeito dos parâmetros de variância σ_b^2 e σ_h^2 para o modelo $M1bh$ (Figura A.3) e dos parâmetros de variância σ_b^2 para o modelo $M1b$, σ_h^2 para o modelo $M1h$ e σ_c^2 para o modelo $M1c$ (Figura A.4), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras A.5 e A.6 (ver Apêndice A) apresentam, a título de exemplo, informações a respeito dos parâmetros b_{16} e h_{16} para o modelo $M1bh$ (Figura A.5) e do parâmetro b_{16} para o modelo $M1b$, h_{16} para o modelo $M1h$ e b_{16} para o modelo $M1c$ (Figura A.6), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras A.7 - A.10 (ver Apêndice A) apresentam, respectivamente, as chances de ocorrência do efeito adverso “convulsão” para os estados do Brasil e para os modelos $M1bh$, $M1b$, $M1h$ e $M1c$, com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

Percebe-se que não houveram mudanças significativas entre as chances de ocorrência de efeito adverso pós-vacinação “convulsão” quando comparadas entre si para cada ano (escala de cores graduadas), no decorrer do período analisado. Uma explicação para este fato é que para a quase totalidade dos estados brasileiros (com exceção de Amapá e Roraima onde existem falta de dados) houve a diminuição homogênea da ocorrência do efeito adverso “convulsão”.

Para os estados de Sergipe e Alagoas a chance de ocorrência de efeito adverso se manteve alta e para os estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina, por exemplo, se manteve baixa com o

passar dos anos.

As Figuras A.7 - A.10 (ver Apêndice A) estão elaboradas em uma configuração de cinco intervalos de quantis para os valores obtidos de chances de efeito adverso “convulsão”, ou seja, em cinco cores graduadas. Neste caso, temos a indicação de que apesar da diminuição dos valores das taxas de efeito adverso pós-vacinação durante o passar dos anos (ver Figuras 3.3 - 3.7 no Apêndice A) não houve alteração nas chances relativas de efeito adverso “convulsão”.

As Figuras A.11 - A.13 (ver Apêndice A) apresentam os valores preditos (preto) e os valores observados para as taxas de ocorrência do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” para os estados do Brasil e para os modelos $M1bh$ (amarelo), $M1b$ (azul), $M1h$ (vermelho) e $M1c$ (verde), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$.

Os valores preditos traduzem o comportamento dos dados de que há uma leve queda das taxas de efeito adverso pós-vacinação “convulsão” no decorrer dos anos, em geral, para todos os estados brasileiros.

Dessa forma, o modelo final, com base na expressão (3.1) é dado por

$$g(\mu_{it}) = S_i(t) + R_i, \quad (3.2)$$

de forma que $S_i(t) = \delta t$, $R_i = b_i + h_i$ ou $R_i = b_i$ ou $R_i = h_i$, para $i \in \{1, \dots, 27\}$ e $t \in \{2005, \dots, 2010\}$.

Os ajustes obtidos para o modelo $M1$ com base na expressão (3.2) são apresentados na Tabela 3.7.

Tabela 3.7: Modelos ajustados para o Exemplo 1.

Modelo	Ajuste
$M1bh$	$-1.469 - 0.081t + b_i + h_i$
$M1b$	$-1.472 - 0.082t + b_i$
$M1h$	$-1.462 - 0.081t + h_i$
$M1c$	$-1.458 - 0.081t + b_i$

A Tabela 3.7 mostra que os modelos ajustados são muito semelhantes entre si, para todos os casos em estudo ($M1bh$, $M1b$, $M1h$ e $M1c$). O valor do intercepto α_0 ficou próximo do valor negativo -1.4 e o valor do efeito linear aditivo δ ficou próximo de -0.08 . Esta característica dos modelos nos traz a informação de que há uma leve queda nas taxas do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” no decorrer dos anos.

3.2 Exemplo 2: Mortalidade Infantil

Foram feitas análises com base no conjunto de dados de óbitos infantis (com menos de um ano de idade) por residência nos estados brasileiros entre 1991 e 2013, fonte *MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade - SIM* e usados no trabalho de [Silva e Dean \(2006\)](#).

A quantidade de nascidos vivos em cada ano correspondente é denotada por n_{it} e a quantidade de óbitos em cada ano é denotada por y_{it} , com i representando cada uma das 27 unidades federativas e $t \in \{1991, \dots, 2013\}$, respectivamente.

O modelo estudado, com base na expressão (2.1) e no contexto da distribuição de Poisson (ver primeira linha da expressão (2.6)), é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.3)$$

onde a função de ligação é dada por

$$g(\mu_{it}) = \ln(\mu_{it}),$$

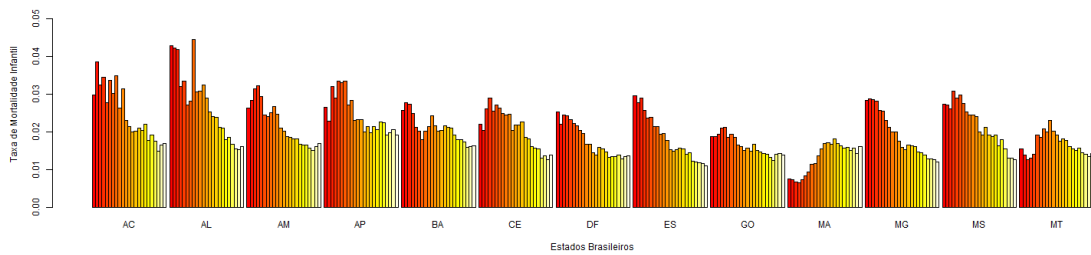
com $i \in \{1, \dots, 27\}$ e $t \in \{1991, \dots, 2013\}$.

O modelo dado em (3.3) utiliza a distribuição de Poisson para modelar os dados e, em virtude disso, as informações presentes nos dados são reportadas ao modelo na forma de contagem da quantidade de óbitos, y_{it} , e de contagem da quantidade de nascidos vivos, n_{it} , com i representando cada uma das 27 unidades federativas e $t \in \{1991, \dots, 2013\}$, respectivamente. Os resultados associados ao modelo (3.3) são reportados em formato de taxas pois os dados de mortalidade infantil são comumente apresentados neste formato.

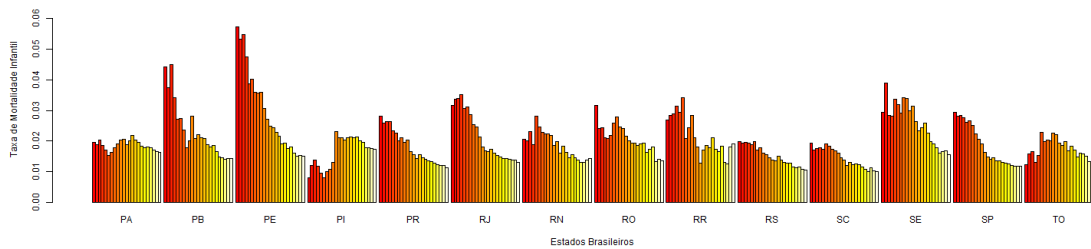
As variações adotadas para $S_i(t)$ e R_i , na expressão (3.3), estão listadas na Tabela 2.2. Para os modelos em análise foram simuladas 600.000 amostras de Gibbs usando o *software OpenBugs* a partir do *software R* (biblioteca *R2OpenBugs*) com aquecimento (*burn-in-sample*) de 300.000 amostras e salto de 150. Resultando em uma amostra de 2.000 observações. Para as análises, consideramos duas cadeias, cada uma delas com 2.000 observações, onde se consideram diferentes condições iniciais para cada cadeia.

A taxa de mortalidade ou coeficiente de mortalidade é um índice demográfico que reflete o número de mortes registradas, em média por mil habitantes, em uma determinada região e em um período de tempo. A taxa é expressa comumente em unidades de morte por 1000 pessoas ao ano. Assim, uma taxa de mortalidade de 5.5 numa população de 100.000 pessoas significa 550 mortes por ano em toda aquela área estudada.

As taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados brasileiros no período de 1991 a 2013 correspondem a valores inferiores a 0.06 ou seja, 6%. A taxa de mortalidade infantil é obtida dividindo-se a a quantidade de óbitos em cada ano, y_{it} , pela quantidade de nascidos vivos em cada ano, n_{it} , para i representando cada uma das 27 unidades federativas e $t \in \{1991, \dots, 2013\}$, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.8: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados brasileiros no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

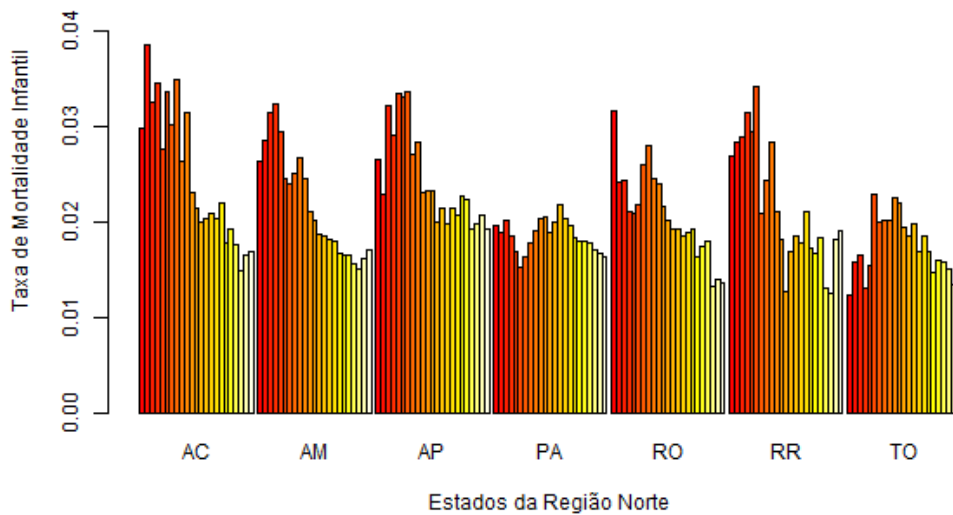


Figura 3.9: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados da região Norte no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

A Figura 3.8 apresenta as taxas de mortalidade infantil, para crianças com menos de um ano de idade, nos estados brasileiros no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos anos no período de 1991 a 2013. As taxas de mortalidade infantil variam entre 0 e

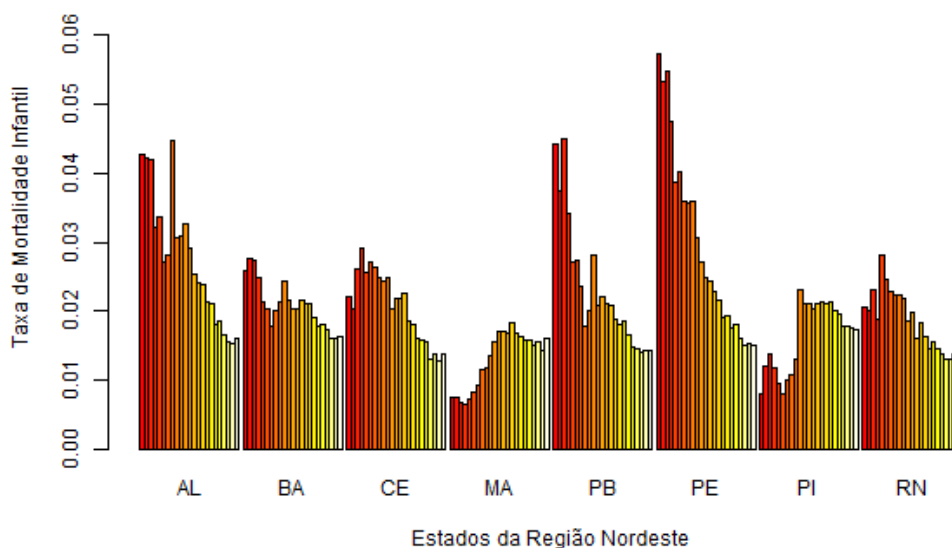


Figura 3.10: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados da região Nordeste no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

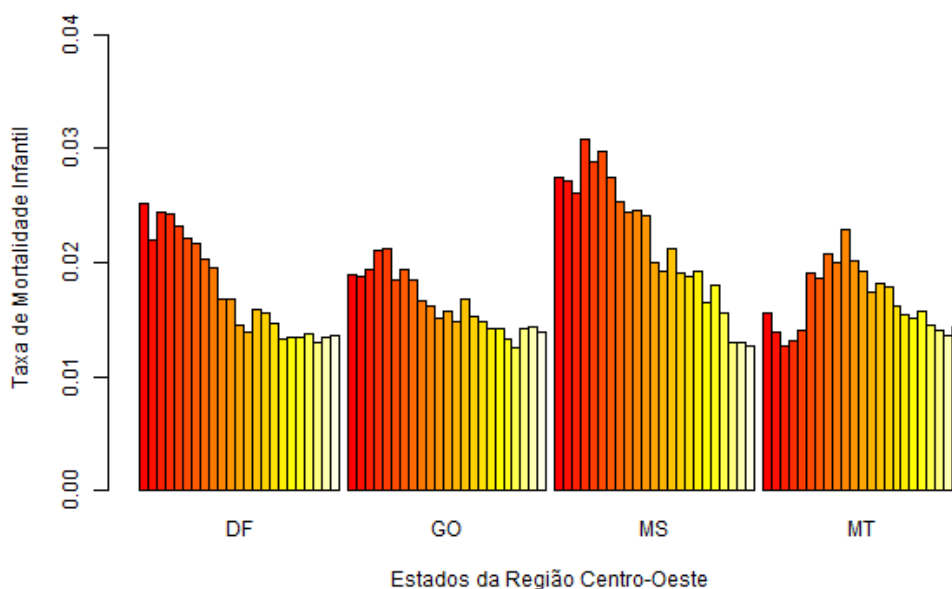


Figura 3.11: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados da região Centro-Oeste no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

0.06, indicando que em alguns estados houve próximo de 6% de casos notificados de mortalidade infantil. As Figuras 3.9 - 3.13 trazem as mesmas informações que a Figura 3.8, mas separadas por região geográfica do país.

As comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* para os compo-

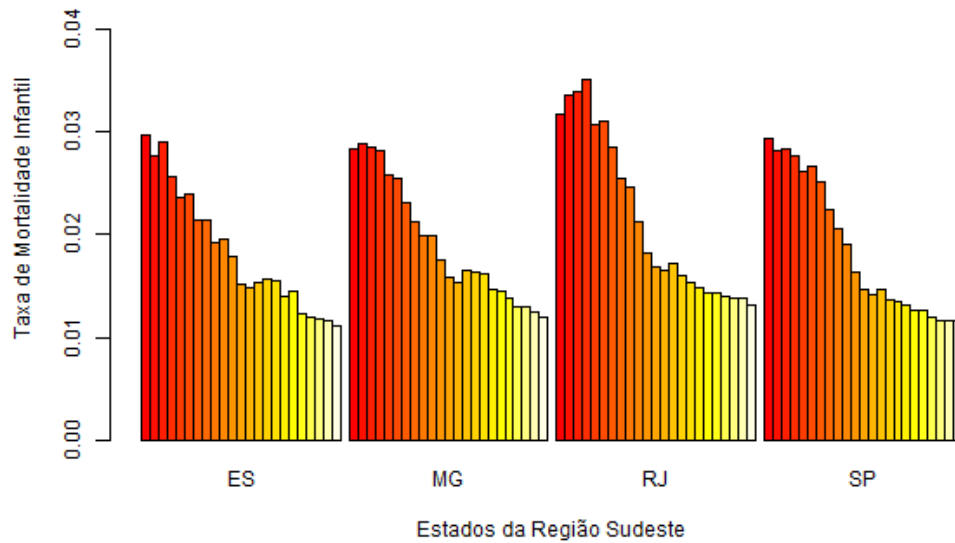


Figura 3.12: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados da região Sudeste no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

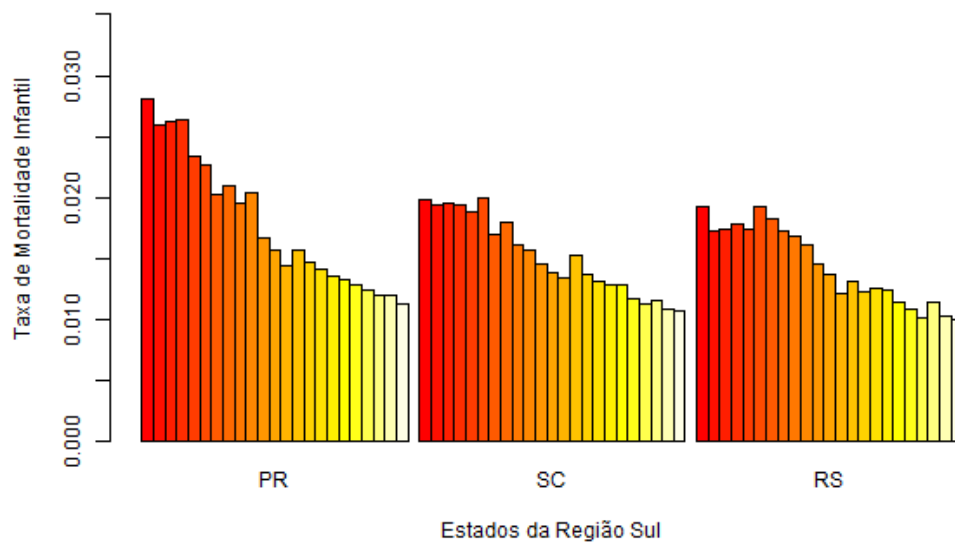


Figura 3.13: Taxas de mortalidade infantil (com menos de um ano de idade) nos estados da região Sul no período de 1991 a 2013. As cores graduadas em cada estado indicam a variação dos vinte e três anos - Exemplo 2.

nentes de variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ estão apresentadas nas Tabelas 3.8 e 3.9. As estimativas das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para tais casos estão apresentadas na Tabela 3.10.

Os modelos $M9$ e $M10$ não estão listados nas Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 pois não convergiram para

a configuração de tamanho de cadeia e tamanho de salto utilizado.

Nas Tabelas 3.8 e 3.9 estão em negrito os menores valores ocorridos para cada critério quando comparados entre os diferentes modelos (ver informações por coluna). Em linha geral, o modelo que apresentou menores valores para os critérios de seleção foi o modelo $M5$.

Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para o modelo $M5$ ($M5bh$, $M5b$, $M5h$, $M5c$) para os diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros de variância como posto na Tabela 2.1.

Os resultados obtidos na análise de sensibilidade para o modelo $M5$ estão apresentados nas Tabelas 3.11 e 3.12, respectivamente, para os critérios de seleção dos modelos e para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos.

Existem algumas diferenças entre os valores obtidos nas Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 com as Tabelas 3.11 e 3.12. Essa diferença ocorre devido à aleatoriedade da semente utilizada para gerar as cadeias de Markov associadas.

Houve um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade. Não houve alterações significativas para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos (ver Tabela 3.12) e para os critérios de seleção (ver Tabela 3.11).

Existem algumas diferenças entre os valores obtidos nas Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 com as Tabelas 3.11 e 3.12. Essa diferença ocorre devido à aleatoriedade da semente utilizada para gerar as cadeias de Markov associadas.

Tabela 3.8: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $GI(0.5, 0.0005)$ - Parte A - Exemplo 2.

Modelo	Cadeia 1						Cadeia 2					
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2		
M1bh	42103.92	-3106.38	26220.00	6212.76	6212.76	42103.48	-3106.41	-726.10	6212.82	6212.81		
M1b	89103.36	-3170.18	95390.00	6340.36	6340.36	89097.47	-3170.15	95410.00	6340.31	6340.31		
M1h	42100.12	-3106.27	48580.00	6212.54	6212.54	42101.06	-3106.30	48580.00	6212.60	6212.60		
M1c	42096.25	-3106.30	48580.00	6212.62	6212.61	42099.10	-3106.24	48580.00	6212.49	6212.49		
M2bh	41594.90	-3095.02	31140.00	6190.03	6190.04	41594.98	-3094.95	31200.00	6189.90	6189.91		
M2b	41594.62	-3094.96	48070.00	6189.90	6189.91	41594.62	-3094.96	48070.00	6189.90	6189.91		
M2h	41592.52	-3094.92	48100.00	6189.83	6189.84	41592.52	-3094.92	48100.00	6189.83	6189.84		
M2c	41591.48	-3095.05	48100.00	6190.09	6190.11	41593.11	-3095.05	48100.00	6190.08	6190.09		
M3bh	40792.27	-3091.24	42580.00	6182.47	6182.48	40795.19	-3091.41	43730.00	6182.82	6182.83		
M3b	40795.46	-3091.36	47300.00	6182.73	6182.73	40795.67	-3091.33	47280.00	6182.66	6182.67		
M3h	40792.29	-3091.35	47320.00	6182.69	6182.70	40796.88	-3091.17	47320.00	6182.35	6182.35		
M3c	40792.39	-3091.41	47320.00	6182.83	6182.83	40791.47	-3091.39	47320.00	6182.78	6182.78		
M4bh	40794.62	-3091.26	37460.00	6182.52	6182.53	40794.63	-3091.26	37460.00	6182.52	6182.53		
M4b	40792.18	-3091.28	47310.00	6182.55	6182.56	40792.18	-3091.28	47310.00	6182.55	6182.56		
M4h	40794.42	-3091.24	47320.00	6182.47	6182.48	40794.44	-3091.24	47320.00	6182.47	6182.48		
M4c	40792.06	-3091.24	47320.00	6182.47	6182.48	40794.08	-3091.27	47320.00	6182.54	6182.54		

Tabela 3.9: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Parte B - Exemplo 2.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
M5bh	40801.27	-3091.23	1984.00	6182.46	6182.47	40801.27	-3091.23	1984.00	6182.46	6182.47
M5b	40804.33	-3091.09	46260.00	6182.18	6182.18	40806.69	-3090.99	46060.00	6181.97	6181.98
M5h	40795.08	-3091.29	29100.00	6182.57	6182.58	40799.16	-3091.22	47110.00	6182.44	6182.45
M5c	40796.71	-3091.15	47060.00	6182.28	6182.30	40797.47	-3091.29	47320.00	6182.57	6182.58
M6bh	40797.08	-3091.30	44700.00	6182.59	6182.60	40797.08	-3091.30	44700.00	6182.59	6182.60
M6b	40801.97	-3091.46	47320.00	6182.91	6182.92	40798.00	-3091.49	47260.00	6182.97	6182.97
M6h	40799.37	-3091.17	47320.00	6182.33	6182.34	40795.56	-3091.29	47310.00	6182.57	6182.57
M6c	40790.24	-3091.28	47320.00	6182.55	6182.56	40790.24	-3091.28	47320.00	6182.55	6182.56
M7bh	40793.07	-3091.36	45930.00	6182.71	6182.72	40796.84	-3091.35	35840.00	6182.69	6182.70
M7b	40799.20	-3091.51	47300.00	6183.02	6183.03	40794.18	-3091.37	47290.00	6182.75	6182.75
M7h	40799.71	-3091.16	47320.00	6182.32	6182.33	40796.72	-3091.24	47320.00	6182.48	6182.48
M7c	40795.16	-3091.43	47320.00	6182.86	6182.87	40793.04	-3091.36	47320.00	6182.72	6182.73
M8bh	40796.31	-3091.35	42580.00	6182.70	6182.70	40792.60	-3091.30	44190.00	6182.59	6182.60
M8b	40794.69	-3091.43	47300.00	6182.85	6182.86	40795.08	-3091.41	47300.00	6182.81	6182.82
M8h	40794.68	-3091.44	47320.00	6182.88	6182.88	40796.53	-3091.32	47320.00	6182.64	6182.65
M8c	40793.13	-3091.33	47320.00	6182.65	6182.66	40793.86	-3091.43	47320.00	6182.86	6182.87

Tabela 3.10: Estimativas das variâncias através da média e desvio padrão para os modelos em estudo para a distribuição a priori $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 2.

Cadeia	Modelo	Parâmetro	M1		M2		M3		M4	
			média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
1	Mibh	σ_b^2	0.011	0.024	0.060	0.039	0.071	0.033	0.062	0.038
		σ_h^2	7.193	3.257	0.012	0.015	0.007	0.010	0.011	0.015
	Mic	σ_{total}^2	0.003	0.007	0.747	0.324	0.876	0.204	0.778	0.330
		σ_b^2	0.003	0.001	0.090	0.026	0.091	0.027	0.089	0.026
		σ_h^2	0.968	1.372	0.043	0.013	0.043	0.013	0.043	0.013
2	Mibh	σ_b^2	0.007	0.013	0.063	0.037	0.075	0.030	0.062	0.038
		σ_h^2	5.124	2.677	0.011	0.013	0.005	0.007	0.011	0.015
	Mic	σ_{total}^2	0.003	0.009	0.788	0.292	0.917	0.127	0.779	0.330
		σ_b^2	0.003	0.001	0.090	0.026	0.090	0.026	0.089	0.026
		σ_h^2	0.236	0.522	0.043	0.013	0.043	0.013	0.043	0.013
1	Mibh	σ_b^2	3.856	1.145	0.077	0.025	0.072	0.032	0.066	0.037
		σ_h^2	6.046	1.687	0.003	0.004	0.006	0.009	0.010	0.013
	Mic	σ_{total}^2	0.392	0.090	0.954	0.055	0.888	0.181	0.809	0.297
		σ_b^2	0.121	0.037	0.090	0.026	0.090	0.027	0.090	0.026
		σ_h^2	4.132	1.205	0.088	0.051	0.043	0.013	0.043	0.013
2	Mibh	σ_b^2	0.131	0.040	0.081	0.023	0.082	0.024	0.083	0.025
		σ_h^2	3.856	1.145	0.077	0.025	0.075	0.032	0.068	0.036
	Mic	σ_{total}^2	0.392	0.090	0.954	0.055	0.905	0.198	0.830	0.291
		σ_b^2	0.122	0.036	0.090	0.026	0.089	0.026	0.091	0.027
		σ_h^2	0.448	0.165	0.189	0.093	0.043	0.013	0.043	0.013
			0.129	0.037	0.081	0.023	0.083	0.025	0.082	0.024

Tabela 3.11: Análise de sensibilidade para as comparações dos ajustes, com distribuição *a priori* para os componentes da variância dada por $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.01, 0.01), (0.001, 0.001), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$, para os modelos *M5bh*, *M5b*, *M5h* e *M5c* - Exemplo 2.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	<i>Qp</i>	<i>LPML</i>	<i>DIC</i>	<i>WAIC1</i>	<i>WAIC2</i>	<i>Qp</i>	<i>LPML</i>	<i>DIC</i>	<i>WAIC1</i>	<i>WAIC2</i>
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$									
<i>M5bh</i>	40799.20	-8272.01	-28840.00	16537.16	16545.74	40799.20	-8272.01	-28840.00	16537.16	16545.74
<i>M5b</i>	40800.19	-8284.25	47290.00	16560.58	16563.39	40807.23	-8292.45	47230.00	16582.98	16578.61
<i>M5h</i>	40798.45	-8270.60	29250.00	16535.14	16541.44	40797.81	-8268.52	42170.00	16534.57	16539.34
<i>M5c</i>	40791.05	-8267.78	45930.00	16529.18	16535.11	40791.40	-8267.99	47010.00	16529.55	16536.13
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.01, 0.01)$									
<i>M5bh</i>	40800.34	-8272.13	-6545.00	16538.15	16546.36	40800.34	-8272.13	-6545.00	16538.15	16546.36
<i>M5b</i>	40802.32	-8278.93	45130.00	16552.99	16557.17	40807.28	-8296.91	47100.00	16588.17	16584.25
<i>M5h</i>	40796.89	-8270.48	15360.00	16534.65	16542.07	40797.81	-8268.52	42170.00	16534.57	16539.34
<i>M5c</i>	40794.12	-8268.26	47290.00	16530.09	16538.25	40792.02	-8269.08	47160.00	16532.74	16539.50
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$									
<i>M5bh</i>	40799.93	-8272.16	-1153.00	16536.64	16545.16	40799.93	-8272.16	-1153.00	16536.64	16545.16
<i>M5b</i>	40799.18	-8280.30	-40280.00	16554.58	16561.67	40802.22	-8292.17	46260.00	16581.25	16579.03
<i>M5h</i>	40797.66	-8268.94	47060.00	16531.71	16539.24	40800.15	-8269.04	46860.00	16532.29	16538.95
<i>M5c</i>	40792.16	-8269.62	42080.00	16534.55	16540.69	40793.87	-8270.50	42640.00	16534.97	16540.71
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.2, 0.0004)$									
<i>M5bh</i>	40798.77	-8271.78	-285.20	16538.20	16545.00	40798.77	-8271.78	-285.20	16538.20	16545.00
<i>M5b</i>	40799.25	-8279.50	7111.00	16556.69	16557.66	40804.48	-8299.54	47160.00	16594.96	16581.87
<i>M5h</i>	40798.78	-8269.22	47250.00	16532.32	16538.56	40796.38	-8268.55	44840.00	16530.75	16539.84
<i>M5c</i>	40791.59	-8269.26	41660.00	16533.45	16541.37	40793.05	-8268.26	43940.00	16529.44	16537.05
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.5, 0.0005)$									
<i>M5bh</i>	40797.24	-8271.91	12740.00	16540.64	16544.41	40797.24	-8271.91	12740.00	16540.64	16544.41
<i>M5b</i>	40800.17	-8280.39	46240.00	16555.08	16560.84	40801.32	-8288.87	46590.00	16576.13	16565.06
<i>M5h</i>	40795.16	-8269.01	43070.00	16532.22	16537.76	40799.20	-8269.76	46490.00	16532.33	16540.75
<i>M5c</i>	40790.93	-8268.60	38390.00	16530.77	16539.95	40790.87	-8268.51	46780.00	16530.44	16537.69

Tabela 3.12: Análise de sensibilidade das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5ce$ para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.01, 0.01), (0.001, 0.001), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$ - Exemplo 2.

Modelo	Parâmetro	A		B		C		D		E	
		média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
Cadeia 1											
$M5bh$	σ_b^2	3.011	0.995	3.742	1.199	4.040	1.292	3.104	0.960	3.718	1.142
	σ_h^2	3.805	1.117	3.541	1.028	3.544	1.067	3.214	0.906	3.200	0.897
	$\sigma_{t_{total}}^2$	0.442	0.095	0.511	0.096	0.531	0.096	0.490	0.094	0.535	0.093
	σ_b^2	0.093	0.028	0.093	0.028	0.101	0.030	0.092	0.027	0.089	0.025
$M5b$	σ_b^2	1.673	0.509	1.637	0.496	1.204	0.358	1.666	0.515	1.428	0.426
$M5c$	σ_c^2	0.084	0.025	0.084	0.026	0.091	0.027	0.082	0.025	0.080	0.024
Cadeia 2											
$M5bh$	σ_b^2	3.011	0.995	3.742	1.199	4.040	1.292	3.104	0.960	3.718	1.142
	σ_h^2	3.805	1.117	3.541	1.028	3.544	1.067	3.214	0.906	3.200	0.897
	$\sigma_{t_{total}}^2$	0.442	0.095	0.511	0.096	0.531	0.096	0.490	0.094	0.535	0.093
$M5b$	σ_b^2	0.095	0.029	0.094	0.028	0.102	0.031	0.093	0.028	0.090	0.026
$M5h$	σ_h^2	2.648	0.790	2.646	0.789	2.455	0.698	1.714	0.510	1.621	0.471
$M5c$	σ_c^2	0.084	0.025	0.085	0.025	0.092	0.028	0.084	0.025	0.081	0.024

As Figuras B.1 e B.2 (ver Apêndice B) apresentam informações a respeito do parâmetro α_0 para os modelos $M5bh$ e $M5b$ (Figura B.1 no Apêndice B) e para os modelos $M5h$ e $M5c$ (Figura B.2 no Apêndice B), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras B.3 e B.4 (ver Apêndice B) apresentam informações a respeito dos parâmetros de variância σ_b^2 e σ_h^2 para o modelo $M5bh$ (Figura B.3 no Apêndice B) e dos parâmetros de variância σ_b^2 para o modelo $M5b$, σ_h^2 para o modelo $M5h$ e σ_c^2 para o modelo $M5c$ (Figura B.2 no Apêndice B), com distribuição *a priori* para os componentes da variância para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras B.5 e B.6 (ver Apêndice B) apresentam, a título de exemplo, informações a respeito dos parâmetros b_{16} e h_{16} para o modelo $M5bh$ (Figura B.5 no Apêndice B) e do parâmetro b_{16} para o modelo $M5b$, h_{16} para o modelo $M5h$ e b_{16} para o modelo $M5c$ (Figura B.6 no Apêndice B), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras B.7 - B.10 (ver Apêndice B) apresentam, respectivamente, as chances de mortalidade infantil para os estados do Brasil e para os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$, com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

Percebe-se que não houveram mudanças significativas entre as chances de ocorrência da mortalidade infantil quando comparadas entre si para cada ano (escala de cores graduadas), no decorrer do período analisado.

As Figuras B.11 - B.13 (ver Apêndice B) apresentam os valores preditos (preto) e os valores observados para as taxas de mortalidade infantil para os estados do Brasil e para os modelos $M5bh$ (amarelo), $M5b$ (azul), $M5h$ (vermelho) e $M5c$ (verde), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$.

As Figuras B.7 - B.10 (ver Apêndice B) apresentam as chances de mortalidade infantil para o modelo $M5$ durante o período de 2005 a 2010. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

As chances de ocorrência de mortalidade infantil, em geral, não sofreram alterações significativas com o passar dos anos para todos os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$. Para os estados de Sergipe e Pernambuco a chance de mortalidade infantil se manteve alta e para os estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina se manteve baixa, por exemplo, com o passar dos anos.

As Figuras B.7 - B.10 (ver Apêndice B) estão elaboradas em uma configuração de cinco intervalos de quantis para os valores obtidos de chances de mortalidade infantil, ou seja, em cinco cores graduadas. Neste caso, temos a indicação de que com diminuição dos valores das taxas de mortalidade infantil durante o passar dos anos (ver Figuras 3.9 - 3.13 no Apêndice B) houve alteração nas chances relativas de (*odds ratio*) de ocorrência do óbito para alguns estados da Região Norte, tais como Acre, Amapá e Amazonas, e para alguns estados da Região Nordeste, tais como Paraíba, Pernambuco e Alagoas.

Os valores preditos traduzem o comportamento dos dados de que há uma leve queda das taxas de mortalidade infantil no decorrer dos anos, em geral, para todos os estados brasileiros.

Ainda, em virtude do melhor ajuste ocorrer para o modelo $M5$, sabemos que a queda da taxa

de mortalidade infantil no decorrer dos anos corresponde a um efeito auto-regressivo de ordem 1, $AR(1)$ para o componente temporal.

Tabela 3.13: Estimativa dos valores de ϕ_0 e ϕ_1 através da média, desvio-padrão e intervalo HPD para os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$ e para $(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$ - Exemplo 2.

Modelo	Parâmetro	média	d.p.	mediana	intervalo HPD 95%
$M5bh$	ϕ_0	-2.573	1.088	-2.432	(-5.228,-0.748)
$M5bh$	ϕ_1	0.074	0.027	0.072	(0.028,0.127)
$M5b$	ϕ_0	-1.505	0.719	-1.543	(-3.093,-0.335)
$M5b$	ϕ_1	0.229	0.036	0.227	(0.157,0.293)
$M5h$	ϕ_0	-2.755	2.483	-1.926	(-11.740,-0.408)
$M5h$	ϕ_1	0.072	0.045	0.076	(0.142,0.002)
$M5c$	ϕ_0	-3.058	1.884	-2.233	(-8.054,-1.441)
$M5c$	ϕ_1	0.107	0.060	0.113	(0.017,0.200)

A Tabela 3.13 apresenta os valores estimados de ϕ_0 e ϕ_1 através da média, desvio-padrão e intervalo HPD de cobertura 95% para os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$ e para $(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$.

O intervalo HPD (*highest posterior density* ou máxima densidade *a posteriori*), conforme [Bernardo e Smith \(2000\)](#), tem duas propriedades básicas:

- (i) a densidade para qualquer ponto pertencente ao intervalo é maior do que para qualquer ponto não pertencente ao intervalo;
- (ii) corresponde ao intervalo de menor comprimento para uma dada probabilidade de cobertura $100(1 - \varepsilon)\%$, com $\varepsilon > 0$.

Um método para a obtenção do intervalo HPD é a aproximação de Monte Carlo, segundo [Chen et al. \(2000\)](#), aplicado quando a distribuição *a posteriori* é unimodal e contínua, conforme o seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.1. (Algoritmo para Obtenção do Intervalo HPD). Seja $\theta_1, \dots, \theta_n$ a amostra de tamanho n gerada a partir da distribuição *a posteriori* de $\theta|\mathbf{y}$ para o parâmetro θ . Para se obter o intervalo HPD com cobertura $100(1 - \varepsilon)\%$ seguem-se os seguintes passos:

- (i) ordenar os valores de θ_i , para $i \in \{1, \dots, n\}$, de forma crescente para que $\theta_{(1)} \leq \theta_{(2)} \leq \dots \leq \theta_{(n)}$;
- (ii) calcular os intervalos com $100(1 - \varepsilon)\%$ de cobertura, dados por $C_{j(n)} = (\theta_{(j)}, \theta_{(j)+[(1-\varepsilon)n]})$, para $j \in \{1, 2, \dots, n - [(1 - \varepsilon)n]\}$, em que $[(1 - \varepsilon)n]$ significa a parte inteira do número $(1 - \varepsilon)n$, para $\varepsilon > 0$;
- (iii) o intervalo HPD com cobertura $100(1 - \varepsilon)\%$ é o intervalo de menor amplitude dentre os intervalos obtidos.

Na Tabela 3.13 temos que há importância do “lag 1” para o efeito temporal (mesmo que pequena). Os valores obtidos para $\hat{\phi}_1$ são significativamente diferentes de zero. Ou seja, a informação associada ao tempo (ano) t está relacionada ao tempo $t - 1$ segundo o coeficiente $\hat{\phi}_1$. Observamos ainda que este coeficiente de regressão entre o tempo atual t e o tempo imediatamente anterior, $t - 1$, indica que a relação é crescente (mesmo que de forma tênue) pelo fato de $\hat{\phi}_1$ ser positivo.

Dessa forma, o modelo final, com base na expressão (3.3) é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.4)$$

de forma que $S_i(t) = A_3(t) = \phi_0 + \phi_1 A_3(t-1) + \epsilon_t$, $R_i = b_i + h_i$ ou $R_i = b_i$ ou $R_i = h_i$, para $i \in \{1, \dots, 27\}$ e $t \in \{1991, \dots, 2013\}$.

Os ajustes obtidos para o modelo $M5$ com base na expressão (3.4) são apresentados na Tabela 3.14.

Tabela 3.14: Modelos ajustados para o Exemplo 2.

Modelo	Ajuste
$M5bh$	$-1.469 - 2.573 + 0.074A_3(t-1) + b_i + h_i$
$M5b$	$-1.472 - 1.505 + 0.229A_3(t-1) + b_i$
$M5h$	$-1.462 - 2.755 + 0.072A_3(t-1) + h_i$
$M5c$	$-1.458 - 3.058 + 0.107A_3(t-1) + b_i$

A Tabela 3.14 mostra que o valor do intercepto α_0 ficou próximo do valor negativo -1.5 , para todos os casos em estudo ($M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$). A parcela $S_i(t)$ que corresponde ao efeito auto-regressivo aditivo de ordem 1, A_3 , composta pelos parâmetros ϕ_1 e ϕ_2 , teve ajustes relativamente próximos para os modelos em estudo, sendo que as maiores semelhanças ocorreram entre $M5bh$ e $M5h$.

3.3 Exemplo 3: Revascularização

Foram feitas análises com base no conjunto de dados de pacientes do sexo masculino e com idade acima dos 25 anos, hospitalizados com enfarte do miocárdio na província canadense de Québec, entre 1993 e 2000.

A quantidade de indivíduos com enfarte do miocárdio é denotada por n_{it} e a quantidade de indivíduos que passaram por revascularização após o enfarte, em cada ano, é denotada por y_{it} , com i representando uma das 139 áreas locais de saúde (ALS) e $t \in \{1993, \dots, 2000\}$, respectivamente.

O modelo estudado, com base na expressão (2.1) e no contexto da distribuição Binomial (ver segunda linha da expressão (2.6)), é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.5)$$

onde a função de ligação é dada por

$$g(\mu_{it}) = \ln \left(\frac{\mu_{it}}{1 - \mu_{it}} \right),$$

com $i \in \{1, \dots, 139\}$ e $t \in \{1993, \dots, 2000\}$.

As variações adotadas para $S_i(t)$ e R_i , na expressão (3.5), estão listadas na Tabela 2.2. Para os modelos em análise foram simuladas 600.000 amostras de Gibbs usando o *software* *OpenBugs* a partir do *software* *R* (biblioteca *R2OpenBugs*) com aquecimento (*burn-in-sample*) de 300.000 amostras e salto de 150. Resultando em uma amostra de 2.000 observações. Para as análises, consideramos duas cadeias, cada uma delas com 2.000 observações, onde se consideram diferentes condições iniciais para cada cadeia.

As taxas de revascularização nas ALS da província de Quebec no período de 1993 a 2000

correspondem a valores inferiores que variam de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%. A de revascularização é obtida dividindo-se a quantidade de casos de revascularização notificados em cada ano, y_{it} , pela quantidade de casos de infarte no miocárdio com entrada em cada ano, n_{it} , para i representando uma das 139 ALS e $t \in \{1993, \dots, 2000\}$, respectivamente.

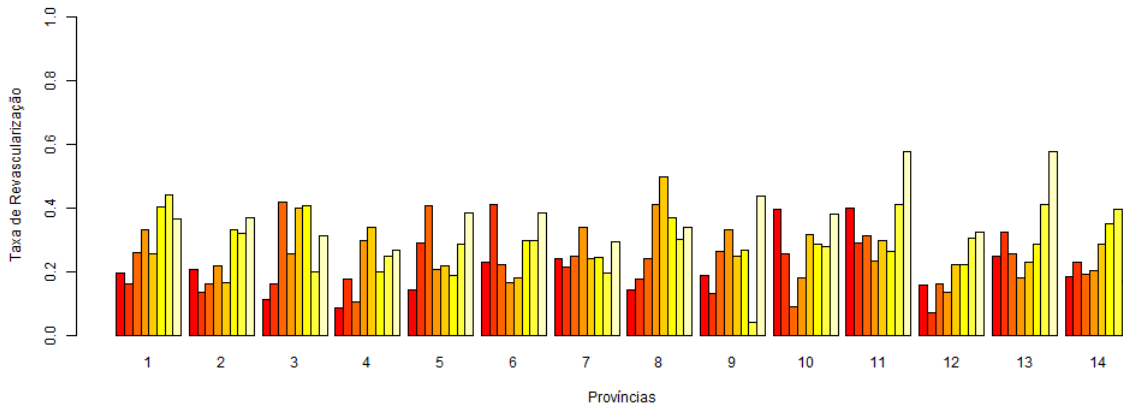


Figura 3.14: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 1 - 14, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

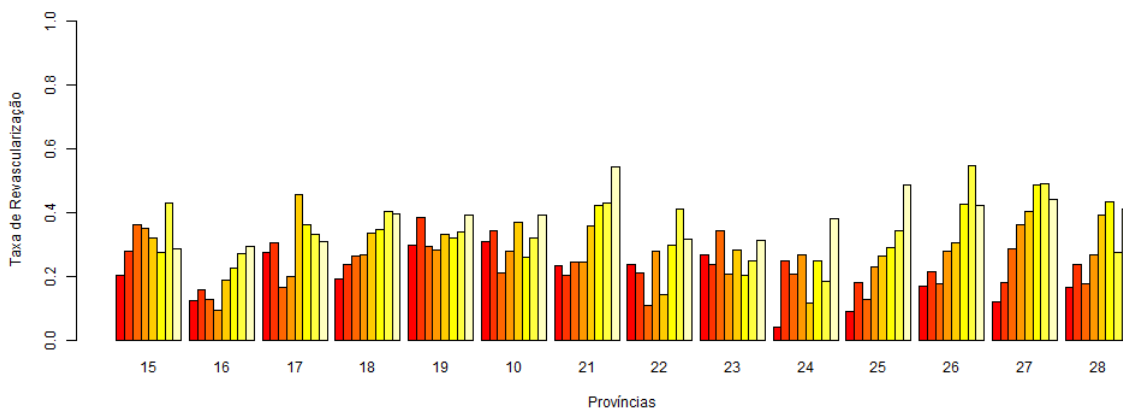


Figura 3.15: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 15 - 28, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

As Figuras 3.14 - 3.23 apresentam as taxas de revascularização após infarte do miocárdio no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos anos no período de 1993 a 2000.

As comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ estão apresentadas nas Tabelas 3.15 e 3.16. As estimativas das variâncias das componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para tais casos estão apresentadas na Tabela 3.17.

Nas Tabelas 3.15 e 3.16 estão em negrito os menores valores ocorridos para cada critério quando comparados entre os diferentes modelos (ver informações por coluna). Em linha geral, o modelo que apresentou menores valores para os critérios de seleção foi o $M2$.

Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para o modelo $M2$ ($M2bh$, $M2b$, $M2h$, $M2c$) para os diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros de variância como posto na

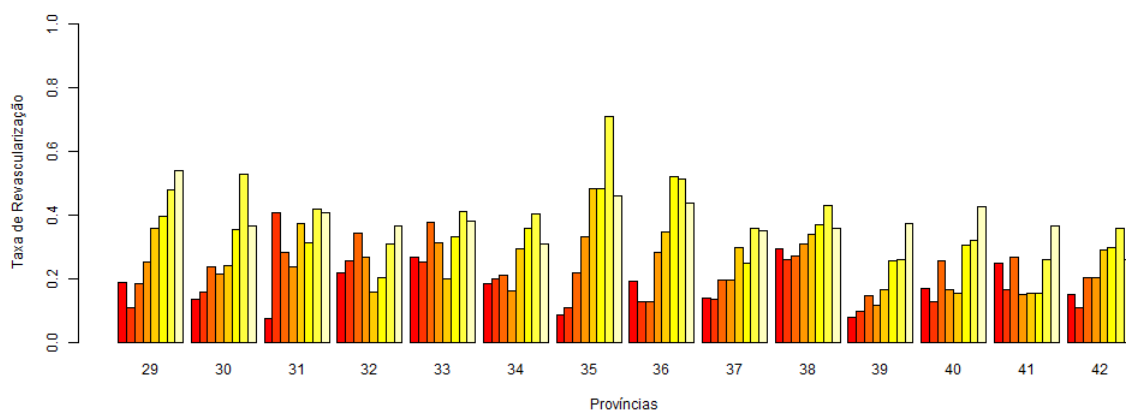


Figura 3.16: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 29 - 42, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

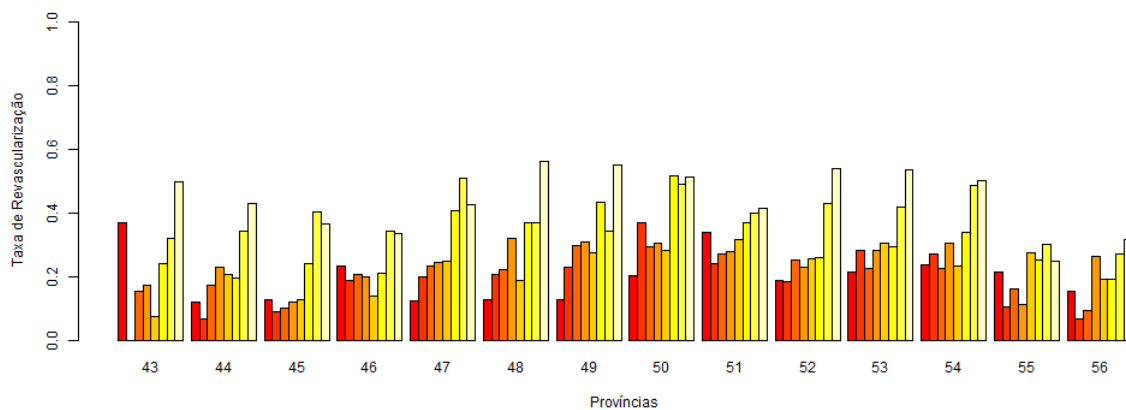


Figura 3.17: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 43 - 56, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

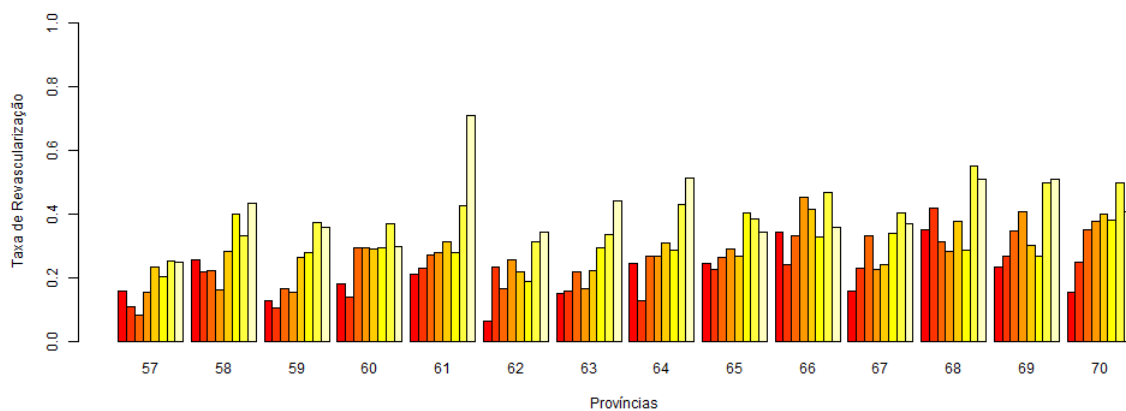


Figura 3.18: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 57 - 70, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

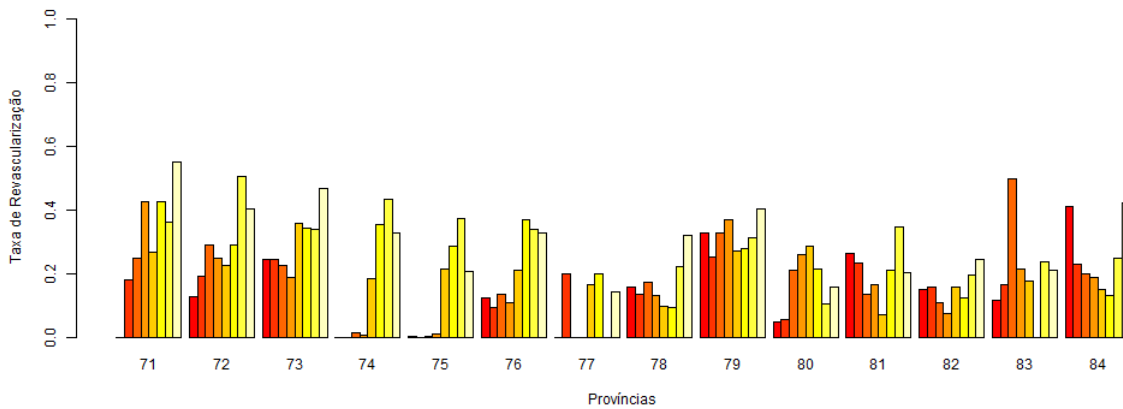


Figura 3.19: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 71 - 84, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

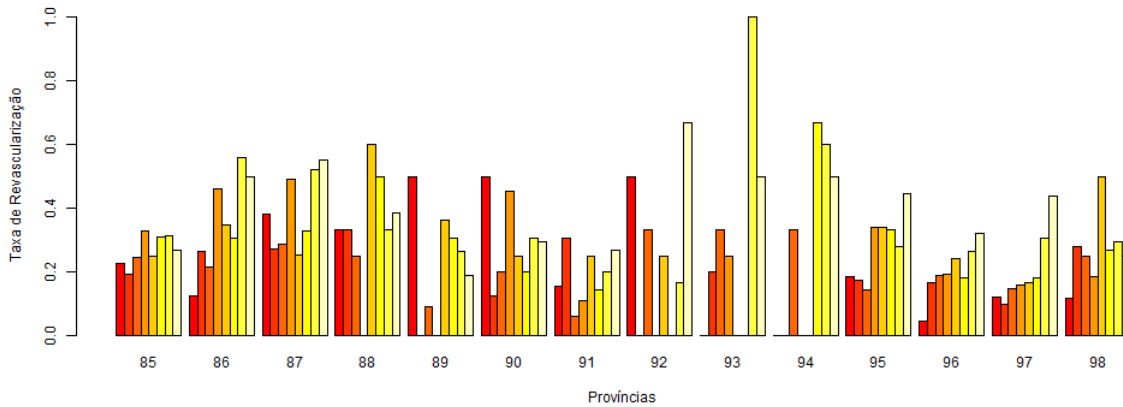


Figura 3.20: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 85 - 98, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

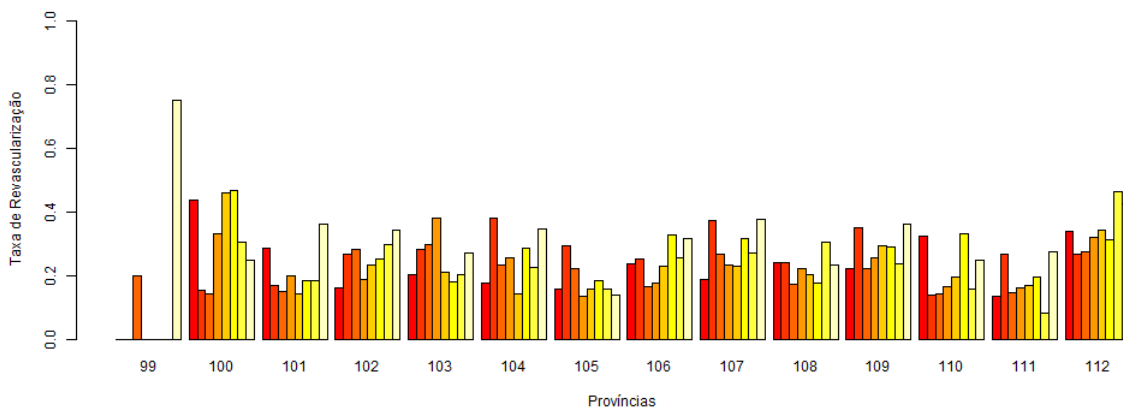


Figura 3.21: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 99 - 112, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

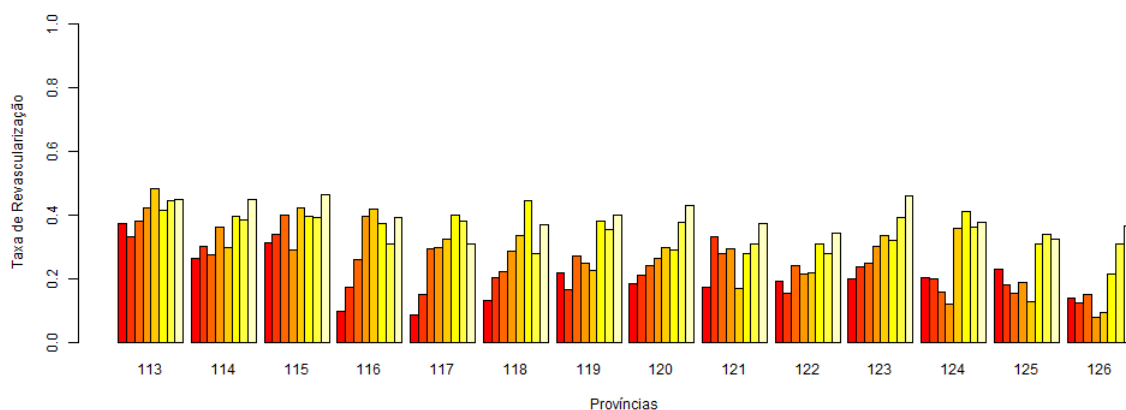


Figura 3.22: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 113 - 126, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

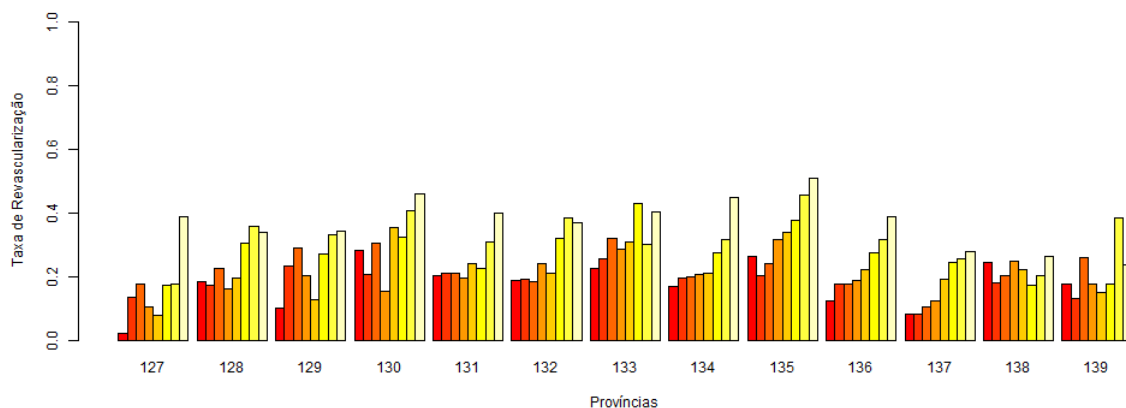


Figura 3.23: Taxas de revascularização em 14 ALS da província de Quebec, numeradas de 127 - 139, no período de 1993 a 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam a variação dos oito anos - Exemplo 3.

Tabela 2.1.

Os resultados obtidos na análise de sensibilidade para o modelo $M2$ estão apresentados nas Tabelas 3.18 e 3.19, respectivamente, para os critérios de seleção dos modelos e para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos.

Houve um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade. Não houve alterações significativas para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos (ver Tabela 3.19) e para os critérios de seleção (ver Tabela 3.18).

Existem algumas diferenças entre os valores obtidos nas Tabelas 3.15, 3.16 e 3.17 com as Tabelas 3.18 e 3.19. Essa diferença ocorre devido à aleatoriedade da semente utilizada para gerar as cadeias de Markov associadas.

Tabela 3.15: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $GI(0.5, 0.0005)$ - Parte A - Exemplo 3.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
M1bh	2086.59	-3509.97	6763.00	6968.16	7015.03	2086.59	-3509.97	6763.00	6968.16	7015.03
M1b	2088.22	-3509.71	6769.00	6969.17	7017.09	2088.22	-3509.71	6769.00	6969.17	7017.09
M1h	2080.62	-3521.34	6900.00	6981.87	7031.72	2080.62	-3521.34	6900.00	6981.87	7031.72
M1c	2086.46	-3511.00	6890.00	6970.29	7017.40	2086.46	-3511.00	6890.00	6970.29	7017.40
M2bh	2036.31	-3492.77	6624.00	6929.08	6976.30	2036.31	-3492.77	6624.00	6929.08	6976.30
M2b	2039.06	-3491.27	6732.00	6931.57	6981.16	2039.06	-3491.27	6732.00	6931.57	6981.16
M2h	2031.70	-3502.76	6862.00	6943.04	6995.30	2031.70	-3502.76	6862.00	6943.04	6995.30
M2c	2036.28	-3491.90	6852.00	6931.36	6978.51	2036.28	-3491.90	6852.00	6931.36	6978.51
M3bh	2038.86	-3494.76	6718.00	6935.26	6985.88	2038.73	-3494.00	6730.00	6934.05	6983.99
M3b	2039.23	-3494.26	6728.00	6934.51	6984.69	2039.87	-3497.07	6750.00	6935.74	6986.32
M3h	2032.72	-3503.42	6865.00	6946.37	7001.53	2033.13	-3502.87	6864.00	6945.38	7001.15
M3c	2037.50	-3496.02	6854.00	6933.95	6984.33	2039.07	-3495.68	6856.00	6938.26	6985.35
M4bh	2037.03	-3494.47	6706.00	6933.09	6982.46	2037.11	-3496.30	6723.00	6935.20	6982.20
M4b	2039.18	-3495.51	6747.00	6935.91	6985.86	2039.83	-3494.73	6756.00	6933.82	6982.26
M4h	2032.50	-3504.90	6864.00	6947.29	7002.56	2032.55	-3503.70	6864.00	6945.99	7000.20
M4c	2037.45	-3494.18	6854.00	6934.17	6983.24	2038.00	-3495.76	6855.00	6935.55	6985.85
M5bh	2063.85	-3526.51	6624.00	6972.82	7043.03	2065.64	-3532.21	6624.00	6979.01	7048.51
M5b	2068.35	-3536.44	6691.00	6987.99	7064.14	2070.21	-3544.49	6505.00	6995.64	7069.83
M5h	2061.82	-3522.90	6884.00	6969.95	7037.21	2062.66	-3525.53	6876.00	6971.09	7040.73
M5c	2061.44	-3524.56	6654.00	6970.72	7038.67	2062.28	-3526.07	4595.00	6970.99	7040.33

Tabela 3.16: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $GI(0.5, 0.0005)$ - Parte B - Exemplo 3.

Modelo	Cadeia 1						Cadeia 2					
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2		Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	
M6bh	2037.93	-3496.14	6572.00	6936.94	6985.59		2038.53	-3497.02	6155.00	6937.93	6992.10	
M6b	2041.00	-3499.60	6686.00	6939.43	6993.60		2042.32	-3501.00	6365.00	6942.55	6993.20	
M6h	2033.06	-3504.23	6864.00	6948.55	7001.64		2033.67	-3505.10	6850.00	6948.89	7003.79	
M6c	2037.85	-3497.79	6806.00	6937.44	6987.65		2038.73	-3497.00	5991.00	6937.83	6988.70	
M7bh	2037.57	-3496.32	6599.00	6934.52	6985.63		2037.34	-3493.89	6648.00	6933.62	6985.42	
M7b	2039.80	-3493.46	6759.00	6934.16	6984.15		2040.49	-3492.80	6709.00	6934.29	6983.07	
M7h	2033.14	-3505.22	6865.00	6946.50	7000.65		2033.14	-3505.22	6865.00	6946.50	7000.65	
M7c	2038.56	-3496.02	6855.00	6934.48	6984.39		2038.56	-3496.02	6855.00	6934.48	6984.39	
M8bh	2038.87	-3497.41	6781.00	6938.06	6984.18		2039.21	-3495.47	6765.00	6935.00	6984.94	
M8b	2040.22	-3497.31	6764.00	6936.61	6986.51		2040.33	-3496.64	6749.00	6935.72	6985.20	
M8h	2033.10	-3502.00	6864.00	6944.41	7000.20		2033.63	-3507.40	6865.00	6947.90	7003.87	
M8c	2039.18	-3498.28	6857.00	6938.61	6990.56		2038.86	-3496.35	6856.00	6936.95	6987.74	
M9bh	2040.20	-3498.72	6532.00	6939.34	6990.14		2040.88	-3499.46	6717.00	6940.50	6991.70	
M9b	2044.13	-3501.46	6726.00	6942.42	6996.10		2043.43	-3500.93	6742.00	6942.02	6994.42	
M9h	2035.05	-3505.61	6825.00	6948.30	7001.81		2034.89	-3503.29	6805.00	6946.13	7001.60	
M9c	2040.23	-3497.97	6812.00	6937.88	6987.38		2040.62	-3497.52	6834.00	6936.73	6986.97	
M10bh	2040.52	-3499.14	6642.00	6942.20	6995.07		2039.94	-3497.35	6688.00	6939.07	6989.00	
M10b	2042.77	-3499.15	6742.00	6941.36	6992.43		2042.56	-3503.65	6687.00	6947.77	7002.92	
M10h	2033.69	-3504.20	6860.00	6945.03	6999.37		2033.40	-3503.53	6859.00	6945.86	6999.93	
M10c	2039.24	-3496.13	6852.00	6938.45	6984.50		2040.10	-3496.75	6853.00	6937.04	6988.07	

Tabela 3.17: Estimativas das variâncias dos modelos em estudo através da média e desvio-padrão para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 3.

Cadeia	Modelo	Parâmetro	M1		M2		M3		M4		M5	
			média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
1	Mibh	σ_b^2	0.187	0.039	0.184	0.040	0.183	0.041	0.184	0.040	0.225	0.032
		σ_h^2	0.005	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.006	0.007	0.010	0.006
		σ_{total}^2	0.967	0.047	0.961	0.053	0.958	0.055	0.961	0.052	0.559	0.042
	Mib	σ_b^2	0.210	0.033	0.211	0.032	0.212	0.033	0.212	0.032	0.220	0.032
	Mih	σ_b^2	0.085	0.012	0.084	0.012	0.084	0.012	0.085	0.012	0.094	0.012
Mic	σ_c^2	0.213	0.034	0.215	0.036	0.214	0.034	0.213	0.035	0.223	0.021	
2	Mibh	σ_b^2	0.211	0.031	0.212	0.032	0.211	0.032	0.212	0.032	0.223	0.033
		σ_h^2	0.006	0.008	0.006	0.006	0.008	0.007	0.006	0.007	0.010	0.007
		σ_{total}^2	0.963	0.051	0.961	0.042	0.971	0.056	0.978	0.064	0.548	0.042
	Mib	σ_b^2	0.211	0.031	0.212	0.032	0.211	0.032	0.211	0.032	0.221	0.033
	Mih	σ_b^2	0.084	0.012	0.084	0.012	0.084	0.012	0.085	0.012	0.092	0.011
Mic	σ_c^2	0.214	0.035	0.213	0.035	0.084	0.012	0.213	0.034	0.221	0.022	
1	Mibh	σ_b^2	0.185	0.041	0.185	0.039	0.182	0.040	0.181	0.042	0.181	0.043
		σ_h^2	0.007	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008
		σ_{total}^2	0.960	0.054	0.962	0.050	0.958	0.054	0.952	0.062	0.953	0.057
	Mib	σ_b^2	0.211	0.032	0.212	0.033	0.211	0.032	0.211	0.033	0.211	0.032
	Mih	σ_b^2	0.085	0.012	0.084	0.012	0.085	0.012	0.084	0.012	0.084	0.012
Mic	σ_c^2	0.214	0.037	0.215	0.035	0.215	0.035	0.214	0.035	0.214	0.037	
2	Mibh	σ_b^2	0.188	0.039	0.185	0.039	0.182	0.039	0.181	0.042	0.181	0.043
		σ_h^2	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008
		σ_{total}^2	0.965	0.046	0.962	0.050	0.958	0.054	0.952	0.062	0.953	0.057
	Mib	σ_b^2	0.210	0.032	0.212	0.033	0.211	0.032	0.211	0.033	0.211	0.032
	Mih	σ_b^2	0.086	0.012	0.084	0.012	0.085	0.012	0.084	0.012	0.084	0.012
Mic	σ_c^2	0.208	0.035	0.215	0.035	0.215	0.035	0.214	0.035	0.214	0.037	

Tabela 3.18: Análise de sensibilidade para as comparações dos ajustes, com distribuição *a priori* para os componentes da variância dada por $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ com $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.01, 0.01), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$, para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$ - Exemplo 3.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$									
$M2bh$	2035.91	-3494.85	6518.00	6932.03	6982.75	2035.91	-3494.85	6518.00	6932.03	6982.75
$M2b$	2038.03	-3491.44	6729.00	6929.55	6977.66	2038.03	-3491.44	6729.00	6929.55	6977.66
$M2h$	2031.63	-3499.62	6861.00	6940.19	6994.35	2031.63	-3499.62	6861.00	6940.19	6994.35
$M2c$	2036.90	-3491.98	6852.00	6930.69	6979.05	2036.90	-3491.98	6852.00	6930.69	6979.05
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.01, 0.01)$									
$M2bh$	2034.17	-3491.08	6667.00	6930.24	6978.21	2034.17	-3491.08	6667.00	6930.24	6978.21
$M2b$	2037.79	-3490.78	6759.00	6929.64	6978.80	2037.79	-3490.78	6759.00	6929.64	6978.80
$M2h$	2031.61	-3499.26	6862.00	6940.34	6992.84	2031.61	-3499.26	6862.00	6940.34	6992.84
$M2c$	2036.05	-3489.88	6852.00	6929.06	6977.05	2036.05	-3489.88	6852.00	6929.06	6977.05
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$									
$M2bh$	2033.08	-3494.30	6494.00	6931.20	6980.77	2033.08	-3494.30	6494.00	6931.20	6980.77
$M2b$	2038.40	-3490.34	6769.00	6929.60	6976.12	2038.40	-3490.34	6769.00	6929.60	6976.12
$M2h$	2031.48	-3500.52	6862.00	6941.88	6997.08	2031.48	-3500.52	6862.00	6941.88	6997.08
$M2c$	2036.60	-3491.73	6852.00	6930.15	6978.61	2036.60	-3491.73	6852.00	6930.15	6978.61
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.2, 0.0004)$									
$M2bh$	2035.29	-3491.53	6672.00	6929.73	6977.71	2035.29	-3491.53	6672.00	6929.73	6977.71
$M2b$	2038.47	-3491.16	6728.00	6931.19	6979.52	2038.47	-3491.16	6728.00	6931.19	6979.52
$M2h$	2031.59	-3500.50	6861.00	6941.68	6993.66	2031.59	-3500.50	6861.00	6941.68	6993.66
$M2c$	2037.16	-3490.96	6852.00	6930.33	6978.68	2037.16	-3490.96	6852.00	6930.33	6978.68
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.5, 0.0005)$									
$M2bh$	2036.31	-3492.77	6624.00	6929.08	6976.30	2036.31	-3492.77	6624.00	6929.08	6976.30
$M2b$	2039.06	-3491.27	6732.00	6931.57	6981.16	2039.06	-3491.27	6732.00	6931.57	6981.16
$M2h$	2031.70	-3502.76	6862.00	6943.04	6995.30	2031.70	-3502.76	6862.00	6943.04	6995.30
$M2c$	2036.28	-3491.90	6852.00	6931.36	6978.51	2036.28	-3491.90	6852.00	6931.36	6978.51

Tabela 3.19: Análise de sensibilidade das variâncias das componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$ para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), B = (0.01, 0.01), C = (0.001, 0.001), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$ - Exemplo 3.

Modelo	Parâmetro	A		B		C		D		E	
		média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
Cadeia 1											
$M2bh$	σ_b^2	0.169	0.041	0.153	0.039	0.125	0.033	0.179	0.043	0.184	0.040
	σ_h^2	0.011	0.008	0.016	0.008	0.029	0.008	0.008	0.008	0.006	0.007
	σ_{total}^2	0.930	0.063	0.895	0.066	0.804	0.075	0.949	0.057	0.961	0.053
$M2b$	σ_b^2	0.214	0.032	0.215	0.032	0.216	0.032	0.214	0.033	0.211	0.032
$M2h$	σ_h^2	0.085	0.012	0.085	0.012	0.087	0.013	0.085	0.012	0.084	0.012
$M2c$	σ_c^2	0.216	0.036	0.217	0.036	0.219	0.036	0.216	0.036	0.215	0.036
Cadeia 2											
$M2bh$	σ_b^2	0.169	0.041	0.153	0.039	0.125	0.033	0.179	0.043	0.184	0.040
	σ_h^2	0.011	0.008	0.016	0.008	0.029	0.008	0.008	0.008	0.006	0.007
	σ_{total}^2	0.930	0.063	0.895	0.066	0.804	0.075	0.949	0.057	0.961	0.053
$M2b$	σ_b^2	0.214	0.032	0.215	0.032	0.216	0.032	0.214	0.033	0.211	0.032
$M2h$	σ_h^2	0.085	0.012	0.085	0.012	0.087	0.013	0.085	0.012	0.084	0.012
$M2c$	σ_c^2	0.216	0.036	0.217	0.036	0.219	0.036	0.216	0.036	0.215	0.036

Nas Figuras C.1 e C.2 (ver Apêndice C) estão informações a respeito do parâmetro α_0 para os modelos $M2bh$ e $M2b$ (Figura C.1) e para os modelos $M2h$ e $M2c$ (Figura C.2 no Apêndice C), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

Nas Figuras C.3 e C.4 (ver Apêndice C) estão informações a respeito dos parâmetros de variância σ_b^2 e σ_h^2 para o modelo $M2bh$ (Figura C.3 no Apêndice C) e dos parâmetros de variância σ_b^2 para o modelo $M2b$, σ_h^2 para o modelo $M2h$ e σ_c^2 para o modelo $M2c$ (Figura C.3 no Apêndice C), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras C.5 e C.6 (ver Apêndice C) apresentam, a título de exemplo, informações a respeito dos parâmetros b_{16} e h_{16} para o modelo $M2bh$ (Figura C.5 no Apêndice C) e do parâmetro b_{16} para o modelo $M2b$, h_{16} para o modelo $M2h$ e b_{16} para o modelo $M2c$ (Figura C.6 no Apêndice C), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras C.7 - C.10 (ver Apêndice C) apresentam as taxas de ocorrência de revascularização após enfarte do miocárdio para as ALS na província de Quebec e para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$, respectivamente, com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.

As Figuras C.7 - C.10 (ver Apêndice C) estão elaboradas em uma configuração de cinco intervalos de quantis para os valores obtidos de chances de revascularização após infarte do miocárdio, ou seja, em cinco cores graduadas. Neste caso, temos a indicação apenas para o modelo $M2c$ de que houve alteração nos valores das chances relativas para as taxas de revascularização após infarte do miocárdio durante o passar dos anos (ver Figura C.10 no Apêndice C).

Sabemos, pelo modelo $M2$, que a informação temporal é modelada por uma *B-spline* cúbica, ou seja, a informação temporal contida nos dados é interpretada através de uma curva contínua e

suave (com a primeira e a segunda derivadas contínuas).

As Figuras C.11 - C.16 (ver Apêndice C) apresentam os valores preditos (preto) e os valores observados para as taxas de ocorrência de revascularização após enfarte do miocárdio para as ALS na província de Quebec e para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$.

Dessa forma, o modelo final, com base na expressão (3.5) é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \tag{3.6}$$

de forma que $S_i(t) = \sum_{r=1}^4 \alpha_r B_r(t)$, $R_i = b_i + h_i$ ou $R_i = b_i$ ou $R_i = h_i$, para $i \in \{1, \dots, 139\}$ e $t \in \{1993, \dots, 2000\}$.

Os ajustes obtidos para o modelo $M2$ com base na expressão (3.6) são apresentados na Tabela 3.20.

Tabela 3.20: Modelos ajustados para o Exemplo 3.

Modelo	Ajuste
$M2bh$	$-1.562 + 0.208B_1 + 0.210B_2 + 1.073B_3 + 1.065B_4 + b_i + h_i$
$M2b$	$-1.561 + 0.205B_1 + 0.205B_2 + 1.071B_3 + 1.061B_4 + b_i$
$M2h$	$-1.553 + 0.208B_1 + 0.209B_2 + 1.072B_3 + 1.065B_4 + h_i$
$M2c$	$-1.552 + 0.208B_1 + 0.209B_2 + 1.071B_3 + 1.066B_4 + b_i$

A Tabela 3.20 mostra que os modelos ajustados são muito semelhantes entre si, para todos os casos em estudo ($M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$). O valor do intercepto α_0 ficou próximo do valor negativo -1.6 e os valores para os coeficientes da base para a *B-spline* cúbica também muito próximos entre todos os modelos.

3.4 Exemplo 4: Radiação Solar

Foram feitas análises com base no conjunto de dados de incidência de radiação solar utilizado no trabalho de Pumi et al. (2015). Os dados utilizados estão disponíveis no NSRDB (*USA National Solar Radiation Data Base*). Foram consideradas as informações que correspondem ao valor da radiação as 14h (hora local) de cada dia e em cada localidade.

Este conjunto de dados abrange a média mensal de radiação solar medida diariamente às 14h (horário local) para 233 localidades nos países dos Estados Unidos e de Porto Rico durante o período de janeiro de 1960 a dezembro de 2010.

Para as análises optou-se por tomar a média de incidência de radiação solar por unidade federativa dos Estados Unidos durante o período de janeiro de 2007 a dezembro de 2010.

Segundo Pumi et al. (2015) muitos fatores interferem na incidência de radiação solar na superfície de nosso planeta. Alguns destes fatores são a latitude, a inclinação do eixo do planeta em relação ao seu plano de rotação e a nebulosidade.

As flutuações da radiação solar causam impacto na produção agrícola e na produção de energia fotovoltaica, por exemplo.

O modelo estudado, com base na expressão (2.1) e no contexto da distribuição Normal (ver

terceira linha da expressão (2.6)), é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.7)$$

onde a função de ligação é dada por

$$g(\mu_{it}) = \mu_{it},$$

com $i \in \{1, \dots, 50\}$ e $t \in \{jan/2007, fev/2007, \dots, dez/2010\}$.

As variações adotadas para $S_i(t)$ e R_i , na expressão (3.7), estão listadas na Tabela 2.2. Para os modelos, em análise, foram simuladas 600.000 amostras de Gibbs usando o *software* *OpenBUGS* a partir do ambiente computacional R (biblioteca *R2OpenBUGS*) com aquecimento (*burn-in-sample*) de 300.000 amostras e salto de 150. Resultando em uma amostra de 2.000 observações. Para as análises, consideramos duas cadeias, cada uma delas com 2.000 observações, onde se consideram diferentes condições iniciais para cada cadeia.

A Figura 3.24 apresenta a incidência de radiação solar no território dos Estados Unidos. Os pontos indicam as cidades com postos meteorológicos em que foram coletadas as informações analisadas. As cores graduadas na Figura 3.24 indicam o aumento da incidência de radiação solar, ressaltando que há uma maior incidência dela na costa oeste do que na leste. A incidência maior ocorre nos estados de Arizona, Novo México, Nevada e Califórnia.

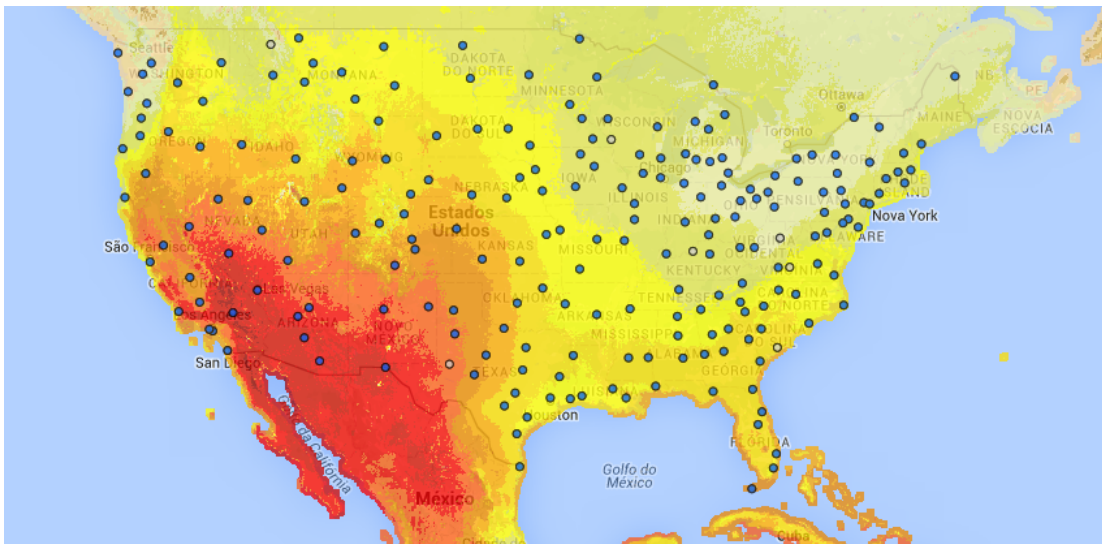


Figura 3.24: Incidência de radiação solar no território dos Estados Unidos. Os pontos indicam as cidades com postos meteorológicos. As cores graduadas indicam a incidência de radiação solar. Disponível em: <https://mapsbeta.nrel.gov>, acesso em 19 setembro 2015.

As comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* $GI(0.5, 0.0005)$ estão apresentadas na Tabela 3.21. As estimativas das variâncias das componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para tais casos estão apresentadas na Tabela 3.22.

Na Tabela 3.21 estão em **negrito** os menores valores ocorridos para cada critério quando comparados entre os diferentes modelos (ver informações por coluna). Em linha geral, o modelo que apresentou menores valores para os critérios de seleção foi o $M2$.

Os modelos $M5$, $M6$, $M9$ e $M10$ não estão listados nas Tabelas 3.21 e 3.22 pois não convergiram para a configuração de tamanho de cadeia e tamanho de salto utilizado.

Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para o modelo $M2$ ($M2bh$, $M2b$, $M2h$, $M2c$) para os diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros de variância como posto na

Tabela 2.1.

Os resultados obtidos na análise de sensibilidade para o modelo $M2$ estão apresentados nas Tabelas 3.23 e 3.24, respectivamente, para os critérios de seleção dos modelos e para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos.

Existem algumas diferenças entre os valores obtidos nas Tabelas 3.21 e 3.22 com as Tabelas 3.23 e 3.24. Essa diferença ocorre devido à aleatoriedade da semente utilizada para gerar as cadeias de Markov associadas.

Houve um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade. Não houve alterações significativas para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos (ver Tabela 3.24) e para os critérios de seleção (ver Tabela 3.23).

Tabela 3.21: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição a priori $GI(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 4.

Modelo	Cadeia 1						Cadeia 2					
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2		Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	
M1bh	2400.58	-177.27	5108.00	355.57	354.54		2400.58	-177.27	5108.00	355.57	354.54	
M1b	2398.96	-179.16	5132.00	359.25	358.34		2398.96	-179.16	5132.00	359.25	358.34	
M1h	2400.19	-180.76	5161.00	363.01	361.54		2400.19	-180.76	5161.00	363.01	361.54	
M1c	2399.63	-180.77	5159.00	362.70	361.55		2397.01	-183.42	5159.00	367.98	366.85	
M2bh	2398.06	-130.31	5023.00	261.92	260.64		2398.06	-130.31	5023.00	261.92	260.64	
M2b	2398.70	-129.93	5049.00	261.04	259.85		2398.70	-129.93	5049.00	261.04	259.85	
M2h	2400.39	-130.22	5060.00	262.14	260.43		2400.39	-130.22	5060.00	262.14	260.43	
M2c	2400.41	-130.13	5060.00	261.59	260.27		2400.41	-130.13	5060.00	261.59	260.27	
M3bh	2398.12	-206.35	4354.00	406.83	412.84		2400.61	-209.05	4360.00	412.29	418.29	
M3b	2399.54	-207.80	4358.00	410.12	415.67		2399.34	-207.16	4367.00	408.91	414.36	
M3h	2402.15	-209.26	4388.00	412.27	418.60		2400.13	-207.37	4387.00	408.33	414.85	
M3c	2399.37	-206.61	4387.00	407.12	413.36		2398.28	-205.58	4387.00	405.28	411.36	
M4bh	2399.59	-207.21	4347.00	408.51	414.47		2399.59	-207.21	4347.00	408.51	414.47	
M4b	2401.60	-210.00	4341.00	414.37	420.12		2401.60	-210.00	4341.00	414.37	420.12	
M4h	2399.88	-206.67	4388.00	406.85	413.56		2399.88	-206.67	4388.00	406.85	413.56	
M4c	2399.60	-206.58	4388.00	407.04	413.36		2399.15	-206.19	4388.00	406.38	412.52	
M7bh	2403.12	-212.10	4362.00	418.55	424.27		2401.70	-210.31	4327.00	414.74	420.69	
M7b	2398.31	-206.73	4350.00	408.04	413.47		2399.06	-207.54	4356.00	409.75	415.18	
M7h	2401.87	-207.79	4390.00	408.95	415.70		2395.72	-203.14	4369.00	400.93	405.49	
M7c	2402.29	-208.92	4388.00	411.86	417.96		2396.92	-204.15	4387.00	402.61	408.45	
M8bh	2400.05	-208.15	4345.00	410.41	416.38		2399.69	-208.58	4344.00	411.28	417.26	
M8b	2396.39	-204.76	4352.00	404.15	409.58		2398.59	-205.92	4342.00	406.04	411.94	
M8h	2402.54	-209.16	4389.00	411.71	418.54		2398.80	-205.40	4389.00	404.14	410.92	
M8c	2399.00	-206.07	4387.00	406.22	412.28		2399.59	-206.45	4388.00	406.79	413.11	

Tabela 3.23: Análise de sensibilidade para as comparações dos ajustes, com distribuição *a priori* para os componentes da variância dada por $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ com $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.001, 0.001), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$, para os modelos $M2bh, M2b, M2h$ e $M2c$ - Exemplo 4.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$									
$M2bh$	2398.40	-129.58	4998.00	260.51	259.17	2398.40	-129.58	4998.00	260.51	259.17
$M2b$	2400.30	-127.58	5032.00	256.35	255.17	2400.30	-127.58	5032.00	256.35	255.17
$M2h$	2402.45	-128.55	5061.00	258.81	257.11	2402.45	-128.55	5061.00	258.81	257.11
$M2c$	2401.40	-128.90	5059.00	259.15	257.81	2401.40	-128.90	5059.00	259.15	257.81
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.01, 0.01)$									
$M2bh$	2398.23	-129.77	5012.00	260.98	259.57	2398.23	-129.77	5012.00	260.98	259.57
$M2b$	2400.30	-127.54	5032.00	256.28	255.09	2400.30	-127.54	5032.00	256.28	255.09
$M2h$	2402.45	-128.53	5061.00	258.78	257.07	2402.45	-128.53	5061.00	258.78	257.07
$M2c$	2399.13	-131.16	5059.00	263.71	262.34	2399.13	-131.16	5059.00	263.71	262.34
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$									
$M2bh$	2398.50	-130.28	5014.00	262.27	260.58	2398.50	-130.28	5014.00	262.27	260.58
$M2b$	2399.40	-128.25	5032.00	257.78	256.50	2399.40	-128.25	5032.00	257.78	256.50
$M2h$	2399.01	-131.89	5061.00	265.61	263.79	2399.01	-131.89	5061.00	265.61	263.79
$M2c$	2400.87	-129.40	5059.00	260.33	258.80	2400.87	-129.40	5059.00	260.33	258.80
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.2, 0.0004)$									
$M2bh$	2398.79	-129.29	4992.00	259.82	258.60	2398.79	-129.29	4992.00	259.82	258.60
$M2b$	2398.59	-129.57	5033.00	260.35	259.15	2398.59	-129.57	5033.00	260.35	259.15
$M2h$	2398.81	-132.15	5061.00	265.99	264.32	2398.81	-132.15	5061.00	265.99	264.32
$M2c$	2404.62	-125.73	5059.00	252.82	251.48	2404.62	-125.73	5059.00	252.82	251.48
	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.5, 0.0005)$									
$M2bh$	2396.63	-131.88	5027.00	265.05	263.76	2396.63	-131.88	5027.00	265.05	263.76
$M2b$	2396.49	-132.04	5043.00	265.24	264.10	2396.49	-132.04	5043.00	265.24	264.10
$M2h$	2398.46	-132.43	5061.00	266.54	264.87	2398.46	-132.43	5061.00	266.54	264.87
$M2c$	2399.95	-130.61	5060.00	262.59	261.24	2399.95	-130.61	5060.00	262.59	261.24

Tabela 3.24: Análise de sensibilidade das variâncias das componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$ para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), B = (0.01, 0.01), C = (0.001, 0.001), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$ - Exemplo 4.

Modelo	Parâmetro	A		B		C		D		E	
		média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
Cadeia 1											
$M2bh$	σ_b^2	0.049	0.022	0.043	0.020	0.051	0.021	0.052	0.022	0.051	0.022
	σ_h^2	0.006	0.005	0.011	0.006	0.023	0.007	0.005	0.005	0.004	0.005
	σ_{total}^2	0.861	0.138	0.774	0.137	0.677	0.111	0.898	0.130	0.910	0.124
$M2b$	σ_b^2	0.066	0.023	0.067	0.023	0.077	0.024	0.065	0.022	0.063	0.022
$M2h$	σ_h^2	0.033	0.009	0.034	0.009	0.039	0.010	0.032	0.009	0.032	0.009
$M2c$	σ_c^2	0.074	0.028	0.075	0.027	0.086	0.028	0.071	0.027	0.069	0.026
Cadeia 2											
$M2bh$	σ_b^2	0.049	0.022	0.043	0.020	0.051	0.021	0.052	0.022	0.051	0.022
	σ_h^2	0.006	0.005	0.011	0.006	0.023	0.007	0.005	0.005	0.004	0.005
	σ_{total}^2	0.861	0.138	0.774	0.137	0.677	0.111	0.898	0.130	0.910	0.124
$M2b$	σ_b^2	0.066	0.023	0.067	0.023	0.077	0.024	0.065	0.022	0.063	0.022
$M2h$	σ_h^2	0.033	0.009	0.034	0.009	0.039	0.010	0.032	0.009	0.032	0.009
$M2c$	σ_c^2	0.074	0.028	0.075	0.027	0.086	0.028	0.071	0.027	0.069	0.026

Nas Figuras D.1 e D.2 (ver Apêndice D) estão informações a respeito do parâmetro α_0 para os modelos $M2bh$ e $M2b$ (Figura D.1) e para os modelos $M2h$ e $M2c$ (Figura D.2 no Apêndice D), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

Nas Figuras D.3 e D.4 (ver Apêndice D) estão informações a respeito dos parâmetros de variância σ_b^2 e σ_h^2 para o modelo $M2bh$ (Figura D.3 no Apêndice D) e dos parâmetros de variância σ_b^2 para o modelo $M2b$, σ_h^2 para o modelo $M2h$ e σ_c^2 para o modelo $M2c$ (Figura D.3 no Apêndice D), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras D.5 e D.6 (ver Apêndice D) apresentam, a título de exemplo, informações a respeito dos parâmetros b_{16} e h_{16} para o modelo $M2bh$ (Figura D.5 no Apêndice D) e do parâmetro b_{16} para o modelo $M2b$, h_{16} para o modelo $M2h$ e b_{16} para o modelo $M2c$ (Figura D.6 no Apêndice D), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico da função de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

As Figuras D.7 - D.10 (ver Apêndice D) apresentam os índices de radiação para as unidades federativas dos Estados Unidos e para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$, respectivamente, com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$.

As Figuras D.7 - D.10 (ver Apêndice D) estão elaboradas em uma configuração de cinco intervalos de quantis para os valores obtidos os índices de radiação para as unidades federativas dos Estados Unidos, ou seja, em cinco cores graduadas.

Sabemos, pelo modelo $M2$, que a informação temporal é modelada por uma *B-spline* cúbica, ou seja, a informação temporal contida nos dados é interpretada através de uma curva contínua e suave (com a primeira e a segunda derivadas contínuas).

As Figuras D.11 - D.12 (ver Apêndice D) apresentam os valores preditos (preto) e os valores observados para os índices de radiação para as unidades federativas dos Estados Unidos e para os modelos $M2bh$, $M2b$, $M2h$ e $M2c$, respectivamente, com distribuição *a priori* para os componentes

da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Pode-se perceber, nestas figuras, o formato da curva *B-spline* cúbica, que indica que nos últimos meses do ano de 2010 houve aumento considerável do índice de radiação solar.

Dessa forma, o modelo final, com base na expressão (3.7) é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.8)$$

de forma que $S_i(t) = \sum_{r=1}^4 \alpha_r B_r(t)$, $R_i = b_i + h_i$ ou $R_i = b_i$ ou $R_i = h_i$, para $i \in \{1, \dots, 50\}$ e $t \in \{jan/2007, fev/2007, \dots, dez/2010\}$.

Os ajustes obtidos para o modelo *M2* com base na expressão (3.8) são apresentados na Tabela 3.25.

Tabela 3.25: Modelos ajustados para o Exemplo 4.

Modelo	Ajuste
<i>M2bh</i>	$0.262 - 0.167B_1 + 0.407B_2 - 0.671B_3 + 0.409B_4 + b_i + h_i$
<i>M2b</i>	$0.264 - 0.171B_1 + 0.413B_2 - 0.677B_3 + 0.410B_4 + b_i$
<i>M2h</i>	$0.262 - 0.167B_1 + 0.407B_2 - 0.671B_3 + 0.409B_4 + h_i$
<i>M2c</i>	$0.263 - 0.170B_1 + 0.410B_2 - 0.670B_3 + 0.406B_4 + b_i$

A Tabela 3.25 mostra que os modelos ajustados são muito semelhantes entre si, para todos os casos em estudo (*M2bh*, *M2b*, *M2h* e *M2c*). O valor do intercepto α_0 ficou próximo do valor negativo 0.3 e os valores para os coeficientes da base para a *B-spline* cúbica também muito próximos entre todos os modelos.

3.5 Exemplo 5: Resistência de Bactéria a Antibióticos

Foram feitas análises com base no conjunto de dados de resistência a antibióticos em *Salmonella* utilizado nos trabalhos de Cybis et al. (2015) e Mather et al. (2013).

O surgimento de bactérias capazes de resistir a ação de múltiplos antibióticos é um sério problema de saúde pública. Entender a relação entre a evolução genética de uma bactéria e a resistência que esta bactéria apresenta a diferentes antibióticos pode auxiliar no desenvolvimento e utilização de medicamentos adequados.

Analisamos 248 sequências de DNA da bactéria *Salmonella Typhimurium* DT104, obtidas a partir de animais e de seres humanos na Escócia entre os anos 1990 e 2011. Para cada sequência de DNA temos um indicador binário indicando a resistência (indicador assume valor 1) ou não-resistência (indicador assume valor 0) a um dado antibiótico. Foram testados quatorze antibióticos diferentes.

O modelo estudado, com base na expressão (2.1) e no contexto da distribuição Binomial (ver segunda linha da expressão (2.6)), é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.9)$$

onde a função de ligação é dada por

$$g(\mu_{it}) = \ln \left(\frac{\mu_{it}}{1 - \mu_{it}} \right),$$

com $i \in \{1, \dots, 248\}$ e $t \in \{1990, \dots, 2011\}$.

As variações adotadas para R_i , na expressão (3.9), estão listadas na Tabela 2.2. Para os modelos em análise foram simuladas 600.000 amostras de Gibbs usando o *software OpenBugs* a partir do *software R* (biblioteca *R2OpenBugs*) com aquecimento (*burn-in-sample*) de 300.000 amostras e salto de 150. Resultando em uma amostra de 2.000 observações. Para as análises, consideramos duas cadeias, cada uma delas com 2.000 observações, onde se consideram diferentes condições iniciais para cada cadeia.

Assume-se $S_i(t) = 0$ para o modelo M e $S_i(t) = \delta t$ para o modelo $M1$, com $i \in \{1, \dots, 248\}$ e $t \in \{1990, \dots, 2011\}$. Para a parcela R_i assume-se a distância filogenética como elemento para a determinação dos vizinhos para os modelos CAR e PCAR.

As distâncias filogenéticas estão representadas na Figura 3.25, conhecida como *heat map* ou mapa de calor. A graduação de cores indica o aumento da distância filogenética entre as bactérias. Mais detalhes a respeito de distâncias filogenéticas podem ser encontrados em Felsenstein (2004) e Day (1987).

A Figura 3.25 é uma representação gráfica bidimensional de dados onde os valores individuais das distâncias filogenéticas, que estão contidos numa matriz associada aos dados, são representados como cores.

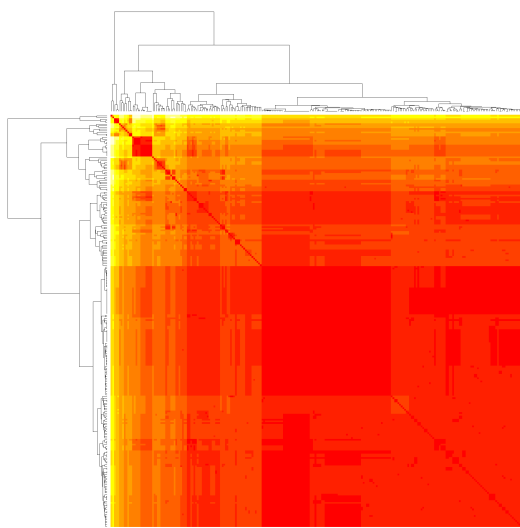


Figura 3.25: Distâncias filogenéticas entre 248 bactérias *Salmonella Typhimurium* DT104. As cores graduadas indicam o aumento da distância - Exemplo 5.

A Tabela 3.26 apresenta o número de bactérias que apresentam resistência a cada um dos dez antibióticos, ou seja, temos que do total de 248 bactérias apenas 2 delas não apresentam resistência a nenhum dos dez antibióticos em estudo. A maior quantidade das bactérias (65 + 94, ver Tabela 3.26) são resistentes a 6 ou 7 antibióticos.

Tabela 3.26: Número de bactérias resistentes aos antibióticos - Exemplo 5.

Número de antibiótico(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de bactérias	2	4	6	10	13	14	65	94	23	15	2

A Figura 3.26 apresenta a mesma informação contida na Tabela 3.26, onde a graduação de cores de vermelho a azul indica o aumento da quantidade de bactérias não-suscetíveis aos dez antibióticos testados.

Nas Figuras 3.27 - 3.31 estão apresentadas as taxas de resistência a antibiótico por bactéria

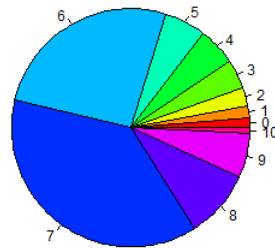


Figura 3.26: Taxas de resistência a antibiótico por quantidade de bactérias resistentes. As cores graduadas indicam a proporção de bactérias resistentes ao número de antibióticos - Exemplo 5.

numerada de 1 a 248. As taxas de resistência a antibiótico variam de 0 a 76.92%, sendo que o valor médio corresponde a 47.94%.

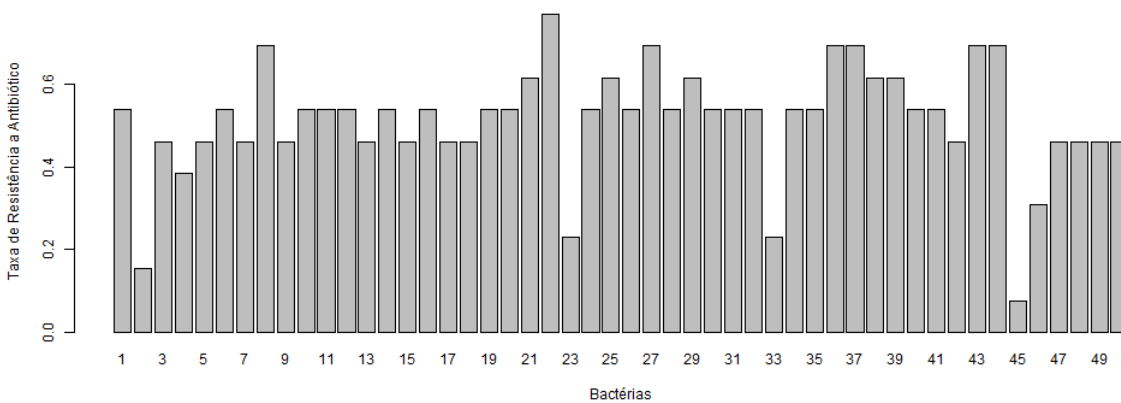


Figura 3.27: Taxas de resistência a antibiótico por bactéria numerada de 1 a 50 - Exemplo 5.

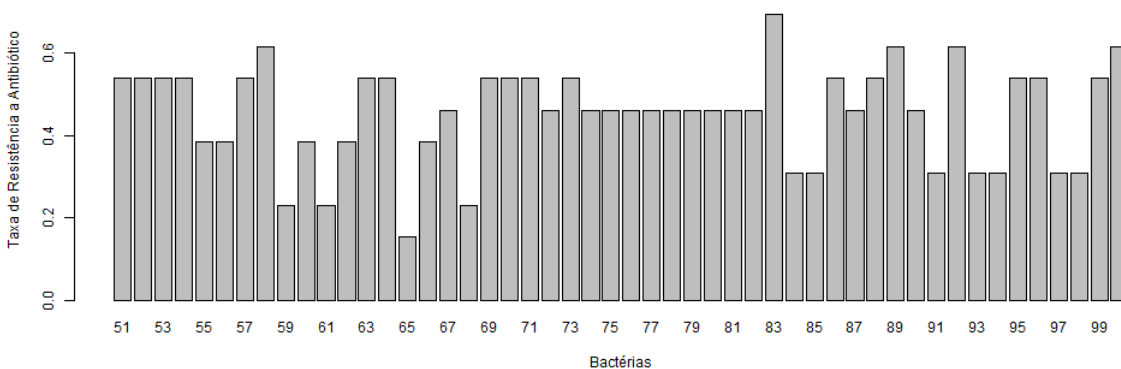


Figura 3.28: Taxas de resistência a antibiótico por bactéria numerada de 51 a 100 - Exemplo 5.

As comparações dos ajustes dos modelos M e $M1$, para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$,

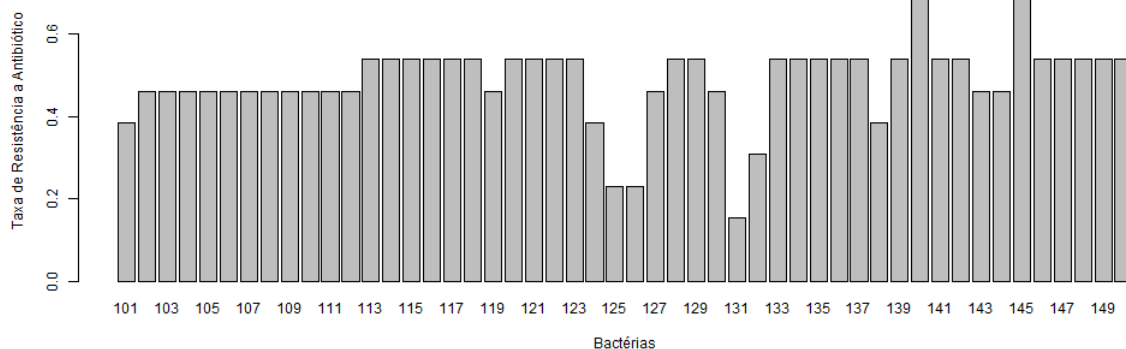


Figura 3.29: Taxas de resistência a antibiótico por bactéria numerada de 101 a 150 - Exemplo 5.

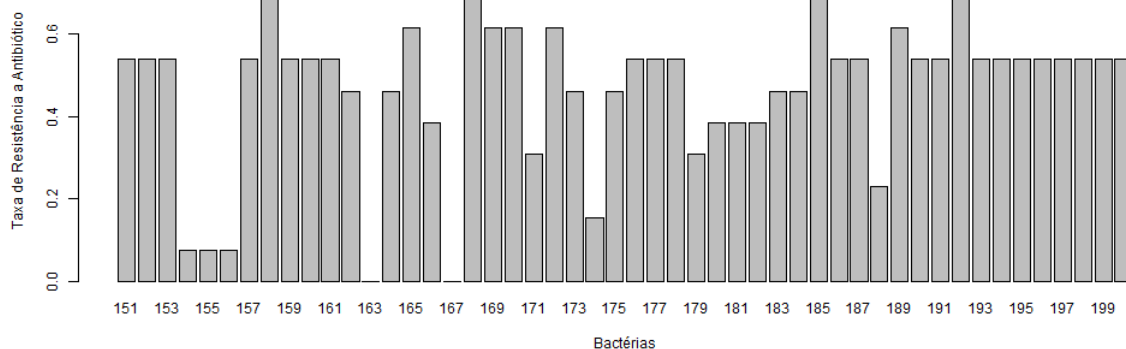


Figura 3.30: Taxas de resistência a antibiótico por bactéria numerada de 151 a 200 - Exemplo 5.

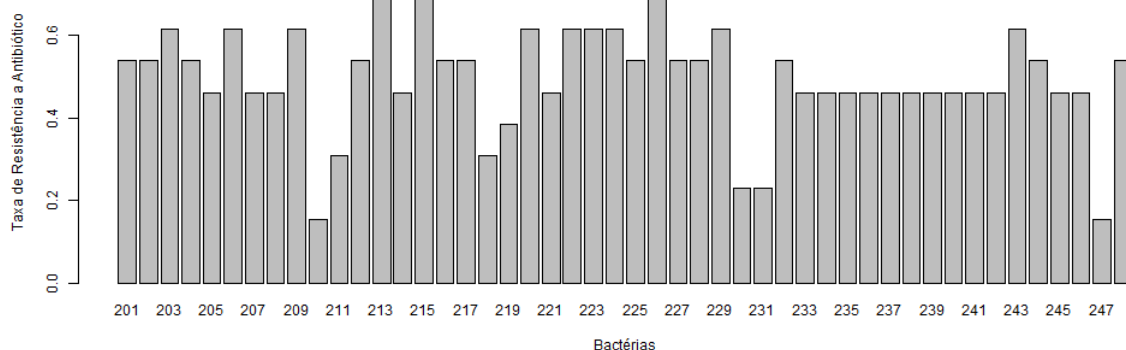


Figura 3.31: Taxas de resistência a antibiótico por bactéria numerada de 201 a 248 - Exemplo 5.

estão apresentadas na Tabela 3.27. As estimativas das variâncias dos componentes dos modelos M e M_1 , em estudo, através da média e do desvio-padrão estão apresentadas na Tabela 3.28.

Tabela 3.27: Comparações dos ajustes dos modelos em estudo para a distribuição *a priori* $GI(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 5.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2	Qp	LPML	DIC	WAIC1	WAIC2
Mbh	786.28	108.04	365.50	-217.97	-215.89	835.07	111.96	358.20	-225.61	-224.52
Mb	283.30	109.08	370.50	-219.91	-217.88	324.79	108.97	370.80	-219.67	-217.58
Mh	11.15	118.87	351.90	-237.74	-237.74	11.15	118.87	351.90	-237.74	-237.74
Mc	10.76	119.06	351.20	-238.11	-238.11	10.72	119.09	351.00	-238.17	-238.17
M1bh	10802468.43	106.49	373.60	-214.39	-213.19	48461.37	109.84	366.10	-220.88	-219.89
M1b	460.96	107.77	363.40	-217.34	-215.84	214.28	107.97	363.00	-217.75	-216.26
M1h	12.20	118.36	353.80	-236.72	-236.72	12.20	118.36	353.80	-236.72	-236.72
M1c	11.83	118.52	353.20	-237.05	-237.05	11.83	118.52	353.20	-237.05	-237.05

Com base nos valores para as comparações dos ajustes (ver Tabela 3.27) o modelo que apresentou os melhores ajustes foi o modelo $M1$. Entretanto, vale ressaltar que houve pouca variação entre os ajustes obtidos para o modelo M e $M1$.

Tabela 3.28: Estimativas das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ - Exemplo 5.

<i>Cadeia</i>	<i>Modelo</i>	<i>Parâmetro</i>	<i>média</i>	<i>d.p.</i>	<i>média</i>	<i>d.p.</i>	
			<i>M</i>		<i>M1</i>		
1	<i>Mibh</i>	σ_b^2	0.0001346	0.0000751	0.0001364	0.0000820	
		σ_h^2	0.0028595	0.0054136	0.0031854	0.0055900	
		σ_{total}^2	0.1291961	0.1247085	0.1255478	0.1241947	
	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.0001326	0.0000810	0.0001328	0.0000759	
		<i>Mih</i>	σ_h^2	0.0033371	0.0059929	0.0031826	0.0055474
		<i>Mic</i>	σ_c^2	0.0000227	0.0000048	0.0000227	0.0000047
2	<i>Mibh</i>	σ_b^2	0.0001359	0.0000836	0.0001317	0.0000811	
		σ_h^2	0.0029959	0.0052949	0.0031310	0.0055793	
		σ_{total}^2	0.1291179	0.1286607	0.1245116	0.1219290	
	<i>Mib</i>	σ_b^2	0.0001326	0.0000809	0.0001328	0.0000759	
		<i>Mih</i>	σ_h^2	0.0033371	0.0059929	0.0031826	0.0055474
		<i>Mic</i>	σ_c^2	0.0000227	0.0000048	0.0000227	0.0000047

Optou-se pela análise de sensibilidade para ambos os modelos. Análise de sensibilidade para os modelos M e $M1$ foi feita variando a distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2)$ para os parâmetros de variância de forma que $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$.

Os resultados obtidos para a análise de sensibilidade estão resumidos nas Tabelas 3.29 e 3.30. A Tabela 3.29 mostra que os modelos Mbh e $M1bh$ apresentaram grande variação de valores para a medida de ajuste Q_P . No entanto, para as demais medidas de ajuste o comportamento ficou semelhante.

A Tabela 3.30 apresenta a análise de sensibilidade das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$. Os valores obtidos da média e do desvio-padrão para as variâncias dos componentes dos modelos ficaram próximos para todos os casos estudados, indicando bom comportamento dos modelos abordados.

Tabela 3.29: Análise de sensibilidade para as comparações dos ajustes, com distribuição *a priori* para os componentes de variância dada por $GI(\gamma_1, \gamma_2)$ com $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(0.1, 0.1), (0.2, 0.0004), (0.5, 0.0005)\}$, para os modelos M e $M1$ - Exemplo 5.

Modelo	Cadeia 1					Cadeia 2				
	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$	Qp	$LPML$	DIC	$WAIC1$	$WAIC2$
					$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$					
Mbh	341.34	109.60	359.30	-220.85	-219.56	7426.40	106.65	378.50	-216.07	-213.89
Mb	97.75	109.35	360.20	-221.20	-219.25	97.75	109.35	360.20	-221.20	-219.25
Mh	11.67	118.63	352.80	-237.25	-237.25	11.67	118.63	352.80	-237.25	-237.25
Mc	10.74	119.06	351.10	-238.13	-238.13	10.74	119.06	351.10	-238.13	-238.13
$M1bh$	91.99	109.12	365.40	-219.81	-218.57	36516.04	107.71	353.60	-218.28	-216.33
$M1b$	250.42	109.49	370.80	-220.68	-219.34	228.29	109.59	370.50	-220.87	-219.53
$M1h$	12.84	118.05	355.00	-236.11	-236.10	12.84	118.05	355.00	-236.11	-236.10
$M1c$	11.86	118.53	353.20	-237.05	-237.05	11.86	118.53	353.20	-237.05	-237.05
					$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.2, 0.0004)$					
Mbh	77.12	110.79	364.50	-223.26	-222.03	29392.81	108.83	364.50	-218.71	-217.85
Mb	125.84	110.43	366.10	-222.44	-220.83	125.73	110.50	365.90	-222.56	-220.96
Mh	11.21	118.84	352.00	-237.68	-237.68	11.21	118.84	352.00	-237.68	-237.68
Mc	10.77	119.07	351.10	-238.13	-238.13	10.74	119.07	351.10	-238.14	-238.14
$M1bh$	1035499.31	106.03	370.90	-214.02	-212.68	49.12	110.85	373.40	-223.19	-222.10
$M1b$	131955.68	108.05	363.30	-217.38	-216.29	68084.48	107.56	364.30	-216.40	-215.30
$M1h$	12.41	118.26	354.20	-236.52	-236.52	12.41	118.26	354.20	-236.52	-236.52
$M1c$	11.77	118.55	353.10	-237.10	-237.10	11.77	118.55	353.10	-237.10	-237.10
					$(\gamma_1, \gamma_2) = (0.5, 0.0005)$					
Mbh	786.28	108.04	365.50	-217.97	-215.89	835.07	111.96	358.20	-225.61	-224.52
Mb	283.30	109.08	370.50	-219.91	-217.88	324.79	108.97	370.80	-219.67	-217.58
Mh	11.15	118.87	351.90	-237.74	-237.74	11.15	118.87	351.90	-237.74	-237.74
Mc	10.76	119.06	351.20	-238.11	-238.11	10.72	119.09	351.00	-238.17	-238.17
$M1bh$	10802468.43	106.49	373.60	-214.39	-213.19	48461.37	109.84	366.10	-220.88	-219.89
$M1b$	460.96	107.77	363.40	-217.34	-215.84	214.28	107.97	363.00	-217.75	-216.26
$M1h$	12.20	118.36	353.80	-236.72	-236.72	12.20	118.36	353.80	-236.72	-236.72
$M1c$	11.83	118.52	353.20	-237.05	-237.05	11.83	118.52	353.20	-237.05	-237.05

Tabela 3.30: Análise de sensibilidade das variâncias dos componentes dos modelos em estudo através da média e do desvio-padrão para os modelos M e $M1$ para $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{A = (0.1, 0.1), D = (0.2, 0.0004), E = (0.5, 0.0005)\}$ - Exemplo 5.

Modelo	Parâmetro	A		D		E	
		média	d.p.	média	d.p.	média	d.p.
Cadeia 1							
Mbh	σ_b^2	0.0003021	0.0001900	0.0001160	0.0000715	0.0001359	0.0000836
	σ_h^2	0.0083223	0.0116038	0.0044030	0.0072886	0.0029959	0.0052949
	σ_{total}^2	0.0969412	0.1057280	0.0943554	0.1104127	0.1291179	0.1286607
Mb	σ_b^2	0.0003035	0.0002011	0.0001151	0.0000733	0.0001326	0.0000809
Mh	σ_h^2	0.0078207	0.0099525	0.0043440	0.0071153	0.0033371	0.0059929
Mc	σ_c^2	0.0000462	0.0000105	0.0000184	0.0000040	0.0000227	0.0000048
$M1bh$	σ_b^2	0.0003098	0.0002051	0.0001144	0.0000697	0.0001317	0.0000811
	σ_h^2	0.0078307	0.0110283	0.0048456	0.0080437	0.0031310	0.0055793
	σ_{total}^2	0.1001740	0.1060924	0.0925720	0.1111341	0.1245116	0.1219290
$M1b$	σ_b^2	0.0003043	0.0001758	0.0001143	0.0000652	0.0001328	0.0000759
	σ_h^2	0.0080994	0.0101778	0.0043939	0.0075892	0.0031826	0.0055474
$M1c$	σ_c^2	0.0000466	0.0000107	0.0000185	0.0000039	0.0000227	0.0000047
Cadeia 2							
Mbh	σ_b^2	0.0003098	0.0001916	0.0001158	0.0000737	0.0001346	0.0000751
	σ_h^2	0.0078980	0.0097291	0.0044931	0.0074427	0.0028595	0.0054136
	σ_{total}^2	0.0977360	0.1076542	0.0967598	0.1143392	0.1291961	0.1247085
Mb	σ_b^2	0.0003035	0.0002011	0.0001151	0.0000733	0.0001326	0.0000810
Mh	σ_h^2	0.0078207	0.0099525	0.0043440	0.0071153	0.0033371	0.0059929
Mc	σ_c^2	0.0000462	0.0000105	0.0000184	0.0000040	0.0000227	0.0000048
$M1bh$	σ_b^2	0.0003082	0.0002152	0.0001182	0.0000716	0.0001364	0.0000820
	σ_h^2	0.0088133	0.0116001	0.0041314	0.0070508	0.0031854	0.0055900
	σ_{total}^2	0.0926387	0.1044847	0.1019191	0.1121722	0.1255478	0.1241947
$M1b$	σ_b^2	0.0003043	0.0001758	0.0001143	0.0000652	0.0001328	0.0000759
$M1h$	σ_h^2	0.0080994	0.0101778	0.0043939	0.0075892	0.0031826	0.0055474
$M1c$	σ_c^2	0.0000466	0.0000107	0.0000185	0.0000039	0.0000227	0.0000047

Nas Figuras E.5 e E.6 (ver Apêndice E) estão, a título de exemplo, informações a respeito dos parâmetros b_{16} e h_{16} para o modelo $M1bh$ (Figura E.5) e do parâmetro b_{16} para o modelo $M1b$, h_{16} para o modelo $M1h$ e b_{16} para o modelo $M1c$ (Figura E.6 no Apêndice E), com distribuição *a priori* para os componentes da variância σ_b^2 e σ_h^2 dada por $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$. Em ambos os casos temos um bom comportamento do gráfico de autocorrelação, distribuição *a priori* (preto) vs distribuição *a posteriori*, quantis e trajetória.

Neste exemplo temos duas particularidades que diferem dos demais exemplos abordados. Na primeira particularidade a informação temporal corresponde apenas ao indicador do ano em que houve o registro da bactéria em estudo, ou seja, para cada bactéria, os valores de tempo não correspondem ao contexto de uma série temporal ou à evolução durante o transcorrer do tempo. Na segunda particularidade as distâncias filogenéticas entre as bactérias (e não distâncias geográficas ou geodésicas) foram utilizadas como critério para a definição de vizinhos conforme exigência dos modelos CAR e PCAR.

Os modelos Mbh e $M1bh$ apresentaram grande variação de valores para a medida de ajuste Q_P . No entanto, para as demais medidas de ajuste o comportamento ficou semelhante entre os dois modelos em foco. Na análise de sensibilidade, os valores obtidos da média e do desvio-padrão para as variâncias dos componentes dos modelos ficaram próximos para todos os casos estudados, indicando bom comportamento dos modelos abordados.

O modelo $M1$ apresenta a informação de que o ano em que é catalogada a bactéria é um

elemento importante para se analisar o fator de resistência de bactérias a diferentes antibióticos no contexto em que as distâncias filogenéticas são utilizadas como elemento espacial. Isso é condizente com o fato de que a cada ano surgem bactérias que são mais resistentes e menos suscetíveis aos medicamentos e tratamentos existentes.

Dessa forma, o modelo final, com base na expressão (3.9) é dado por

$$g(\mu_{it}) = \alpha_0 + S_i(t) + R_i, \quad (3.10)$$

de forma que $S_i(t) = \delta t$, $R_i = b_i + h_i$ ou $R_i = b_i$ ou $R_i = h_i$, com $i \in \{1, \dots, 248\}$ e $t \in \{1990, \dots, 2011\}$.

Os ajustes obtidos para o modelo $M1$ são apresentados na Tabela 3.31.

Tabela 3.31: Modelos ajustados para o Exemplo 5.

Modelo	Ajuste
$M1bh$	$-3.283 + 0.002t + b_i + h_i$
$M1b$	$-3.411 + 0.001t + b_i$
$M1h$	$-3.283 + 0.002t + h_i$
$M1c$	$-3.281 + 0.002t + b_i$

A Tabela 3.31 mostra que os modelos ajustados são muito semelhantes entre si, havendo uma pequena diferença para o caso $M1b$. Para todos os casos em estudo ($M1bh$, $M1b$, $M1h$ e $M1c$) o valor do intercepto α_0 é negativo enquanto que o valor do efeito linear aditivo δ é positivo. Esta característica reforça a informação de que há queda da eficácia do antibiótico para o tratamento das bactérias do estudo com o passar dos anos.

CAPÍTULO 4

MODELO DE REGRESSÃO PENALIZADA

Como apresentado no Capítulo 2 e Seção 2.1, o Modelo de Regressão Linear (ver Definição 2.1) usa o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}_{it} = (x_{it}^{(0)}, x_{it}^{(1)}, \dots, x_{it}^{(k)}, \dots, x_{it}^{(p)})' = (1, x_{it}^{(1)}, \dots, x_{it}^{(k)}, \dots, x_{it}^{(p)})'$ para prever a variável aleatória Y_{it} associada a (i, t) -ésima observação y_{it} , com $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, $k \in \{0, \dots, p\}$ onde o supra-índice p é a quantidade de variáveis explicativas.

Assume-se, no contexto da Definição 2.1, que $\mathbb{E}(Y_{it}|\mathbf{X}_{it})$ é linear ou, pelo menos, que o modelo linear é uma aproximação razoável. Tipicamente, para a Estatística Clássica, temos um conjunto de dados de treinamento a partir dos quais estimamos o coeficiente $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$.

O método mais conhecido de estimação do coeficiente $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ é o *Método dos Mínimos Quadrados*. Este método determina os coeficientes $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ de forma a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, denotada por $SQR(\boldsymbol{\beta})$,

$$\begin{aligned} SQR(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \epsilon_{it}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - \mu_{it})^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \sum_{k=0}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A equação em (4.1) em sua forma vetorial é dada por

$$SQR(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{y} = (y_{11}, \dots, y_{it}, \dots, y_{NT})'$ é um vetor de NT coordenadas e $\mathbf{X} = (x_{it}^{(k)})_{i,j=1}^{N,T}$ é uma matriz de dimensões $(N, T) \times (p+1)$, onde $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$ e $k \in \{0, \dots, p\}$.

A expressão em (4.2) é uma função quadrática de $p+1$ parâmetros. Quando a matrix \mathbf{X} possui posto completo, tem-se que os estimadores para os parâmetros β_k , com $k \in \{0, \dots, p\}$ são obtidos através de diferenciação. O estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{mq}$ obtido através do método dos Mínimos Quadrados para o coeficiente $\boldsymbol{\beta}$ é dado por $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{mq} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$.

Mais detalhes a respeito do Método de Mínimos Quadrados e propriedades dos estimadores obtidos podem ser encontrados em [Hastie et al. \(2009\)](#) e [Agresti \(2015\)](#).

Existem duas situações em que os estimadores obtidos pelo Método dos Mínimos Quadrados não são satisfatórios:

- (i) acurácia na predição: os estimadores obtidos através do método dos mínimos quadrados são não viciados. A acurácia na predição pode ser obtida fazendo-se que alguns dos coeficientes do modelo se anulem. Isto causa uma perda na característica de vício pequeno do estimador. Entretanto, leva à redução de sua variância e, em um contexto geral, aumenta a acurácia do modelo;
- (ii) interpretação: em um modelo com grande número de parâmetros é, frequentemente, difícil interpretar e analisar todos os parâmetros. É preferível, neste contexto, determinar um conjunto menor de parâmetros que exibam os efeitos mais fortes e representativos.

Os métodos que abordam estas duas características são chamados Métodos *Shrinkage*. A ideia por trás desta metodologia consiste em se escolher apenas alguns preditores do modelo em estudo e se descartar os demais (ocasionando que alguns parâmetros se anulem). Dessa forma, produzir um modelo resultante que seja mais fácil de ser interpretado e que possivelmente possua menor erro na predição do que o modelo completo com todas as variáveis explicativas.

O Método *Shrinkage* visa melhorar o estimador obtido pelo método de Mínimos Quadrados procurando reduzir a variância através da adição de pesos ou penalidades com base no valor dos coeficientes. A ideia é, no contexto de várias variáveis, manter no modelo ajustado apenas aquelas que sejam realmente importantes e contribuam efetivamente ao modelo final.

Os métodos *Shrinkage* são: *ridge*, *lasso* e *elastic-net*. Tais métodos atribuem pesos de forma contínua as variáveis explicativas que integram o modelo devido à natureza da restrição imposta e, em virtude disso, são um procedimento mais suave e apresentam uma menor variabilidade em geral.

4.1 Regressão Ridge

A regressão *ridge* zera os coeficientes impondo uma penalidade sobre o seu tamanho. Os coeficientes *ridge* são aqueles que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos penalizada, de forma que

$$\hat{\beta}^{ridge} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 + \lambda \sum_{k=1}^p \beta_k^2 \right\}, \quad (4.3)$$

onde $\lambda \geq 0$ é o parâmetro de complexidade que controla o processo de *shrinkage*.

Quanto maior o valor de λ , mais coeficientes são forçados à contração para zero.

Uma forma equivalente de se escrever o problema em (4.3) é dada por

$$\hat{\beta}^{ridge} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 \right\},$$

sujeito a $\sum_{k=1}^p \beta_k^2 \leq w.$ (4.4)

A expressão (4.4) deixa explícito a restrição no tamanho do parâmetro β pois corresponde à restrição no valor da norma l_2 de β .

Observação 4.1. Se compararmos as expressões (4.3) e (4.4), temos que existe uma correspondência biunívoca entre λ e w . As soluções obtidas para as expressões (4.3) e (4.4) não são invariantes à escala de medida das variáveis envolvidas, então é necessário padronizar os valores antes de resolver o problema de minimização.

Observação 4.2. O intercepto β_0 não aparece no termo de penalização. Este fato ocorre porque ao adicionar uma constante qualquer para cada y_{it} nem sempre resulta em um simples acréscimo ou decréscimo nas predições do valor desta mesma constante.

Observação 4.3. As expressões (4.3) e (4.4) podem ser apresentadas em sua forma matricial análoga à soma dos quadrados dos resíduos dada pela expressão (4.2), de modo que

$$SQR(\boldsymbol{\beta})_\lambda = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}. \quad (4.5)$$

Proposição 4.1. *Seja o problema de minimização apresentado em (4.4) e dado pela expressão (4.5). Seja $\mathbf{X} = (x_{it}^{(k)})_{i,j=1}^{N,T}$ a matriz de dimensões $(N, T) \times (p + 1)$ com posto completo. Então, o estimador de regressão ridge para o parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ é dado por*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \quad (4.6)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $p \times p$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$ e $k \in \{0, \dots, p\}$.

Prova: Pela expressão (4.5), sabemos que $SQR(\boldsymbol{\beta})_\lambda = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}$. Esta expressão é uma função quadrática em $p + 1$ parâmetros.

Diferenciando a expressão (4.5) com respeito a $\boldsymbol{\beta}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SQR(\boldsymbol{\beta})_\lambda}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= -2\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + 2\lambda\boldsymbol{\beta} \\ \frac{\partial^2 SQR(\boldsymbol{\beta})_\lambda}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} &= -2\mathbf{X}'\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na expressão (4.7), temos que \mathbf{X} é uma matriz com posto completo. Por consequência, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é matriz positiva definida. Quando igualamos a primeira derivada em (4.7) a zero, obtemos a solução única

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}. \quad (4.8)$$

■

Ao observarmos o resultado obtido na expressão (4.8), podemos apresentar três consequências imediatas da Proposição 4.1: Corolários 4.1, 4.2 e 4.3.

Corolário 4.1. *Sejam $\lambda \geq 0$ e o estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge}$ como na Proposição 4.1 e obtido na expressão (4.8). Então, quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge}$ tende ao estimador obtido pelo Método dos Mínimos Quadrados.*

Prova: Pela expressão (4.6), sabemos que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}. \quad (4.9)$$

A expressão em (4.9), obtida para $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge}$, coincide com a expressão do estimador do Método dos Mínimos Quadrados. ■

Corolário 4.2. *Sejam $\lambda \geq 0$ e o estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge}$ como na Proposição 4.1 e obtido na expressão (4.8). Então, quando $\lambda \rightarrow +\infty$, temos que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} \rightarrow 0$.*

Prova: Pela expressão (4.6), sabemos que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Quando $\lambda \rightarrow +\infty$, temos

que o termo $(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}$ tende à matriz nula. Dessa forma, segue o resultado. ■

Corolário 4.3. *Sejam $\lambda > 0$ e o estimador $\hat{\beta}^{ridge}$ como na Proposição 4.1 e obtido na expressão (4.8). O estimador $\hat{\beta}^{ridge}$ é viciado.*

Prova: Seja $\hat{\beta}^{ridge}$ como na expressão (4.8), segue que

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}^{ridge} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= [\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}] \\
 &= (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\beta}^{mq} \\
 &= (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\beta}^{mq}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Na segunda linha da expressão (4.10) foi inserida a matriz identidade através da expressão $\mathbf{I} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Na terceira linha da expressão (4.10) foram reescritos alguns dos termos $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. Na quarta linha usou-se uma propriedade de produto de matrizes inversas e a expressão para o estimador dos Mínimos Quadrados como usado em (4.9). Na última linha da expressão (4.10) temos que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{I}$.

Aplicando a esperança matemática na última linha da expressão (4.10), segue

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\beta}^{ridge}) &= \mathbb{E}((\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\beta}^{mq}) \\
 &= (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbb{E}(\hat{\beta}^{mq}) \\
 &= (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\beta}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Na expressão (4.11) usamos o fato que o estimador $\hat{\beta}^{mq}$, obtido pelo método dos mínimos quadrados, é não-viciado. Ou seja, $\mathbb{E}(\hat{\beta}^{mq}) = \hat{\beta}$.

Usando o resultado obtido na expressão (4.11) e a hipótese de $\lambda > 0$, temos como consequência que $\mathbb{E}(\hat{\beta}^{ridge}) \neq \hat{\beta}$. Ou seja, o estimador $\hat{\beta}^{ridge}$ é viciado. ■

4.2 Regressão Lasso

A regressão *lasso* é um método *shrinkage* como a regressão *ridge*. A principal diferença está na forma em que a penalidade é imposta ao modelo. Os coeficientes *lasso* são àqueles que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos penalizada, de forma que

$$\hat{\beta}^{lasso} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 + \lambda \sum_{k=1}^p |\beta_k| \right\}, \tag{4.12}$$

onde $\lambda \geq 0$ é o parâmetro de complexidade que controla o processo de *shrinkage*.

Quanto maior o valor de λ , mais coeficientes são forçados à contração para zero.

Uma forma equivalente de se escrever o problema dado em (4.12) é dada por

$$\hat{\beta}^{lasso} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 \right\},$$

sujeito a $\sum_{k=1}^p |\beta_k| \leq w.$ (4.13)

A expressão (4.13) deixa explícito a restrição no tamanho do parâmetro β pois corresponde à restrição no valor da norma l_1 de β .

Observação 4.4. Se compararmos as expressões (4.12) e (4.13), temos que existe uma correspondência biunívoca entre λ e w . As soluções obtidas para as expressões (4.12) e (4.13) não são invariantes à escala de medida das variáveis envolvidas, então é necessário padronizar os valores antes de resolver o problema de minimização.

Observação 4.5. O intercepto β_0 não aparece no termo de penalização. Este fato ocorre porque ao adicionar uma constante qualquer para cada y_{it} nem sempre resulta em um simples acréscimo ou decréscimo nas previsões do valor desta mesma constante.

Observação 4.6. Note a similaridade entre (4.3) e (4.12). A penalidade $\sum_{k=1}^p \beta_k^2$ (regressão *ridge*) é substituída pela penalidade $\sum_{k=1}^p |\beta_k|$ (regressão *lasso*). Esta alteração torna a busca do estimador $\hat{\beta}^{lasso}$ um problema não-linear. Não há expressão fechada para o cálculo deste estimador como obtida anteriormente para a regressão *ridge*.

4.3 Regressão Elastic-Net

A regressão *elastic-net* (ou regressão *e-net*) é um método *shrinkage* como a regressão *ridge* e a regressão *lasso*. A penalidade na regressão *elastic-net* combina as penalidades usadas na regressão *ridge* e na regressão *lasso*. Os coeficientes *e-net* são aqueles que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos penalizada, de forma que

$$\hat{\beta}^{e-net} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 + \lambda_1 \sum_{k=1}^p \beta_k^2 + \lambda_2 \sum_{k=1}^p |\beta_k| \right\}, \quad (4.14)$$

onde $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$ são os parâmetros de complexidade que controlam o processo de *shrinkage*.

Quanto maiores os valores de λ_1 e λ_2 , mais coeficientes são forçados à contração para zero.

Uma forma equivalente de se escrever o problema dado em (4.12) é dada por

$$\hat{\beta}^{e-net} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \beta_0 - \sum_{k=1}^p x_{it}^{(k)} \beta_k \right)^2 + \lambda P_{\alpha}(\beta) \right\},$$

onde $P_{\alpha^*}(\beta) = (1 - \alpha^*) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \beta_k^2 + \alpha^* \sum_{k=1}^p |\beta_k|.$ (4.15)

Comparando as expressões (4.14) e (4.15), temos que $\lambda_1 = \lambda \frac{1}{2} (1 - \alpha^*)$ e $\lambda_2 = \lambda \alpha^*$.

Na expressão (4.15), o termo $P_{\alpha^*}(\beta)$ é a penalidade *elastic-net* e corresponde a um ajuste entre a regressão *ridge* (quando $\alpha^* = 0$) e a regressão *lasso* (quando $\alpha^* = 1$).

Segundo Friedman et al. (2010), quando usamos $\alpha^* = 1 - \epsilon$, para $\epsilon > 0$ muito pequeno, a

regressão *elastic-net* tem performance muito semelhante à regressão *lasso*.

Observação 4.7. Os métodos *Shrinkage* (*ridge*, *lasso* e *elastic-net*) foram feitos para resolver problemas de multicolinearidade em regressões com muitas variáveis e tipicamente quando temos mais variáveis do que observações.

Mais informações sobre os métodos de regressão *ridge*, *lasso* e *elastic-net* podem ser encontradas em [Friedman et al. \(2010\)](#), [Goeman \(2010\)](#) e [Hastie et al. \(2009\)](#).

4.4 Estudo de Simulação

Os estudos de simulação foram desenvolvidos usando os pacotes *penalized* e *glmnet* do programa *R* e a função *larFORTRAN*. Os pacotes *penalized* e *glmnet* fornecem algoritmos para estimar o ajuste para os modelos de Regressão Linear, Logística, Multinomial, Poisson e Cox com penalidade convexa. A rotina *larFORTRAN* foi desenvolvida e cedida por T.S. Prass para uso neste capítulo.

As simulações usando o pacote *penalized* apresentaram resultados análogos aos obtidos pelo pacote *glmnet*. Por esta razão, não estão apresentadas neste trabalho.

Observação 4.8. O pacote *glmnet* é computacionalmente mais amigável e fácil de ser utilizado do que o pacote *penalized*.

Como apresentado no Capítulo 2 e Seção 2.1, o Modelo de Regressão Linear (ver Definição 2.1) usa o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}_{it} = (x_{it}^{(0)}, x_{it}^{(1)}, \dots, x_{it}^{(p)})' = (1, x_{it}^{(1)}, \dots, x_{it}^{(p)})'$ para prever a variável aleatória Y_{it} associada a (i, t) -ésima observação y_{it} , com $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, $k \in \{0, \dots, p\}$ onde p é a quantidade de variáveis explicativas.

Temos os seguintes casos de penalidade:

- (i) $\alpha^* = 0$ para penalidade *ridge*;
- (ii) $\alpha^* = 1$ para penalidade *lasso*;
- (iii) $0 < \alpha^* < 1$ para a penalidade *elastic-net*.

A notação L_1 (analogia a λ_1) também é usada para representar a penalidade *lasso* e a notação L_2 (analogia a λ_2) é usada para representar a penalidade *ridge*. Neste contexto, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda \alpha^*; \\ L_2 &= \frac{1}{2} \lambda (1 - \alpha^*). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Serão apresentadas, na sequência, subseções com simulações envolvendo o uso do ajuste linear e das penalidades *ridge* ($L_1 = 0$), *lasso* ($L_2 = 0$) e *elastic-net* ($L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$).

4.4.1 Ruídos Usados nas Simulações

Para os estudos de simulações apresentados nas seções a seguir, utilizamos os ruídos ϵ_t com as seguintes distribuições:

- (i) Distribuição Normal Padrão, denotada por $\mathcal{N}(0, 1)$.
- (ii) Distribuição t -Student com três graus de liberdade, denotada por t_3 .
- (iii) Processo Auto-Regressivo Fracionário Integrado de Média Móvel, denotado pela expressão ARFIMA(0,d,0), com $d \in \{-0.5, 0.5\}$ que definimos a seguir:

Definição 4.1. (Processo Auto-Regressivo Fracionário Integrado de Média Móvel). Dizemos que um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo auto-regressivo fracionário integrado de média móvel, denotado por ARFIMA(p, d, q), com $d \in \{-0.5, 0.5\}$, se for estacionário e satisfazer a expressão

$$\phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d Z_t = \theta(\mathcal{B})\epsilon_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (4.17)$$

onde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco, $\phi(\mathcal{B})$ e $\theta(\mathcal{B})$ são polinômios em \mathcal{B} de graus p e q , respectivamente, onde \mathcal{B} é o operador defasagem dado por $\mathcal{B}^k(X_t) = X_{t-k}$, para $k \in \mathbb{N}$.

Na expressão (4.17) da Definição 4.1, o termo $(1 - \mathcal{B})^d$ é o operador diferença fracionária, definido como

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{B})^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k \\ &= 1 - d\mathcal{B} + \frac{1}{2!}d(d-1)\mathcal{B}^2 - \frac{1}{3!}d(d-1)(d-2)\mathcal{B}^3 + \dots \end{aligned}$$

Observação 4.9. Hosking (1981) demonstra que o processo ARFIMA(p, d, q), dado na expressão (4.17) da Definição 4.1, é

- estacionário se $d < 1/2$ e todas as raízes de $\phi(\mathcal{B}) = 0$ estiverem fora do círculo unitário;
- invertível se $d > -1/2$ e todas as raízes de $\theta(\mathcal{B}) = 0$ estiverem fora do círculo unitário.

Hosking (1981) também mostra que se $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado na expressão (4.17) da Definição 4.1, for estacionário e invertível, então

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{2d} f(\lambda)$ existe e é finito, onde $f(\lambda)$ é a função densidade espectral de $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{1-2d} \rho_k$ existe e é finito, onde ρ_k é a função de autocorrelação.

Exemplo 4.1. O caso mais simples de processo ARFIMA(p, d, q) é o ruído branco fracionário, ou seja, um ARFIMA(0,d,0), dado por

$$(1 - \mathcal{B})^d Z_t = \epsilon_t.$$

◆

Mais informações sobre o processo ARFIMA(0,d,0) podem ser encontradas em Brockwell e Davis (1991), Hamilton (1994), Lopes et al. (2002), Lopes et al. (2004) e Morettin e Tolo (2004). Informações sobre resíduos correlacionados podem ser encontradas em Haring e Blozis (2014).

- (iv) Distribuição α -estável, denotada por $\mathcal{S}_\alpha(1, 0, 0)$, que definimos a seguir:

Definição 4.2. (Distribuição α -estável). Dizemos que uma variável aleatória X possui distribuição α -estável se dado as variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas

X_1, \dots, X_n , existe uma constante C_n e um número real D_n tal que a seguinte relação é válida:

$$X_1 + \dots + X_n = C_n X + D_n, \quad (4.18)$$

onde $C_n = n^{1/\alpha}$ determina a propriedade de estabilidade.

A distribuição α -estável não possui, em geral, expressão fechada para as funções de distribuição e de densidade de probabilidade. Somente em três casos as funções de distribuição e de densidade de probabilidade possuem expressões conhecidas

- $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$ corresponde à distribuição de Levy;
- $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ corresponde à distribuição de Cauchy;
- $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ corresponde à distribuição Normal.

Observação 4.10. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição α -estável com $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $1 \leq \beta \leq 1$, e $\delta \in \mathbb{R}$ então a função característica de X é dada por

$$\mathbb{E}(\exp(itX)) = \begin{cases} \exp(i\delta t - |\sigma t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2))) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \exp(i\delta t - \sigma|t| (1 - i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \ln|t|)) & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

onde

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Denota-se $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \delta)$ e seus parâmetros são

- α é o parâmetro de estabilidade ou parâmetro de forma e é ele quem define o calibre da cauda da distribuição, $\alpha \in (0, 2)$,
- β é o parâmetro de assimetria, $\beta \in [-1, 1]$,
- σ é o parâmetro de escala, $\sigma \in (0, +\infty)$,
- δ é o parâmetro de localização, $\delta \in (-\infty, +\infty)$.

Mais informações sobre a distribuição α -estável podem ser encontradas em [Nolan \(2015\)](#), [Achcar et al. \(2013\)](#), [Crato et al. \(2011\)](#), [Samorodnitsky e Taqqu \(1994\)](#) e [Zolotarev \(1986\)](#). Resíduos com distribuição α -estável podem ser encontrados em [Hochreiter et al. \(2005\)](#).

4.4.2 Medidas de Desempenho e Signal-Noise-Ratio - SNR

As definições dos erros médios calculados nas seções a seguir, são dadas por

(i) *erro médio (bias)*: $\text{bias} = \frac{1}{re} \sum_{r=1}^{re} (\hat{y}_{n_1+h}^{(r)} - y_{n_1+h}^{(r)})$,

(ii) *erro quadrático médio (mse, mean squared error)*: $\text{mse} = \frac{1}{re} \sum_{r=1}^{re} (\hat{y}_{n_1+h}^{(r)} - y_{n_1+h}^{(r)})^2$,

(iii) *erro absoluto médio (mae, mean absolute error)*: $\text{mae} = \frac{1}{re} \sum_{r=1}^{re} |\hat{y}_{n_1+h}^{(r)} - y_{n_1+h}^{(r)}|$,

(iv) *erro percentual absoluto médio (mape, mean absolute percentage error)*:

$$\text{mape} = \frac{1}{re} \sum_{r=1}^{re} \left| \frac{\hat{y}_{n_1+h}^{(r)} - y_{n_1+h}^{(r)}}{\hat{y}_{n_1+h}^{(r)}} \right|$$

onde $\hat{y}_{n_1+h}^{(r)}$ denota o valor predito \hat{y}_{n_1+h} , $y_{n_1+h}^{(r)}$ denota o valor observado y_{n_1+h} , para a r -ésima replicação, $r \in \{1, \dots, re\}$, $h \in \{1, \dots, m\}$ e re o número de replicações.

Para cada modelo serão analisadas situações distintas para o SNR (*signal-noise-ratio*), que é definido por

$$SNR = 20 \log \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_\epsilon} \right), \quad (4.19)$$

onde $\log(\cdot)$ corresponde à função logaritmo na base dez, σ_ϵ corresponde ao desvio-padrão do ruído e σ_s corresponde ao desvio-padrão do sinal.

4.4.3 Modelos Usados nas Simulações

Os modelos usados nas simulações, denotados por Ml , com $l \in \{1, \dots, 14\}$ são dados por

(i) Modelo M1:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, \dots, 8\}$.

(ii) Modelo M2:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com 3 graus de liberdade, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(iii) Modelo M3:

- $\epsilon_i \sim t_3$, t -Student com 3 graus de liberdade, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(iv) Modelo M4:

- $\epsilon_i \sim t_3$, t -Student com 3 graus de liberdade, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{1, \dots, 8\}$.

(v) Modelo M5:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(vi) Modelo M6:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(vii) Modelo M7:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2, 3\}$, e $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{4, \dots, 8\}$.

(viii) Modelo M8:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{1, 2, 3\}$, e com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{4, \dots, 8\}$.

(ix) Modelo M9:

- $\epsilon_i \sim t_3$, t -Student com 3 graus de liberdade, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X_p \sim \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{1, 2, 3\}$, e $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{4, \dots, 8\}$.

(x) Modelo M10:

- $\epsilon_i \sim t_3$, t -Student com 3 graus de liberdade, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{1, 2, 3\}$, e $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com 3 graus de liberdade, para $k \in \{4, \dots, 8\}$.

(xi) Modelo M11:

- $\epsilon_i \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$, $d \in \{0.2, 0.4\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(xii) Modelo M12:

- $\epsilon_i \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$, $d \in \{0.2, 0.4\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com 3 graus de liberdade, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(xiii) Modelo M13:

- $\epsilon_i \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$, $d \in \{0.2, 0.4\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(xiv) Modelo M14:

- $\epsilon_i \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$, $d \in \{0.2, 0.4\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;

- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$, $X^{(7)} \sim \mathcal{A}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(7)} = A1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X^{(7)} = A2) = 0.6$, e, $X^{(8)} \sim \mathcal{B}$, de forma que, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X^{(8)} = B2) = 0.6$ e $\mathbb{P}(X^{(8)} = B3) = 0.3$.

(xv) Modelo M15:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{S}_\alpha(1, 0, 0)$, distribuição α -estável com $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}$, t -Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{1, \dots, 8\}$.

Observação 4.11. Nas simulações dos dados assumimos o intercepto com valor zero e os modelos foram ajustados com a presença do intercepto visando capturar a sensibilidade para esta questão dos métodos estudados.

4.4.4 Simulações com o Pacote *Glmnet*

Nesta seção, as simulações terão por base o pacote computacional *glmnet* e estão divididas em quatro subseções que envolvem diferentes modelos (ver Seção 4.4.3) e diferentes casos de coeficientes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$, onde p é a quantidade de parâmetros do modelo.

- **Simulação com os Modelos M_l para $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$.**

Nesta seção, as simulações terão por base o pacote computacional *glmnet* e estão divididas em seis modelos e dois casos de coeficientes.

Para as simulações em estudo assume-se que:

- (i) número de observações $n = 3030$, com $n_1 = 3000$ para o ajuste e $m = 30$ para a predição;
- (ii) número de covariáveis $p = 8$;
- (iii) penalidade *ridge*, $\alpha^* = 0$;
- (iv) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;
- (v) penalidade *elastic-net*, $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$;
- (vi) número de replicações $re = 500$.

Descrição dos Modelos:

Apresentamos seis modelos denotados, respectivamente, por Modelo l (M_l) para $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$ (ver Seção 4.4.3). Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)\}$.

Para cada modelo são analisadas cinco situações distintas para SNR (*signal noise ratio*), dado pela expressão (4.19). Para os modelos M_l , $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, em análise, σ_s é o desvio-padrão do sinal que é dado por

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{k=1}^8 \beta_k^2 \text{Var}(X^{(k)})}, \quad (4.20)$$

com $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)\}$ e $\text{Var}(X^{(k)})$ corresponde à variância da variável aleatória $X^{(k)}$, para $k \in \{1, \dots, 8\}$.

Para as simulações são assumidos cinco valores de SNR , ou seja, $SNR \in \{-25, -1, 0, 1, 25\}$.

Com base em (4.19), segue a expressão que

$$\sigma_\epsilon = \frac{\sigma_s}{10^{SNR/20}}. \quad (4.21)$$

O valor para σ_s , obtido pela expressão (4.20), é constante para todos os casos em estudo. Isto ocorre pois para todos os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, são assumidas variáveis aleatórias padronizadas.

Na Tabela 4.1 estão apresentados, para cada um dos modelos M_l , $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, os valores de SNR , σ_s e σ_ϵ . O cálculo foi efetuado com base nas expressões (4.20) e (4.21), com $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$, respectivamente.

Tabela 4.1: Valores utilizados nas simulações para SNR , σ_s e σ_ϵ , com $\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$ e $\beta^{(2)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$.

SNR	$\beta^{(1)}$		$\beta^{(2)}$	
	σ_s	σ_ϵ	σ_s	σ_ϵ
-25	6.2421	111.0036	9.0691	161.2753
-1	6.2421	7.0038	9.0691	10.1758
0	6.2421	6.2421	9.0691	9.0691
1	6.2421	5.5633	9.0691	8.0829
25	6.2421	0.3510	9.0691	0.5099

Resultados das Simulações

Houve, para cada caso, a variação dos valores de $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)\}$ e número de replicações $re = 500$.

Nas Figuras F.1 - F.12 (ver Apêndice F), a escala dos gráficos (b), (c), (d) e (e) é a mesma, diferindo apenas para o caso (a), que devido ao valor do $SNR = -25$, tem-se um caso em que o ruído é mais forte que o sinal (para $SNR = -1$ também tem-se que $\sigma_\epsilon > \sigma_s$) e produz grande oscilação entre os valores preditos e observados.

Pelos gráficos de predição, tem-se que o modelo M9 apresentou as melhores predições para os casos de β e de SNR , aqui estudados. As piores predições foram obtidas pelos modelos M7, M8 e M10. As predições ficam melhores à medida que o valor de α^* aumenta de $\alpha^* = 0$ para $\alpha^* = 1$.

Os valores preditos ficaram abaixo dos observados para os modelos M1, M4 e M10 quando $\beta = \beta^{(2)}$, e para os modelos M1 e M4 quando $\beta = \beta^{(1)}$. Para os demais casos de combinações entre $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$, os valores preditos oscilaram valores acima e abaixo dos valores observados.

O acompanhamento da oscilação dos valores observados, no decorrer do Horizonte (h), pela oscilação dos valores preditos ocorreu de forma semelhante para os modelos M1, M4 e M7 para ambos os valores de β . Para os modelos M8, M9 e M10 este acompanhamento não foi tão semelhante.

Nas Figuras F.13 - F.22 (ver Apêndice F) são apresentados o comportamento da média dos coeficientes preditos (ponto) e os valores verdadeiros (linha tracejada) dos coeficientes para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, para os diferentes valores de SNR e α^* .

Percebe-se que houve maior diferença entre os pontos que indicam os valores médios e as linhas que indicam os valores verdadeiros dos coeficientes para os casos em que $SNR = -25$. Houve

semelhança entre os casos (b) - (e) para cada figura.

Os pontos estão praticamente sobrepostos nas linhas, para os casos em que $\alpha^* = 1$ (ver Figuras F.17 e F.22), nos demais casos, temos a indicação de subestimação para os coeficientes, pois os pontos estão sempre abaixo da linha tracejada, para uma mesma cor.

À medida que α^* aumenta, tem-se uma aproximação mais rápida dos pontos para as linhas tracejadas para $\beta^{(2)}$ do que para $\beta^{(1)}$.

Observando as Tabelas F.1 - F.10 (apenas alguns casos estão apresentados no Apêndice F) e as Figuras F.1 - F.12 (ver Apêndice F), percebe-se que, para ambos os valores de β adotados e para todos os modelos, a situação em que $SNR = -25$ apresenta os piores casos de predição.

Em geral, houve melhor estimação para os coeficientes com valores maiores, $|\beta_k| > 1$, do que para os casos em que os coeficientes são menores, $|\beta_k| < 1$. Ainda, houve subestimação dos coeficientes $\beta_k > 0$ e superestimação dos coeficientes $\beta_k < 0$, para todos os modelos e penalidades.

Para todos os modelos e valores de β , houve melhor estimação nos casos em que a penalidade $\alpha^* = 1$ e a pior estimação quando $\alpha^* = 0$, variando de forma gradativa para os valores de $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$.

Para ambos os casos de β e de penalidade α^* , o modelo M9 apresentou as melhores predições. E, ao se observar por modelo, quando o valor de $\beta^{(1)}$ tem-se os casos de melhores predições ao se comparar com $\beta^{(2)}$.

Em todos os casos de penalidade α^* , de modelos Ml, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, e de SNR , houve para β_1 e β_8 valores para o erro *mape* maiores do que para os demais β_k , com $k \in \{2, \dots, 7\}$. Para $\beta^{(1)}$, temos que β_5 apresenta os valores de *bias* e *mse* foram maiores do que para os demais β_k , com $k \in \{2, 3, 4, 6, 7\}$. Esta característica se suaviza à medida que o valor de SNR aumenta. Para $\beta^{(2)}$, temos que β_2 e β_7 apresentam os maiores valores de *bias* e *mse*.

Ao se comparar todos os modelos, as piores previsões para o intercepto, β_0 , ocorreram para M7 e M9, quando $\alpha^* = 0$ e $SNR = -25$, melhorando gradativamente com o aumento dos valores de α^* e SNR .

Para todos os dois casos de β e todos os casos de α^* , temos que M1 e M4 apresentam as melhores previsões para o intercepto.

A troca da posição das covariáveis, nos modelos M7 e M8, e nos modelos M9 e M10, não causou mudança significativa nos valores estimados para os coeficientes β_k , com $k \in \{1, \dots, 8\}$. Para o modelo M7, os valores de estimados para β_k , com $p \in \{6, 7, 8\}$ são levemente maiores que os valores estimados para M8, para os dois casos de beta e para todos os valores de α^* .

• **Simulação com os Modelos Ml para $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$.**

Nesta seção, as simulações terão por base o pacote computacional *glmnet* e estão divididas em sete modelos e dois casos de coeficientes.

Para as simulações em estudo assume-se que:

(i) número de observações

- $n = 3030$, com $n_1 = 3000$ para o ajuste e $m = 30$ para a predição,
- $n = 50$, com $n_1 = 40$ para o ajuste e $m = 10$ para a predição,
- $n = 110$, com $n_1 = 100$ para o ajuste e $m = 10$ para a predição;

(ii) número de covariáveis $p = 8$, sendo duas covariáveis categóricas, $X^{(7)}$ e $X^{(8)}$;

- (iii) penalidade *ridge*, $\alpha^* = 0$;
- (iv) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;
- (v) penalidade *elastic-net*, $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$;
- (vi) número de replicações $re = 500$.

Descrição dos Modelos

Apresentamos sete modelos denotados, respectivamente, por modelo M_l , com $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$ (ver Seção 4.4.3). Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

São analisadas cinco situações distintas de SNR , ou seja, $SNR \in \{-5, -1, 0, 1, 5\}$ (ver expressão (4.19)).

Para os modelos M_l , $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$, em análise, σ_s é o desvio-padrão do sinal que é dado por

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{k=1}^6 \beta_k^2 \text{Var}(X^{(k)}) + \beta_{7,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(7,2)}}(X^{(7)})) + \beta_{8,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,2)}}(X^{(8)})) + \beta_{7,3}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,3)}}(X^{(8)}))}, \quad (4.22)$$

com $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, onde $\text{Var}(X^{(k)})$ corresponde à variância da variável aleatória $X^{(k)}$, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, e $\text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(k,s)}}(X)^{(k)})$, corresponde à variância da função Indicadora $\mathbb{I}_{(\cdot)}(\cdot)$ para a categoria s da variável aleatória k , com $s \in \{2, 3\}$ e $k \in \{7, 8\}$.

O valor para σ_s , obtido pela expressão (4.22), é constante para todos os casos, pois para todos os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$, foram assumidas variáveis aleatórias padronizadas.

A partir deste valor, pela expressão (4.21), obteve-se σ_ϵ para os respectivos valores de SNR . Estas informações estão apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Valores utilizados nas simulações para SNR , σ_s e σ_ϵ , com $\beta \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

SNR	$\beta^{(1)}$		$\beta^{(2)}$	
	σ_s	σ_n	σ_s	σ_n
-5	9.8000	17.4272	13.4227	23.8694
-1	9.8000	10.9958	13.4227	15.0605
0	9.8000	9.8000	13.4227	13.4227
1	9.8000	8.7342	13.4227	11.9630
5	9.8000	5.5109	13.4227	7.5481

Resultados das Simulações

Houve, para cada modelo, a variação dos valores de $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para os modelos M_l , com $l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, para o caso de $re = 500$.

Para as Figuras F.23 - F.36 (ver Apêndice F), a escala dos gráficos (b), (c), (d) e (e) é a mesma, diferindo apenas para o caso (a), que devido ao valor do $SNR = -5$, tem-se um caso em que o ruído é mais forte que o sinal (para $SNR = -1$ também tem-se que $\sigma_\epsilon > \sigma_s$) e produz maior oscilação entre os valores preditos e observados.

Pelos gráficos de predição, tem-se que o modelo M9 apresentou as melhores predições para os casos de β e de SNR , aqui estudados. As piores predições foram obtidas pelos modelos M3, M5 e M6. As predições ficam melhores à medida que o valor de α^* aumenta de $\alpha^* = 0$ para $\alpha^* = 1$.

Os valores preditos, em módulo, em geral ficaram abaixo dos observados para todos os modelos e para os valores de $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

O acompanhamento da oscilação dos valores observados, no decorrer do Horizonte (h), pela oscilação dos valores preditos ocorreu de forma semelhante para os modelos M1, M4, M5, M6 e M9 para ambos os valores de β . Para os modelos M2 e M3 este acompanhamento não foi tão semelhante.

Percebe-se que houve maior diferença entre os pontos que indicam os valores médios e as linhas que indicam os valores verdadeiros dos coeficientes para os casos em que $SNR = -5$. Houve semelhança entre os casos (b) - (e) para cada figura.

Os pontos estão praticamente sobrepostos nas linhas, para todos os casos de α^* estudados. (ver Figuras F.23 - F.36).

Para os modelos M_l , com $l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$, realizou-se também um estudo de pequenas amostras, com $n_1 \in \{40, 100\}$. Nas Figuras F.37 - F.50 (ver Apêndice F) são apresentados os resultados de predição para $n_1 = 40$ e, nas Figuras F.51 - F.64 (ver Apêndice F), os casos de predição para $n_1 = 100$.

Houve uma grande diferença nos resultados obtidos para predição quando se comparam os casos $n_1 \in \{40, 100\}$ com $n_1 = 3000$. As predições para os casos de pequenas amostras apresentaram grande diferença entre os valores preditos e observados. Não havendo nenhum caso que pudesse ser destacado como melhor.

Observando as Figuras F.23 - F.64 (ver Apêndice F), percebe-se que, para ambos os valores de β adotados e para todos os modelos, a situação em que $SNR = -5$ apresenta os piores casos de predição.

Em geral, houve melhor estimacão para os coeficientes com valores maiores, $|\beta_k| > 1$, do que para os casos em que os coeficientes são menores, $|\beta_k| < 1$. Ainda, houve subestimacão dos coeficientes $\beta_k > 0$ e superestimacão dos coeficientes $\beta_k < 0$, para todos os modelos e penalidades. Houve melhor estimacão para $\beta^{(2)}$ do que para $\beta^{(1)}$ em todos os modelos.

Para todos os modelos e valores de β , houve melhor estimacão nos casos em que a penalidade $\alpha^* = 1$ e a pior estimacão quando $\alpha^* = 0$, variando de forma gradativa para os valores de $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$.

Para $\beta^{(1)}$, com qualquer penalidade α^* , temos que o coeficiente $\beta_{8,3}$ teve sempre os erros mse e $mape$ maiores que dos demais coeficientes. Os modelos M5 e M9 superestimaram o intercepto de forma mais acentuada que os demais modelos.

Nas Tabelas F.11 - F.30 (apenas alguns casos estão apresentados no Apêndice F) estão apresentadas as médias dos coeficientes ajustados e os valores de $bias$, sd , mae , mse e $mape$ para todos os casos estudados. Se acentua a característica dos ajustes não adequados para os casos em que $n_1 \in \{40, 100\}$. Para todos os casos, houve grande diferença entre os coeficientes ajustados e os valores verdadeiros e, em muitos casos, não houve coerência com o sinal do coeficiente.

- **Simulação com os Modelos M_l para $l \in \{11, \dots, 14\}$.**

Nesta seção, as simulações terão por base o pacote computacional *glmnet* e estão divididas em quatro modelos e dois casos de coeficientes.

Para as simulações em estudo assume-se que:

(i) número de observações:

- $n = 3030$, com $n_1 = 3000$ para o ajuste e $m = 30$ para a predição,
- $n = 50$, com $n_1 = 40$ para o ajuste e $m = 10$ para a predição,
- $n = 110$, com $n_1 = 100$ para o ajuste e $m = 10$ para a predição,

(ii) número de covariáveis $p = 8$, sendo duas covariáveis categóricas, $X^{(7)}$ e $X^{(8)}$;

(iii) penalidade *ridge*, $\alpha^* = 0$;

(iv) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;

(v) penalidade *elastic-net*, $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$;

(vi) erros ARFIMA(0,d,0), $d \in \{0.2, 0.4\}$;

(vii) número de replicações $re = 500$.

Descrição dos Modelos

Apresentamos quatro modelos denotados, respectivamente, por modelo MI , com $l \in \{11, \dots, 14\}$ (ver Seção 4.4.3). Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

Para cada modelo são analisadas cinco situações distintas para o SNR (*signal noise ratio*), ou seja, $SNR \in \{-5, -1, 0, 1, 5\}$, que é definido pela expressão (4.19).

Para os modelos MI , $l \in \{11, \dots, 14\}$, em análise, σ_s é o desvio-padrão do sinal que é dado pela expressão:

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{k=1}^6 \beta_k^2 \text{Var}(X^{(k)}) + \beta_{7,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(7,2)}}(X^{(7)})) + \beta_{8,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,2)}}(X^{(8)})) + \beta_{7,3}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,3)}}(X^{(8)}))}, \quad (4.23)$$

com $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, onde $\text{Var}(X^{(k)})$ corresponde à variância da variável aleatória $X^{(k)}$, para $k \in \{1, \dots, 6\}$, e $\text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(k,s)}}(X)^{(k)})$, corresponde à variância da função Indicadora $\mathbb{I}_{(\cdot)}(\cdot)$ para a categoria s da variável aleatória k , com $s \in \{2, 3\}$ e $k \in \{7, 8\}$.

O valor para σ_s , obtido pela expressão (4.23), é constante para todos os casos, pois para todos os modelos MI , com $l \in \{11, \dots, 14\}$, foram assumidas variáveis aleatórias padronizadas.

A partir deste valor, pela expressão (4.21), obteve-se σ_ϵ para os respectivos valores de SNR . Estas informações estão apresentadas na Tabela 4.3.

Resultados das Simulações

Houve, para cada caso, a variação dos valores de $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para os modelos MI , com $l \in \{11, \dots, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, para o caso de $re = 500$. As simulações se basearam em três tamanhos de amostras, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Primeiramente, para $n_1 = 3000$, temos as Figuras F.65 - F.80 (ver Apêndice F). A escala dos gráficos (b), (c), (d) e (e) é a mesma, diferindo apenas para o caso (a), que devido ao valor do $SNR = -5$, tem-se um caso em que o ruído é mais forte que o sinal (para $SNR = -1$ também tem-se que $\sigma_\epsilon > \sigma_s$) e produz maior oscilação entre os valores preditos e observados.

Tabela 4.3: Valores utilizados nas simulações para SNR , σ_s e σ_ϵ , com $\beta \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

SNR	$\beta^{(1)}$		$\beta^{(2)}$	
	σ_s	σ_n	σ_s	σ_n
-5	9.8000	17.4272	13.4227	23.8694
-1	9.8000	10.9958	13.4227	15.0605
0	9.8000	9.8000	13.4227	13.4227
1	9.8000	8.7342	13.4227	11.9630
5	9.8000	5.5109	13.4227	7.5481

Pelos gráficos de predição, tem-se que o modelos M11, M13 e M14 apresentaram as melhores predições para os casos de β e de SNR , aqui estudados. As piores predições foram obtidas pelo modelo M12. As predições ficam melhores à medida que o valor de α^* aumenta de $\alpha^* = 0$ para $\alpha^* = 1$.

Os valores preditos, em módulo, em geral ficaram abaixo dos observados para todos os modelos e para os valores de $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

O acompanhamento da oscilação dos valores observados, no decorrer do Horizonte (h), pela oscilação dos valores preditos ocorreu de forma semelhante para os modelos M11, M13 e M14, para ambos os valores de β . Para os modelo M12 este acompanhamento não foi tão semelhante.

Percebe-se que houve maior diferença entre os pontos que indicam os valores médios e as linhas que indicam os valores verdadeiros dos coeficientes para os casos em que $SNR = -5$. Houve semelhança entre os casos (b) - (e) para cada figura.

Para os modelos M_l , com $l \in \{11, 12, 13, 14\}$, realizou-se também um estudo de pequenas amostras, com $n_1 \in \{40, 100\}$. Nas Figuras F.81 - F.96 (ver Apêndice F) são apresentados os resultados de predição para $n_1 = 40$ e, nas Figuras F.97 - F.112 (ver Apêndice F), os casos de predição para $n_1 = 100$.

Em relação ao parâmetro d do ruído ARFIMA(0, d ,0), os gráficos de predição apresentam um melhor ajuste para os casos em que $d = 0.2$. Entretanto, esta diferença não é significativa para o modelo M12.

Houve grande diferença nos resultados obtidos para predição quando se comparam os casos $n_1 \in \{40, 100\}$ com $n_1 = 3000$. As predições para os casos de pequenas amostras apresentaram grande diferença entre os valores preditos e observados. Não havendo nenhum caso que pudesse ser destacado como melhor.

Observando as Figuras F.65 - F.112 (ver Apêndice F), percebe-se que, para ambos os valores de β adotados e para todos os modelos, a situação em que $SNR = -5$ apresenta os piores casos de predição.

Em geral, houve melhor estimacão para os coeficientes com valores maiores, $|\beta_k| > 1$, do que para os casos em que os coeficientes são menores, $|\beta_k| < 1$. Ainda, houve subestimacão dos coeficientes $\beta_k > 0$ e superestimacão dos coeficientes $\beta_k < 0$, para todos os modelos e penalidades. Houve melhor estimacão para $\beta^{(2)}$ do que para $\beta^{(1)}$ em todos os modelos.

Para todos os modelos e valores de β , houve melhor estimacão nos casos em que a penalidade $\alpha^* = 1$ e a pior estimacão quando $\alpha^* = 0$, variando de forma gradativa para os valores de $\alpha^* \in \{0.2, 0.4, 0.8\}$.

Para $\beta^{(1)}$, com qualquer penalidade α^* , temos que o coeficiente $\beta_{8,3}$ teve sempre os erros mse

e *mape* maiores que dos demais coeficientes. Os modelos M5 e M9 superestimaram o intercepto de forma mais acentuada que os demais modelos.

Nas Tabelas F.31 - F.49 (apenas alguns casos estão apresentados no Apêndice F) estão apresentadas as médias dos coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para todos os casos estudados. Se acentua a característica dos ajustes não adequados para os casos em que $n_1 \in \{40, 100\}$. Para todos os casos, houve grande diferença entre os coeficientes ajustados e os valores verdadeiros e, em muitos casos das pequenas amostras, não houve coerência com o sinal do coeficiente.

Os modelos M11, M13 e M14 não apresentaram predição adequada para o intercepto e para o coeficiente β_1 .

Quando α^* se aproxima do valor 1, para $SNR \in \{1, 5\}$, temos que os valores preditos para os coeficientes quando $d \in \{0.2, 0.4\}$, diferem apenas a partir da segunda casa decimal na maioria dos casos.

• Simulação com os Modelos M_l para $l \in \{12, 14\}$.

Nesta seção, as simulações terão por base o pacote computacional *glmnet* e estão divididas em dois modelos e dois casos de coeficientes.

Para as simulações em estudo assume-se que:

- (i) número de observações $n_1 \in \{200, 300, \dots, 1000\}$ para o ajuste e $m = 10$ para a predição,
- (ii) número de covariáveis $p = 8$, sendo duas covariáveis categóricas, $X^{(7)}$ e $X^{(8)}$;
- (iii) penalidade *ridge*, $\alpha^* = 0$;
- (iv) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;
- (v) penalidade *elastic-net*, $\alpha^* = 0.4$;
- (vi) erros ARFIMA(0,d,0), $d \in \{0.2, 0.4\}$;
- (vii) número de replicações $re = 500$.

Descrição dos Modelos

Apresentamos dois modelos denotados, respectivamente, por modelo M_l , com $l \in \{12, 14\}$ (ver Seção 4.4.3). Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

Para cada modelo serão analisadas cinco situações distintas para o *SNR* (*signal noise ratio*), ou seja, $SNR \in \{-5, -1, 0, 1, 5\}$, que é definido pela expressão (4.19).

Para os modelos M_l , $l \in \{12, 14\}$, em análise, σ_s é o desvio-padrão do sinal que é dado pela expressão (4.24).

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{k=1}^6 \beta_k^2 \text{Var}(X^{(k)}) + \beta_{7,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(7,2)}}(X^{(7)})) + \beta_{8,2}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,2)}}(X^{(8)})) + \beta_{8,3}^2 \text{Var}(\mathbb{I}_{X^{(8,3)}}(X^{(8)}))}, \quad (4.24)$$

com $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, onde $\text{Var}(X^{(k)})$ corresponde à variância da variável aleatória $X^{(k)}$, para $k \in$

$\{1, \dots, 6\}$, e $Var(\mathbb{I}_{X^{(k,s)}}(X)^{(k)})$, corresponde à variância da função Indicadora $\mathbb{I}_{(\cdot)}(\cdot)$ para a categoria s da variável aleatória k , com $s \in \{2, 3\}$ e $k \in \{7, 8\}$.

O valor para σ_s , obtido pela expressão (4.24), é constante para todos os casos, pois para todos os modelos M_l , com $l \in \{12, 14\}$, foram assumidas variáveis aleatórias padronizadas.

A partir deste valor, pela expressão (4.21), obteve-se σ_ϵ para os respectivos valores de SNR . Estas informações estão apresentadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Valores utilizados nas simulações para SNR , σ_s e σ_ϵ , com $\beta \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

SNR	$\beta^{(1)}$		$\beta^{(2)}$	
	σ_s	σ_n	σ_s	σ_n
-5	9.8000	17.4272	13.4227	23.8694
-1	9.8000	10.9958	13.4227	15.0605
0	9.8000	9.8000	13.4227	13.4227
1	9.8000	8.7342	13.4227	11.9630
5	9.8000	5.5109	13.4227	7.5481

Resultados das Simulações

Houve, para cada caso, a variação dos valores de $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para os modelos M_l , com $l \in \{12, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$, para o caso de $re = 500$. Foram simulados tamanho de amostras, $n_1 \in \{200, 300, \dots, 1000\}$.

Primeiramente, observa-se que a medida que n_1 aumenta o ajuste para os modelos M_l , com $l \in \{12, 14\}$ se torna cada vez melhor. Em geral, o modelo M14 apresenta melhor ajuste do que o modelo M12 para o mesmo valor de n_1 e o valor de $d = 0.2$ também apresenta os casos de melhor ajuste quando comparado ao valor $d = 0.4$.

Nas Figuras F.113 - F.184 (ver Apêndice F), a escala dos gráficos (b), (c), (d) e (e) é a mesma, diferindo apenas para o caso (a), que devido ao valor do $SNR = -5$, tem-se um caso em que o ruído é mais forte que o sinal (para $SNR = -1$ também tem-se que $\sigma_\epsilon > \sigma_s$) e produz maior oscilação entre os valores preditos e observados.

Pelos gráficos de predição, tem-se que o modelo M14 apresentaram as melhores predições para os casos de β e de SNR , aqui estudados. As piores predições foram obtidas pelo modelo M12. As predições ficam melhores à medida que o valor de α^* aumenta de $\alpha^* = 0$ para $\alpha^* = 1$.

Os valores preditos, em módulo, em geral ficaram abaixo dos observados para todos os modelos e para os valores de $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

O acompanhamento da oscilação dos valores observados, no decorrer do Horizonte (h), pela oscilação dos valores preditos ocorreu de forma semelhante para os modelos M12 e M14, para ambos os valores de β , a partir de $n_1 = 300$.

Percebe-se que houve maior diferença entre os pontos que indicam os valores médios e as linhas que indicam os valores verdadeiros dos coeficientes para os casos em que $SNR = -5$. Houve semelhança entre os casos (b) - (e) para cada figura.

Em relação ao parâmetro d do ruído ARFIMA(0,d,0), os gráficos de predição apresentam um melhor ajuste para os casos em que $d = 0.2$. Entretanto, esta diferença não é significativa para o modelo M12.

Em geral, houve melhor estimação para os coeficientes com valores maiores, $|\beta_k| > 1$, do que para

os casos em que os coeficientes são menores, $|\beta_k| < 1$. Ainda, houve subestimação dos coeficientes $\beta_k > 0$ e superestimação dos coeficientes $\beta_k < 0$, para todos os modelos e penalidades. Houve melhor estimação para $\beta^{(2)}$ do que para $\beta^{(1)}$ em todos os modelos.

Para todos os modelos e valores de β , houve melhor estimação nos casos em que a penalidade $\alpha^* = 1$ e a pior estimação quando $\alpha^* = 0$, variando de forma gradativa para os valores de $\alpha^* = 0.4$.

Os coeficientes das variáveis categóricas com menor magnitude apresentam maior dificuldade de predição correta, para ambos os modelos, valores de β , de d e de SNR estudados.

Nas Tabelas F.50 - F.68 (apenas alguns casos estão apresentados no Apêndice F) estão apresentadas as médias dos coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para todos os casos estudados.

Quando α^* se aproxima do valor 1, para $SNR \in \{1, 5\}$, temos que os valores preditos para os coeficientes quando $d \in \{0.2, 0.4\}$, diferem apenas a partir da segunda casa decimal na maioria dos casos, para ambos os modelos Ml , com $l \in \{12, 14\}$.

4.4.5 Simulações com o Pacote *Glmnet* e a função *larFORTRAN*

As simulações desenvolvidas nesta seção tem por base o pacote computacional *glmnet* e a função *larFORTRAN* com o uso de dois modelos, um caso de penalidade, um caso de SNR e quatro casos de coeficientes.

O pacote *glmnet* faz o ajuste dos dados usando uma escolha de λ dentro de 100 valores fornecidos por *default* pelo próprio pacote e, também, com base em 100 valores de λ fornecidos ($\lambda \in \{1, 0.01, 0.02, \dots, 1\}$). A função *larFORTRAN* é utilizada para a otimização no cálculo de λ e do coeficiente β , simultaneamente (aqui λ é analisado como uma das variáveis de otimização) com o método *lar* ($r = 1$) e com o método dos Mínimos Quadrados ($r = 2$).

• Simulação com o Modelo M4.

As simulações tem por base o pacote computacional *glmnet* e a função *larFORTRAN* com o uso do modelo M4 (ver Seção 4.4.3), um caso de penalidade, um caso de SNR e quatro casos de coeficientes.

Descrição do Modelo

Para as simulações em estudo assume-se que:

- (i) número de observações $n \in \{530, 3030\}$, com $n_1 \in \{500, 3000\}$ para o ajuste e $m = 30$ para a predição;
- (ii) número de covariáveis $p = 8$;
- (iii) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;
- (iv) $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), \beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9), \beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2), \beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$;
- (v) número de replicações $re = 500$.

O valor assumido para *signal noise ratio* é $SNR = 0$ e, desta forma, temos $\sigma_s = \sigma_n$. Os respectivos valores de σ_s e σ_n obtidos para cada β estão na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Valores de σ_s e σ_n para $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}\}$.

β	$\sigma_s = \sigma_n$
$\beta^{(1)}$	9.8000
$\beta^{(2)}$	6.8252
$\beta^{(3)}$	7.5256
$\beta^{(4)}$	13.4227

Resultados das Simulações

Foram ajustados os dados simulados seguindo os casos:

- (i) *glmnet*: corresponde ao pacote *glmnet* com uso de valores de λ definidos por *default* pelo próprio pacote e ao pacote *glmnet* com uso de um conjunto fixo para os valores de λ , $\lambda \in \{1, 0.01, 0.02, \dots, 1\}$, denotado por um f ;
- (ii) *larFORTRAN*: corresponde ao uso da função *larFORTRAN* com λ livre, uso do método *lar* para $r = 1$ e uso do método de Mínimos Quadrados para $r = 2$. Em ambos os casos tem-se a opção de fixar $\beta_0 = 0$ (denotado por f) ou não.

Os casos de predição se encontram nas Figuras F.185 e F.186 (ver Apêndice F), respectivamente para $n_1 = 500$ e $n_1 = 3000$. Houve melhora da predição para os casos apresentados na Figura F.186 (ver Apêndice F). Para ambas as Figuras F.185 e F.186 (ver Apêndice F) temos que as curvas de valores preditos acompanharam bem a curva de valores observados. Para a Figura F.185 (ver Apêndice F) temos que a curva que mais se afastou da curva de valores preditos foi a curva obtida pelo método *glmnet* com λ definido por *default*. Esta característica continua presente para a Figura F.186 (ver Apêndice F), mas de forma suave.

Nas Tabelas F.69 - F.72 estão apresentados os valores dos coeficientes ajustados para os casos estudados, respectivamente, para $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}\}$.

Para todos os casos, o método *glmnet* com $\lambda \in \{1, 0.01, 0.02, \dots, 1\}$ obteve melhores resultados que o método *glmnet* com λ definido por *default*.

A função *larFORTRAN* com o método *lar* ($r = 1$) apresentou melhores resultados quando β_0 estava fixo no valor zero para $\beta^{(1)}$ e $\beta^{(3)}$ (ver Tabelas F.69 e F.71), para $\beta^{(2)}$ e $\beta^{(4)}$ os melhores resultados ocorreram quando β_0 não estava fixado. Quando usamos a função *larFORTRAN* com o método dos Mínimos Quadrados ($r = 2$), os melhores resultados para $\beta^{(1)}$, $\beta^{(3)}$ e $\beta^{(4)}$ ocorreram para o caso em que β_0 estava fixado em zero (ver Tabelas F.69, F.71 e F.72).

Agora, quando comparamos os métodos entre si, temos para o caso de $\beta^{(1)}$, que a função *larFORTRAN* com o método de Mínimos Quadrados ($r = 2$) apresentou melhores resultados do que o método *glmnet* para oito coeficientes do total de dez coeficientes estimados (ver valores de $\beta_1 - \beta_{8,3}$ para *larFORTRAN* $r2$ e *glmnet* na Tabela F.69). Para o caso de $\beta^{(2)}$ (ver Tabela F.70), temos o mesmo ocorre para nove valores dos dez coeficientes estimados.

Nas Tabelas F.71 e F.72, quando comparamos os resultados obtidos pelo método *glmnet* com a função *larFORTRAN* com método de Mínimos Quadrados ($r = 2$) com β_0 fixado, temos que, na maioria dos casos os melhores ajustes são fornecidos pela função *larFORTRAN*.

Para os quatro casos de coeficientes estudados, a função *larFORTRAN* com o método *lar* ($r = 1$) apresentou os piores ajustes para os coeficientes associados às variáveis categóricas.

Os valores de λ utilizados nos ajustes encontram-se nas Figuras F.187 e F.188. Percebe-se que em todos os casos houve grande amplitude de valores assumidos para λ quando se utilizou o método

dos Mínimos Quadrados. Sendo que estes valores se tornaram maiores para o caso em que $n_1 = 3000$ do que para o caso em que $n_1 = 500$.

• Simulação com o Modelo M15.

As simulações tem por base o pacote computacional *glmnet* e a função *larFORTRAN* com o uso do modelo M15 (ver Seção 4.4.3), penalidade e *SNR* e quatro casos de coeficientes.

Descrição do Modelo

Para as simulações em estudo assume-se que:

- (i) número de observações $n \in \{530, 3030\}$, com $n_1 \in \{500, 3000\}$ para o ajuste e $m = 30$ para a predição;
- (ii) número de covariáveis $p = 8$;
- (iii) penalidade *lasso*, $\alpha^* = 1$;
- (iv) $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$;
- (v) $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), \beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9), \beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2), \beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$;
- (vi) número de replicações $re = 500$.

Resultados das Simulações

Foram ajustados os dados simulados seguindo com uso da função *larFORTRAN* e do método *lar* com $r = 1$. Houve a opção de fixar $\beta_0 = 0$ (denotado por *f*) ou não.

As Figuras F.189 - F.196 (ver Apêndice F) trazem os gráficos de predição para os casos estudados. Em todos os casos, precebe-se que para $n_1 = 3000$ a previsão ficou melhor do que para $n_1 = 500$. Para os valores de α , temos que os piores casos correspondem a $\alpha = 1.2$, que melhora gradativamente ao passar para os valores $\alpha = 1.8$ e $\alpha = 2$.

As curvas de valores preditos, em geral, acompanharam bem a curva de valores observados. Nos casos em que $\alpha = 1.2$, para $\beta^{(3)}$, a curva de valores preditos não teve a mesma oscilação da curva de valores observados.

Nas Tabelas F.73 - F.76 estão informações a respeito dos valores ajustados para os coeficientes $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$ e $\beta^{(4)}$, respectivamente.

Em todos os casos houve melhores ajustes para $n_1 = 3000$ e para a situação em que $\beta_0 = 0$. Os maiores valores de *mse* e *mape* ocorreram para os coeficientes $\beta_{8,2}$ e $\beta_{8,3}$ independente do α assumido ou se houve a fixação do valor de β_0 .

Os ajustes para os valores de $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$, ficaram muito semelhantes para $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$ e $\beta^{(4)}$. Apenas para $\beta^{(3)}$ (ver Tabela F.75) houve indicativo de que para $\alpha = 1.2$ com β_0 fixo os coeficientes ajustados foram melhores do que nos casos $\alpha \in \{1.8, 2\}$.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE SEQUÊNCIAS DE DNA

Neste capítulo serão apresentados estudos sobre a ocorrência de Ilhas de *CpG* (*ICpG*) e sobre a proteína *p53*.

A proteína *p53* é uma proteína citoplasmática, sintetizada pela própria célula e conhecida por ter a propriedade de ser supressora de tumores.

As mutações somáticas no gene supressor tumoral *p53* são encontradas em aproximadamente grande parte dos tumores humanos, fazendo dele o gene mais comumente alterado. As mutações no gene *p53* ocorrem em mais de 50 tipos diferentes de tumores, incluindo os de mamas, cólon, fígado, pulmão, próstata e pele.

As mutações de *p53* na linhagem germinativa, por exemplo, são responsáveis por uma condição de câncer hereditário conhecido como síndrome de *Li-Fraumeni* (SLF). Esta síndrome é transmitida de modo autossômico dominante e envolve carcinomas da mama e do cólon, sarcomas de tecidos moles e leucemia. Estes tumores geralmente se desenvolvem em idades precoces nos membros de famílias com SLF, e comumente são vistos múltiplos tumores primários numa pessoa afetada.

A metilação é o principal fenômeno epigenético pelo qual um gene é silenciado. Ela se dá pela adição de um grupo metila à citosina presente na estrutura do DNA.

Na maioria dos mamíferos (incluindo o ser humano), dentre todas as bases que formam o DNA somente a citosina pode sofrer metilação. Locais particularmente susceptíveis são os dinucleotídeos *CpG*, bases citosina e guanina adjacentes.

A maioria desses dinucleotídeos estão em pequenas regiões chamadas de Ilhas de *CpG*, que em células normais estão protegidas da adição de metila. Essas Ilhas de *CpG* são encontradas em todos os genes em regiões ativas, os promotores, que são sequências regulatórias presentes no DNA.

Se ocorrer metilação, o promotor é silenciado, interrompendo a transcrição, e conseqüentemente, a expressão gênica.

5.1 Ilhas de *CpG*

O ácido desoxirribonucleico (*deoxyribonucleic acid - DNA*) é um composto orgânico que contém as instruções genéticas que coordenam o desenvolvimento e funcionamento de todos os seres vivos e de alguns vírus. Foi descoberto em 1869, pelo bioquímico suíço Johann Friedrich Miescher, que desenvolveu vários estudos importantes, principalmente no que se refere à hemoglobina. Entretanto, não se conhecia sua estrutura tridimensional e nem como poderia ser sua configuração molecular.

O DNA é responsável por transmitir as características hereditárias de cada ser vivo. O seu

principal papel é armazenar as informações necessárias para a construção das proteínas. Os segmentos de DNA que contêm as instruções genéticas para produzir as proteínas são denominados genes. O restante da sequência de DNA tem importância estrutural ou está envolvido na regulação do uso da informação genética.

A estrutura da molécula de DNA foi descoberta conjuntamente pelo norte-americano James Watson e pelo britânico Francis Crick em 7 de Março de 1953, o que lhes valeu o Prêmio Nobel de Medicina em 1962 (ver Watson e Crick, 1953).

Do ponto de vista químico, o DNA é um longo polímero de unidades simples (monômeros) de nucleotídeos, cuja cadeia principal é formada por moléculas de açúcares e fosfato intercalados unidos por ligações fosfodiéster. Ligada à molécula de açúcar está uma de quatro bases nitrogenadas. Estas bases nitrogenadas são: as pirimidinas compostas por citosina (*C*) e timina (*T*), e as purinas, compostas por adenina (*A*) e guanina (*G*).

A sequência de bases nitrogenadas (*C*, *T*, *A* e *G*) ao longo da molécula de DNA constitui a informação genética. A leitura destas sequências é feita através do código genético nos genes.

Dentro da célula, o DNA pode ser observado numa estrutura chamada cromossomo durante a metáfase. O conjunto de cromossomos de uma célula forma o cariótipo. Eucariontes como animais, plantas, fungos e protozoários têm o seu DNA dentro do núcleo enquanto que procariontes como as bactérias o têm disperso no citoplasma.

A região de incidência de *CpGs* é chamada de ilha *CpG* (denotada aqui por *ICpG*). A definição mais difundida para uma *ICpG* é aquela apresentada por Gardiner-Garden e Frommer (1987). A existência de uma *ICpG* ocorre em uma região com pelo menos 200 pares de bases (*pb*), com proporção de *C + G* maior do que 50% e razão da proporção de *CpG* observado e da proporção de *CpG* esperado acima de 0.6. A proporção de *CpG* observado corresponde a razão entre a frequência do dinucleotídeo *CpG* e o número de pares de bases do intervalo em estudo e a proporção de *CpG* esperado corresponde ao produto entre as razões dos nucleotídeos *C* e *G* e o número de pares de bases do intervalo em estudo (ver expressão (5.1)). A taxa ou índice de ocorrência de *ICpG* será denotada por λ .

A razão λ é obtida dividindo a proporção de dinucleotídeos *CpG* na região pela proporção esperada caso os nucleotídeos fossem assumidos como resultados independentes de uma distribuição multinomial (ver Wu et al., 2010), conforme apresentado na Definição 5.1.

Definição 5.1. (Índice de Ocorrência de *ICpG*). Sejam *N* o número de pares de bases (*pb*), f_i é a frequência da base $i \in \{C, G\}$ e f_D é a frequência do dinucleotídeo *CpG* no segmento de DNA. O índice de ocorrência de *ICpG*, denotado por λ , é dado por

$$\lambda = \frac{f_D/N}{f_C/N \times f_G/N}. \quad (5.1)$$

A metilação do DNA é a modificação caracterizada e reconhecida como um mecanismo de silenciamento. Consiste na adição de um radical metil (CH_3) no carbono 5 da base citosina, geralmente seguida por guanina. Na literatura, o ordenamento dos nucleotídeos *C* e *G*, nesta ordem, é comumente representado por *CpG*.

Observação 5.1. O ordenamento dos nucleotídeos *C* e *G*, comumente denotado neste trabalho por *CpG*, também é denotado por [*CG*] na literatura.

A metilação é um tipo de modificação química que pode ser herdada e subsequentemente removida sem mudar a sequência original do DNA. O índice *m* de metilação em mamíferos está entre

70% e 80% das citosinas em *ICpGs* (ver Antequera e Bird, 1993 e Model et al., 2009).

Segundo Model et al. (2009), as regiões de metilação do DNA podem ser um vasto leque de possibilidades utilizadas para diagnóstico de doenças. Por exemplo, os trabalhos de Hollstein et al. (1991) e Soussi (2011).

Mais informações sobre *ICpG*, DNA e seu sequenciamento podem ser obtidas em Deonier et al. (2000), Durbin et al. (2000), Primrose e Twyman (2003) e Alberts et al. (2008).

5.1.1 Sequências Analisadas

Para as análises consideramos as sequências de DNA em nucleotídeos (pirimidinas: citosina (*C*) e timina (*T*), e purinas: adenina (*A*) e guanina (*G*)), em formato FASTA, de três organismos do banco de dados do Projeto Ensembl obtidas do site <ftp://ftp.ensembl.org>, acesso em 19 abril 2013.

O formato FASTA é um formato baseado em texto para representar as sequências de nucleótidos. Neste formato os nucleotídeos são representados usando códigos de uma única letra (*C*, *T*, *A* e *G*). Tal formato também permite sequências de nomes e comentários precedendo as sequências. O formato se origina do FASTA, pacote de *software*, mas o termo para caracterizar o tipo de arquivo se tornou um padrão na área de bioinformática.

Foram escolhidos o cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento de pão), o cromossomo 22 do *H.sapiens* e o cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta).

As escolhas da mosca da fruta e do fermento de pão foram determinadas pela propriedade de que tais genomas não apresentam metilação (mosca da fruta) ou apresentam forte supressão de metilação (fermento de pão) em dinucleotídeos *CpG*. A característica de metilação em dinucleotídeos *CpG* é observada em grande parte dos organismos tanto procariontes como eucariontes (ver Bird et al., 1995).

As análises foram realizadas através do uso do programa estatístico *R* e do pacote *SeqinR*.

A Figura 5.1 apresenta a composição em nucleotídeos e dinucleotídeos de cada cromossomo em estudo. Em todos os casos pode-se perceber que há menor incidência de nucleotídeos *C* e *G*, sendo que, no caso da *D.melanogaster* (mosca da fruta), esta característica não é tão acentuada. Entretanto, para o caso em que se observam os dinucleotídeos, há evidência de menor incidência de *CpG* nos cromossomos do *S.cerevisiae* (fermento de pão) e do *H.sapiens*.

A Figura 5.2 apresenta a incidência de *CpGs*, representadas por linhas verticais, em um espaço de 10000*pb* de nucleotídeos. Tem-se uma relativa homogeneidade das barras verticais nos cromossomos do *S.cerevisiae* e da *D.melanogaster*, o que não ocorre no intervalo de 10000*pb* do cromossomo do *H.sapiens*.

Assim, já do indicativo da baixa concentração relativa de dinucleotídeos *CpG* nos cromossomos (ver Figura 5.1) procura-se verificar como estes dinucleotídeos estão dispersos nos cromossomos em análise e se chegam a se organizar de forma a caracterizar uma região de *ICpG*. Dessa forma, desejamos identificar os sítios de ocorrência das *CpGs*. Para tal, precisa-se, inicialmente que haja no intervalo de 200*pb* a taxa de pelo menos 50% de nucleotídeos *C* ou *G*, representada por $C + G$, que está apresentada na Figura 5.3.

Com base nas mesmas sequências de 10000*pb* para cada cromossomo em estudo, investigamos a incidência de *ICpG*. Utilizamos a fórmula dada pela expressão (5.1), com $N = 200pb$. A cada 200*pb*, obteve-se a frequência de *C*, *G* e *CpG* e, desta forma, foi calculado o índice λ de ocorrência de *ICpG*. Estas informações estão listadas nas Tabelas 5.1 e 5.2 (cada linha, $n \in$

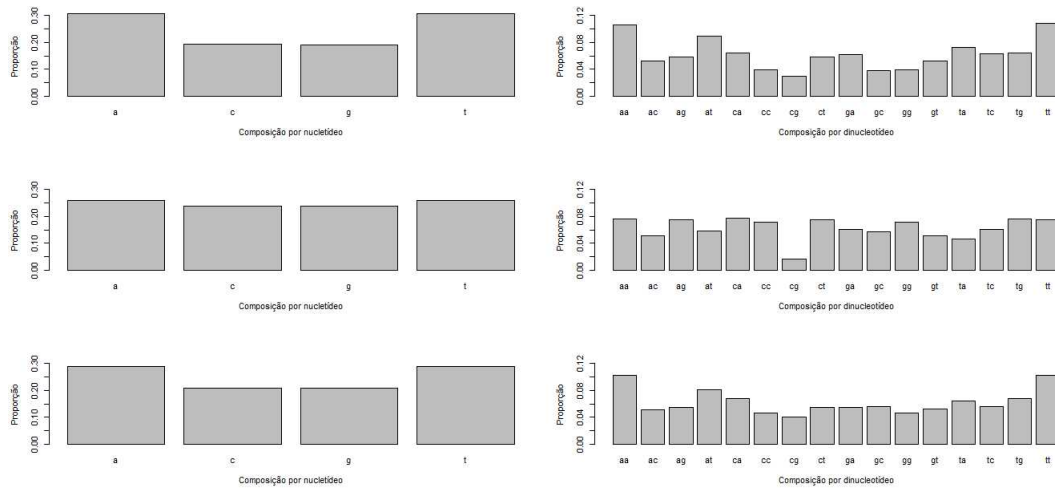


Figura 5.1: Composição dos Cromossomos: cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento de pão, no topo); cromossomo 22 do *H.sapiens* (no centro); cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta, embaixo).

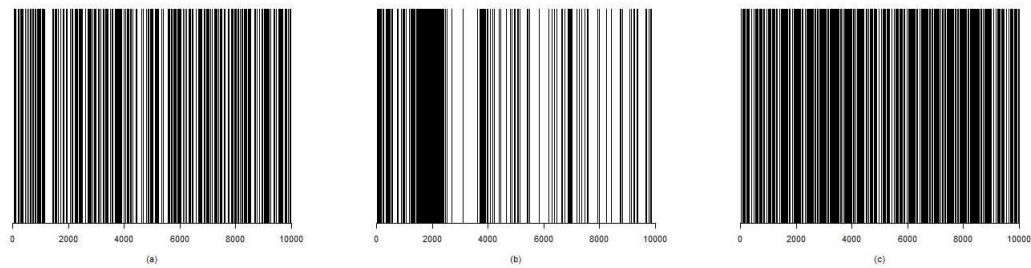


Figura 5.2: Sítios de CpG em intervalo de 10000pb: (a) cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H.sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta).

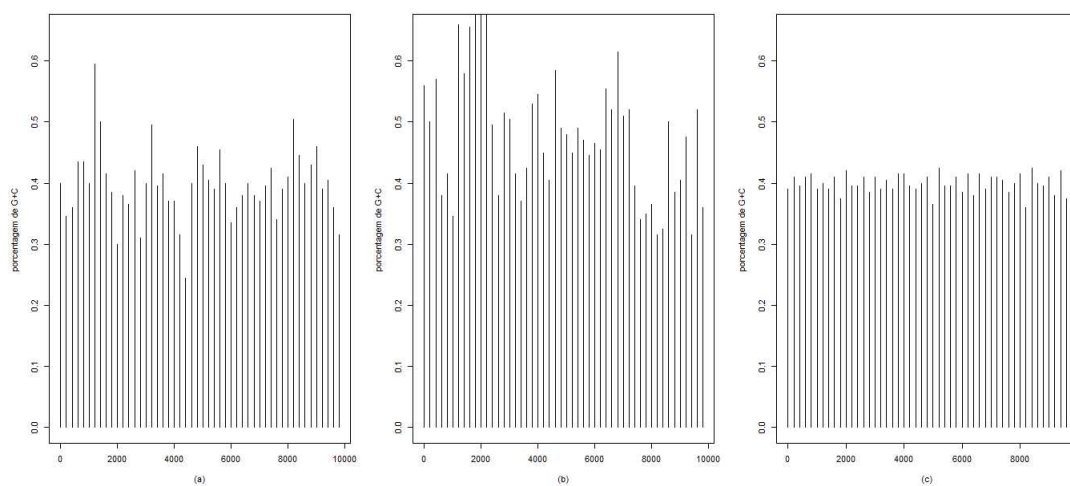


Figura 5.3: Proporção de $C + G$: (a) cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H.sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta).

$\{1, \dots, 25\}$ para a Tabela 5.1 e $n \in \{26, \dots, 50\}$ para a Tabela 5.2, representa uma subsequência $200pb$, $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$ para o cromossomo $j \in \{(a)S.cerevisiae, (b)H.sapiens, (c)D.melanogaster\}$.

As Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam a análise da existência ou não de $ICpG$ para um intervalo total de $10000pb$ divididos em subintervalos de $200pb$ dos três cromossomos em estudo. Sendo que os primeiros $5000pb$ estão apresentados na Tabela 5.1 e os $5000pb$ subsequentes estão na Tabela 5.2.

As informações destacadas, em negrito, para as Tabelas 5.1 e 5.2, trazem locais onde ocorreram, de forma simultânea, a proporção de $C + G$ acima de 50% e o índice λ de ocorrência de $ICpG$ acima de 0.6.

Duas regiões de existência de $ICpG$ ocorreram de forma esparsa para o cromossomo 12 do *S.cerevisiae*, a saber, para $n = 7$ (ver linha 7 da Tabela 5.1) e $n = 42$ (ver linha 42 da Tabela 5.2). Para o cromossomo 22 do *H.sapiens*, ocorreram três regiões de $ICpG$, dadas quando $n = 8$, $n = 10$ e $n = 11$ (ver linhas 8, 10 e 11 da Tabela 5.1). No caso do cromossomo 3L da *D.melanogaster* não houve nenhum indicativo de ocorrência de $ICpG$ no intervalo considerado.

Tabela 5.1: Resultado do índice de ocorrência de $ICpG(\lambda)$: (a) cromossomo 12 do *S.serevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H.sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta) em um intervalo total de $5000pb$ e subintervalos de tamanho $N = 200pb$.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{D(a)}$	$\lambda(a)$	$C + G(a)$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{D(b)}$	$\lambda(b)$	$C + G(b)$	$f_{C(c)}$	$f_{G(c)}$	$f_{D(c)}$	$\lambda(c)$	$C + G(c)$
1	81	13	3	0.570	0.400	52	59	8	0.522	0.555	32	46	10	1.359	0.390
2	57	21	5	0.835	0.350	49	52	6	0.471	0.505	46	36	9	1.087	0.410
3	55	17	5	1.070	0.355	50	63	9	0.571	0.565	36	43	8	1.034	0.395
4	54	40	9	0.833	0.440	43	33	2	0.282	0.380	40	42	10	1.190	0.410
5	66	36	13	1.094	0.435	55	29	6	0.752	0.420	44	39	7	0.816	0.415
6	52	32	4	0.481	0.400	46	23	2	0.378	0.345	38	40	10	1.316	0.390
7	62	29	7	0.779	0.595	92	39	10	0.557	0.655	44	36	9	1.136	0.400
8	44	36	7	0.884	0.500	60	57	12	0.702	0.585	36	42	8	1.058	0.390
9	34	58	3	0.304	0.410	70	61	10	0.468	0.655	44	38	9	1.077	0.410
10	29	67	6	0.618	0.385	76	68	18	0.697	0.720	36	39	8	1.140	0.375
11	35	70	6	0.490	0.300	82	69	19	0.672	0.755	42	42	8	0.907	0.420
12	56	42	6	0.510	0.380	79	86	20	0.589	0.825	38	41	8	1.027	0.395
13	59	34	7	0.698	0.365	37	62	4	0.349	0.495	40	39	11	1.410	0.395
14	57	28	6	0.752	0.425	37	39	1	0.139	0.380	45	37	7	0.841	0.410
15	46	40	5	0.543	0.305	60	43	0	0.000	0.515	40	37	9	1.216	0.385
16	61	43	12	0.915	0.400	55	46	1	0.079	0.505	44	38	7	0.837	0.410
17	50	34	6	0.706	0.500	48	35	0	0.000	0.415	32	46	10	1.359	0.390
18	54	46	10	0.805	0.390	30	45	0	0.000	0.375	46	35	9	1.118	0.405
19	51	46	12	1.023	0.415	42	43	7	0.775	0.425	35	43	7	0.930	0.390
20	47	48	18	1.596	0.370	51	54	6	0.436	0.525	40	43	11	1.279	0.415
21	46	38	9	1.030	0.370	63	46	2	0.138	0.545	45	38	7	0.819	0.415
22	46	45	9	0.870	0.315	49	42	3	0.292	0.455	38	41	10	1.284	0.395
23	37	40	8	1.081	0.245	41	39	1	0.125	0.400	43	35	8	1.063	0.390
24	45	36	10	1.235	0.405	69	48	2	0.121	0.585	37	43	9	1.131	0.400
25	33	31	3	0.587	0.455	58	40	3	0.259	0.490	44	38	9	1.077	0.410

Nota: cada linha $n \in \{1, \dots, 25\}$ representa uma subsequência $200pb$, $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$ para o cromossomo $j \in \{(a)S.cerevisiae, (b)H.sapiens, (c)D.melanogaster\}$.

Tabela 5.2: Resultado do índice de ocorrência de $ICpG(\lambda)$: (a) cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H.sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta) em um intervalo total de 5000pb e subintervalos de tamanho $N = 200pb$.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{D(a)}$	$\lambda(a)$	$C + G(a)$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{D(b)}$	$\lambda(b)$	$C + G(b)$	$f_{C(c)}$	$f_{G(c)}$	$f_{D(c)}$	$\lambda(c)$	$C + G(c)$
26	41	39	8	1.001	0.435	51	45	4	0.349	0.480	35	38	7	1.053	0.365
27	49	38	13	1.396	0.400	48	43	1	0.097	0.455	43	42	9	0.997	0.425
28	52	30	8	1.026	0.395	65	32	2	0.192	0.485	38	41	8	1.027	0.395
29	77	16	4	0.649	0.450	48	47	0	0.000	0.475	40	39	11	1.410	0.395
30	62	21	4	0.614	0.400	36	53	1	0.105	0.445	45	37	7	0.841	0.410
31	50	14	5	1.429	0.340	45	47	1	0.095	0.460	39	38	9	1.215	0.385
32	57	37	10	0.948	0.360	53	38	2	0.199	0.455	45	38	8	0.936	0.415
33	60	42	12	0.952	0.375	43	68	1	0.068	0.555	31	45	10	1.434	0.380
34	62	27	7	0.836	0.405	55	50	3	0.218	0.525	47	36	9	1.064	0.415
35	56	31	6	0.691	0.380	70	52	10	0.549	0.610	35	43	7	0.930	0.390
36	44	40	5	0.568	0.365	49	53	1	0.077	0.510	39	43	11	1.312	0.410
37	42	50	5	0.476	0.400	56	48	3	0.223	0.520	45	37	6	0.721	0.410
38	31	72	7	0.627	0.425	41	38	3	0.385	0.395	39	42	11	1.343	0.405
39	40	59	5	0.424	0.335	31	37	0	0.000	0.340	43	34	8	1.094	0.385
40	59	39	5	0.435	0.395	41	29	1	0.168	0.350	36	44	9	1.136	0.400
41	53	29	6	0.781	0.410	33	40	1	0.152	0.365	45	38	9	1.053	0.415
42	61	34	8	0.771	0.505	25	39	1	0.205	0.320	34	38	7	1.084	0.360
43	49	44	8	0.742	0.440	32	32	2	0.391	0.320	43	42	10	1.107	0.425
44	52	41	8	0.750	0.400	49	51	3	0.240	0.500	39	41	8	1.001	0.400
45	57	33	8	0.851	0.435	32	45	1	0.139	0.385	40	39	11	1.410	0.395
46	50	51	8	0.627	0.460	40	41	2	0.244	0.405	45	37	7	0.841	0.410
47	53	46	14	1.148	0.390	38	58	5	0.454	0.480	38	38	9	1.247	0.380
48	48	40	15	1.563	0.405	27	36	0	0.000	0.315	46	38	8	0.915	0.420
49	43	41	7	0.794	0.355	47	57	3	0.224	0.520	31	44	10	1.466	0.375
50	42	45	11	1.164	0.320	32	40	2	0.313	0.360	46	37	9	1.058	0.415

Nota: cada linha $n \in \{26, \dots, 50\}$ representa uma subsequência 200pb, $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$ para o cromossomo $j \in \{(a)S.cerevisiae, (b)H.sapiens, (c)D.melanogaster\}$.

5.1.2 Estudo de Simulação

Para os estudos de simulação de Monte Carlo das sequências de DNA utilizamos programa estatístico *R* e um modelo baseado na distribuição Multinomial (ver Definição 5.2).

Definição 5.2. (Distribuição Multinomial). Sejam N repetições independentes de um experimento com k possíveis categorias ou resultados, por simplicidade, denotados como $\{1, \dots, k\}$. Seja p_i a probabilidade de ocorrer o resultado i , para $i \in \{1, \dots, k\}$ e $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Sejam as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_k que correspondem ao número de ocorrências x_i de cada um dos possíveis resultados dessas repetições. O vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ segue o modelo de *distribuição Multinomial* com função de probabilidade conjunta dada por

$$p_{\mathbf{X}}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{N!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \quad (5.2)$$

com $\sum_{i=1}^k x_i = N$, $x_i \in \mathbb{N}$ e $0 \leq x_i < N$.

A distribuição Multinomial não é um membro da família de distribuição exponencial e corresponde a generalização natural da distribuição Binomial. Mais detalhes sobre a distribuição Multinomial podem ser encontrados em Rohatgi e Saleh (2001) e Forbes et al. (2011).

No contexto da Definição 5.2, cada ensaio simulado possui cinco possíveis resultados, $k = 5$, sendo eles os quatro nucleotídeos C , A , T e G e um quinto elemento, $C_m pG$, representando a ocorrência de citosina metilada em um dinucleotídeo CpG . Cada subsequência obtida é um experimento de $N = 200$ ensaios.

As probabilidades de ocorrência de cada nucleotídeo são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} p_C &= r(1 - m)/2, \\ p_A &= (1 - r)/2, \\ p_T &= (1 - r)/2, \\ p_G &= (1 - m)r/2 \quad \text{e} \\ p_{C_m pG} &= rm, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde m representa o índice de metilação, r indica a taxa de $C + G$ e ambos os valores são dados em porcentagens.

Foram simuladas sequências com $N = 200pb$, com índice m de metilação, para $m \in \{0.5, 0.7, 0.8\}$, e com índice r de $C + G$, para $r \in \{0.5, 0.6, 0.7\}$. Tais simulações, e respectivas sequências, são representadas na Figura 5.4.

A Figura 5.4 representa a simulação de sequências de nucleotídeos com $m = 0.5$ para o gráfico (a), $m = 0.7$ para o gráfico (b) e $m = 0.8$ para o gráfico (c). Em todos os gráficos são apresentados três valores para a taxa de $C + G$: $r = 0.5$ (embaixo), $r = 0.6$ (centro) e $r = 0.7$ (topo). As Figuras 5.4(a) e 5.4(c) mostram que o aumento de r de 0.5 para 0.7 resulta em aumento ou estabilidade da ocorrência de CpG não metilada. Para a Figura 5.4(c) houve a diminuição da ocorrência de CpG quando comparada com as sequências do centro ($r = 0.6$) e topo ($r = 0.7$).

A Tabela 5.3 apresenta o índice λ de ocorrência de $ICpG$, dado pela expressão (5.1), para cada caso apresentado na Figura 5.4. Em todos os casos, o valor obtido ficou acima de 0.6 evidenciando que as sequências simuladas correspondem a regiões de $ICpG$.

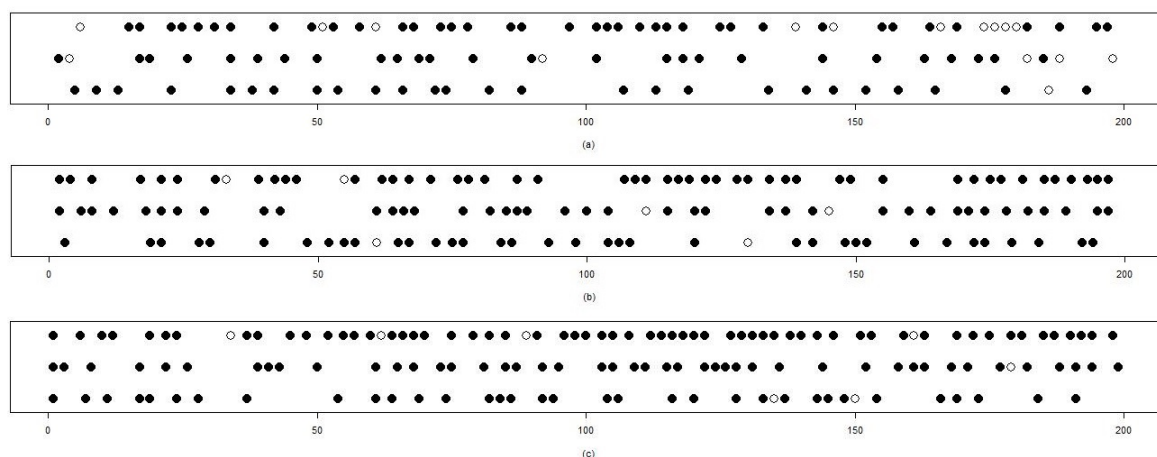


Figura 5.4: Ocorrências de CpG em intervalo de $200pb$: (a) $m = 0.5$; (b) $m = 0.7$; (c) $m = 0.8$. Cada gráfico apresenta $r = 0.7$ (topo), $r = 0.6$ (centro) e $r = 0.5$ (embaixo). CpG é representada por \circ , $C_{mp}G$ é representada por \bullet .

Tabela 5.3: Resultados do índice λ de ocorrência de $ICpG$, para cada um dos casos simulados.

$m \setminus r$	$r = 0.5$	$r = 0.6$	$r = 0.7$
$m = 0.5$	6.109	3.726	3.654
$m = 0.7$	7.650	11.728	7.650
$m = 0.8$	15.652	19.287	11.532

5.2 Proteína p53

O Projeto Genoma Humano, um esforço internacional de pesquisa concluído em 2003, determinou a sequência de pares de bases para cada cromossomo humano. Esta informação permite aos pesquisadores fornecer um endereço específico da localização citogenética para muitos genes em termos de pares de bases.

Na maioria dos casos, a localização descreve a posição de uma banda particular de um cromossomo sob ação de corante, como por exemplo: 17q12. Esta combinação de números e letras fornece o “endereço” de um gene em um cromossomo. Este endereço é composto de três partes: o cromossomo, o braço do cromossomo e a posição do gene no braço.

O primeiro número ou letra usados para descrever a localização de um gene representa o cromossomo: os cromossomos 1 a 22 são designados pelo seu número e os cromossomos sexuais são designados por X ou Y. Cada cromossomo é dividido em duas seções que são ditos os braços, com base na localização de um estreitamento (constricção) chamado de centrômero. Por convenção, o braço mais curto é chamado de p (*petit* em francês) e o braço mais comprido é chamado q. O braço do cromossomo é a segunda parte do endereço do gene. Por exemplo, 17q é o braço longo do cromossomo 17 e Xp é o braço curto do cromossomo X.

A posição do gene no braço se baseia em um padrão distinto de bandas claras e escuras que aparecem quando o cromossomo é corado. A posição é normalmente designada por dois dígitos (representando a região e uma banda), que, às vezes, são seguidos por um ponto decimal e um ou mais dígitos adicionais (representando sub-bandas dentro de uma área clara ou escura). O número que indica a posição do gene aumenta com a distância do centrômero.

Por exemplo, 17q12 representa a posição 12 no braço longo do cromossomo 17 e, ainda, 17q12 está mais próximo do centrômero do que a posição 17q13. A Figura 5.5 ilustra uma situação em geral.



Figura 5.5: Representação do cromossomo: p e q indicam os braços curto e longo do cromossomo e as tarjas em preto indicam as bandas.

O gene da proteína *p53* fica localizado no cromossomo 17, mais precisamente, na posição 17p13.1 (aqui entende-se 17 como o número do cromossomo, p indica que é o braço curto dele, 13 é a banda e 1 a sub-banda).

No cromossomo 17, da posição 7 565 097 até a posição 7 590 856, fica localizado o gene da proteína *p53*. Totalizando, assim, 25760 pares de bases. Este gene contém 16 variações descritas consideradas como parte da variabilidade genética da população e não são consideradas mutações. Mais detalhes no site http://www.ensembl.org/Homo_sapiens/Gene/Summary?db=core;g=ENSG00000141510;r=17:7565097-7590856, acesso em 19 abril 2013.

O gene da proteína *p53* é responsável pela descrição da proteína *p53* e encontra-se no núcleo celular. A transcrição da proteína *p53* é feita pelo mRNA, ou seja, em linguagem simples, o mRNA leva para fora do núcleo a informação necessária para ser sintetizada a proteína *p53*. O mRNA da proteína *p53* possui aproximadamente 3000 pares de bases e a proteína *p53* possui 394 aminoácidos, o que equivale a 1182 nucleotídeos.

São decodificadas 9 isoformas da proteína *p53* a partir do gene *p53*. Estas 9 isoformas são nominadas seguindo o alfabeto grego e a proteína apresentada como padrão é denominada *p53alpha*. Estas 9 isoformas da proteína *p53* são correspondentes à configuração da proteína *p53* para uma pessoa sadia e estão disponíveis em no endereço <http://www.ibibiobase.com/projects/p53/p53/isoforms.htm>, acesso em 19 abril 2013.

5.2.1 Análise da Proteína *p53alpha*

A sequência em formato fasta da proteína *p53* (*p53alpha*) foi obtida do site <http://www.ibibiobase.com/projects/p53/p53/dna-sequence.htm>, acesso em 19 abril 2013, mas está disponível em vários outros sites, como por exemplo: o site <http://p53.free.fr/>, acesso em 19 abril 2013, e o site do IARC, <http://www.iarc.fr/>, acesso em 19 abril 2013.

A Figura 5.6 apresenta a composição em nucleotídeos e dinucleotídeos da proteína *p53*. Individualmente, há maior incidência de nucleotídeos *C* e *G*, sendo que, para o caso em que se observam os dinucleotídeos, ver Figura 5.6(b), há evidência de baixa incidência de *CpG* na proteína.

Soussi e Bérout (2003) e Soussi e Wiman (2007) apresentam locais em que há propensão às mutações na proteína *p53*. Tais locais são chamados de *hotspots*, e são os códons 175, 245, 248, 249, 273 e 282.

Na Figura 5.7, estão apresentados os locais de ocorrência de *CpGs* para a proteína *p53alpha*, e

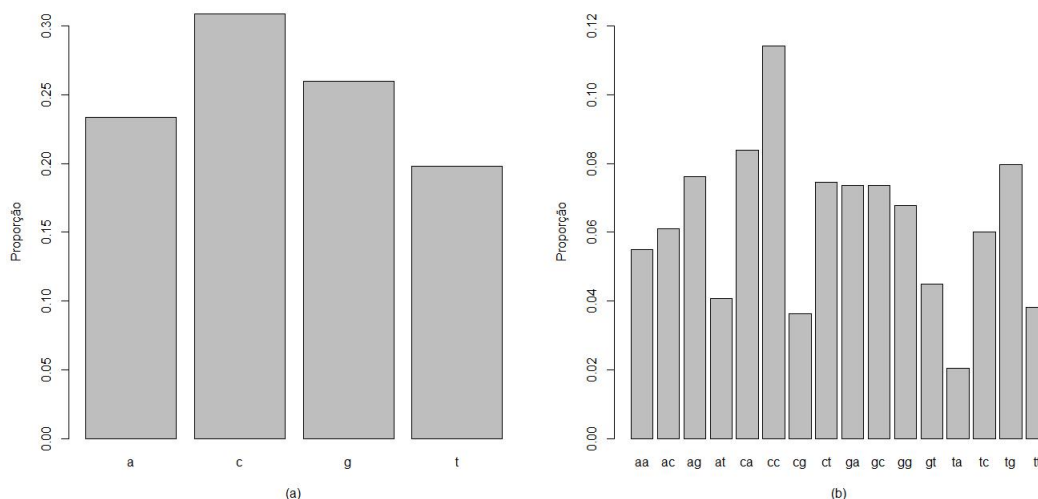


Figura 5.6: Composição da proteína *p53*: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

também, os *hotspots* indicados na literatura como os locais mais propensos à ocorrência de mutação nesta sequência de acordo com o banco de dados *IARC TP53 Mutation Database* (<http://p53.iarc.fr/>, acesso em 19 abril 2013). Também tem-se a representação das regiões em que há maior ou menor incidência de mutação nos nucleotídeos da proteína *p53* em escala cromática, com vermelho indicando região de menor chance de mutação, verde indicando região com chance intermediária de mutação e azul região com grande chance de mutação com base na sequência da proteína *p53alpha*. Ainda observando a Figura 5.7, temos que as localizações dos *hotspots* coincidem com as regiões indicadas com grande chances de mutação em azul.

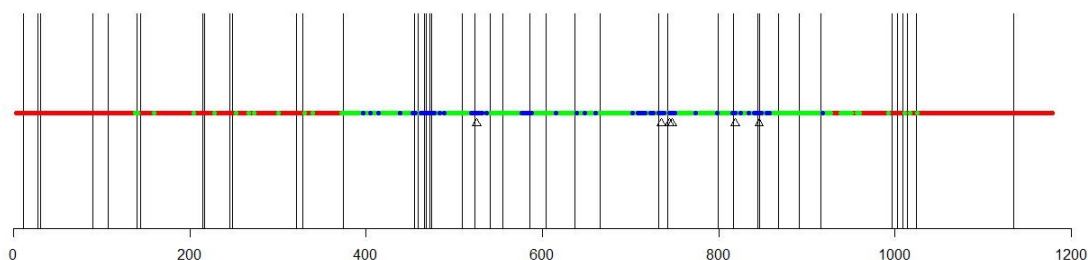


Figura 5.7: Sítios de ocorrência de *CpGs* e *hotspots* na proteína *p53alpha* de acordo com o banco de dados *IARC TP53 Mutation Database* (<http://p53.iarc.fr/>, acesso em 19 abril 2013): | indica uma *CpG*, Δ indica *hotspot*, ● indica de 1 a 10 mutações, ● indica de 10 a 100 mutações e ● indica de 100 a 1000 mutações.

A Tabela 5.4 traz índices relativos à *p53alpha* que foram obtidos usando-se o intervalo de 236pb. O número 236 foi escolhido por estar acima de 200 (que é um número padrão para o cálculo das *ICpGs*) e estar muito próximo da quinta parte do total de pares de bases da *p53alpha* ($1182pb = 236pb \times 5 + 2pb$), fornecendo, desta forma, $n = 5$ intervalos para análise. Os intervalos em que $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ correspondem a 236pb, o intervalo em que $n = 5$ corresponde a 238pb. Wu et al. (2010) mostra que existem outras definições para *ICpGs* que usam intervalo acima de 200pb.

Segundo às definições apresentadas temos que em todos os casos apresentados na Tabela 5.4 existe valor de $C + G$ acima de 0.5. Entretanto, nenhuma linha traduz valor de t acima de 0.6. Assim, podemos afirmar que não ocorrem *ICpG* na proteína *p53alpha* para a configuração estudada.

Observação 5.2. É importante ressaltar que dependendo da fase escolhida para a análise da ocorrência de *ICpG* na proteína *p53alpha* podem ocorrer ou não a incidência de ilhas. Para futuro

Tabela 5.4: Informações sobre a proteína *p53alpha* em intervalos de 236pb.

n	f_C	f_G	f_{CpG}	t	$C + G$
1	73	57	9	0.510	0.550
2	94	52	9	0.434	0.618
3	65	64	9	0.510	0.550
4	70	67	9	0.453	0.576
5*	63	66	6	0.340	0.550

* linha $n = 5$, intervalo de 238pb.

trabalho, serão consideradas variações para a fase escolhida e ilhas potencialmente mais longas.

Dessa forma, optou-se, por reavaliar a proteína *p53alpha*, tomando-se intervalos de 200pb. Configurando, assim, cinco intervalos de 200pb e um intervalo de 182pb. A Tabela 5.5 apresenta esta situação.

Tabela 5.5: Informações sobre a proteína *p53alpha* em intervalos de 200pb.

n	f_C	f_G	f_{CpG}	t	$C + G$
1	57	46	7	0.534	0.515
2	80	45	7	0.389	0.625
3	69	54	11	0.590	0.615
4	52	52	6	0.444	0.520
5	60	54	7	0.432	0.570
6*	47	56	5	0.380	0.566

* linha $n = 6$, intervalo de 182pb.

Percebe-se, pela Tabela 5.5, que em todas as linhas se mantém o índice de $C + G$ acima de 0.5. Entretanto, para o índice t , na linha $n = 3$ tem-se $t = 0.590$, valor muito próximo de 0.6 que é o padrão usado para caracterizar uma *ICpG* (região com fortes chances de mutação no código genético).

Se compararmos as informações da Tabela 5.5 com as informações da Figura 5.7, temos que no intervalo para $n = 3$, que corresponde aos pares de bases entre as posições 601 até 800 (códon 200 a 266), temos a metade dos *hotspots* citados: códon 245, 248 e 249. Os outros *hotspots*: códon 175, 273 e 282 ficam relativamente próximos da região com características de *ICpG*.

5.2.2 Comparação da Proteína *p53alpha* com a Proteína *p53* Mutante

Mutações podem ocorrer em qualquer célula e em qualquer estágio do ciclo celular. Portanto, podem ocorrer em células somáticas e em células germinativas.

A mutação somática ocorre predominantemente durante a replicação do DNA que precede uma divisão mitótica. Todas as células que se originam a partir desta são afetadas, mas podem localizar-se apenas numa pequena parte do corpo. Esse tipo de mutação não é transmitida à descendência.

A mutação nas células germinativas ocorre predominantemente durante a replicação do DNA que precede a meiose. A mutação afeta os gametas e todas as células que deles descendem após a fecundação. Neste caso, a mutação é transmitida à descendência. Consideramos aqui casos em que houve mutação de linhagem germinativa.

Dentro do contexto das mutações de linhagem germinativa, temos os casos em que houve substituição de uma base apenas e também, os casos em que há inserção ou deleção de uma ou mais bases na sequência de DNA.

Para os casos em que houve substituição de uma base apenas, mutação pontual, temos as possibilidades de que ocorra mutação silenciosa (*silent*), mutação com troca de sentido (*missense*) e a mutação com perda de sentido (*nonsense*).

A mutação *silent* ocorre quando a alteração do par de base do DNA não causa alteração no aminoácido do códon correspondente. Isto é possível, devido ao fato de que dos 64 possíveis códigos para aminoácidos, temos apenas 16 aminoácidos distintos. Ocasionalmente, desta forma, sequências distintas de 3pb que codificam o mesmo aminoácido. Tais sequências são ditas sinônimas.

Mutação *missense* ocorre quando a substituição de uma base do DNA por outra tem como consequência a substituição de um aminoácido por outro na proteína codificada. A conformação da proteína geralmente é alterada.

Quando a substituição da base no aminoácido ocasiona como resultado o aminoácido de parada tem-se a configuração da mutação *nonsense*. Neste caso, tem-se uma proteína resultante mais curta ou mais longa do que o normal.

Há, também, o tipo de mutação chamada *frameshift* que é um caso particular do tipo *nonsense* em que o número de pares de bases inserido ou retirado da *p53alpha* não é múltiplo de três. E o tipo de mutação *splice* em que a mutação ocorre nos limites entre os *introns* e os *exons* no gene da proteína *p53*.

Serão analisados casos de mutação na proteína p53 de pacientes com câncer de mama e com câncer de pulmão, obtidos no site <http://p53.bii.a-star.edu.sg/>, acesso em 19 abril 2013. Neste banco de dados, como em vários outros disponíveis, são apresentados, além do tipo de câncer desenvolvido, o tipo de mutação apresentada e o códon em que foi mapeada a mutação.

5.2.2.1 Caso 1: Proteína p53 Mutante - Câncer de Pulmão

Analisamos as informações oriundas de um paciente com câncer de pulmão, que foram obtidas através do endereço <http://p53.bii.a-star.edu.sg/aboutp53/mutations/mutationdetails.php?geneid=X54156&mid=1320>, acesso em 19 abril 2013.

Para este caso, houve mutação no códon 175 (*hotspot*), do tipo $G : C > A : T$, ocasionando a mudança de *CGC* para *CAC*. Houve a alteração do aminoácido arginina para histidina e esta alteração do tipo *missense* ocorreu em uma *CpG*.

A Figura 5.8 apresenta a composição da proteína *p53* mutante para o Caso 1 em análise. Não houve alteração significativa nas proporções de nucleotídeos e dinucleotídeos da proteína *p53* mutante. Isto se deve ao tipo de mutação ocorrida que ocasiona apenas a alteração de um nucleotídeo em toda a sequência da proteína *p53alpha*.

Na Tabela 5.6, comparou-se o caso (a) *p53alpha* com o caso (b) *p53* mutante - Caso 1. Neste caso, a alteração dos índices, ocasionada pela mutação está apresentada na linha $n = 3$, com a diminuição em uma unidade no valor de f_G e desta forma alterando os demais indicativos, como a quantidade de *CpG*, taxa t e taxa de $C + G$, que também diminuíram. Ainda assim, tem-se a definição de $ICpG$ na linha $n = 3$.

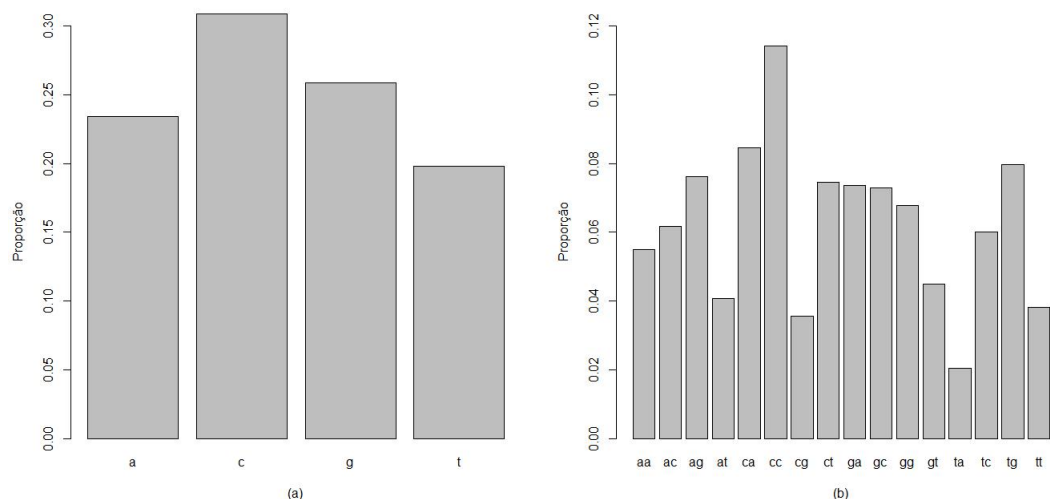


Figura 5.8: Composição da proteína *p53* mutante - Caso 1: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

Tabela 5.6: Informações sobre a proteína *p53* em intervalos de 200pb: (a) *p53alpha* e (b) Caso 1 - *p53* mutante.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{CpG(a)}$	$t_{(a)}$	$C + G_{(a)}$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{CpG(b)}$	$t_{(b)}$	$C + G_{(b)}$
1	57	46	7	0.534	0.515	57	46	7	0.534	0.515
2	80	45	7	0.389	0.625	80	45	7	0.389	0.625
3*	69	54	11	0.590	0.615	69	53	10	0.547	0.610
4	52	52	6	0.444	0.520	52	52	6	0.444	0.520
5	60	54	7	0.432	0.570	60	54	7	0.432	0.570
6**	47	56	5	0.380	0.566	47	56	5	0.380	0.566

* linha $n = 3$, alteração ocasionada pela mutação. ** linha $n = 6$, intervalo de 182pb.

5.2.2.2 Caso 2: Proteína *p53* Mutante - Câncer de Pulmão

Neste caso, analisamos as informações oriundas de um novo paciente com câncer de pulmão, que foram obtidas através do endereço <http://p53.bii.a-star.edu.sg/aboutp53/mutations/mutationdetail.s.php?geneid=X54156&mid=3732>, acesso em 19 abril 2013. Houve mutação do tipo *frameshift* de deleção a partir do códon 282 até o códon 284. Entretanto, este último códon não foi deletado por completo, restando o último nucleotídeo. Dessa forma, houve a deleção da sequência *CGGCGCAC*. Esta alteração suprimiu duas *CpGs* da proteína *p53* mutante e alterou seu comprimento em comparação com a proteína *p53alpha*.

A Figura 5.9 apresenta a composição da proteína *p53* mutante para o Caso 2 em análise. De forma análoga ao que ocorreu no Caso 1, não houve alteração significativa nas proporções de nucleotídeos e dinucleotídeos da proteína *p53* mutante. Isto se deve ao tipo de mutação ocorrida que ocasiona a deleção de apenas uma pequena parte da sequência de nucleotídeos.

Na Tabela 5.7, comparou-se o caso (a) *p53alpha* com o caso (b) *p53* mutante - Caso 2. Neste caso, as alterações dos índices, ocasionadas pela mutação estão apresentadas nas linhas $n = 5$ e $n = 6$. Para a linha $n = 5$, com a deleção de uma parte da sequência, houve a diminuição no valor de f_C e o aumento no valor de f_G , ocasionando alteração nas quantidades t e $C + G$. Para a linha $n = 6$, houve queda nos valores de f_C e de f_G e, por consequência alteração nos valores de t e $C + G$. Há também a diminuição em uma unidade na quantidade de *CpGs* em ambas as linhas $n = 5$ e $n = 6$.

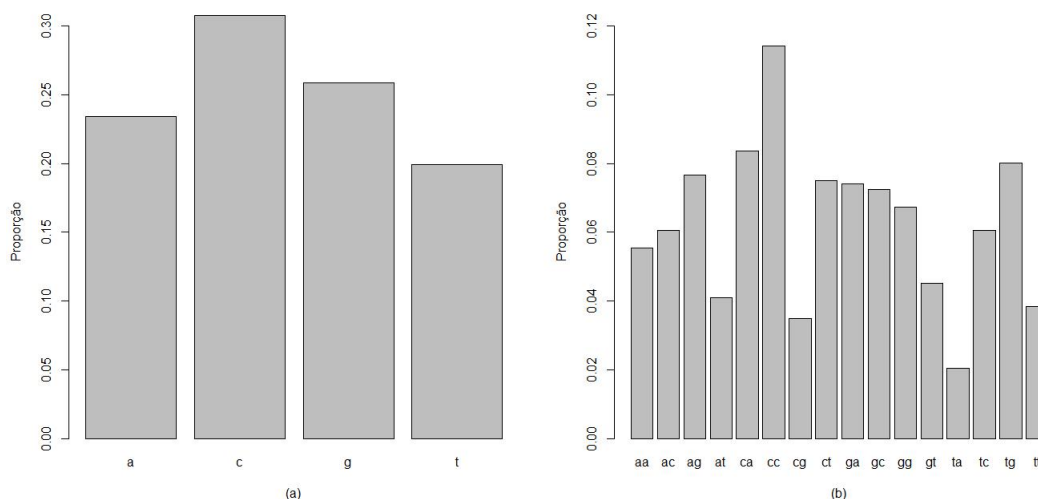


Figura 5.9: Composição da proteína *p53* mutante - Caso 2: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

Tabela 5.7: Informações sobre a proteína *p53* em intervalos de 200pb: (a) *p53alpha* e (b) Caso 2 - *p53* mutante.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{CpG(a)}$	$t_{(a)}$	$C + G_{(a)}$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{CpG(b)}$	$t_{(b)}$	$C + G_{(b)}$
1	57	46	7	0.534	0.515	57	46	7	0.534	0.515
2	80	45	7	0.389	0.625	80	45	7	0.389	0.625
3	69	54	11	0.590	0.615	69	54	11	0.590	0.615
4	52	52	6	0.444	0.520	52	52	6	0.444	0.520
5*	60	54	7	0.432	0.570	57	56	6	0.376	0.565
6**	47	56	5	0.380	0.566	46	51	4	0.297	0.557

* linhas $n = 5$ e $n = 6$, alterações ocasionadas pela mutação. ** linha $n = 6$, intervalo de 174pb.

Ainda assim, tem-se a definição de IC_{pG} na linha $n = 3$.

5.2.2.3 Caso 3: Proteína *p53* Mutante - Câncer de Mama

Analizamos as informações de um paciente com câncer de mama, que foram obtidas no site <http://p53.bii.a-star.edu.sg/aboutp53/mutations/mutationdetails.php?geneid=X54156&mid=473>, acesso em 19 abril 2013.

Para este caso, houve mutação no códon 125, do tipo $G : C > A : T$, ocasionando a mudança de *AGC* para *ACA*. Não houve a alteração do aminoácido, pois tanto *AGC* quanto *ACA* decodificam a treonina. Esta alteração é do tipo *splice* pois ocorreu no último códon do exon 4 da proteína *p53*. A mutação está localizada em uma *CpG* e como não ocasionou mudança no aminoácido codificado é também uma mutação do tipo *silent*.

A Figura 5.10 apresenta a composição da proteína *p53* mutante para o Caso 3 em análise. De forma análoga ao que ocorreu no Caso 1, não houve alteração significativa nas proporções de nucleotídeos e dinucleotídeos da proteína *p53* mutante. Isto se deve ao tipo de mutação ocorrida que ocasiona apenas a alteração de um nucleotídeo em toda a sequência da proteína *p53alpha*.

Na Tabela 5.8, comparou-se o caso (a) *p53alpha* com o caso (b) *p53* mutante - Caso 3. Neste caso, a alteração dos índices, ocasionada pela mutação está apresentada na linha $n = 2$, com a

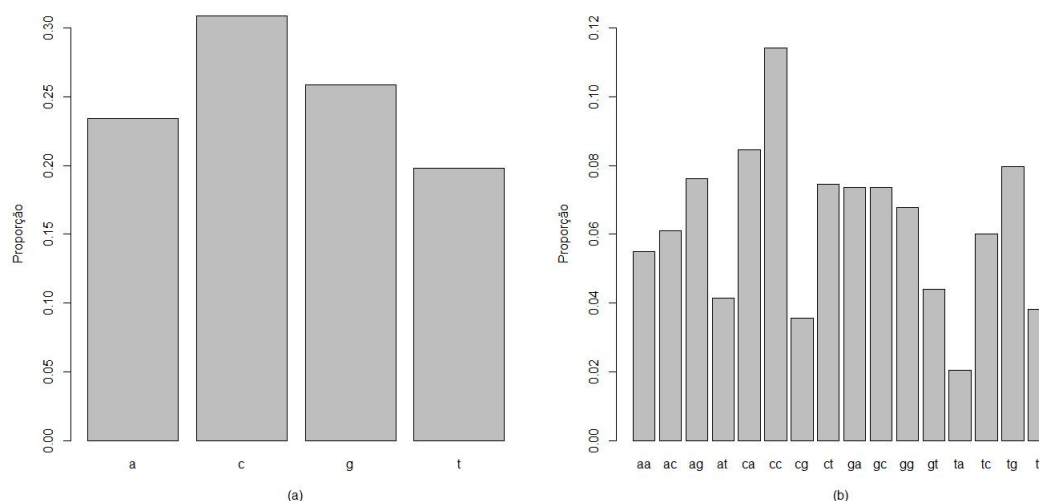


Figura 5.10: Composição da proteína *p53* mutante - Caso 3: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

Tabela 5.8: Informações sobre a proteína *p53* em intervalos de 200pb: (a) *p53alpha* e (b) Caso 3 - *p53* mutante.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{CpG(a)}$	$t_{(a)}$	$C + G_{(a)}$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{CpG(b)}$	$t_{(b)}$	$C + G_{(b)}$
1	57	46	7	0.534	0.515	57	46	7	0.534	0.515
2*	80	45	7	0.389	0.625	80	44	6	0.341	0.620
3	69	54	11	0.590	0.615	69	54	11	0.590	0.615
4	52	52	6	0.444	0.520	52	52	6	0.444	0.520
5	60	54	7	0.432	0.570	60	54	7	0.432	0.570
6**	47	56	5	0.380	0.566	47	56	5	0.380	0.566

* linha $n = 2$, alteração ocasionada pela mutação. ** linha $n = 6$, intervalo de 182pb.

diminuição em uma unidade no valor de f_G e desta forma alterando os demais indicativos, como a quantidade de *CpG*, taxa t e taxa de $C + G$, que também diminuíram. Ainda assim, tem-se a definição de *ICpG* na linha $n = 3$.

5.2.2.4 Caso 4: Proteína *p53* Mutante - Câncer de Mama

A informação para este Caso 4 foi obtida de um paciente com câncer de mama, no endereço <http://p53.bii.a-star.edu.sg/aboutp53/mutations/mutationdetails.php?geneid=X54156&mid=2433>, acesso em 19 abril 2013, para o qual consta que houve mutação no códon 244, do tipo $G : C > T : A$, ocasionando a mudança de *GGC* para *GTC*. Houve uma mutação do tipo *missense* que ocasiona a alteração do aminoácido que constitui o códon, ou seja, houve alteração de glicina para valina.

A Figura 5.11 apresenta a composição em nucleotídeos e dinucleotídeos da proteína *p53* mutante para o Caso 4. Aqui percebe-se que não há praticamente mudanças na configuração da proteína *p53* mutante quando comparada com a proteína *p53alpha* que está representada na Figura 5.6. Isto se deve ao fato de ter-se alterado apenas um nucleotídeo em toda a sequência em estudo.

Para esta proteína *p53* mutante foram analisados os mesmos índices da *p53alpha* (Tabela 5.5) e estão apresentados conjuntamente na Tabela 5.9.

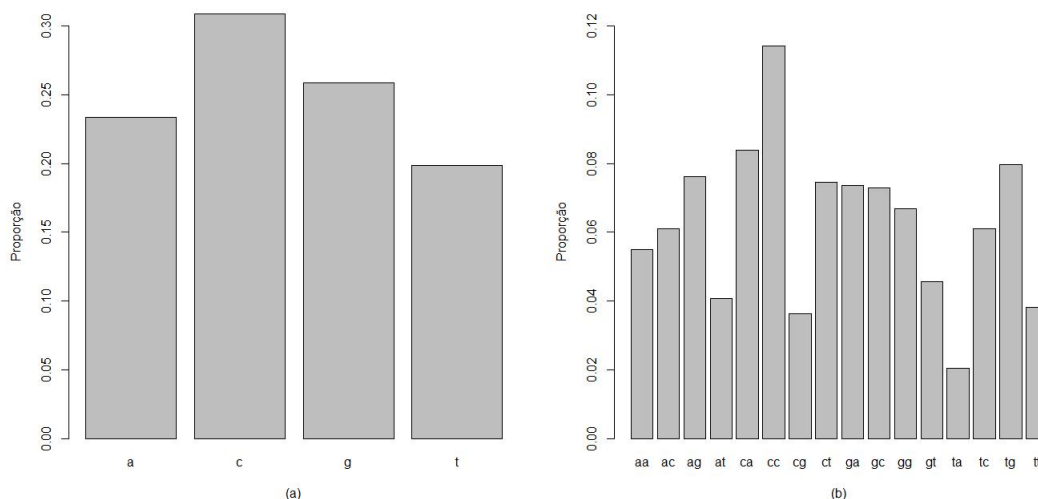


Figura 5.11: Composição da proteína *p53* mutante - Caso 4: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

Tabela 5.9: Informações sobre a proteína *p53* em intervalos de 200pb: (a) *p53alpha* e (b) Caso 4 - *p53* mutante.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{CpG(a)}$	$t_{(a)}$	$C + G_{(a)}$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{CpG(b)}$	$t_{(b)}$	$C + G_{(b)}$
1	57	46	7	0.534	0.515	57	46	7	0.534	0.515
2	80	45	7	0.389	0.625	80	45	7	0.389	0.625
3	69	54	11	0.590	0.615	69	54	11	0.590	0.615
4*	52	52	6	0.444	0.520	52	51	6	0.452	0.515
5	60	54	7	0.432	0.570	60	54	7	0.432	0.570
6**	47	56	5	0.380	0.566	47	56	5	0.380	0.566

* linha $n = 4$, alteração ocasionada pela mutação. ** linha $n = 6$, intervalo de 182pb.

Comparando-se as situações (a) *p53alpha* e (b) *p53* mutante, na Tabela 5.9, percebe-se que a alteração ocorrida na linha $n = 4$, justamente devido à mutação, altera o valor de f_G de 52 para 51. Ocasionalmente, também, alterações nos índices que dependem da frequência de guanina que são as taxas t e $C + G$. Na linha $n = 3$ permanece a definição de $ICpG$.

5.2.2.5 Caso 5: Proteína *p53* Mutante - Câncer de Mama

Agora, analisamos um outro paciente com câncer de mama, obtido do site <http://p53.bii.a-star.edu.sg/aboutp53/mutations/mutationdetails.php?geneid=X54156&mid=3716>, acesso em 19 abril 2013, para o qual a alteração ocorreu no códon 120, do tipo $A : T > T : A$, ocasionando a mudança *AAG* para *TAG*, ou seja, do aminoácido lisina para o código de parada. Esta alteração é do tipo *nonsense* e, neste caso, a proteína resultante é de menor tamanho. Temos uma proteína *p53* mutante sem função ou cuja função original é impedida.

Pode-se observar, na Figura 5.12 quando comparada com a Figura 5.6, que houve alteração significativa nas proporções de nucleotídeos e dinucleotídeos. Em alguns casos houve aumento e em outros houve diminuição. A causa desta alteração está na mutação ocorrida que foi o tipo *nonsense* que alterou o comprimento da proteína *p53*.

Na Tabela 5.10 temos as informações do Caso 5. Aqui não é necessário colocar, simultaneamente, a Tabela 5.5 para a comparação conforme feito para o Caso 1, visto que se percebe uma mudança

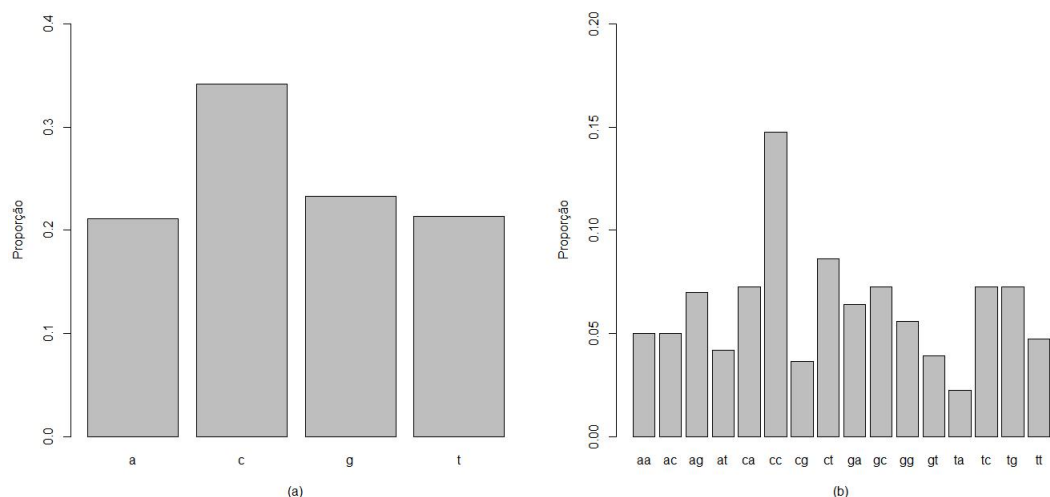


Figura 5.12: Composição da proteína *p53* mutante - Caso 5: (a) por nucleotídeo; (b) por dinucleotídeo.

drástica na *p53* mutante, devido a sua redução de tamanho em relação à proteína *p53alpha*. Não houve ocorrência de *ICpG* em nenhuma linha da Tabela 5.10. Neste caso a alteração ocorreu na parte codificante do gene, o restante da sequência genética segue existindo e para o restante da sequência a *ICpG* continua existindo.

Tabela 5.10: Informações sobre a proteína *p53* do paciente com câncer de mama (Caso 5) em intervalos de 200pb.

n	f_C	f_G	f_{CpG}	t	$C + G$
1	57	46	7	0.534	0.515
2*	66	38	6	0.478	0.650

* linha $n = 2$, intervalo de 120pb.

Observação 5.3. Em relação às sequências analisadas e, com base em sequências encontradas disponíveis em sites especializados e bibliográficas da área, percebemos que a mutação *missense* e a mutação *silent* ocasionam alteração muito sutil na integridade da proteína *p53*. Este fato ocorre em virtude de haver a alteração de apenas um nucleotídeo em um total de 1182pb. Entretanto, a mutação *nonsense*, dependendo do códon em que ela ocorre, causa alterações significativas devido ao fato de alterar o comprimento da proteína *p53* em vários pares de bases.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Os métodos estatísticos para dados espaço-temporais tiveram um desenvolvimento considerável nas últimas décadas. Isso deve-se sobretudo ao avanço dos métodos computacionais Bayesianos e à acessibilidade aos sistemas de informação geográfica (*geographic information system* - GIS) e às técnicas de mapeamento.

Neste contexto, o Capítulo 2 apresenta definições e resultados associados à metodologia Bayesiana para análise espaço-temporal. A característica dos efeitos aleatórios espaciais é modelada através do modelo condicional auto-regressivo intrínscico (CAR) e do modelo condicional auto-regressivo próprio (PCAR). A característica temporal dos dados é modelada através três procedimentos: estrutura linear aditiva, suavização com B-spline sem intercepto e modelo auto-regressivo de primeira e segunda ordens. São apresentados também critérios para a seleção dos modelos em estudo e para os testes de convergência das cadeias obtidas.

No Capítulo 3, abordamos a análise de dados espaço-temporais através da metodologia Bayesiana com uso de modelos lineares generalizados. Os dados reais analisados no Capítulo 3 correspondem a cinco conjuntos de observações. O primeiro conjunto de dados, Exemplo 1, corresponde aos efeitos adversos pós-vacinação (EAPV) notificados no período de 2005 a 2010, nos estados brasileiros, utilizado no trabalho de [Perin \(2014\)](#). A segunda aplicação, Exemplo 2, considera o conjunto de dados de óbitos infantis (com menos de um ano de idade) por residência nos estados brasileiros entre 1991 e 2013 (fonte *MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade*), utilizado em [Silva e Dean \(2006\)](#). A terceira aplicação, Exemplo 3, corresponde ao conjunto de pacientes do sexo masculino hospitalizados com infarto do miocárdio na província de Québec entre os anos de 1993 e 2000, utilizados e gentilmente fornecidos por [Silva et al. \(2008\)](#). O quarto conjunto de dados, Exemplo 4, aborda informações sobre a incidência da radiação solar disponíveis no *USA National Solar Radiation Data Base* (NSRDB) em períodos mensais entre janeiro de 2007 a dezembro de 2010, utilizados no trabalho de [Pumi et al. \(2015\)](#). A quinta aplicação, Exemplo 5, apresenta o indicador de resistência a 13 diferentes antibióticos para a bactéria *Salmonella Typhimurium* DT104 com sequências de DNA obtidas a partir de animais e humanos na Escócia, no período de 1990 a 2011, usados e gentilmente fornecidos por [Cybis et al. \(2015\)](#) e [Mather et al. \(2013\)](#).

No Exemplo 1 (Capítulo 3), com base nos critérios de seleção utilizados, o modelo $M1$ foi o selecionado. Este modelo corresponde à uma tendência linear para descrever a informação associada à característica temporal. Percebe-se que não houveram mudanças significativas entre as chances de ocorrência de efeito adverso pós-vacinação “convulsão” quando comparadas entre si para cada ano, no decorrer do período analisado. Uma explicação para este fato é que para a quase totalidade dos estados brasileiros (com exceção de Amapá e Roraima onde existem falta de dados) houve a diminuição homogênea da ocorrência do efeito adverso “convulsão”. Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para o modelo $M1$ ($M1bh$, $M1b$, $M1h$, $M1c$) para diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros da variância. Houve um comportamento padrão para todos os casos

considerados na análise de sensibilidade. Não houveram alterações significativas para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos e para os critérios de seleção utilizados.

No Exemplo 2 (Capítulo 3), com base nos critérios de seleção utilizados, o modelo $M5$ foi o selecionado. O modelo $M5$ corresponde a um efeito auto-regressivo aditivo de ordem 1, $AR(1)$, para a componente temporal. Foi realizada análise de sensibilidade para o modelo $M5$ e foi obtido um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade, ou seja, não houveram alterações significativas para as estimativas das variâncias dos componentes dos modelos e para os critérios de seleção. Com o intuito de investigar o comportamento do efeito temporal correspondente ao modelo $M5$, os valores estimados de ϕ_0 e ϕ_1 (elementos que compõe o efeito temporal auto-regressivo de ordem 1) foram obtidos através da média e desvio-padrão para os modelos $M5bh$, $M5b$, $M5h$ e $M5c$. Estes elementos indicam que há importância do “lag 1” para o efeito temporal (mesmo que pequena). Os valores obtidos para $\hat{\phi}_1$ são significativamente diferentes de zero. Ou seja, a informação associada ao tempo (ano) t está relacionada ao tempo $t - 1$ segundo o coeficiente $\hat{\phi}_1$ e, ainda, esta interação entre o tempo atual t e o tempo imediatamente anterior, $t - 1$, está crescendo (mesmo que de forma tênue) pelo fato de $\hat{\phi}_1$ ser positivo. Neste exemplo, temos a indicação de que com diminuição dos valores das taxas de mortalidade infantil durante o passar dos anos houve alteração nas chances relativas de (*odds ratio*) de ocorrência do óbito para alguns estados da Região Norte, tais como Acre, Amapá e Amazonas, e para alguns estados da Região Nordeste, tais como Paraíba, Pernambuco e Alagoas.

No Exemplo 3 (Capítulo 3), com base nos critérios de seleção utilizados, o modelo $M2$ foi o selecionado. Em linha geral, o modelo que apresentou menores valores para os critérios de seleção foi o $M2$. Dessa forma, realizou-se análise de sensibilidade para este modelo usando os diferentes valores de distribuição *a priori* para os parâmetros da variância. Houve um comportamento padrão para todos os casos considerados na análise de sensibilidade e, ainda, não houveram alterações significativas para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos e para os critérios de seleção. Sabemos, pelo modelo selecionado, que a informação temporal é modelada por uma *B-spline* cúbica, ou seja, a informação temporal contida nos dados é interpretada através de uma curva contínua e suave (com a primeira e a segunda derivadas contínuas).

No Exemplo 4, (Capítulo 3), com base nos critérios de seleção utilizados, o modelo $M2$ foi o selecionado. Neste modelo a informação contida nos dados de natureza temporal é interpretada através de uma *B-spline* cúbica, ou seja, através de uma curva contínua e suave (com a primeira e a segunda derivadas contínuas) assim como no Exemplo 3. Houve um comportamento homogêneo para todos os casos considerados na análise de sensibilidade e, ainda, não houveram alterações para as estimativas das variâncias das componentes dos modelos e para os critérios de seleção. Foi perceptível o aumento da incidência de radiação solar no transcorrer do ano de 2010 em comparação com os anos anteriores de 2007 a 2009.

No Exemplo 5, (Capítulo 3), com base nos critérios de seleção utilizados, o modelo $M1$ foi o selecionado. Entretanto, vale ressaltar que houve pouca variação entre os ajustes obtidos para os modelos M e $M1$. Neste exemplo temos duas particularidades que diferem dos demais exemplos abordados. Na primeira particularidade a informação temporal corresponde apenas ao indicador do ano em que houve o registro da bactéria em estudo, ou seja, para cada bactéria, os valores de tempo não correspondem ao contexto de uma série temporal ou à evolução durante o transcorrer do tempo. Na segunda particularidade as distâncias filogenéticas entre as bactérias (e não distâncias geográficas ou geodésicas) foram utilizadas como critério para a definição de vizinhos conforme exigência dos modelos CAR e PCAR. Os modelos M e $M1$ apresentaram grande variação de valores para a medida de ajuste Q_P . No entanto, para as demais medidas de ajuste o comportamento ficou semelhante entre os dois modelos em foco. Na análise de sensibilidade, os valores obtidos da média e do desvio-padrão para as variâncias dos componentes dos modelos ficaram próximos para todos os casos estudados,

indicando bom comportamento dos modelos abordados. O modelo *M1* apresenta a informação de que o ano em que é catalogada a bactéria é um elemento importante para se analisar o fator de resistência de bactérias a diferentes antibióticos no contexto em que as distâncias filogenéticas são utilizadas como elemento espacial. Isso é condizente com o fato de que a cada ano surgem bactérias que são mais resistentes e menos suscetíveis aos medicamentos e tratamentos existentes.

Para todos os exemplos em estudo no Capítulo 3 não houveram diferenças importantes quanto as variações da parcela R_i , efeitos aleatórios espaciais correlacionados ou não-correlacionados. Os resultados obtidos foram semelhantes quando do uso dos modelos CAR e PCAR.

No Capítulo 4, foram realizados estudos de simulação com o enfoque clássico com base nos métodos *shrinkage* e utilizando o ambiente computacional R. A ideia destes métodos é escolher apenas alguns preditores do modelo em estudo e se descartar os demais (ocasionando que, alguns ou até vários, parâmetros se anulem) produzindo um modelo resultante que é mais fácil de ser interpretado e que possivelmente possua menor erro de predição do que o modelo original (modelo completo). Os métodos *shrinkage* estudados foram: *ridge*, *lasso* e *elastic-net*. Para as simulações realizadas, as diferenças significativas de ajustes estavam associadas aos valores escolhidos para *SNR*, aos diferentes valores de coeficientes utilizados e os diferentes modelos (variáveis explicativas e erro). Os melhores resultados correspondem aos casos em que os valores dos coeficientes utilizados são grandes em módulo, ou seja, $|\beta_k| > 1$, para $k \in \{1, \dots, p\}$, e para os modelos *Ml*, quando $l \in \{12, 13, 14\}$. Estes modelos consideram $\epsilon_i \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$, $d \in \{0.2, 0.4\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ e, respectivamente, $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{3}}$, $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\chi^2_2}{2}$, qui-quadrado padronizada com dois graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$ e $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(8)})'$, com $X^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, normal-padrão, para $k \in \{1, 2\}$, $X^{(k)} \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{3}}$, *t*-Student padronizada com três graus de liberdade, para $k \in \{3, \dots, 6\}$.

A função *larFORTRAN*, para os dois casos de simulações estudados, se mostrou superior aos pacotes computacionais comparados tanto em tempo computacional como em qualidade de ajuste.

No Capítulo 5 percebemos que a ocorrência de *ICpG* em sequências de DNA é uma característica associada à espécie do indivíduo em estudo. Foram escolhidos, para as análises, o cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento de pão), o cromossomo 22 do *H.sapiens* e o cromossomo 3L da *D.melanogaster* (mosca da fruta). As escolhas da mosca da fruta e do fermento de pão foram determinadas pela propriedade de que tais genomas não apresentam metilação (mosca da fruta) ou apresentam forte supressão de metilação (fermento de pão) em dinucleotídeos *CpG*. A característica de metilação em dinucleotídeos *CpG* é observada em grande parte dos organismos tanto procariontes como eucariontes. A metilação é o principal fenômeno epigenético pelo qual um gene é silenciado e ocorre pela adição de um grupo metila à citosina presente na estrutura do DNA. Percebemos que há diferença considerável na probabilidade de ocorrência de *ICpG* para as três sequências de DNA analisadas (*S.cerevisiae*, *H.sapiens* e *D.melanogaster*). As regiões de existência de *ICpG* ocorreram de forma esparsa para o cromossomo 12 do *S.cerevisiae*. Para o cromossomo 22 do *H.sapiens*, ocorreram três regiões de *ICpG*. No caso do cromossomo 3L da *D.melanogaster* não houve nenhum indicativo de ocorrência de Ilhas de *CpG* (*ICpG*) no intervalo considerado. Os estudos de simulação para a ocorrência de regiões de *ICpG* realizados, com base na distribuição Multinomial, apresentaram resultados coerentes com a definição de *ICpG* utilizada. Realizamos, também, comparações entre sequências de DNA da proteína *p53alpha* e as sequências de DNA da proteína *p53* mutante obtidas de pessoas com diagnóstico de câncer. São codificadas 9 isoformas da proteína *p53* a partir do gene *p53*. Estas 9 isoformas são nominadas seguindo o alfabeto grego e a proteína apresentada como padrão é denominada *p53alpha*. Os casos de alteração da proteína *p53* associado ao câncer estudado que apresentaram maior diferença foram a mutação do tipo *frameshift* de deleção (Seção 5.2.2.2) e a mutação do tipo *nonsense* que alterou o comprimento da proteína *p53* (Seção 5.2.2.5). Os casos

em que ocorreram as mutações *missense* e *silent* ocasionaram alterações muito sutis na integridade da proteína *p53*, pois nestas situações temos a alteração de apenas um nucleotídeo em um total de 1182pb.

Para trabalhos futuros, sugerimos os seguintes tópicos:

- (i) para a análise de dados espaço-temporais através da metodologia Bayesiana com uso de modelos lineares generalizados:
 - realizar análises com iteração espaço-temporal, ou seja, em que figurem as parcelas $S(i, t)$ ou R_{it} , separadamente;
 - variar a forma de calcular as distâncias entre vizinhos para o uso do modelo CAR e PCAR;
 - utilizar outros modelos para representar a autocorrelação espacial, tais como mínimos quadrados generalizados (generalised least squares - GLS) e modelos auto-regressivos simultâneos (simultaneous autoregressive models - SAR).
- (ii) para os estudos de simulação com o enfoque clássico com base nos métodos *shrinkage*:
 - pode-se realizar estudos envolvendo uma quantidade relativamente grande de variáveis descritivas (valor de p alto);
 - usar outros tipos de variáveis descritivas e de erros;
 - utilizar outros tipos de penalidade para os coeficientes.
- (iii) para as análises de sequências de DNA:
 - realizar estudo envolvendo o conceito de *ICpG* envolvendo diferentes fases nas sequências de DNA;
 - analisar as sequências de DNA de outras proteínas supressoras de tumores, tais como, *p63* e *p73*;
 - comparar a incidência de *ICpG* em sequências de DNA de outras espécies de seres vivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achcar, J.A., S.R.C. Lopes, J. Mazucheli e R.R. Linhares (2013). "A Bayesian approach for stable distributions: some computational aspects". *Open Journal of Statistics*, v.3(4), 268-277.
- Agresti, A. (2015). *Foundations of linear and generalized linear models*. New York: Wiley.
- Alberts, B., A. Johnson, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts e P. Walter (2008). *Molecular biology of the cell*. New York: Garland Science.
- Assunção, R. e E. Krainski (2009). "Neighborhood dependence in Bayesian spatial models". *Biometrical Journal*, vol.51(5), 851-869.
- Antequera, F. e A. Bird (1993). "Number of CpG islands and genes in human and mouse". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v.90(24), 11995-11999.
- Banerjee, S., B.P. Carlin e A.E. Gelfand (2004). *Hierarchical modeling and analysis for spatial data*. Boca Raton: Chapman & Hall.
- Bernardo, J.M. e A.F.M. Smith (2000). *Bayesian theory*. Chichester: Wiley.
- Besag, J. (1974). "Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B(Methodological)*, vol.36(2), 192-236.
- Besag, J., J. York e A. Mollié (1991). "Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol.43(1), 1-59.
- Best, N., S. Richardson e A. Thomson (2005). "A comparison of bayesian spatial models for disease mapping". *Statistical Methods in Medical Research*, vol.14(1), 35-39.
- Bickel, P.J. e K.A. Doksum (2001). *Mathematical statistics basic ideas and select topics*. vol.1 e vol.2. New Jersey: Prentice-Hall.
- Bird, A., P. Tate, X. Nan, J. Campoy, R. Meehan, S. Cross, S. Tweedie, J. Charlton e D. MacLeod (1995). "Studies of DNA methylation in animals". *Journal of Cell Science*, v.19(1), 37-39.
- Branscum, A.J., A.M. Perez, W.O. Johnson e M.C. Thurmond (2008). "Bayesian spatiotemporal analysis of foot-and-mouth disease data from the Republic of Turkey". *Epidemiology and Infection*, vol.136(6), 833-842.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time series: theory and methods*. New York: Springer-Verlag.
- Chen, M.H., Q.H. Shao e J.G. Ibrahim (2000). *Monte Carlo methods in Bayesian computation*. New York: Springer-Verlag.
- Chib, S. e E. Greenberg (1995). "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm". *The American Statistician*, vol.49(4), 327-335.
- Christensen, R. (1997). *Log-linear models and logistic regression*. New York: Springer-Verlag.

- Congdon, P. (2006). *Bayesian statistical modelling*. London: Wiley.
- Cordeiro, G.M. e C.G.B. Demétrio (2007). "Modelos lineares generalizados". Minicurso para o 12º SEAGRO e a 52ª Reunião Anual da RBRAS, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. Em: <<http://www.lce.esalq.usp.br/clarice/livroSeagro.pdf>>. Acesso em: 23 julho 2015.
- Crato, N., R.R. Linhares e S.R.C. Lopes (2011). α -stable laws for noncoding regions in DNA sequences". *Journal of Applied Statistics*, v.38(2), 261-271.
- Cressie, N.A. (1993). *Statistics for spatial data*, edição revisada. New York: Wiley.
- Cybis, G.B., J.S. Sinsheimer, T. Bedford, A.E. Mather, P. Lemey e M.A. Suchard (2015). "Assessing phenotypic correlation through the multivariate phylogenetic latent liability model". *Annals of Applied Statistics*. Submetido.
- Day, W.H.E. (1987). "Computational complexity of inferring phylogenies from dissimilarity matrices". *Bulletin of Mathematical Biology*, vol.49(4), 461-467.
- De Boor, C. (2001). *Practical guide to splines*. New York: Springer-Verlag.
- Deonier, R.C., S. Tavaré e M.S. Waterman (2000). *Computational genome analysis - An introduction*. New York: Springer-Verlag.
- Dey, D.K., S.K. Ghosh e B.K. Mallick (2000). *Generalized linear models - A Bayesian perspective*. New York: Wiley.
- Durbin, R., S.R. Eddy, A. Krogh e G. Mitchison (2000). *Biological sequence analysis - Probabilistic models of proteins and nucleic acids*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Felsenstein, J. (2004). *Inferring Phylogenies*. Sunderland: Sinauer Associates.
- Figueira, C.V. e S.R.C. Lopes (2013). "Ocorrências de ilhas CpG em sequências de DNA". *Sigmae*, v.2(3), 100-106. Em: <<https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/issue/view/20>>. Acesso em: 28 maio 2015.
- Forbes, C., E. Merran, N. Hastings e B. Peacock (2011). *Statistical distributions*. 4ed. New York: Wiley.
- Fox, J. (2015). *Applied regression analysis and generalized linear models*. 3ed. New York: SAGE Publications.
- Friedman, J., T. Hastie e R. Tibshirani (2010). "Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent". *Journal of Statistical Software*, vol.33(1), 1-22.
- Gardiner-Garden, M. e M. Frommer (1987). "CpG islands in vertebrate genomes". *Journal of Molecular Biology*, v.196(2), p. 261-282.
- Gallier, J. (1999). *Curves and surfaces in geometric modeling: theory and algorithms*. San Francisco: Morgan-Kaufman.
- Gamerman, D. (1996). *Simulação estocástica via cadeias de Markov*. São Paulo: ABE.
- Gelfand, A. (1996). "Model determination using sampling based methods". Em: W. Gilks, S. Richardson e D. Spiegelhalter (eds.). *Markov chain Monte Carlo in Practice*. Boca Raton: Chapman & Hall.
- Gelman, A. (2006). "Prior distributions for variance parameters in hierarchical models". *Bayesian Analysis*, vol.1(3), 515-533.

- Gelman, A., J. Hwang e A. Vehtari (2014). "Understanding predictive information criteria for Bayesian models". *Statistics and Computing*, vol.24(6), 997-1016.
- Gelman, A. e J. Hill (2007). *Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gelman, A. e D.B. Rubin (1992). "Inference from iterative simulation using multiple sequences". *Statistical Science*, vol.7(4), 457-472.
- Gelman, A., J.B. Carlin, H.S. Stern e D.B. Rubin (2004). *Bayesian data analysis*. 2ed. London: Chapman & Hall.
- Gelman, A. e C.R. Shalizi (2013). "Philosophy and the practice of Bayesian statistics". *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, vol.66(1), 8-38.
- Geweke, J. (1992). "Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments". Em: J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid e A.F.M. Smith (eds.). *Bayesian Statistics 4*. Oxford: Clarendon Press.
- Goeman, J.J. (2010). "L1 penalized estimation in the Cox proportional hazards model". *Biometrical Journal*, vol.52(1), 70-84.
- Hamilton, J.D. (1994). *Times series analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- Hammersley, J.M. e P. Clifford (1971). *Markov fields on finite graphs and lattices*. Em: <<http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/hammfest/hamm-cliff.pdf>>. Acesso em: 28 maio 2015.
- Harring, J.R. e S.A. Blozis (2014). "Fitting correlated residual error structures in nonlinear mixed-effects models using SAS PROC NL MIXED". *Behavior Research Methods*, vol.46(2), 372-384.
- Hastie, T.J. e R.J. Tibshirani (1990). *Generalized additive models*. London: Chapman & Hall.
- Hastie, T.J., R.J. Tibshirani e J. Friedman (2009). *The elements of statistical learning - Data mining, inference e prediction*. New York: Springer-Verlag.
- Hastings, W.K. (1970). "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications". *Biometrika*, v.57(1), 97-109.
- Heidelberger, P. e P.D. Welch (1981). "A spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations". *Communications of the ACM*, vol.24(4), 233-245.
- Hochreiter, R., G.C. Pflug e D. Wozabal. "Multi-stage stochastic electricity portfolio optimization in liberalized energy markets. Em: F. Ceragioli, A. Dontchev, H. Furuta, K. Marti, L. Pandolfi, L. (eds.). *System Modeling and Optimization*. Turin: Springer-Verlag.
- Hollstein, M., D. Sidransky, B. Vogelstein e C. Harris (1991). "p53 mutations in human cancers". *Science*, vol.253(5015), 49-53.
- Hosking, J.R.M. (1981). "Fractional differencing". *Biometrika*, vol.68(1), 165-176.
- Jiru, A.R. (2008). "Relationships between spectral peak frequencies of a causal AR(p) process and arguments of roots fo the associated AR polynomial". Dissertação de mestrado no Departamento de Matemática, San Jose State University, San Jose.
- Knott, G.D. (1999). *Interpolating cubic splines*. Boston: Birkhauser.
- Lawson, A.B. (2009). *Bayesian disease mapping: herarquical modeling in spatial epidemiology*. Boca Raton: Chapman & Hall.

- Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2002). "Non-stationary Gaussian ARFIMA processes: estimation and application". *Brazilian review of econometrics*, v.22(1), 103-126.
- Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2004). "A comparison of estimation methods in non-stationary ARFIMA processes". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v.74(5), 339-347.
- Lunn, D., A. Thomas, N. Best e D. Spiegelhalter (2000). "WinBUGS - a Bayesian modelling framework: concepts, structure and extensibility". *Statistics and Computing*, vol.10(4), 325-337.
- Lunn, D., A. Thomas, N. Best e D. Spiegelhalter (2009). "The BUGS project: evolution, critique and future directions". *Statistics in Medicine*, vol.28(25), 3049-3067.
- Mather, A.E., S.W. Reid, D.J. Maskell, J. Parkhill, M.C. Fookes, S.R. Harris, D.J. Brown, J.E. Coia, M.R. Mulvey, M.W. Gilmor, L. Petrovska, E. de Pinna, M. Kuroda, M. Akiba, H. Izumiya, T.R. Connor, M.A. Suchard, P. Lemey, D.J. Mellor, D.T. Haydon e N.R. Thomson (2013). "Distinguishable epidemics of multidrug-resistant *Salmonella* Typhimurium DT104 in different hosts". *Science*, vol.341(6153), 1514-1517.
- Metropolis, N., A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller e E. Teller (1953). "Equation of state calculations by fast computing machines". *The Journal of Chemical Physics*, vol.21(6), 1087-1092.
- McCullagh, P. e J.A. Nelder (1983). *Generalized linear models*. London: Chapman & Hall.
- Ministério da Saúde, Secretaria de Vigilância em Saúde, Departamento de Vigilância Epidemiológica (2008). "Manual de vigilância epidemiológica de eventos adversos pós-vacinação". Brasília.
- Ministério da Saúde (2010). "Portaria N^o3.318, de 28 de OUTUBRO de 2010." Em: <<http://brasilsus.com.br/legislacoes/gm/106024-3318.html>>. Acesso em: 19 agosto 2015.
- Model, F., J. Lewin, J., C. Lofton-Day e G. Weiss (2009). *Analysis of DNA methylations in cancer*. Em: C. Wiuf and C.L. Andersen (eds.). *Statistics and Informatics in Molecular Cancer Research*. Oxford: Oxford University Press.
- Morettin, P.A. e C.M.C. Tolo (2004). *Análise de séries temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.
- Nelder, J.A. e R.W.M. Wedderburn (1972). "Generalized linear models". *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, vol.153(3), 370-384.
- Nogueira, D.A., T. Sáfadi e D.F. Ferreira (2004). "Avaliação de critérios de convergência para o método de Monte Carlo via cadeias de Markov". *Revista Brasileira de Estatística*. vol.65(224), p.59-88.
- Nolan, J.P. (2015). *Stable distributions: models for heavy tailed data*. Boston: Birkhäuser.
- Ntzoufras, I. (2009). *Bayesian modeling using WinBUGS*. New Jersey: Wiley.
- Paulino, C.D., A.A. Turkman e B. Murteira (2009). *Estatística Bayesiana*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Perin, J.L.R. (2014). "Análise de eventos adversos pós-vacinação notificados no período de 2005 a 2010". Trabalho de Conclusão do Curso de Bacharelado em Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

- Plummer, M. (2003). "JAGS: a program for analysis of Bayesian graphical models using Gibbs sampling". *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing - (DSC 2003)*, Vienna.
- Prautzsch, H., W. Boehm e M. Paluszny (2002). *Bézier and B-spline techniques*. Berlin: Springer-Verlag.
- Primrose, S.B. e R.M. Twyman (2003). *Principles of genome analysis and genomics*. Turin: Blackwell Science.
- Pumi, G., S.R.C. Lopes, S.M. Cerezer, C.A. Martinazzo e D.M. de Quevedo (2015). "A two-stage time series analysis of the NSTDB solar radiation data". Submetido.
- R Core Team (2015). "R: A language and environment for statistical computing". *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna. Em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 19 abril 2015.
- Raftery, A.E. e S. Lewis (1992). "How many iterations in the Gibbs sampler?" Em: J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid e A.F.M. Smith (eds.). *Bayesian Statistics 4*. Oxford: Clarendon Press.
- Rampaso, R.C. (2014). "Análise Bayesiana de dados espaciais explorando diferentes estruturas de variância". Dissertação de mestrado na Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente.
- Rampaso, R.C., A.D.P. Souza e E.F. Flores (2015). "Bayesian analysis of spatial data using different variance and neighbourhood structures". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, DOI:10.1080/00949655.2015.1022549.
- Rohatgi, V.K. e A.K.M.D. Saleh (2001). *An introduction to probability and statistics*. New York: Wiley.
- Samorodnitsky, G. e M.S. Taqqu (1994). *Stable non-Gaussian random processes - Stochastic models with infinite variance*. New York: Chapman & Hall.
- Schwarz, G.E. (1978). "Estimating the dimension of a model". *Annals of Statistics*, vol.6(2), 461-464.
- Silva, G.L. e C.B. Dean (2006). *Uma introdução à análise de modelos espaço-temporais para taxas, proporções e processos de multi-estados*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística.
- Silva, G.L., C.B. Dean, T. Niyonsenga e A. Vanasse (2008). "Hierarchical Bayesian spatiotemporal analysis of revascularization odds using smoothing splines". *Statistics in Medicine*, vol.27(13), 2381-2401.
- Soussi, T. (2011). "TP53 mutations in human cancer: database reassessment and prospects for the next decade". *Advances in Cancer Research*, vol.110(1), 107-139.
- Soussi, T. e C. Bérouod (2003). "Significance of TP53 mutations in human cancer: a critical analysis of mutations at CpG dinucleotides". *Human Mutations*, vol.21(3), 192-200.
- Soussi, T. e K.G. Wiman (2007). "Shaping genetic alterations in human cancer: the p53 mutation paradigm". *Cancer Cell*, vol.12(4), 303-312.
- Souza, R.M. (2015). "Modelagem estatística em estudos de bioequivalência sob o enfoque Bayesiano". Tese de doutorado na Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.

- Spiegelhalter, D.J., N.G. Best, B.P. Carlin e A. van der Linde (2002). "Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion)". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B(Methodological)*, vol.64(4), 583-639.
- Stern, H.S. e N. Cressie (2000). "Posterior predictive model checks for disease mapping models". *Statistics in Medicine*, vol.19(17), 2377-2397.
- Sturtz, S., U. Ligges e A. Gelman (2005). "R2WinBUGS: A package for running WinBUGS from R". *Journal of Statistical Software*, vol.12(3), 1-16.
- Thomas, A., N. Best, R. Arnold e D. Spiegelhalter (2014). *GeoBUGS user manual version 3.2.3*. Em: <<http://www.openbugs.net/Manuals/GeoBUGS/Manual.html>>. Acesso em: 19 abril 2015.
- Torabi, M. (2013). "Spatio-temporal modeling for disease mapping using CAR and B-spline smoothing". *Environmetrics*, vol.24(3), 180-188.
- Ueberhuber, C.W. (1997). *Numerical computation 1: methods, software, and analysis*. Berlin: Springer-Verlag.
- Vehtari, A. e A. Gelman (2015). "WAIC and cross-validation in Stan". Em: <http://www.stat.columbia.edu/~gelman/research/unpublished/waic_stan.pdf>. Acesso em: 19 abril 2015.
- Waller, L.A., B.P. Carlin, H. Xia e A.E. Gelfand (1997a). "Hierarchical spatio-temporal mapping of disease rates". *Journal of the American Statistical Association*, vol.92(438), 607-617.
- Waller, L.A., P.C. Bradley e H. Xia (1997b). "Structuring correlation within hierarquical spatio-temporal models for disease rates". Em: T.G. Gregoire, D.R. Brillinger, P.J. Diggle, E. Russek-Cohen, W.G. Warren e R.D. Wolfinger (eds.). "Modelling longitudinal and spatially correlated data". *Lecture Notes in Statistics 122*. New York: Springer-Verlag.
- Watanabe, S. (2013a). "WAIC and WBIC are information criteria for singular statistical model evaluation". Em: <http://www.me.inf.kyushu-u.ac.jp/witmse2013/abst_files/watanabe2013.pdf>. Acesso em: 19 abril 2015.
- Watanabe, S. (2013b). "A widely applicable Bayesian information criterion". *Journal of Machine Learning Research*, vol.14(3), 867-897.
- Watson, J.D. e F.H.C. Crick (1953). "A structure for deoxyribose nucleic acid". *Nature*, vol.171(4356), 737-738.
- Wu, H., B. Caffo, H.A. Jaffee, R.A. Irizarry e A.P. Fienberg (2010). "Redefining CpG islands using hidden Markov models". *Biostatistics*, v.11(3), 499-514.
- Zolotarev, V.M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*. Rode Island: American Mathematical Society.

APÊNDICE A

GRÁFICOS AUXILIARES ÀS ANÁLISES PARA O EXEMPLO 1 DO CAPÍTULO 3

Neste apêndice estão os gráficos auxiliares que correspondem às análises realizadas no Capítulo 3 e na Seção 3.1.

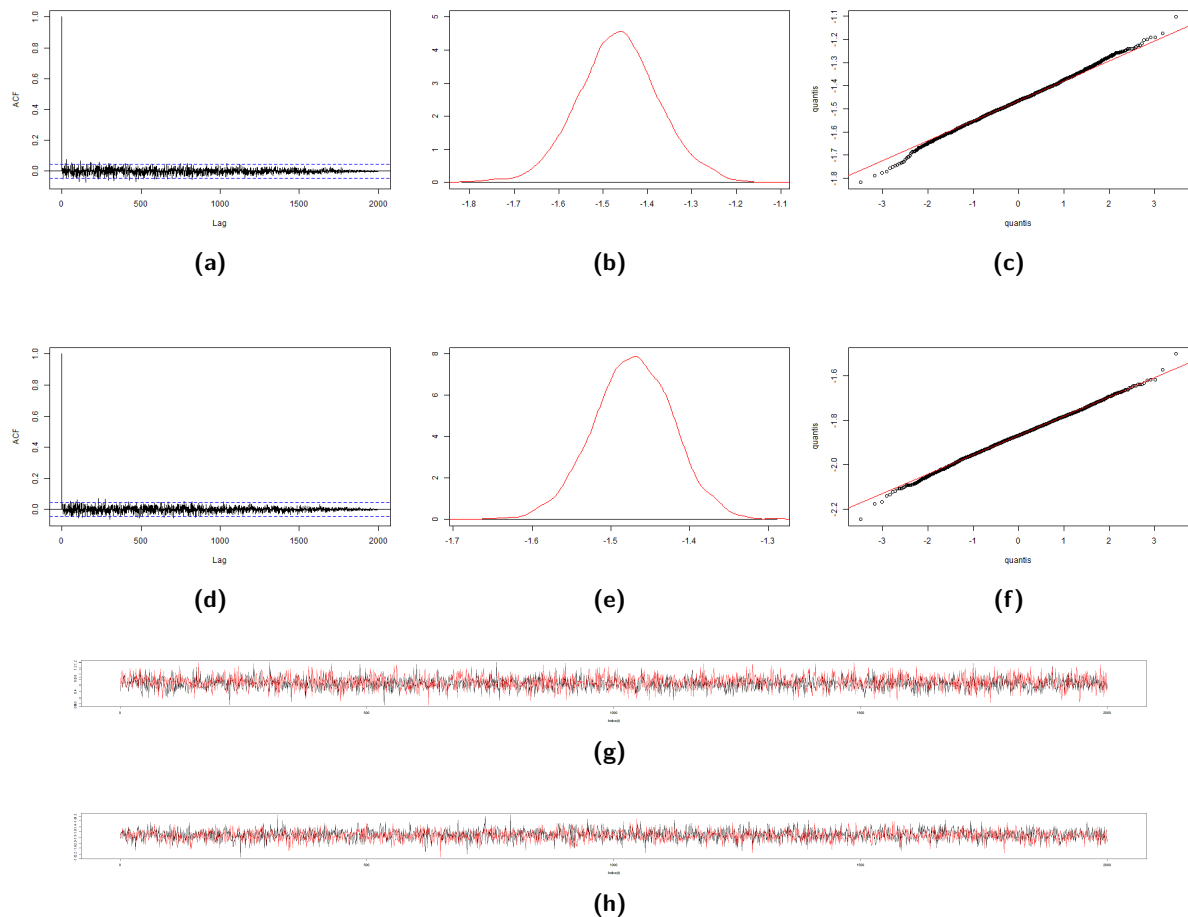


Figura A.1: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $GI(0.5, 0.0005)$ para os modelos $M1$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M1b$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 1.

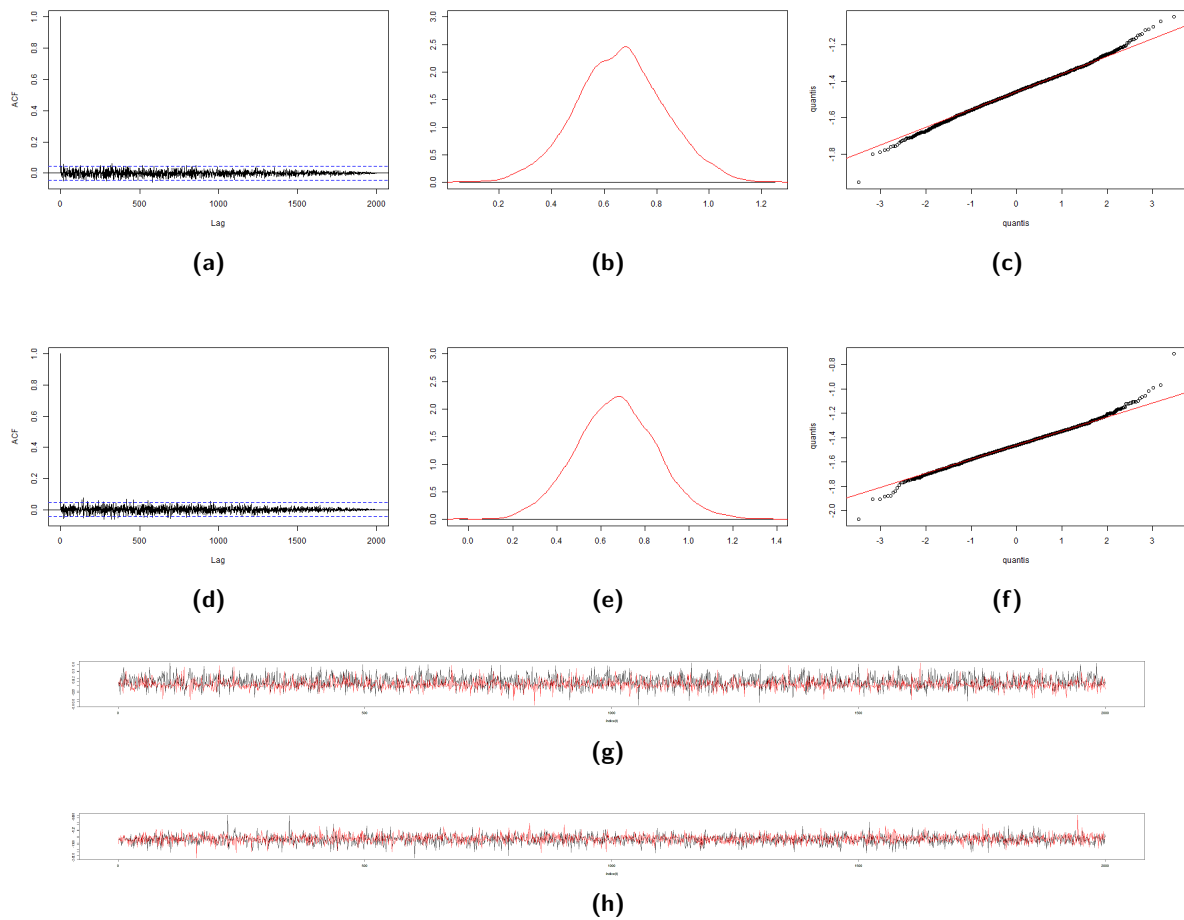


Figura A.2: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ para os modelos $M1h$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M1c$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 1.

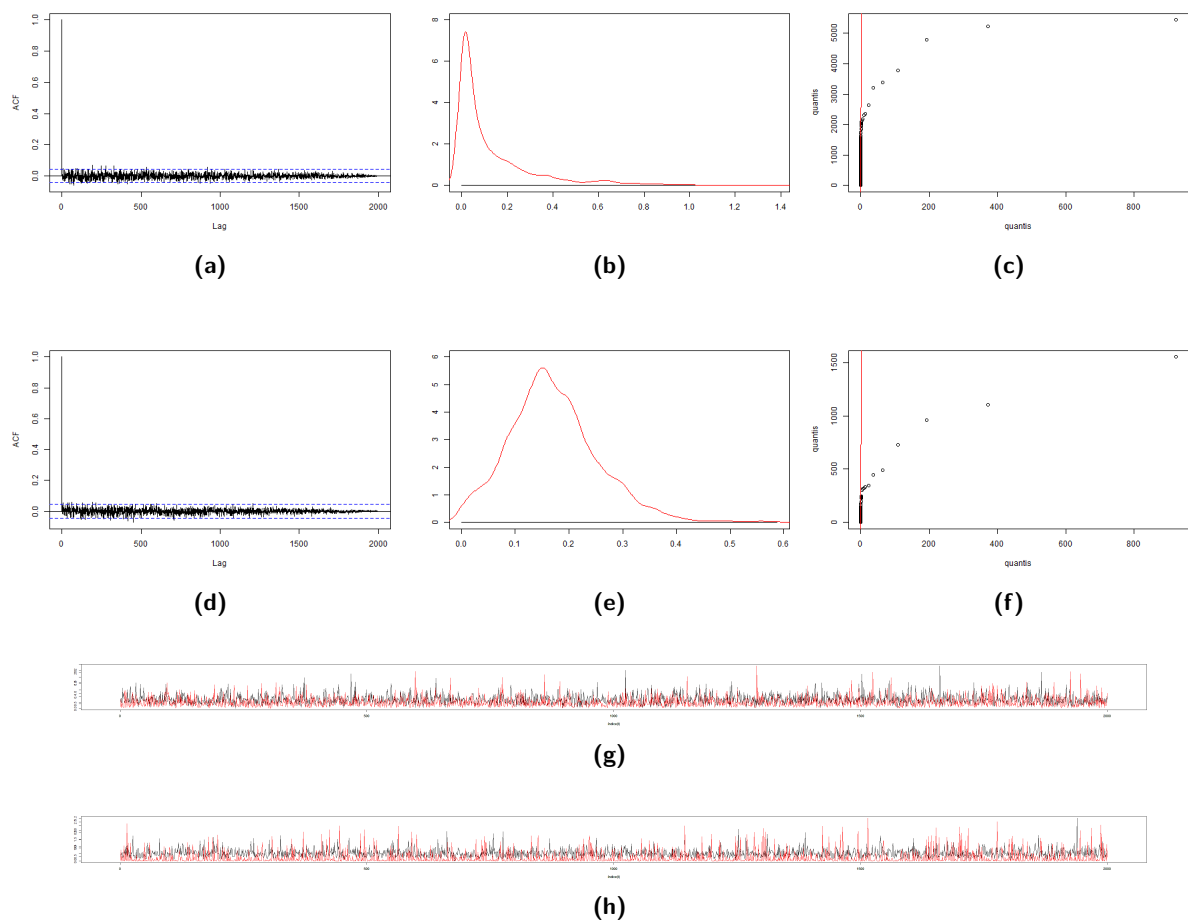


Figura A.3: Gráficos para o modelo $M1$, distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$ e para os parâmetros σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 1.

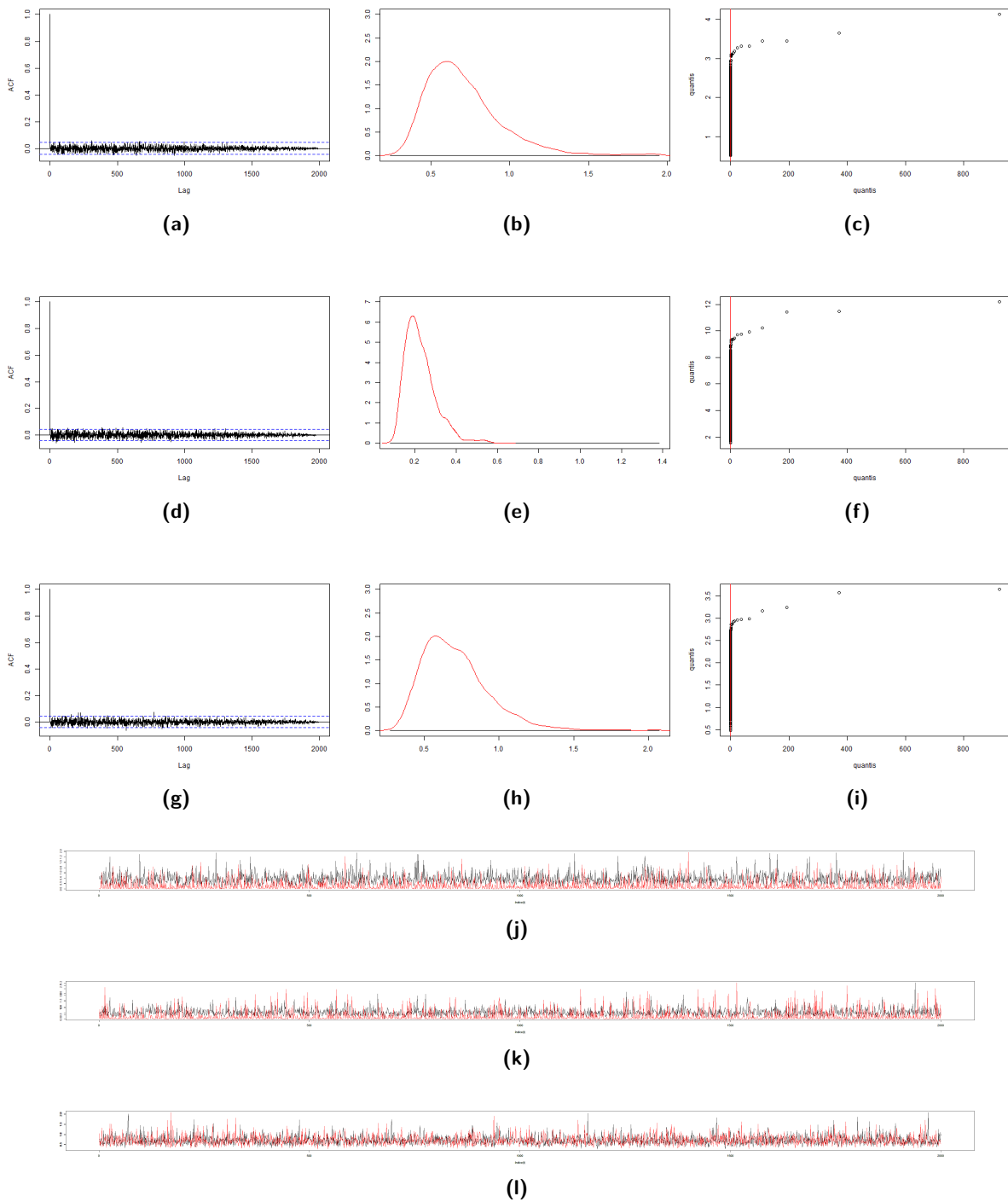


Figura A.4: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$, modelo $M1b$ e parâmetro σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M1h$ e parâmetro σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M1c$ e parâmetro σ_c^2 : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 1.

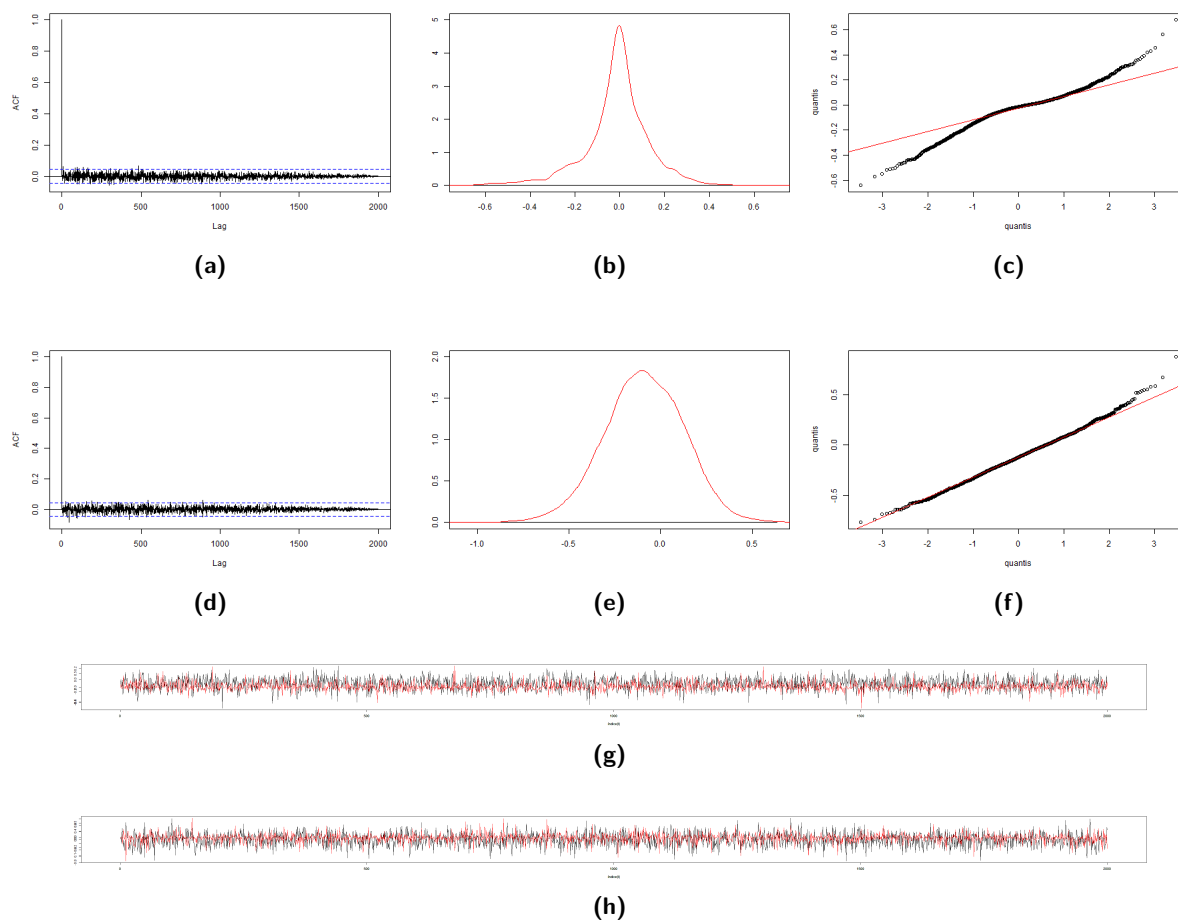


Figura A.5: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.5, 0.0005)$, modelo $M1$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 1.

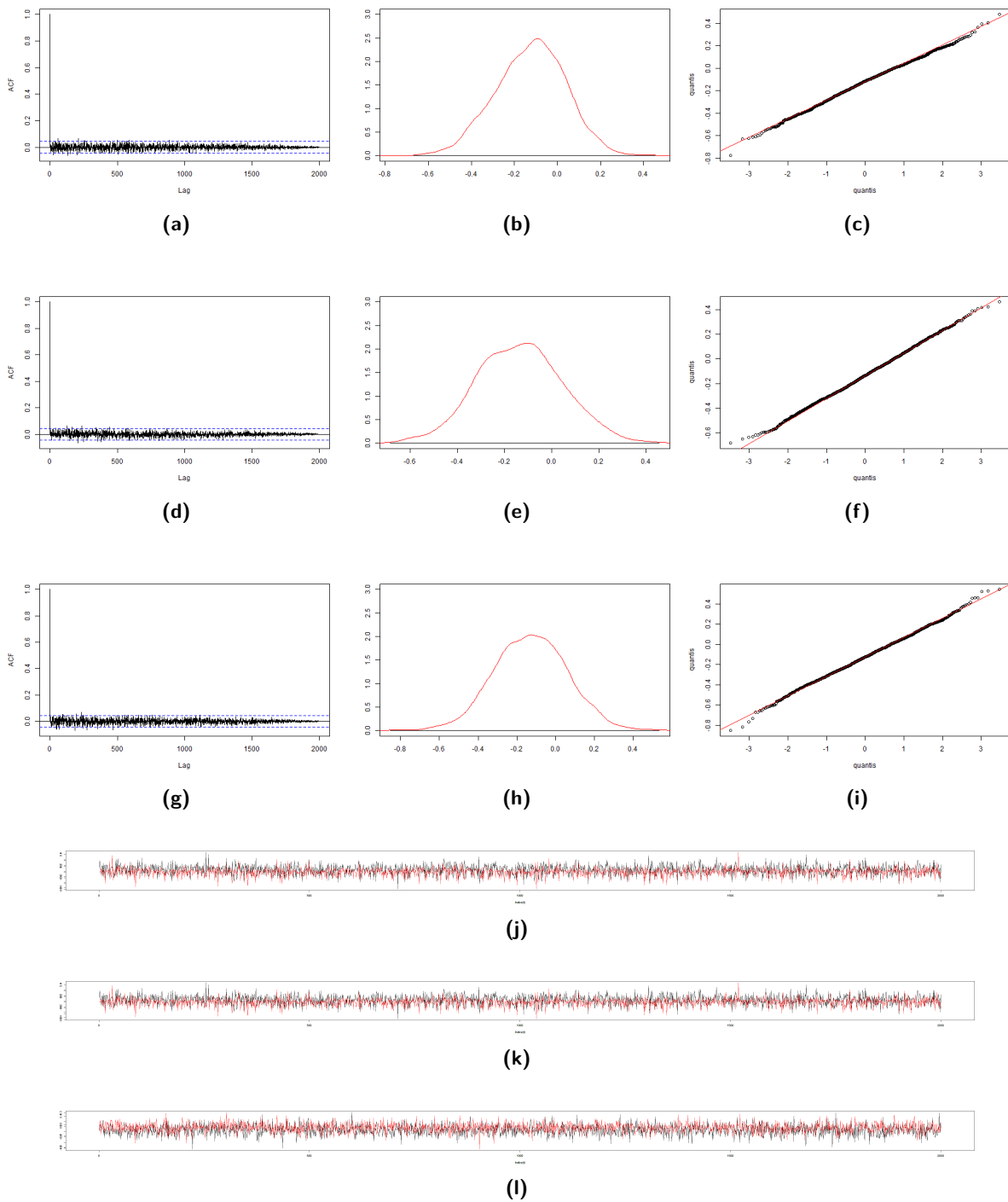


Figura A.6: Gráficos para distribuição *a priori* $GI(0.5, 0.0005)$, modelo $M1b$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M1h$ e parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M1c$ e parâmetro b_{16} : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 1.

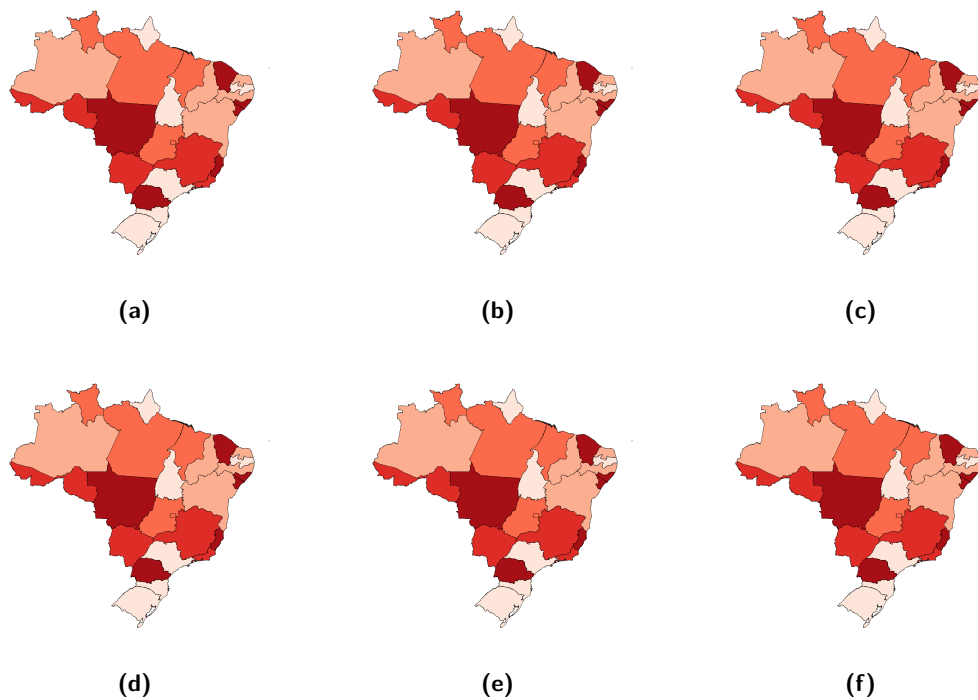


Figura A.7: Mapa dos estados brasileiros com as chances de ocorrência do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” para o modelo $M1bh$ para os anos de: (a) 2005, (b) 2006, (c) 2007, (d) 2008, (e) 2009, (f) 2010 - Exemplo 1. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

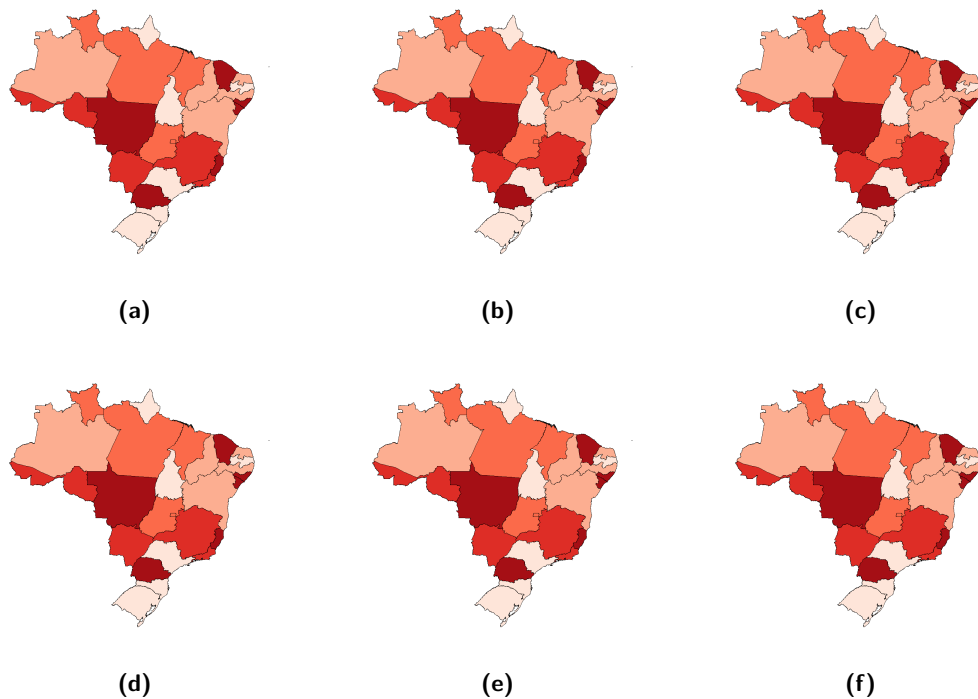


Figura A.8: Mapa dos estados brasileiros com as chances de ocorrência do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” para o modelo $M1b$ para os anos de: (a) 2005, (b) 2006, (c) 2007, (d) 2008, (e) 2009, (f) 2010 - Exemplo 1. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

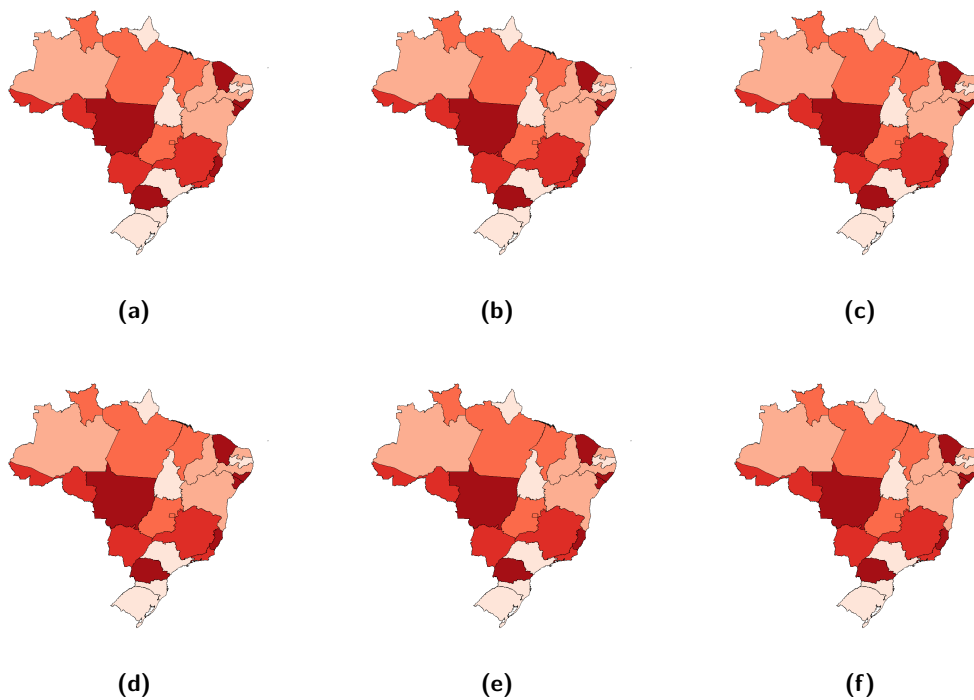


Figura A.9: Mapa dos estados brasileiros com as chances de ocorrência do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” para o modelo $M1h$ para os anos de: (a) 2005, (b) 2006, (c) 2007, (d) 2008, (e) 2009, (f) 2010 - Exemplo 1. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

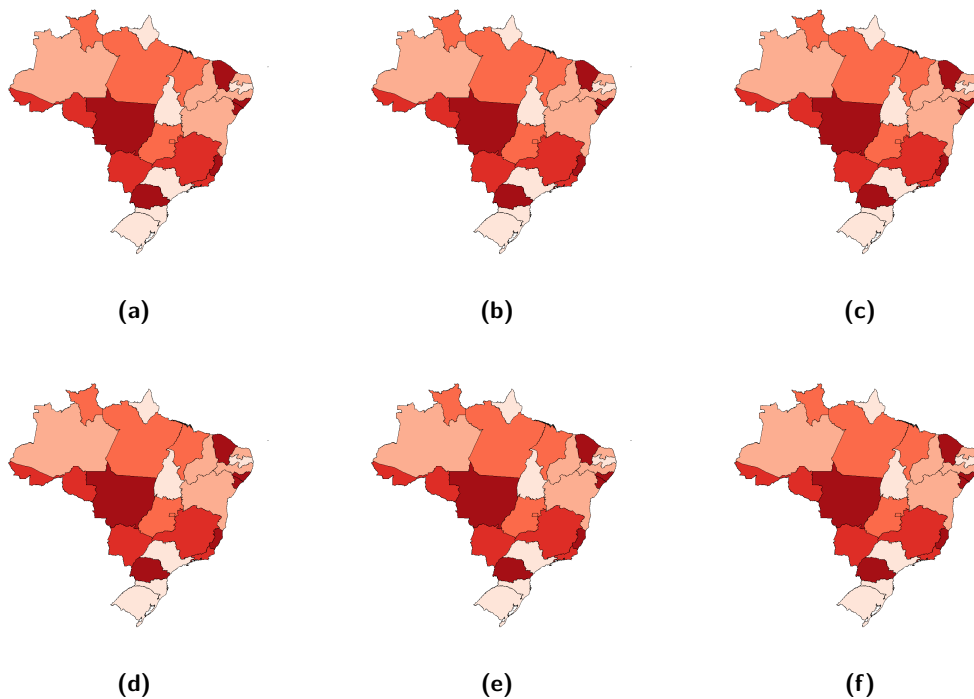


Figura A.10: Mapa dos estados brasileiros com as chances de ocorrência do efeito adverso pós-vacinação “convulsão” para o modelo $M1c$ para os anos de: (a) 2005, (b) 2006, (c) 2007, (d) 2008, (e) 2009, (f) 2010 - Exemplo 1. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

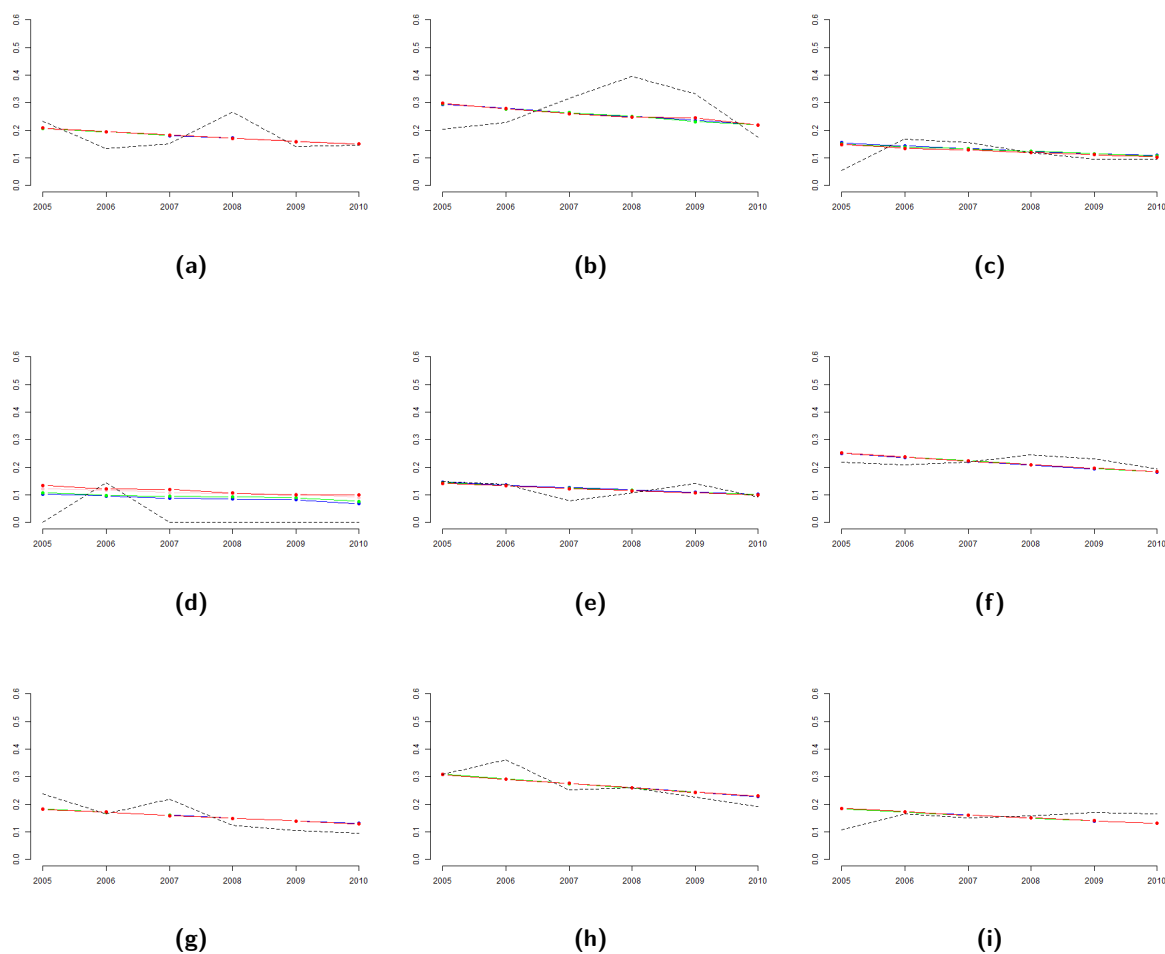


Figura A.11: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de EAPV “convulsão” durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M1bh$ (rosa), $M1b$ (azul), $M1h$ (vermelho) e $M1c$ (verde) para os estados: (a) AC, (b) AL, (c) AM, (d) AP, (e) BA, (f) CE, (g) DF, (h) ES e (i) GO - Exemplo 1.

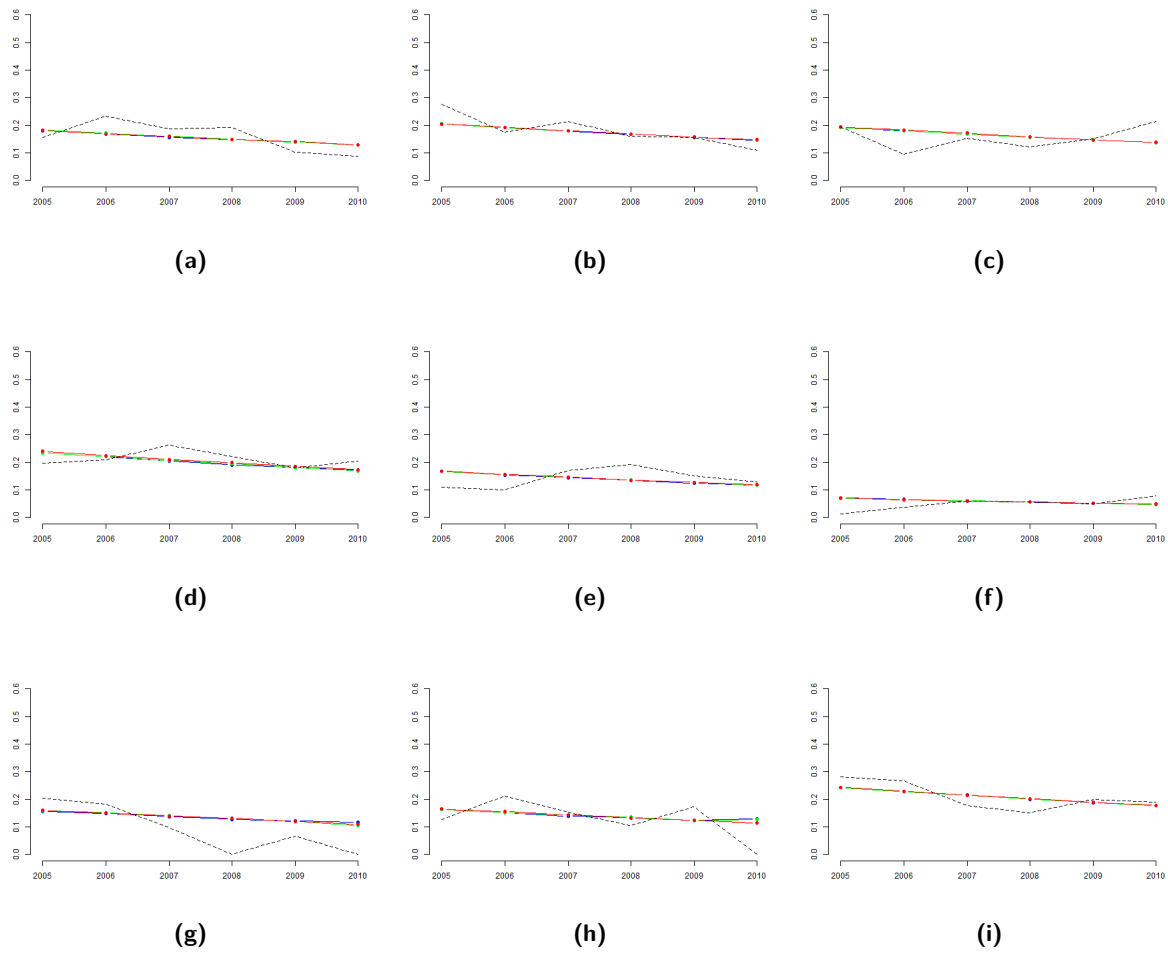


Figura A.12: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de de EAPV “convulsão” durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M1bh$ (rosa), $M1b$ (azul), $M1h$ (vermelho) e $M1c$ (verde) para os estados: (a) MA, (b) MG, (c) MS, (d) MT, (e) PA, (f) PB, (g) PC, (h) PI e (i) PR - Exemplo 1.

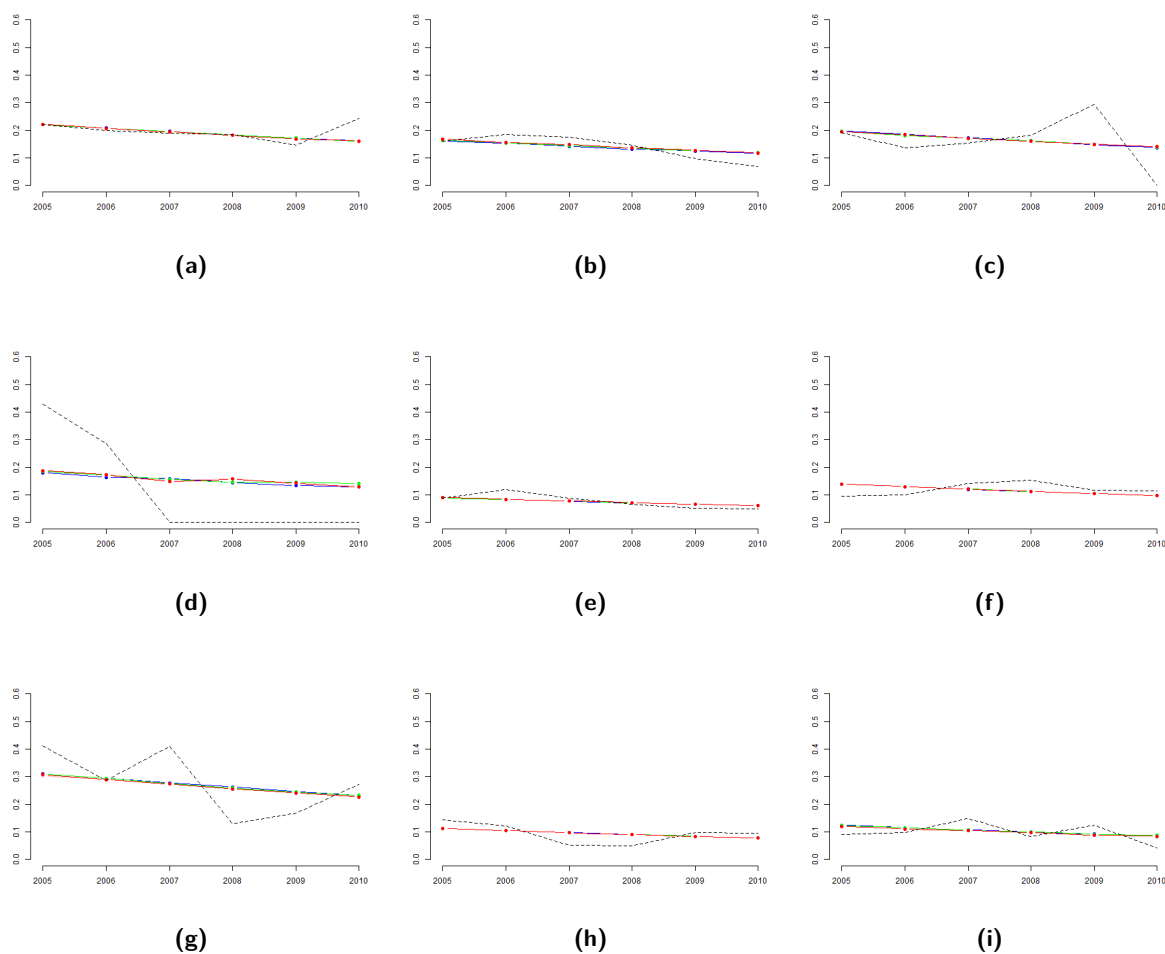


Figura A.13: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de de EAPV “convulsão” durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M1bh$ (rosa), $M1b$ (azul), $M1h$ (vermelho) e $M1c$ (verde) para os estados: (a) RJ, (b) RN, (c) RO, (d) RR, (e) RS, (f) SC, (g) SE, (h) SP e (i) TO - Exemplo 1.

APÊNDICE B

GRÁFICOS AUXILIARES ÀS ANÁLISES PARA O EXEMPLO 2 DO CAPÍTULO 3

Neste apêndice estão os gráficos auxiliares que correspondem às análises realizadas no Capítulo 3 e na Seção 3.2.

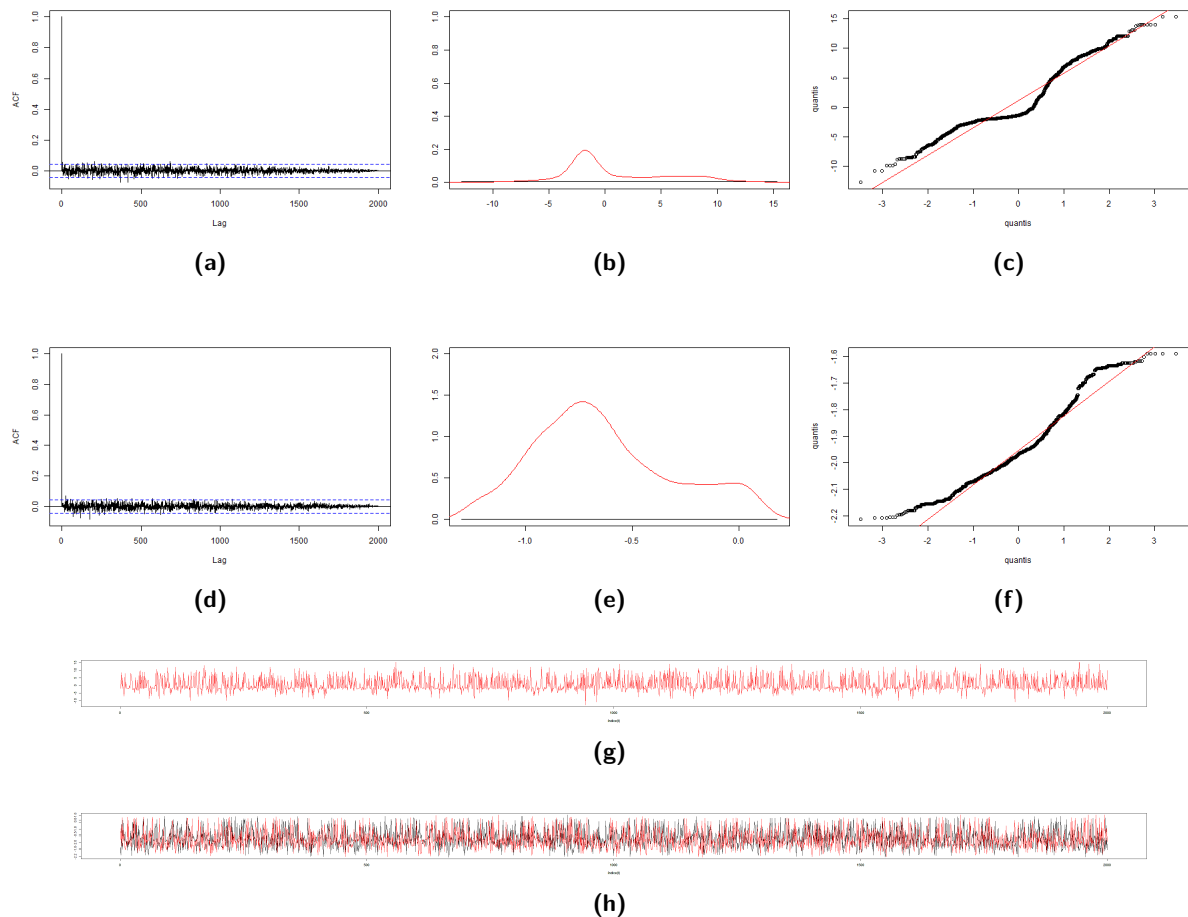


Figura B.1: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ para os modelos $M5$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M5b$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 2.

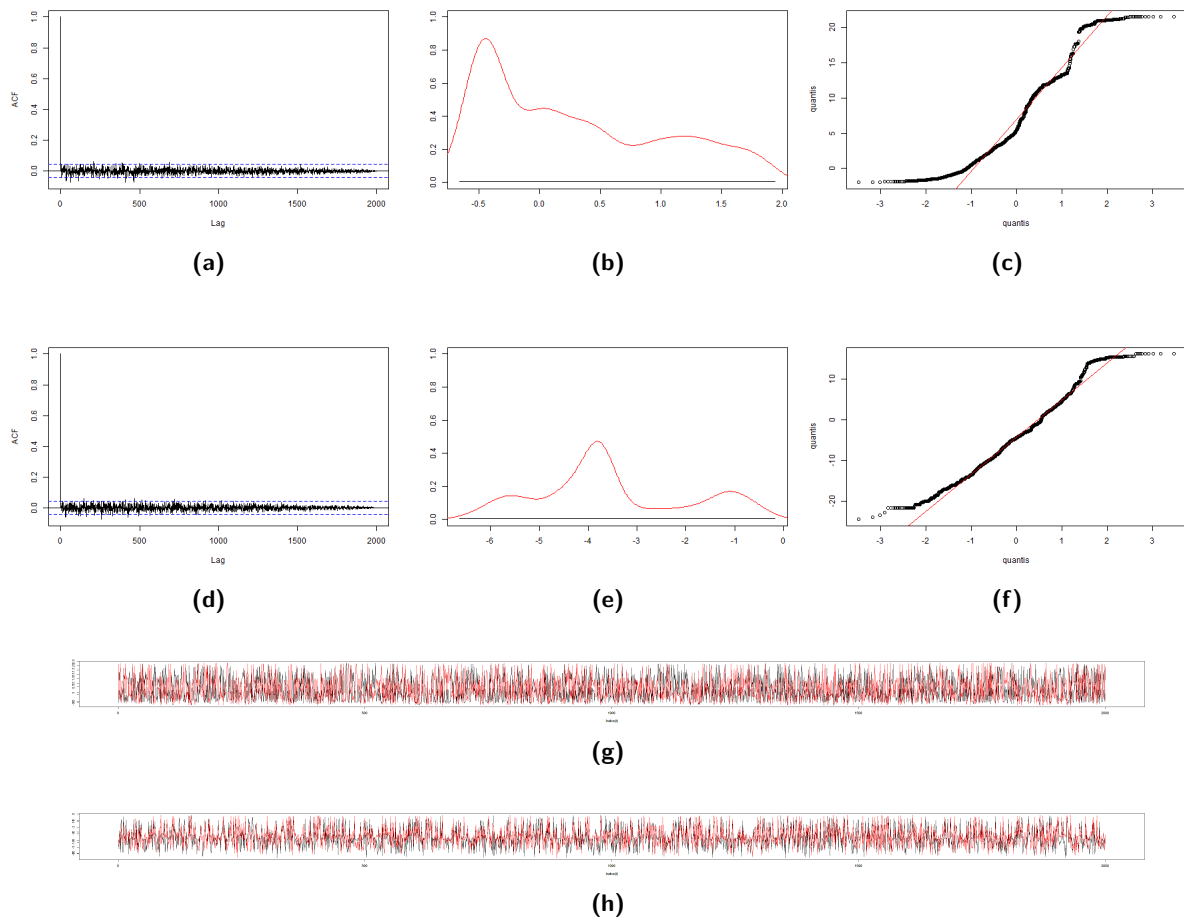


Figura B.2: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ para os modelos $M5h$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M5c$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 2.

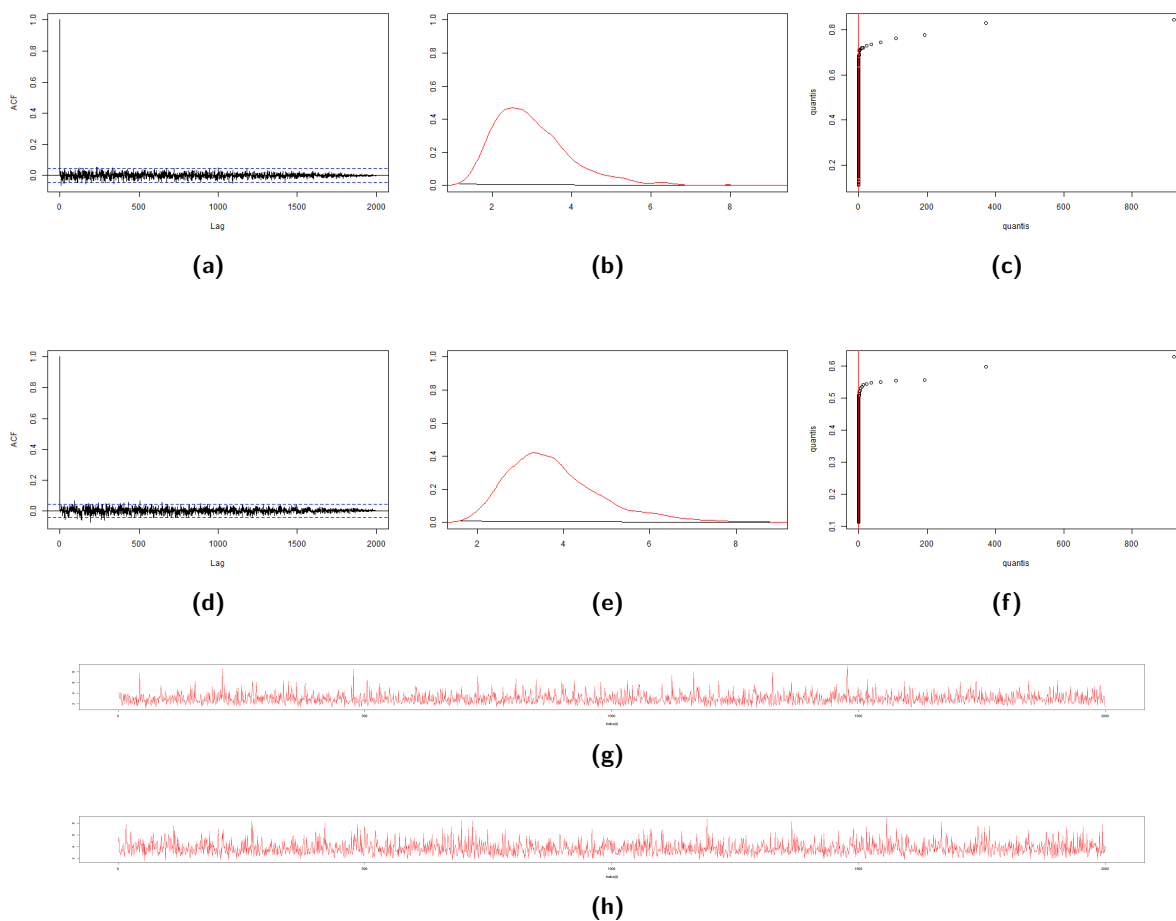


Figura B.3: Gráficos para o modelo $M5$, distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1,0.1)$ e para os parâmetros σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 2.

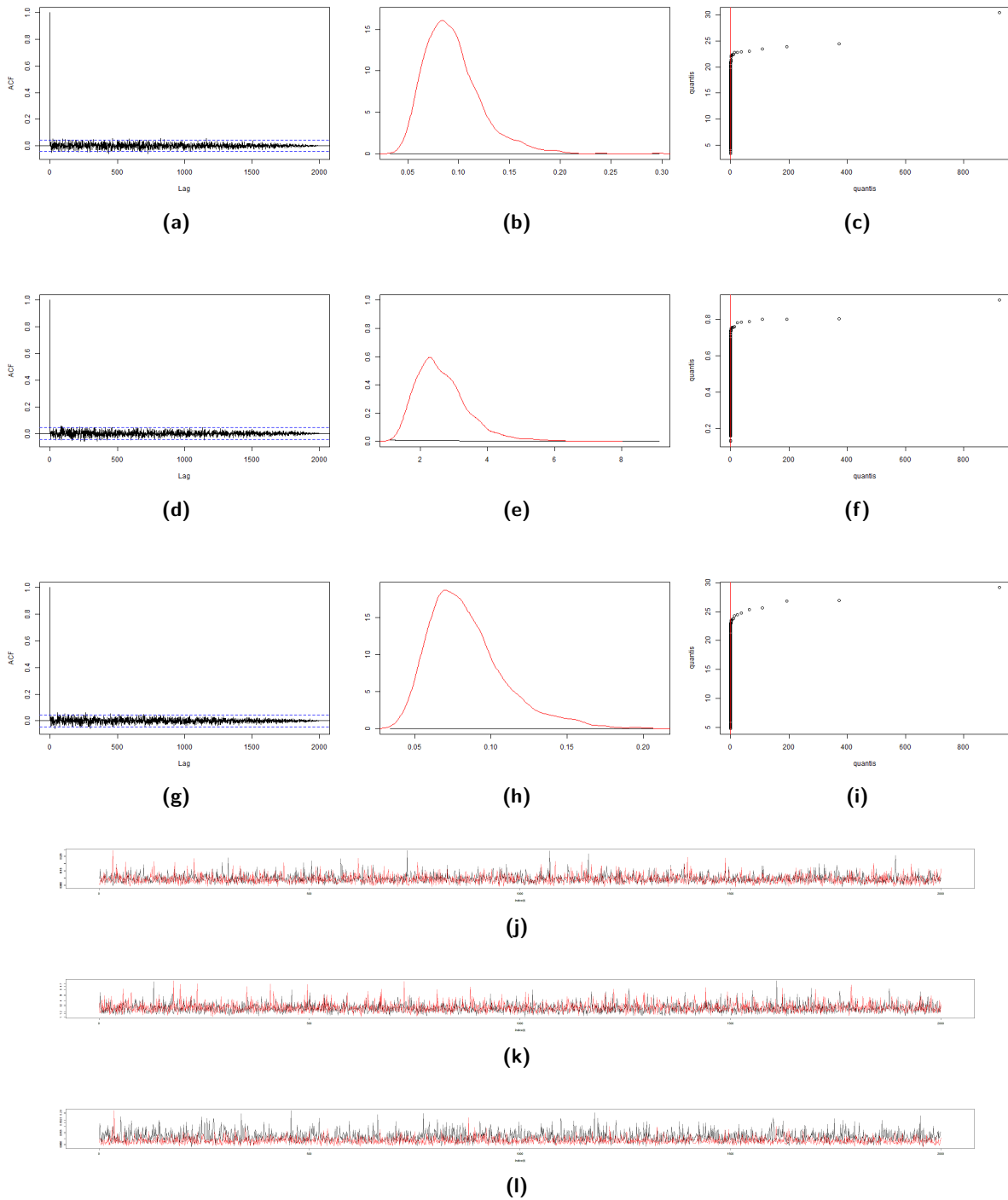


Figura B.4: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$, modelo $M5b$ e parâmetro σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M5h$ e parâmetro σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M5c$ e parâmetro σ_c^2 : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 2.

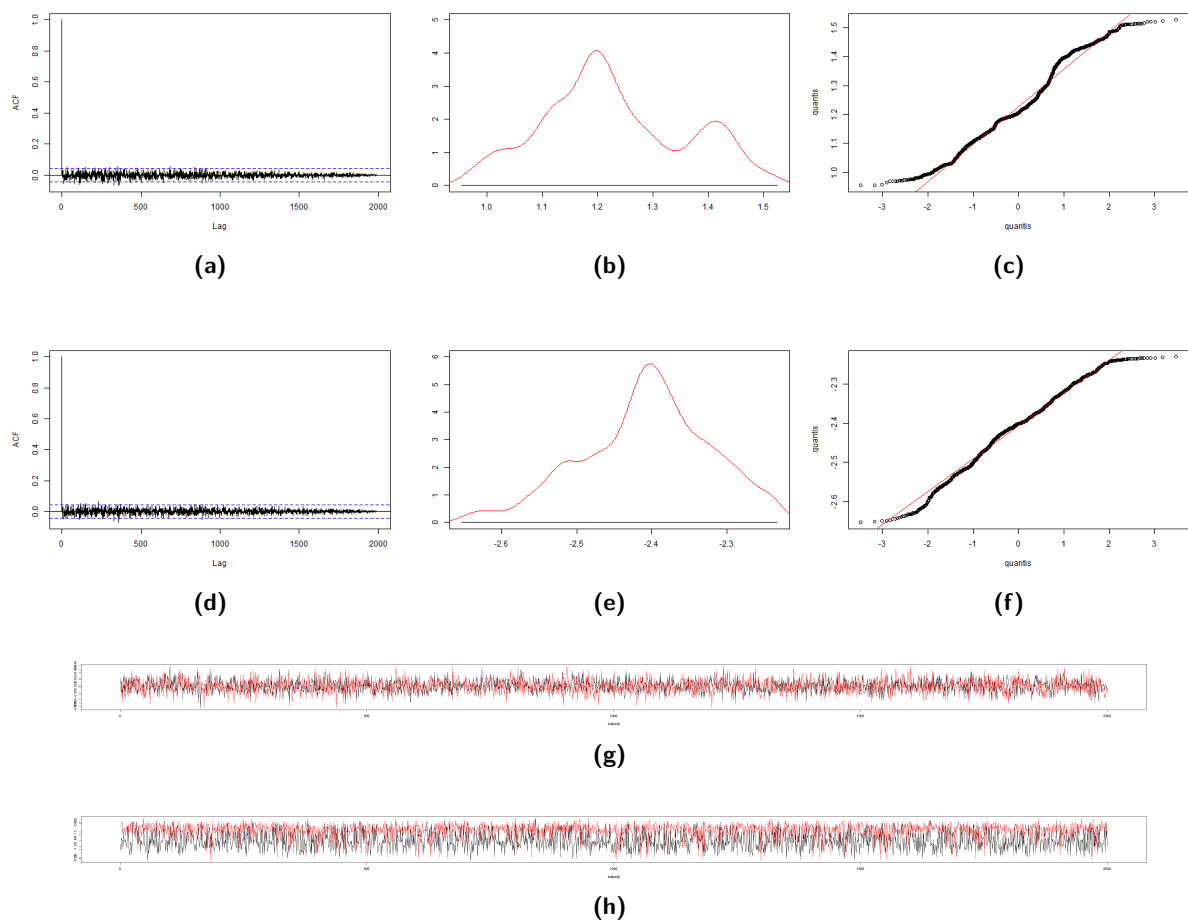


Figura B.5: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$, modelo M_5 e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 2.

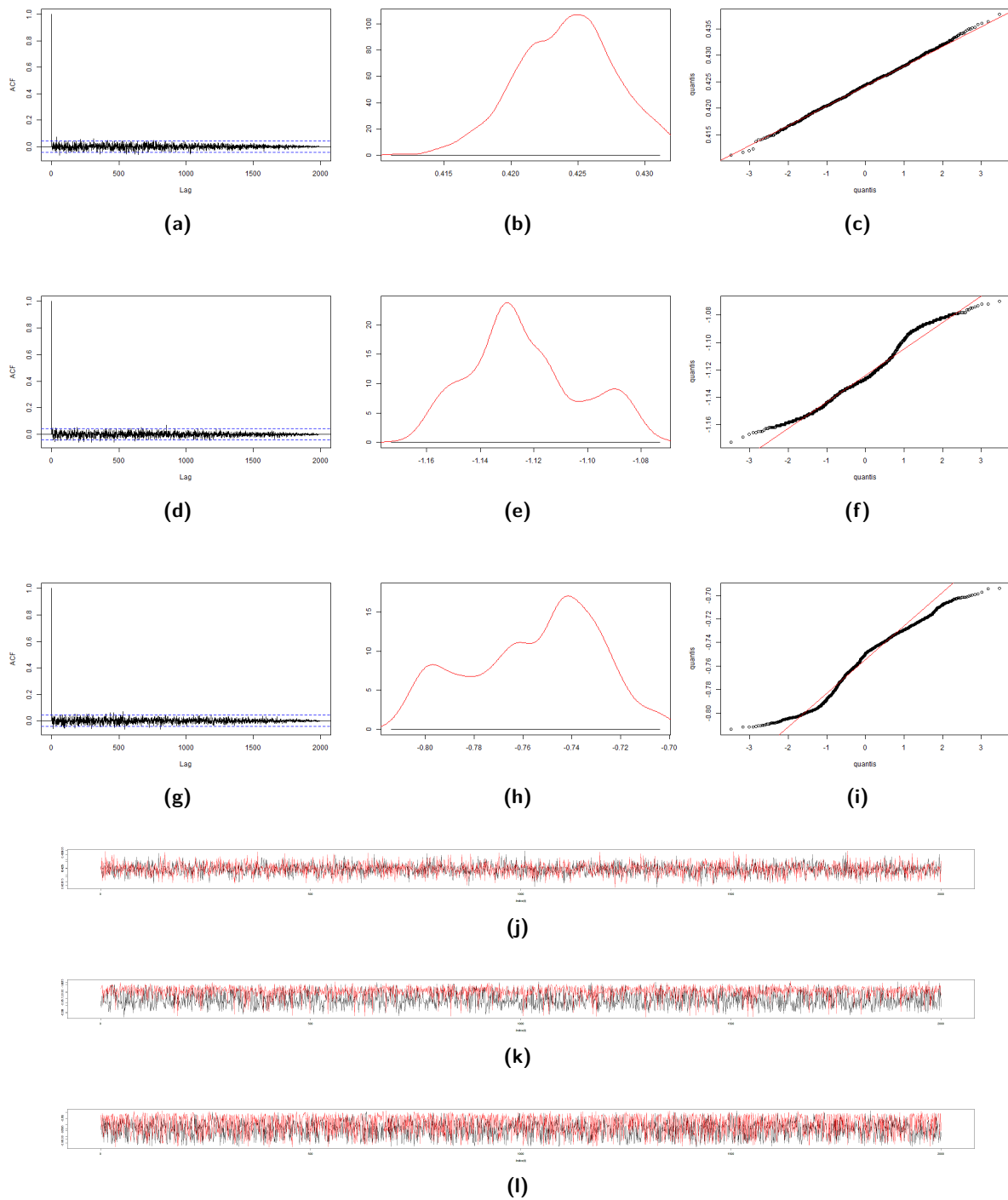


Figura B.6: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1,0.1)$, modelo $M5b$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M5h$ e parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M5c$ e parâmetro b_{16} : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 2.

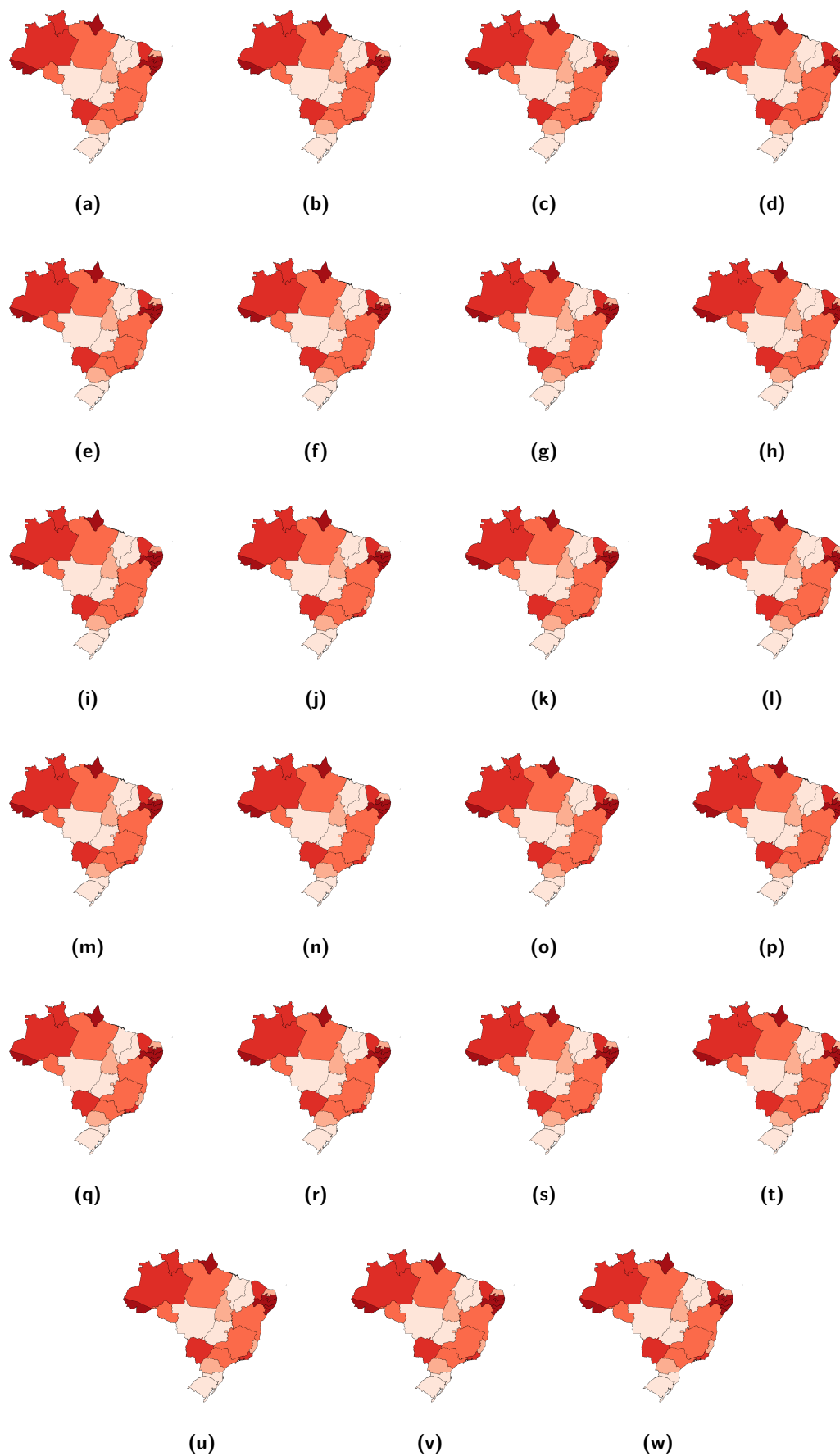


Figura B.7: Mapa dos estados brasileiros com as chances de mortalidade infantil para o modelo $M5bh$ para os anos de: (a) 1991 até (w) 2013 - Exemplo 2. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

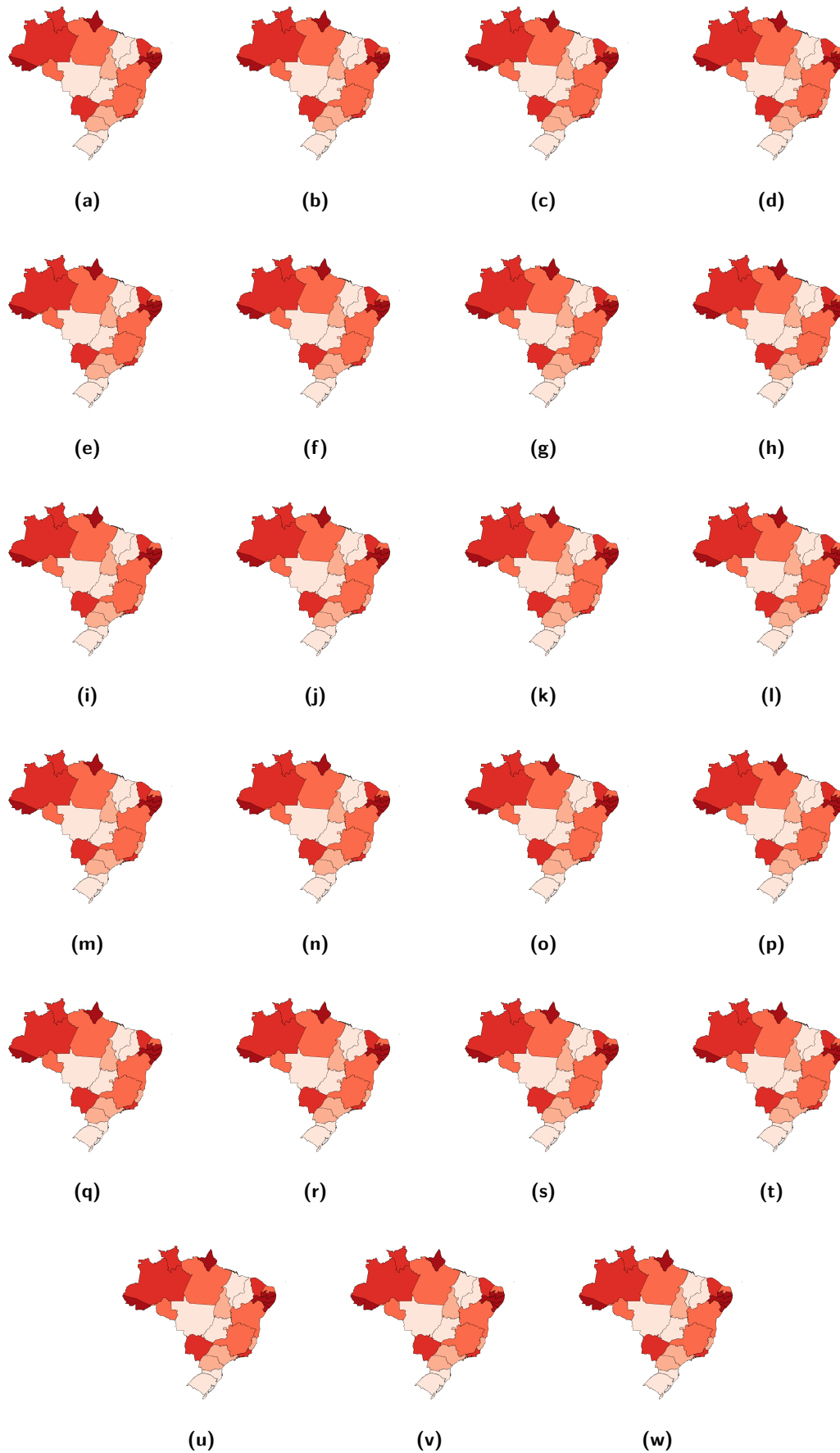


Figura B.8: Mapa dos estados brasileiros com as chances de mortalidade infantil para o modelo $M5b$ para os anos de: (a) 1991 até (w) 2013 - Exemplo 2. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

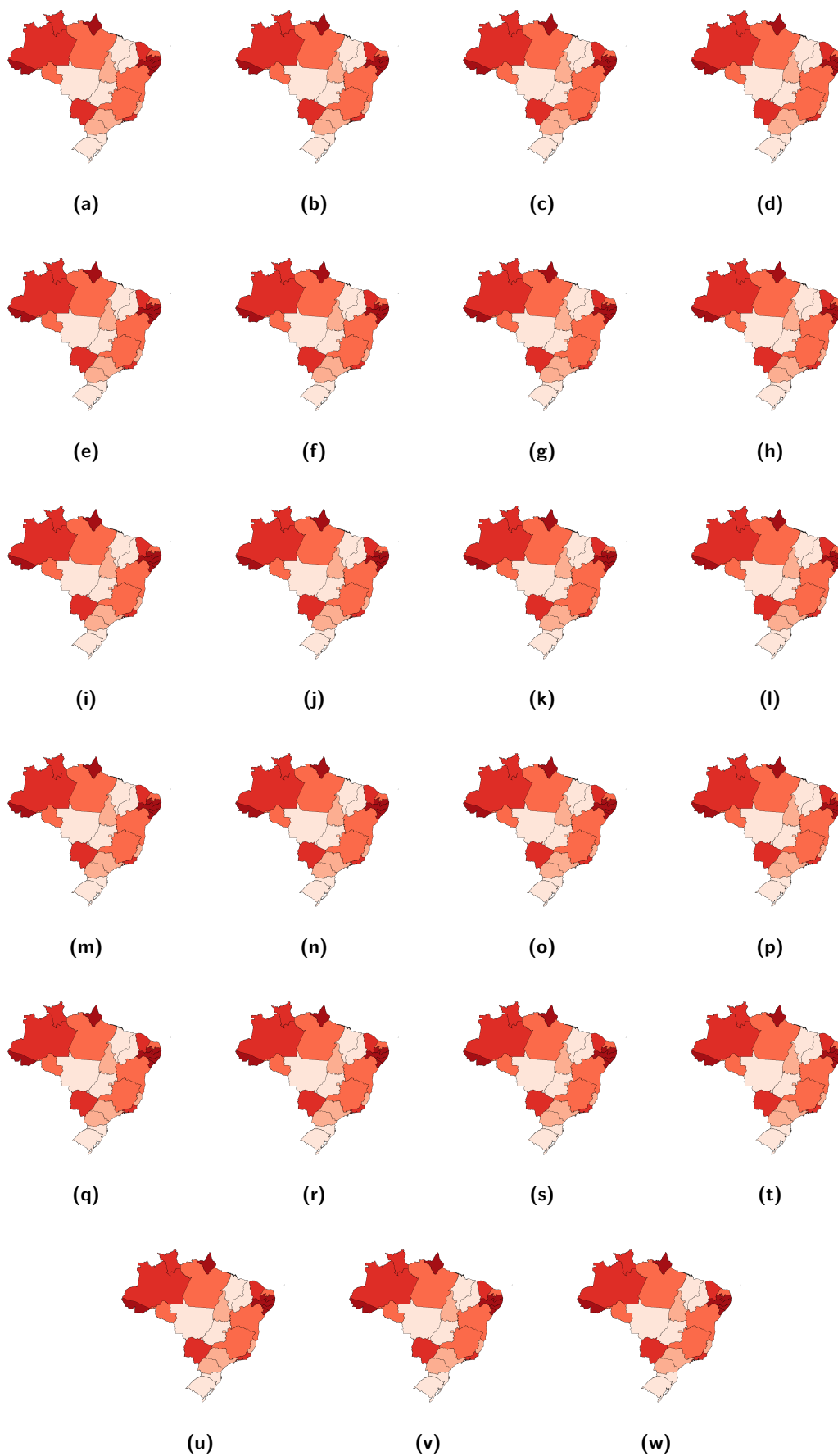


Figura B.9: Mapa dos estados brasileiros com as chances de mortalidade infantil para o modelo $M5h$ para os anos de: (a) 1991 até (w) 2013 - Exemplo 2. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

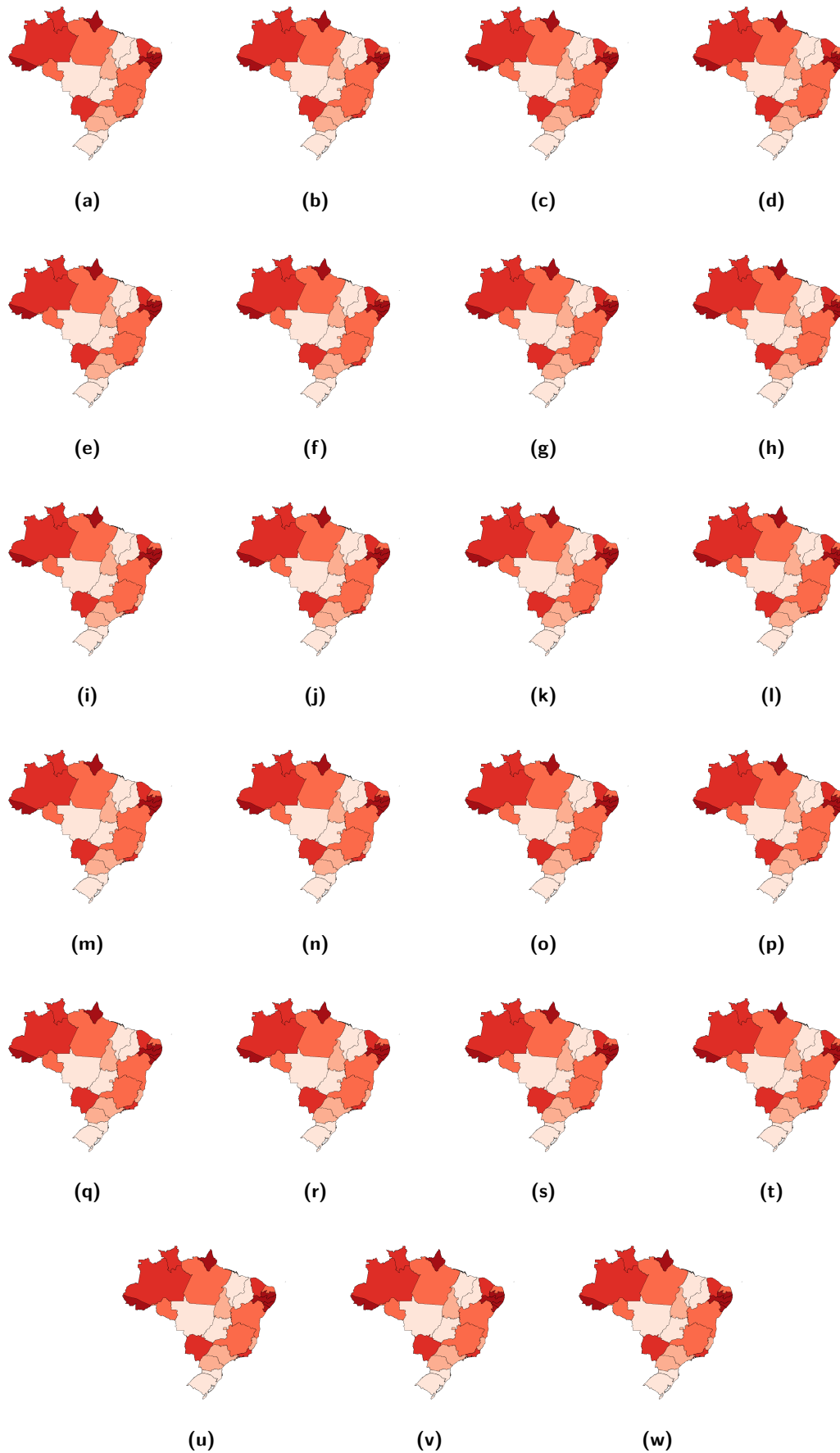


Figura B.10: Mapa dos estados brasileiros com as chances de mortalidade infantil para o modelo $M5c$ para os anos de: (a) 1991 até (w) 2013 - Exemplo 2. As cores graduadas em cada estado indicam o aumento da chance de ocorrência.

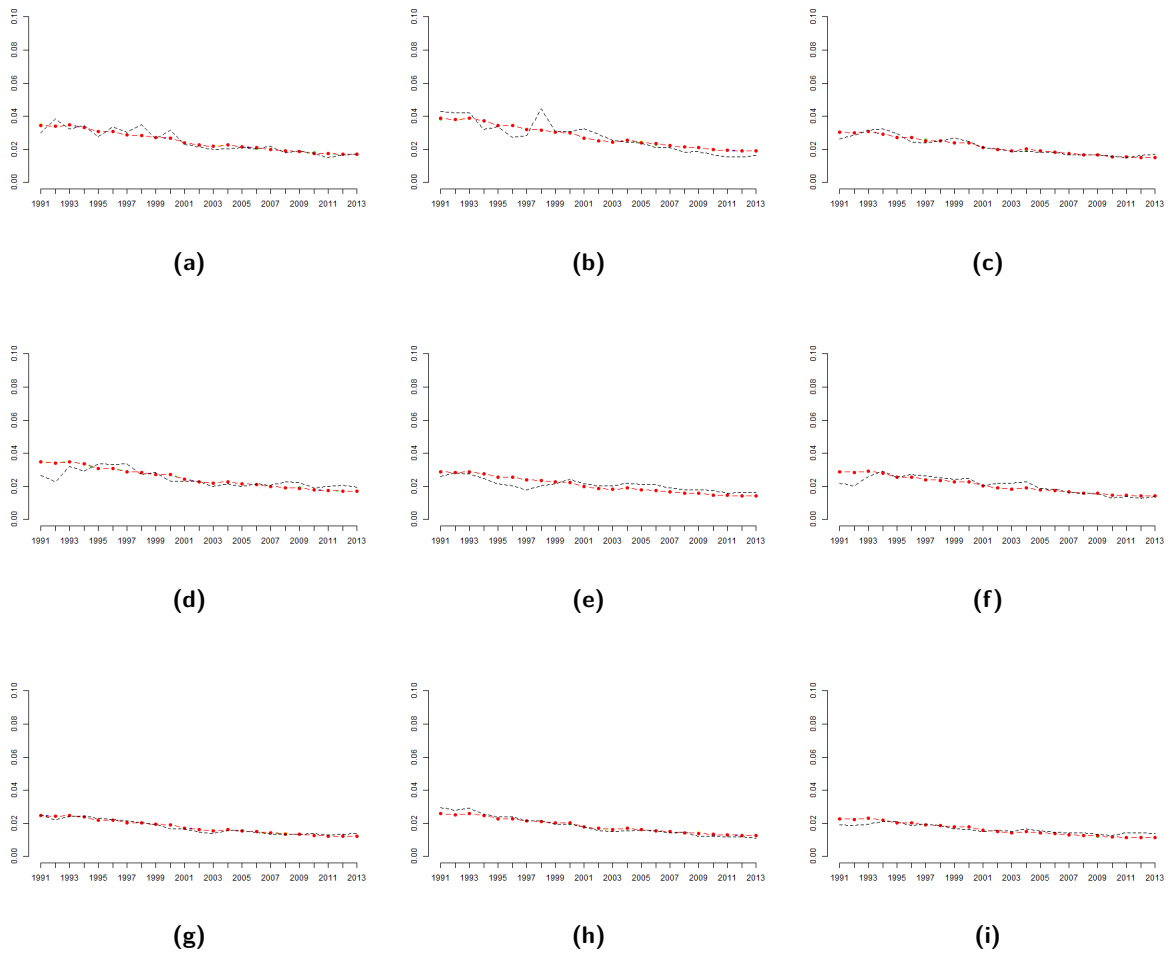


Figura B.11: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de mortalidade infantil durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M5bh$ (amarelo), $M5b$ (azul), $M5h$ (vermelho) e $M5c$ (verde) para os estados: (a) AC, (b) AL, (c) AM, (d) AP, (e) BA, (f) CE, (g) DF, (h) ES e (i) GO - Exemplo 2.

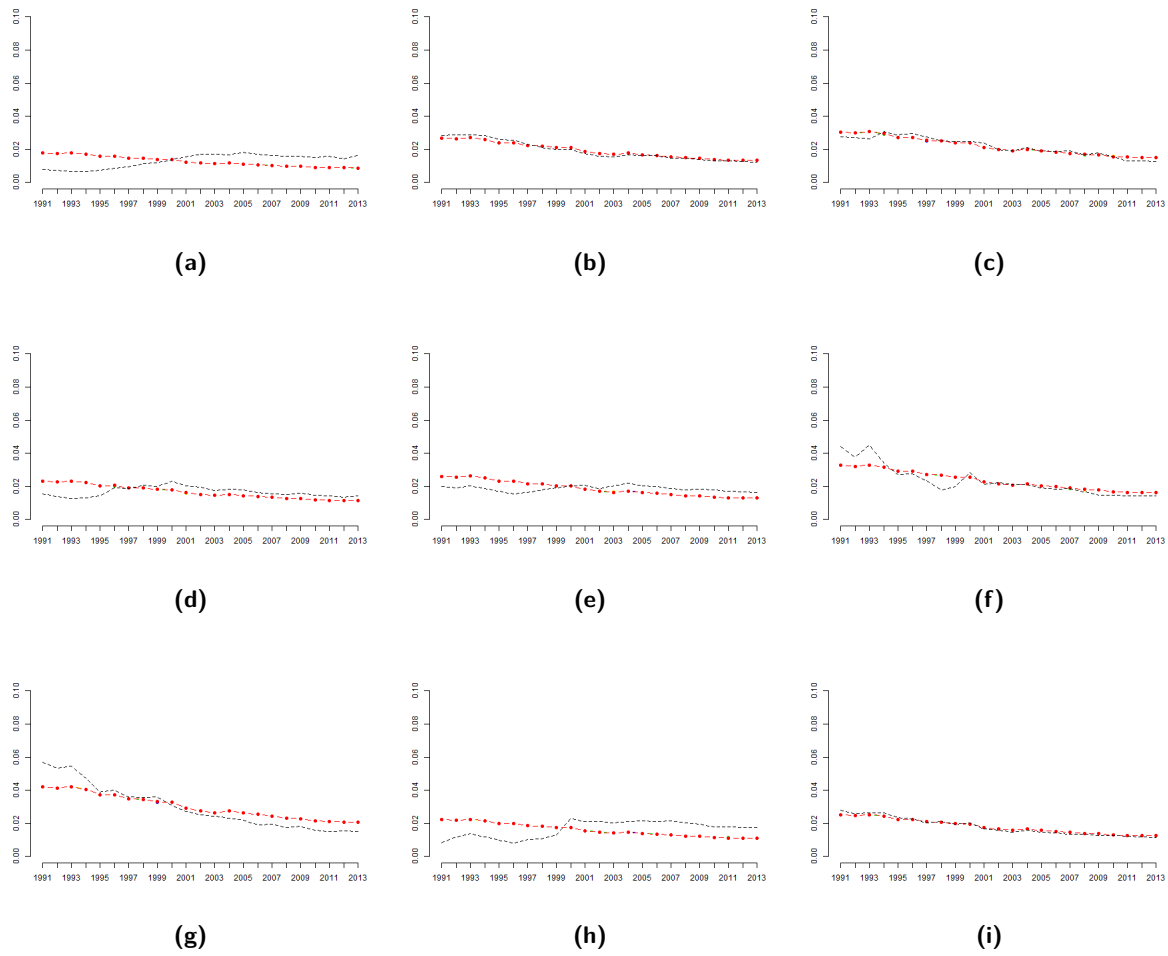
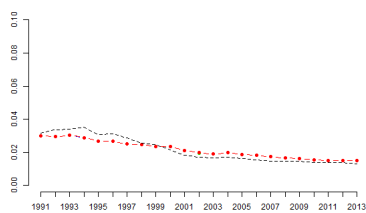
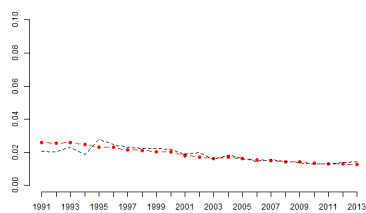


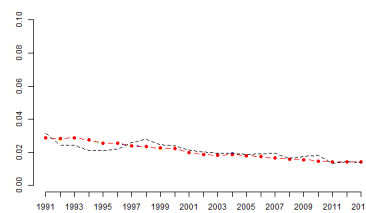
Figura B.12: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de mortalidade infantil durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M5bh$ (amarelo), $M5b$ (azul), $M5h$ (vermelho) e $M5c$ (verde) para os estados: (a) MA, (b) MG, (c) MS, (d) MT, (e) PA, (f) PB, (g) PC, (h) PI e (i) PR - Exemplo 2.



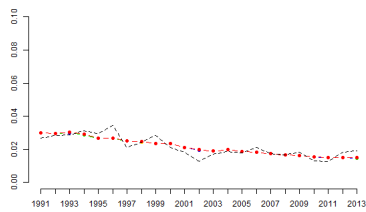
(a)



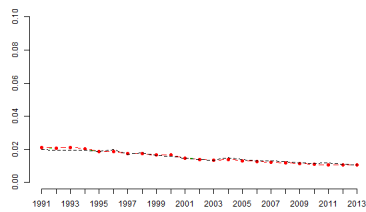
(b)



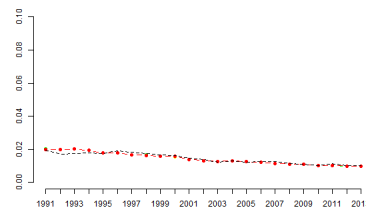
(c)



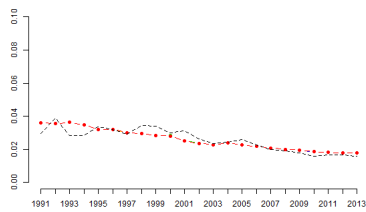
(d)



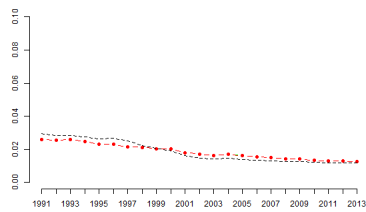
(e)



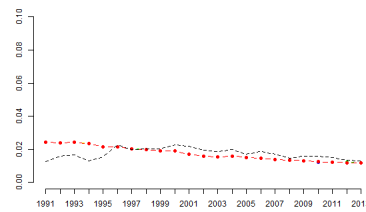
(f)



(g)



(h)



(i)

Figura B.13: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de mortalidade infantil durante os anos de 2005 a 2010 para os modelos $M5bh$ (amarelo), $M5b$ (azul), $M5h$ (vermelho) e $M5c$ (verde) para os estados: (a) RJ, (b) RN, (c) RO, (d) RR, (e) RS, (f) SC, (g) SE, (h) SP e (i) TO - Exemplo 2.

APÊNDICE C

GRÁFICOS AUXILIARES ÀS ANÁLISES PARA O EXEMPLO 3 DO CAPÍTULO 3

Neste apêndice estão os gráficos auxiliares que correspondem às análises realizadas no Capítulo 3 e na Seção 3.3.

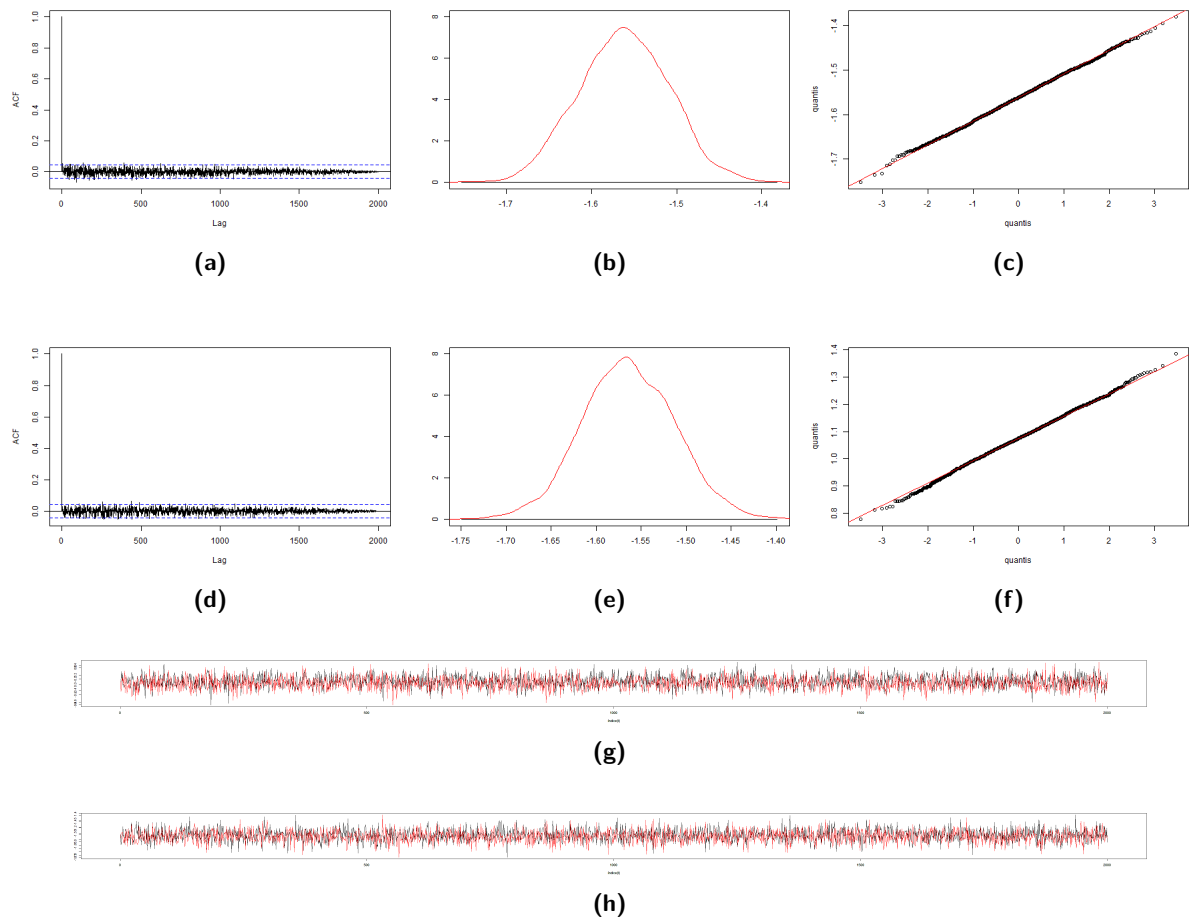


Figura C.1: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$ para os modelos $M2$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M2b$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 3.

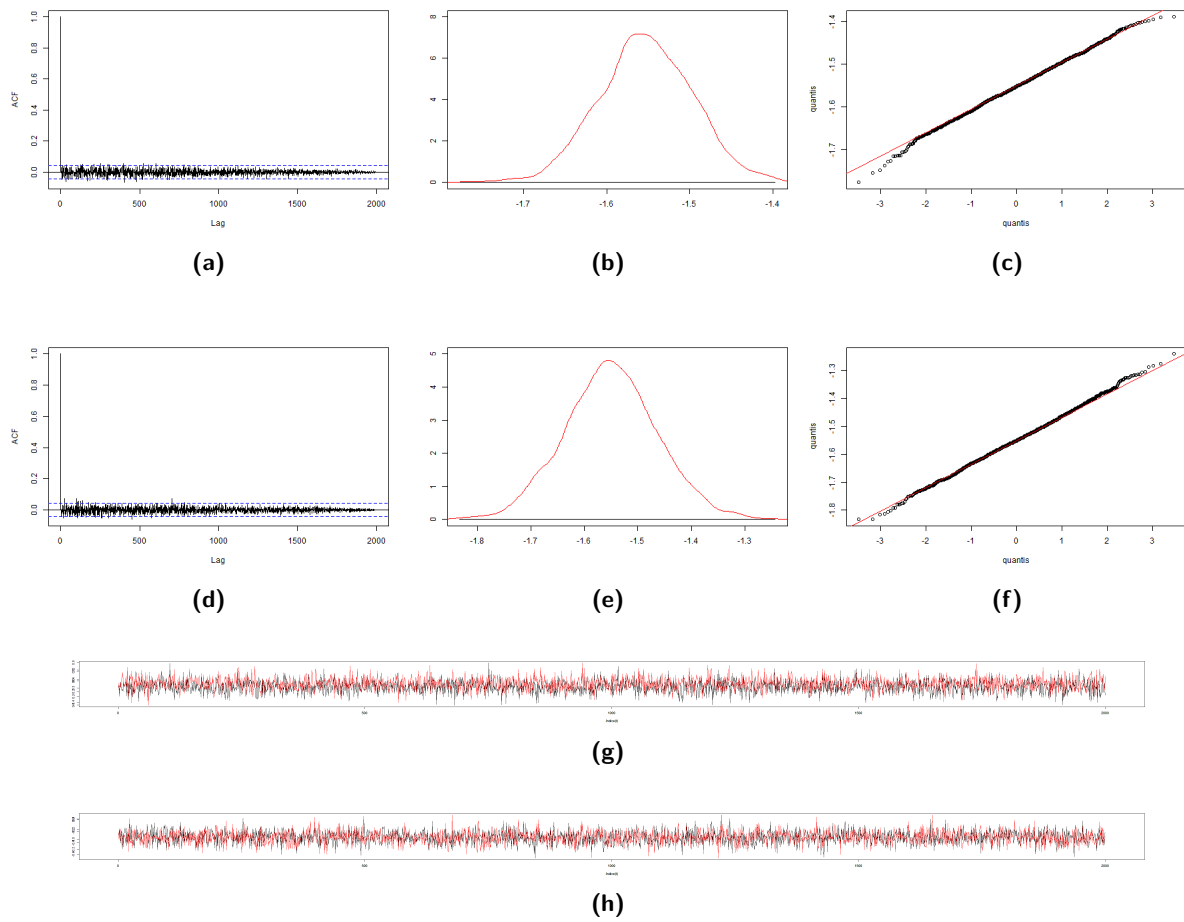


Figura C.2: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$ para os modelos $M2h$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M2c$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 3.

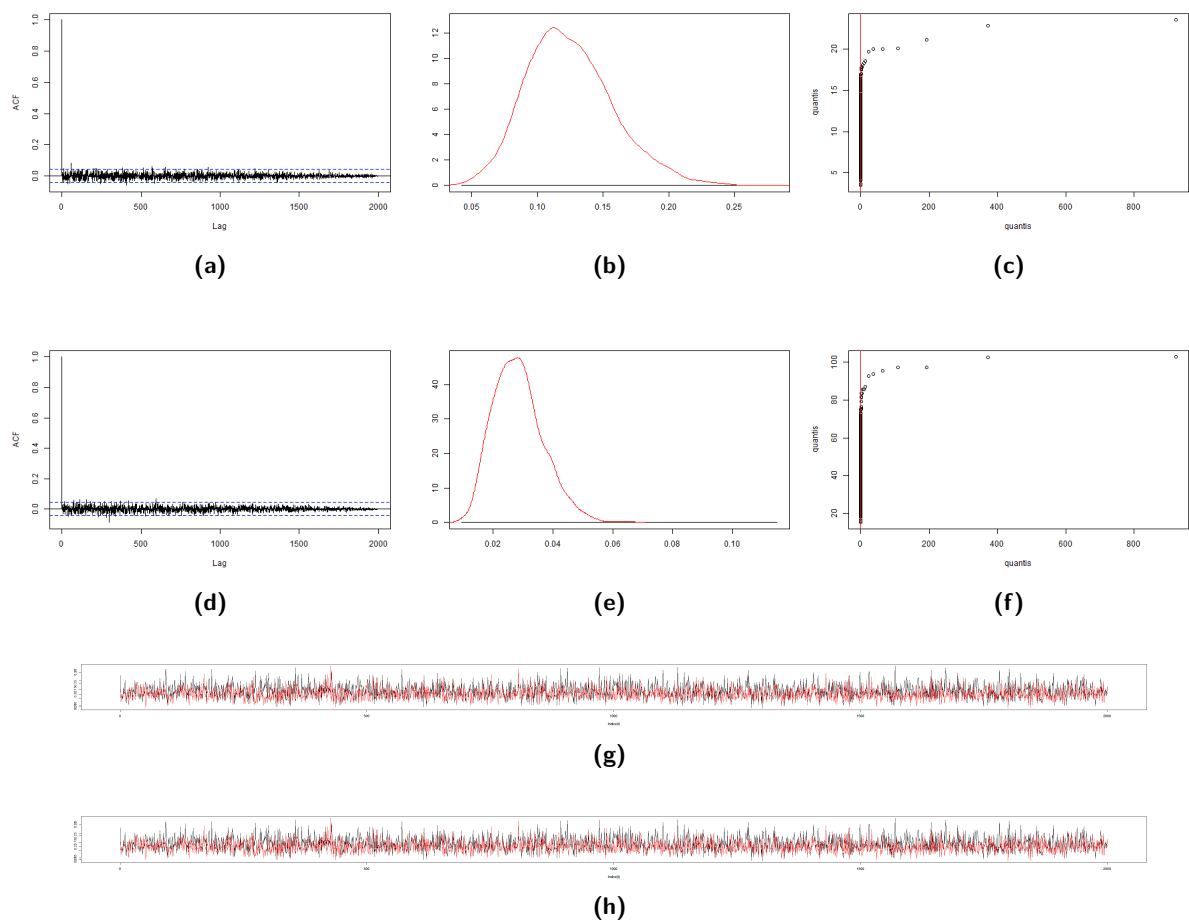


Figura C.3: Gráficos para o modelo $M2$, distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.001, 0.001)$ e para os parâmetros σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 3.

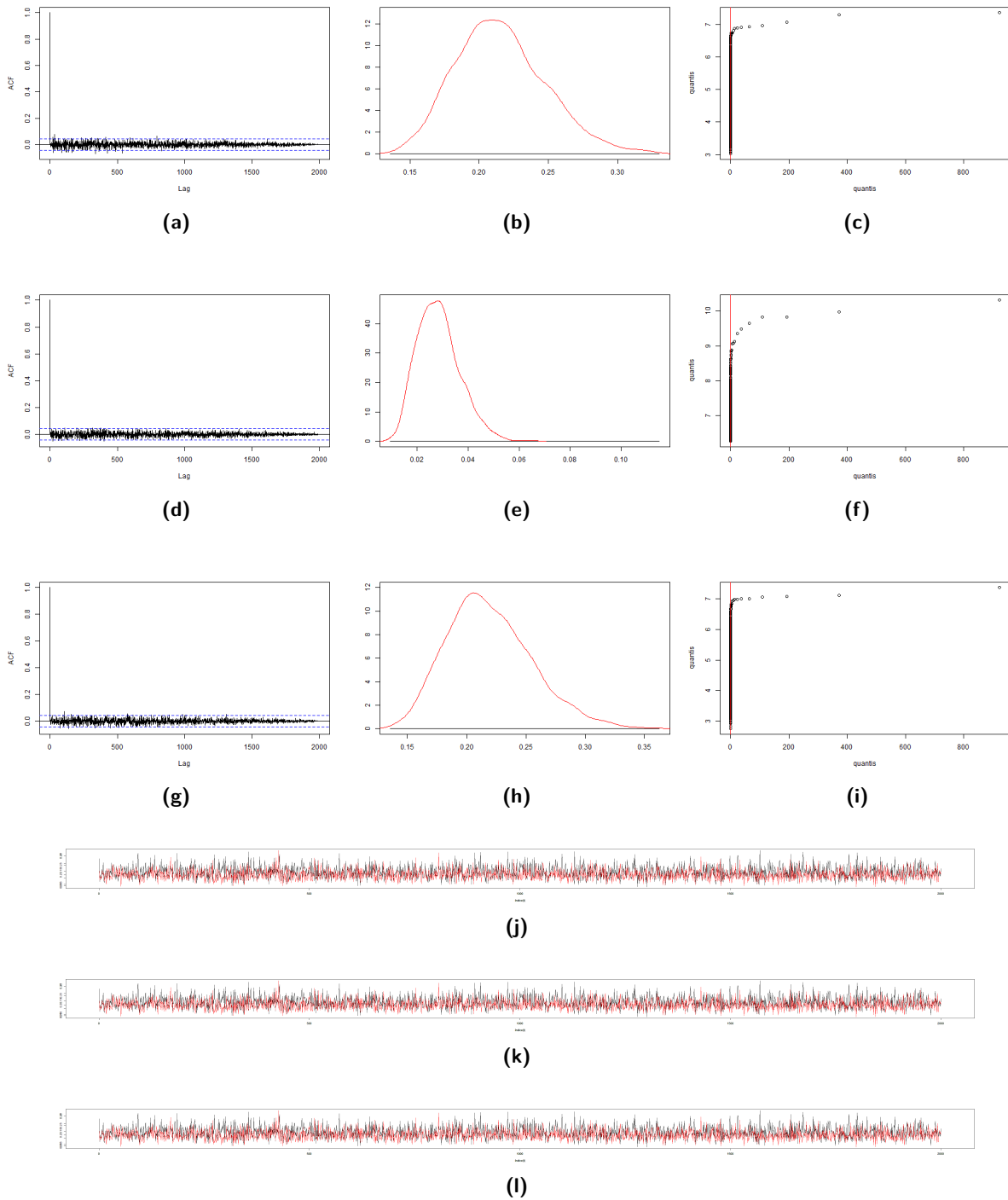


Figura C.4: Gráficos para distribuição *a priori* $GI(0.001, 0.001)$, modelo $M2b$ e parâmetro σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M2h$ e parâmetro σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M2c$ e parâmetro σ_c^2 : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 3.

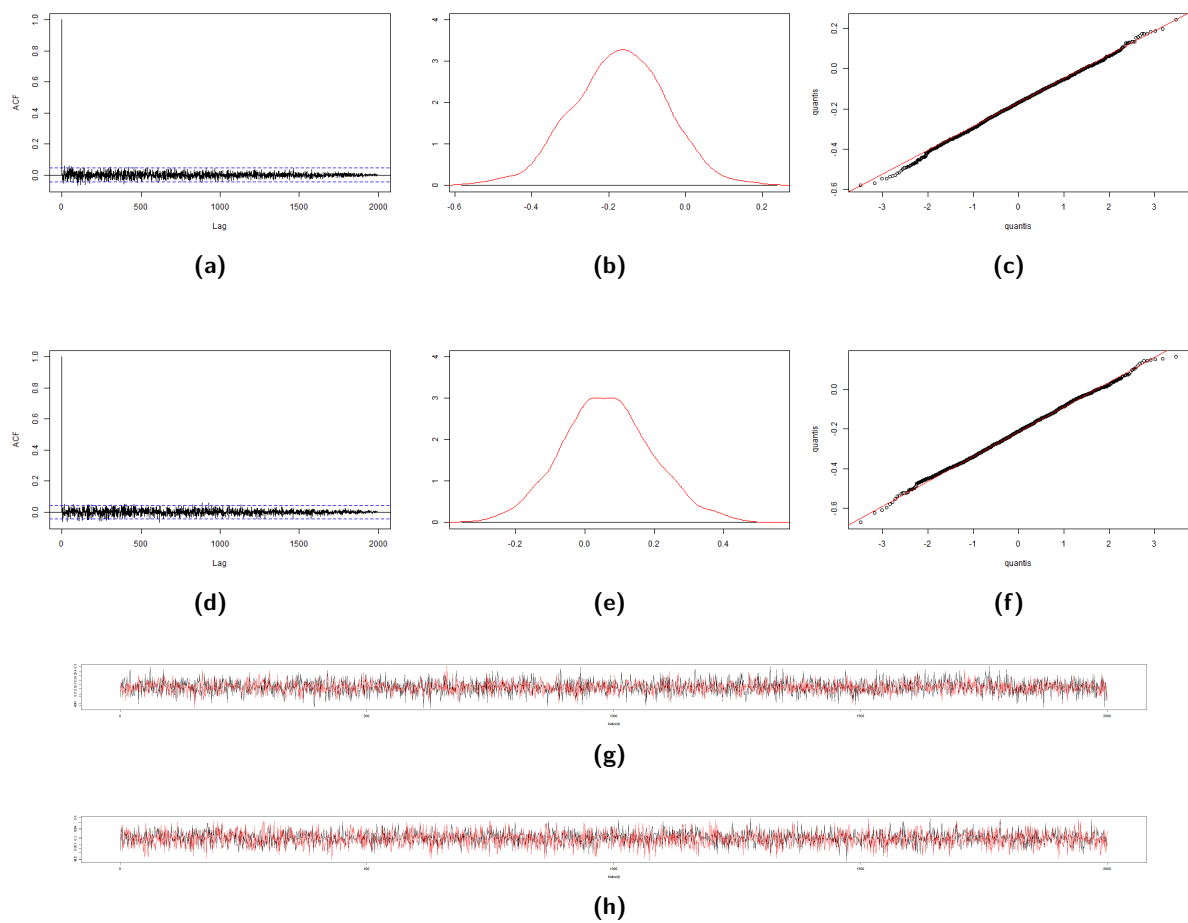


Figura C.5: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$, modelo $M2$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 3.

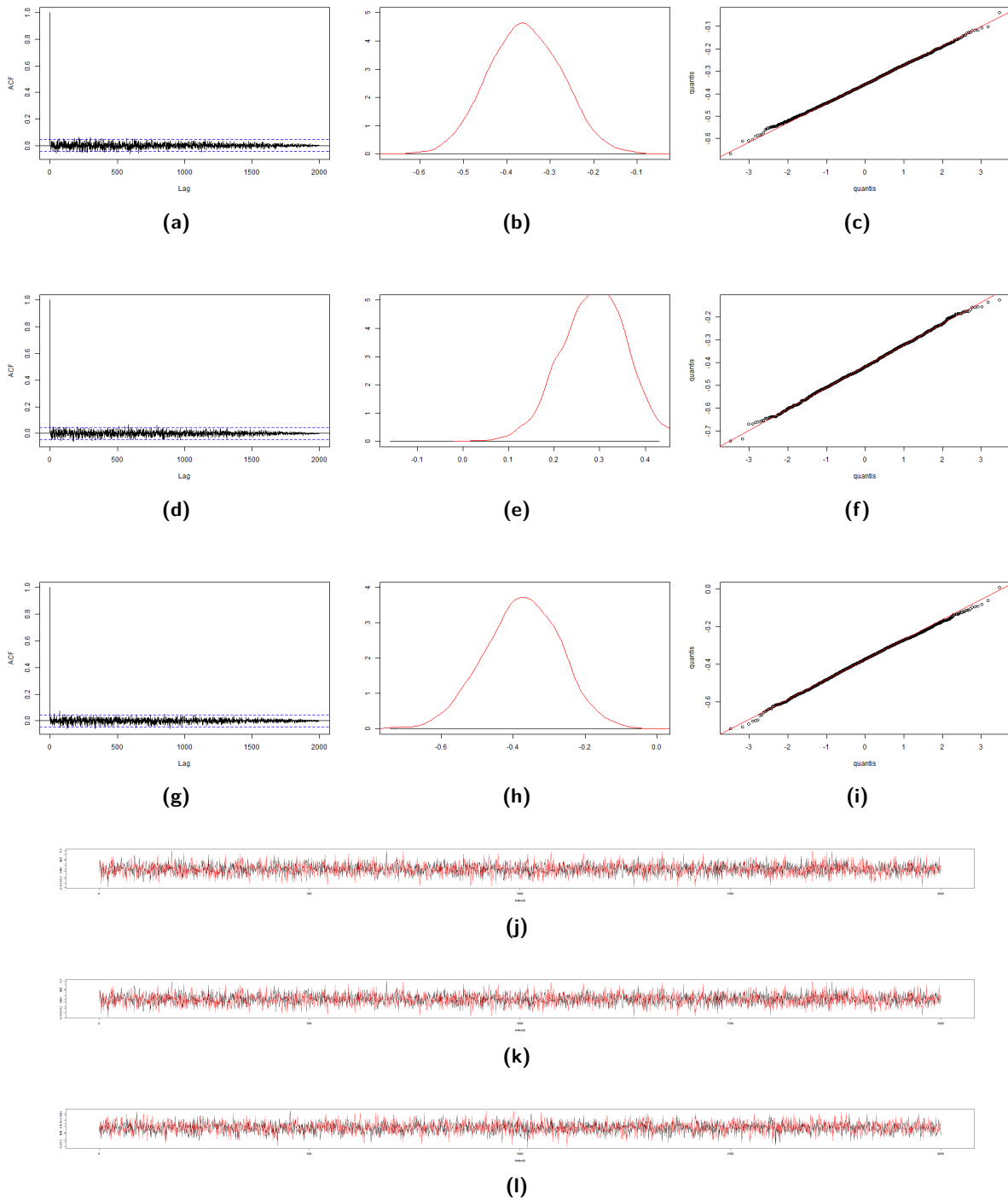


Figura C.6: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.001, 0.001)$, modelo $M2b$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M2h$ e parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M2c$ e parâmetro b_{16} : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 3.

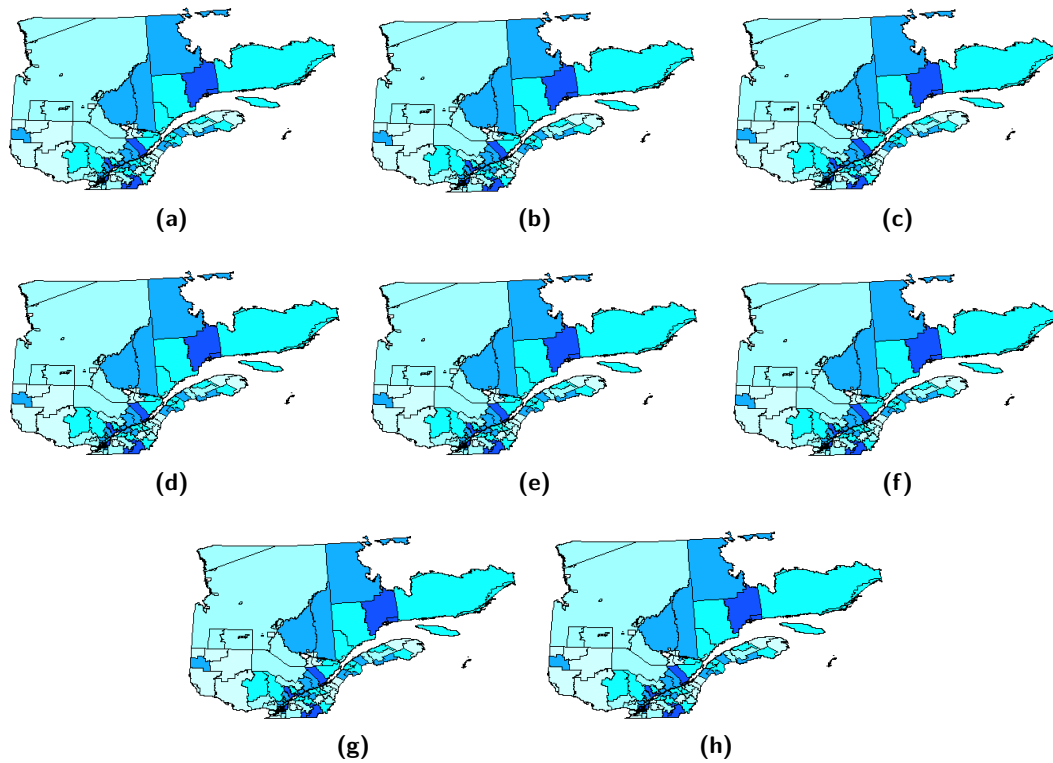


Figura C.7: Mapa das ALS com as chances de ocorrência de revascularização para o modelo $M2bh$ para os anos de: (a) 1993 - (h) 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam o aumento da chance de ocorrência - Exemplo 3.

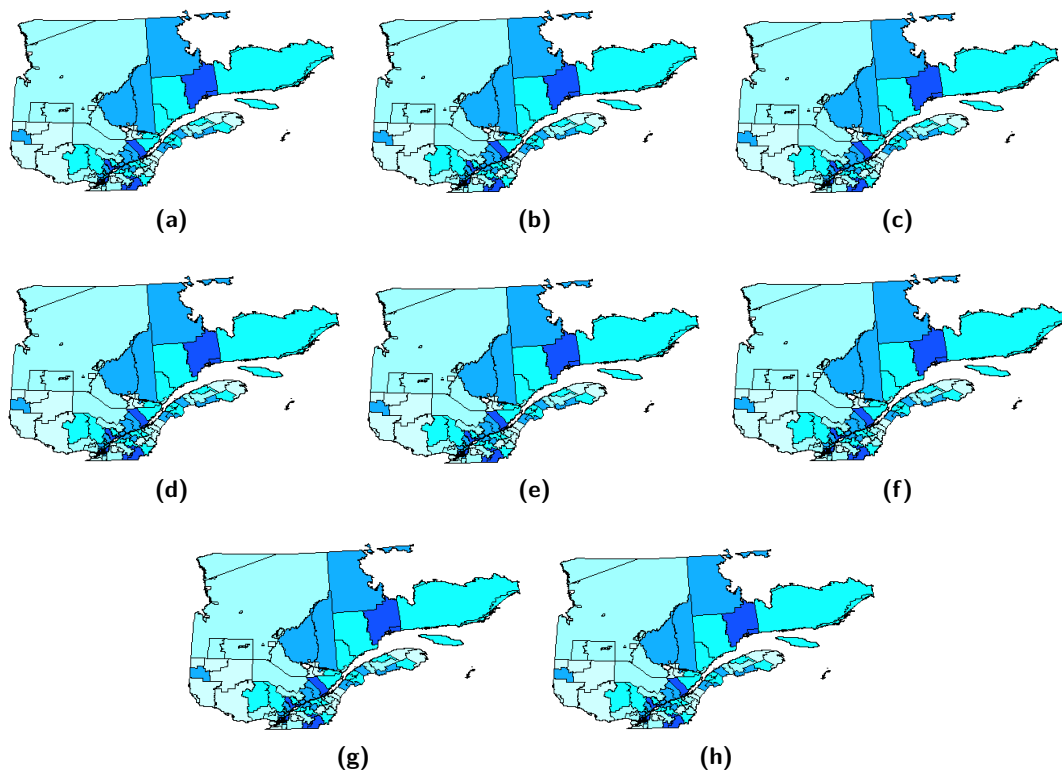


Figura C.8: Mapa das ALS com as chances de ocorrência de revascularização para o modelo $M2b$ para os anos de: (a) 1993 - (h) 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam o aumento da chance de ocorrência - Exemplo 3.

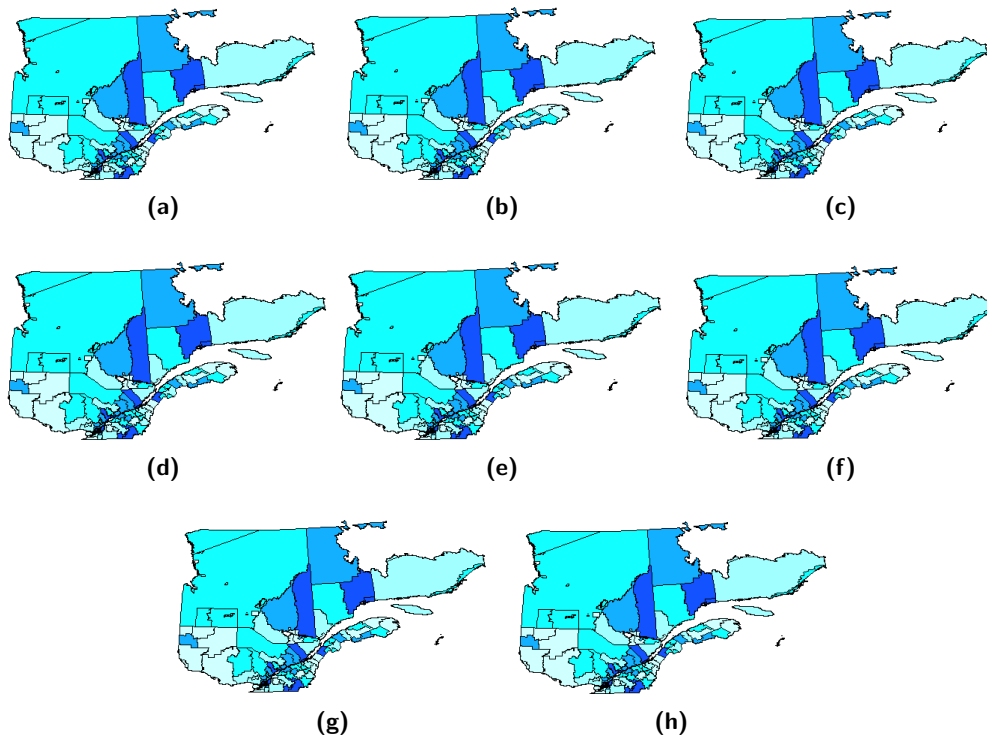


Figura C.9: Mapa das ALS com as chances de ocorrência de revascularização para o modelo $M2h$ para os anos de: (a) 1993 - (h) 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam o aumento da chance de ocorrência - Exemplo 3.

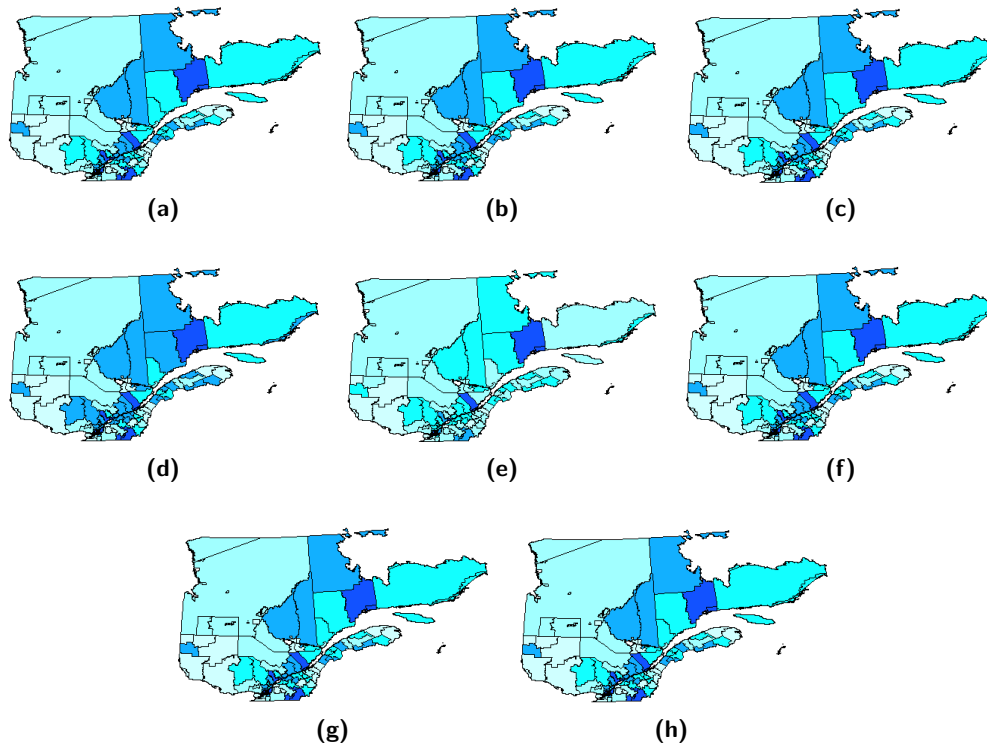


Figura C.10: Mapa das ALS com as chances de ocorrência de revascularização para o modelo $M2c$ para os anos de: (a) 1993 - (h) 2000. As cores graduadas em cada ALS indicam o aumento da chance de ocorrência - Exemplo 3.

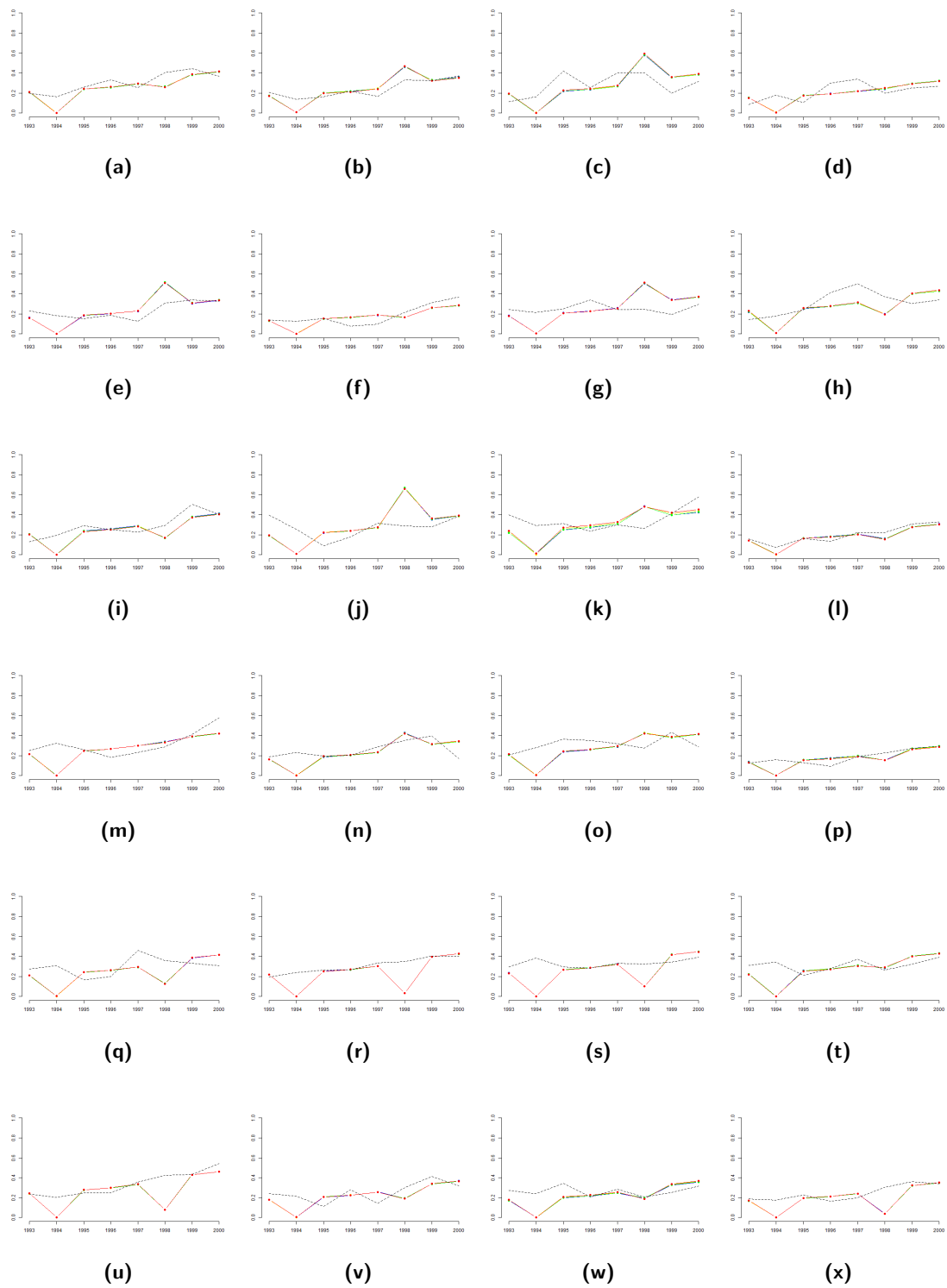


Figura C.11: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 1 até (x) 24 - Exemplo 3.

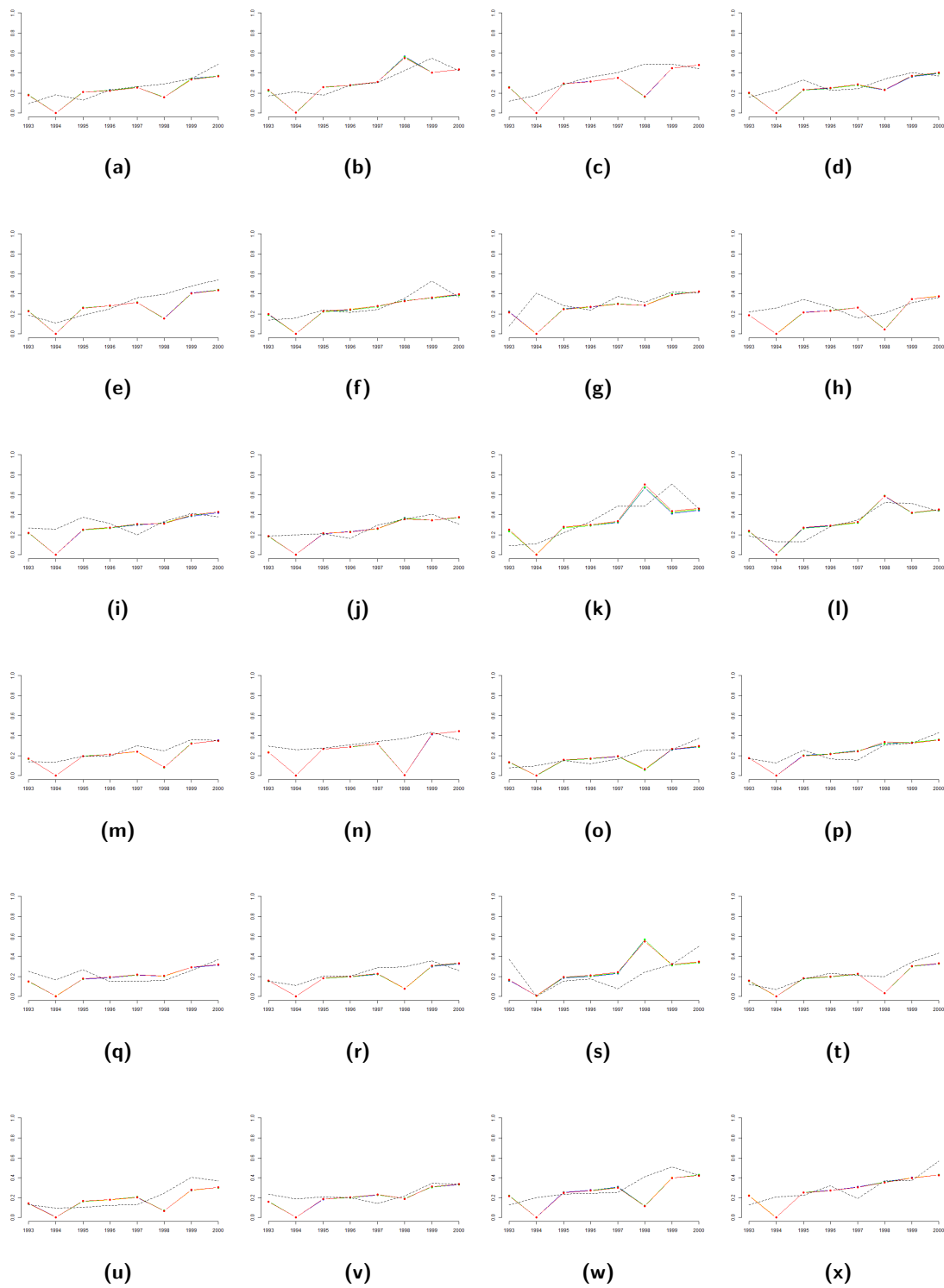


Figura C.12: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 25 até (x) 48 - Exemplo 3.

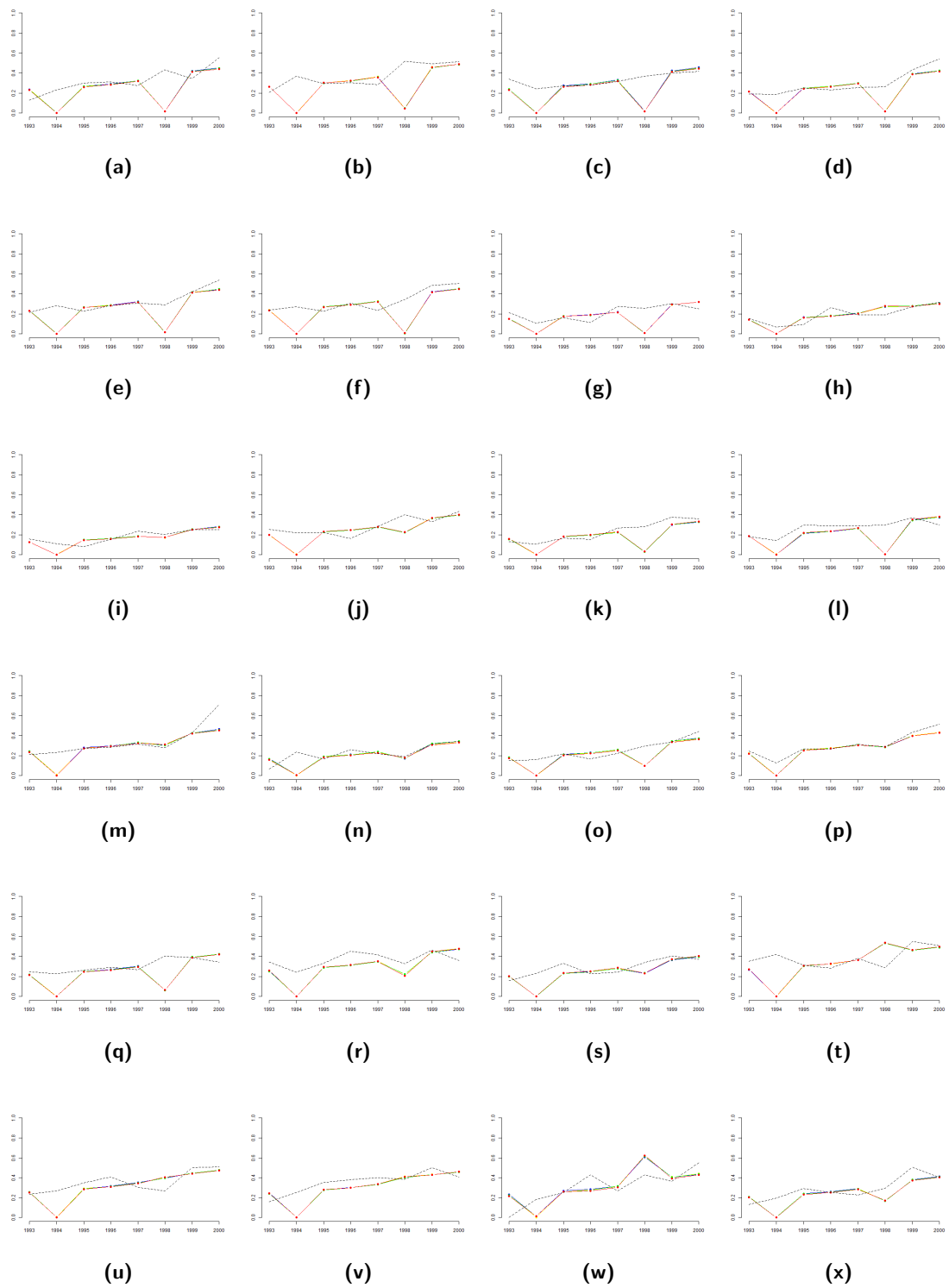


Figura C.13: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 49 até (x) 72 - Exemplo 3.

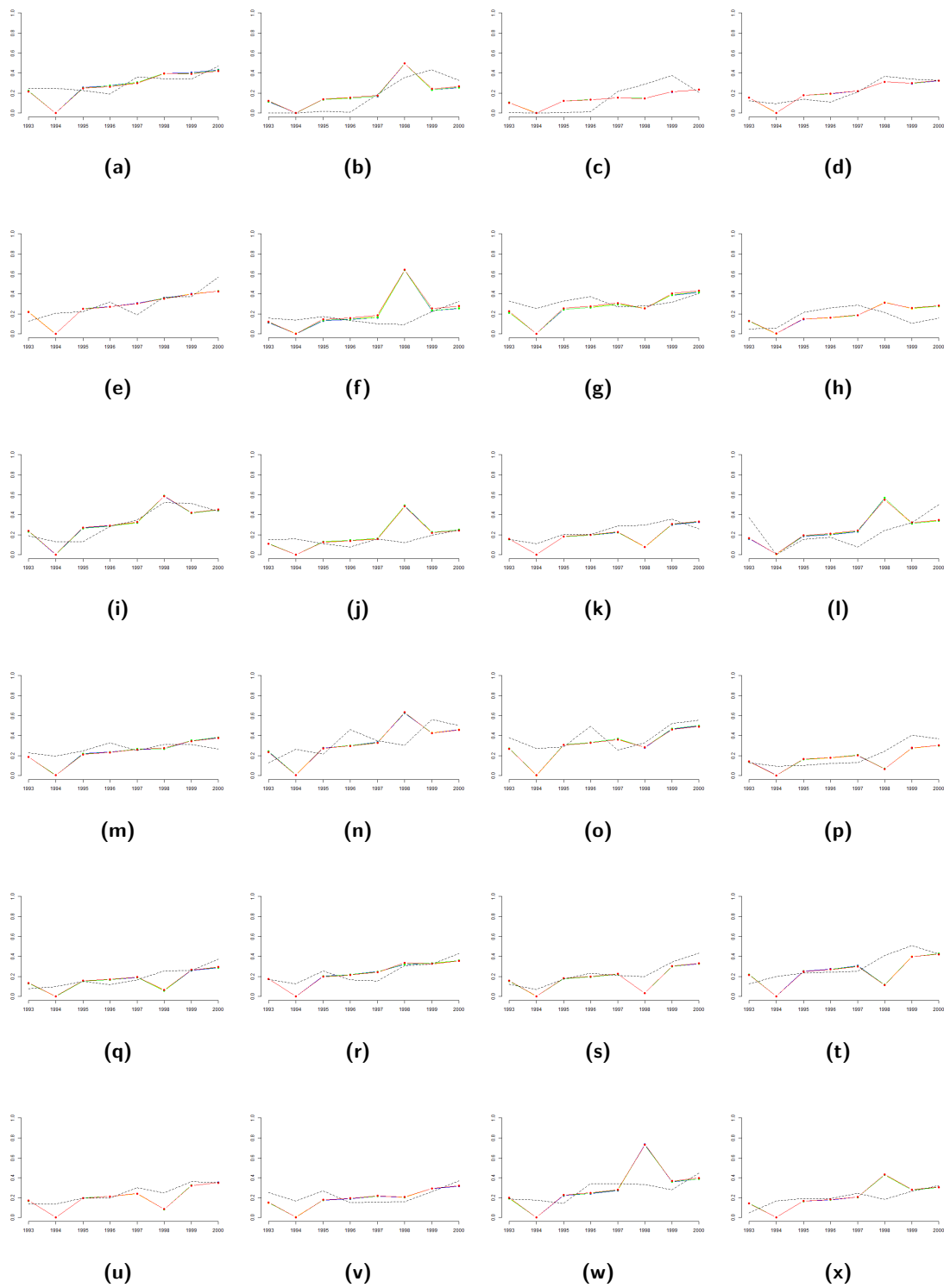


Figura C.14: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 73 até (x) 96 - Exemplo 3.

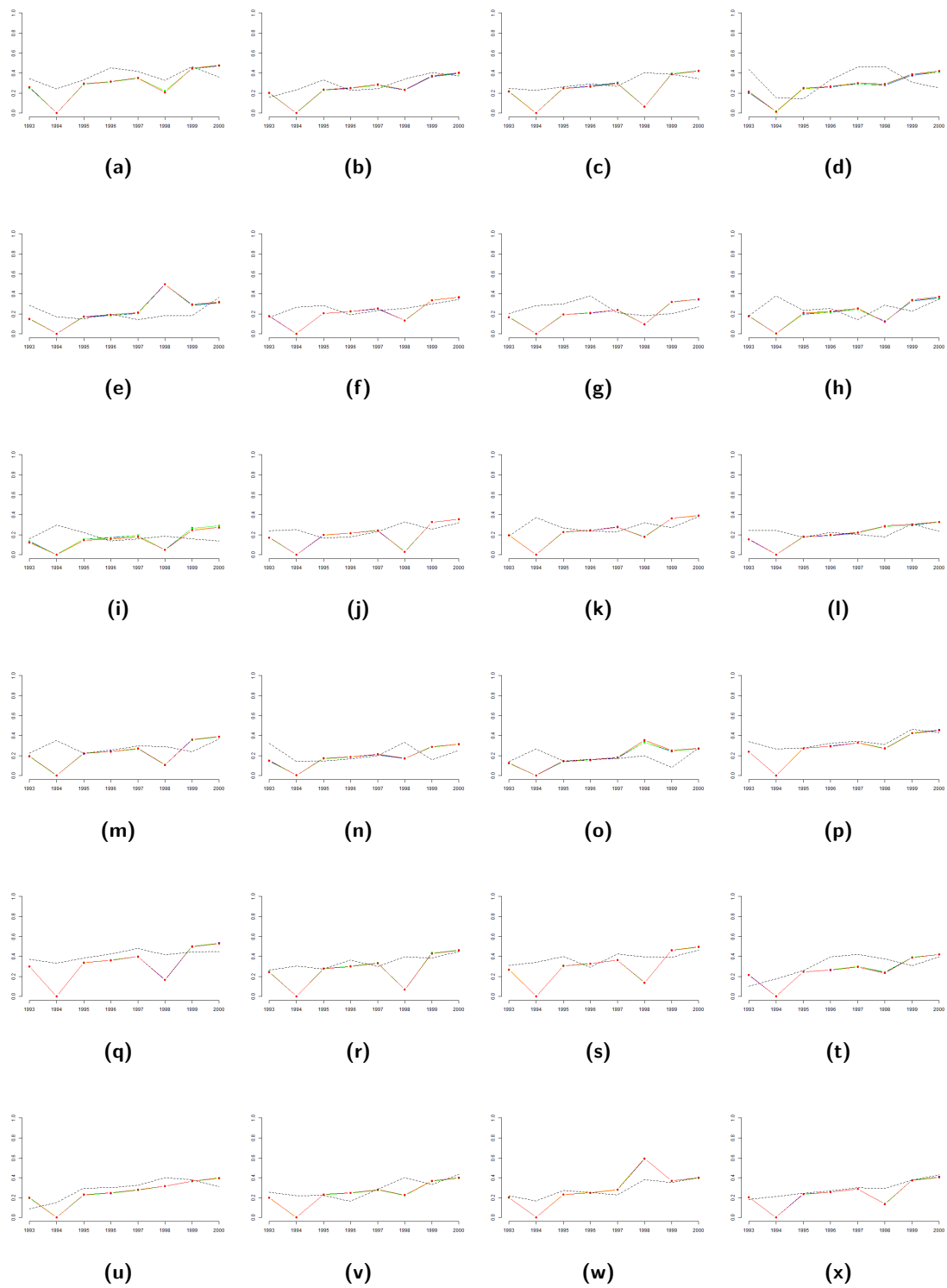


Figura C.15: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 97 até (x) 120 - Exemplo 3.

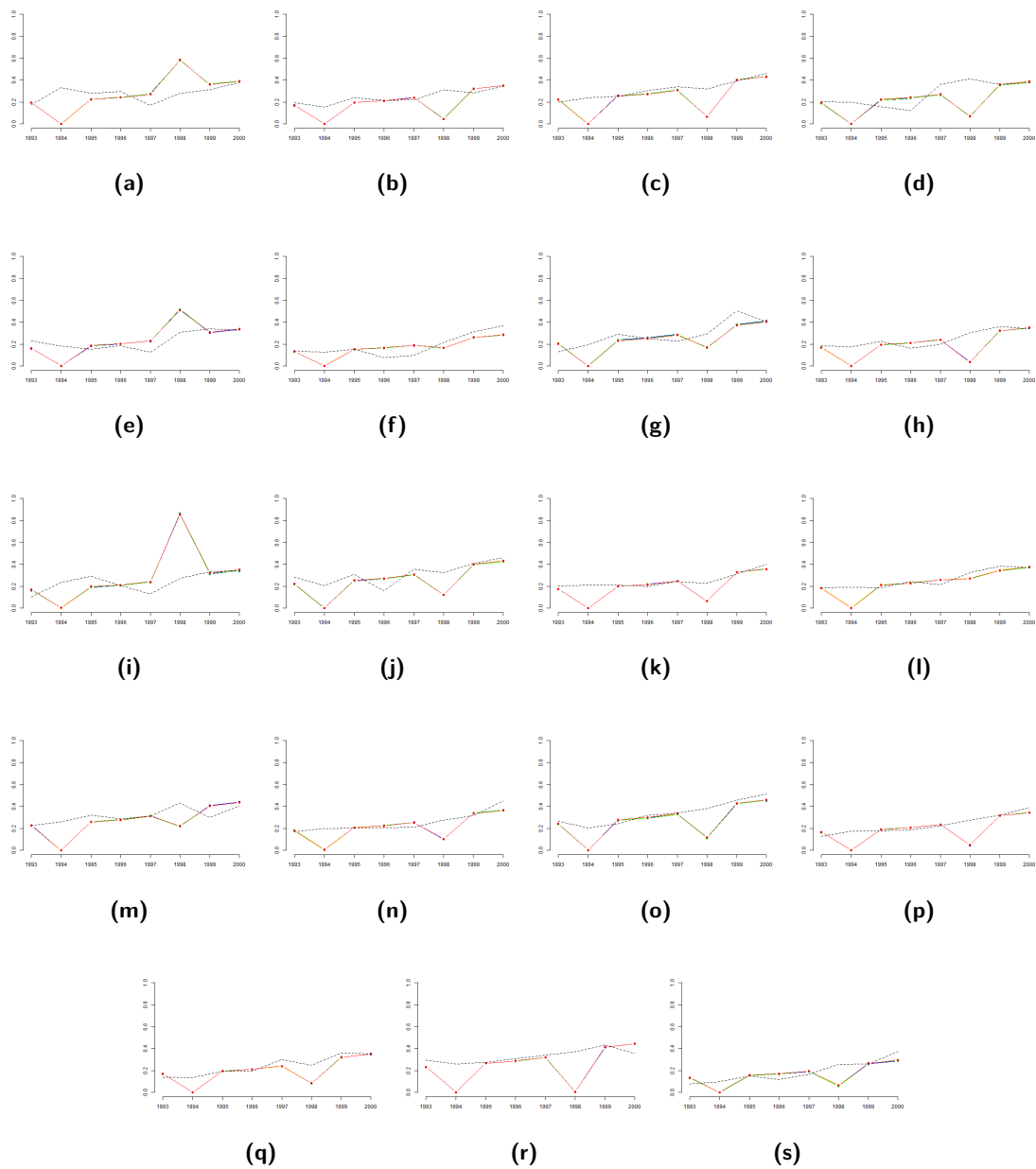


Figura C.16: Valores observados (preto) e valores preditos para as taxas de ocorrência de revascularização durante os anos de 1993 a 2000 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as ALS: (a) 121 até (s) 139 - Exemplo 3.

APÊNDICE D

GRÁFICOS AUXILIARES ÀS ANÁLISES PARA O EXEMPLO 4 DO CAPÍTULO 3

Neste apêndice estão os gráficos auxiliares que correspondem às análises realizadas no Capítulo 3 e na Seção 3.4.

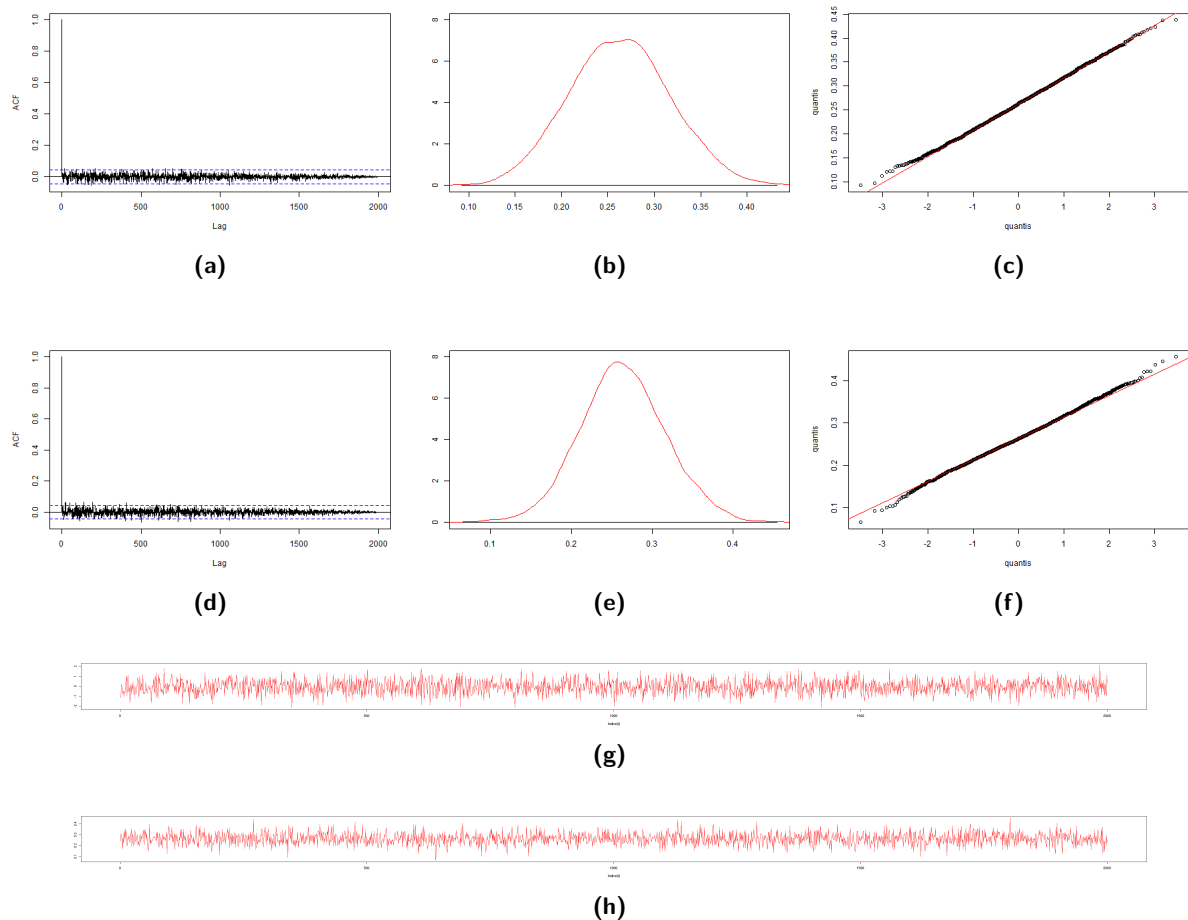


Figura D.1: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ para os modelos $M2$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M2b$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 4.

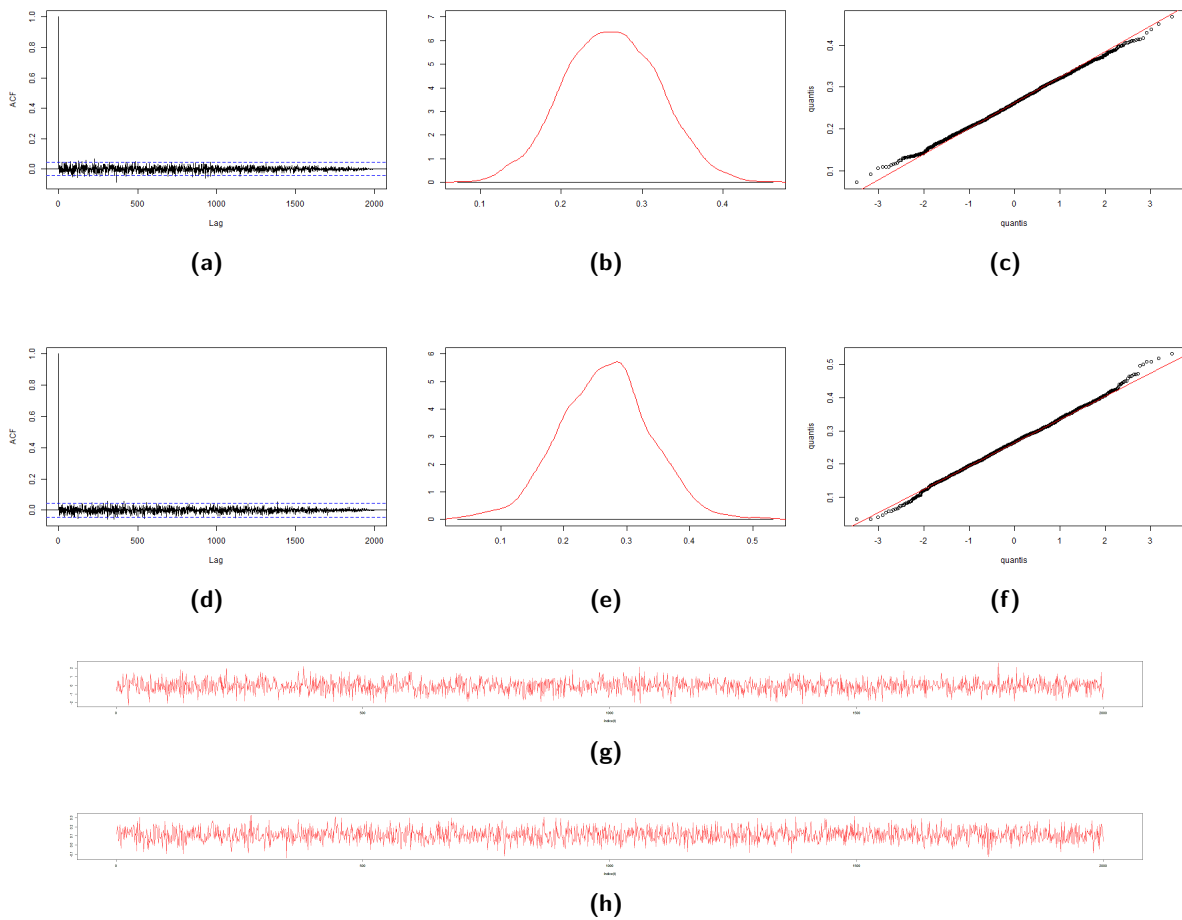


Figura D.2: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ para os modelos $M2h$: (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M2c$: (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 4.

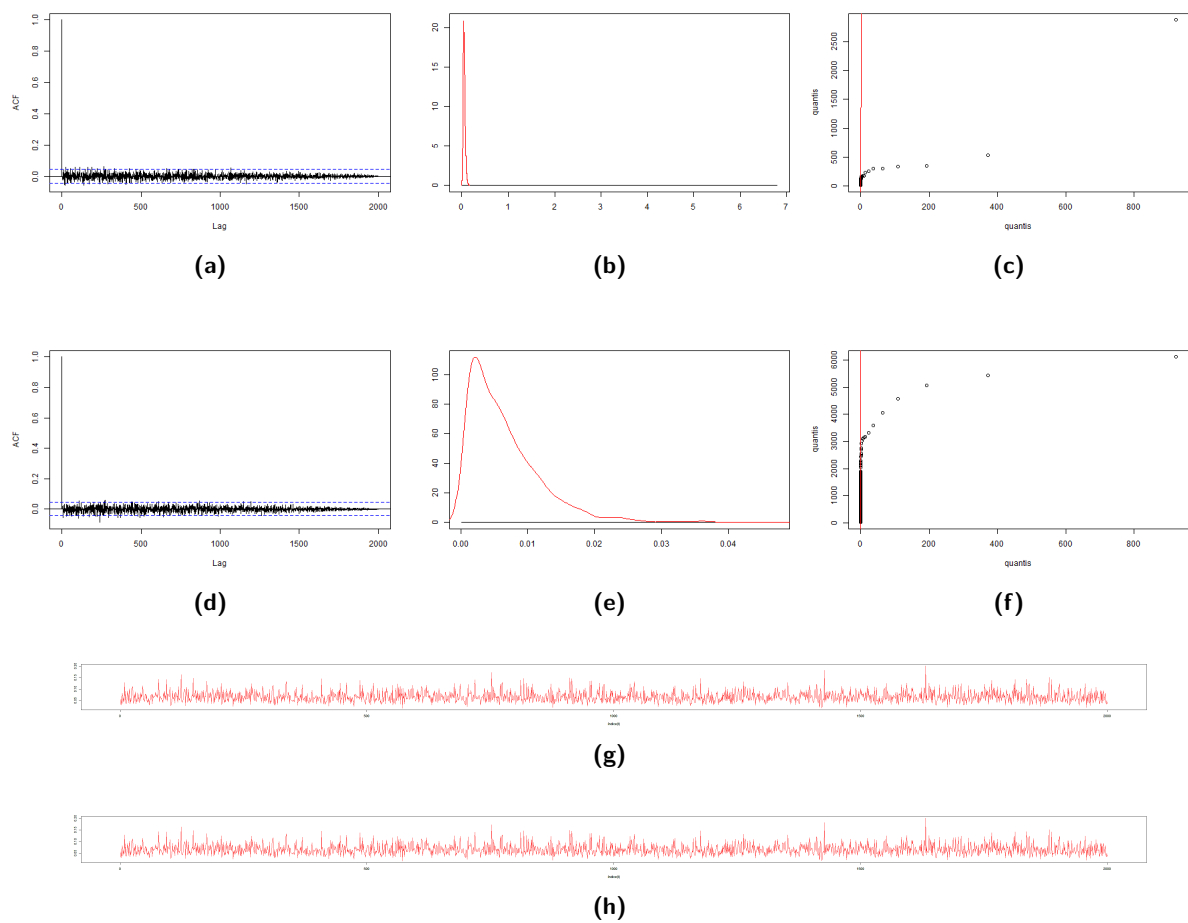


Figura D.3: Gráficos para o modelo $M2$, distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1,0.1)$ e para os parâmetros σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 4.

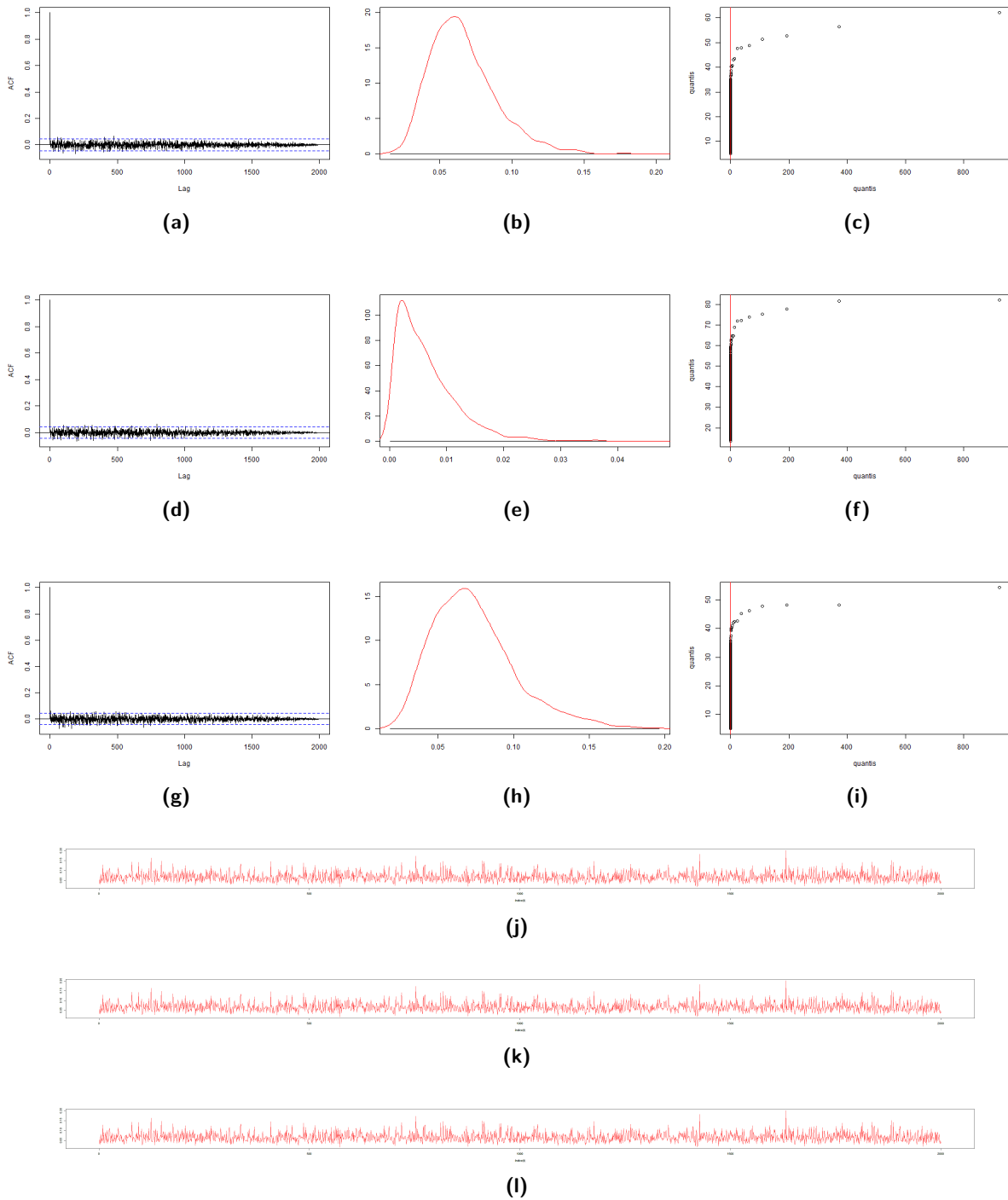


Figura D.4: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$, modelo $M2b$ e parâmetro σ_b^2 : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M2h$ e parâmetro σ_h^2 : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M2c$ e parâmetro σ_c^2 : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 4.

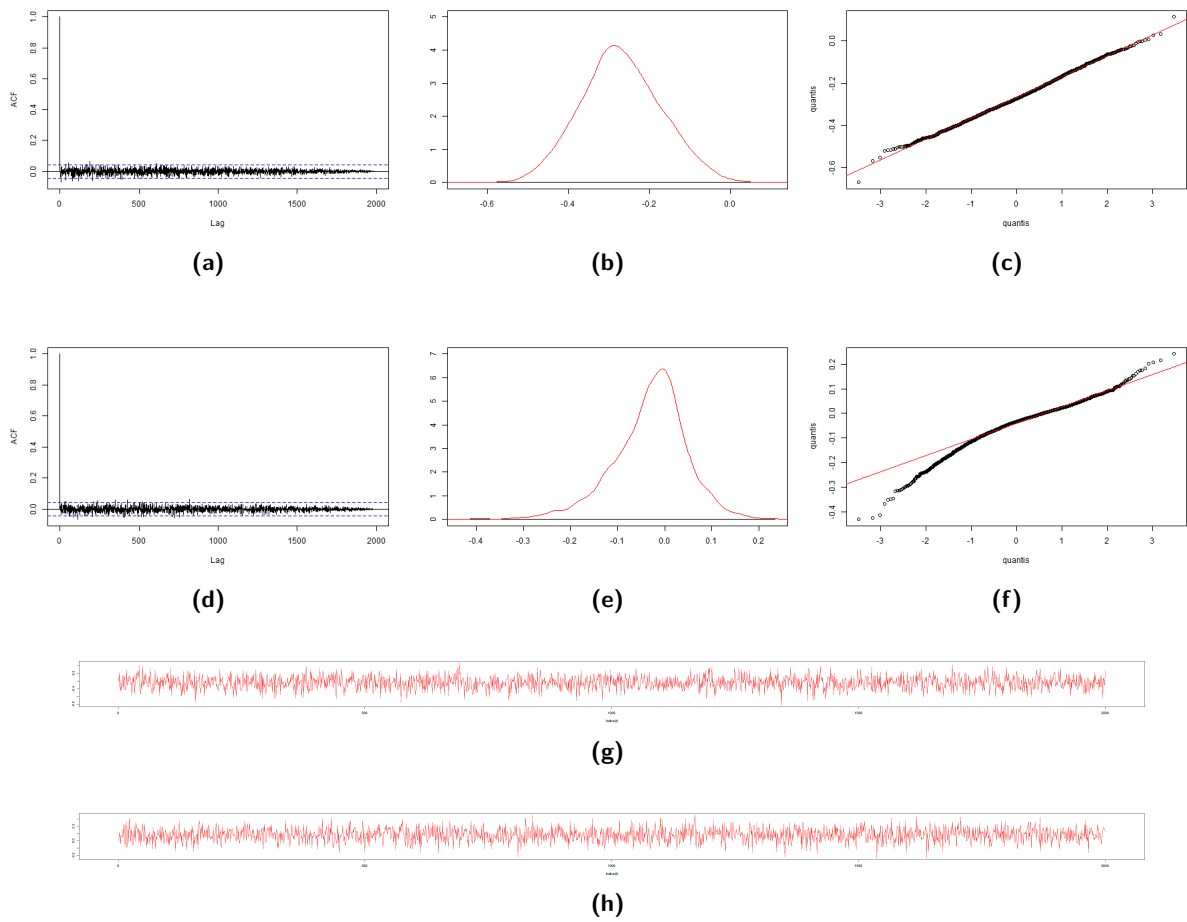


Figura D.5: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$, modelo M_2 e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 4.

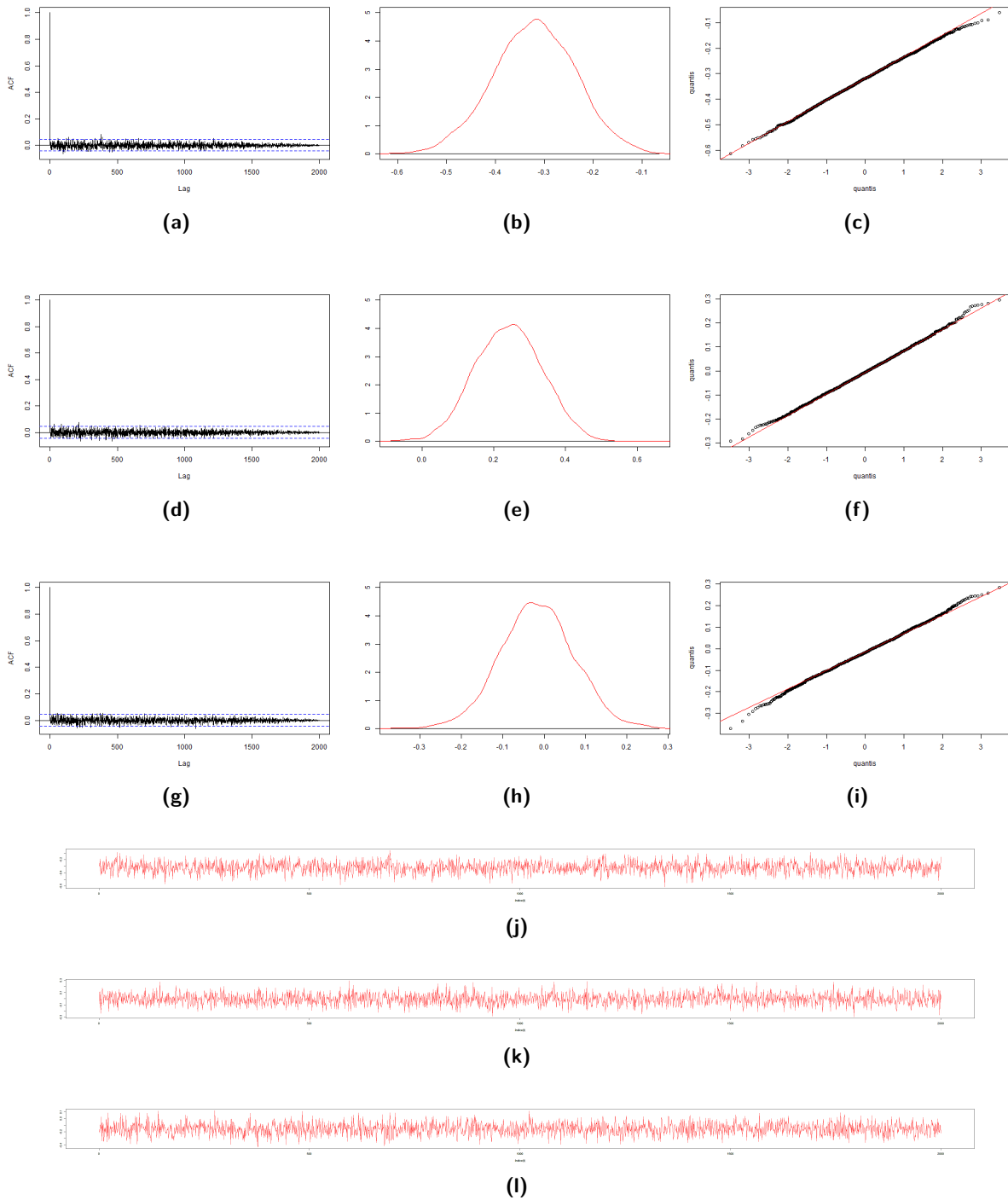


Figura D.6: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$, modelo $M2b$ e parâmetro b_{16} : (a) função de autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M2h$ e parâmetro h_{16} : (d) função de autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M2c$ e parâmetro b_{16} : (g) função de autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 4.

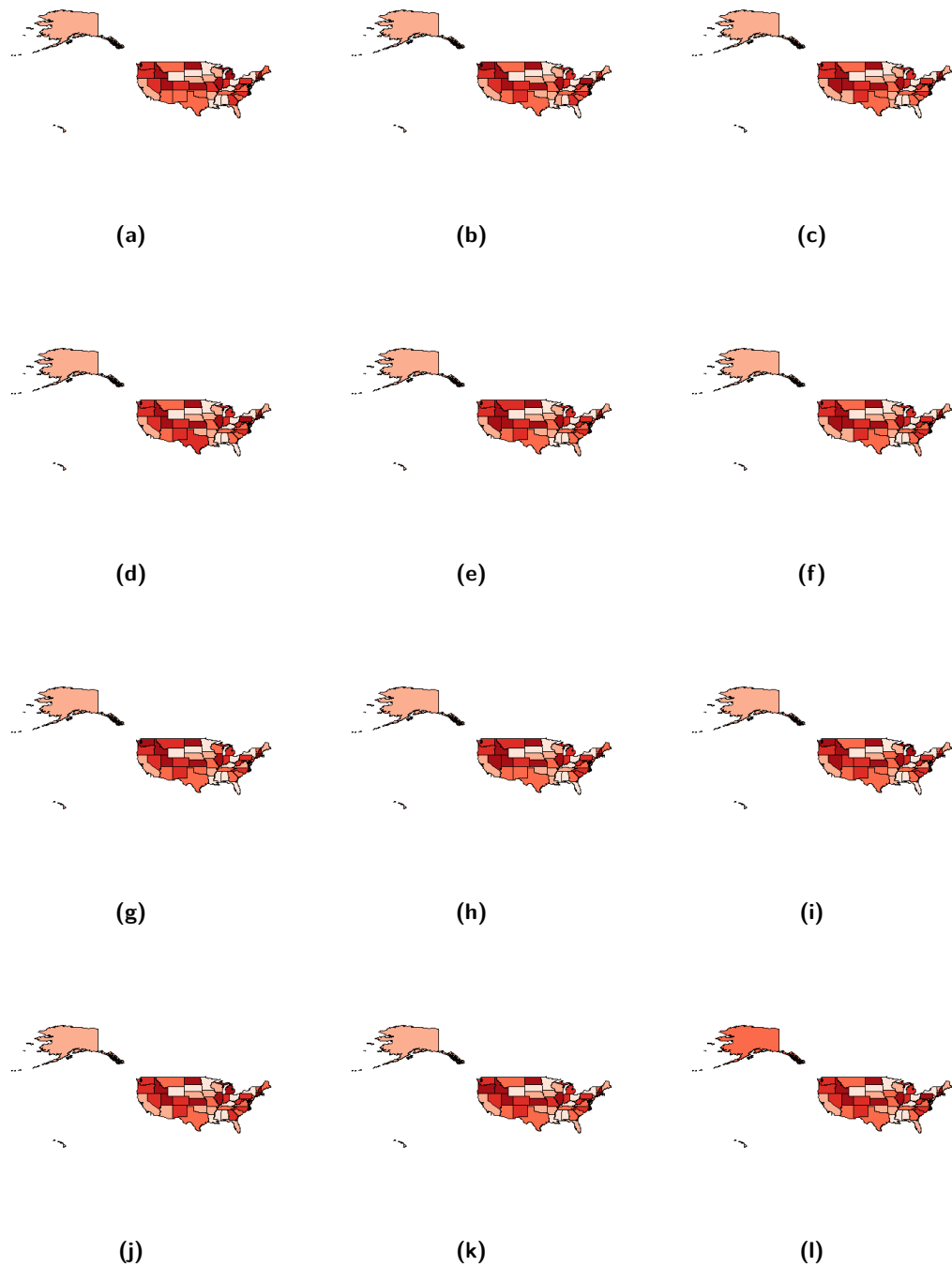


Figura D.7: Mapa das unidades federativas dos Estados Unidos com a média do índice de radiação solar para o modelo $M2bh$ para o ano de 2009 durante os meses de : (a) janeiro - (h) dezembro. As cores graduadas em cada unidade federativa indicam o aumento do índice de radiação - Exemplo 4.

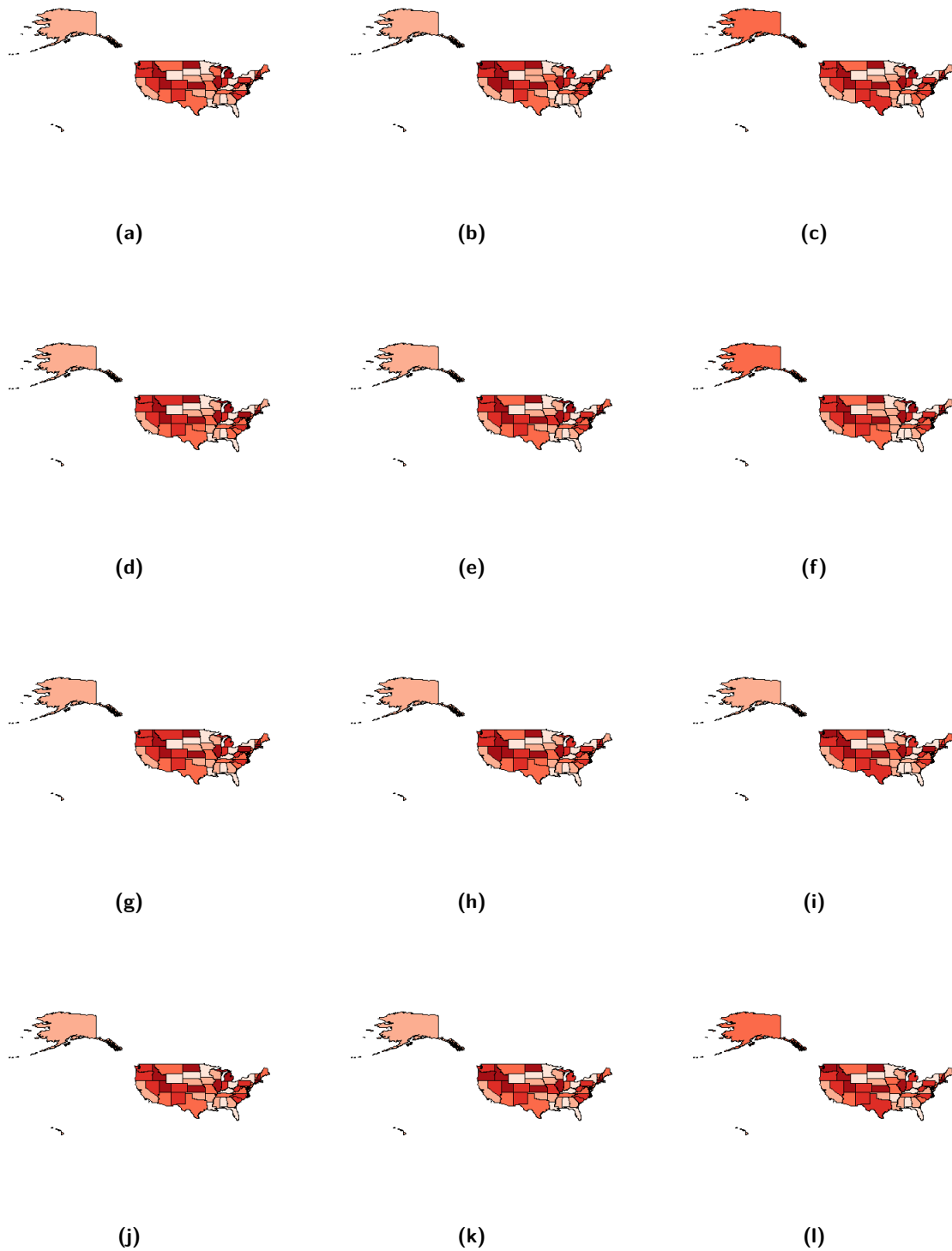


Figura D.8: Mapa das unidades federativas dos Estados Unidos com a média do índice de radiação solar para o modelo $M2b$ para o ano de 2009 durante os meses de : (a) janeiro - (h) dezembro. As cores graduadas em cada unidade federativa indicam o aumento do índice de radiação - Exemplo 4.

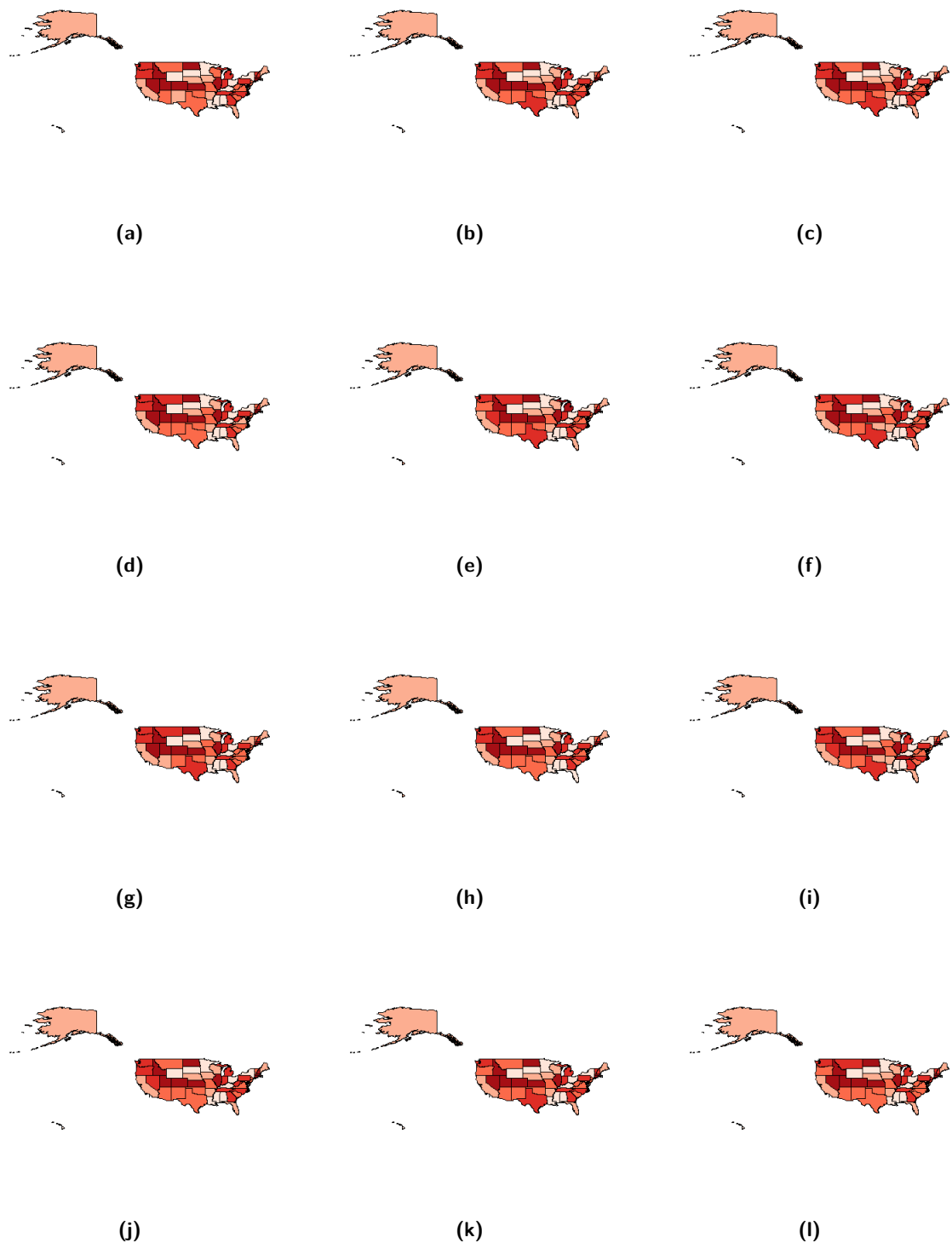


Figura D.9: Mapa das unidades federativas dos Estados Unidos com a média do índice de radiação solar para o modelo $M2h$ para o ano de 2009 durante os meses de : (a) janeiro - (h) dezembro. As cores graduadas em cada unidade federativa indicam o aumento do índice de radiação - Exemplo 4.

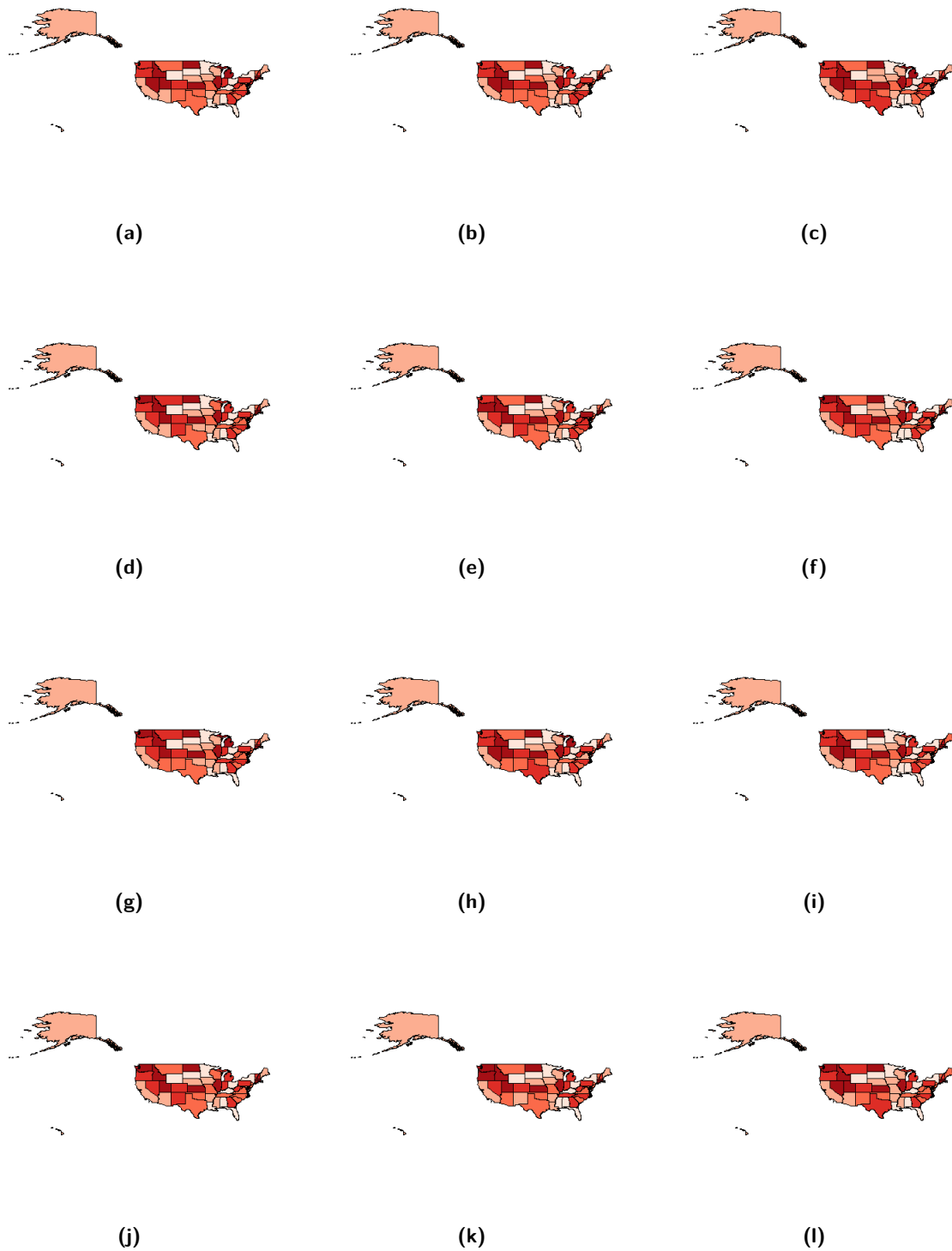


Figura D.10: Mapa das unidades federativas dos Estados Unidos com a média do índice de radiação solar para o modelo $M2c$ para o ano de 2009 durante os meses de : (a) janeiro - (h) dezembro. As cores graduadas em cada unidade federativa indicam o aumento do índice de radiação - Exemplo 4.

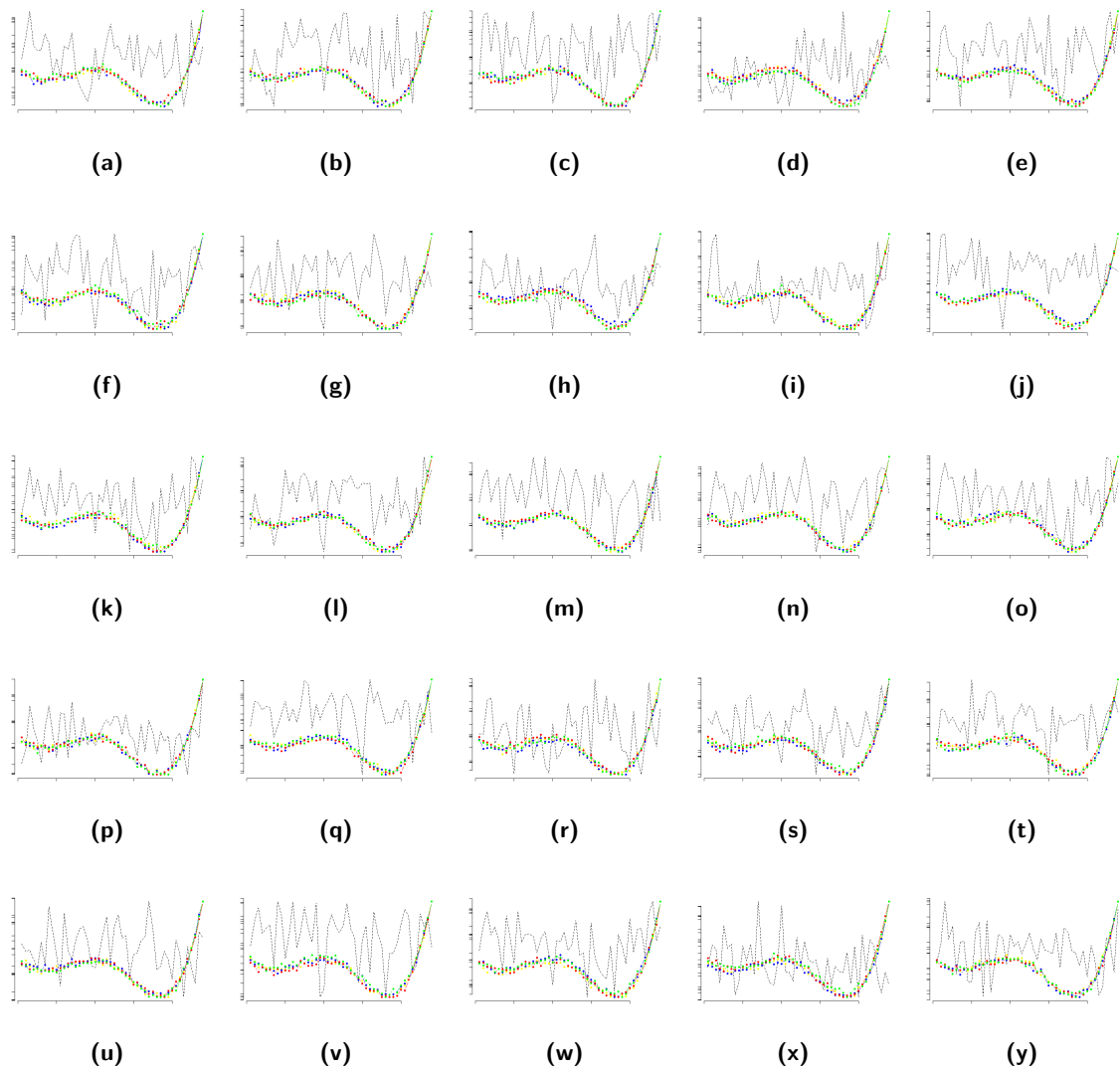


Figura D.11: Valores observados (preto) e valores preditos para o índice de radiação no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2010 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as unidades federativas dos Estados Unidos: (a) 1 até (x) 25 - Exemplo 4.

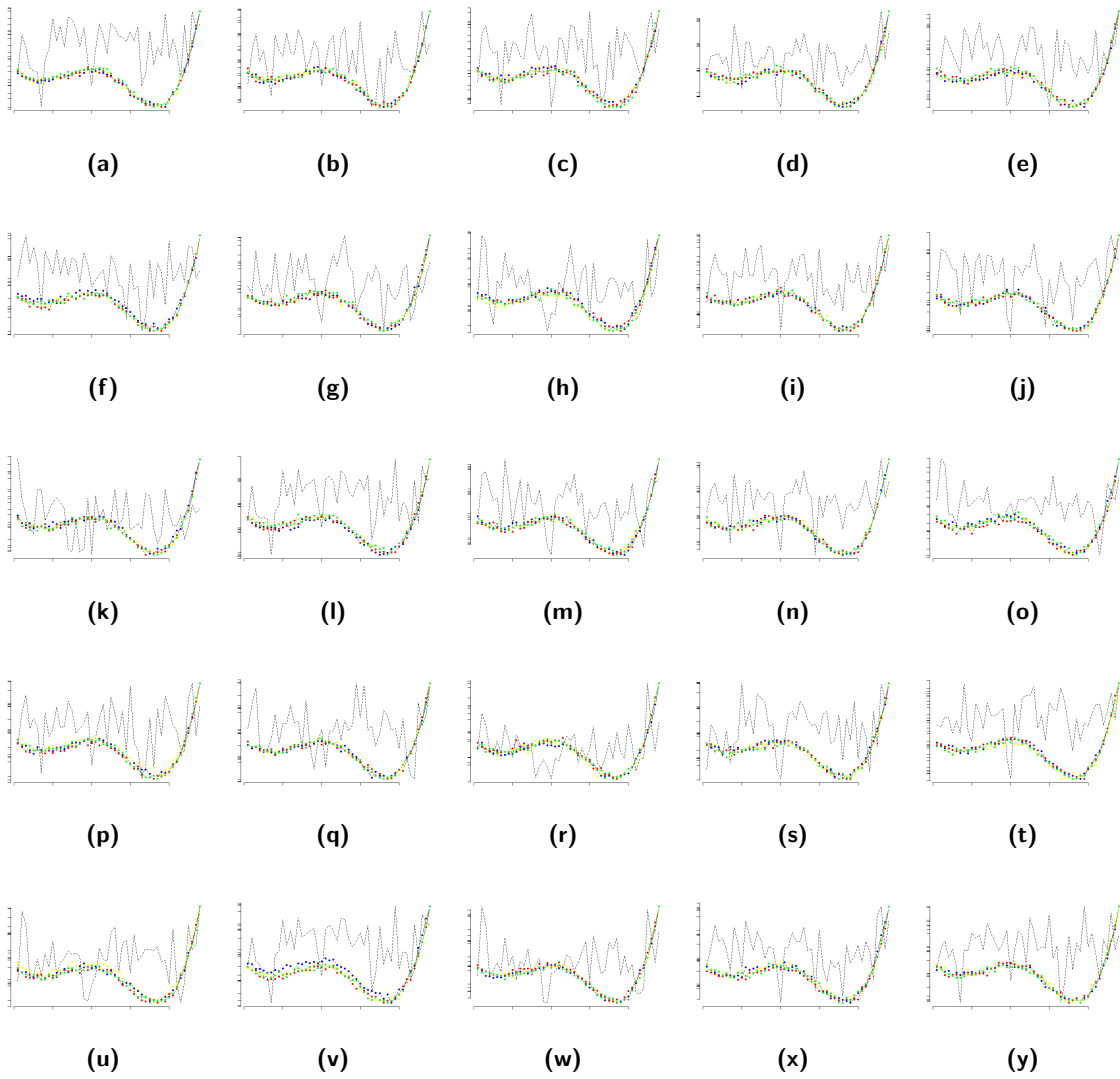


Figura D.12: Valores observados (preto) e valores preditos para o índice de radiação no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2010 para os modelos $M2bh$ (amarelo), $M2b$ (azul), $M2h$ (vermelho) e $M2c$ (verde) para as unidades federativas dos Estados Unidos: (a) 26 até (x) 50 - Exemplo 4.

APÊNDICE E

GRÁFICOS AUXILIARES ÀS ANÁLISES PARA O EXEMPLO 5 DO CAPÍTULO 3

Neste apêndice estão os gráficos auxiliares que correspondem às análises realizadas no Capítulo 3 e na Seção 3.5.

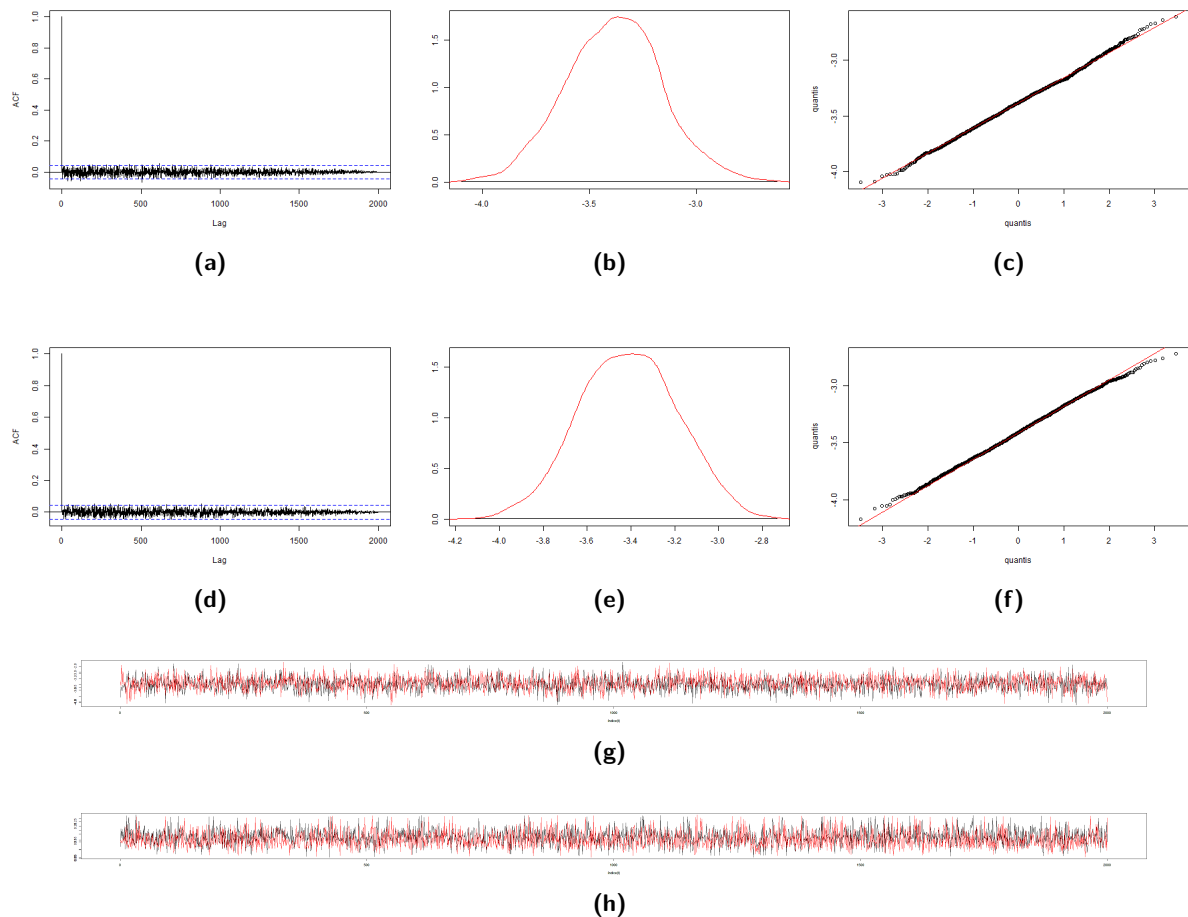


Figura E.1: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $GI(0.1, 0.1)$ para os modelos $M1bh$: (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M1b$: (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 5.

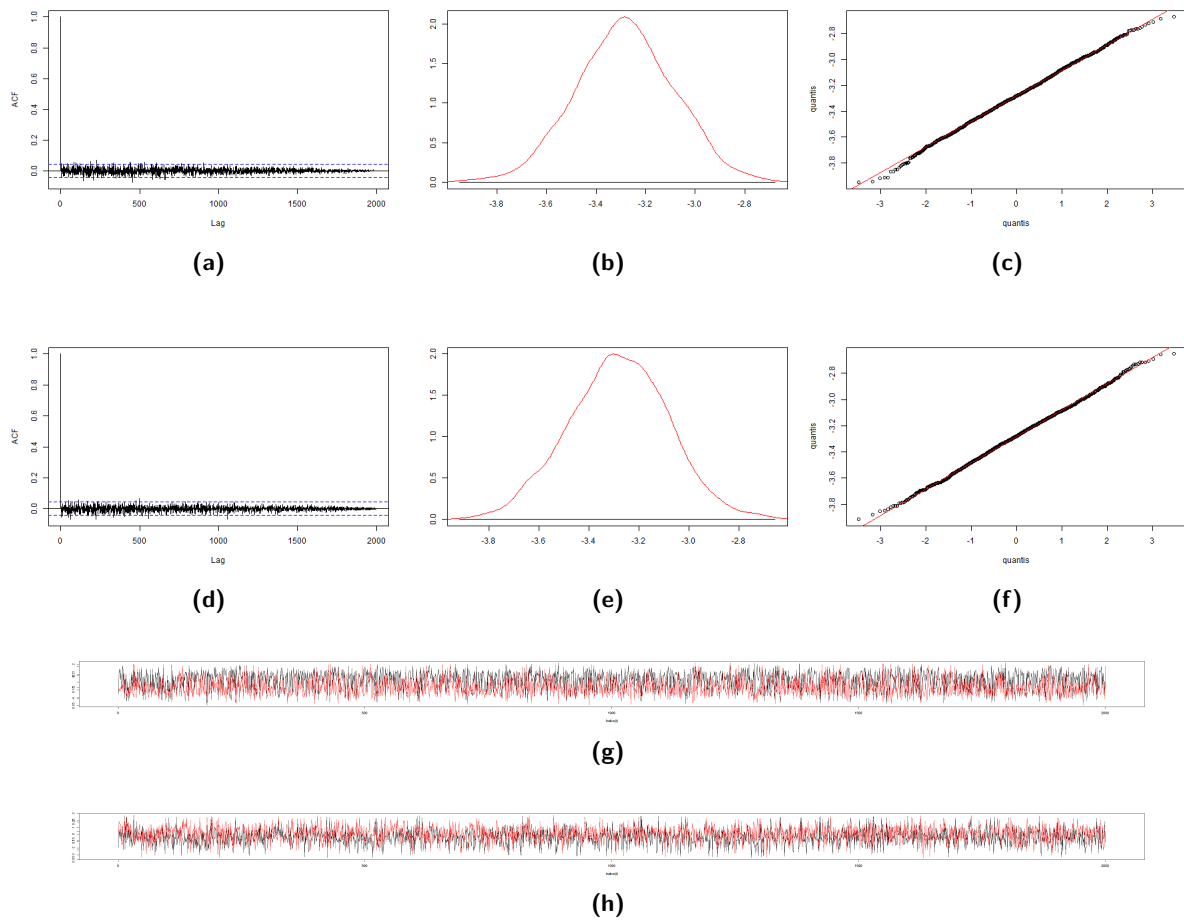


Figura E.2: Gráficos para o parâmetro α_0 e distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ para os modelos $M1h$: (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; $M1c$: (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 5.

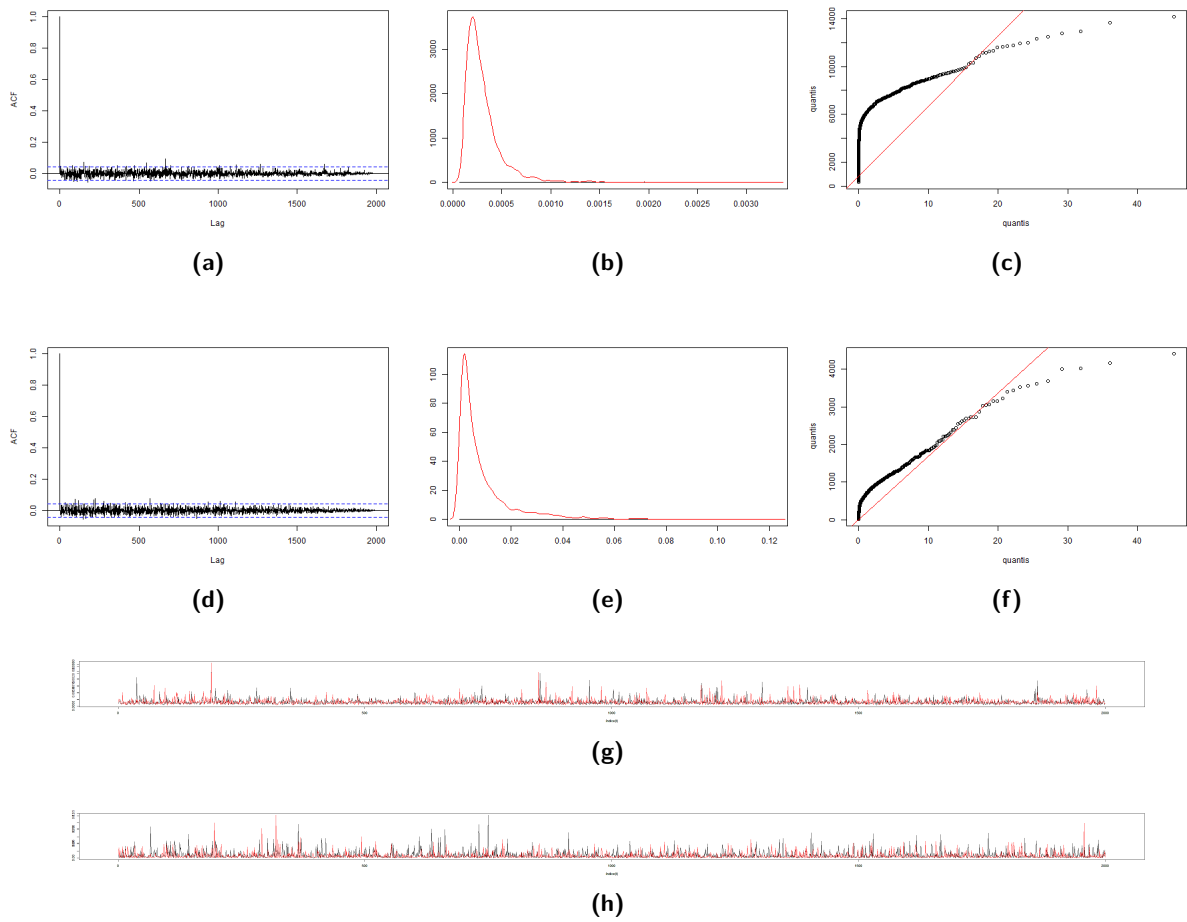


Figura E.3: Gráficos para o modelo $M1bh$, distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$ e para os parâmetros σ_b^2 : (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; σ_h^2 : (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 5.

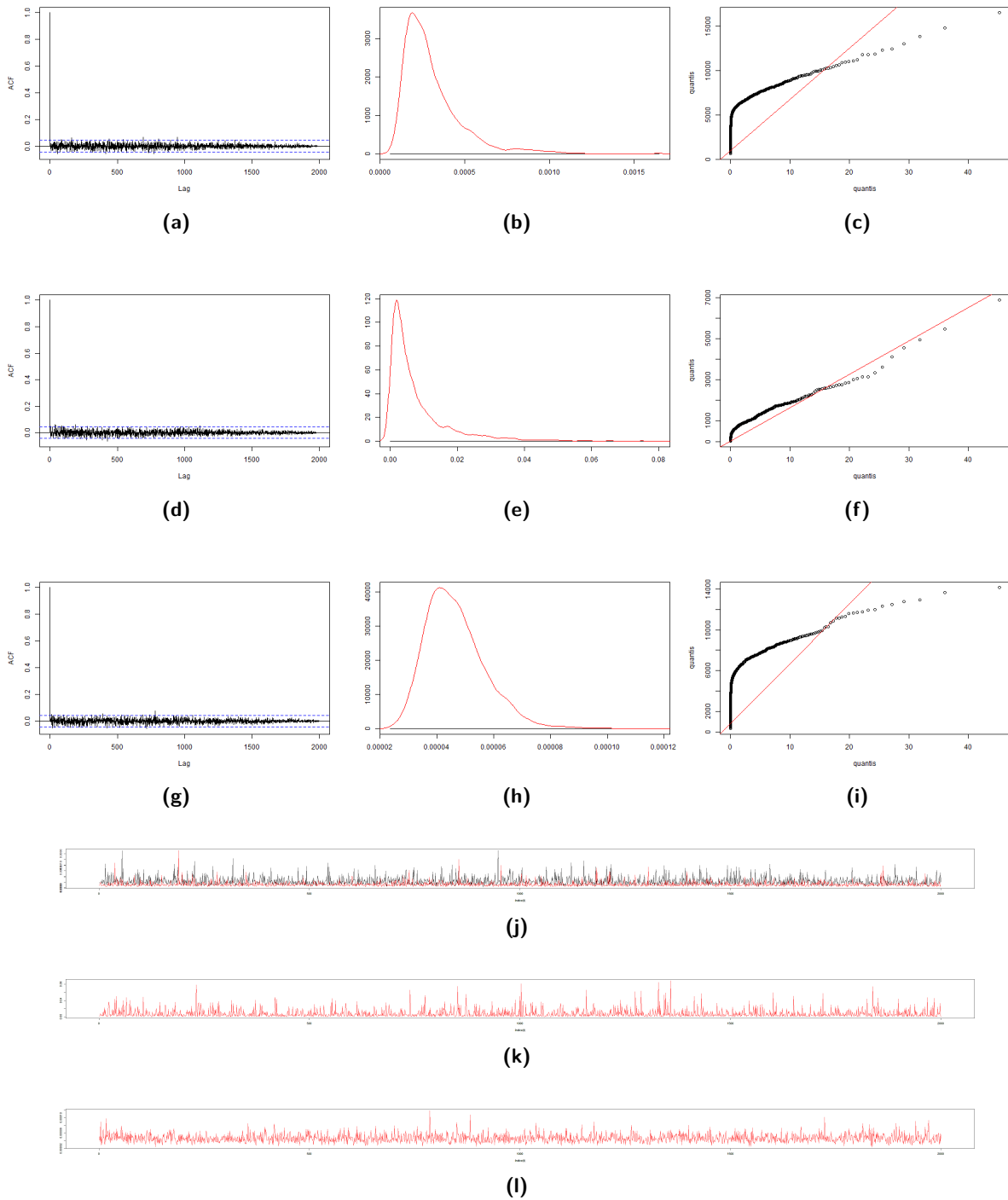


Figura E.4: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(0.1, 0.1)$, modelo $M1b$ e parâmetro σ_b^2 : (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M1h$ e parâmetro σ_h^2 : (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M1c$ e parâmetro σ_c^2 : (g) autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 5.

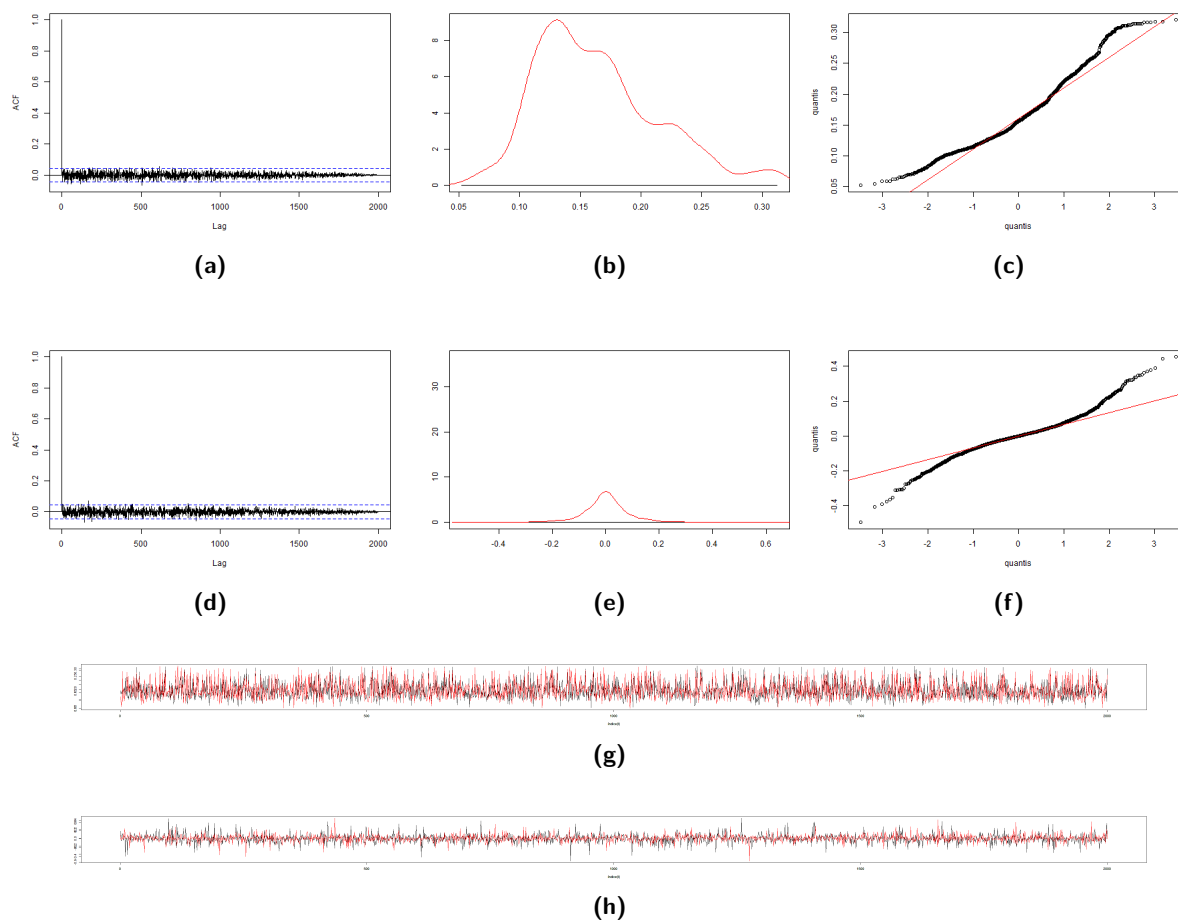


Figura E.5: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$, modelo $M1bh$ e parâmetro b_{16} : (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (g) trajetória; parâmetro h_{16} : (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (h) trajetória - Exemplo 5.

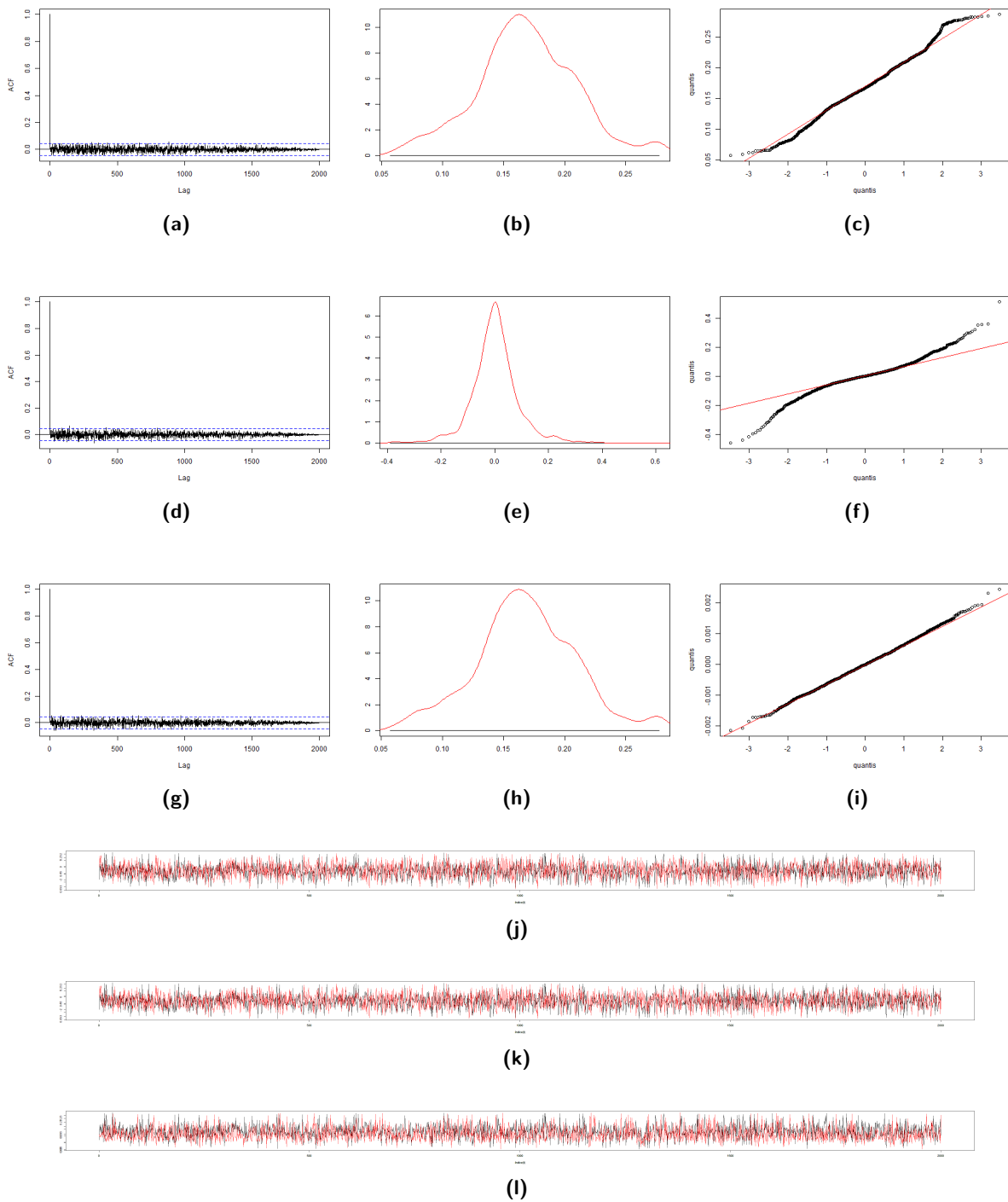


Figura E.6: Gráficos para distribuição *a priori* $\mathcal{GI}(\gamma_1, \gamma_2) = (0.1, 0.1)$, modelo $M1b$ e parâmetro b_{16} : (a) autocorrelação, (b) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (c) quantis e (j) trajetória; modelo $M1h$ e parâmetro h_{16} : (d) autocorrelação, (e) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (f) quantis e (k) trajetória; modelo $M1c$ e parâmetro b_{16} : (g) autocorrelação, (h) distribuição *a priori* (preto) e distribuição *a posteriori* (vermelho), (i) quantis e (l) trajetória - Exemplo 5.

APÊNDICE F

GRÁFICOS E TABELAS DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DO CAPÍTULO 4

Neste apêndice estão os gráficos e tabelas auxiliares que correspondem às simulações realizadas no Capítulo 4. Este apêndice está dividido em duas seções.

A primeira seção apresenta os gráficos auxiliares e a segunda seção apresenta as tabelas auxiliares na ordem em que são reportados no texto do Capítulo 4.

Gráficos Auxiliares do Capítulo 4.

Apresentamos nas Figuras F.1 - F.22 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por Modelo l (M_l) para $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$ (ver Seção 4.4.3). Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)\}$.

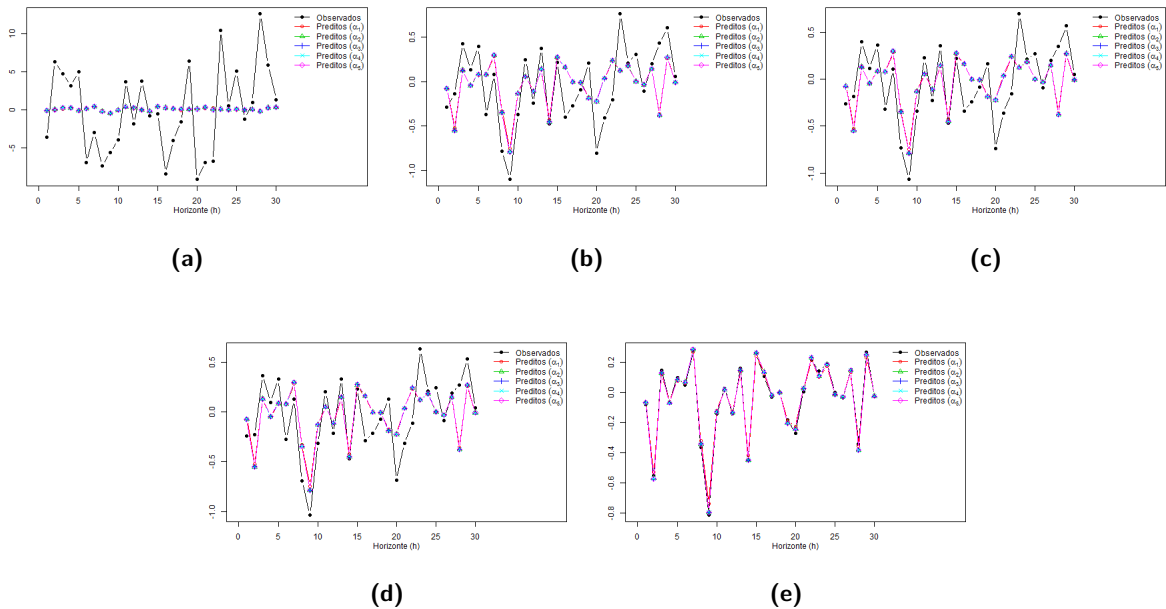


Figura F.1: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

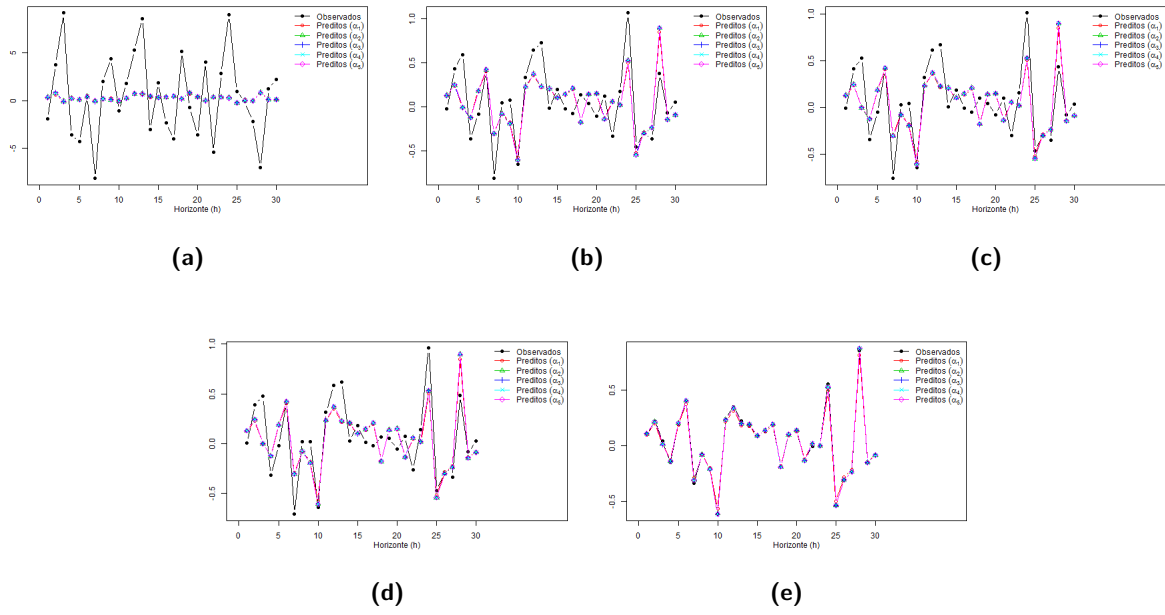


Figura F.2: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

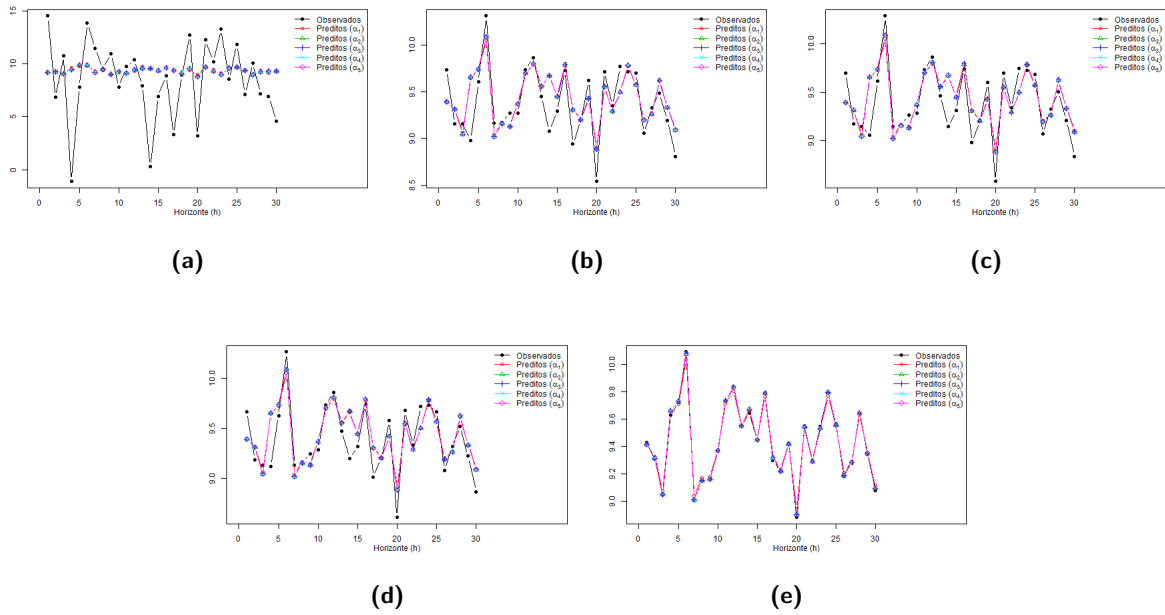


Figura F.3: Valores preditos e observados para o modelo M7, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

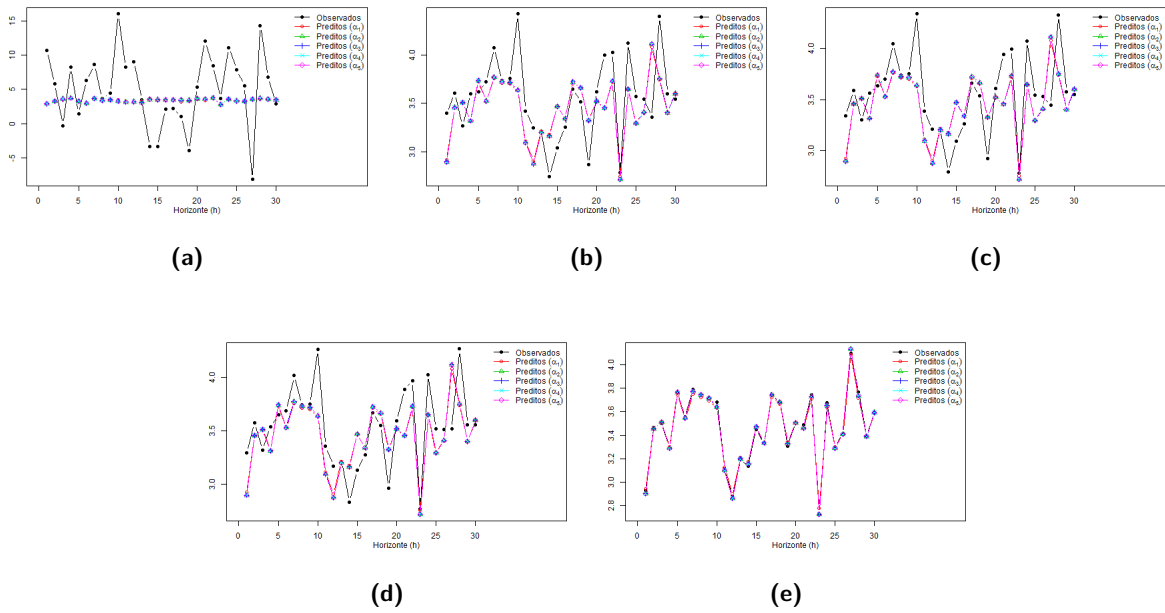


Figura F.4: Valores preditos e observados para o modelo M8, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

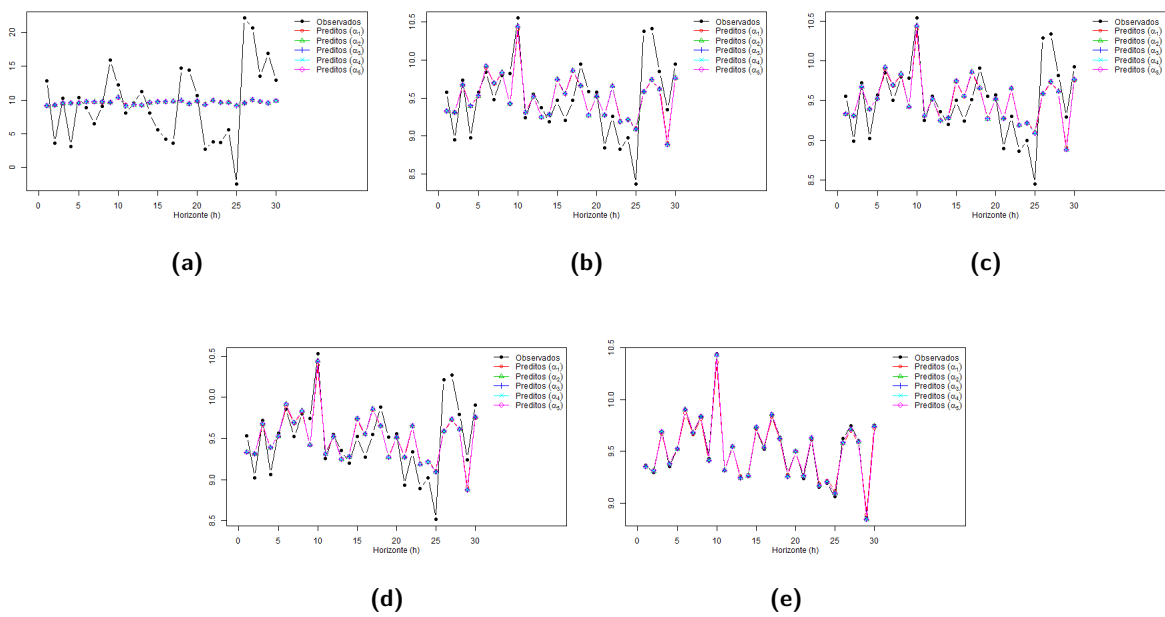


Figura F.5: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

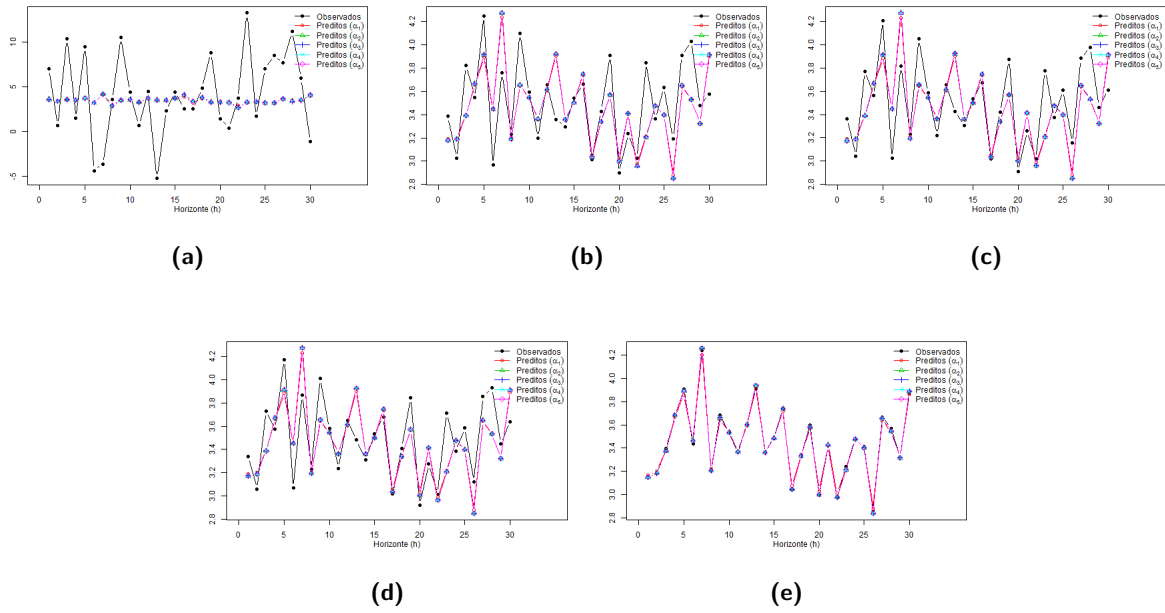


Figura F.6: Valores preditos e observados para o modelo M10, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

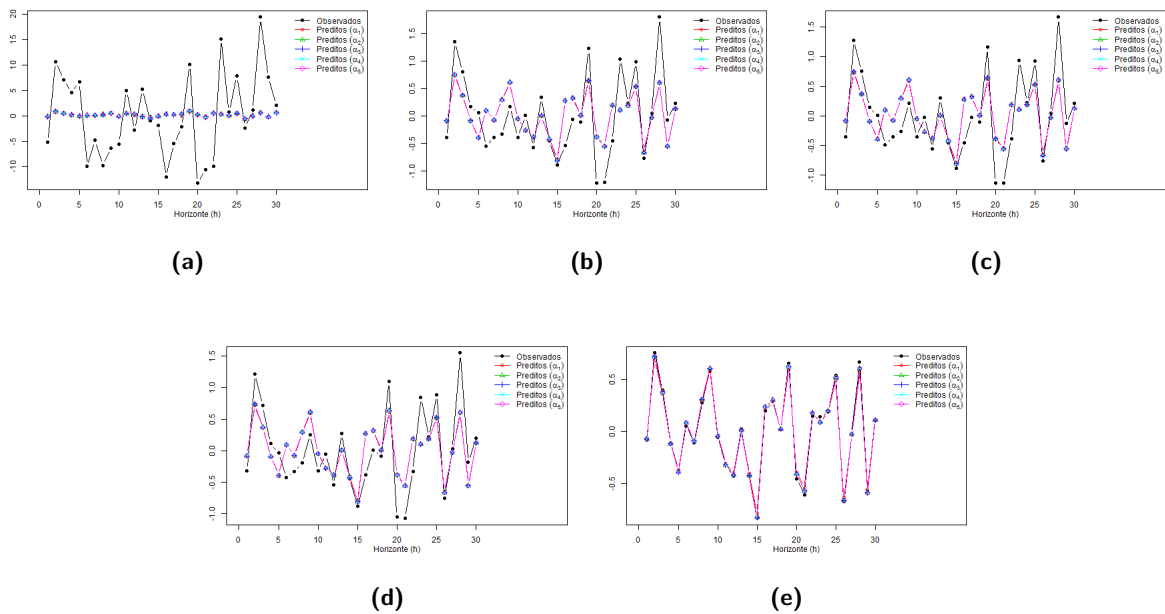


Figura F.7: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

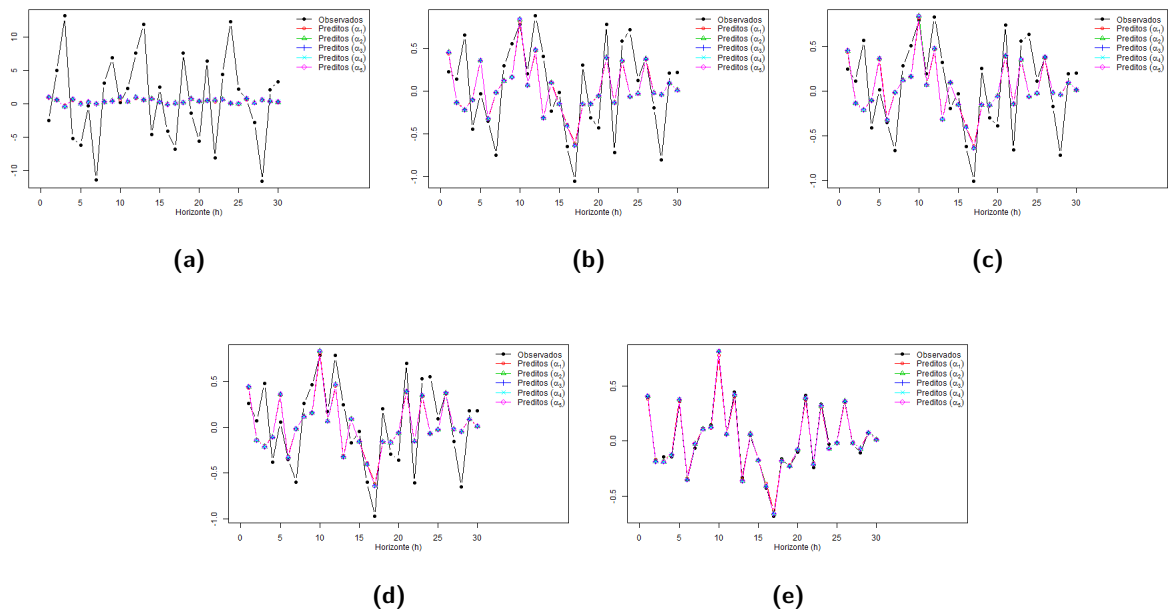


Figura F.8: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

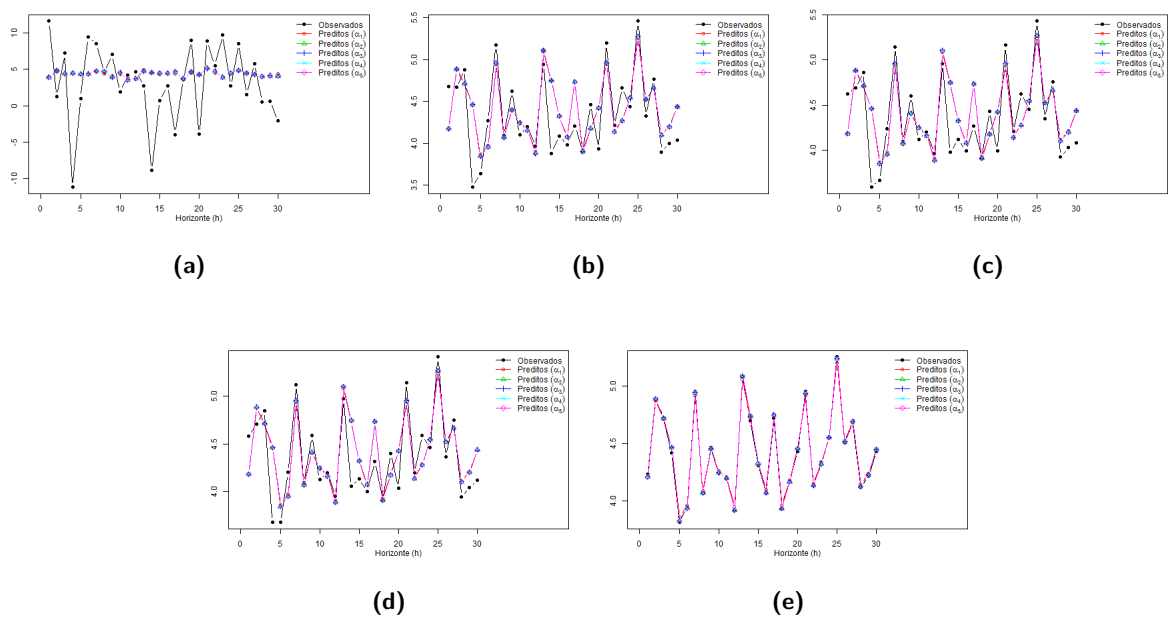


Figura F.9: Valores preditos e observados para o modelo M7, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

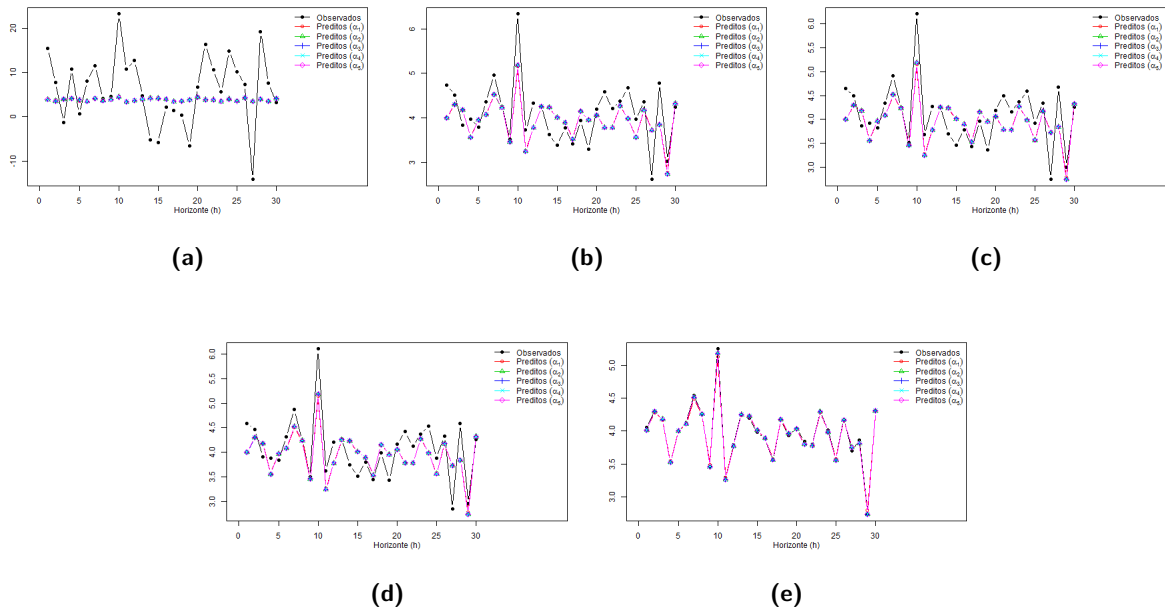


Figura F.10: Valores preditos e observados para o modelo M8, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

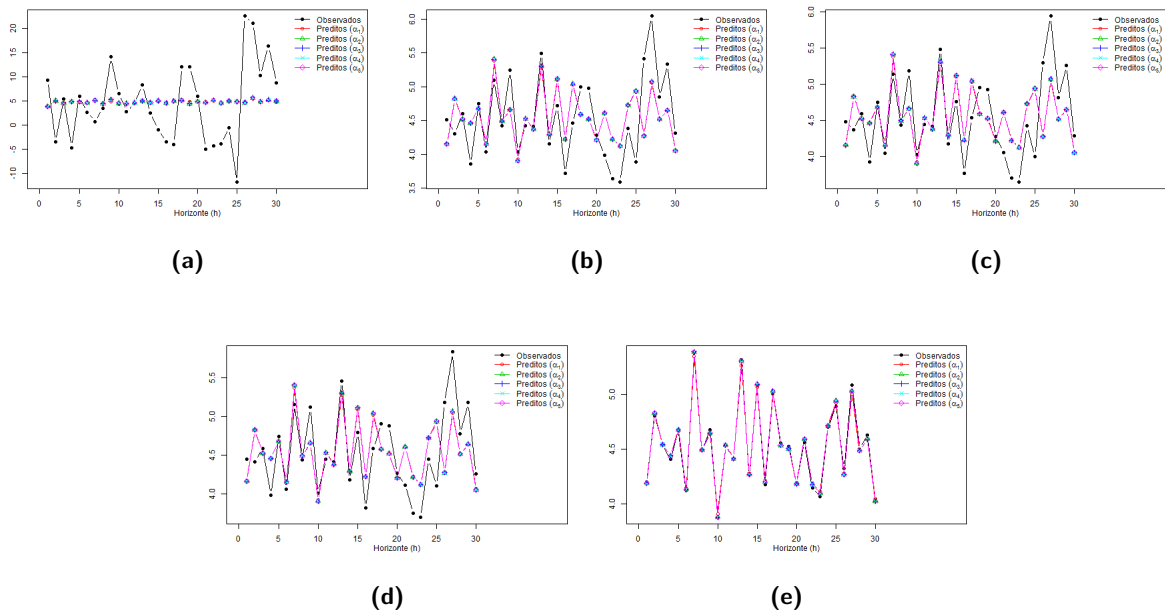


Figura F.11: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

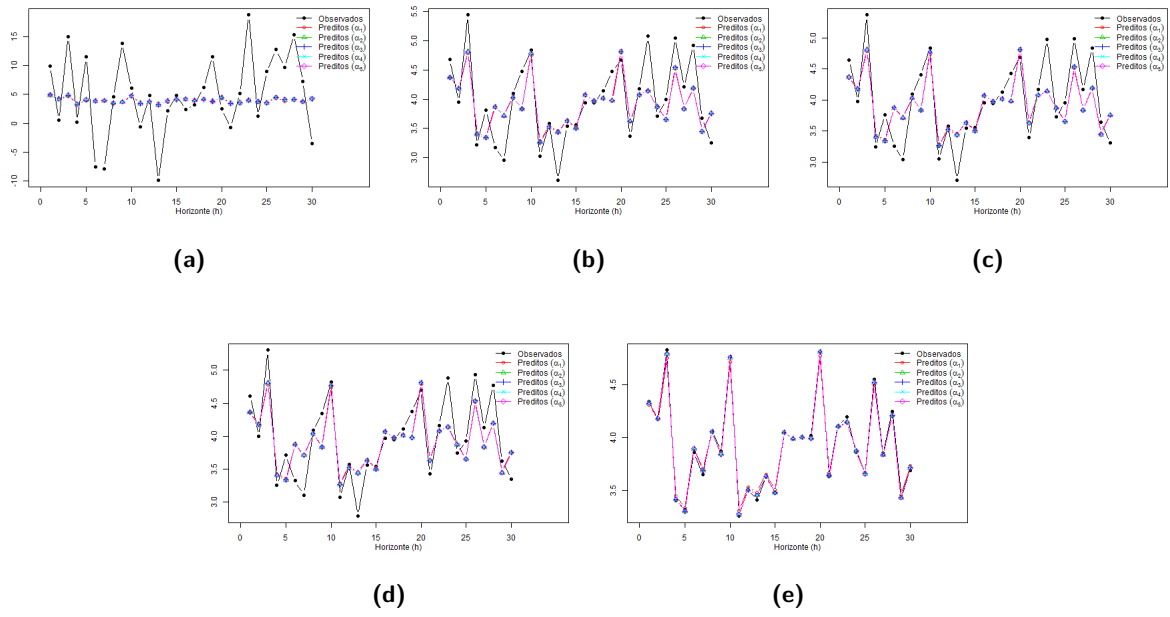


Figura F.12: Valores preditos e observados para o modelo M10, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

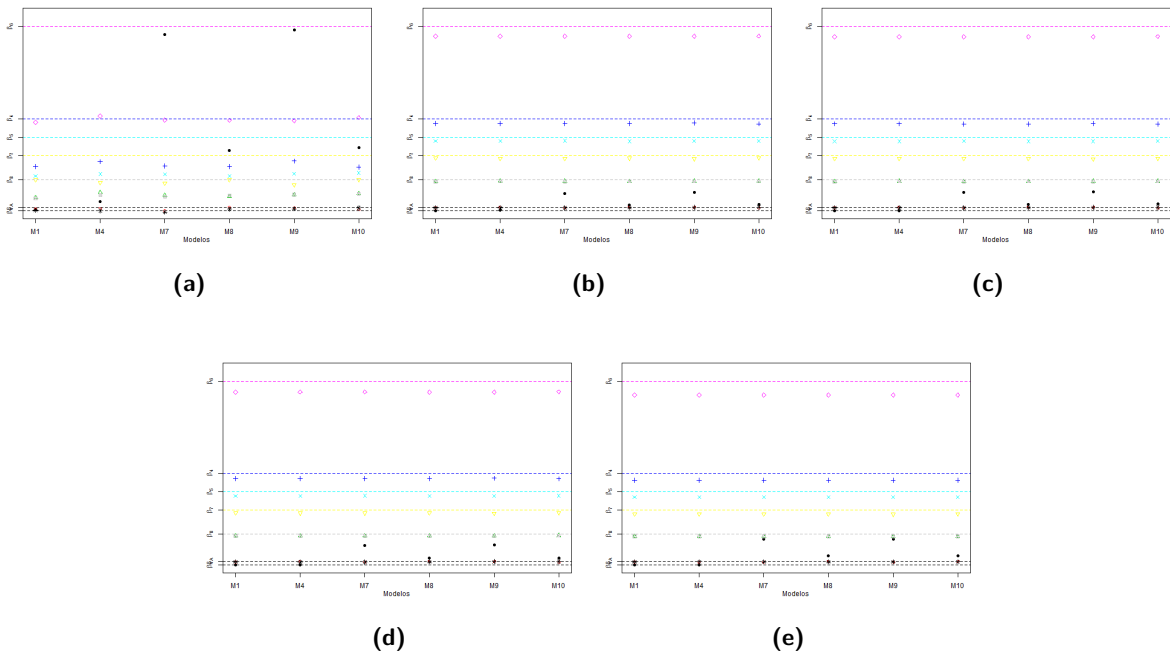


Figura F.13: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

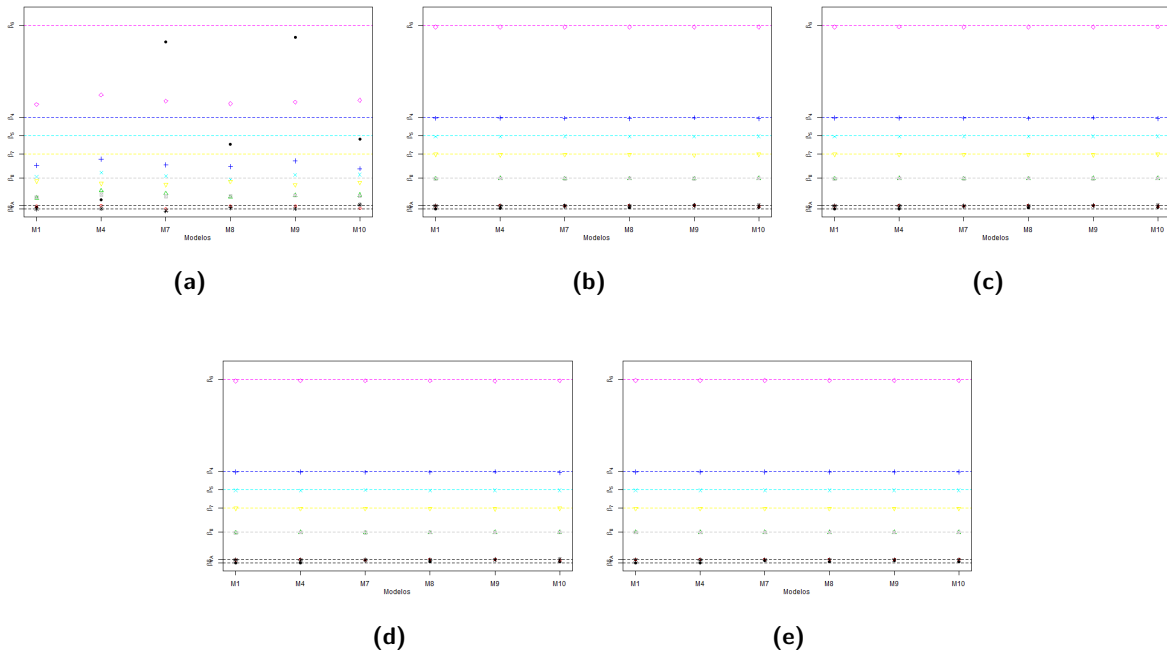


Figura F.14: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.2$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

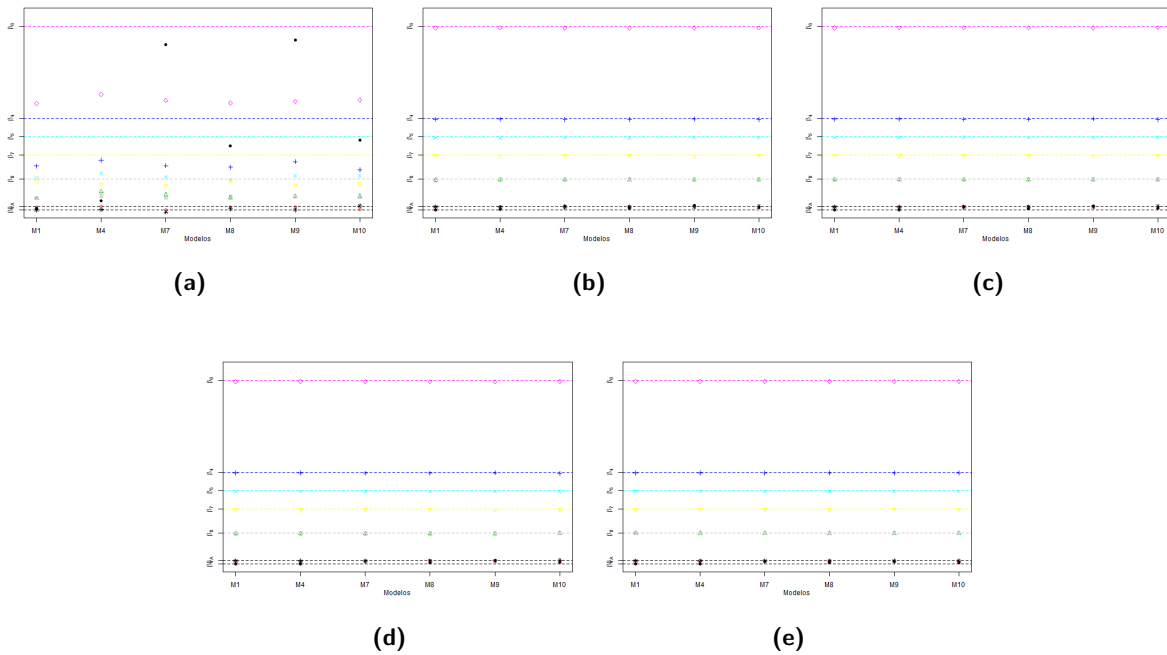


Figura F.15: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.4$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

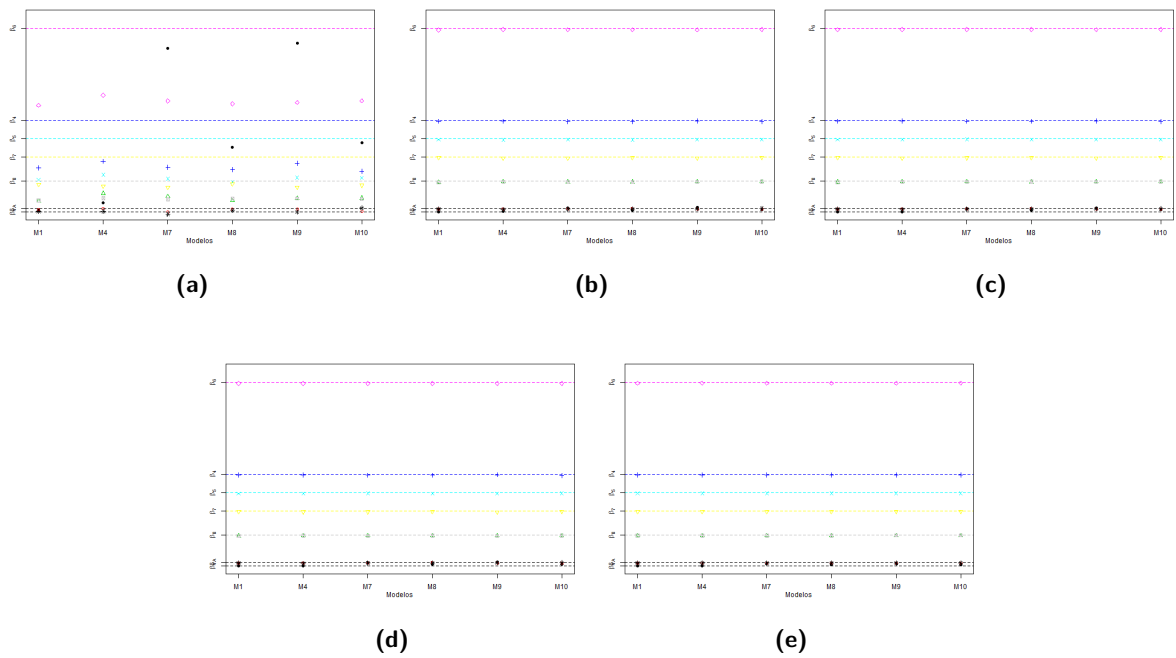


Figura F.16: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.8$ para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

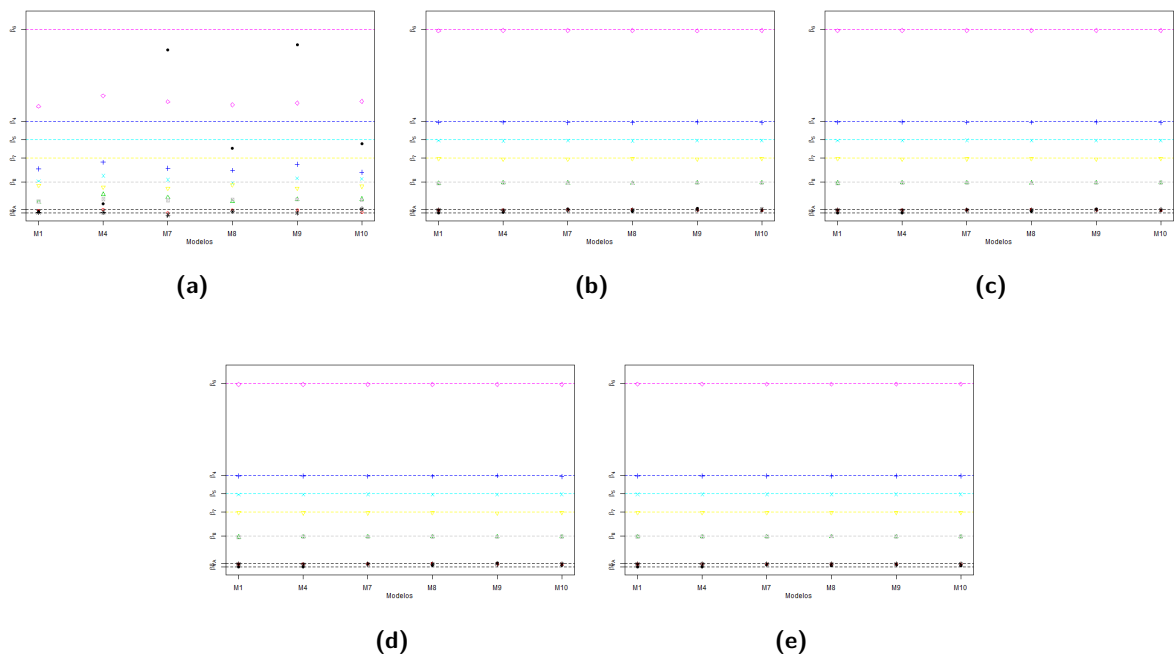


Figura F.17: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 1$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

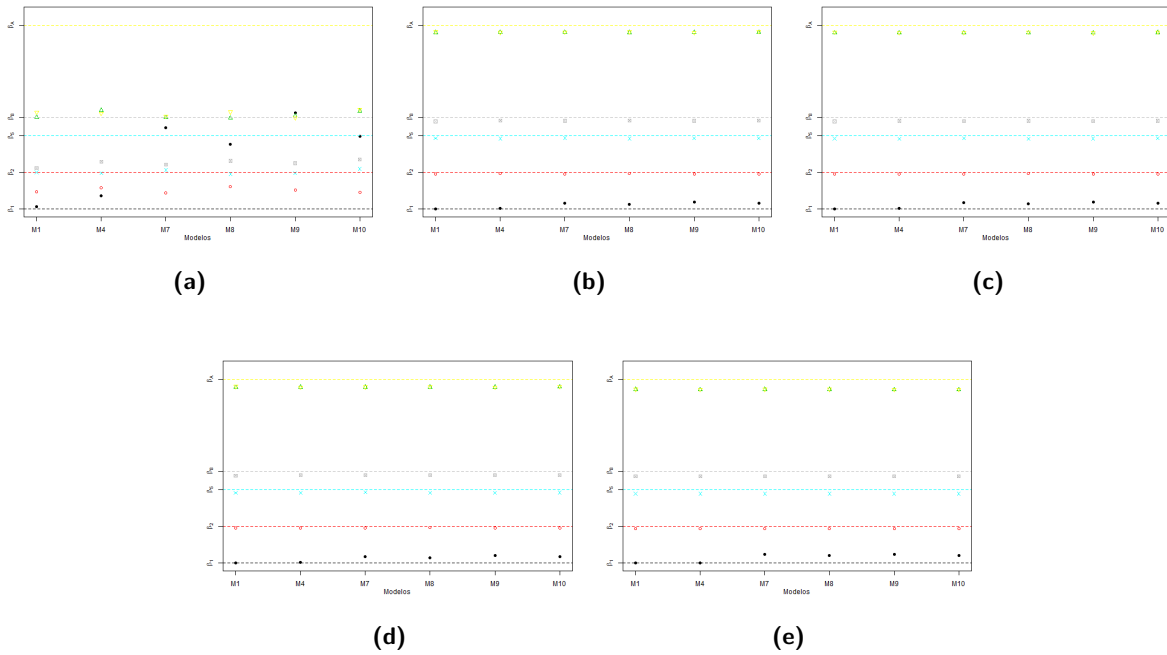


Figura F.18: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

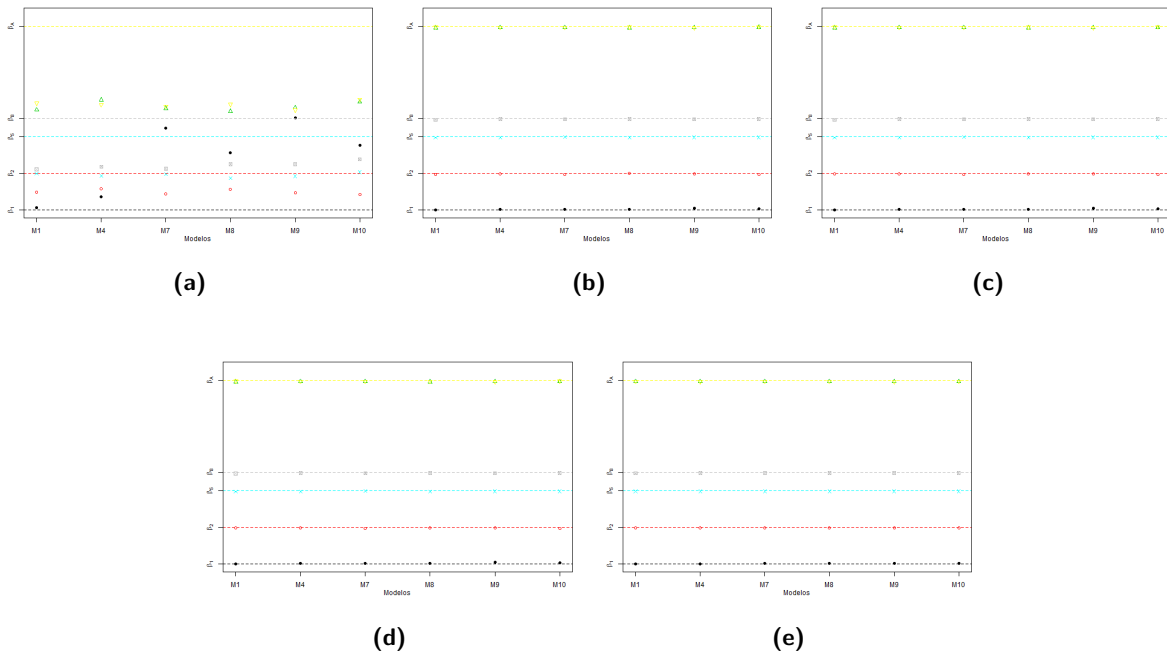


Figura F.19: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.2$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

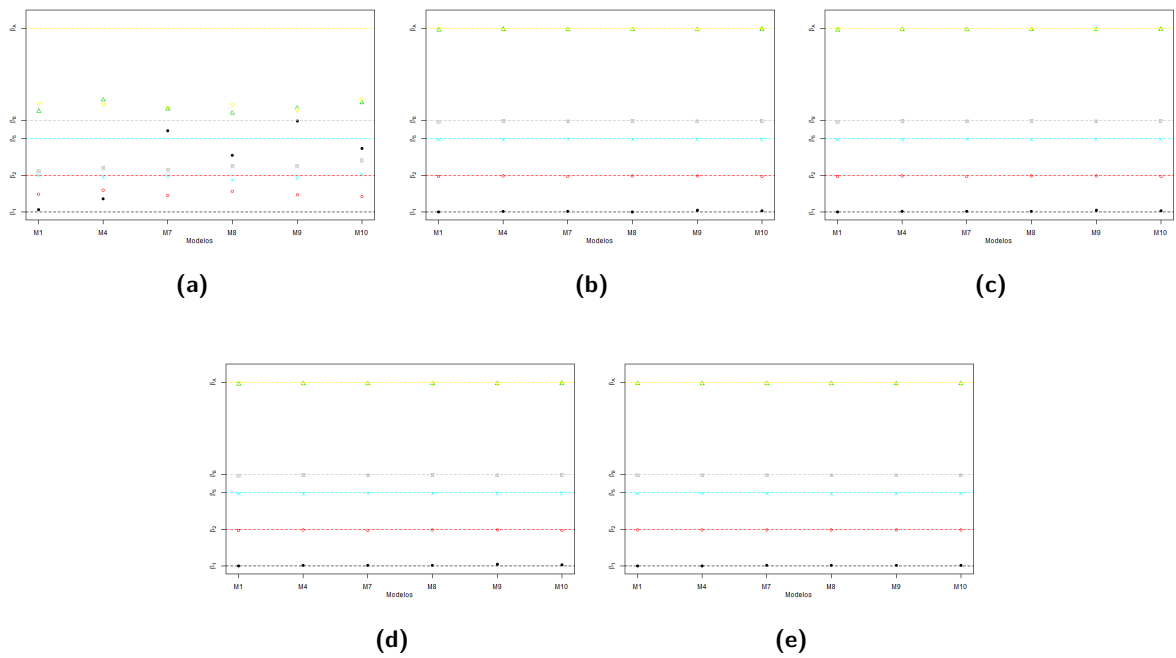


Figura F.20: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.4$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

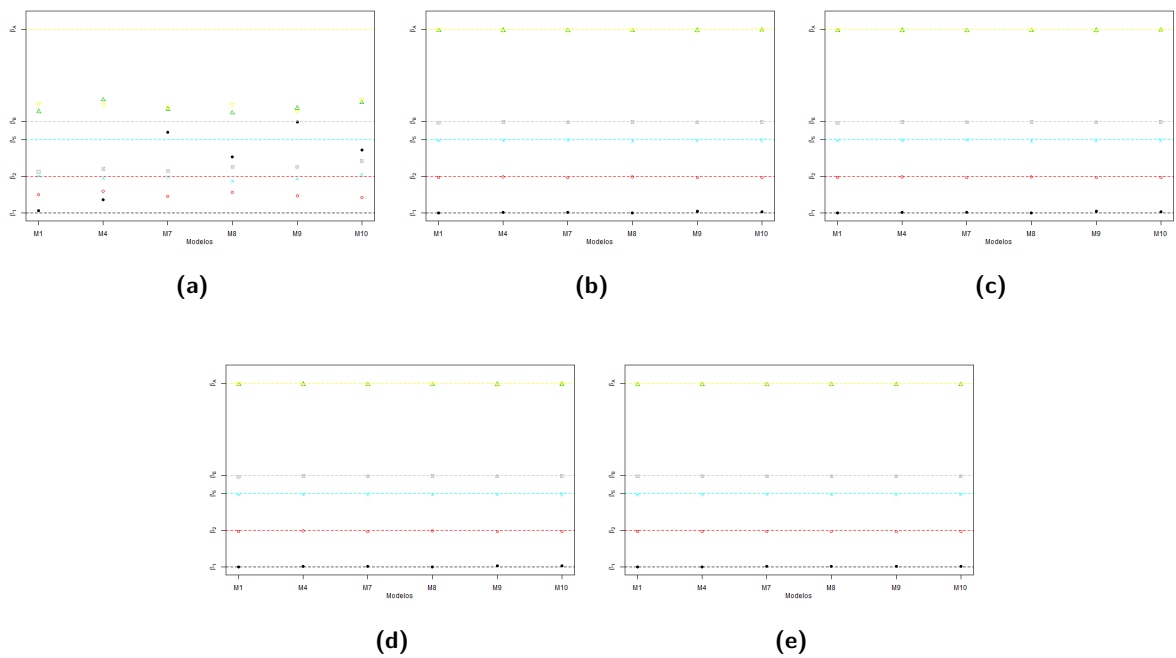


Figura F.21: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 0.8$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

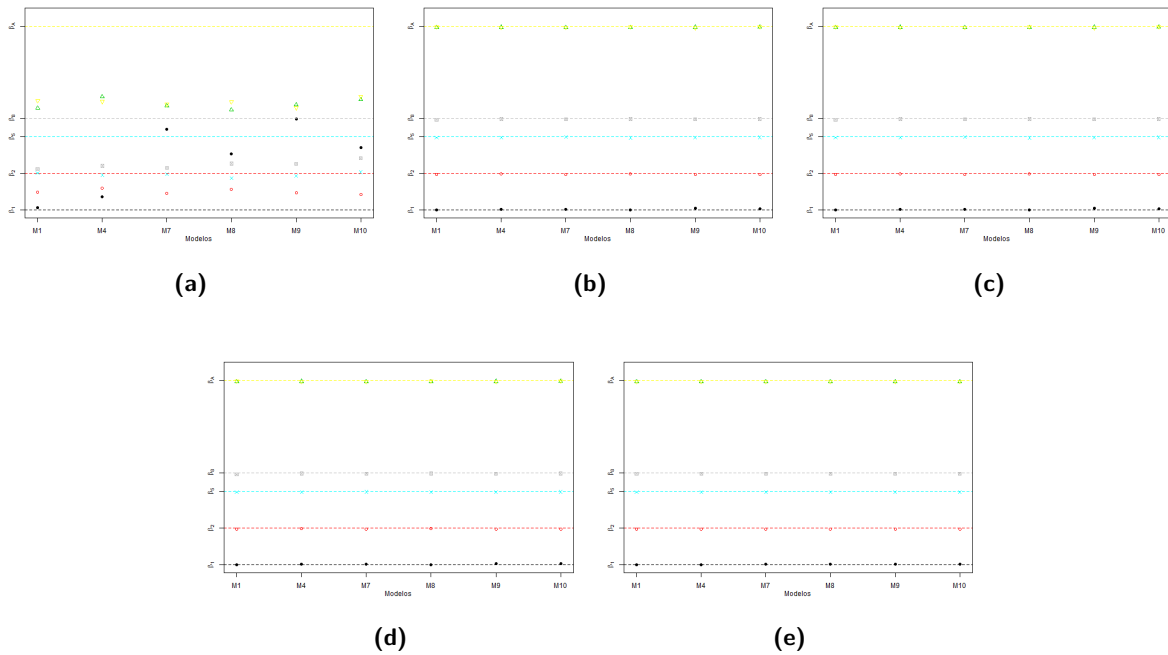


Figura F.22: Coeficientes estimados e teóricos para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* = 1$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, com SNR (a) -25, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 25.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.23 - F.64 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por modelo M_l , com $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$. Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

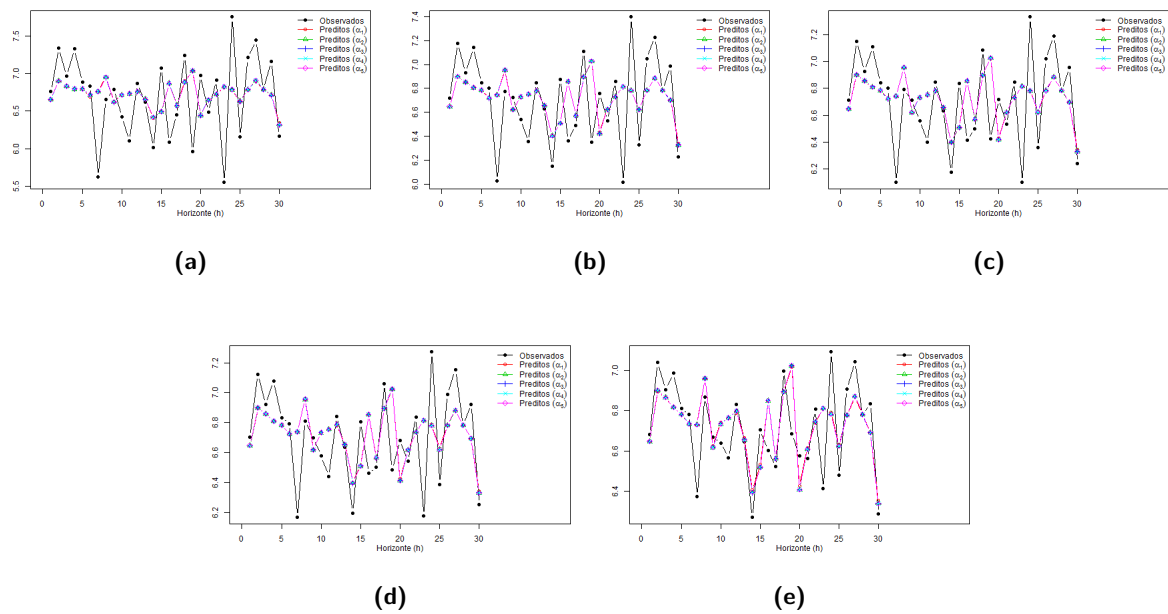


Figura F.23: Valores preditos e observados para o modelo M_1 , número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

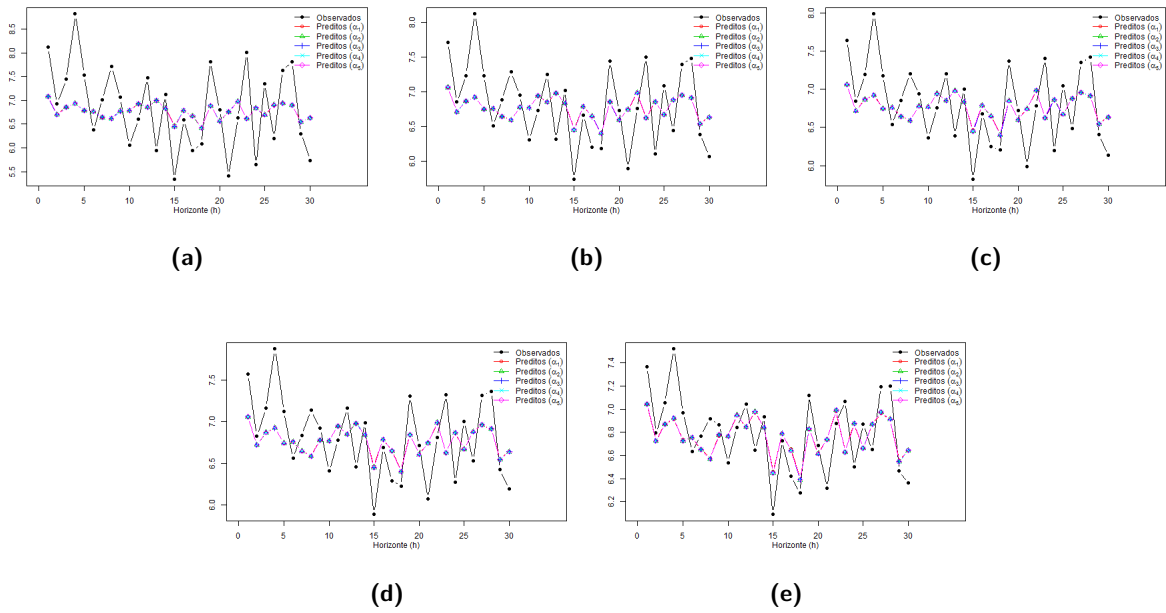


Figura F.24: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

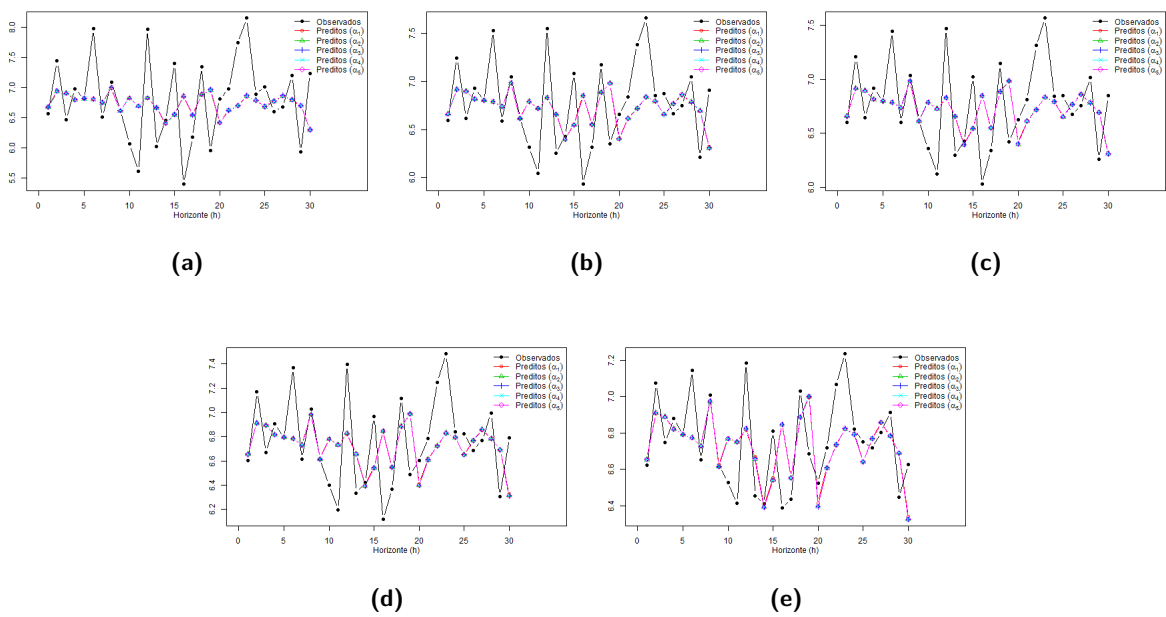


Figura F.25: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

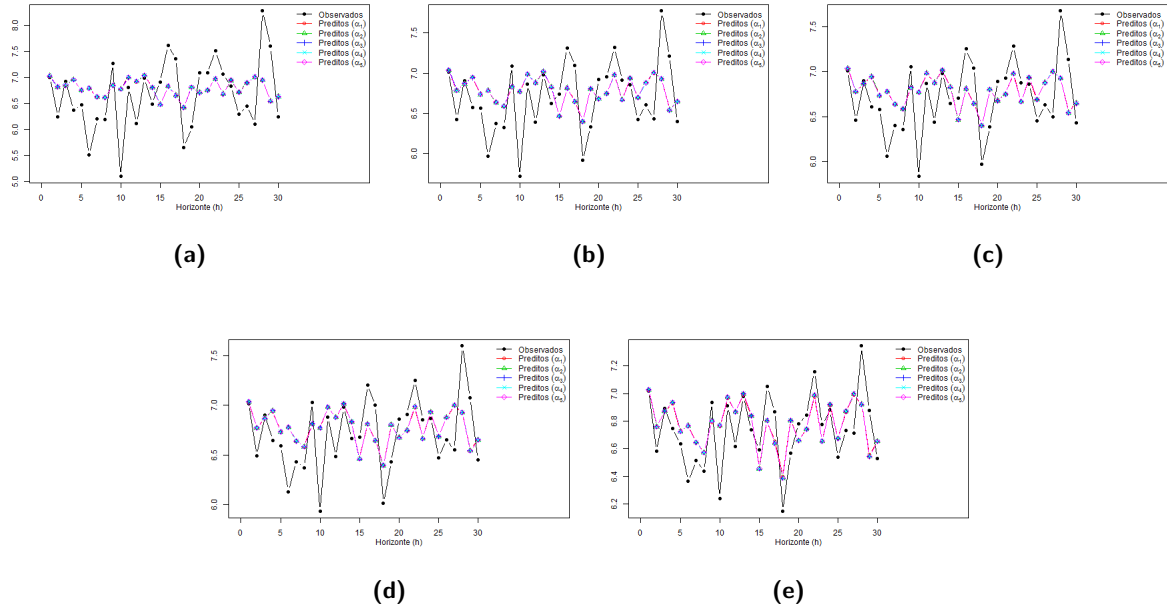


Figura F.26: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

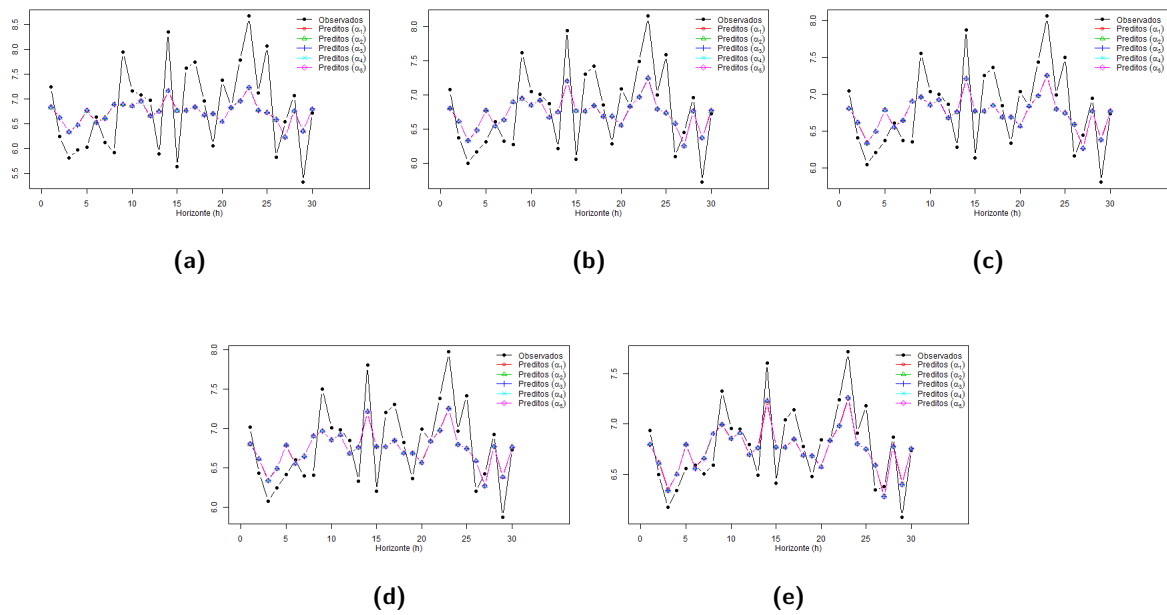


Figura F.27: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

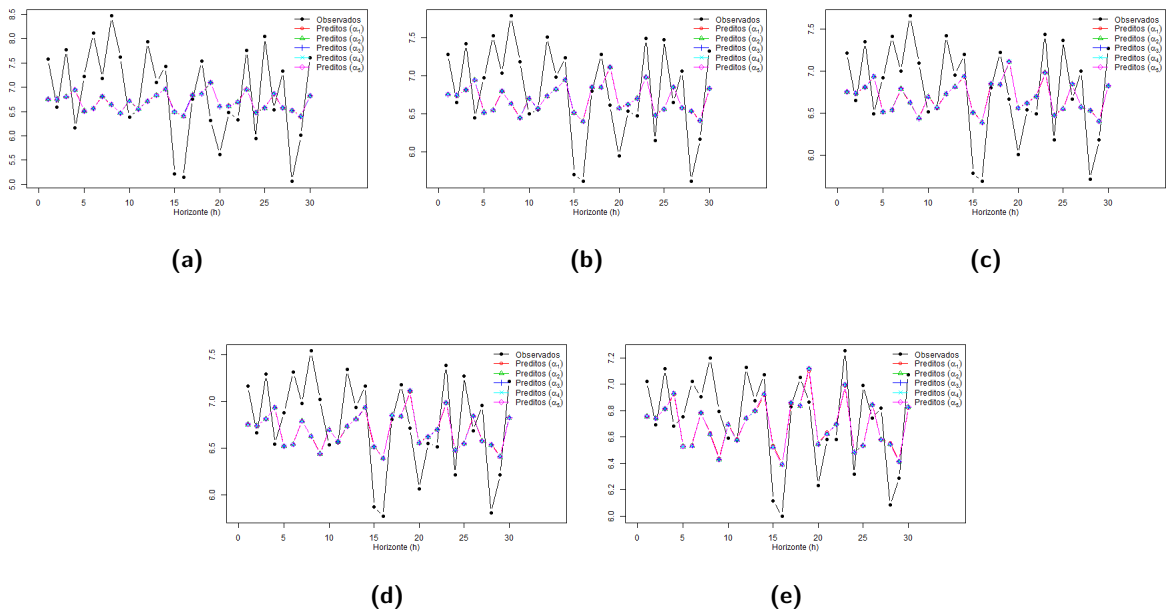


Figura F.28: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

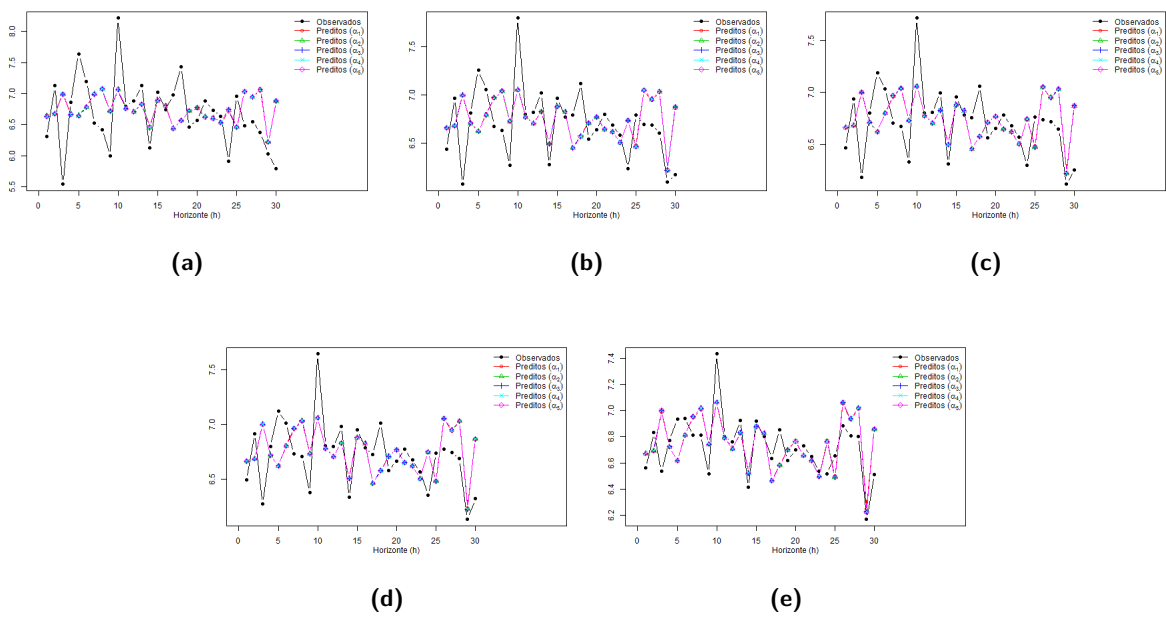


Figura F.29: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

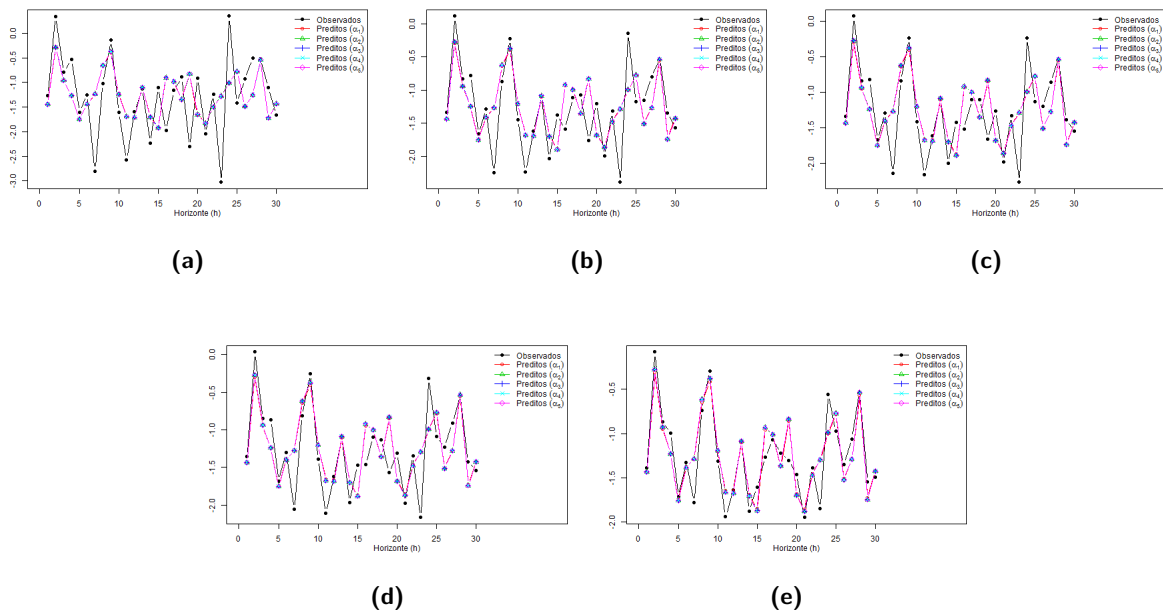


Figura F.30: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

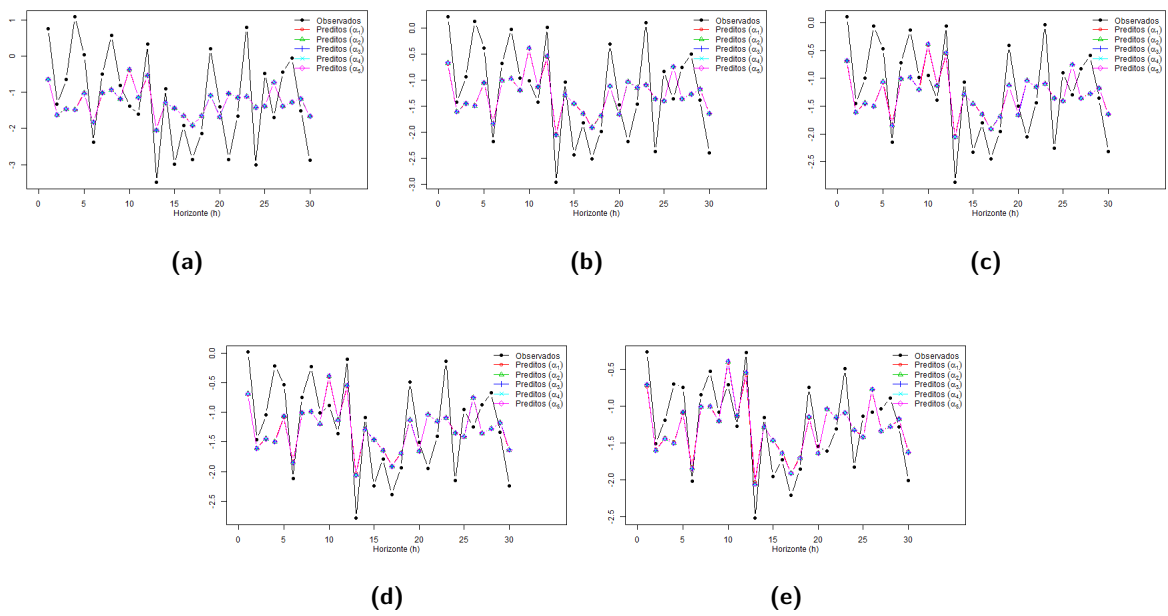


Figura F.31: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

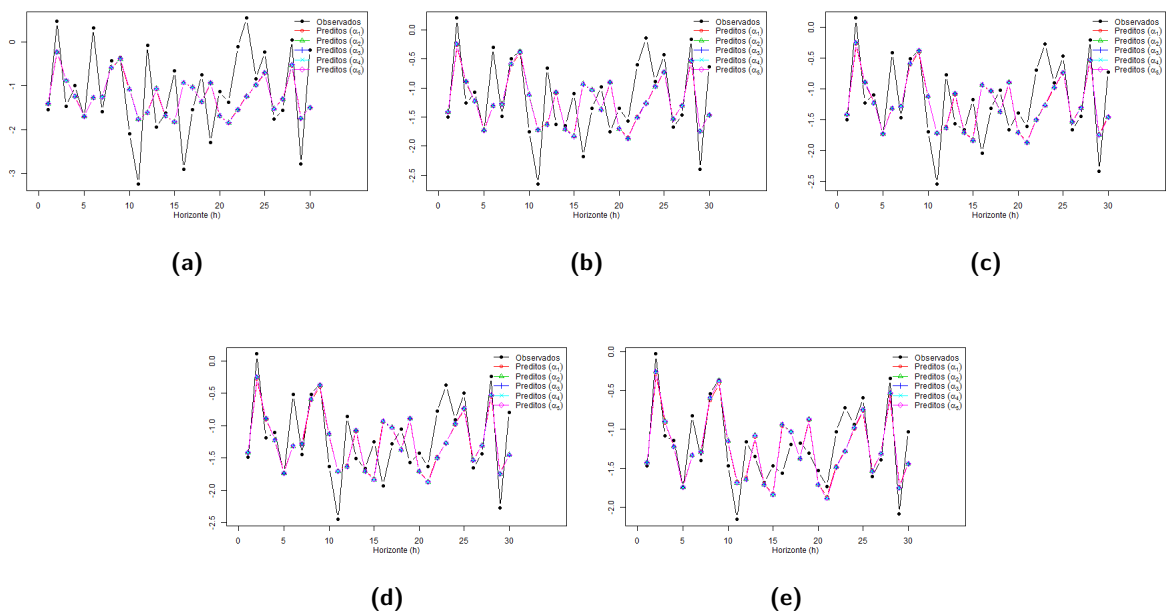


Figura F.32: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

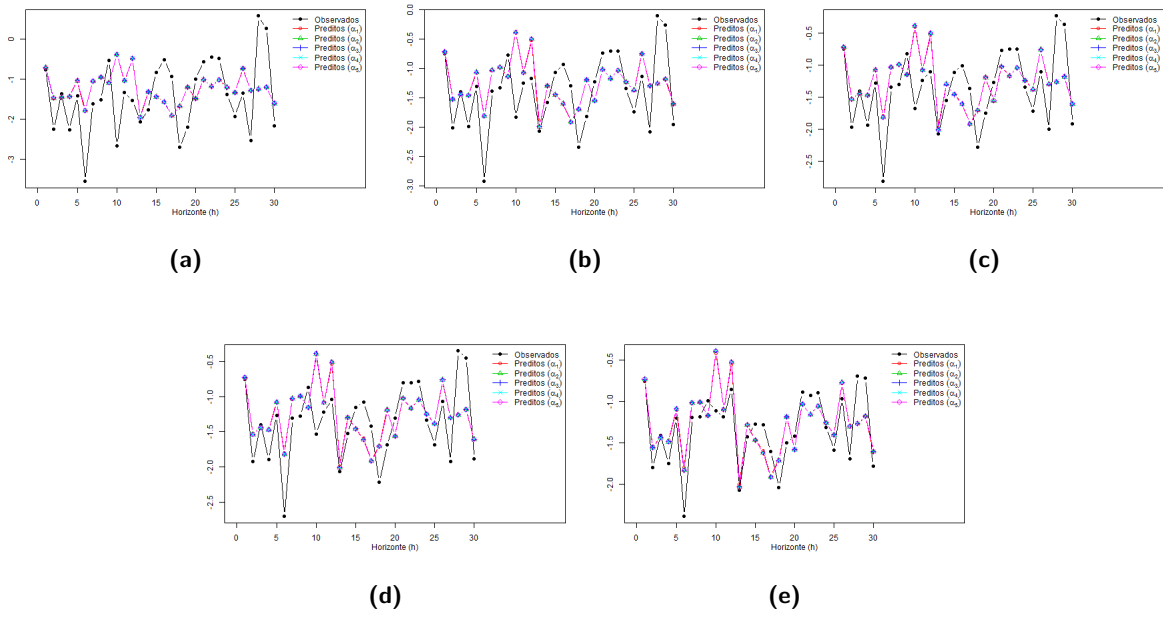


Figura F.33: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

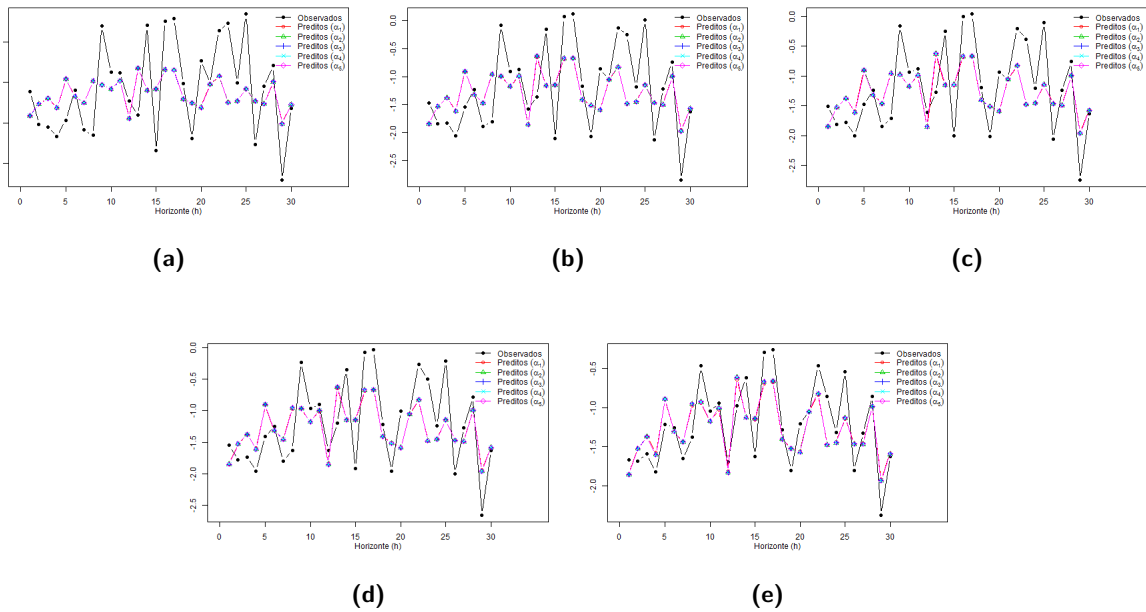


Figura F.34: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

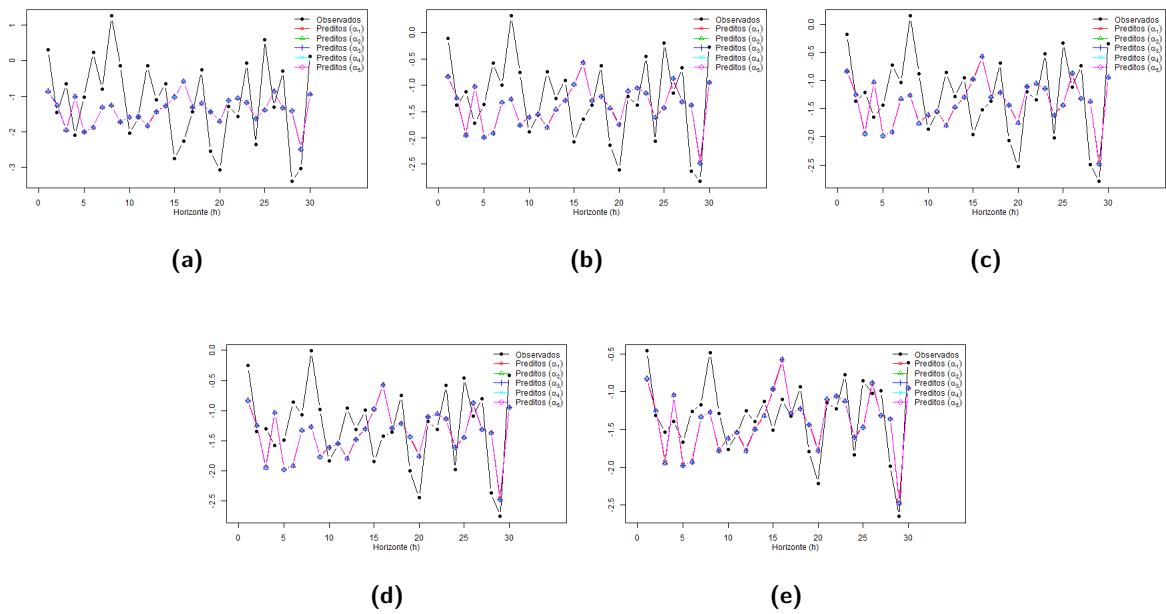


Figura F.35: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

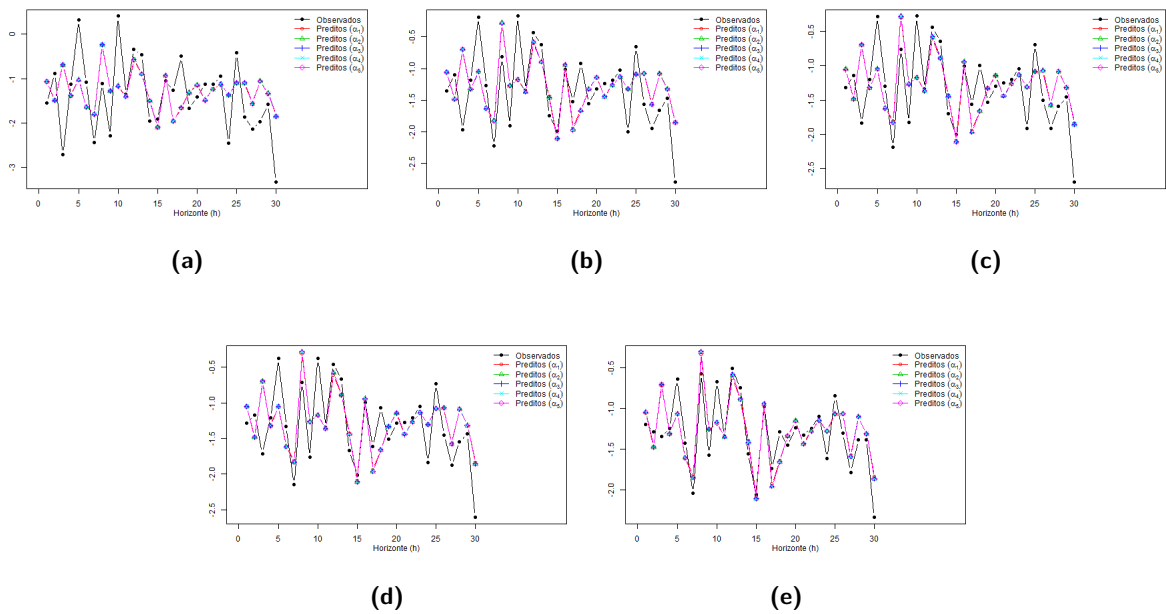


Figura F.36: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

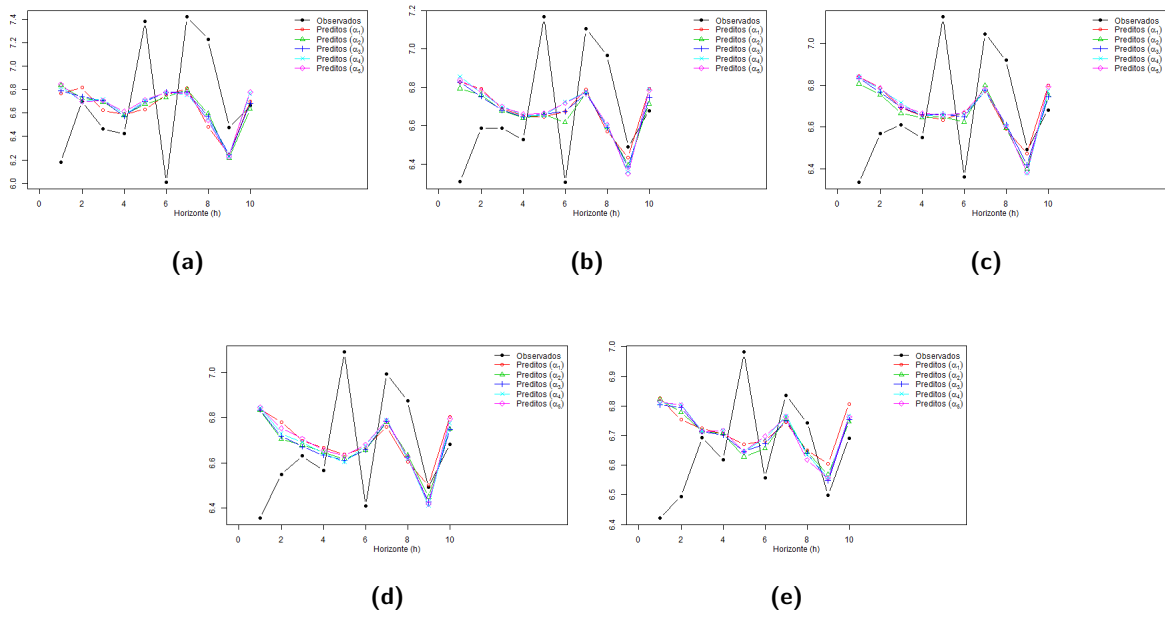


Figura F.37: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

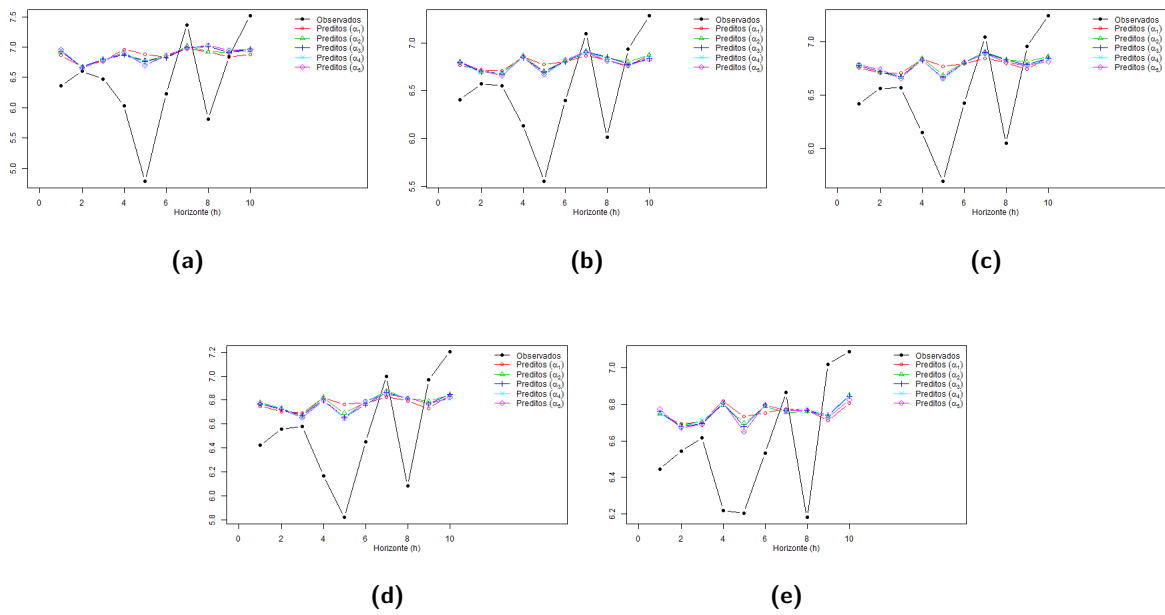


Figura F.38: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

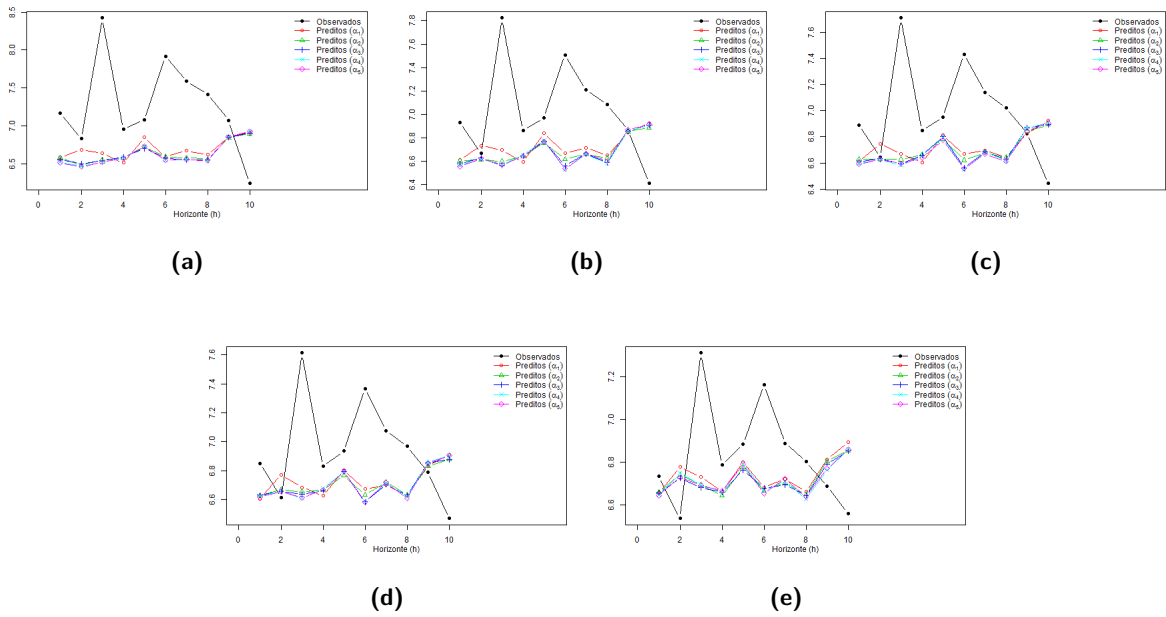


Figura F.39: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

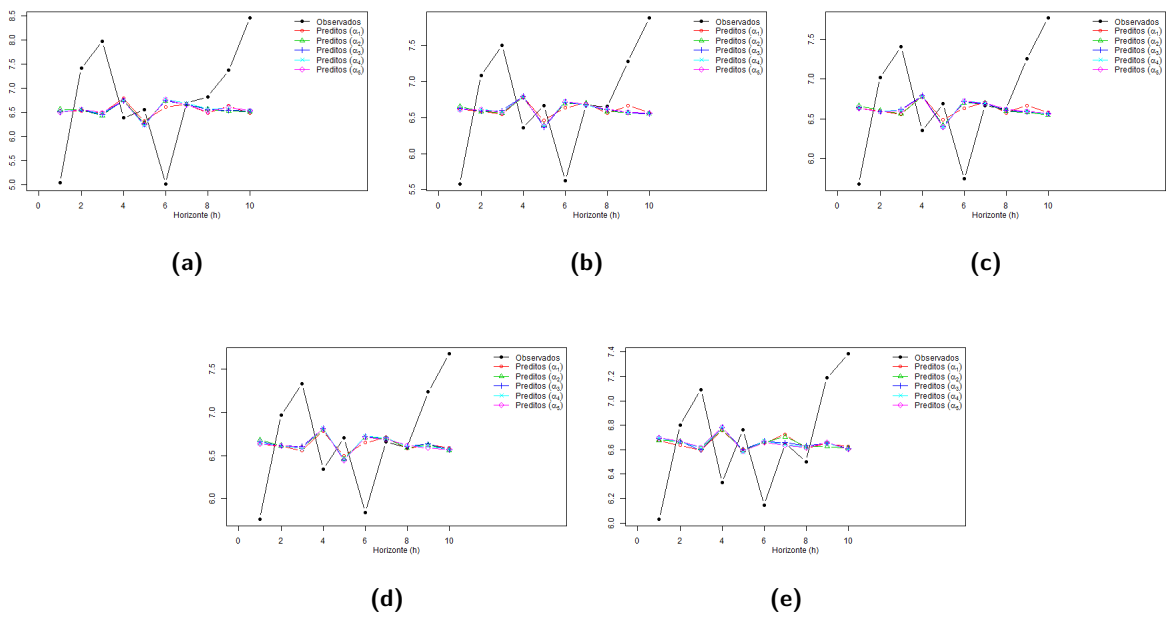


Figura F.40: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

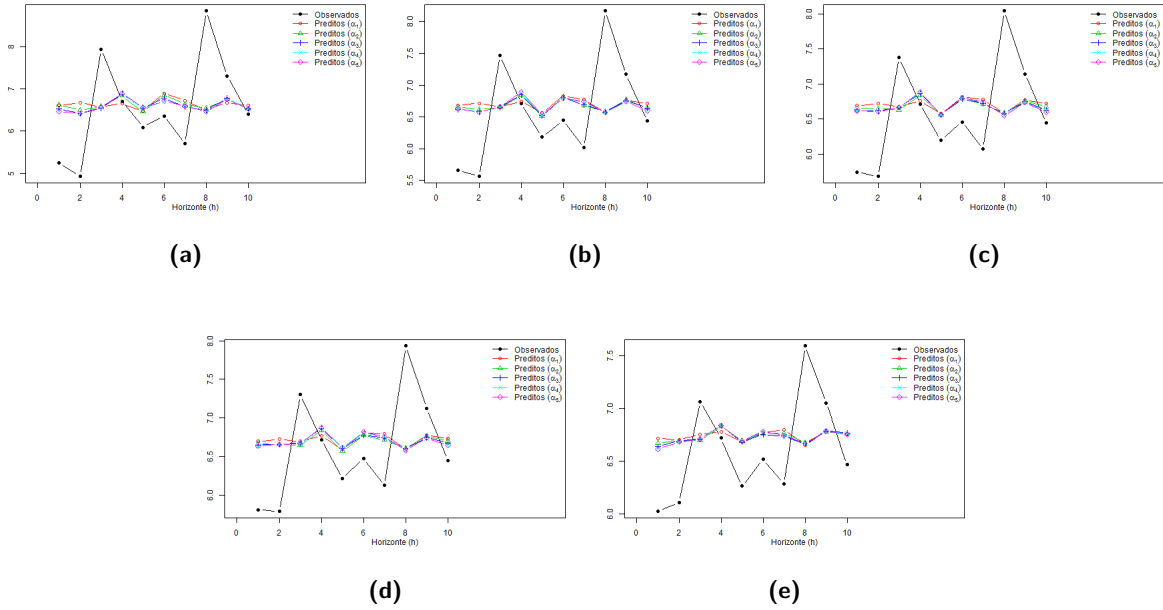


Figura F.41: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

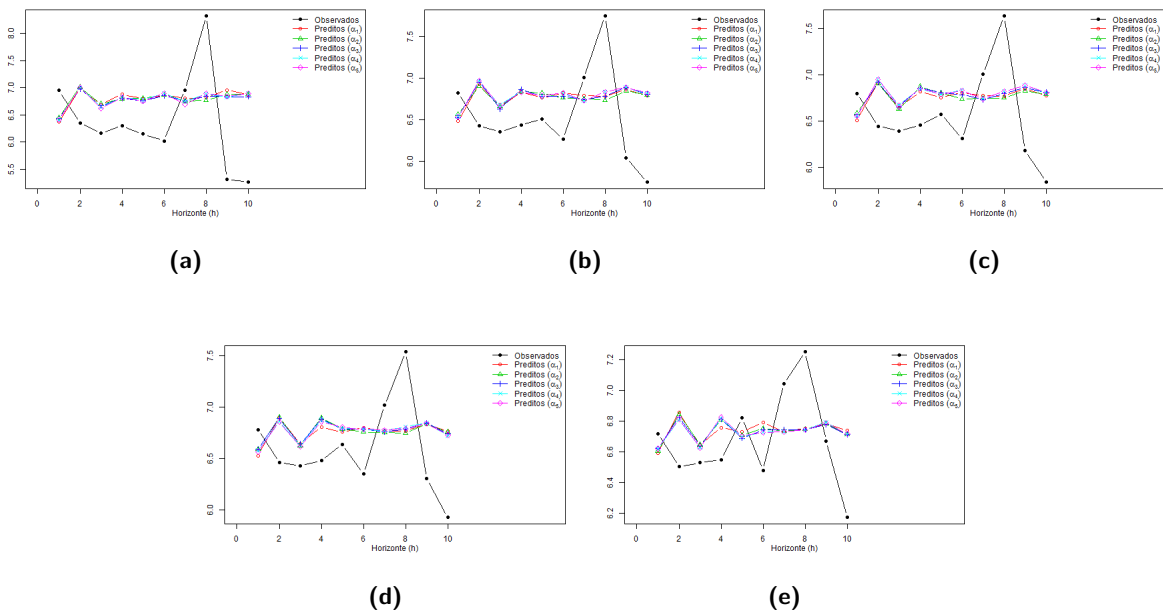


Figura F.42: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

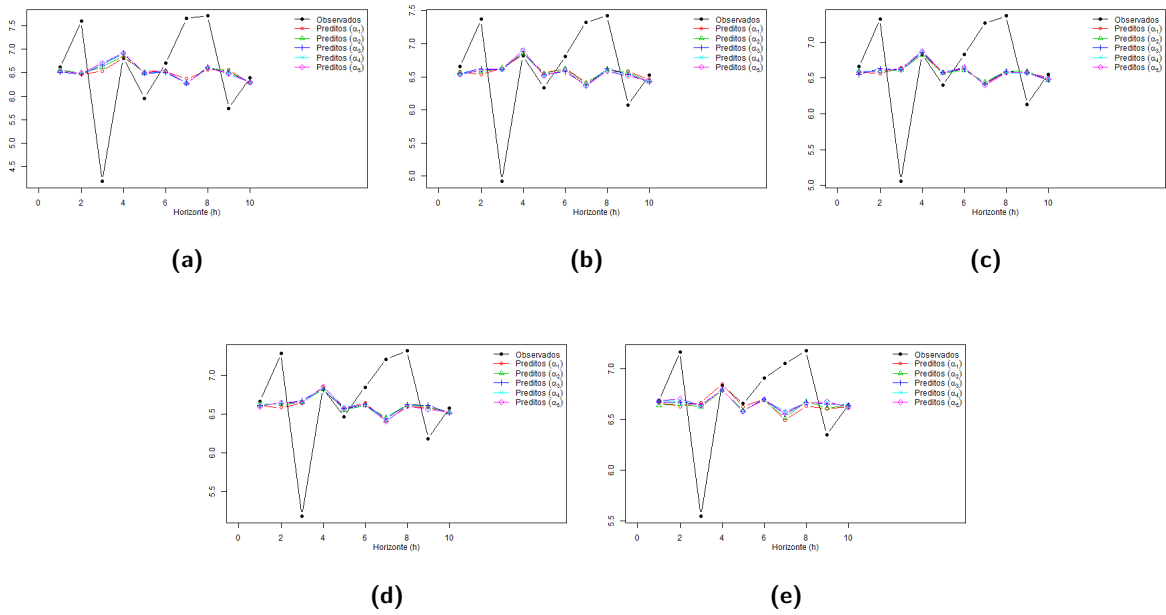


Figura F.43: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

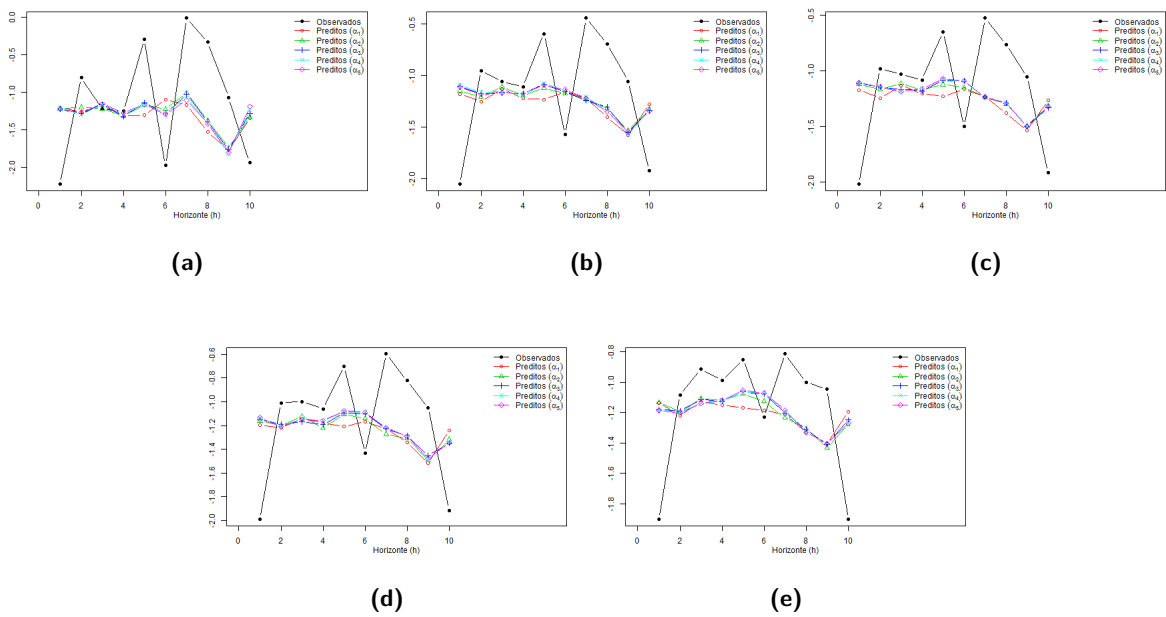


Figura F.44: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

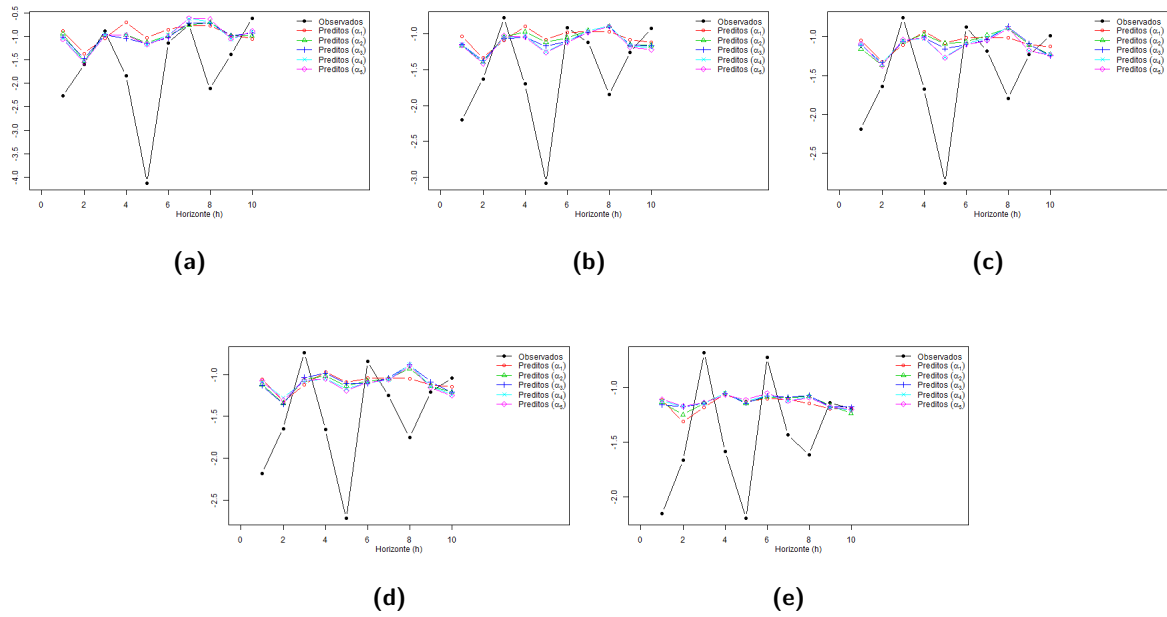


Figura F.45: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

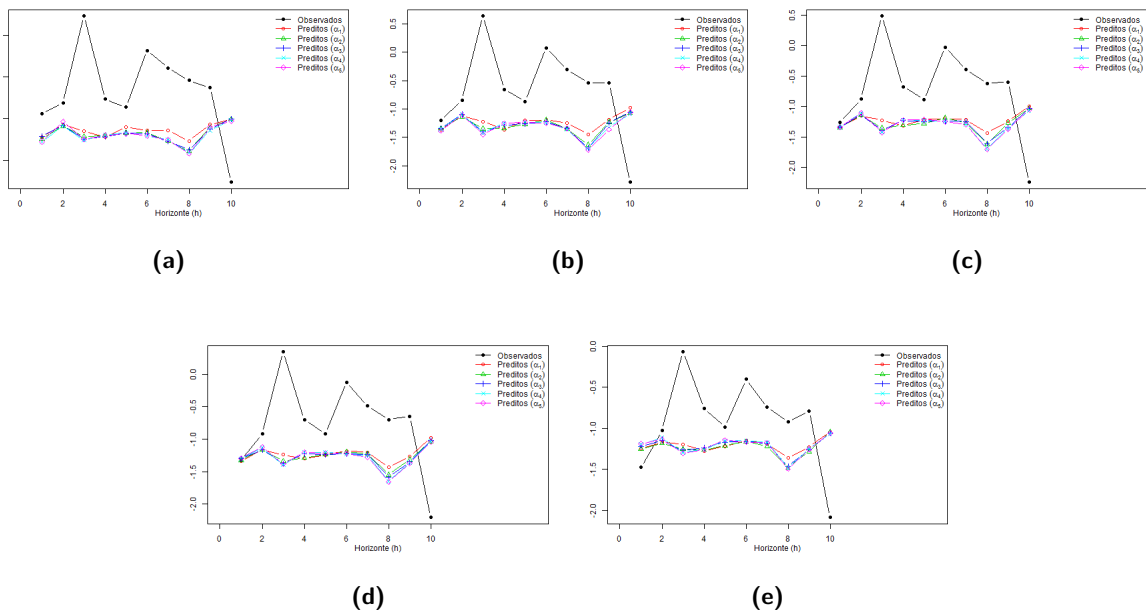


Figura F.46: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

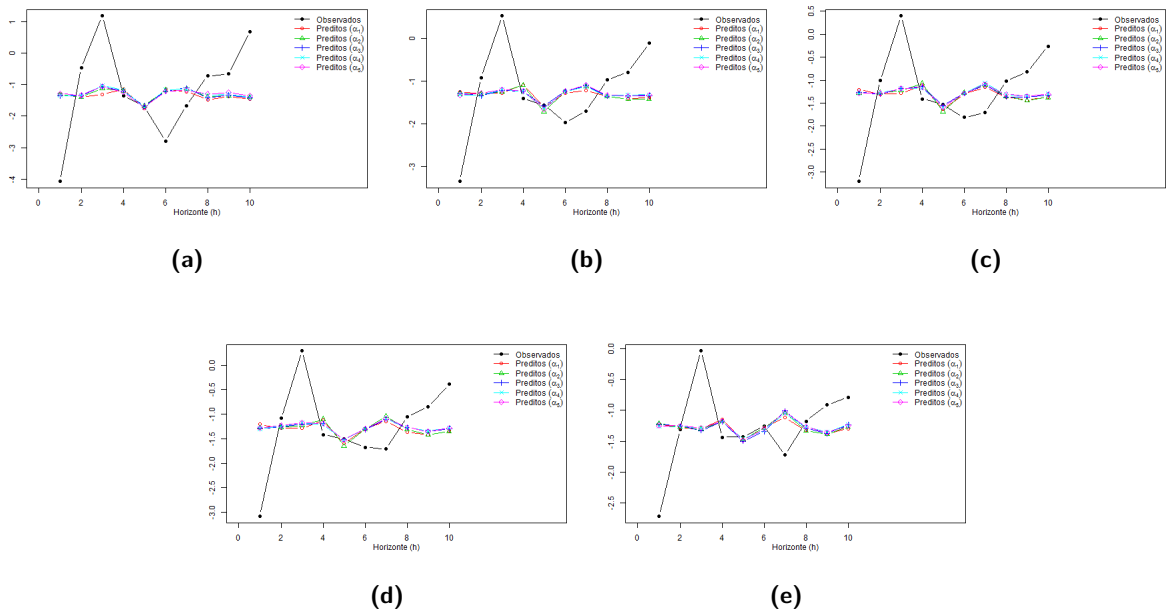


Figura F.47: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

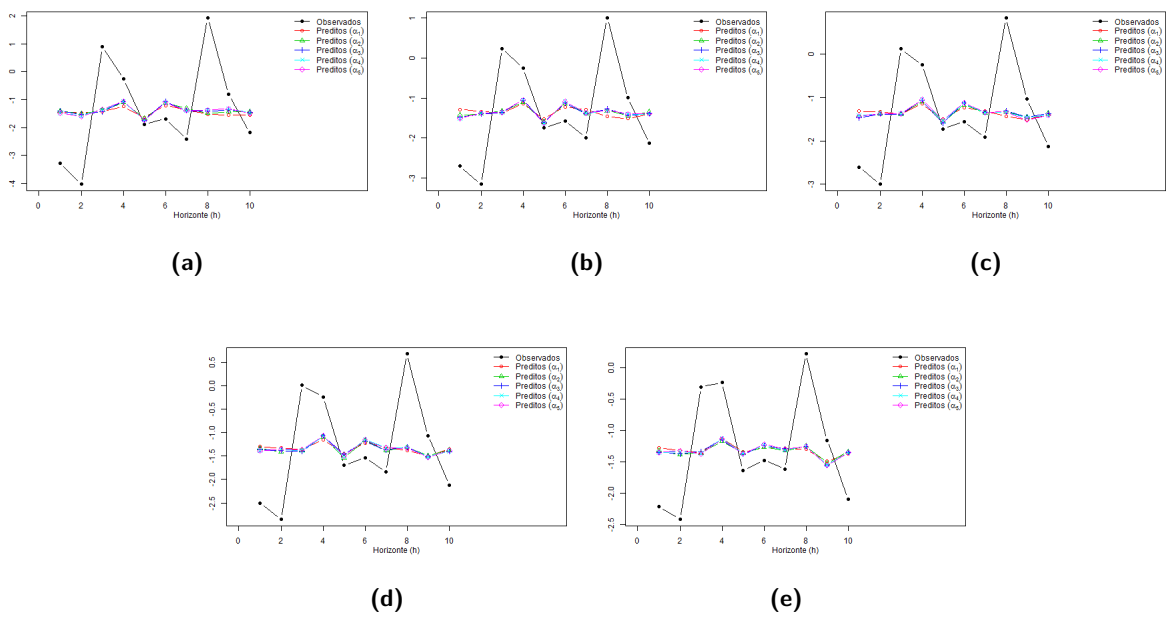


Figura F.48: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

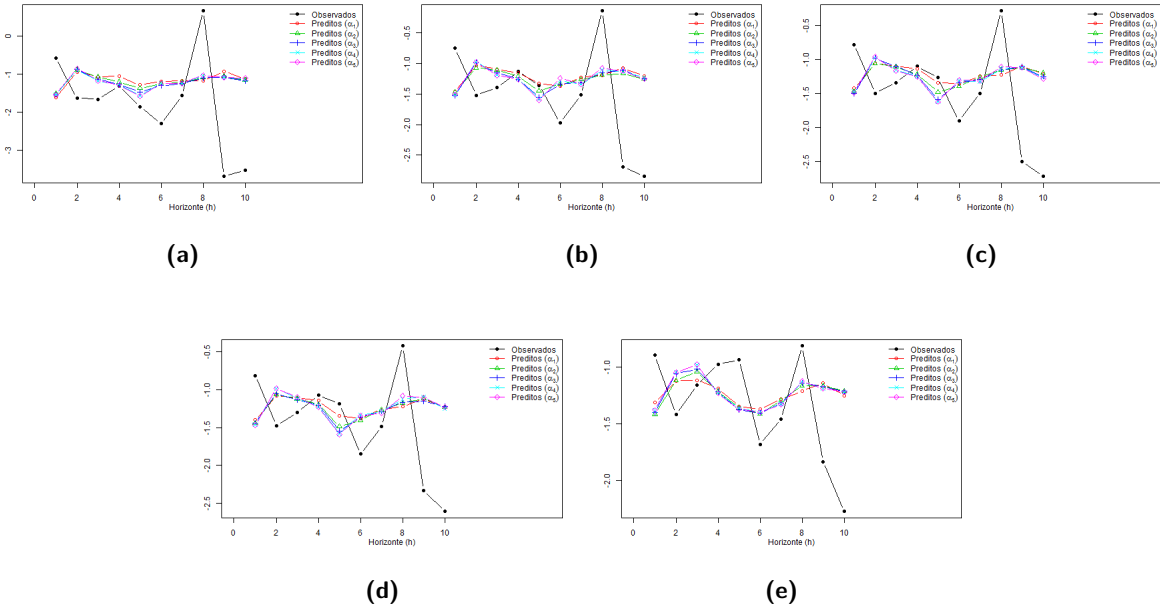


Figura F.49: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

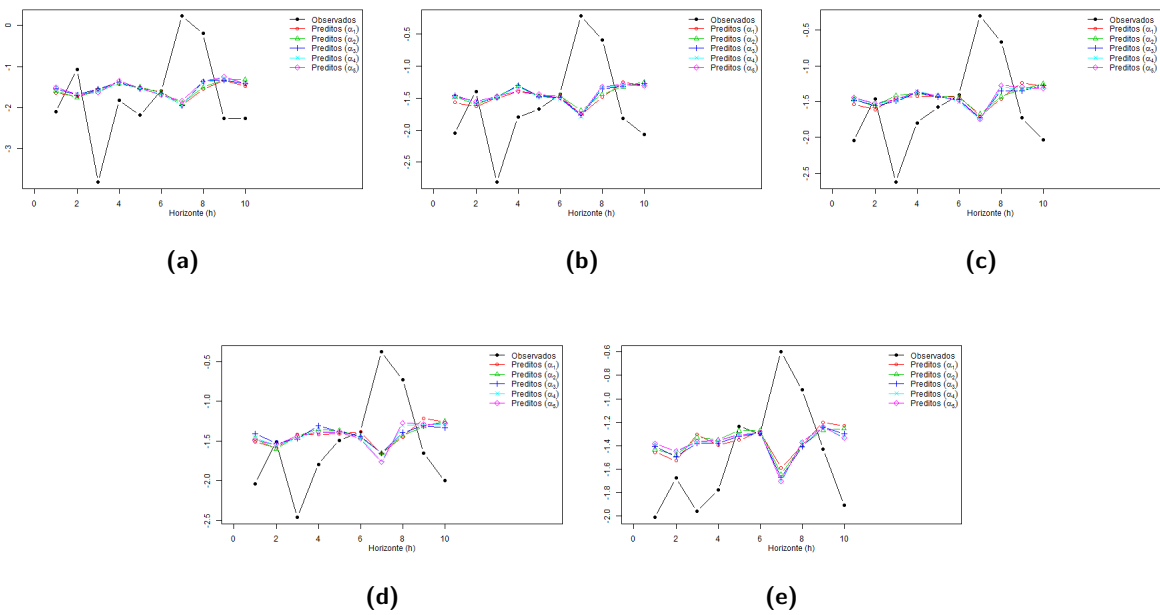


Figura F.50: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

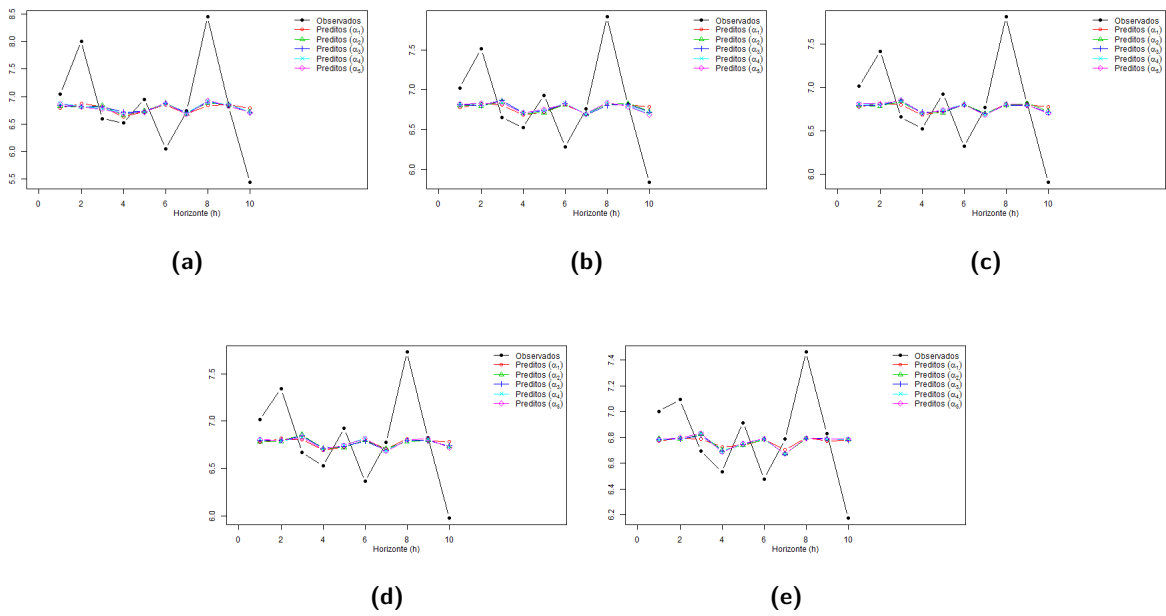


Figura F.51: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

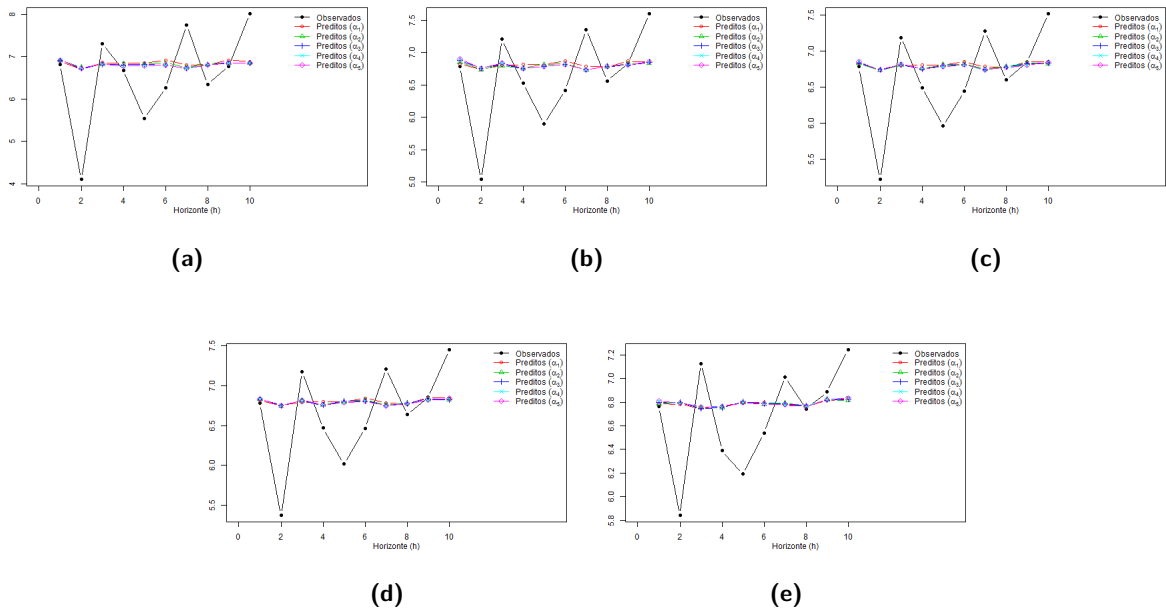


Figura F.52: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

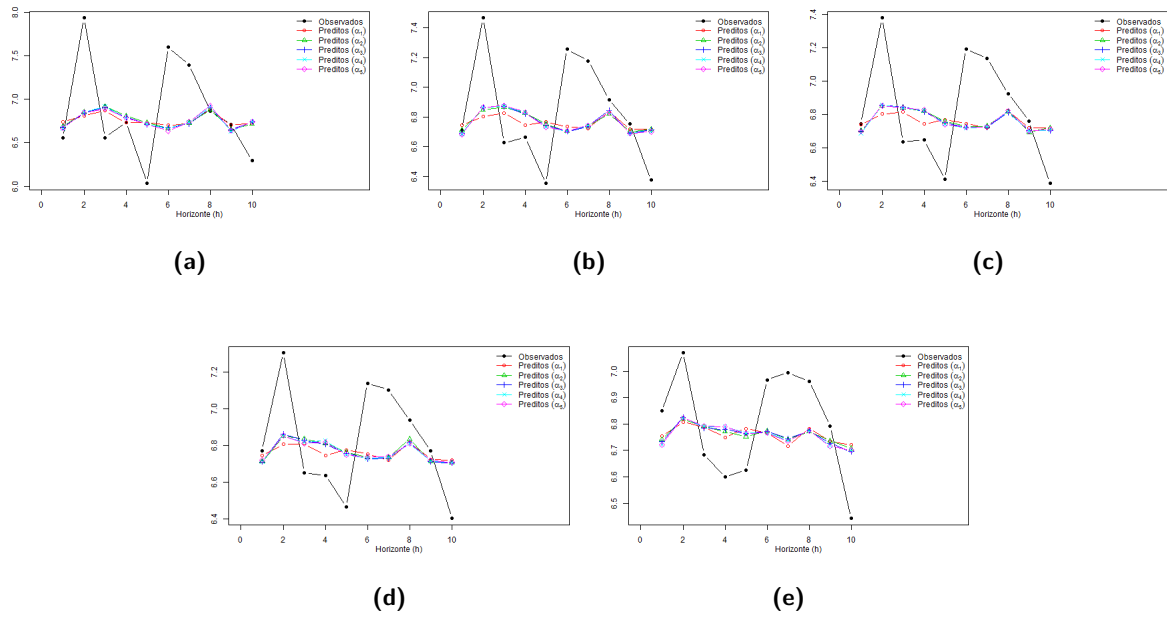


Figura F.53: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

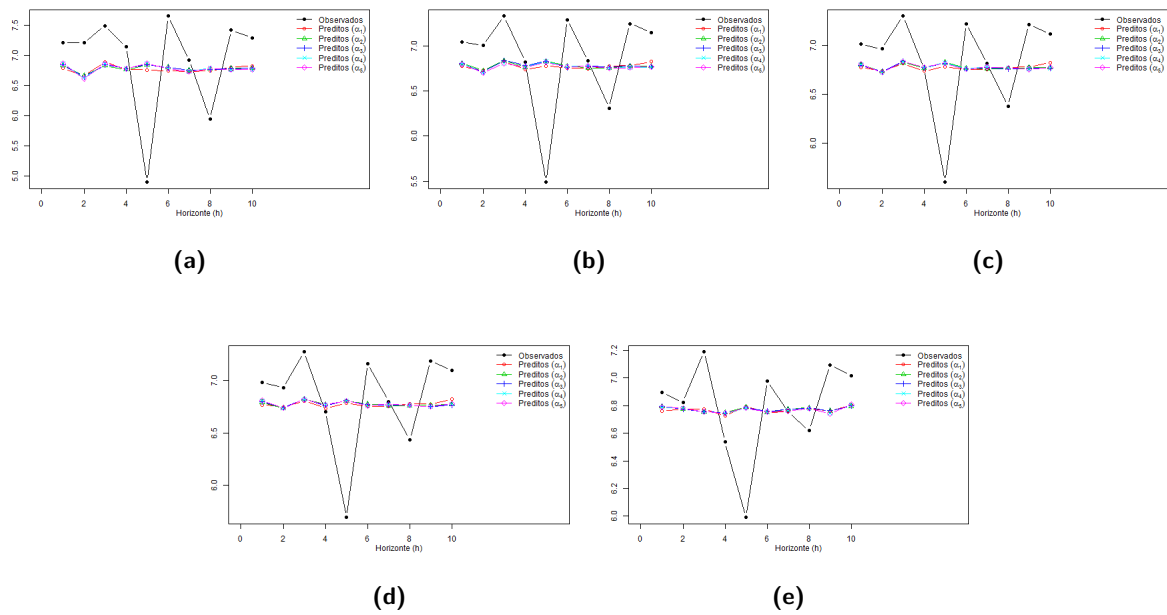


Figura F.54: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

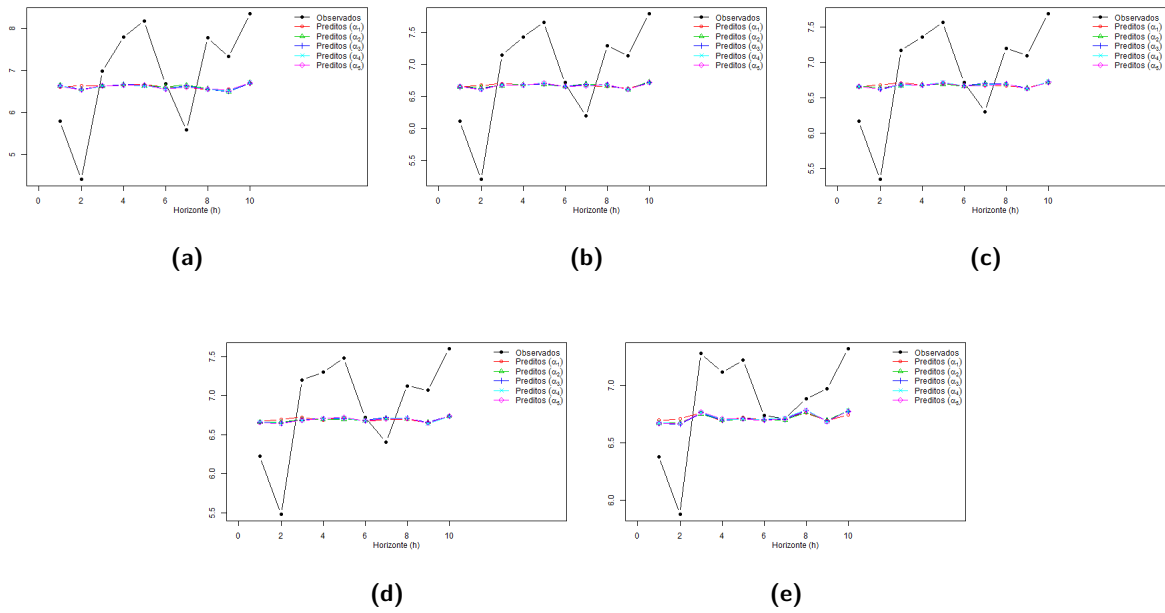


Figura F.55: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

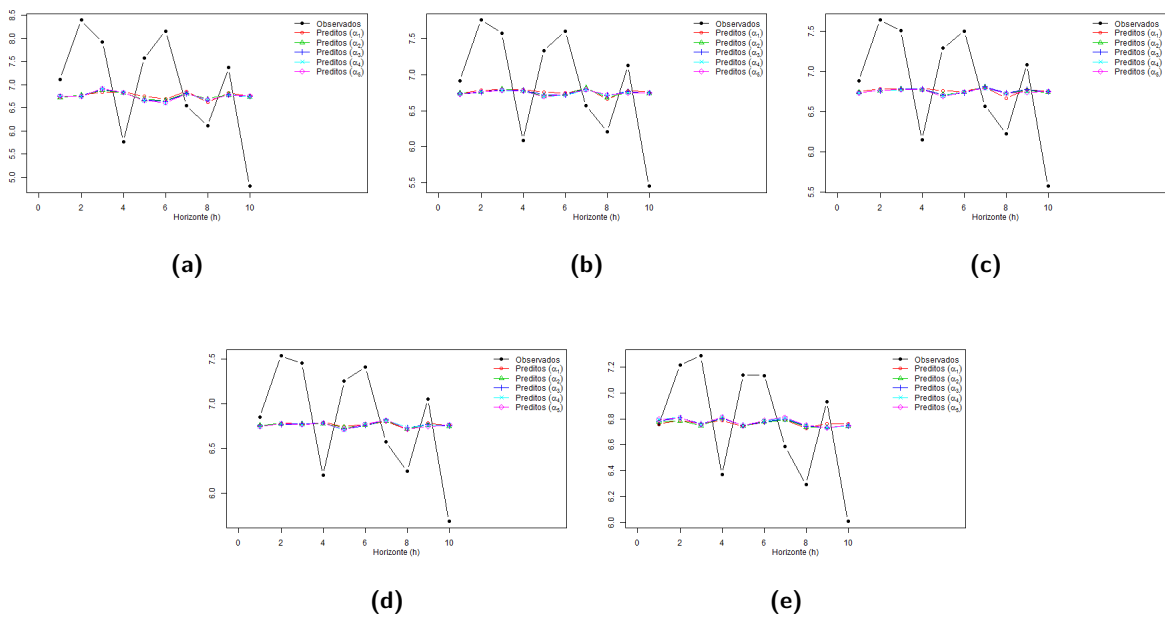


Figura F.56: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

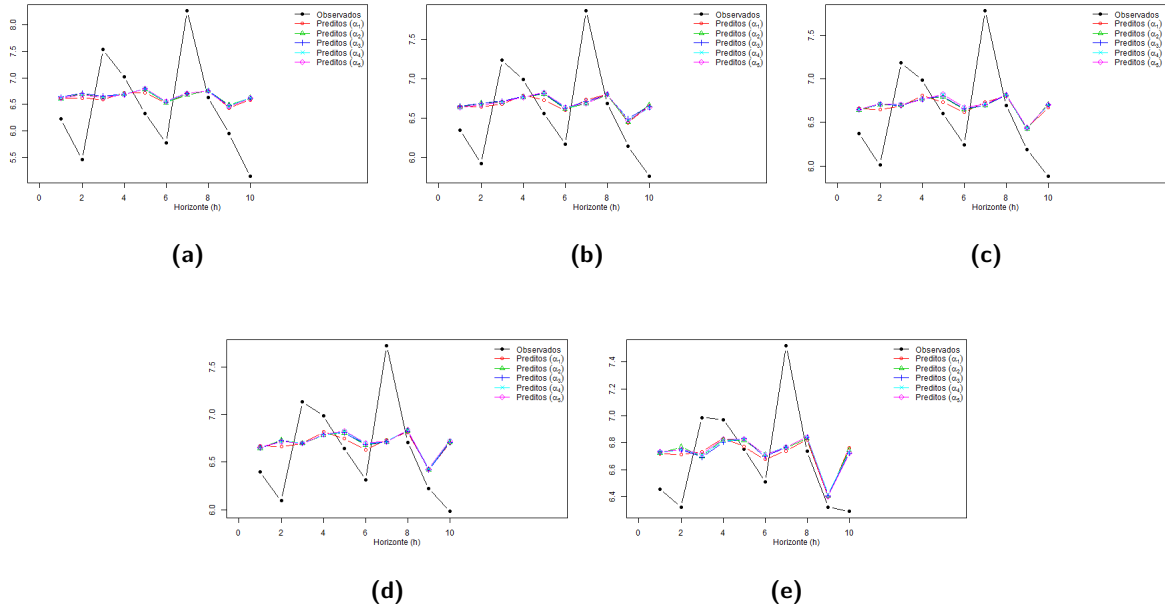


Figura F.57: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

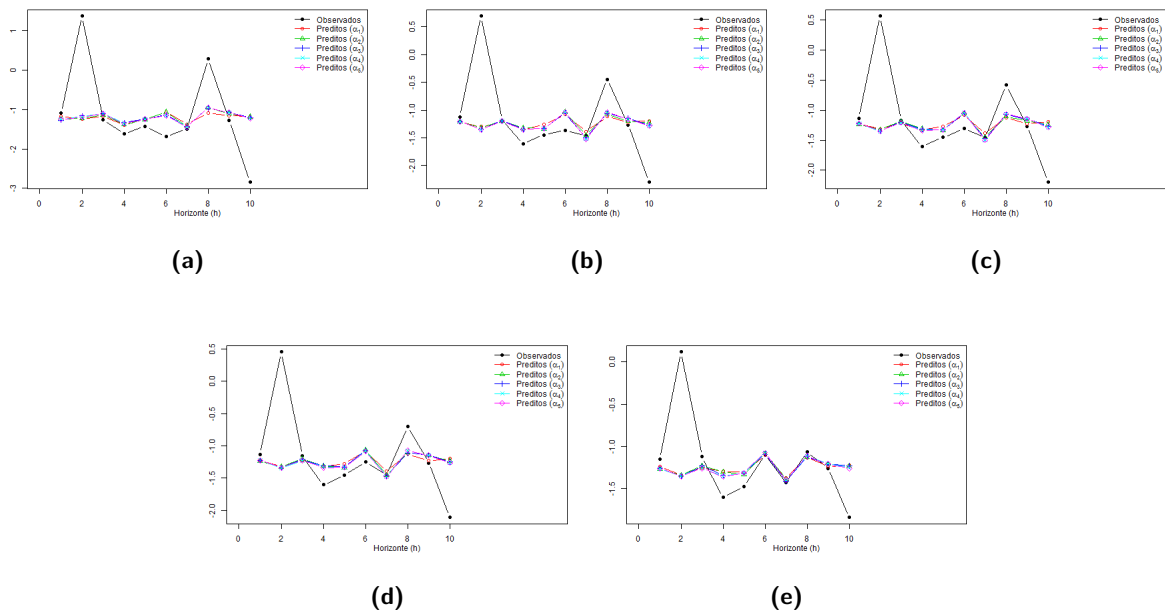


Figura F.58: Valores preditos e observados para o modelo M1, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

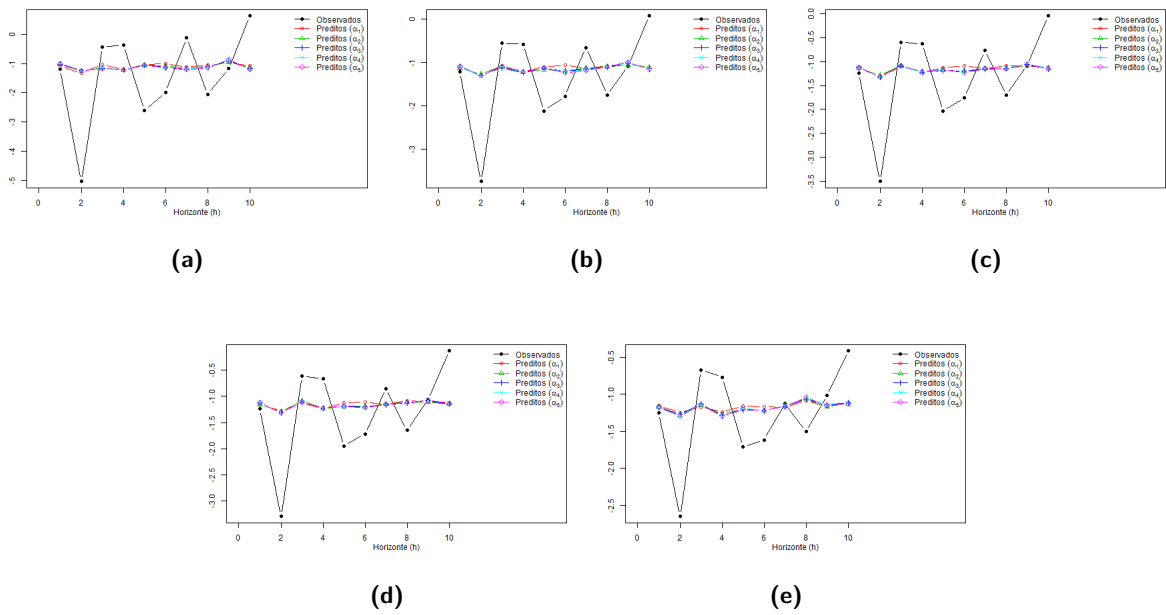


Figura F.59: Valores preditos e observados para o modelo M2, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

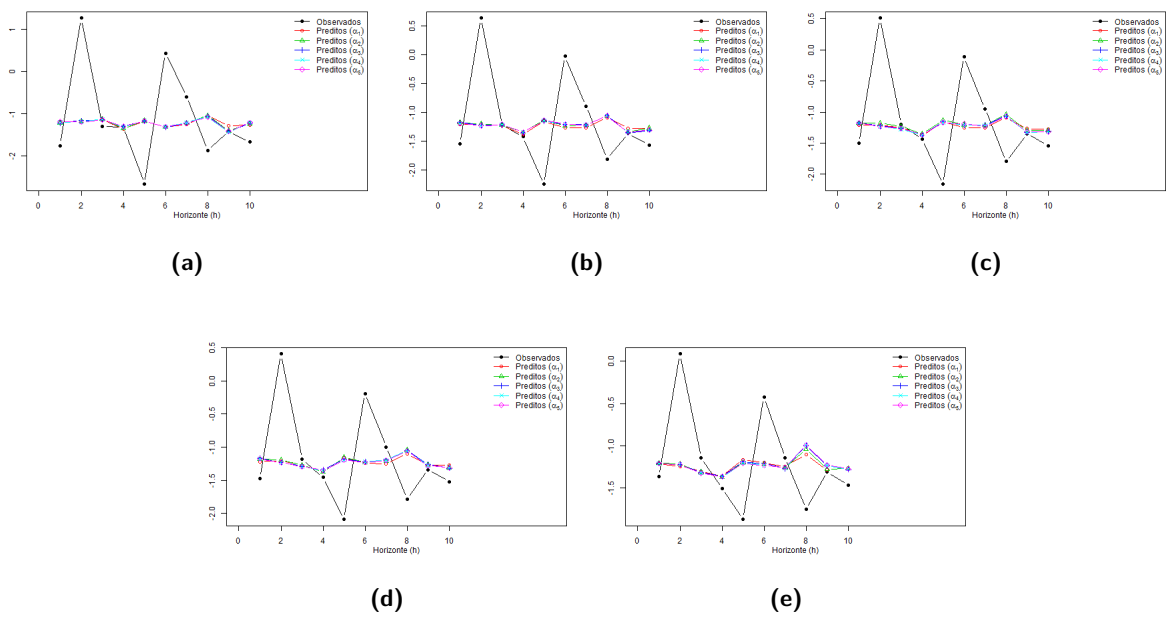


Figura F.60: Valores preditos e observados para o modelo M3, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

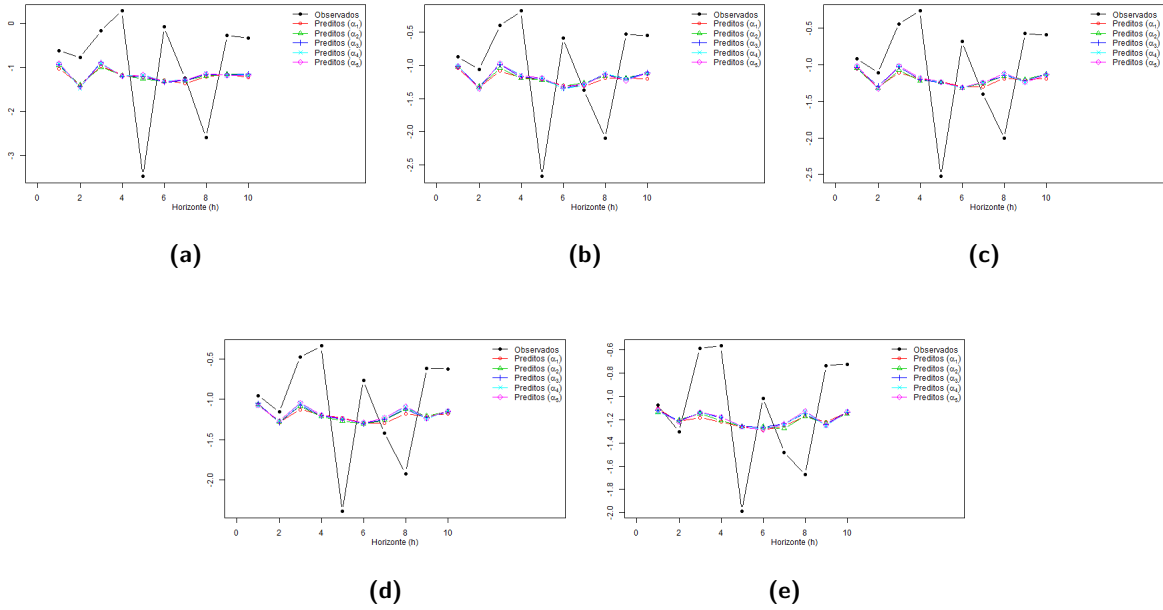


Figura F.61: Valores preditos e observados para o modelo M4, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

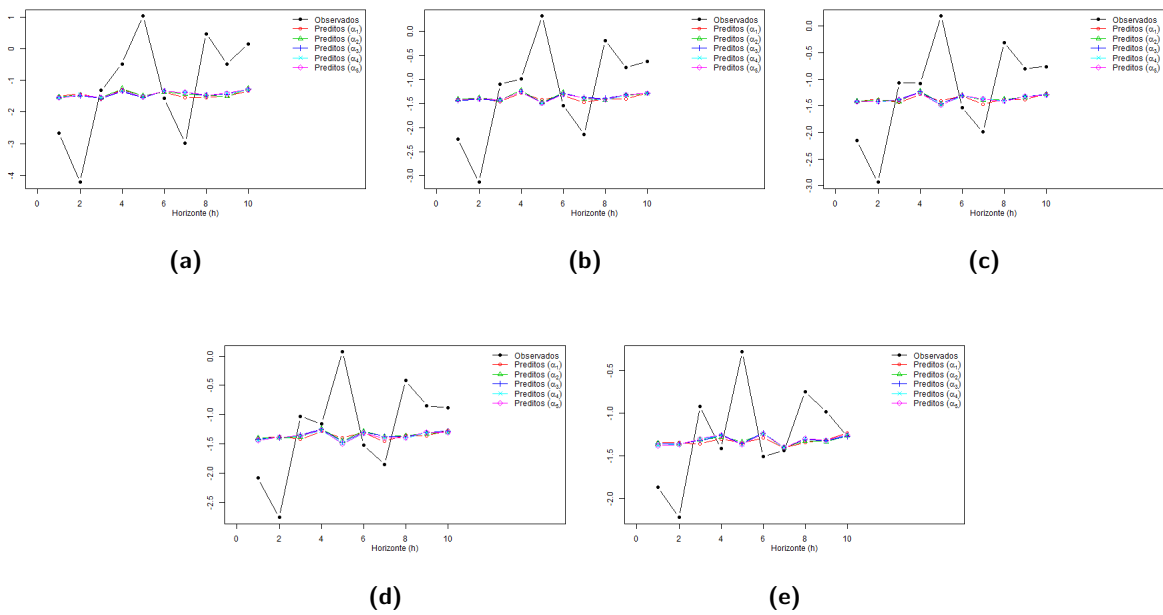


Figura F.62: Valores preditos e observados para o modelo M5, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

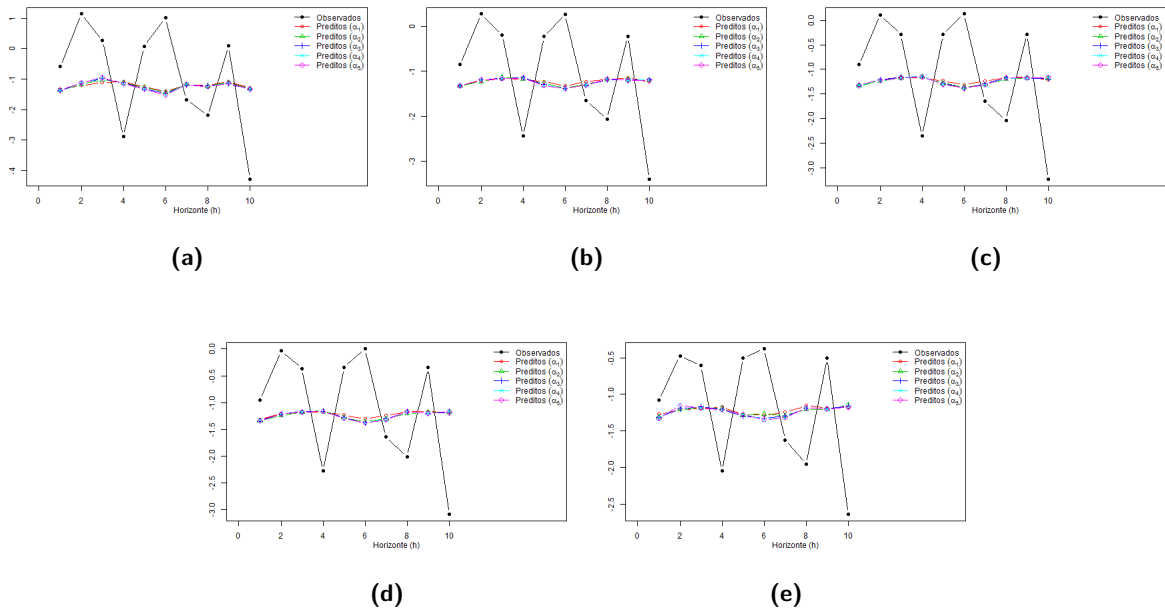


Figura F.63: Valores preditos e observados para o modelo M6, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

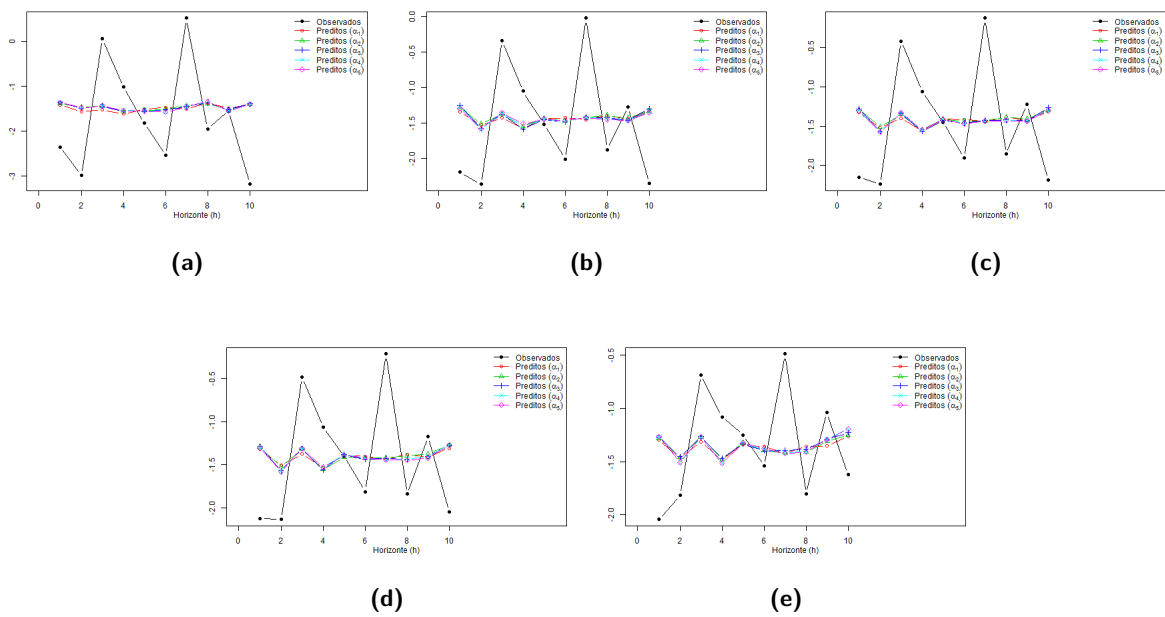


Figura F.64: Valores preditos e observados para o modelo M9, número de replicações $re = 500$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

Apresentamos nas Figuras F.65 - F.112 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por modelo M_l , com $l \in \{11, \dots, 14\}$. Para estes modelos serão utilizados $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_{7,2}, \beta_{8,2}, \beta_{8,3}) \in \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

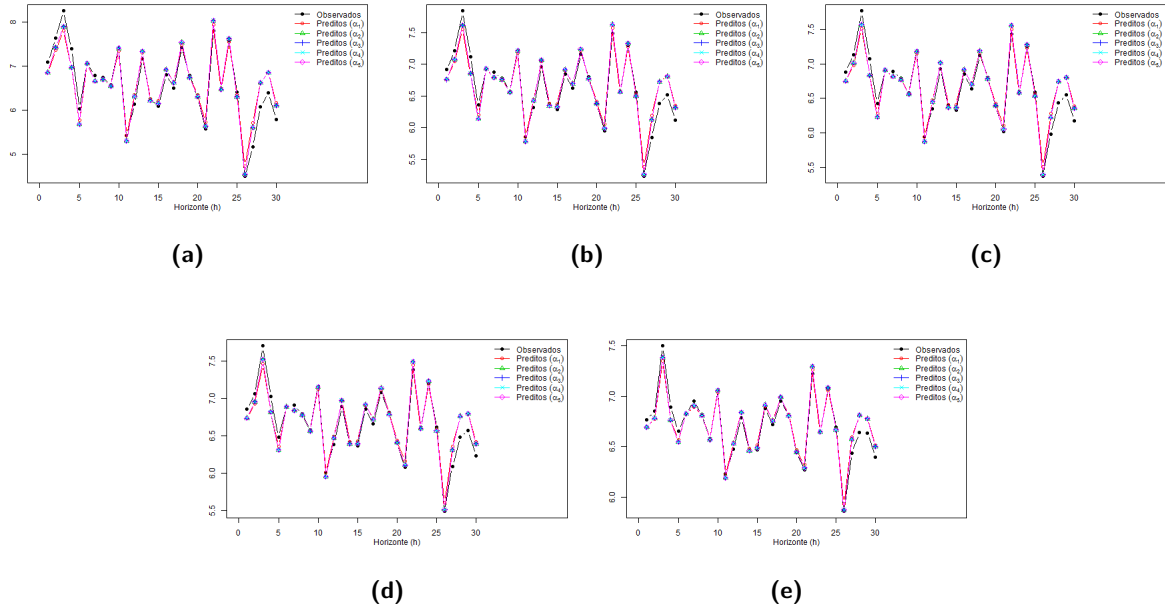


Figura F.65: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

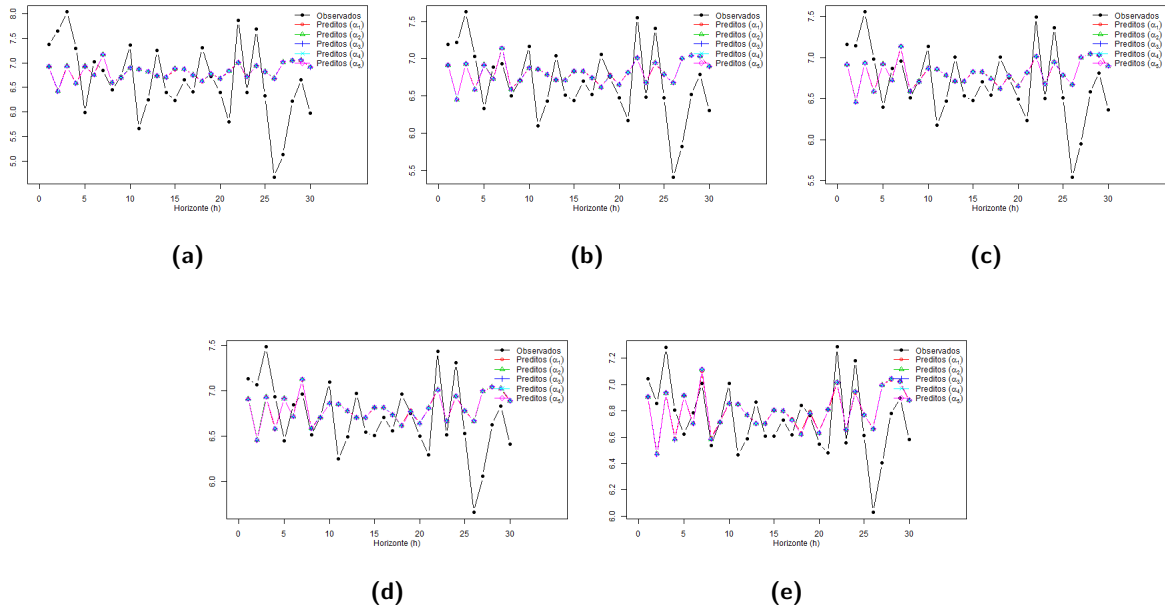


Figura F.66: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

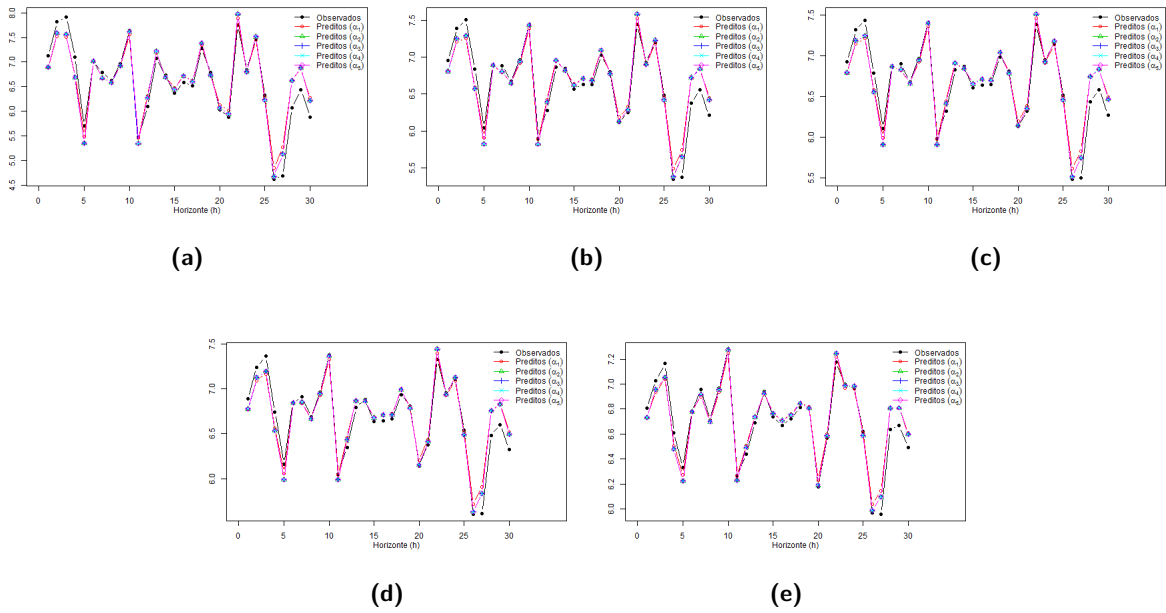


Figura F.67: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

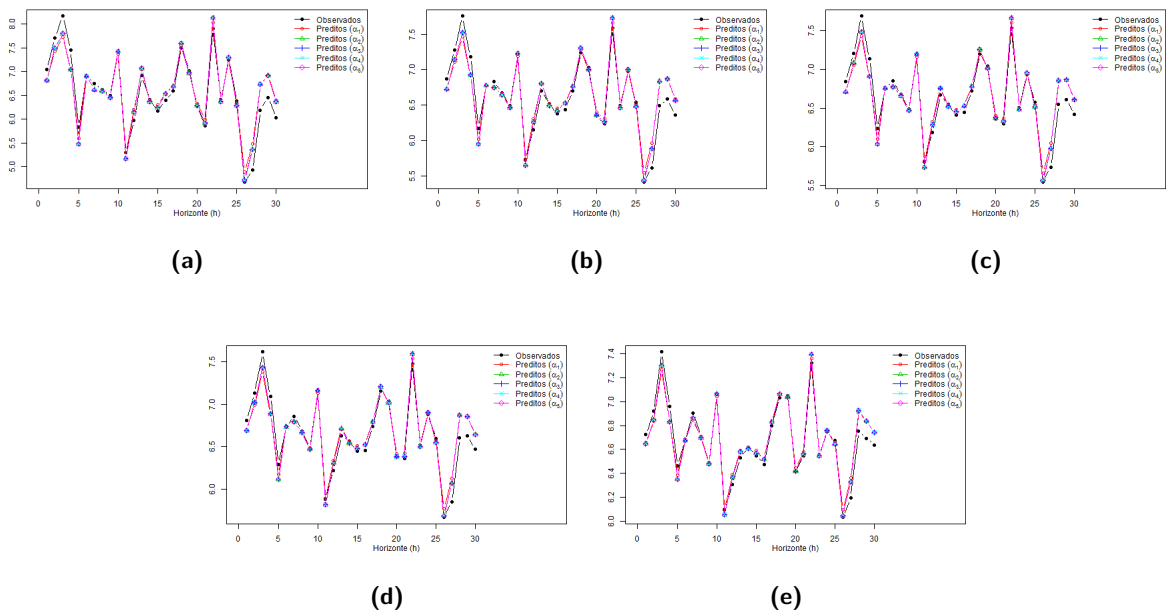


Figura F.68: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

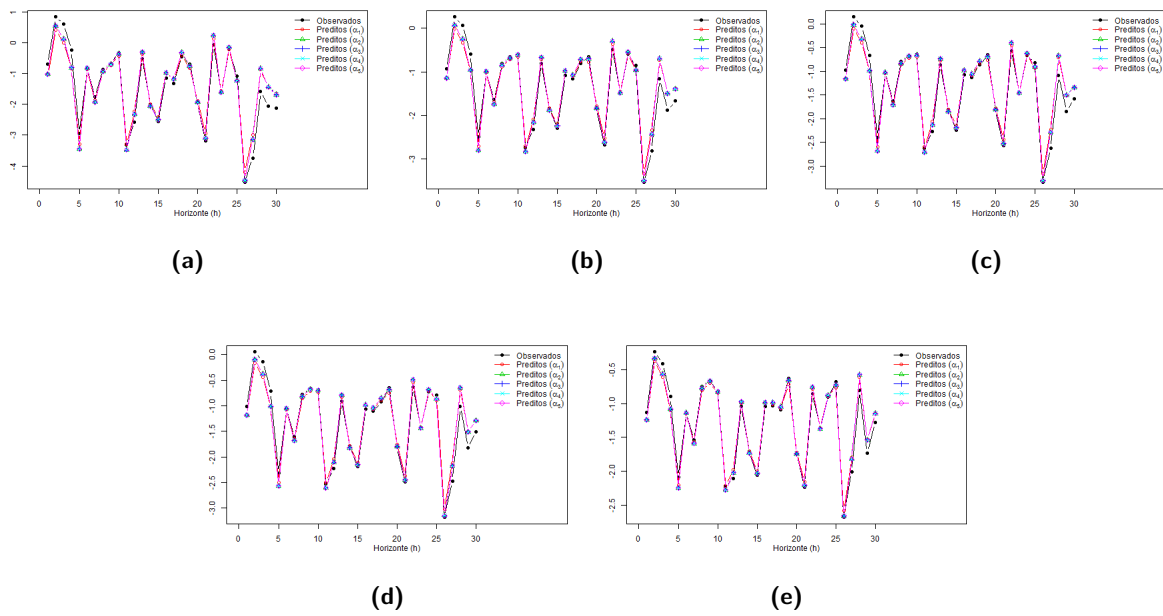


Figura F.69: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

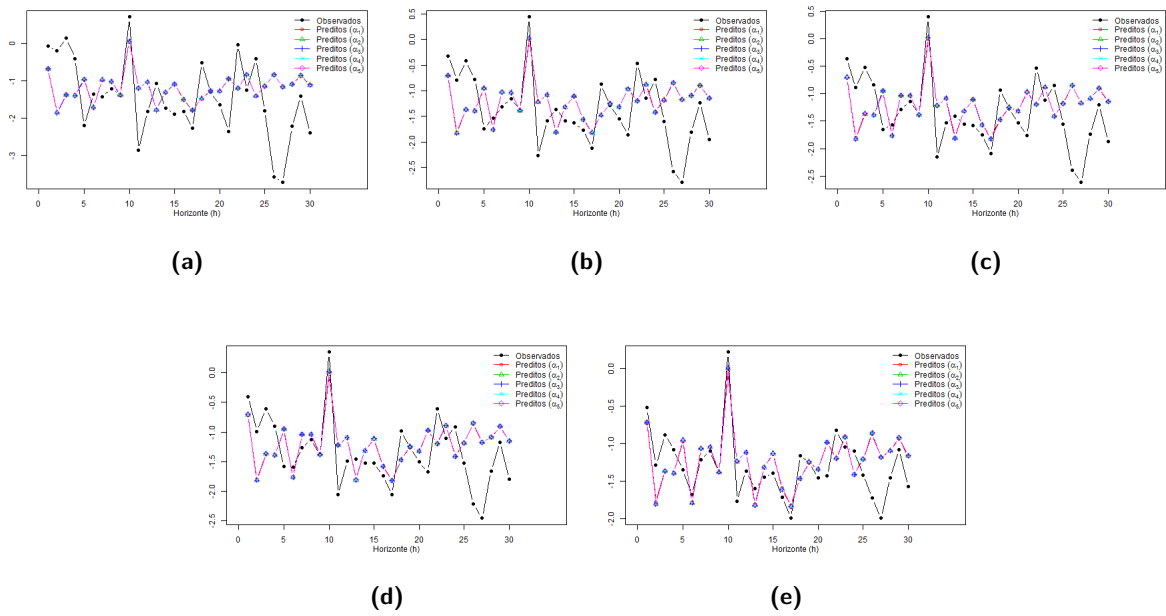


Figura F.70: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

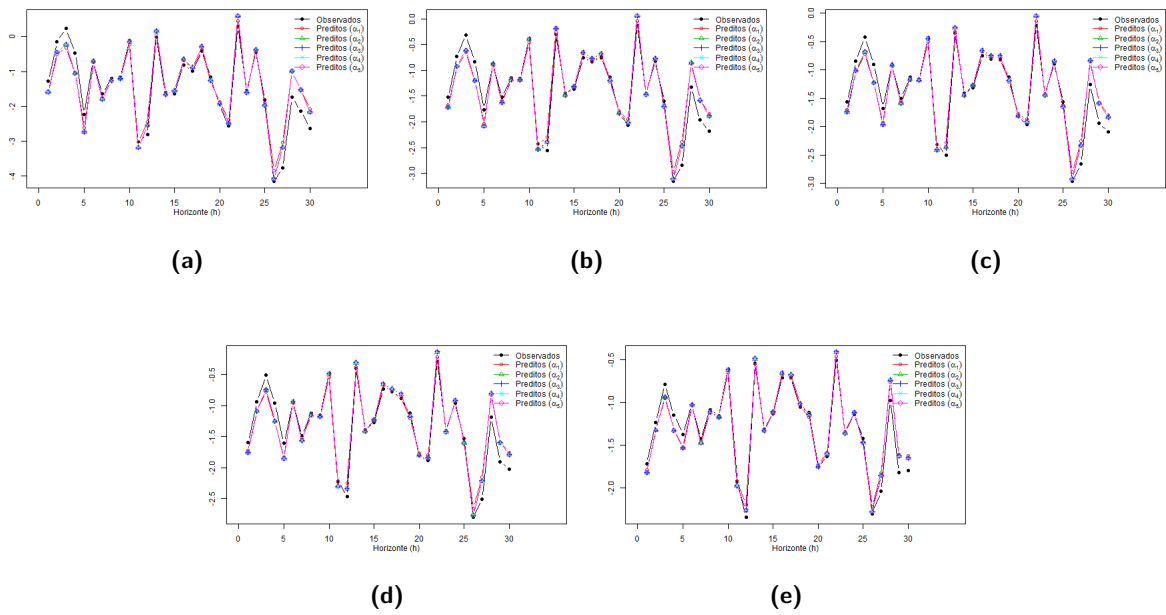


Figura F.71: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

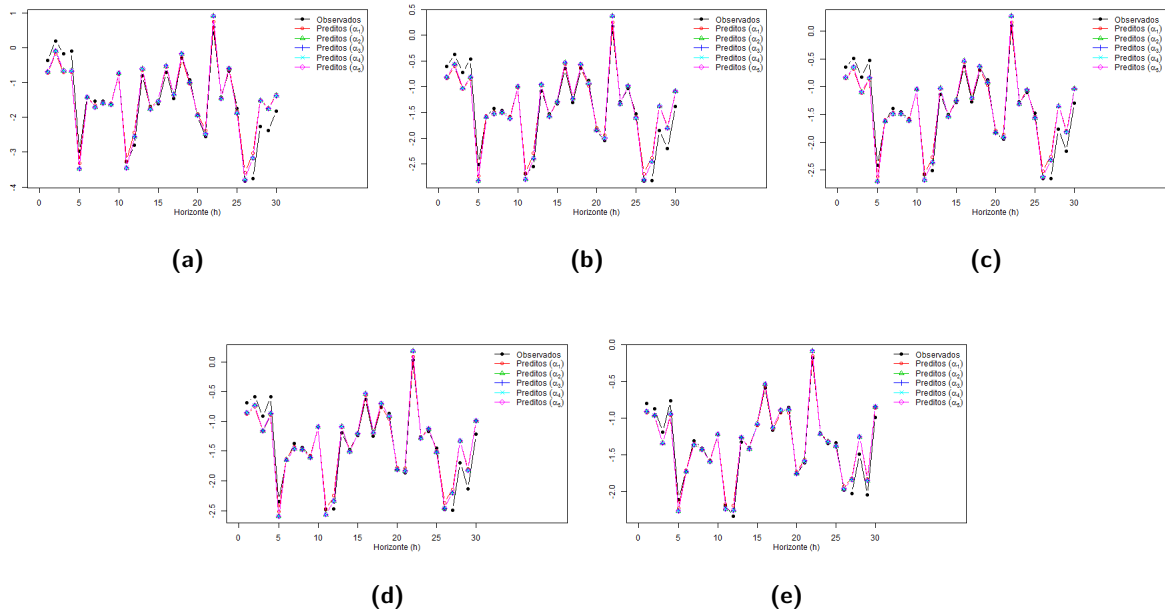


Figura F.72: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

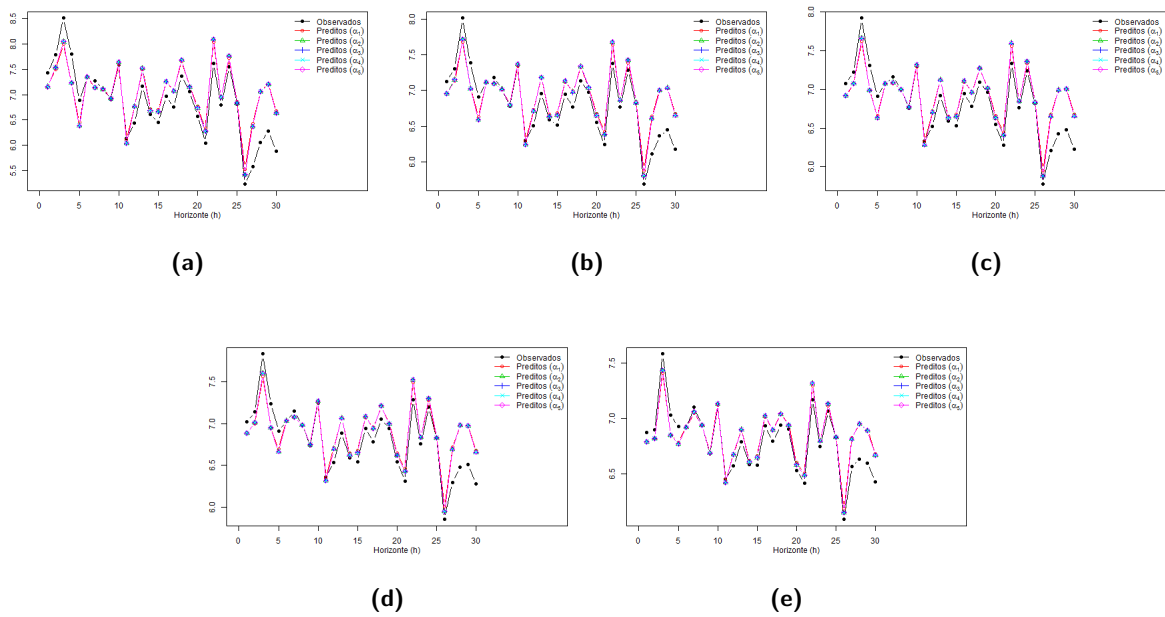


Figura F.73: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

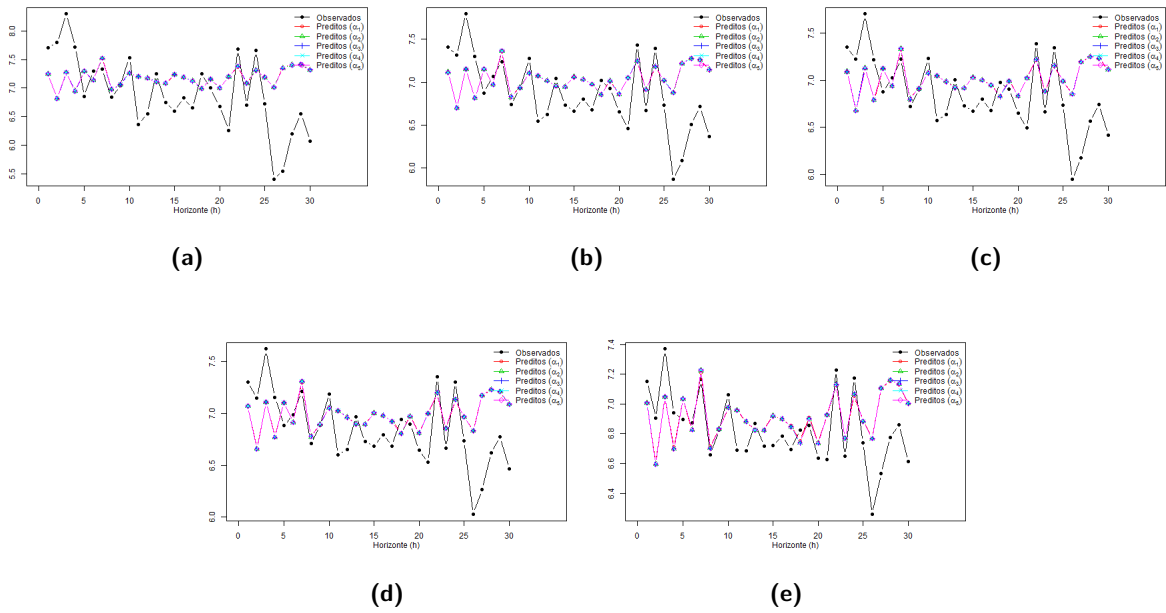


Figura F.74: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

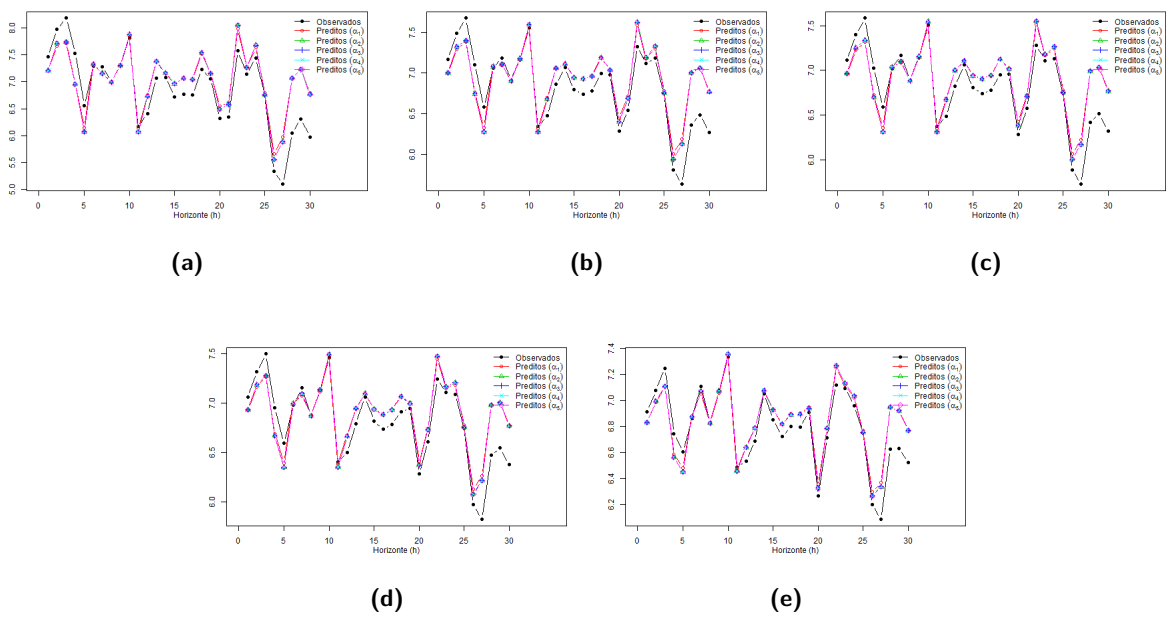


Figura F.75: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

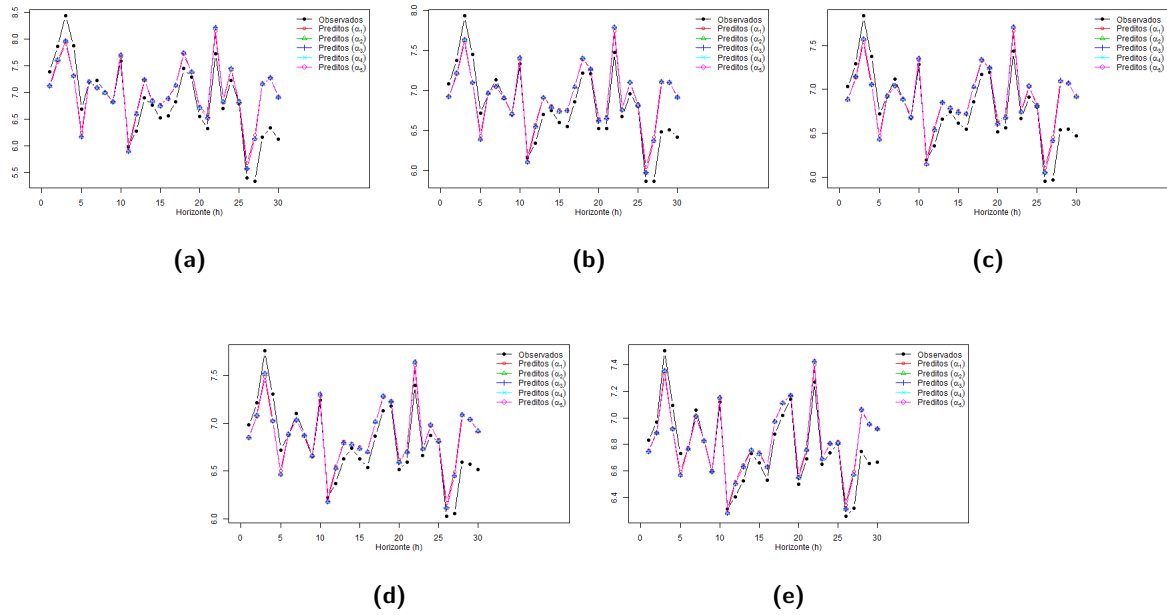


Figura F.76: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

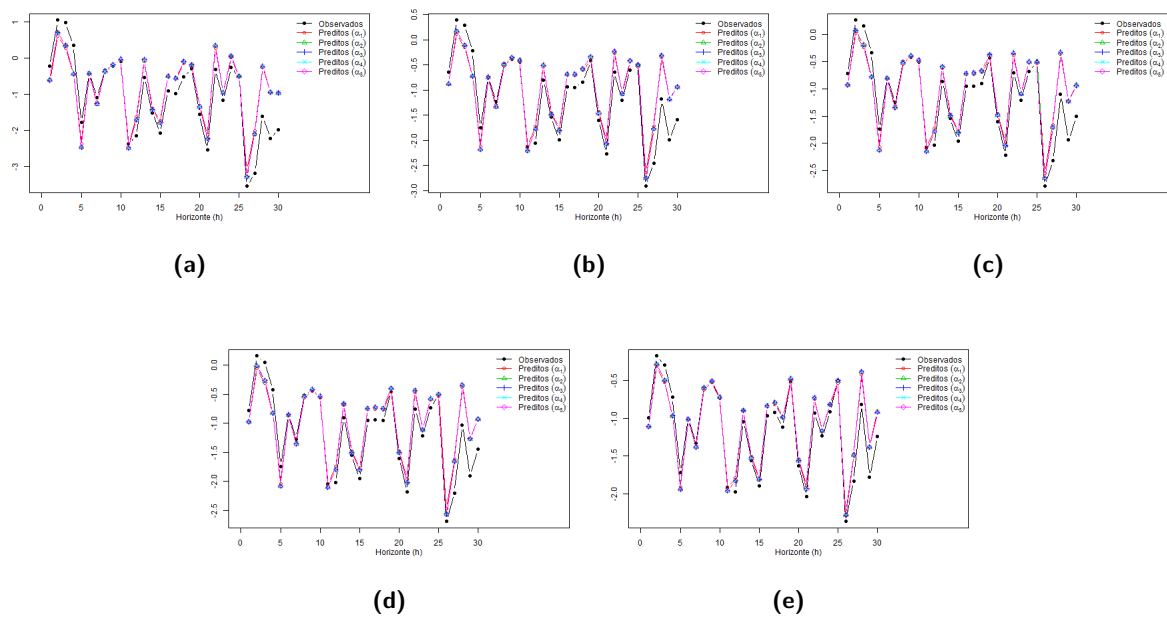


Figura F.77: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

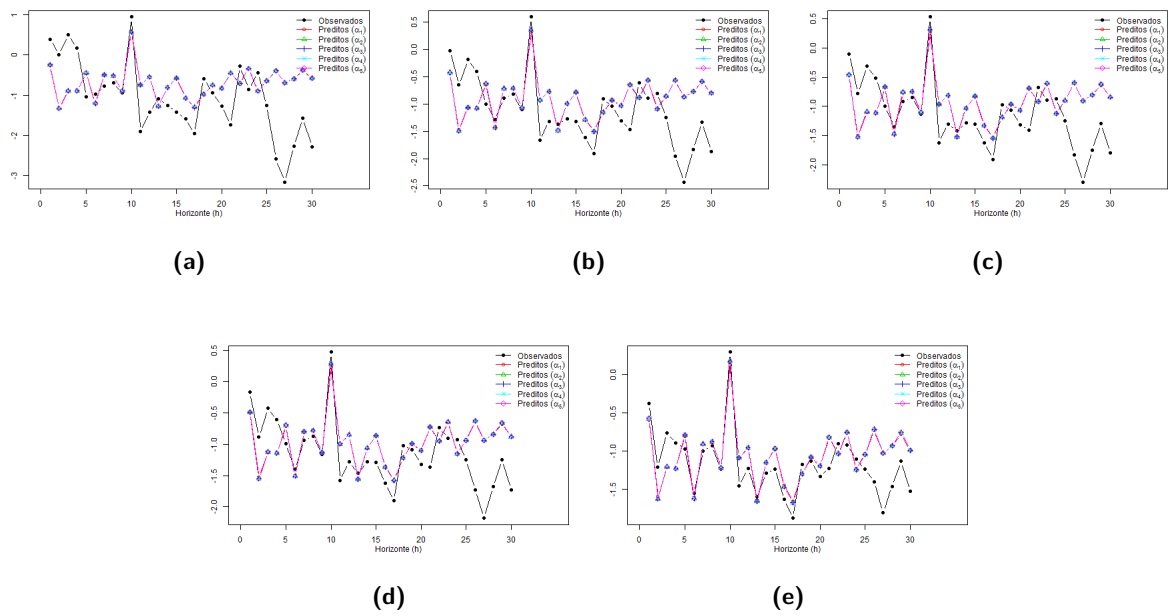


Figura F.78: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

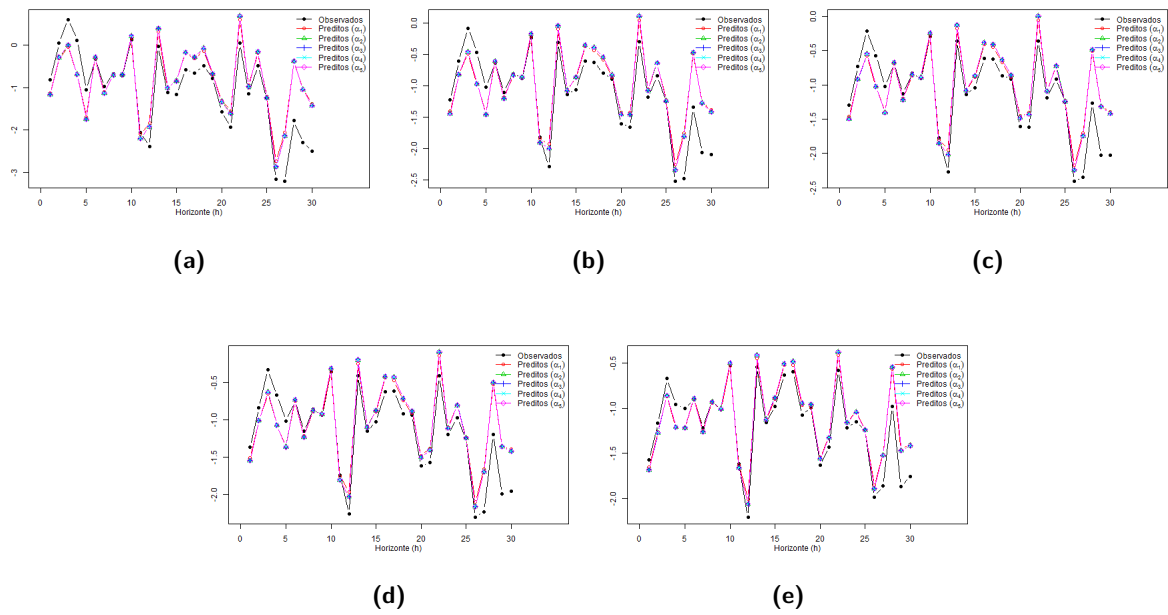


Figura F.79: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.81 - F.96 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por M_l , com $l \in \{11, \dots, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

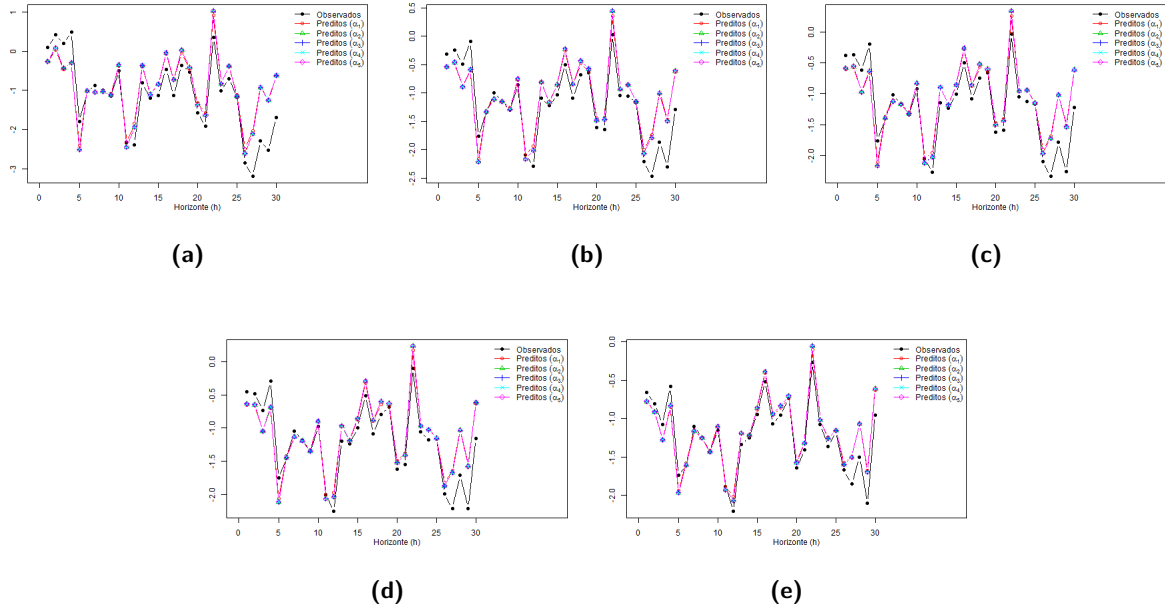


Figura F.80: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

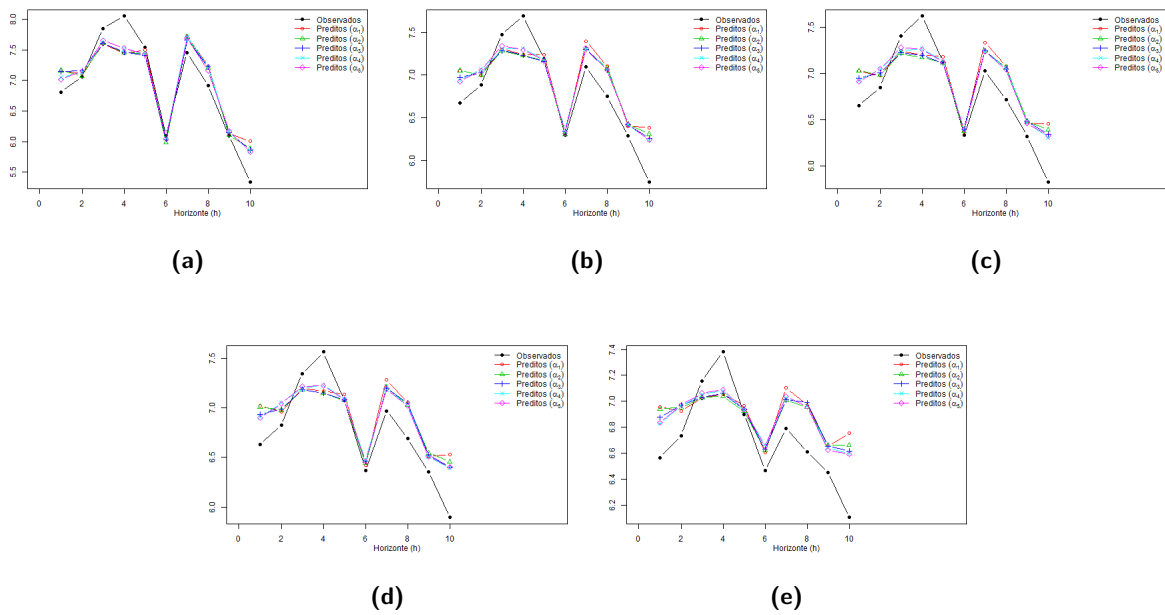


Figura F.81: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

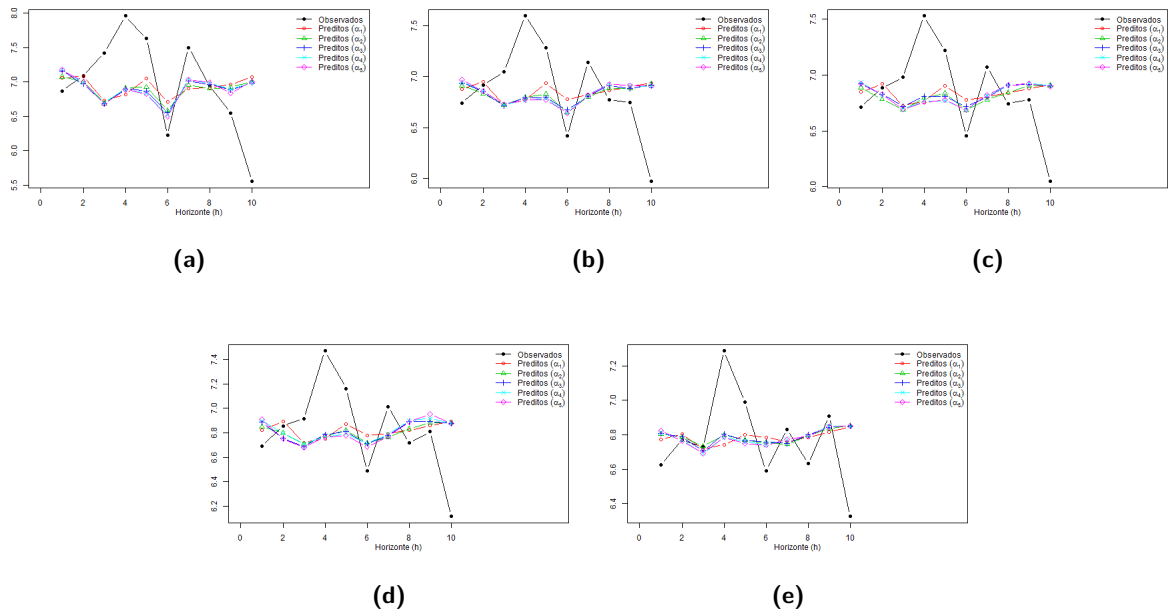


Figura F.82: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

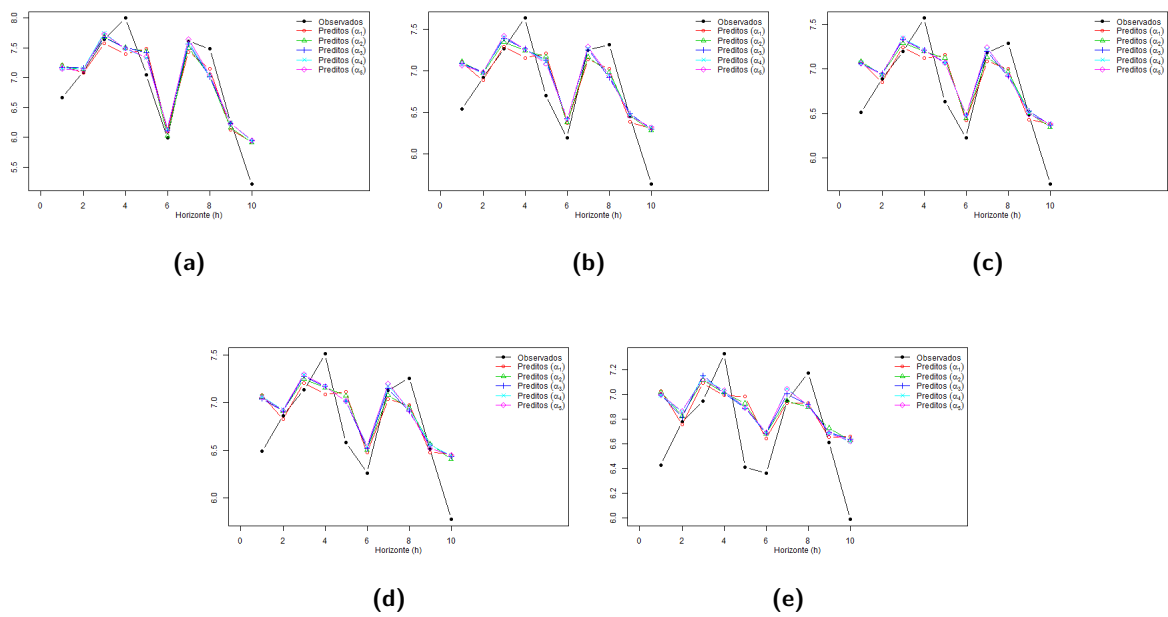


Figura F.83: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

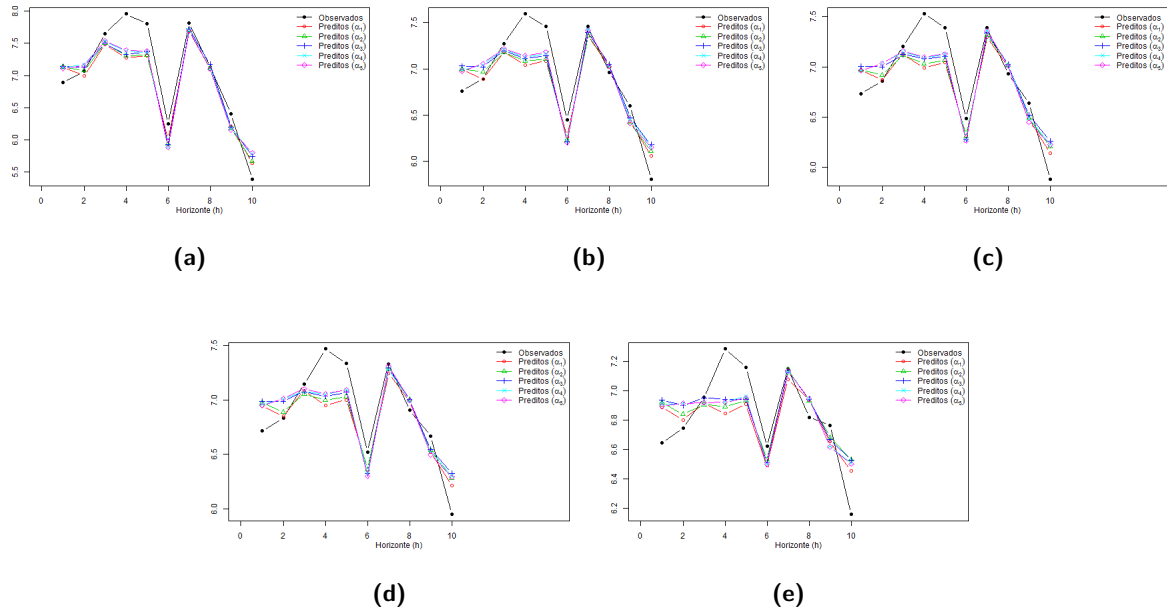


Figura F.84: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

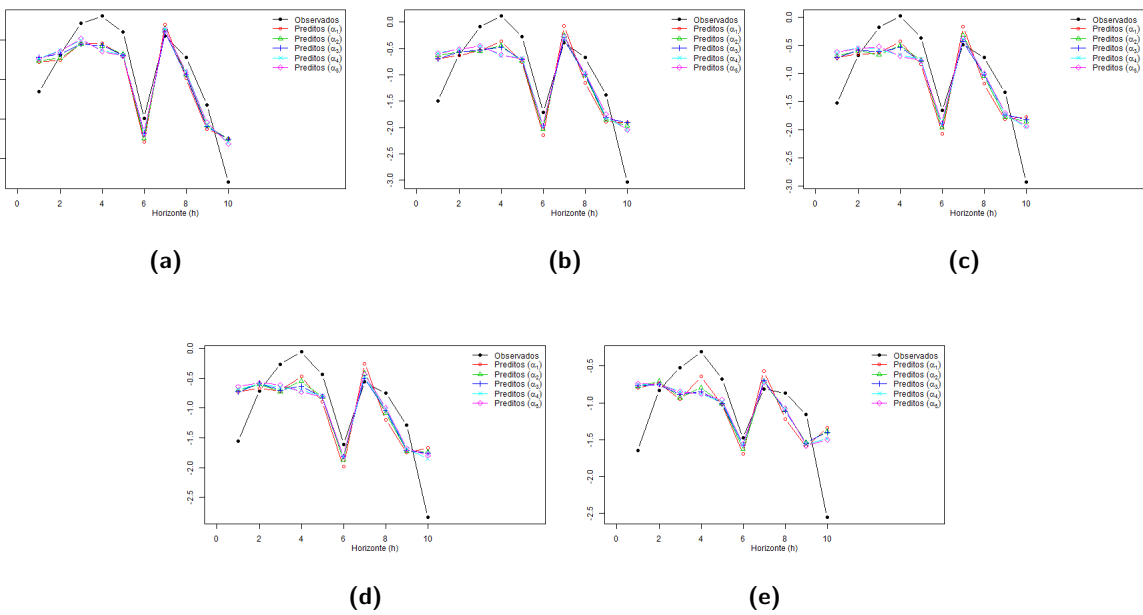


Figura F.85: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

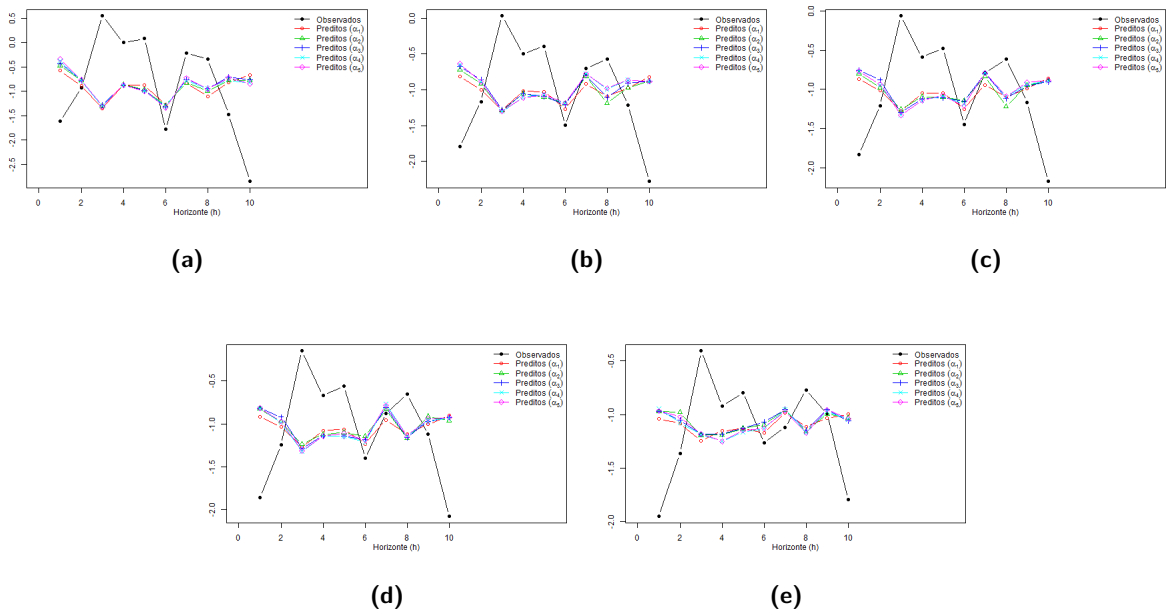


Figura F.86: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

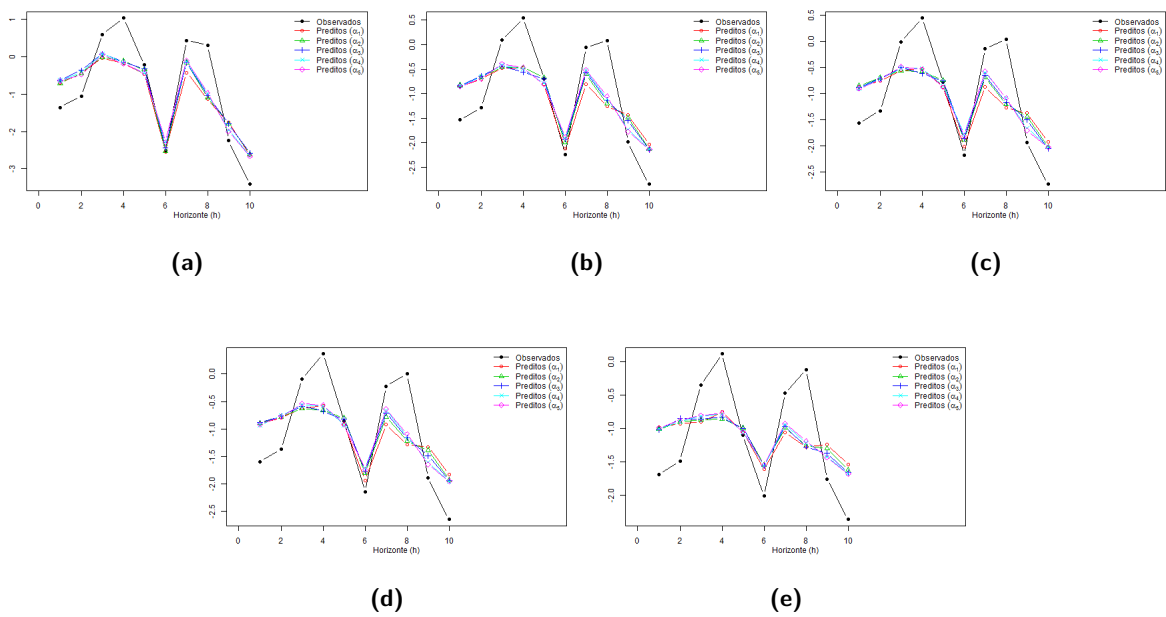


Figura F.87: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

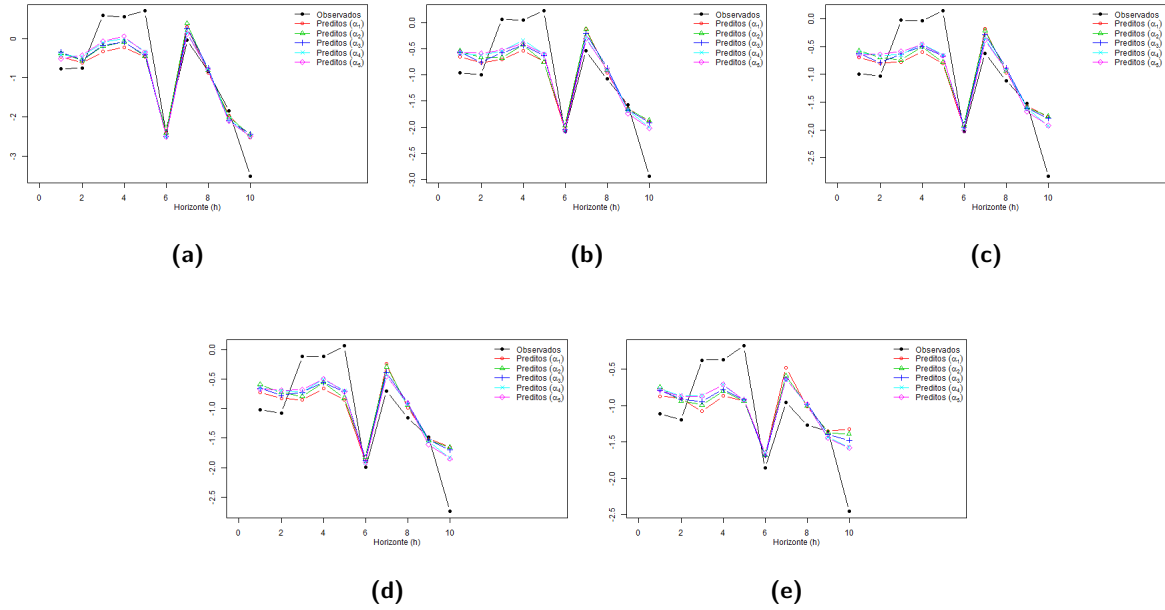


Figura F.88: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

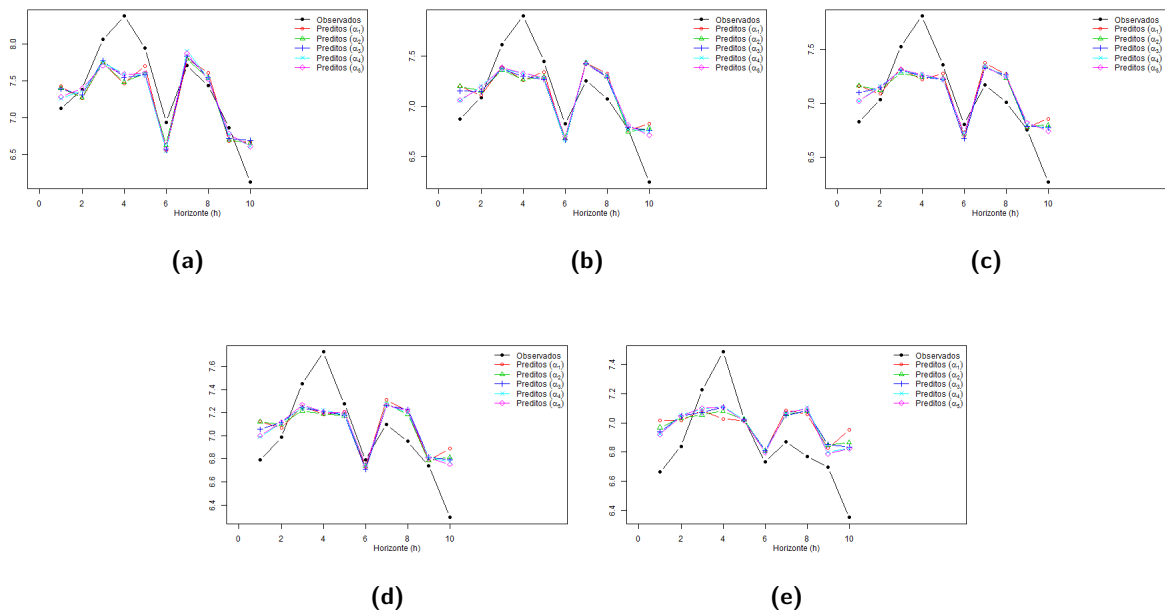


Figura F.89: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

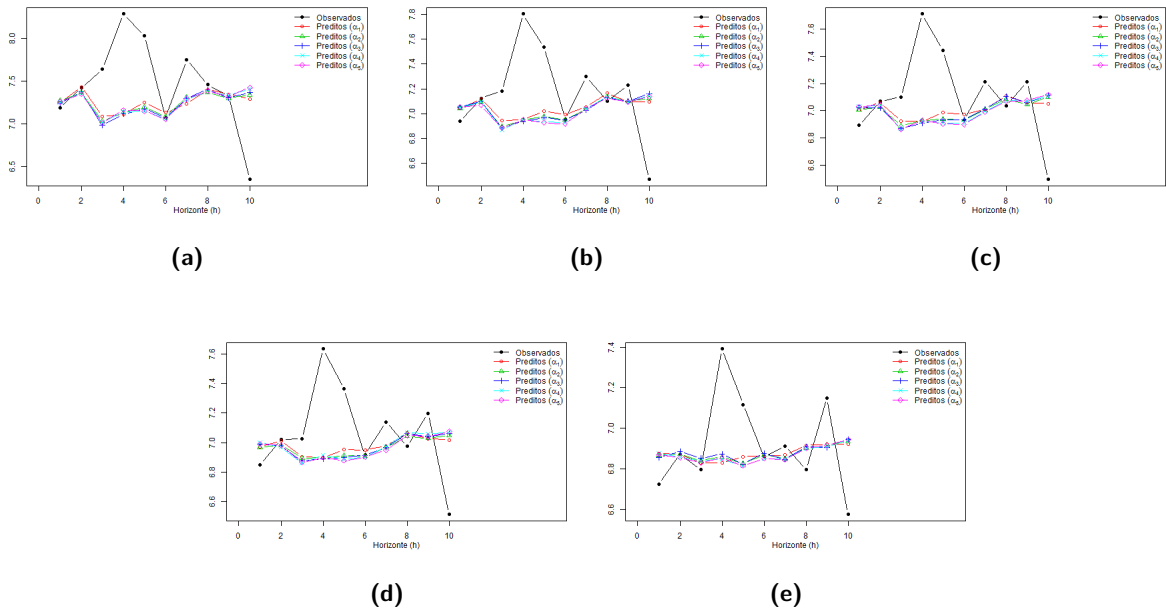


Figura F.90: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

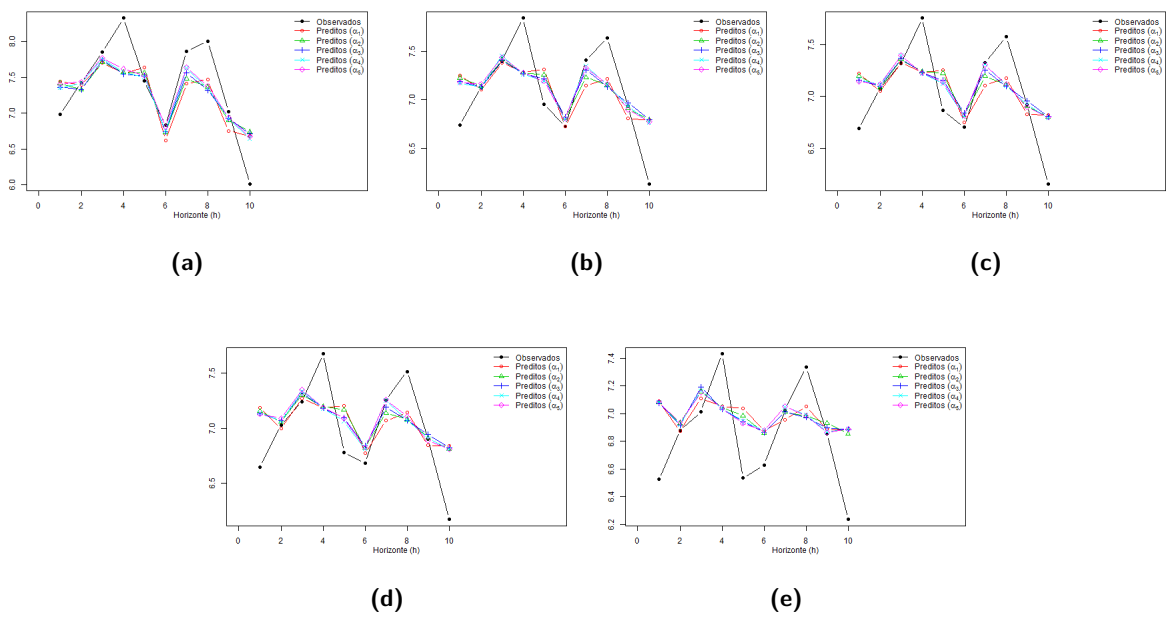


Figura F.91: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

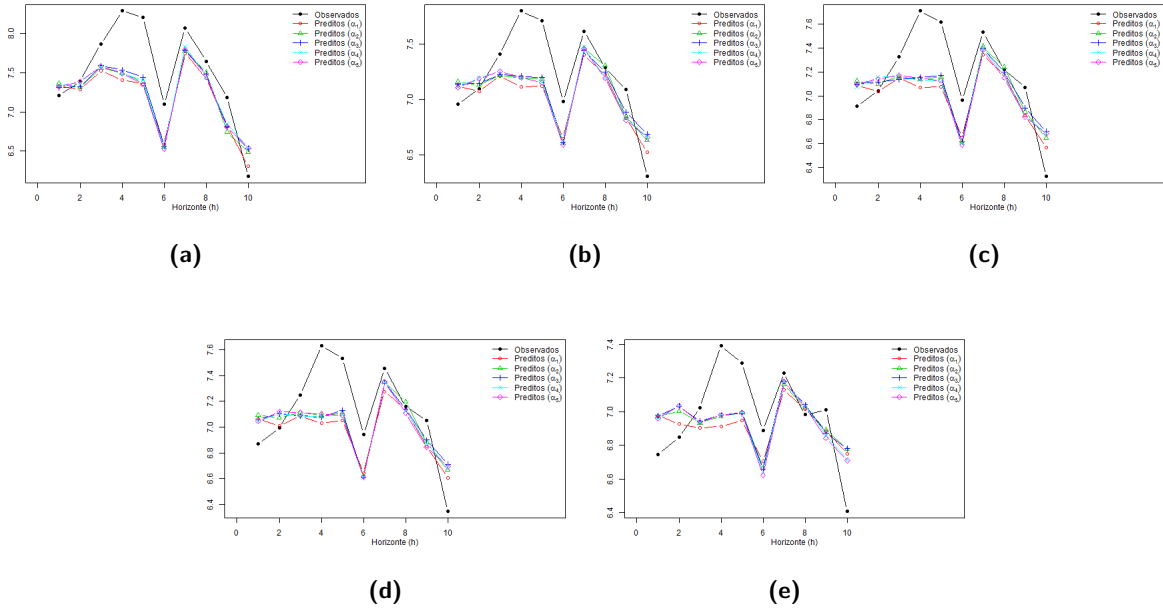


Figura F.92: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

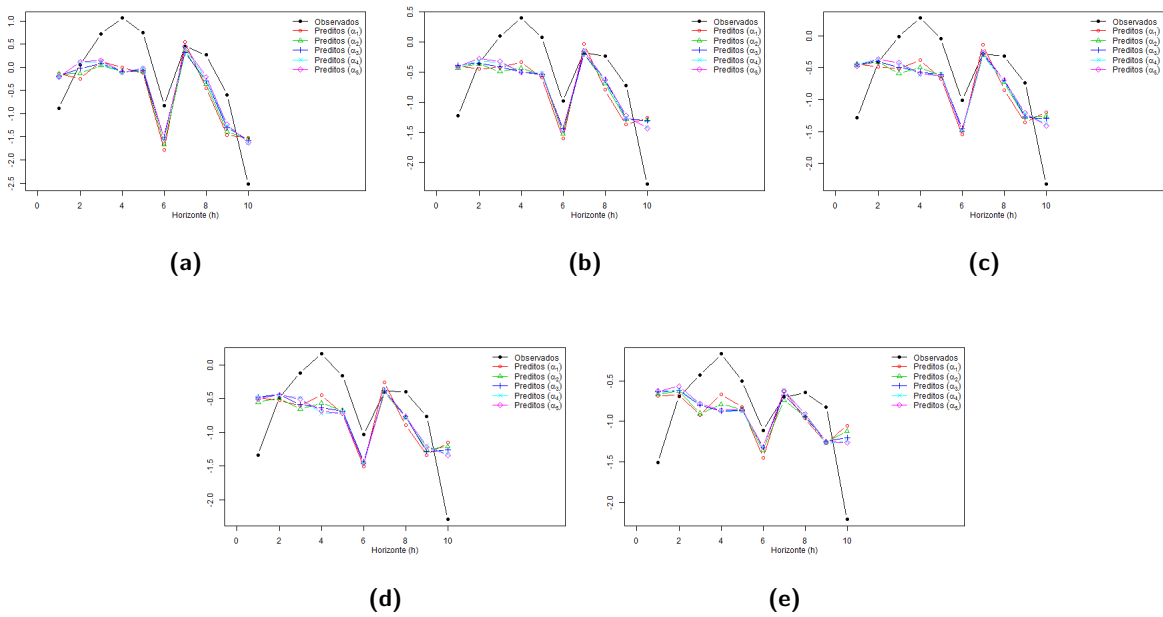


Figura F.93: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

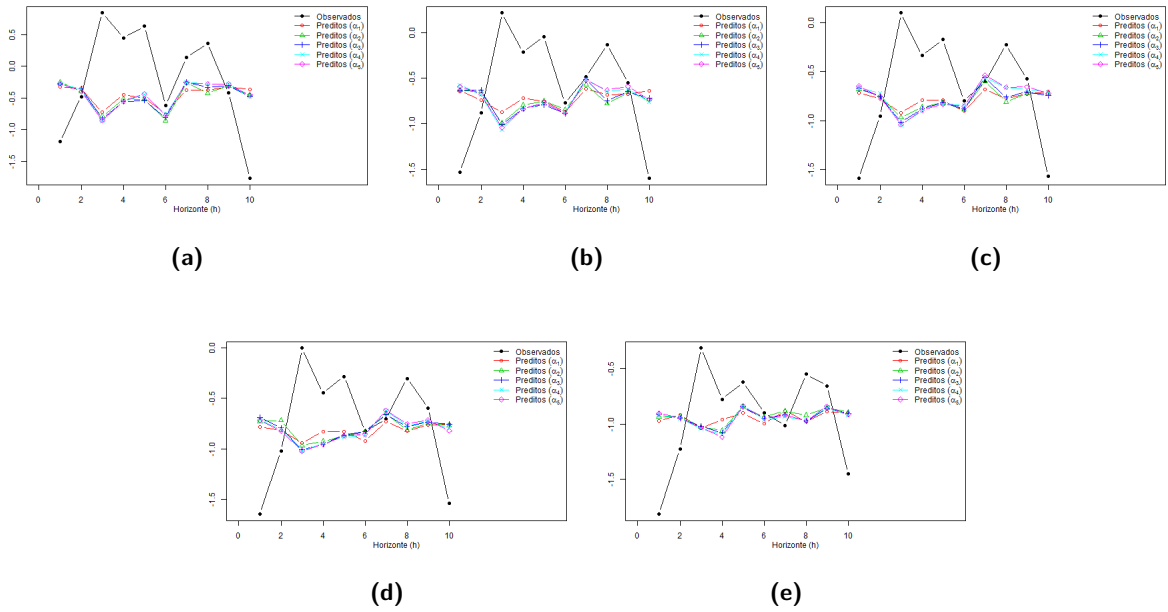


Figura F.94: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

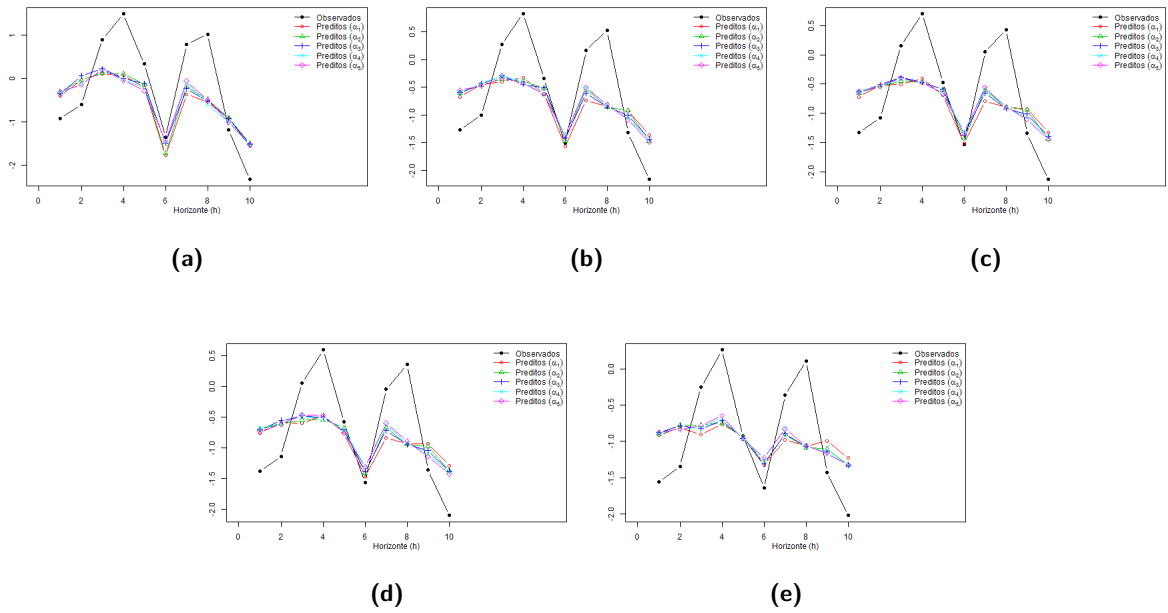


Figura F.95: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.97 - F.96 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por M_l , com $l \in \{11, \dots, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

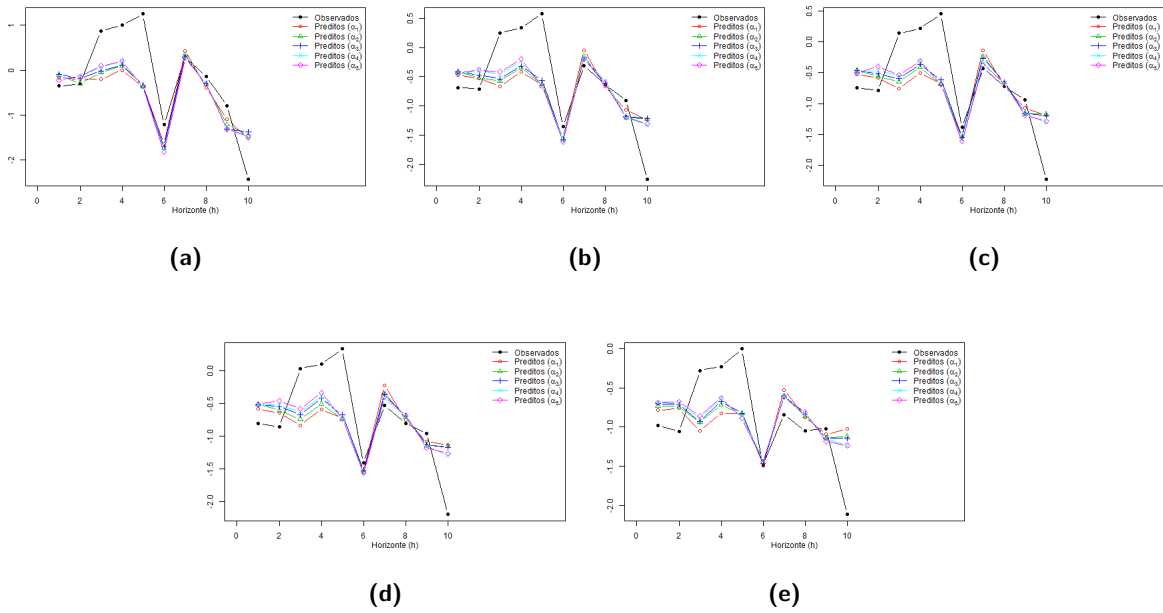


Figura F.96: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 40$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

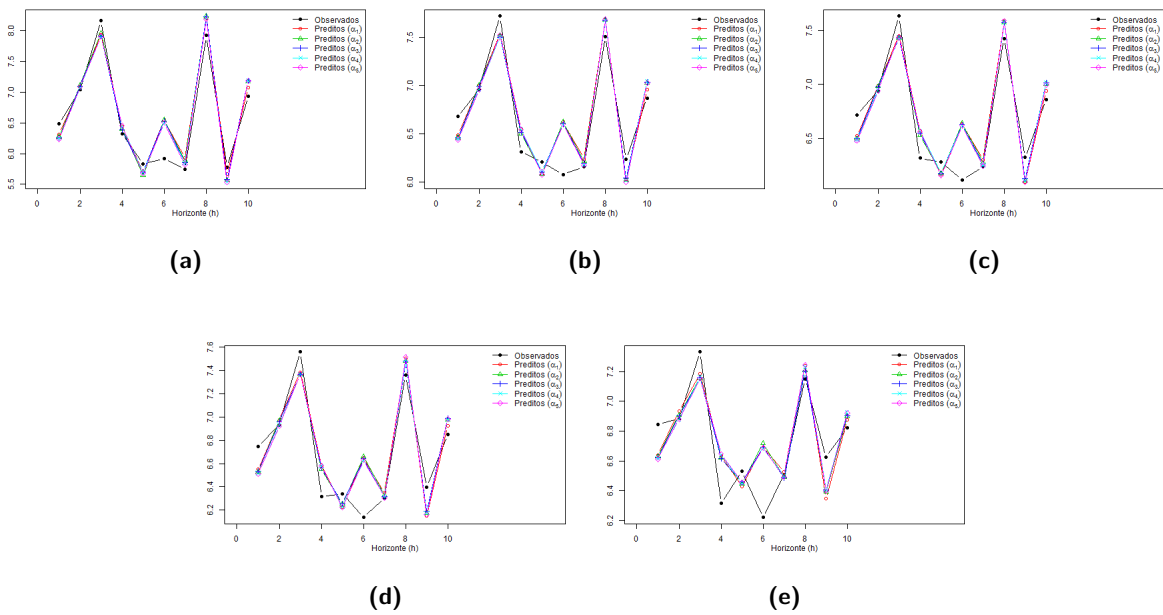


Figura F.97: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

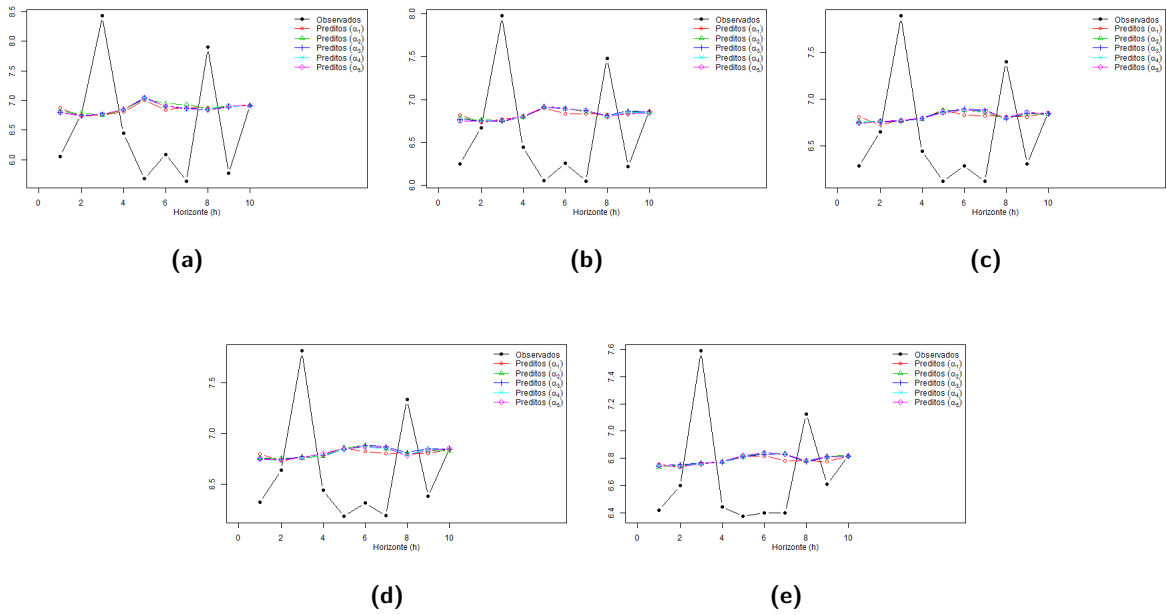


Figura F.98: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

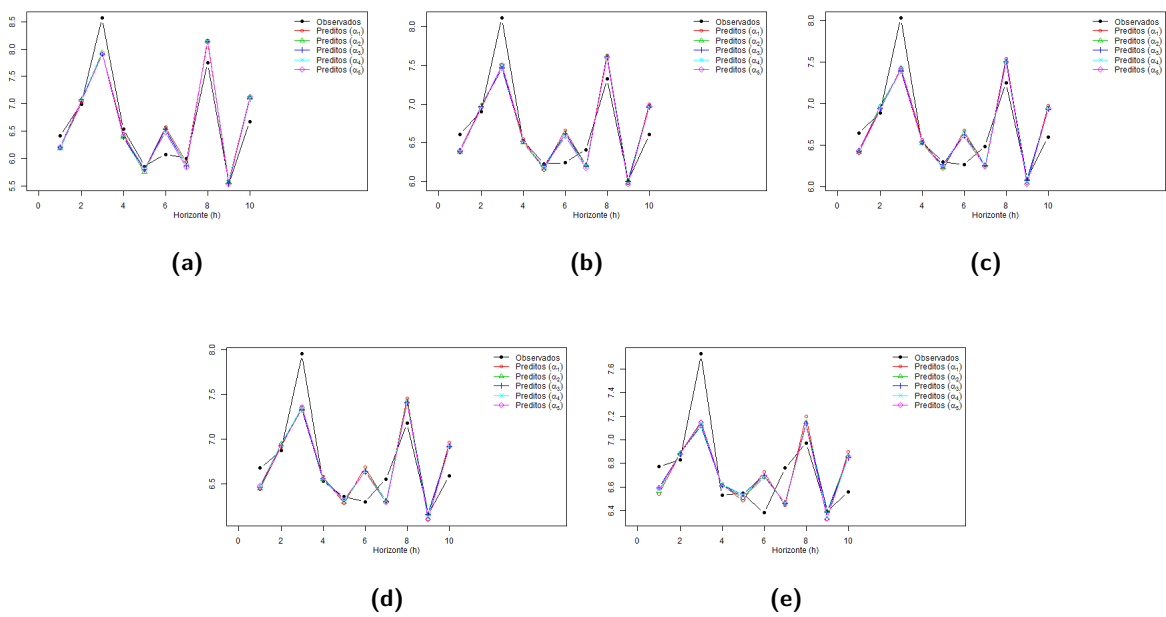


Figura F.99: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

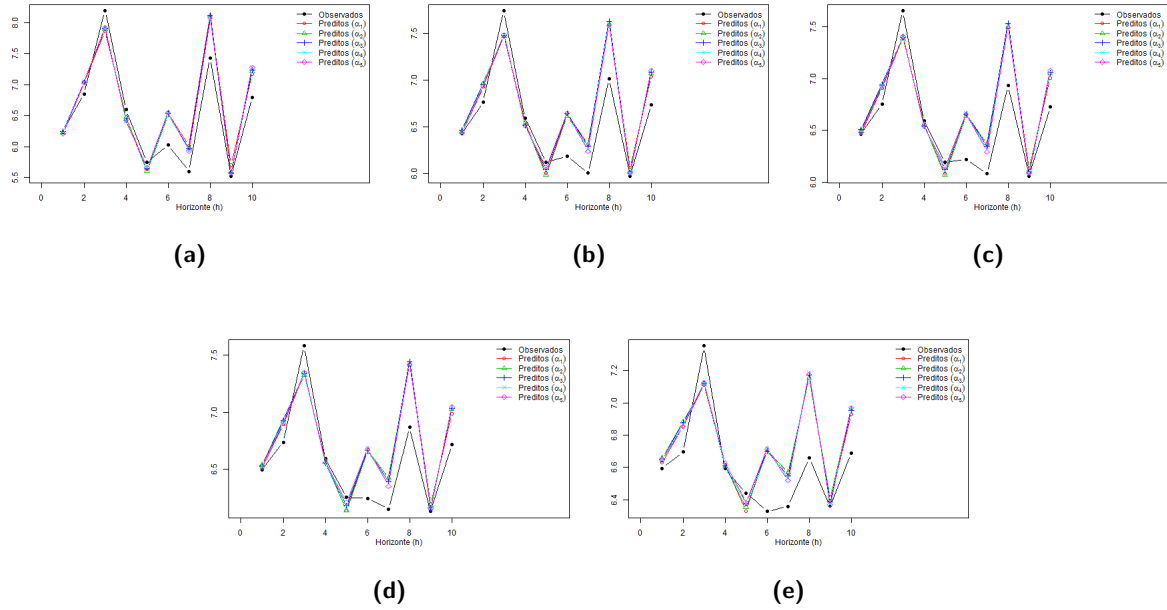


Figura F.100: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

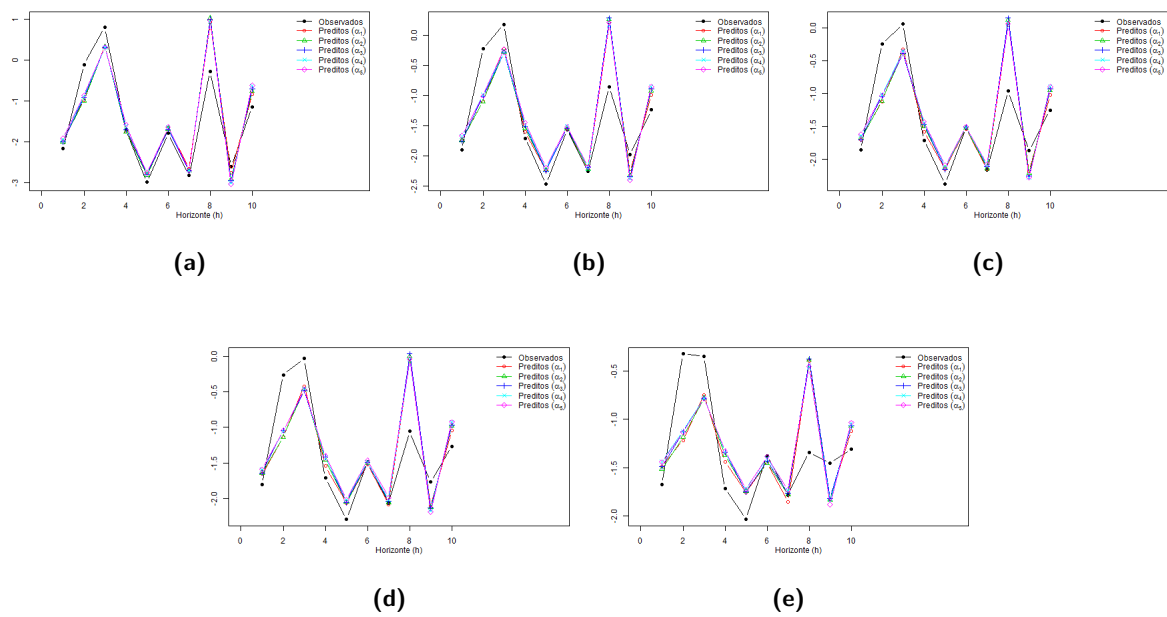


Figura F.101: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

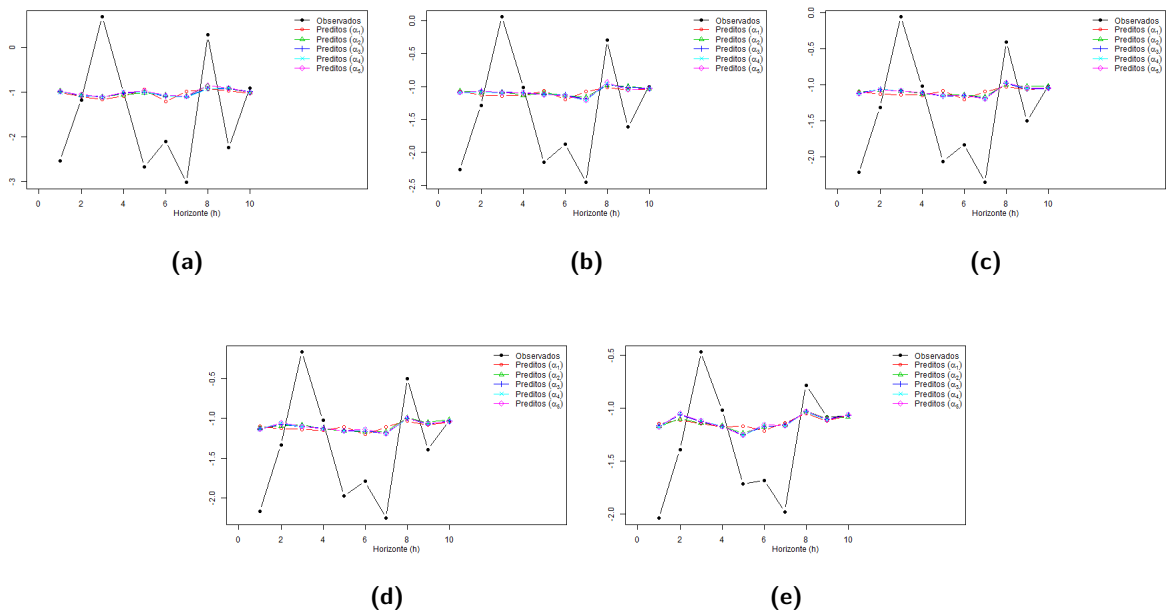


Figura F.102: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

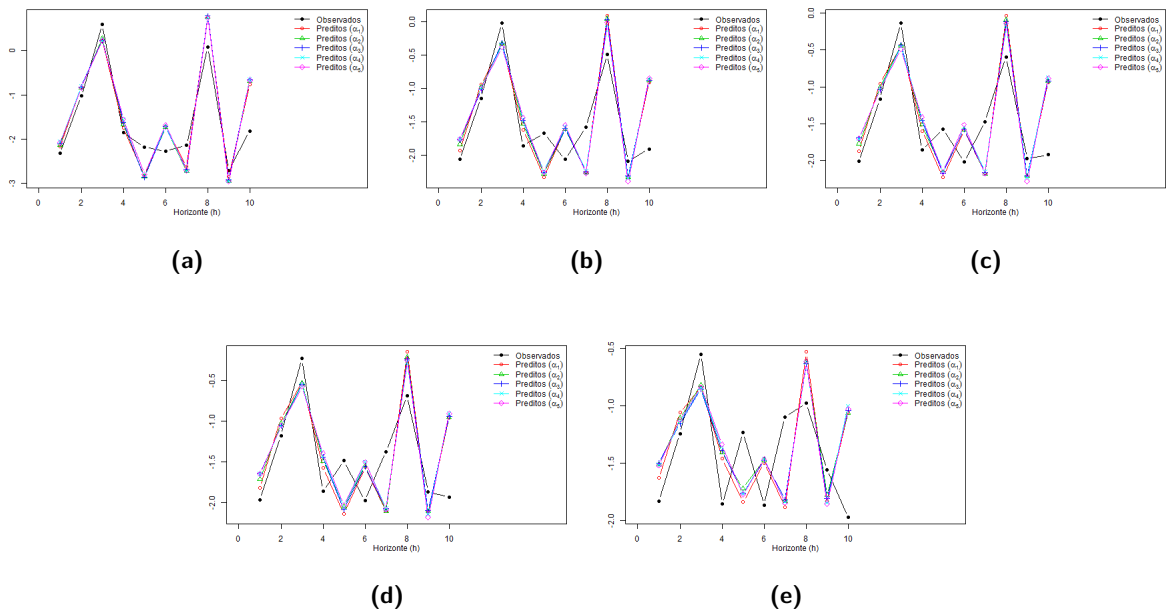


Figura F.103: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

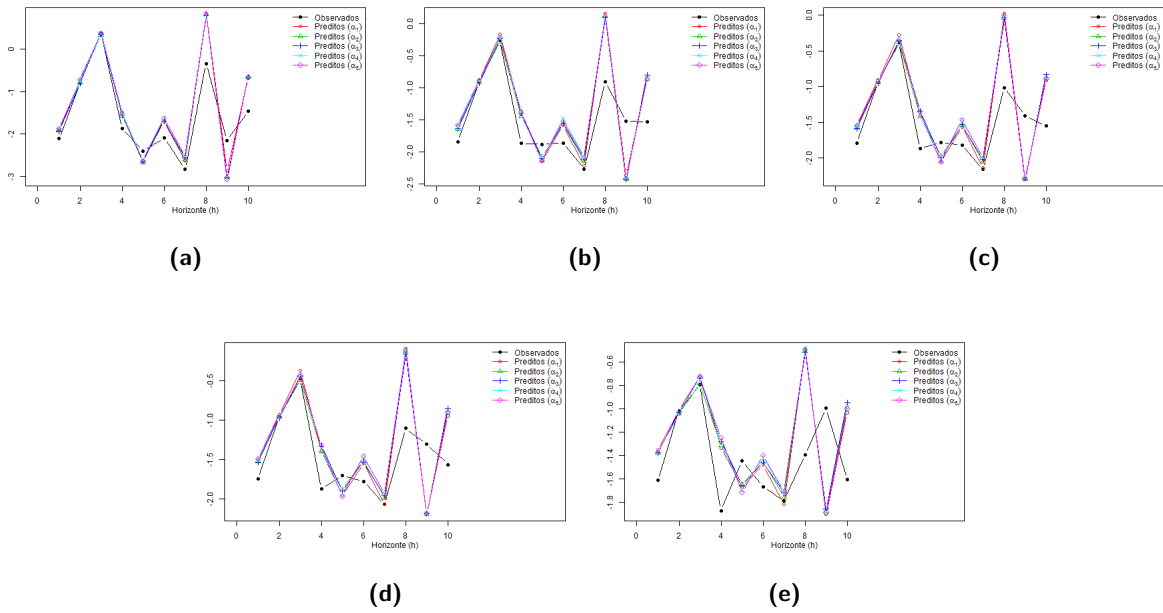


Figura F.104: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

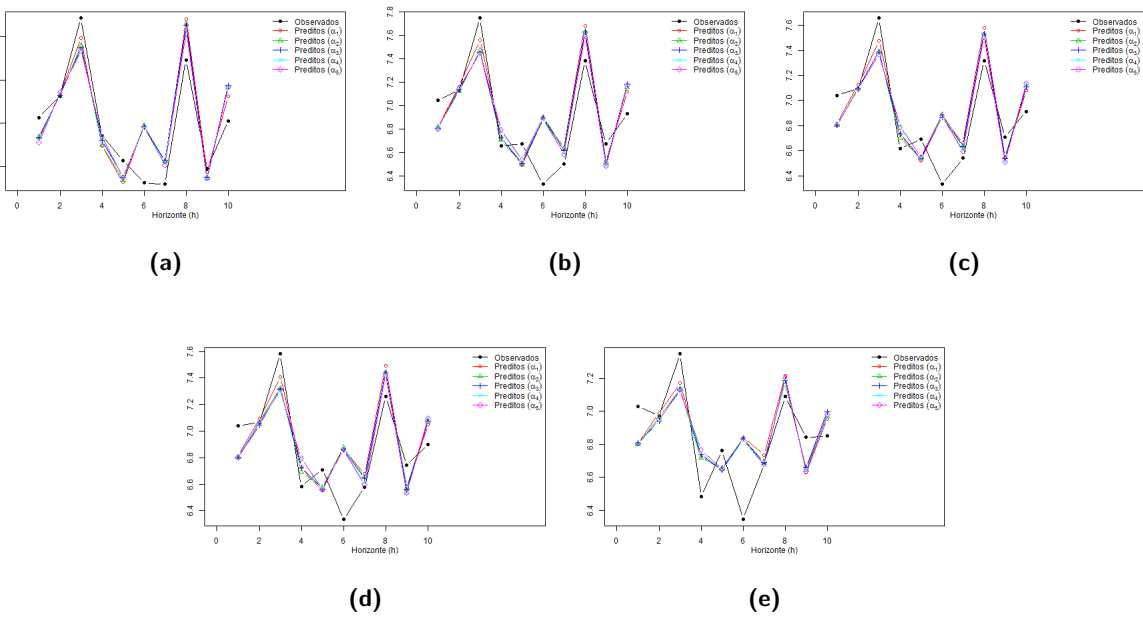


Figura F.105: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

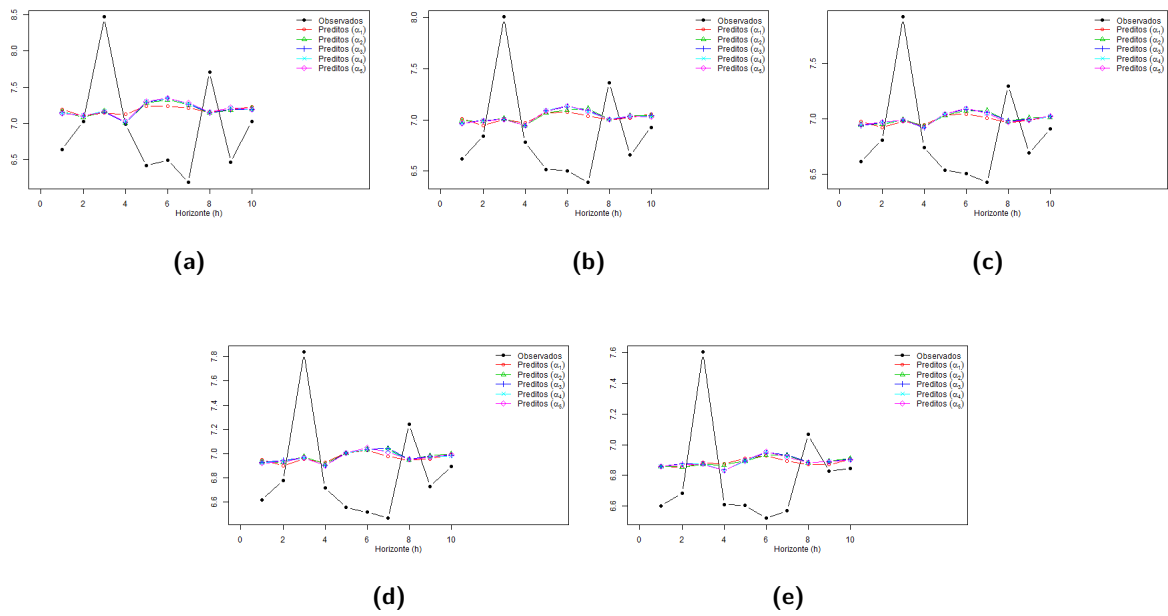


Figura F.106: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

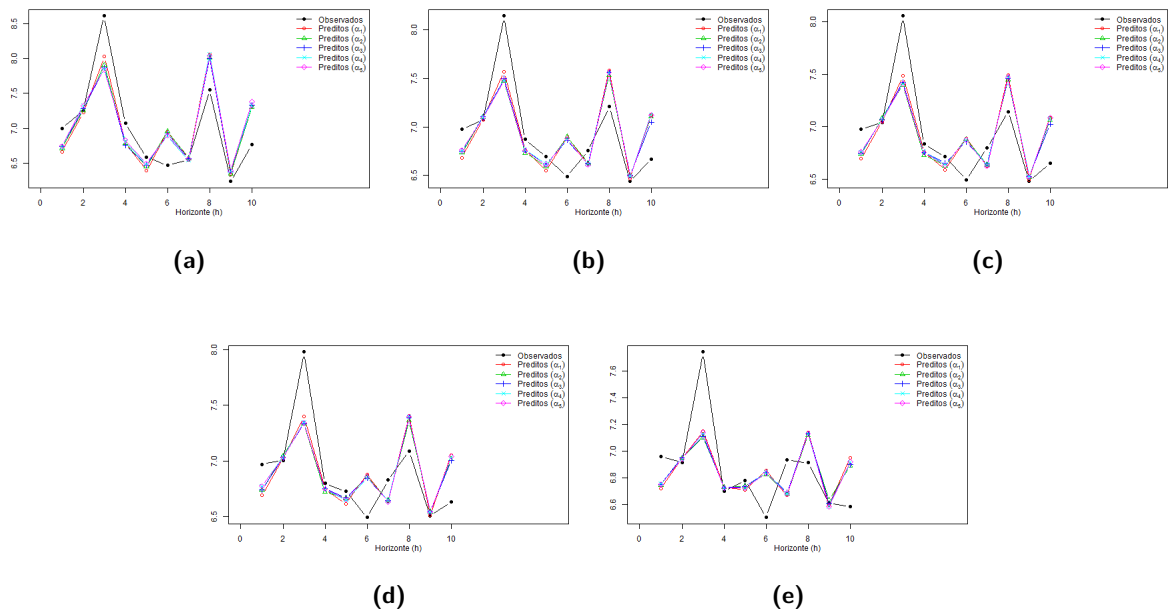


Figura F.107: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.113 - F.184 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por M_l , com $l \in \{12, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

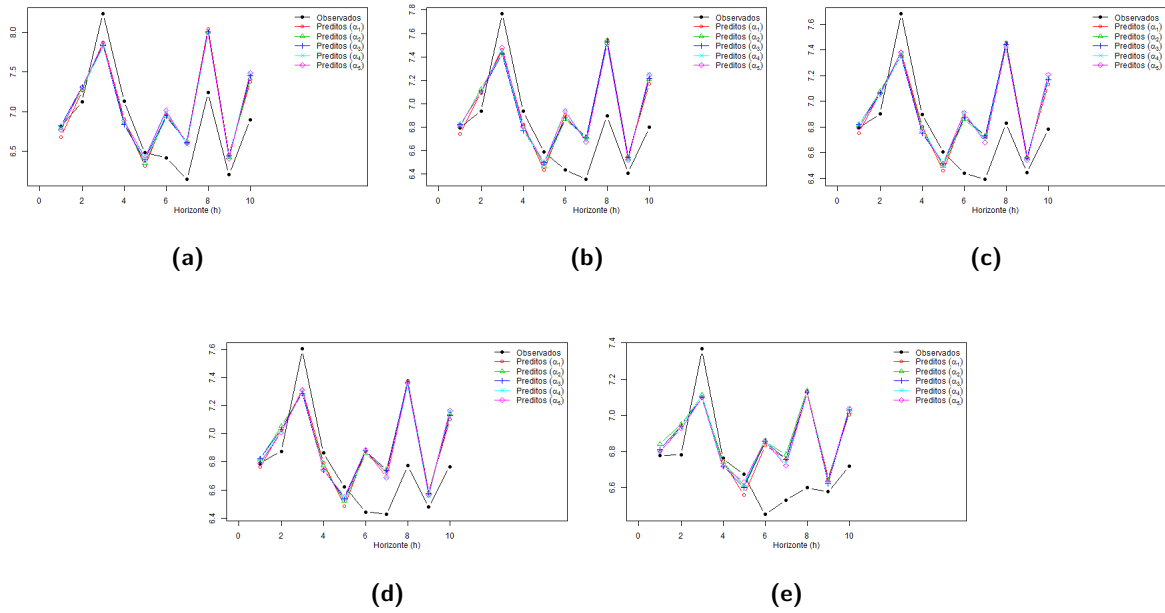


Figura F.108: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

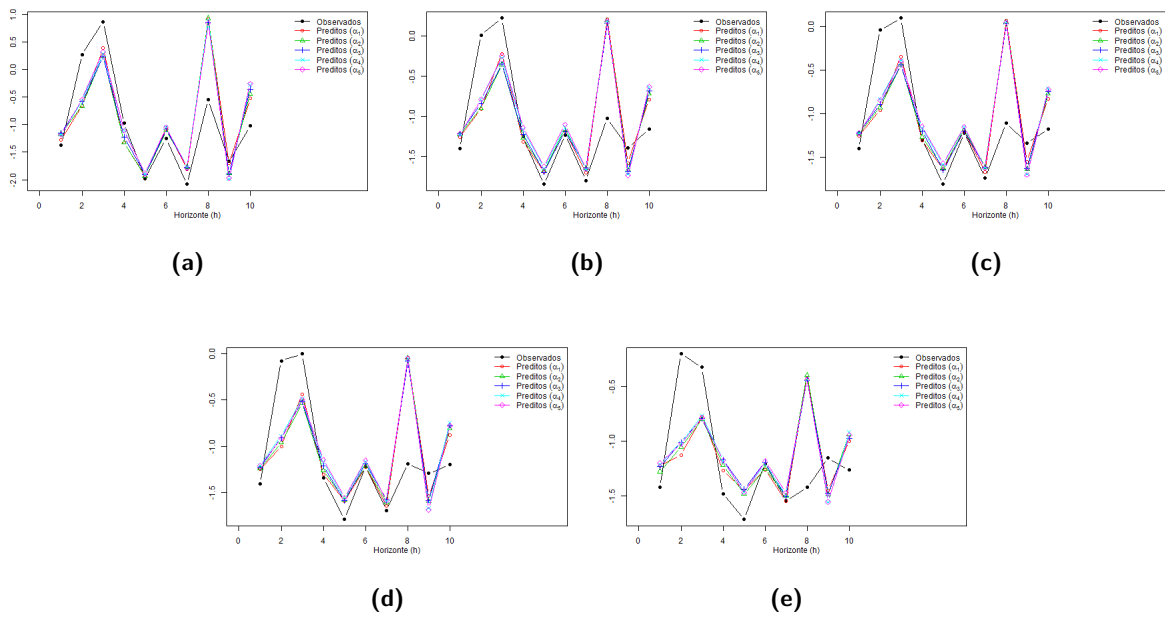


Figura F.109: Valores preditos e observados para o modelo M11, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

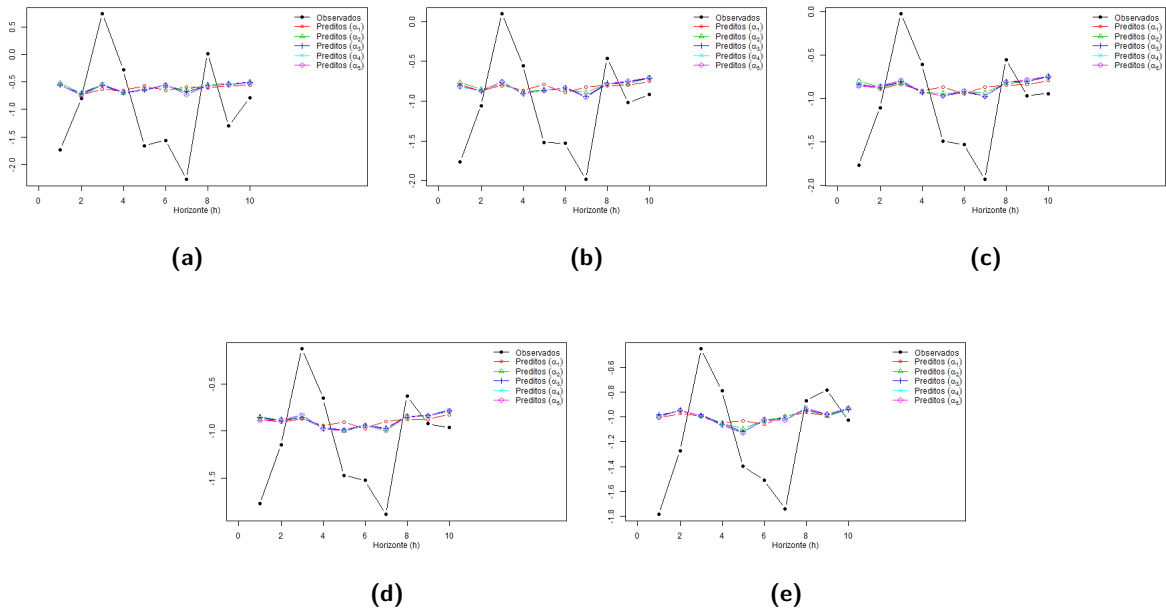


Figura F.110: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

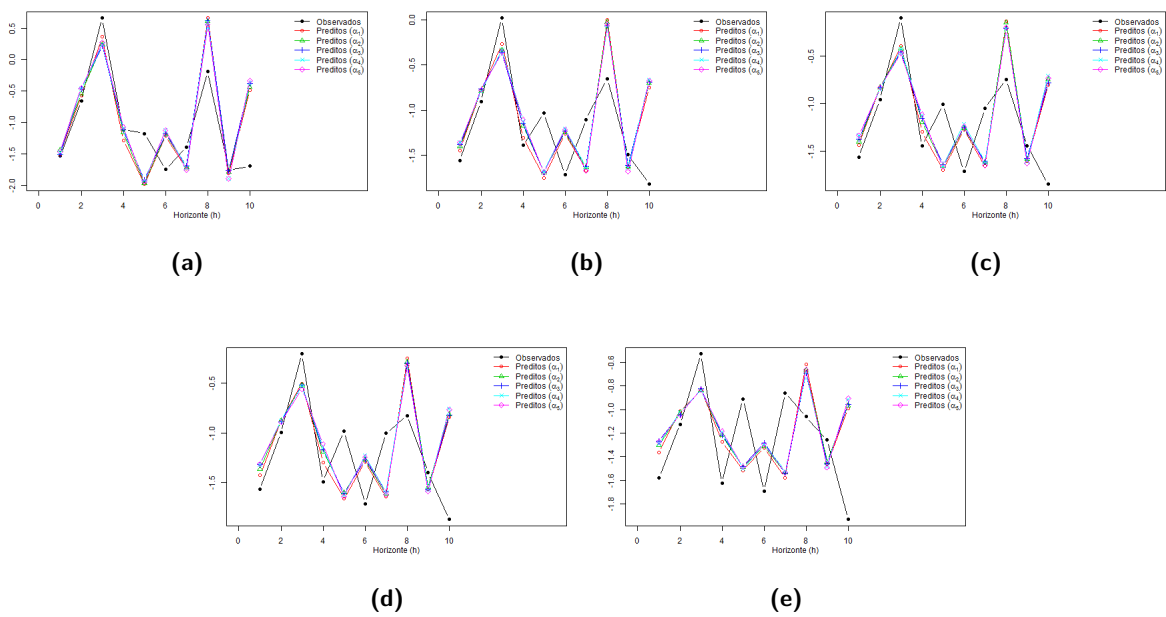


Figura F.111: Valores preditos e observados para o modelo M13, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

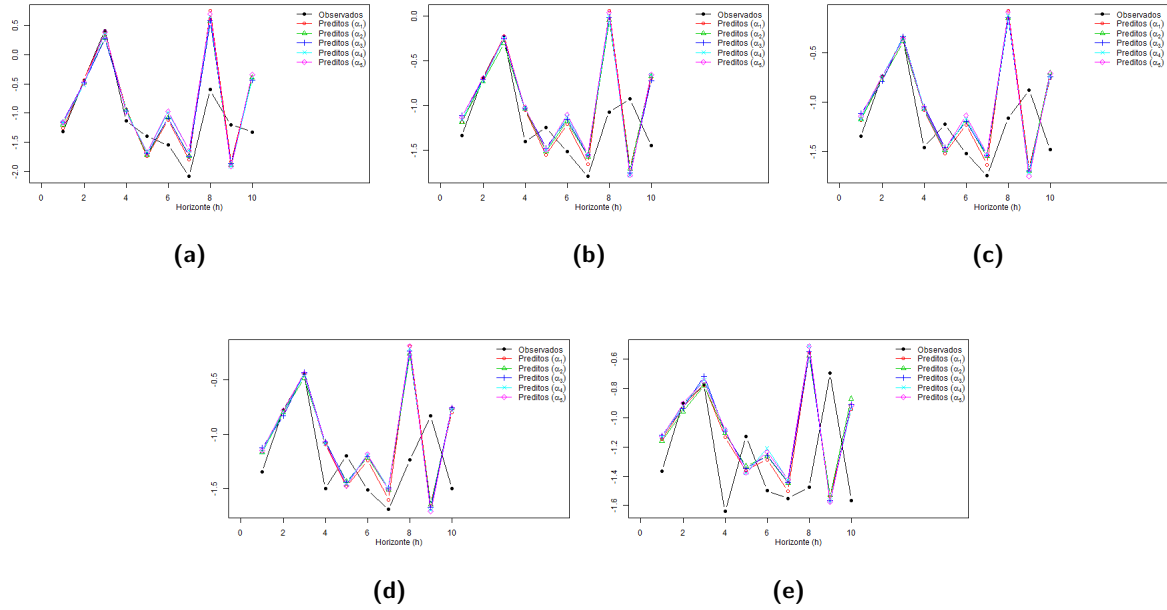


Figura F.112: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 100$, $\alpha^* \in \{0, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

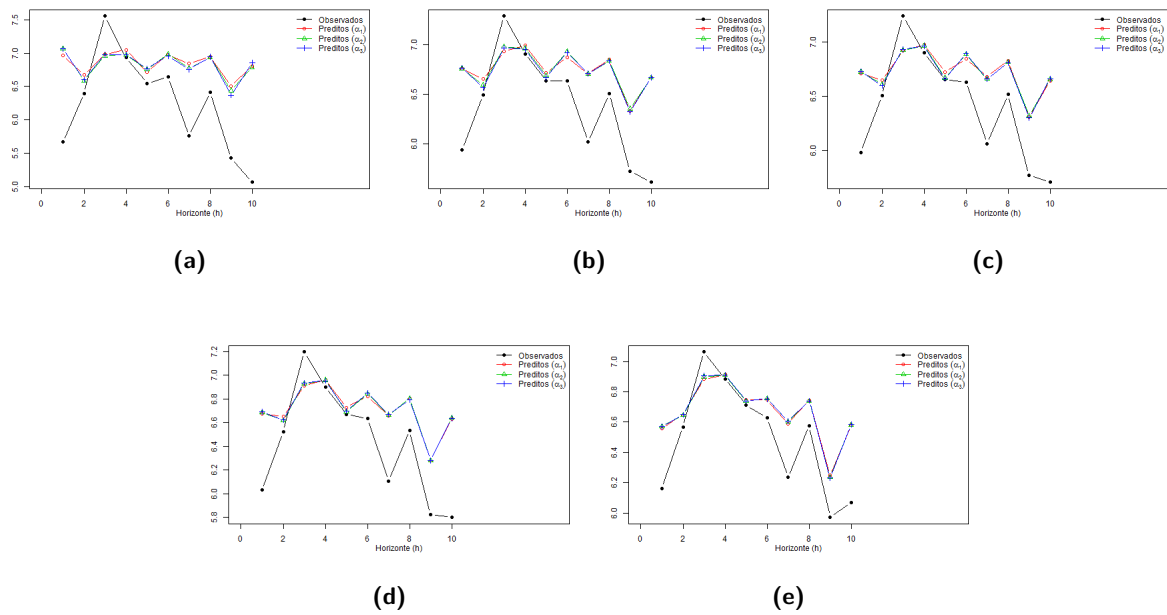


Figura F.113: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

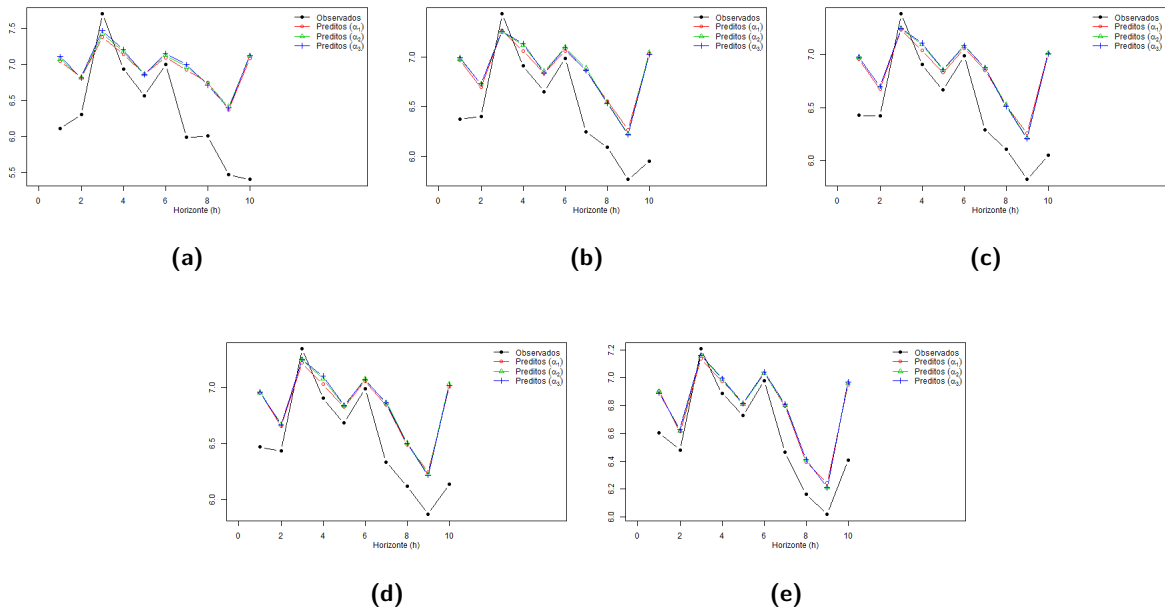


Figura F.114: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

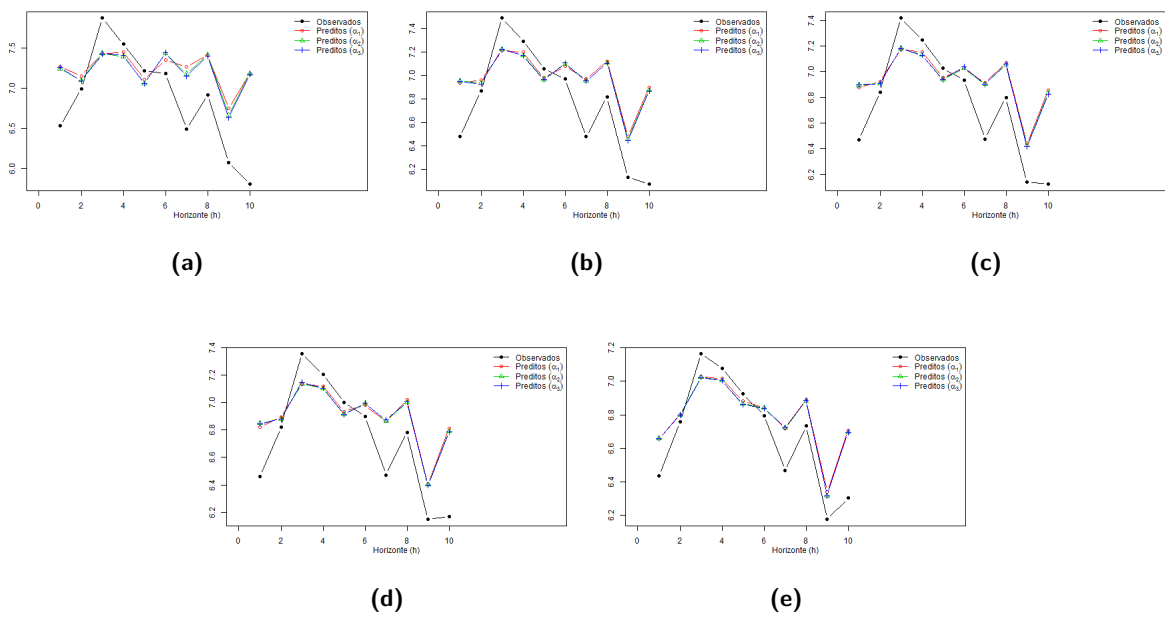


Figura F.115: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

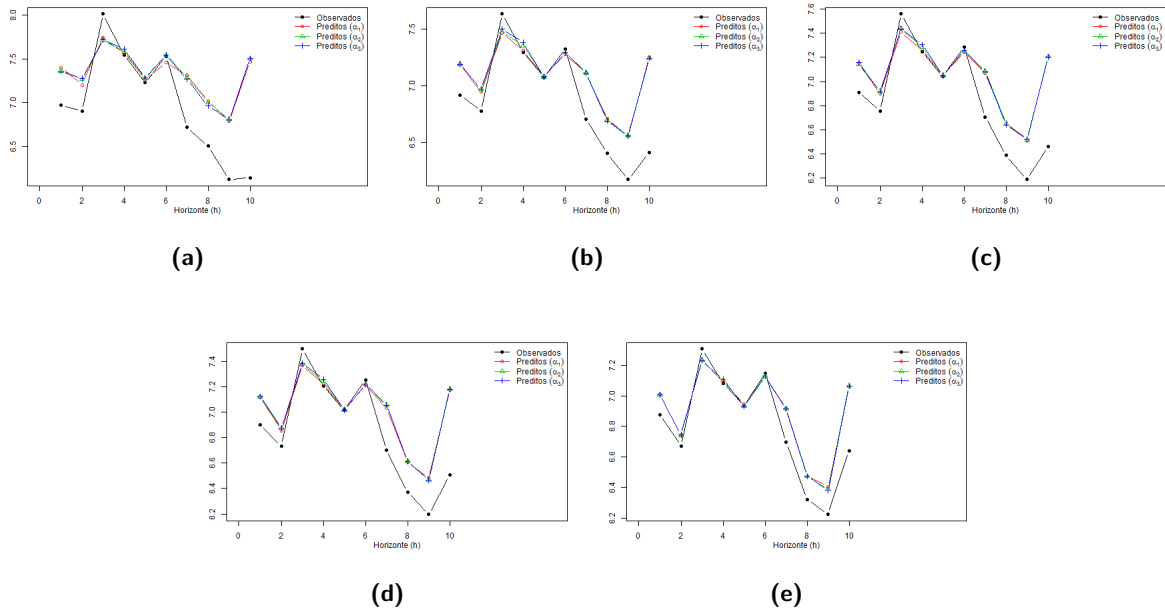


Figura F.116: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

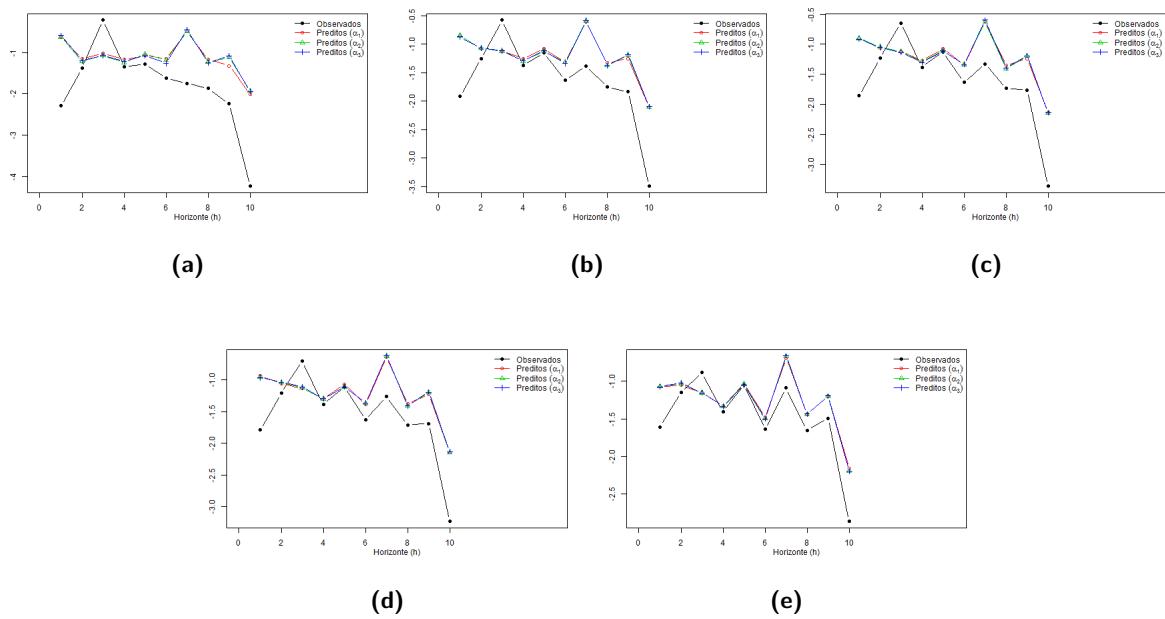


Figura F.117: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

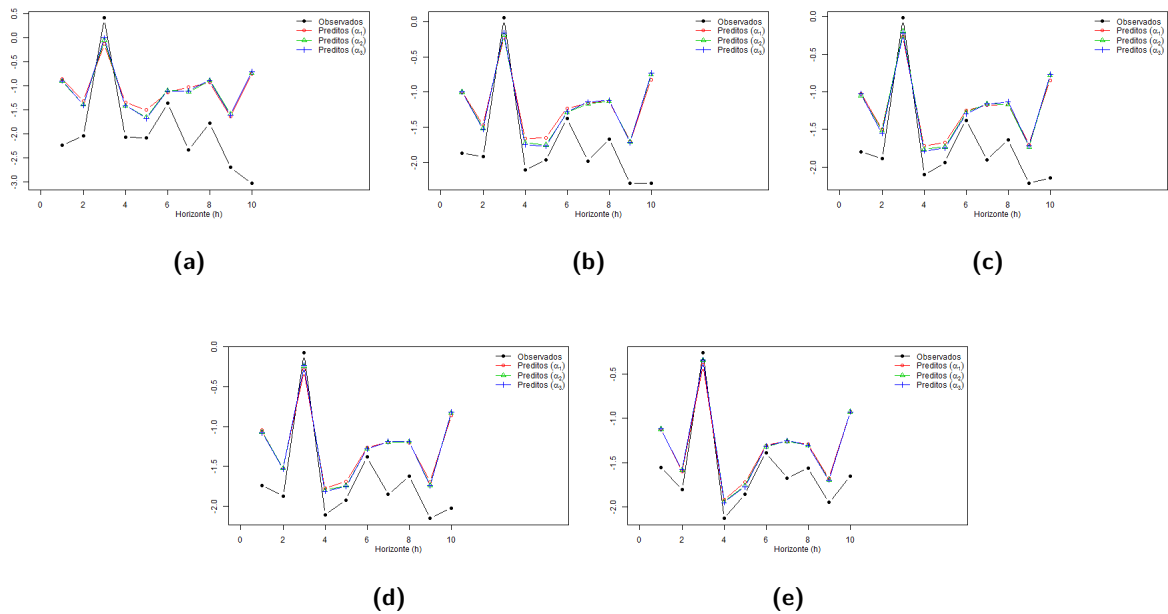


Figura F.118: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

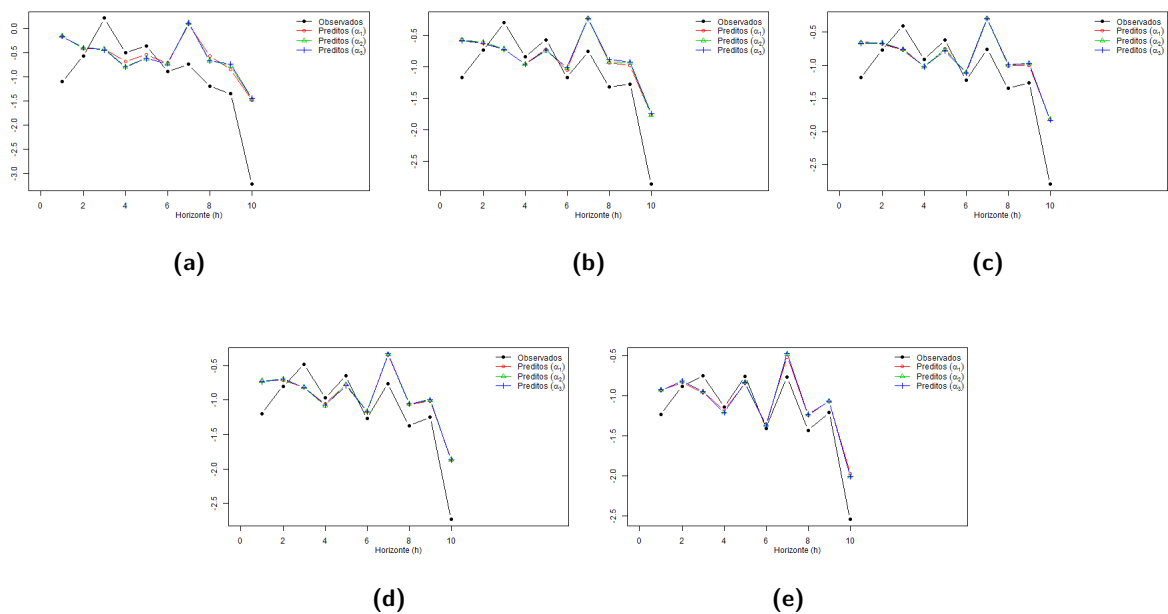


Figura F.119: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

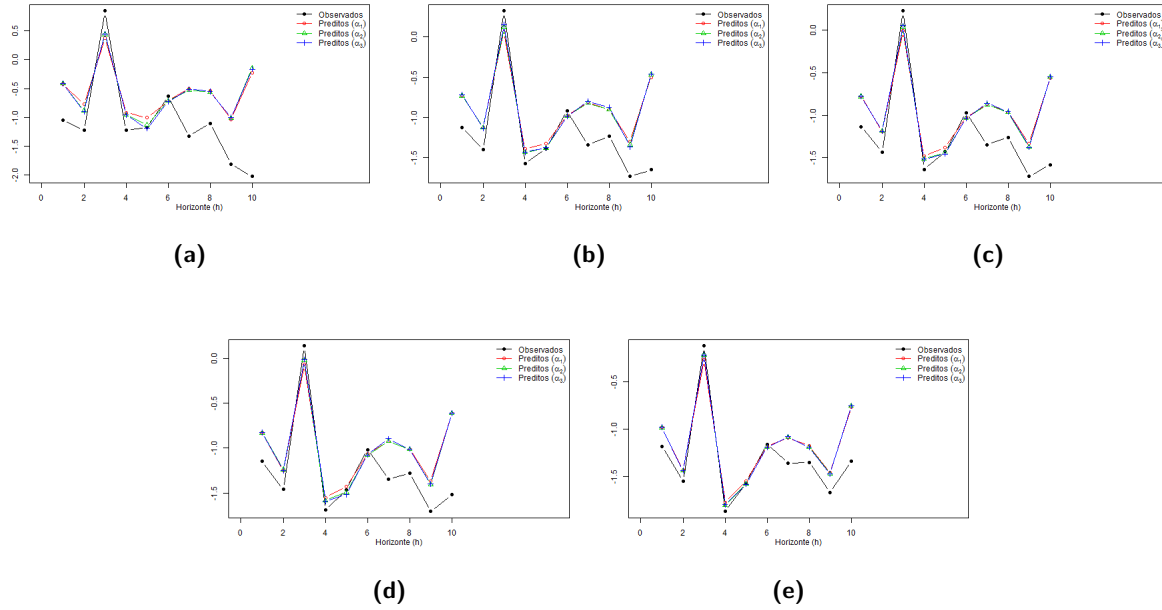


Figura F.120: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 200$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

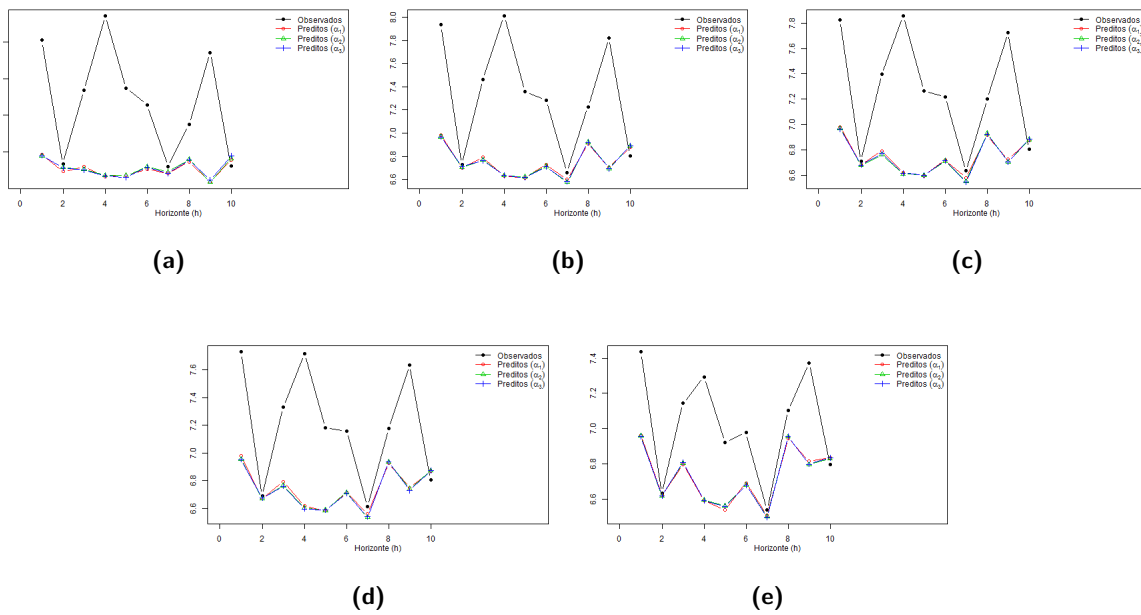


Figura F.121: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

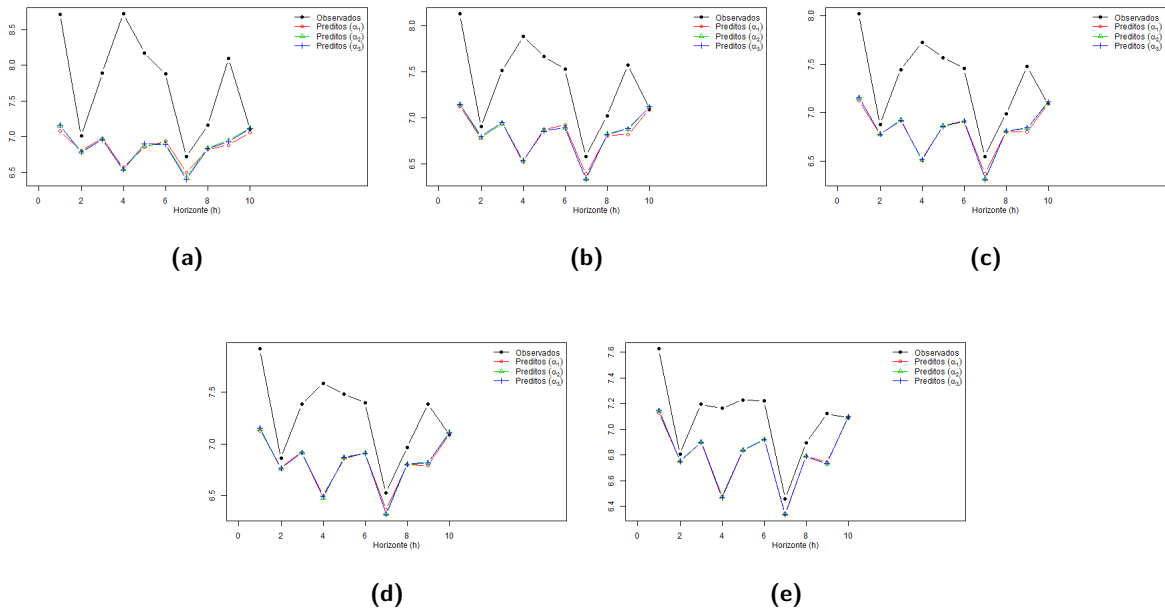


Figura F.122: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

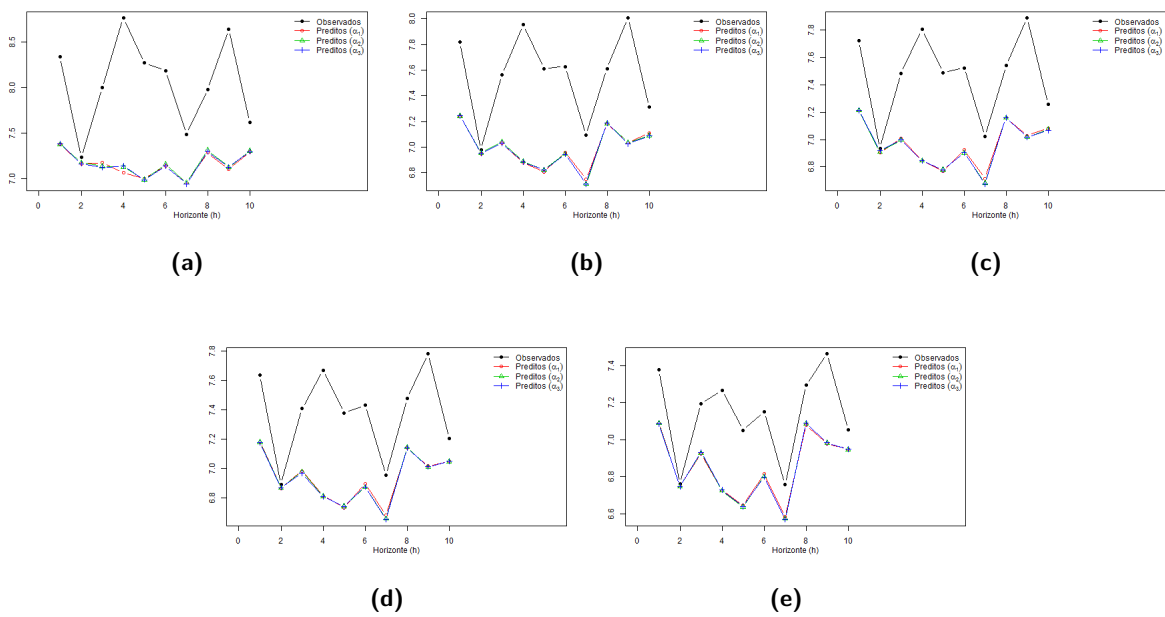


Figura F.123: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

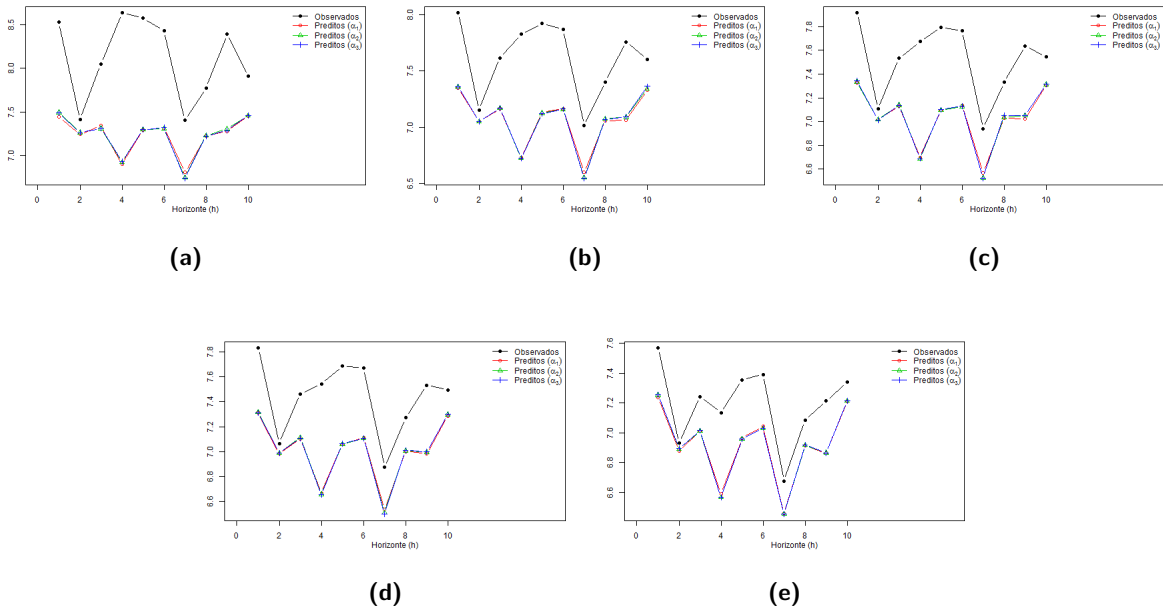


Figura F.124: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

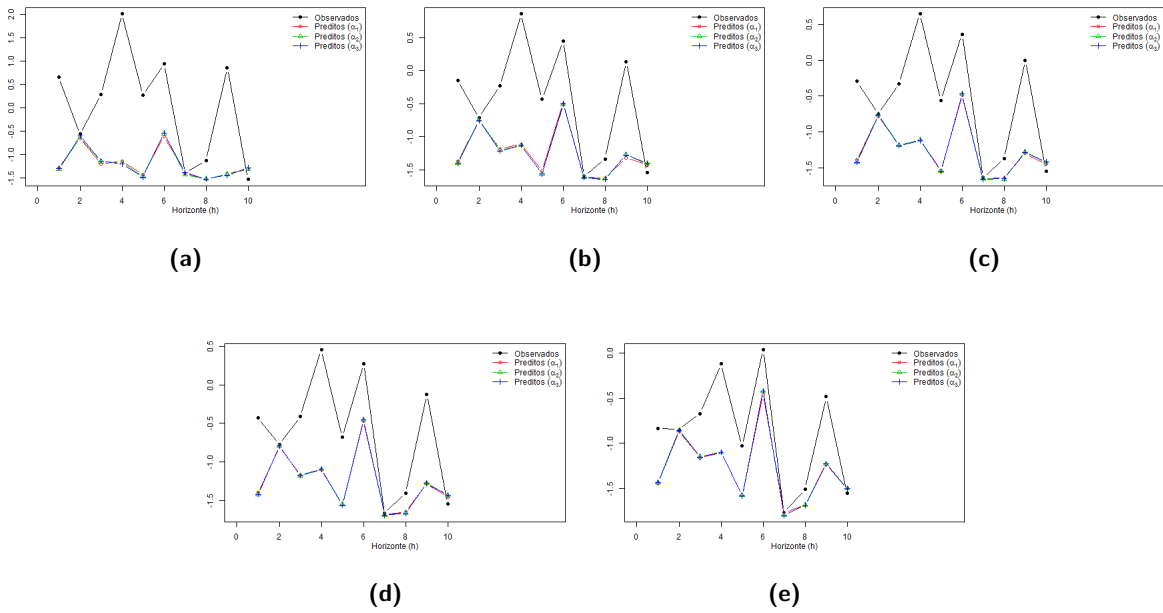


Figura F.125: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

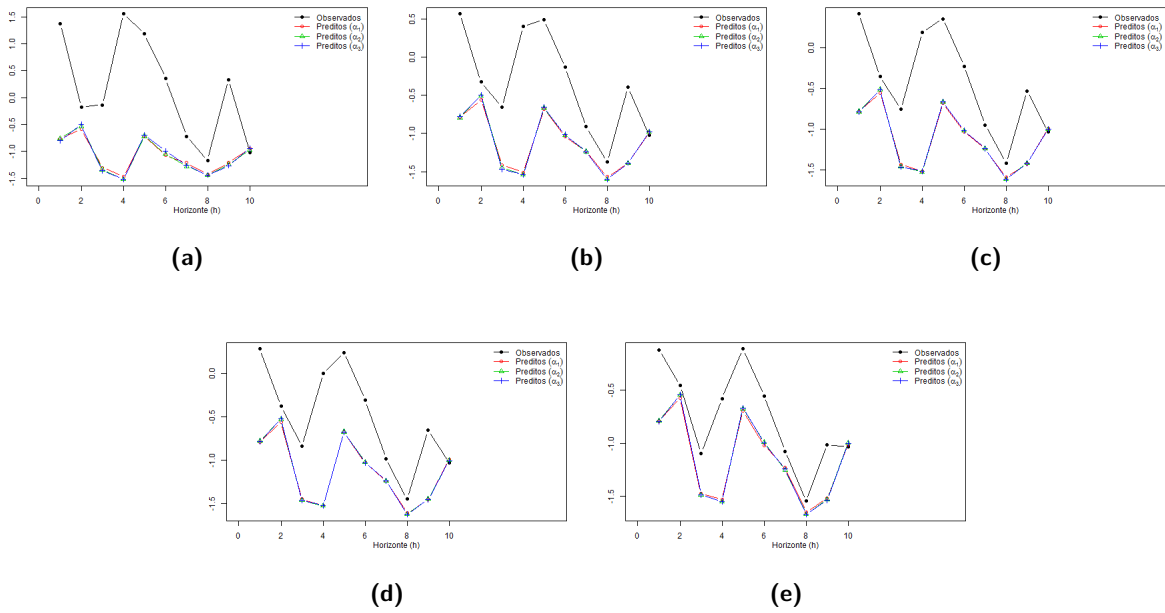


Figura F.126: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

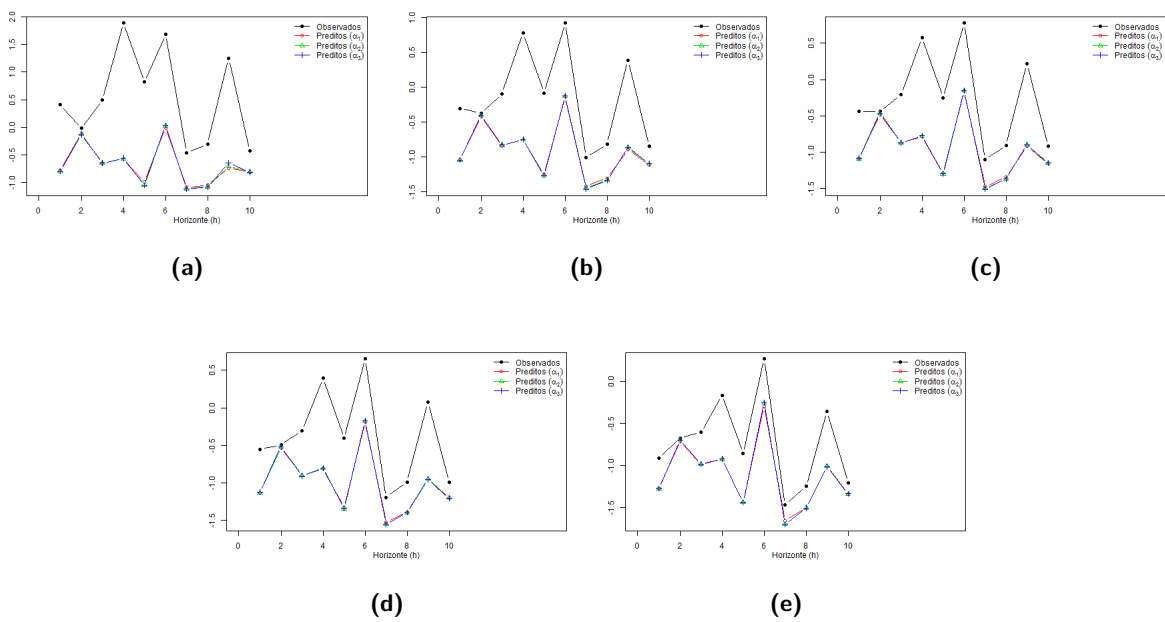


Figura F.127: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

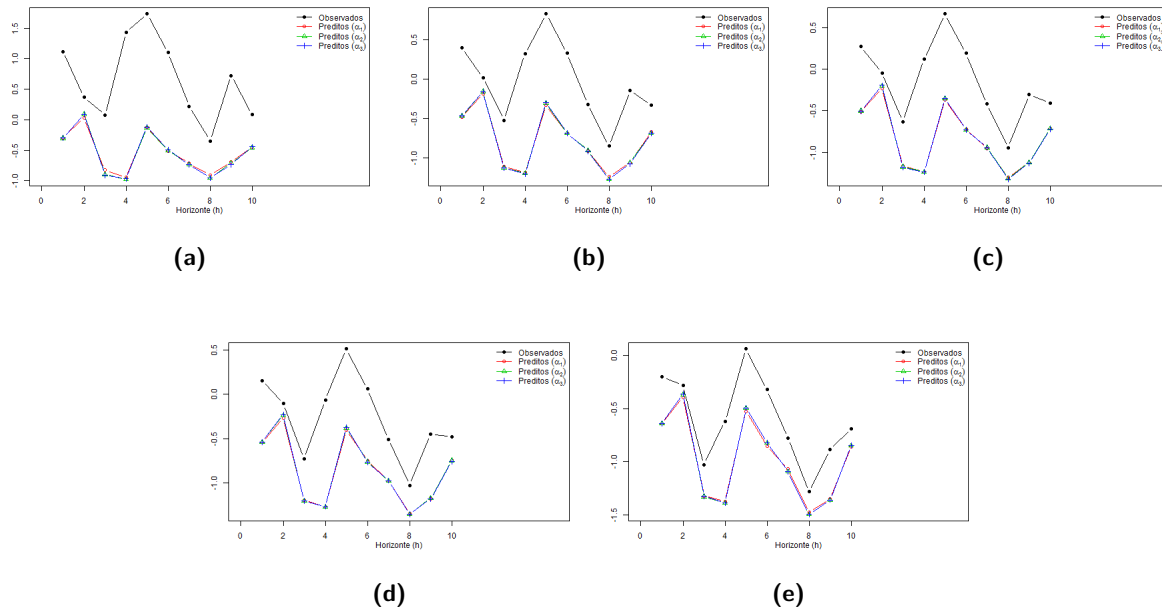


Figura F.128: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 300$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

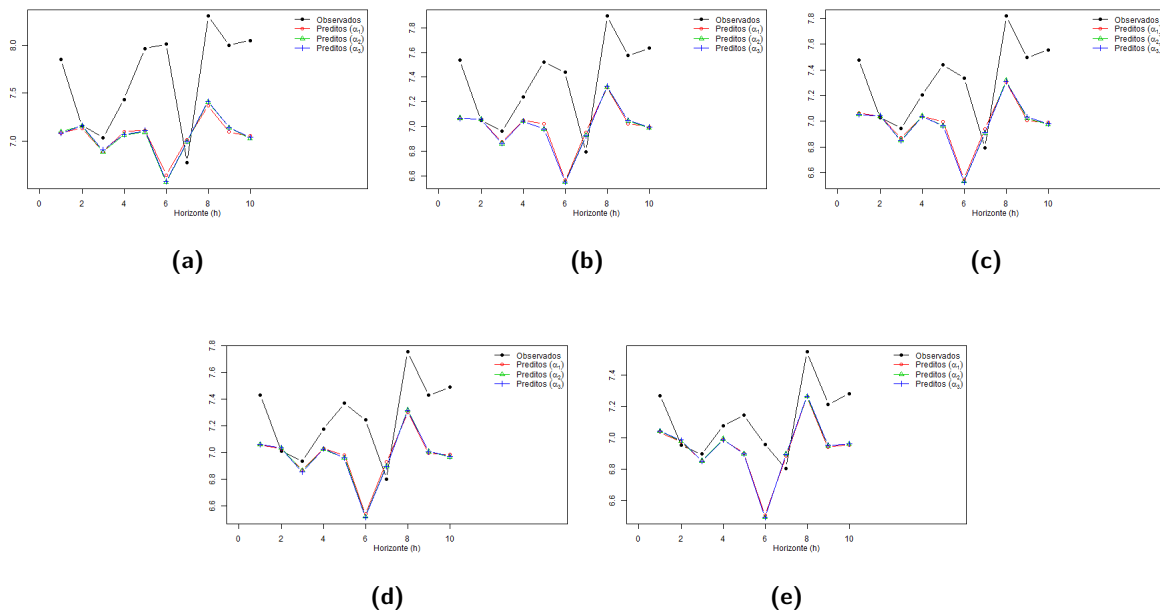


Figura F.129: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

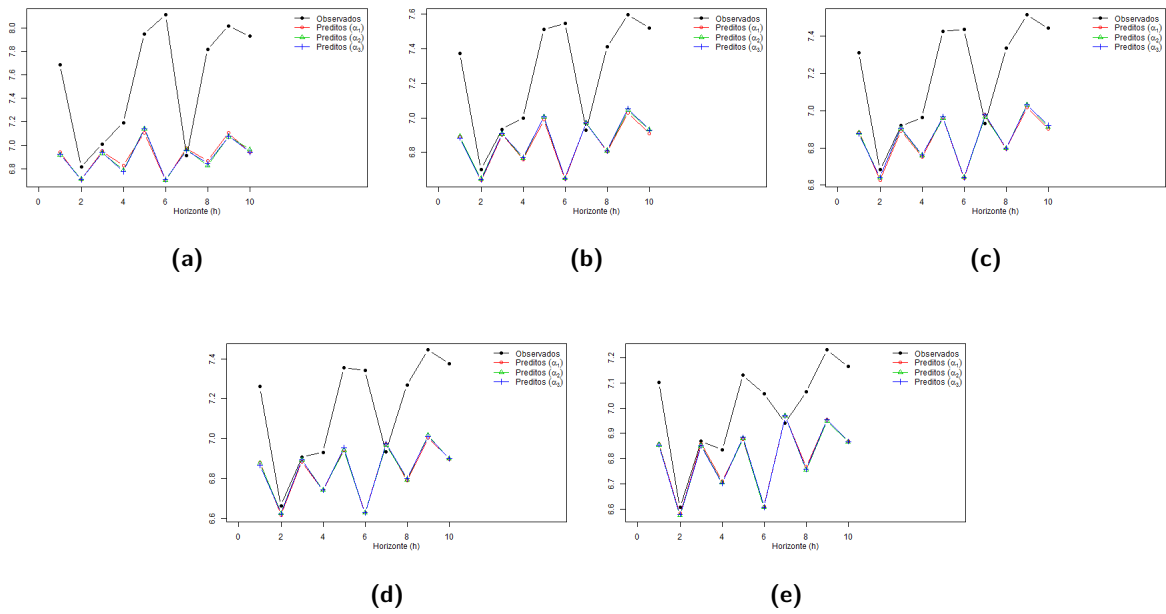


Figura F.130: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

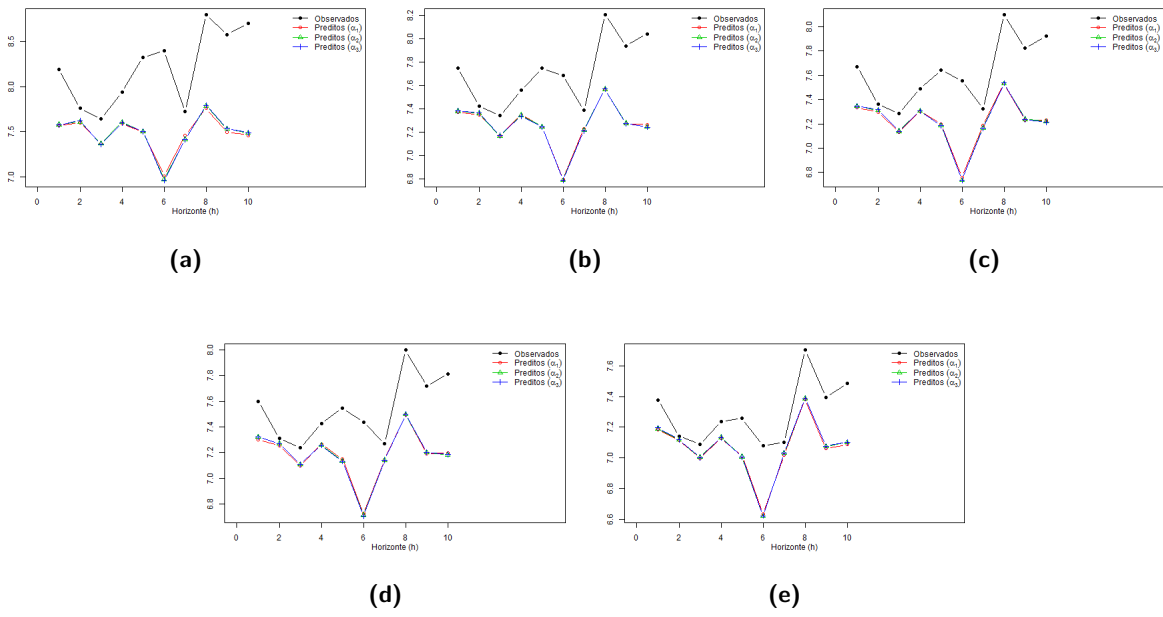


Figura F.131: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

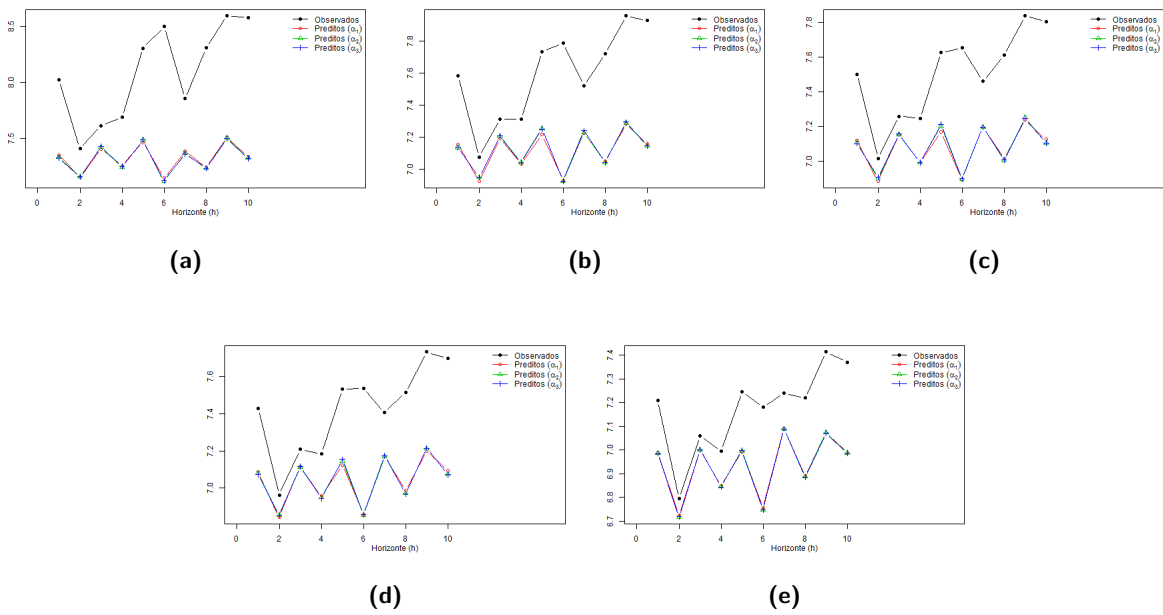


Figura F.132: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

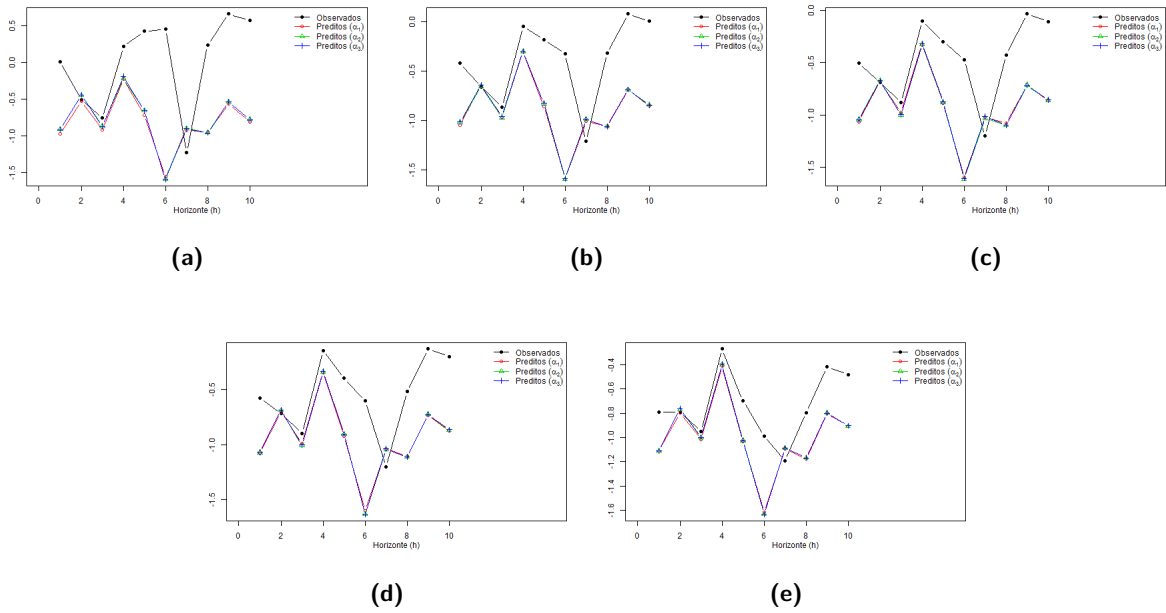


Figura F.133: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

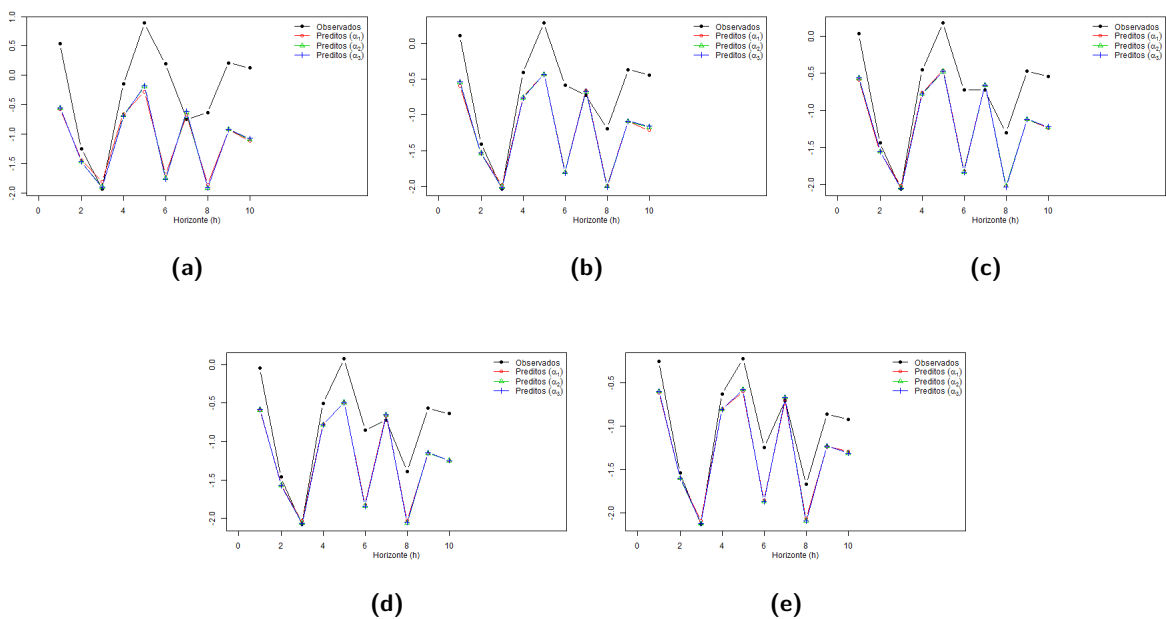


Figura F.134: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

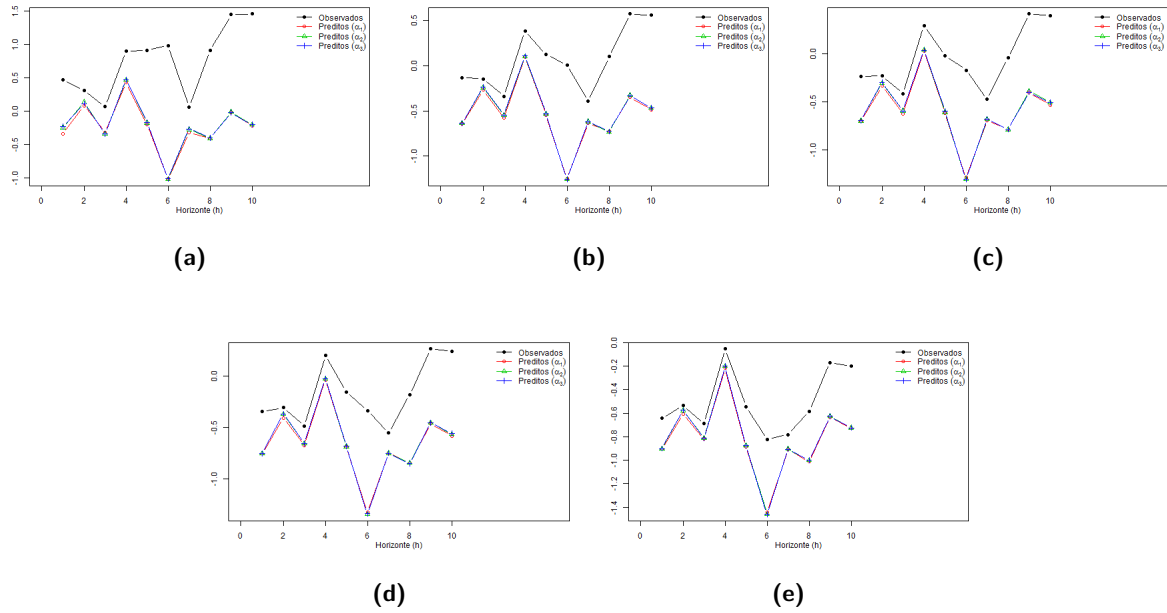


Figura F.135: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

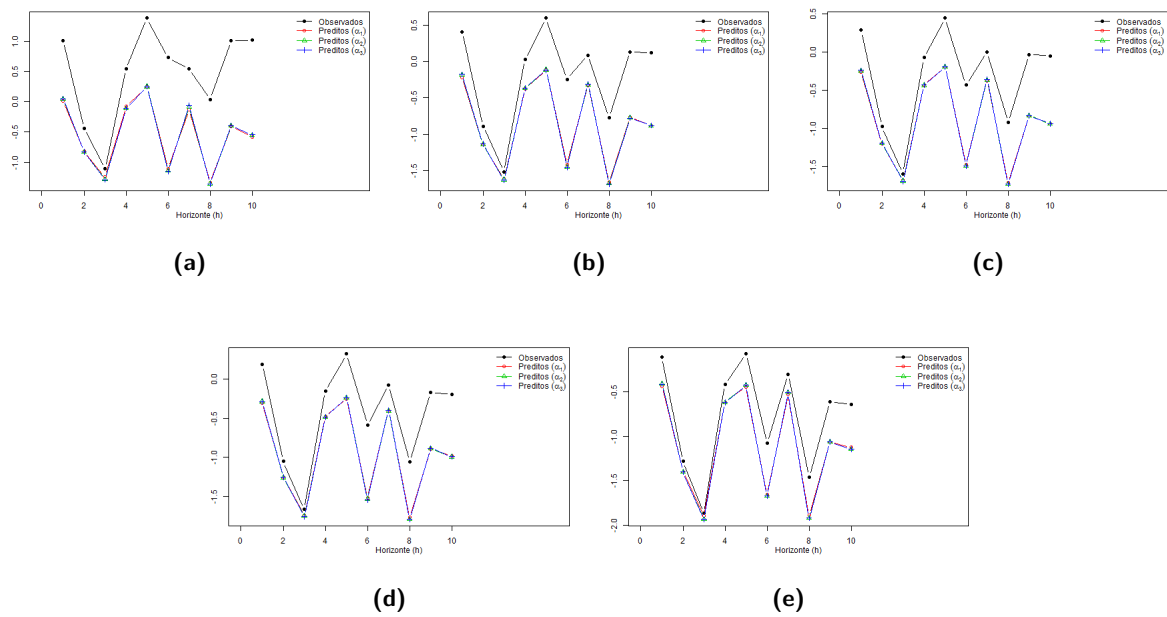


Figura F.136: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 400$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

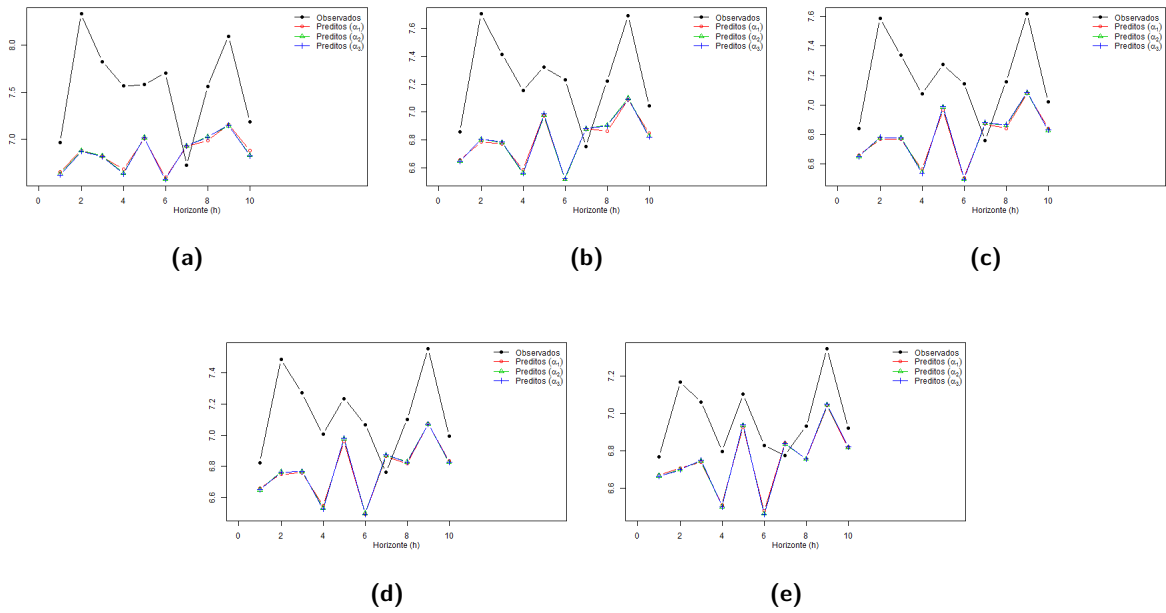


Figura F.137: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

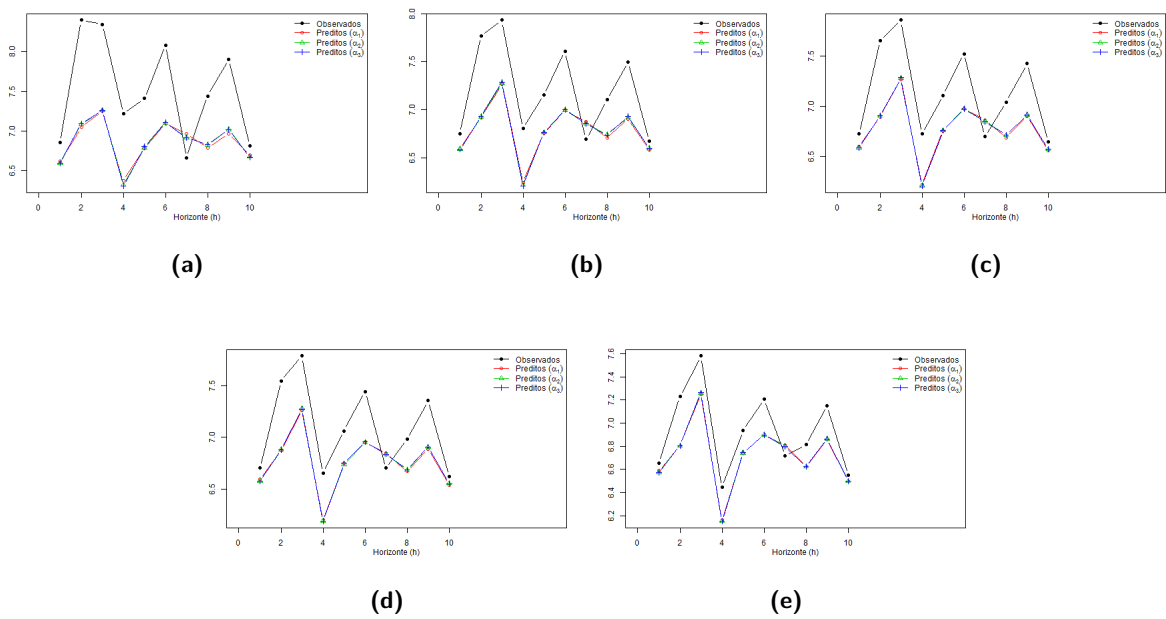


Figura F.138: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

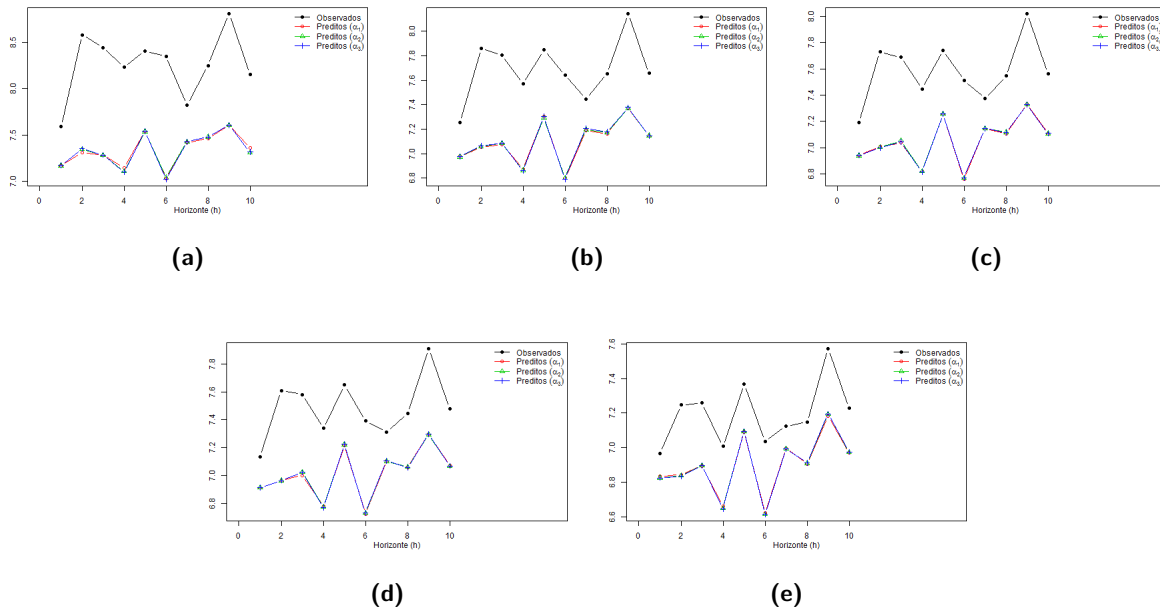


Figura F.139: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

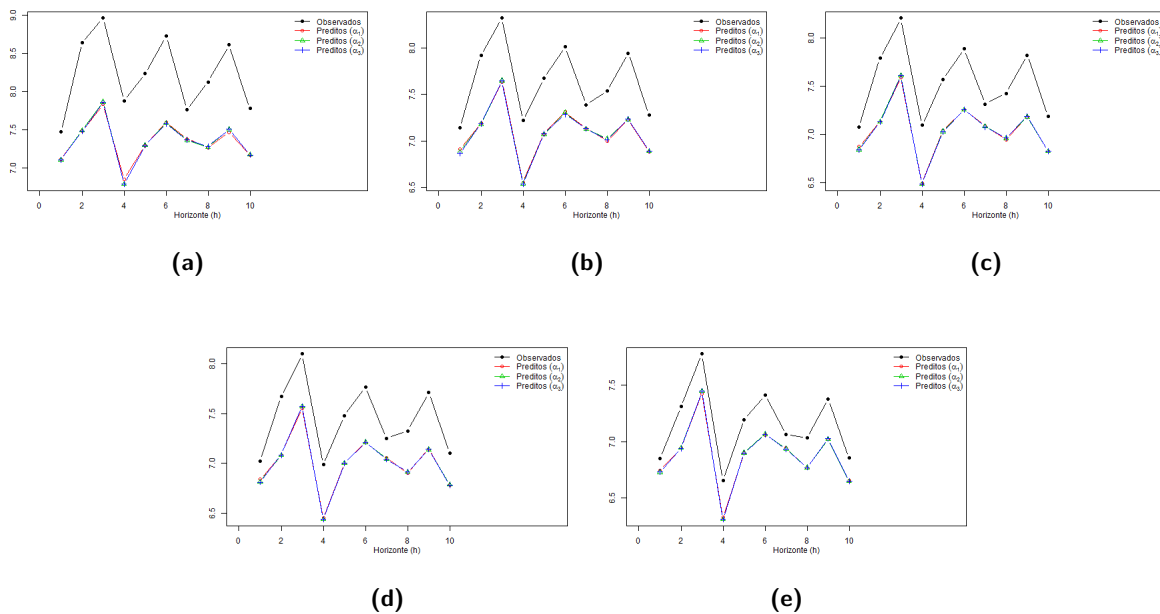


Figura F.140: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

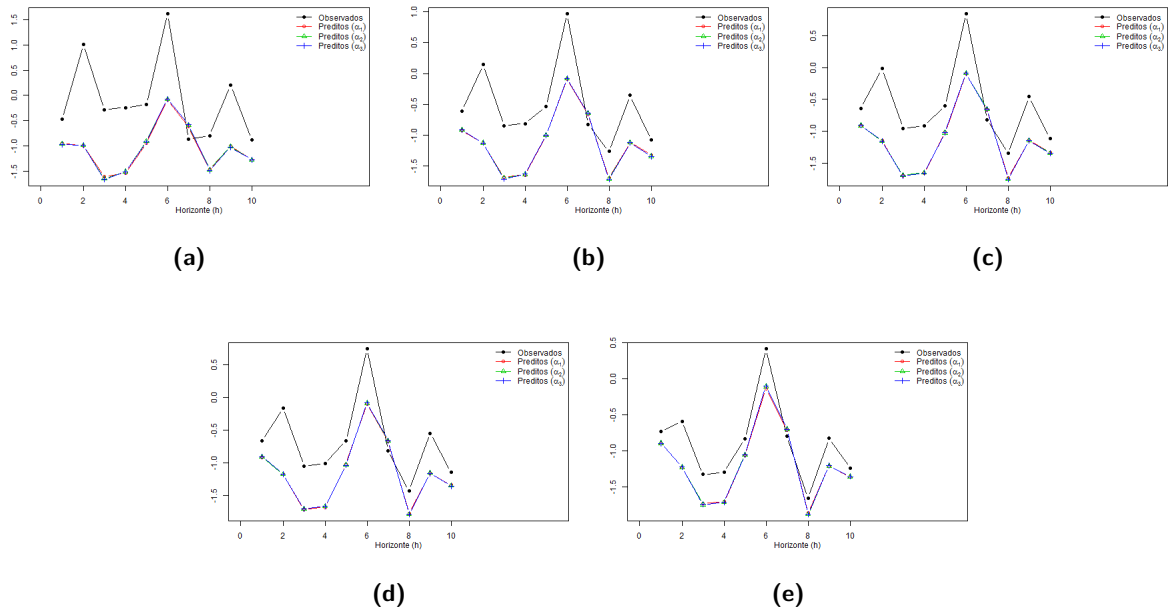


Figura F.141: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

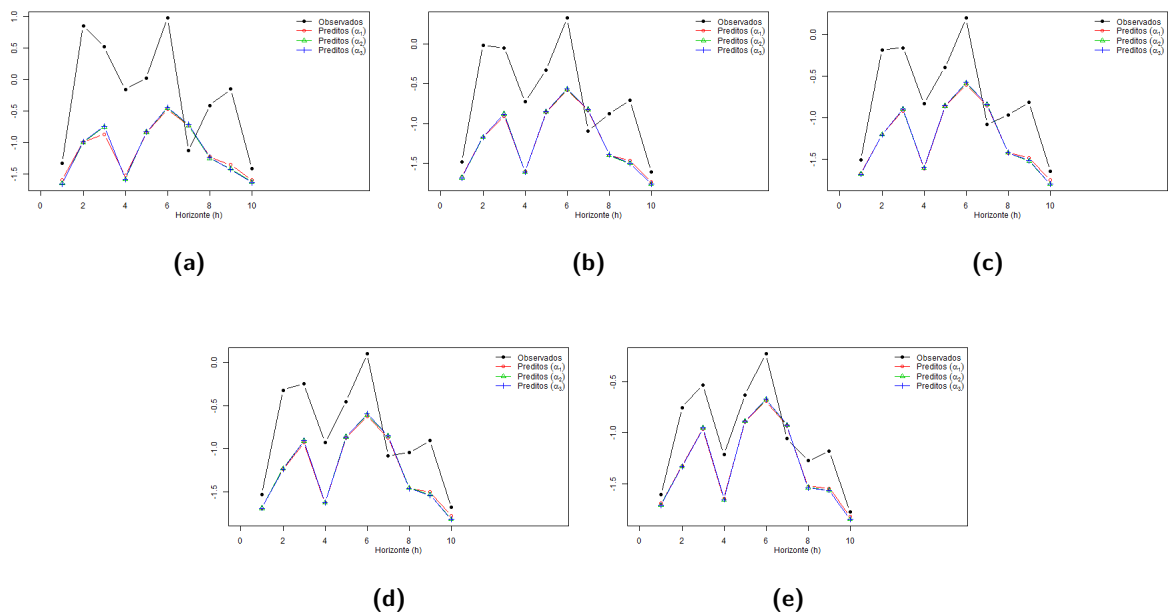


Figura F.142: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

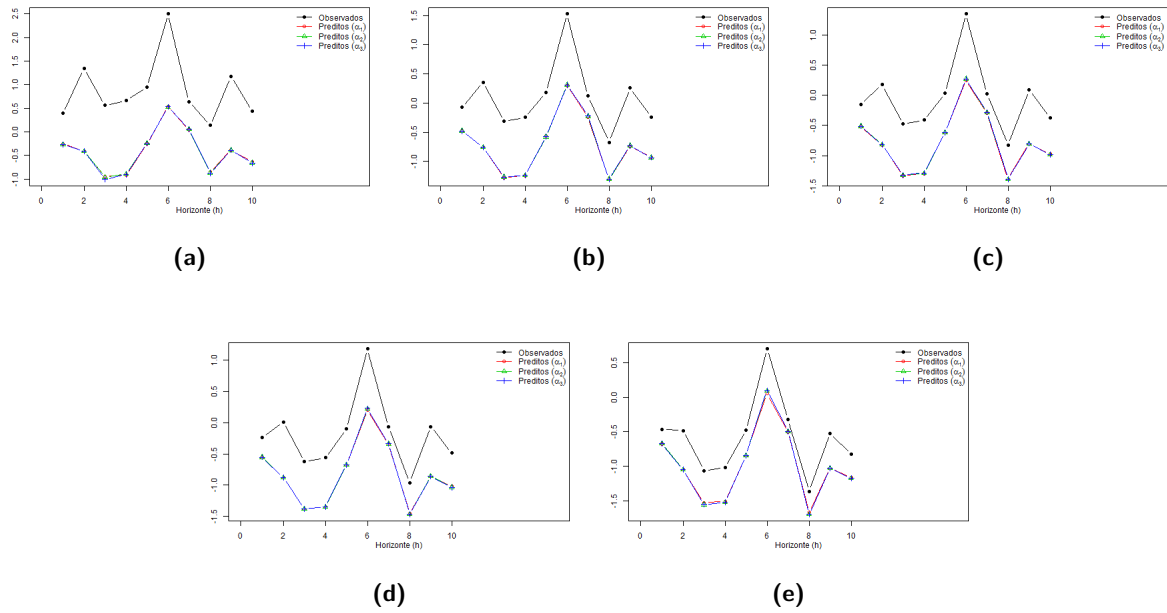


Figura F.143: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

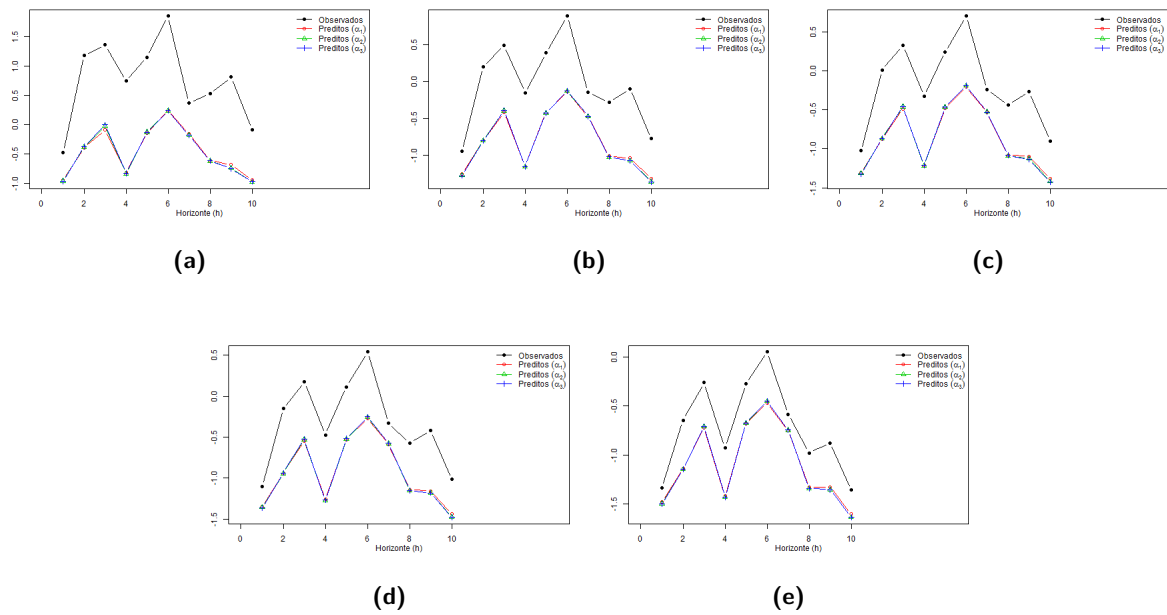


Figura F.144: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 500$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

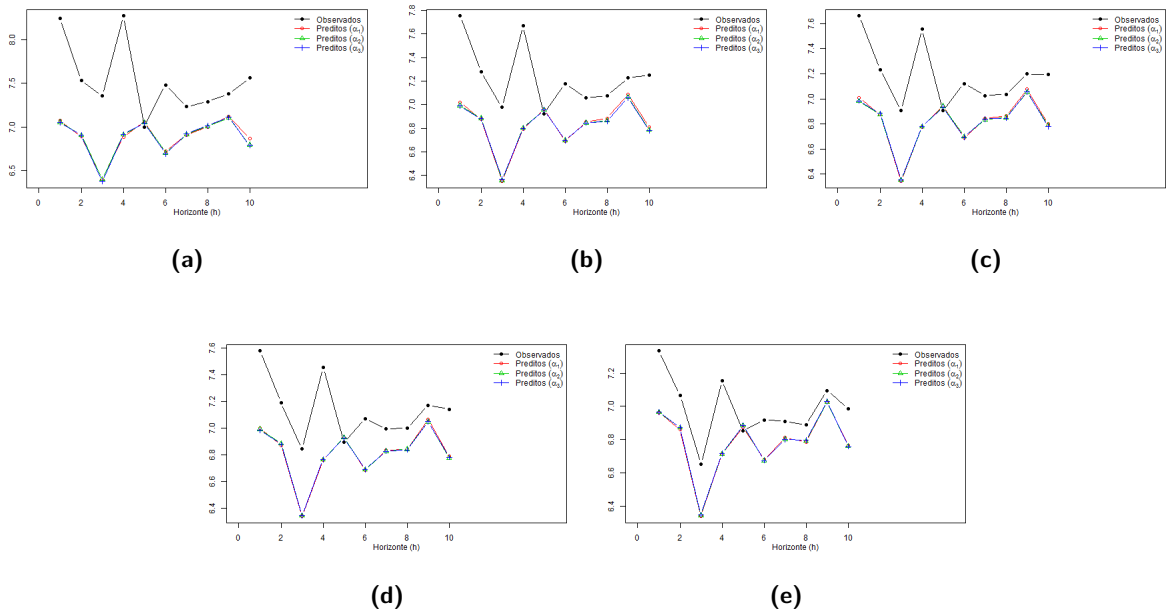


Figura F.145: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

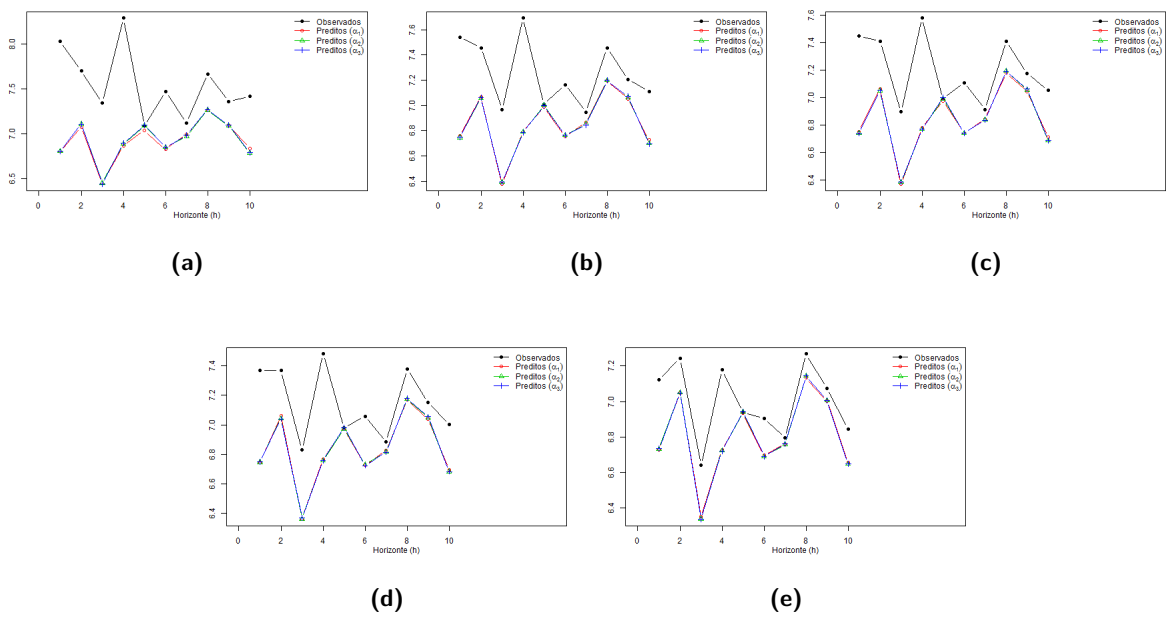


Figura F.146: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

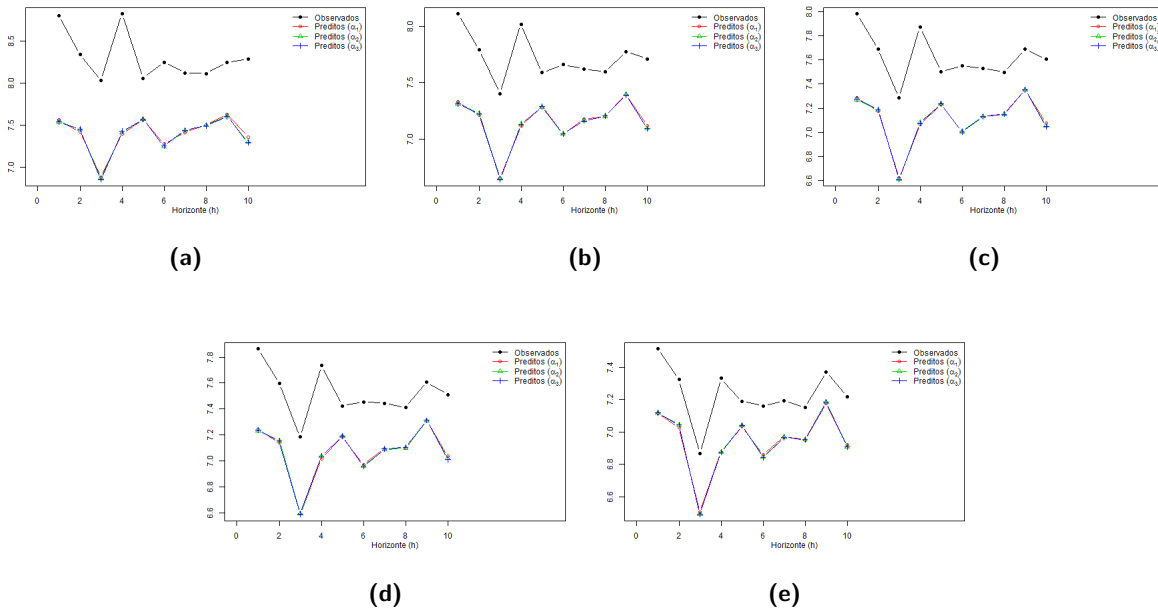


Figura F.147: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

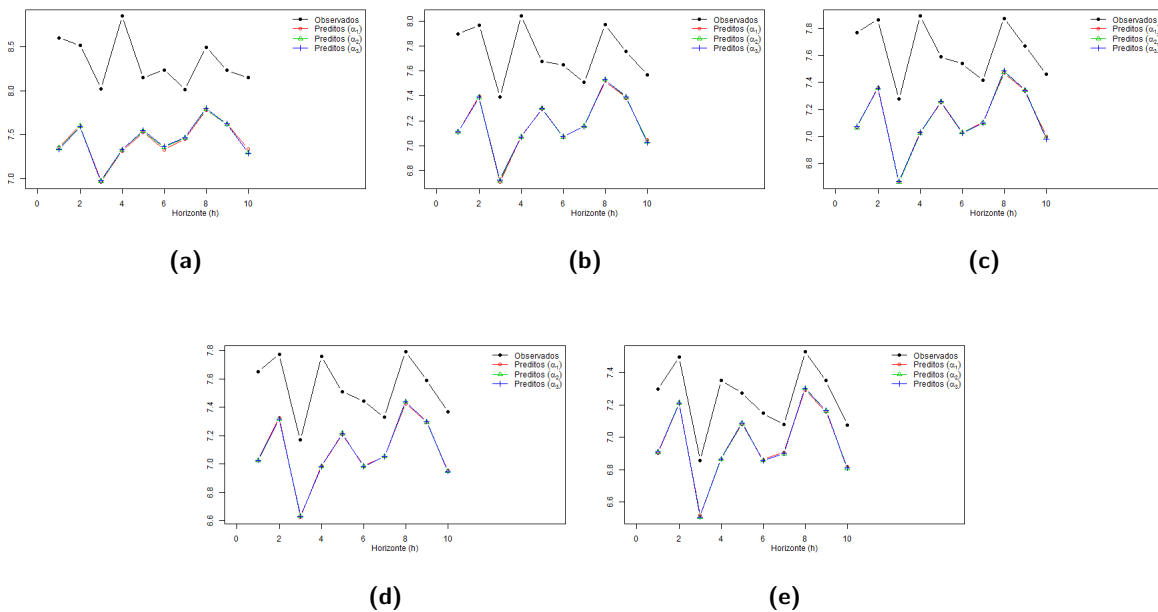


Figura F.148: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

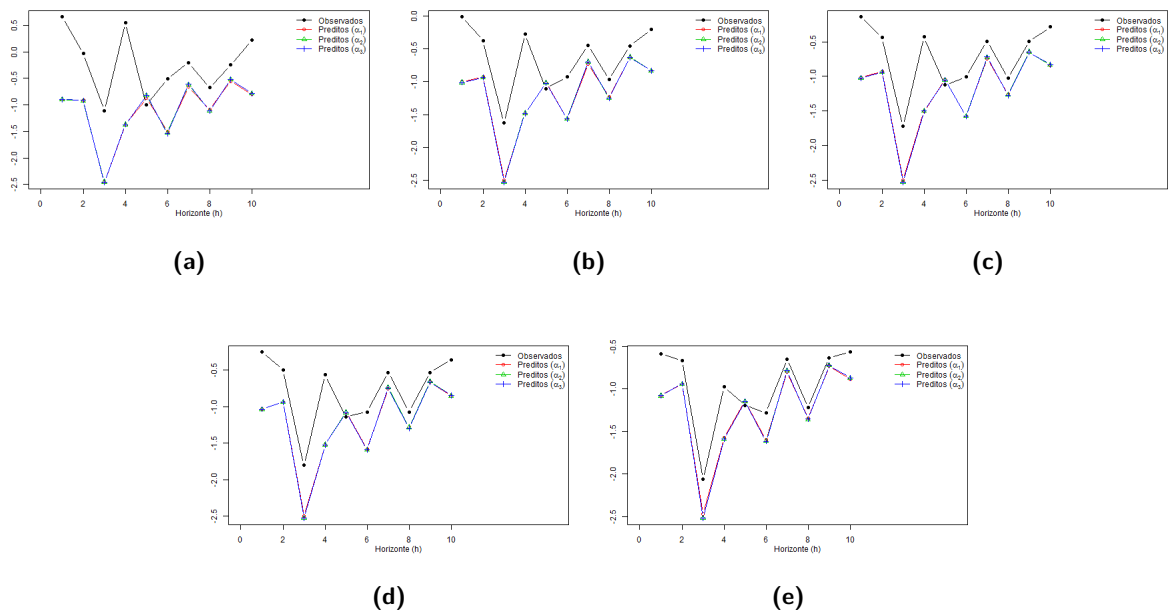


Figura F.149: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

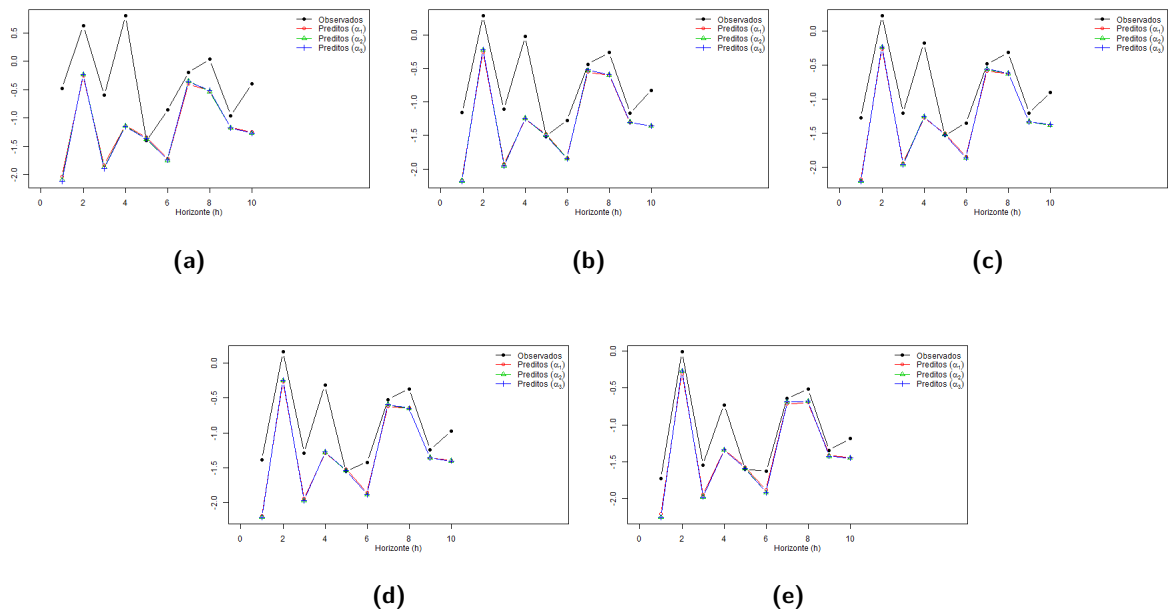


Figura F.150: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

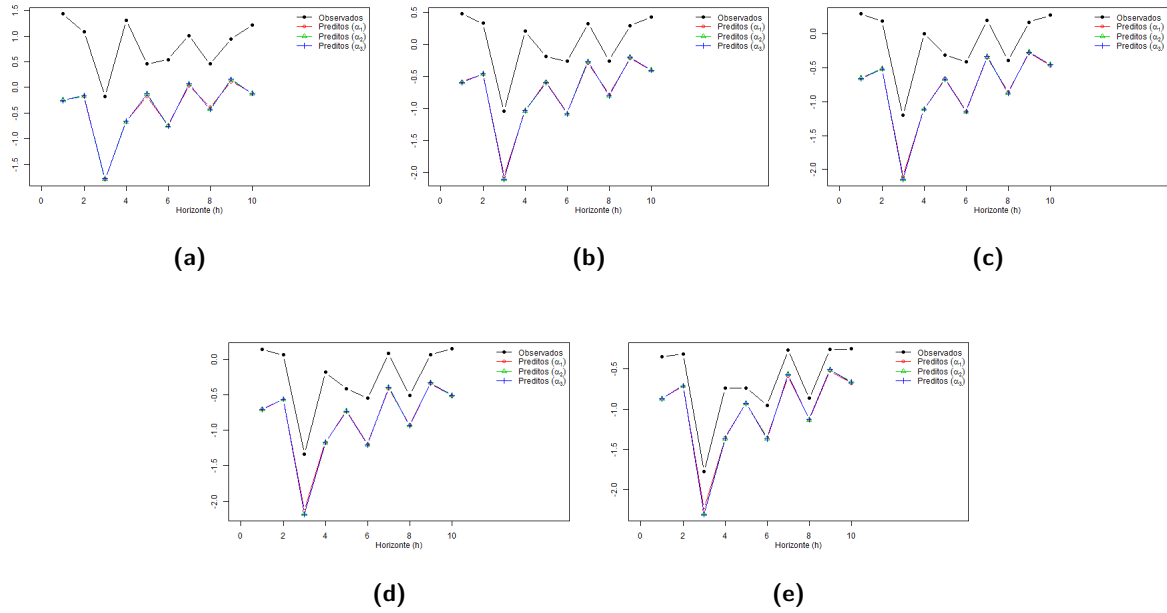


Figura F.151: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

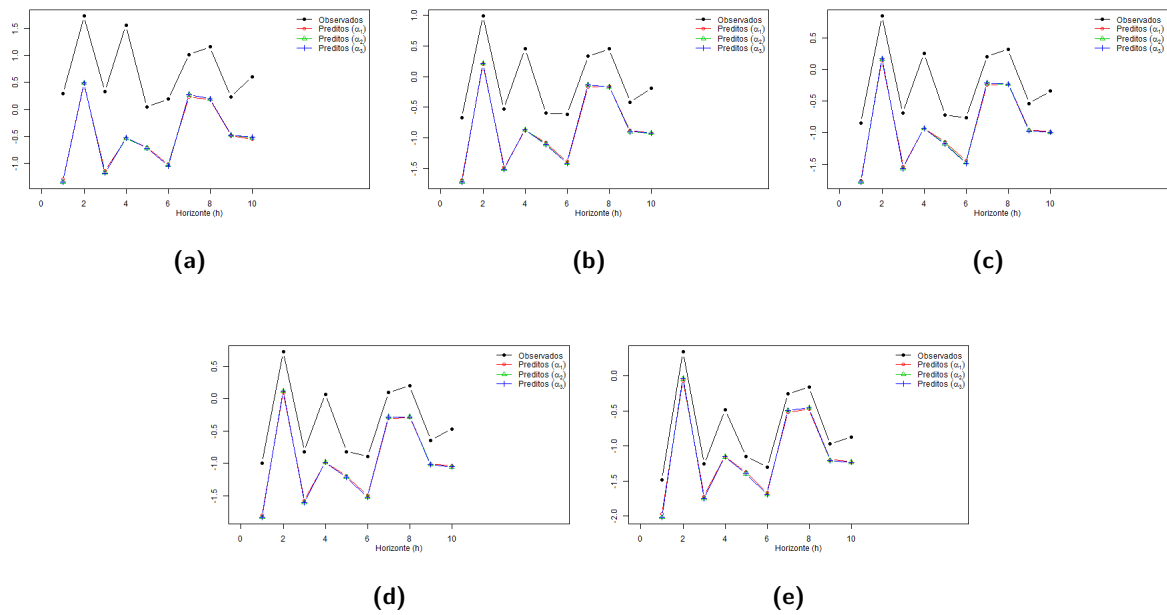


Figura F.152: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 600$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

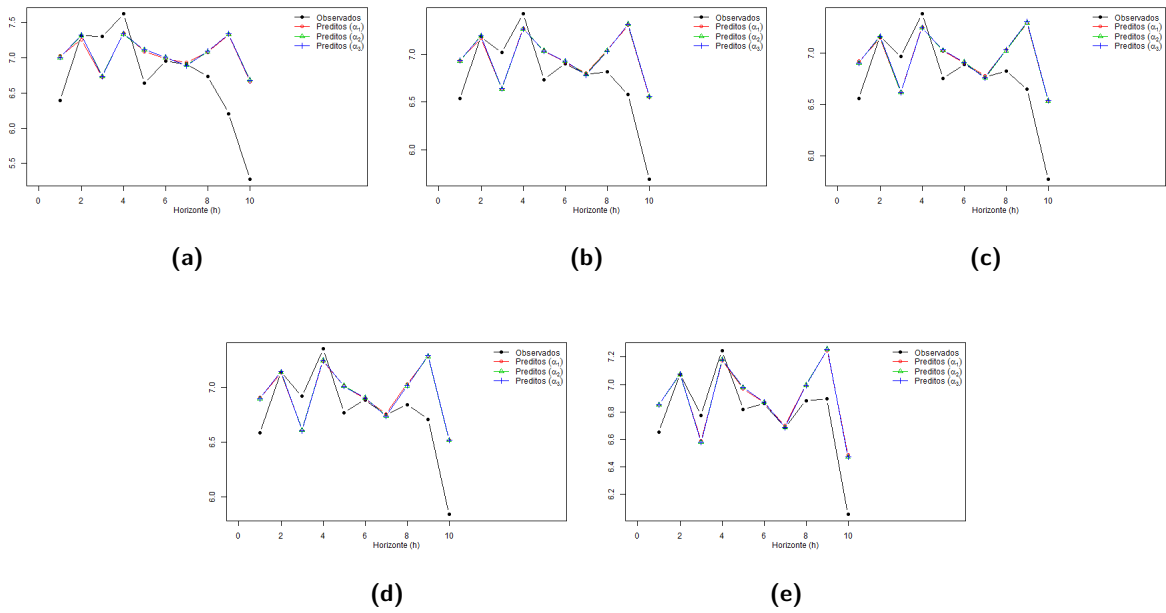


Figura F.153: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

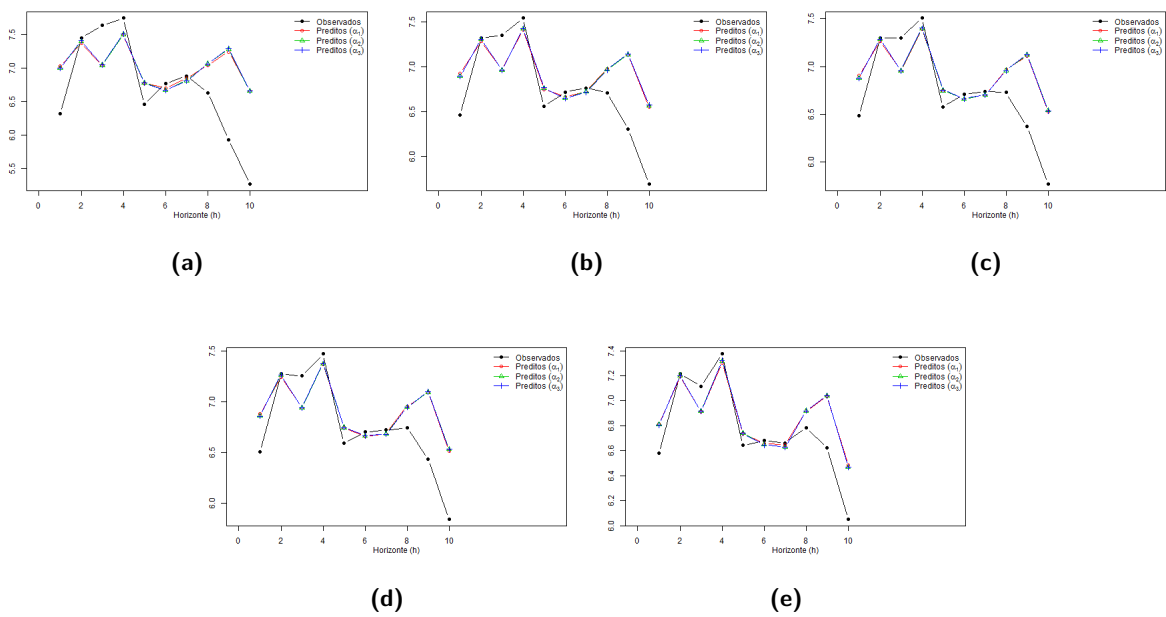


Figura F.154: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

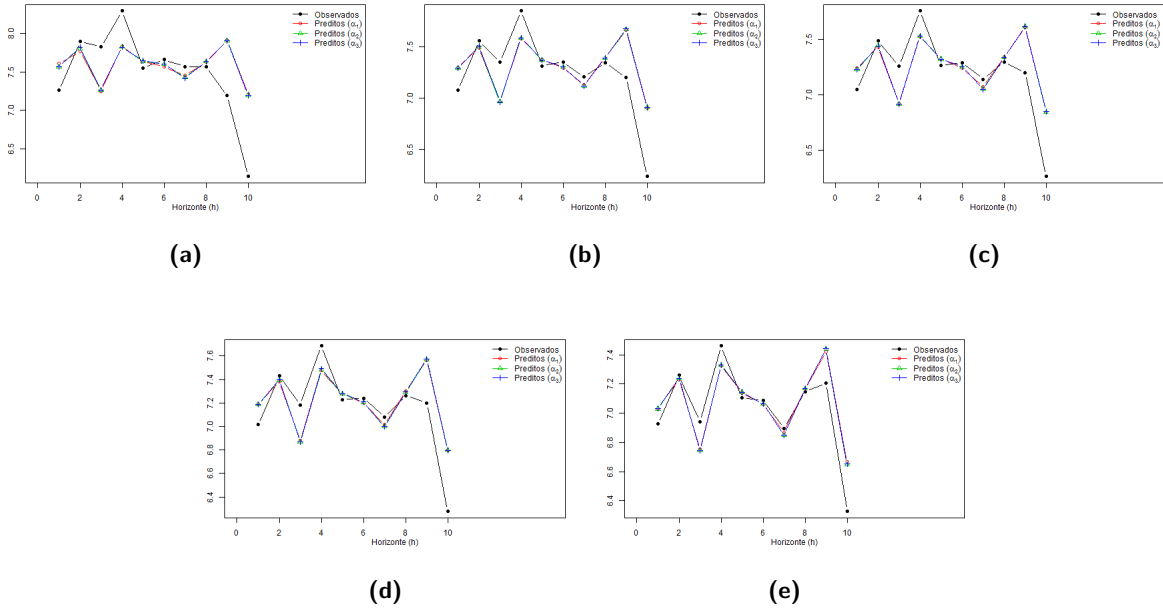


Figura F.155: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

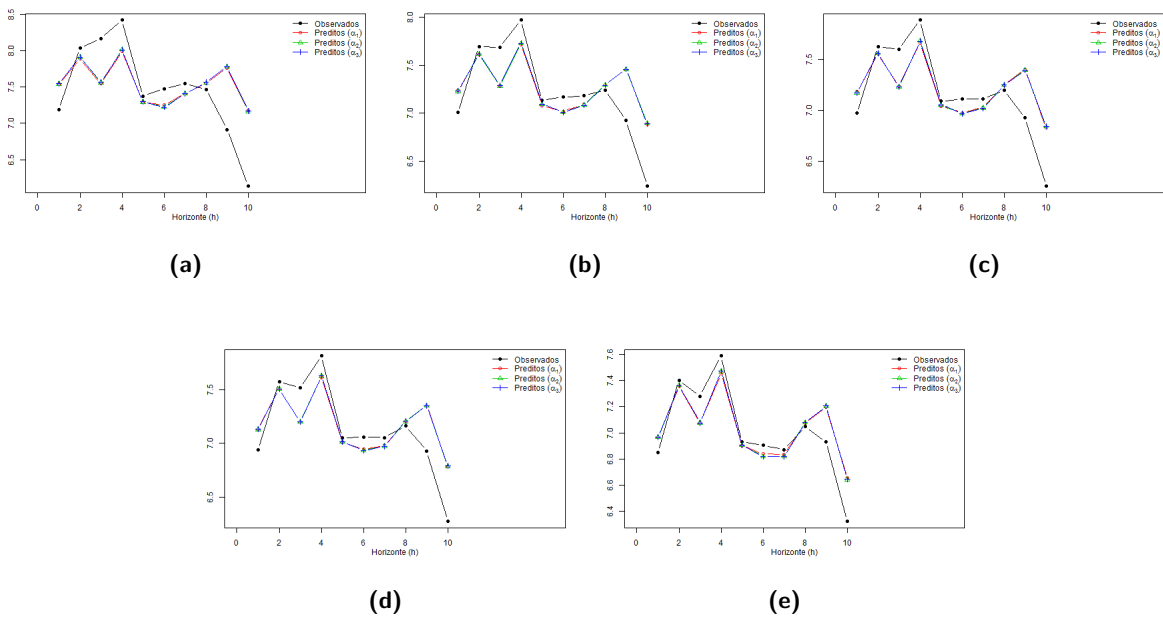


Figura F.156: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

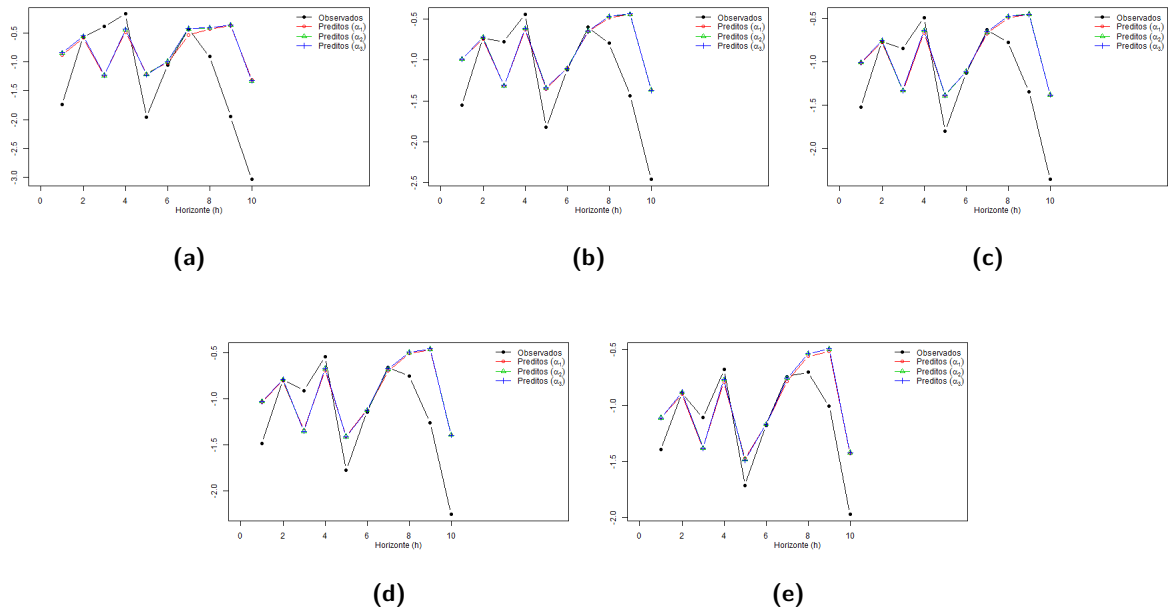


Figura F.157: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

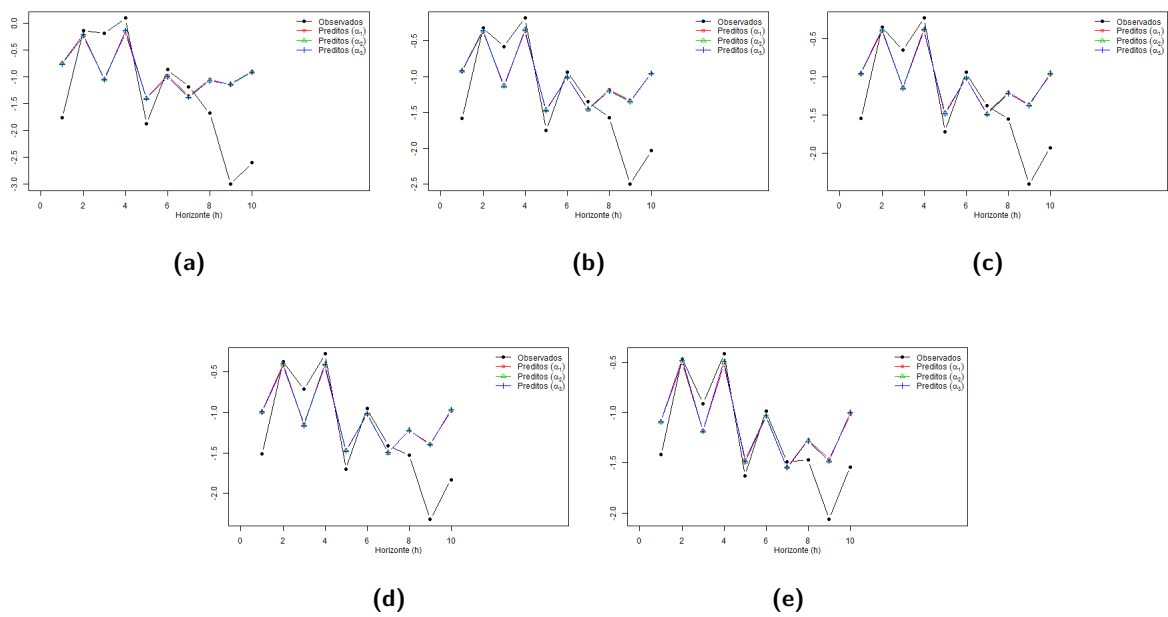


Figura F.158: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

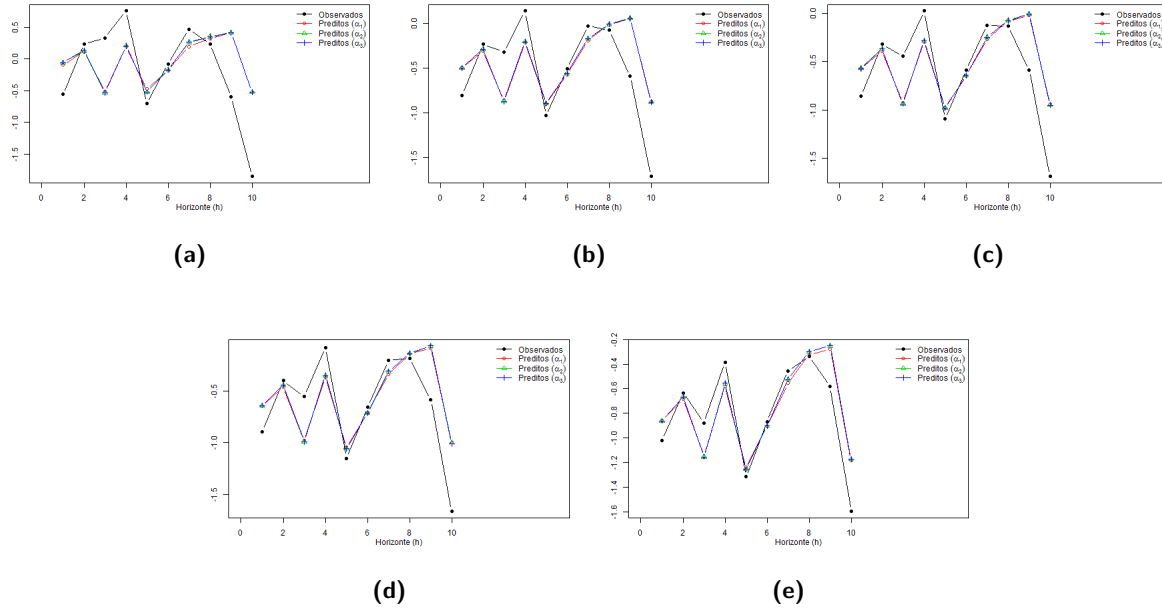


Figura F.159: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

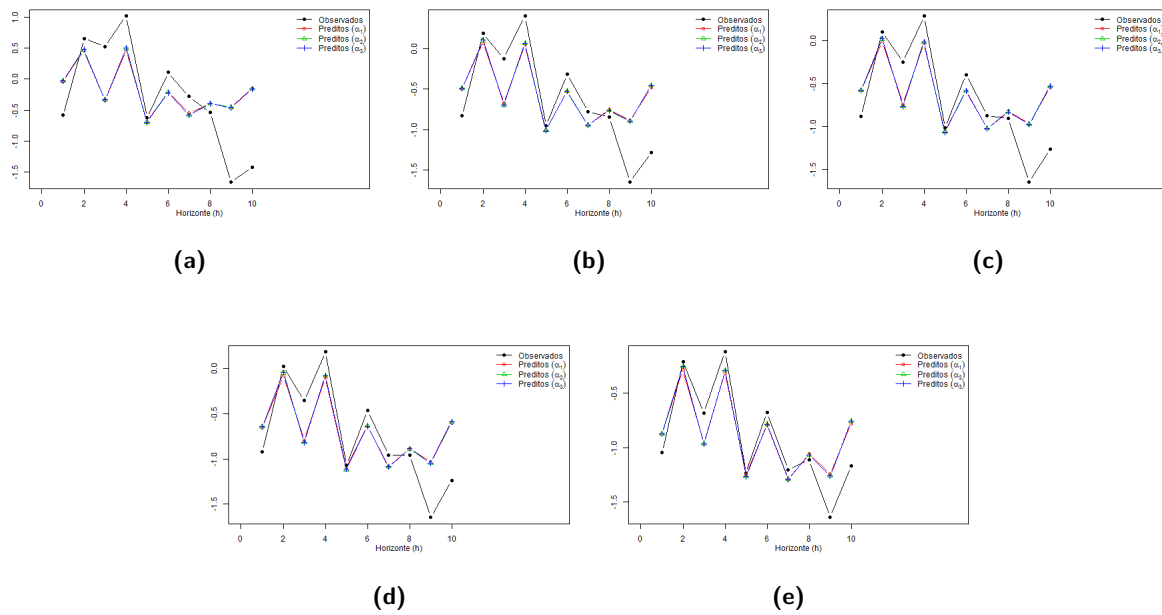


Figura F.160: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 700$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

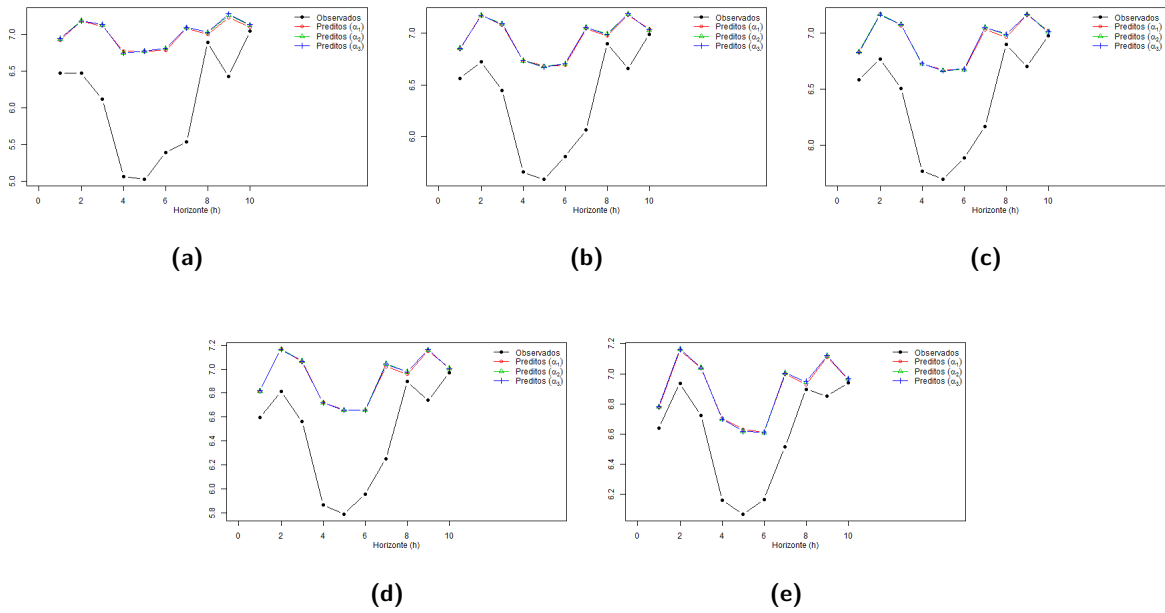


Figura F.161: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

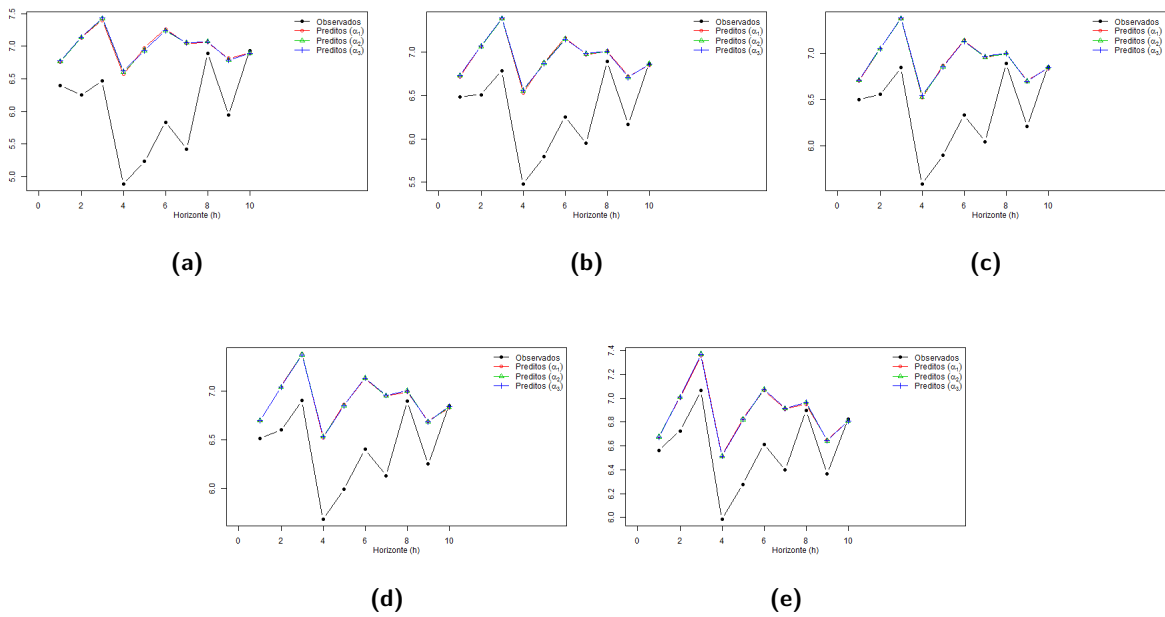


Figura F.162: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

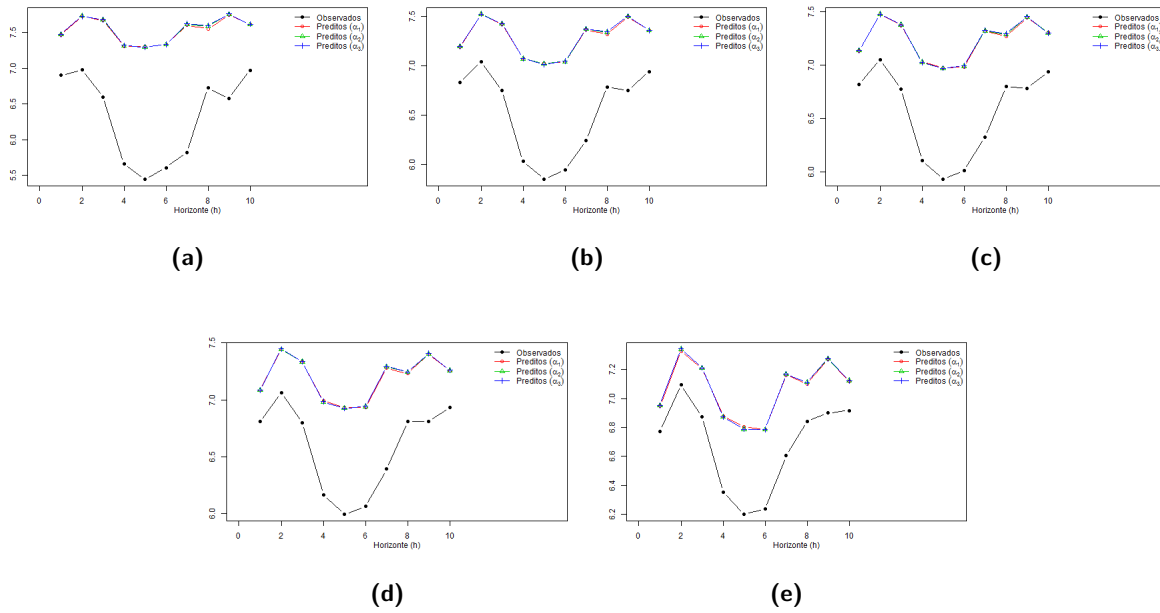


Figura F.163: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

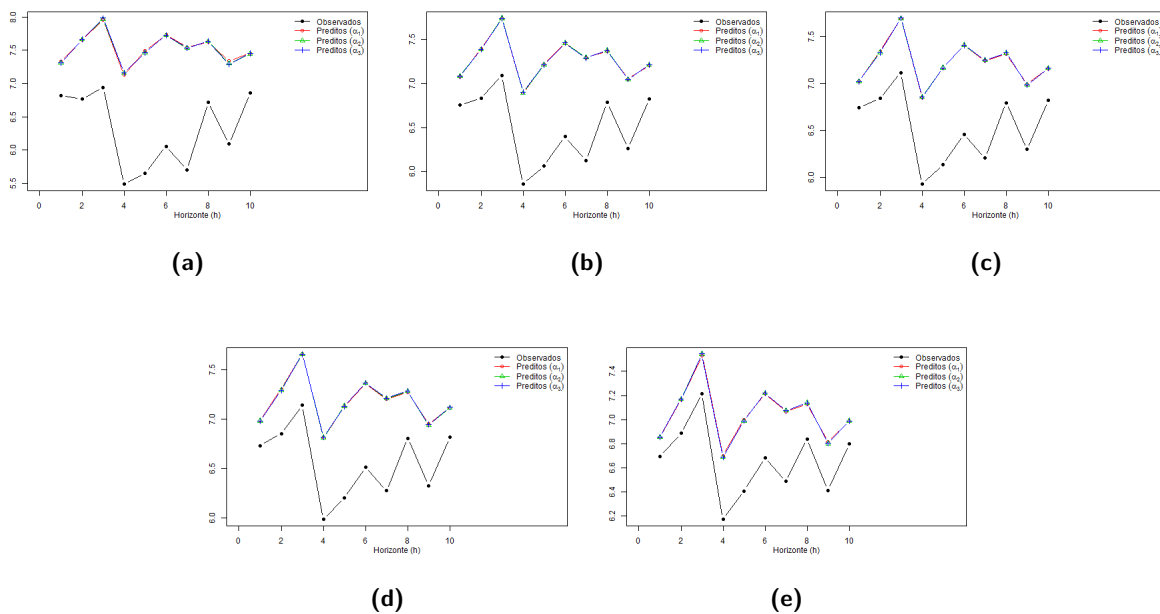


Figura F.164: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

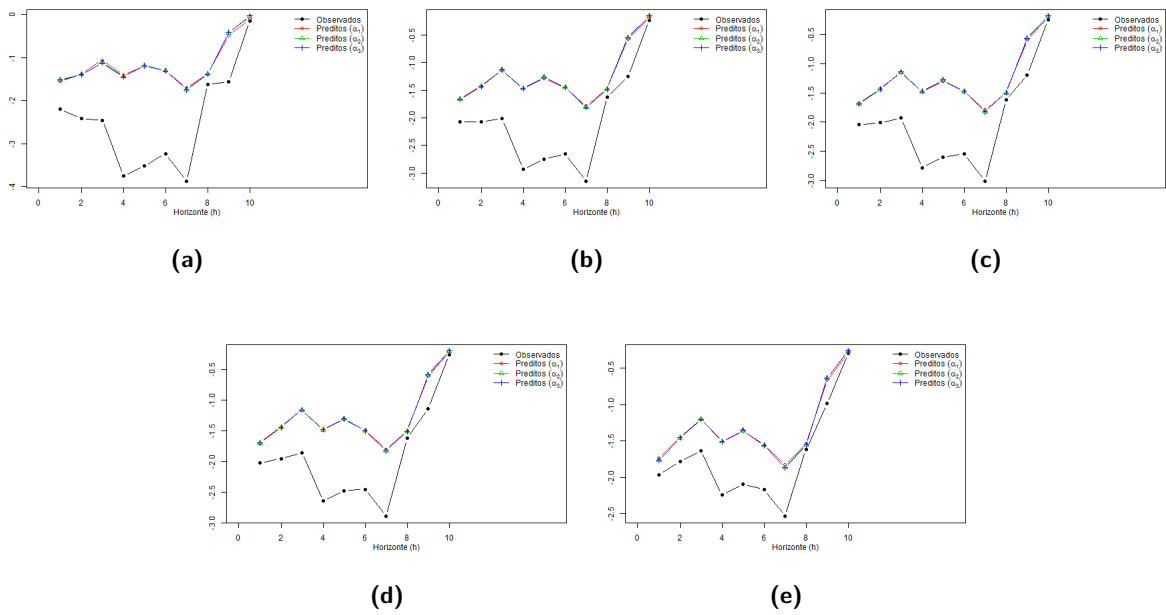


Figura F.165: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

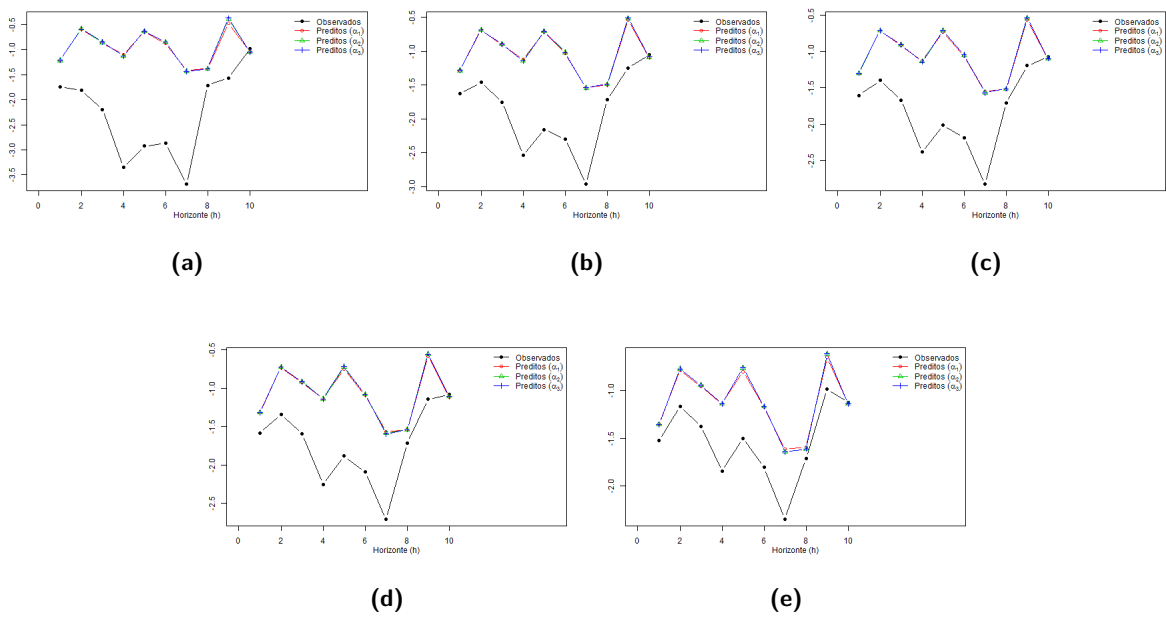


Figura F.166: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

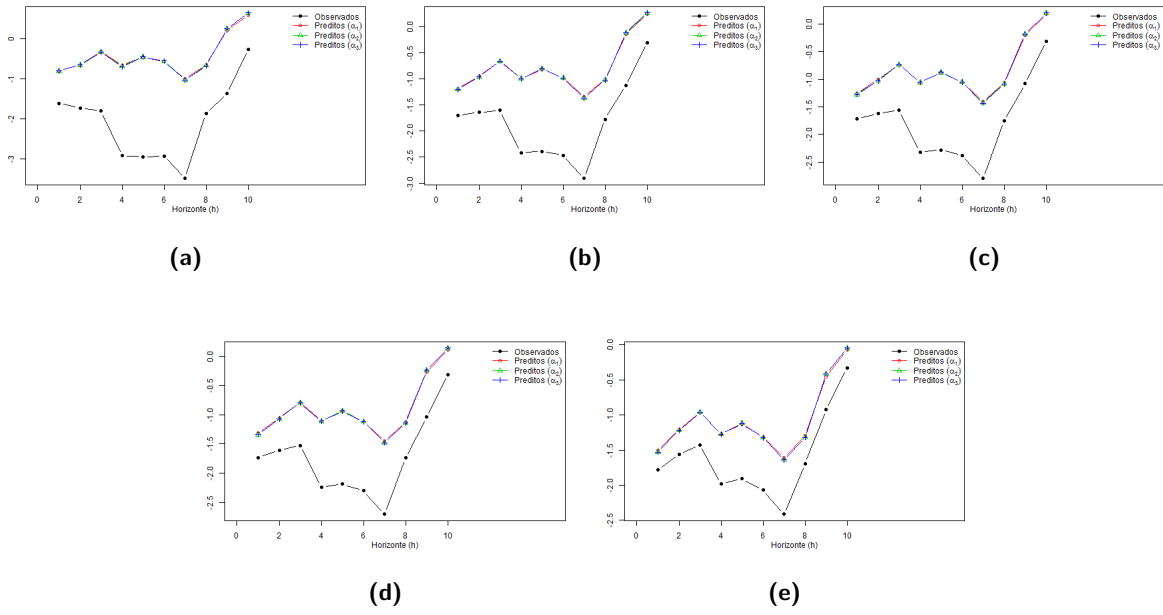


Figura F.167: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

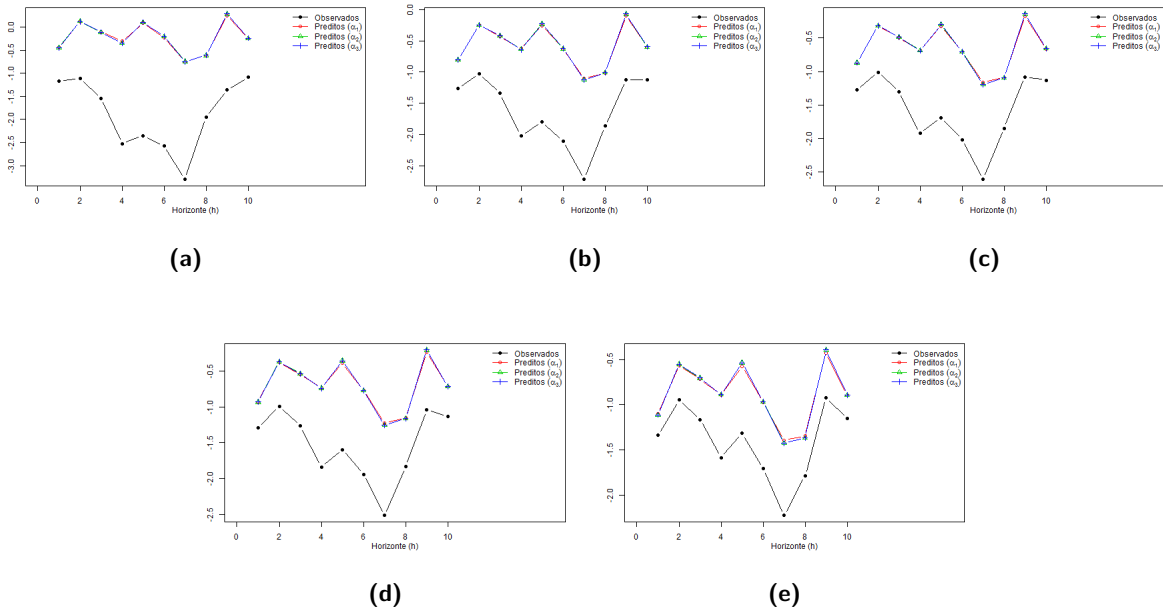


Figura F.168: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 800$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

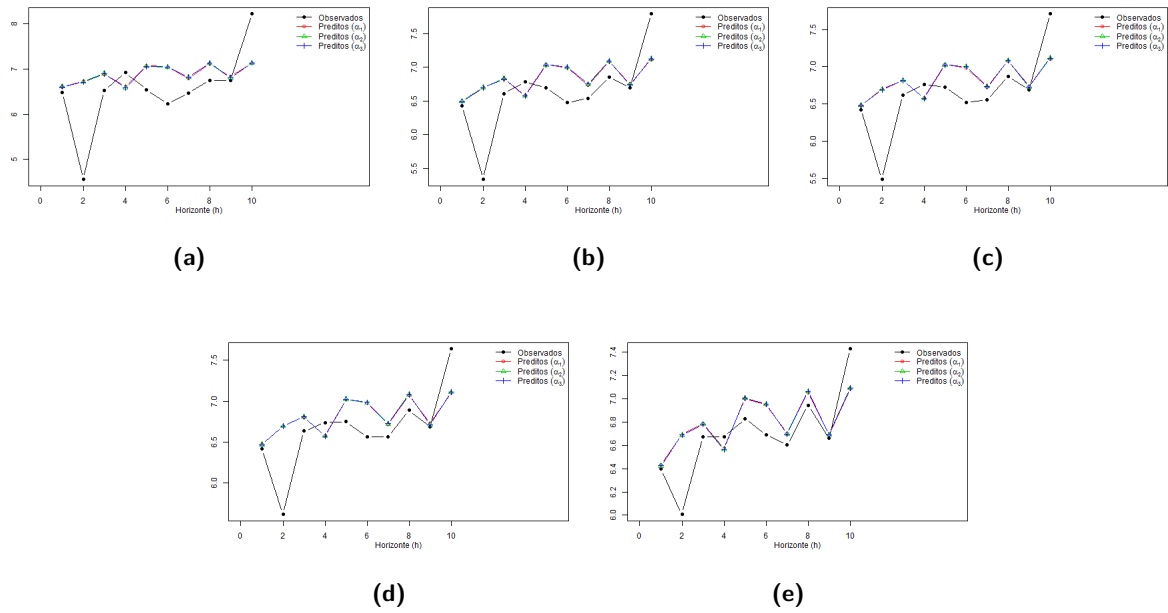


Figura F.169: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

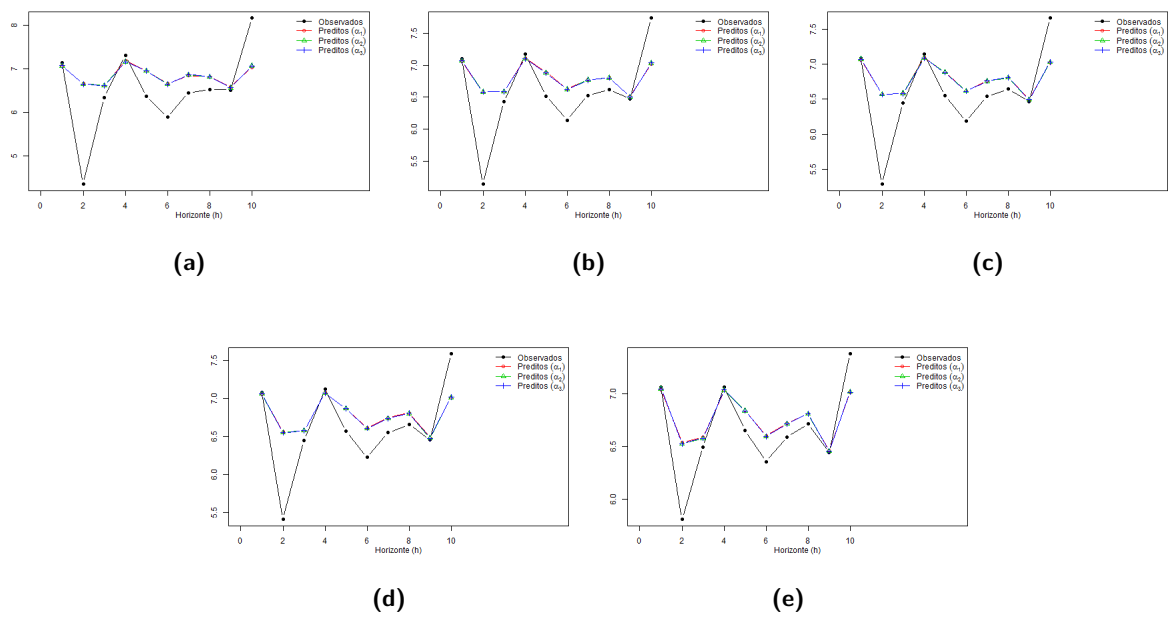


Figura F.170: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

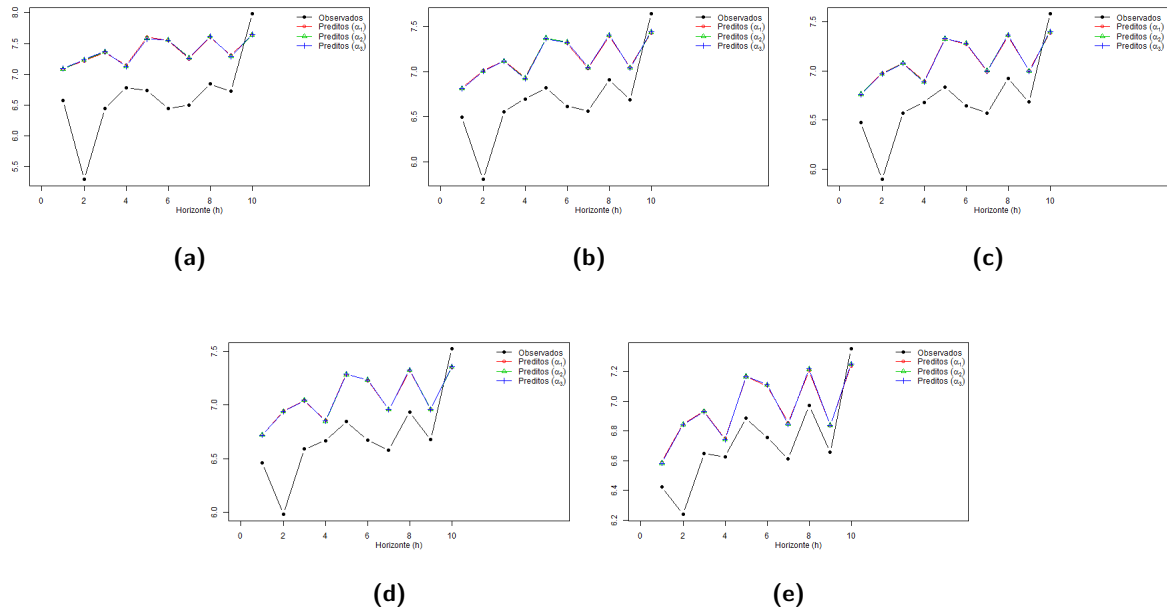


Figura F.171: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

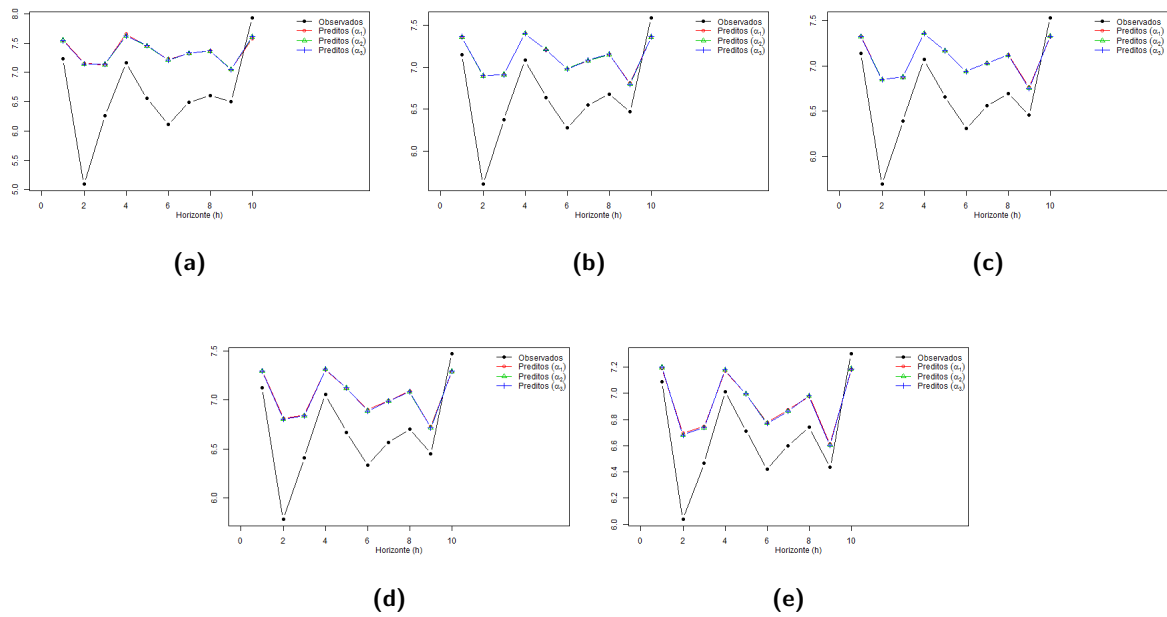


Figura F.172: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

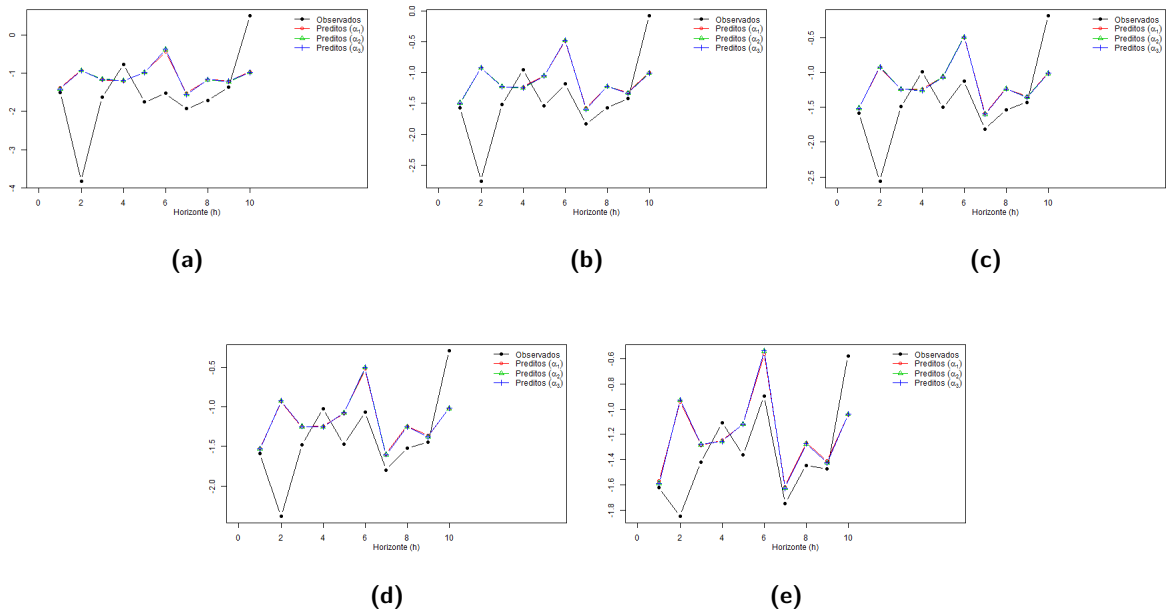


Figura F.173: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

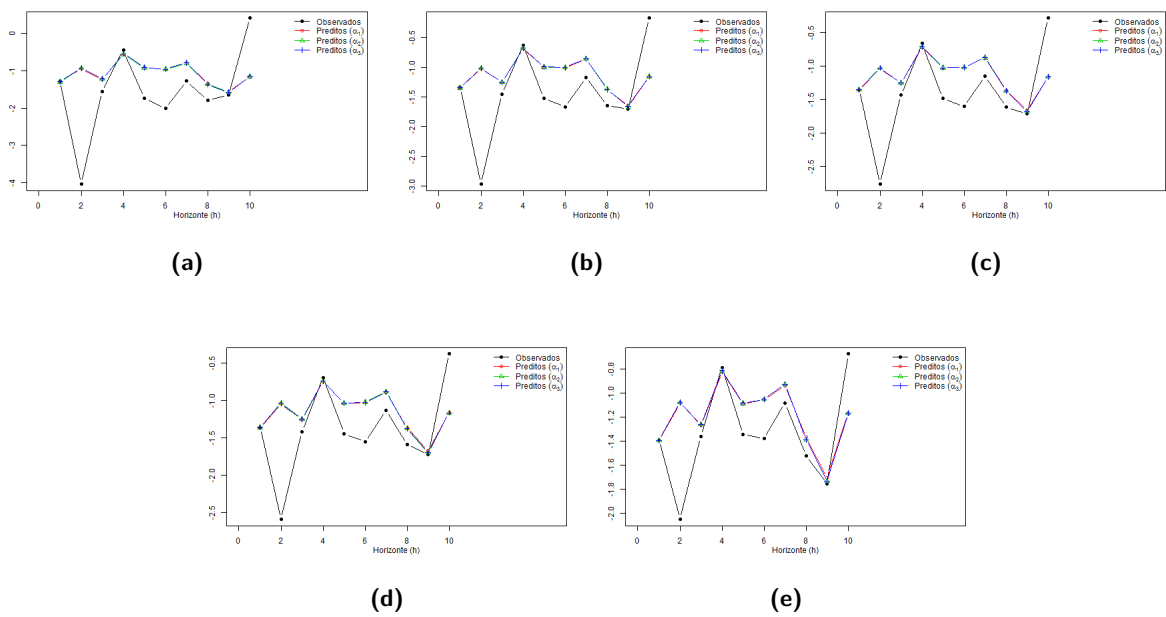


Figura F.174: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

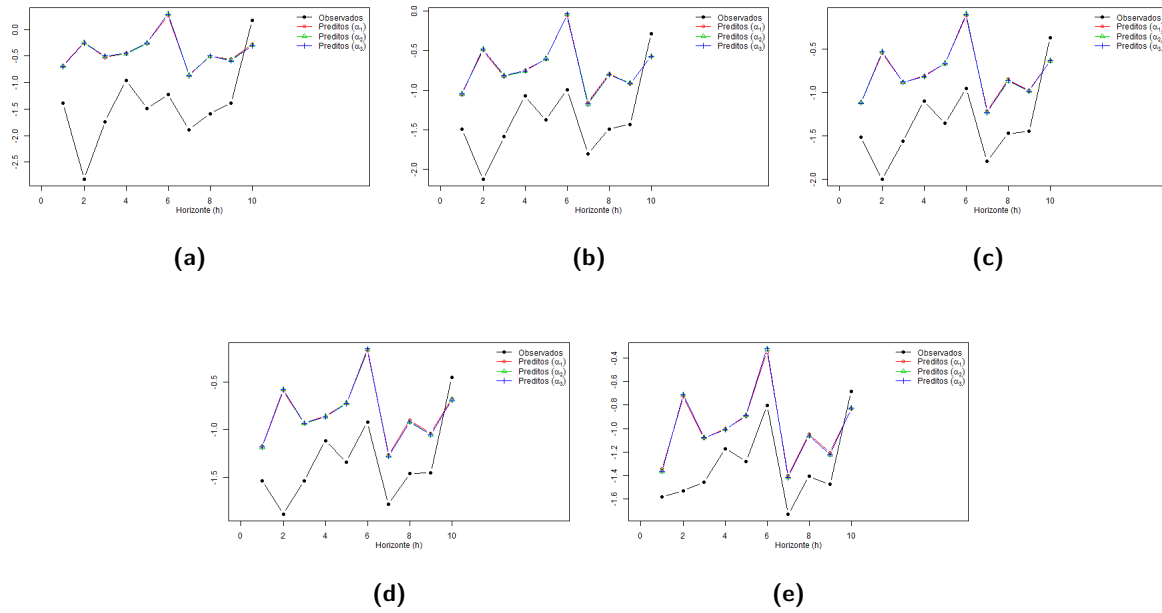


Figura F.175: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

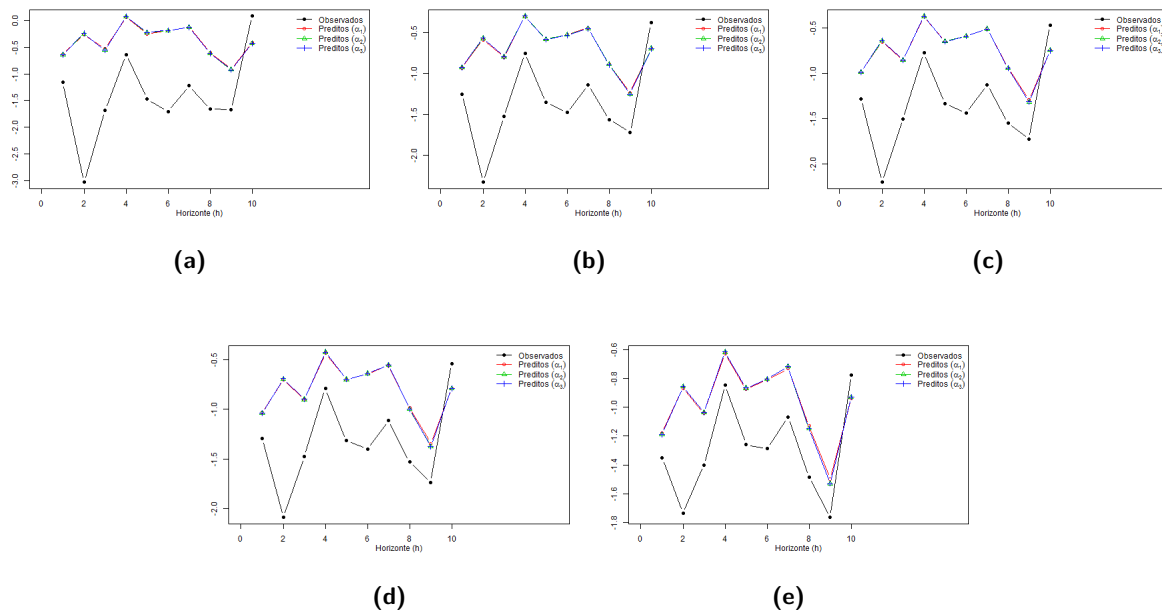


Figura F.176: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 900$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

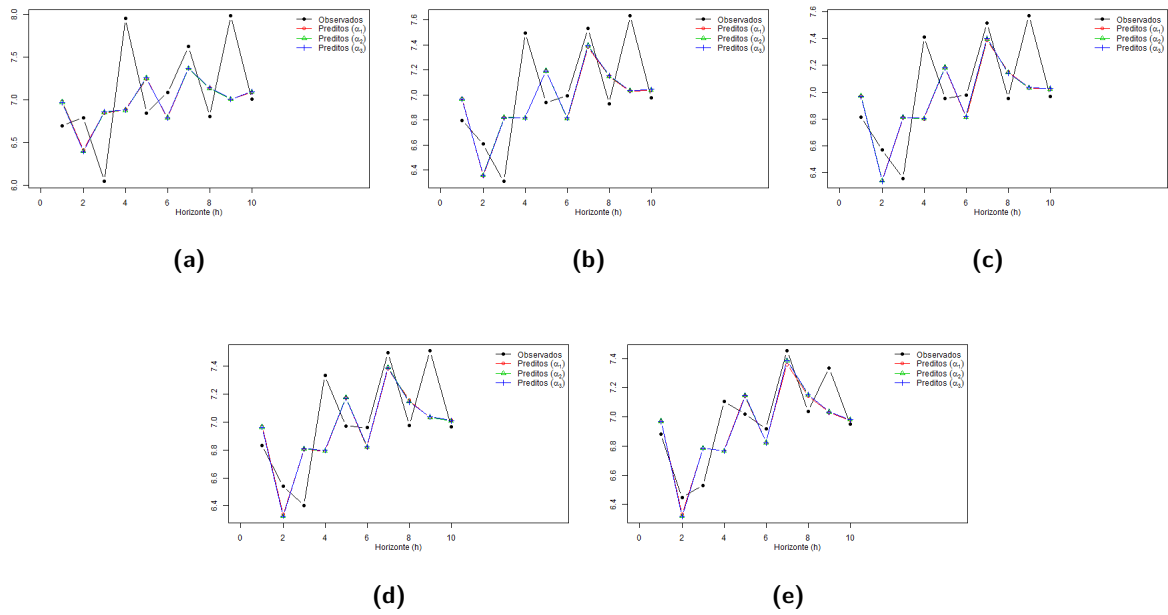


Figura F.177: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

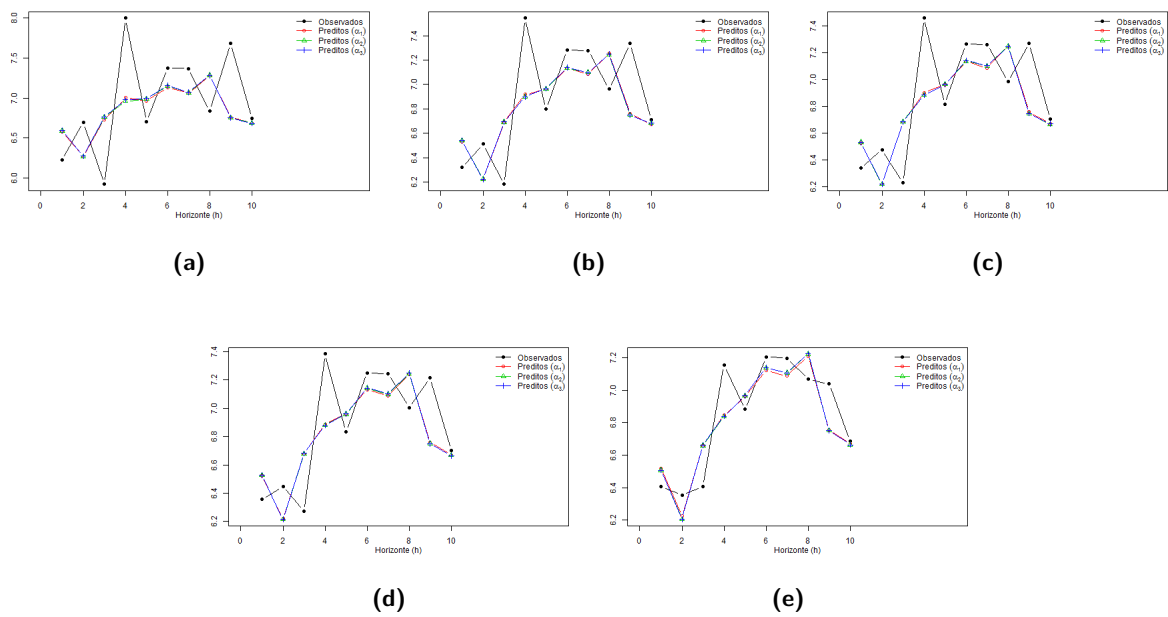


Figura F.178: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

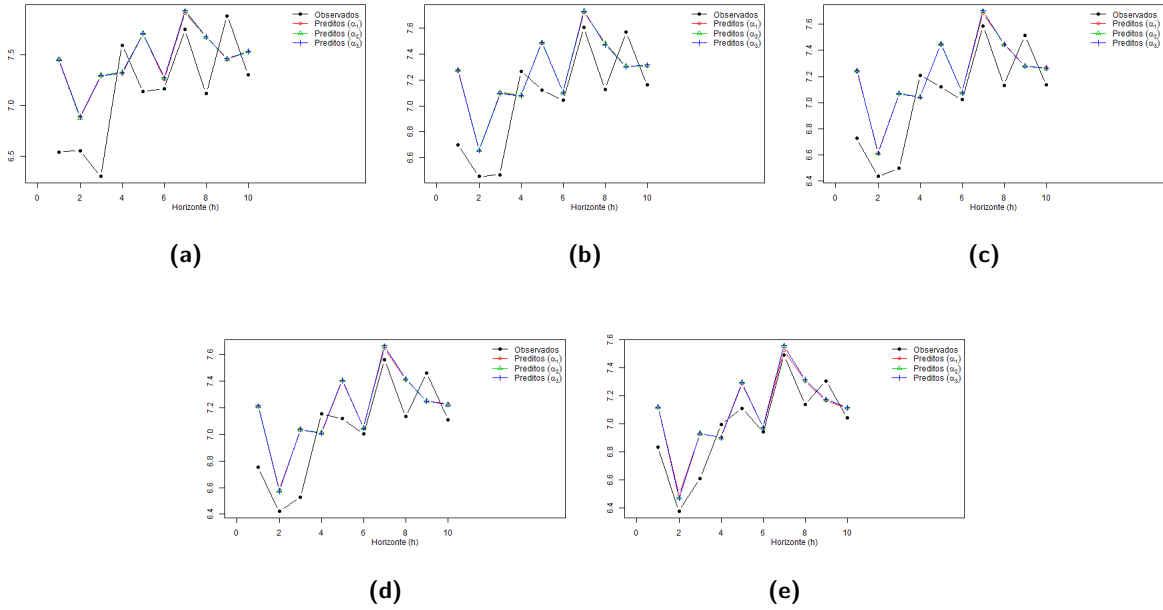


Figura F.179: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

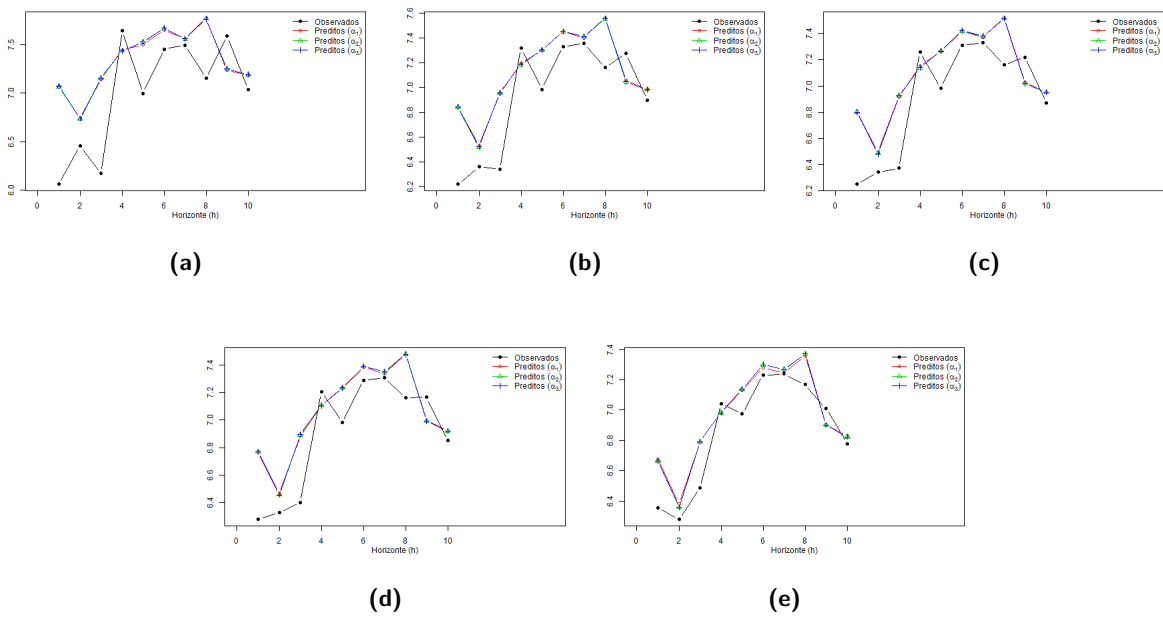


Figura F.180: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

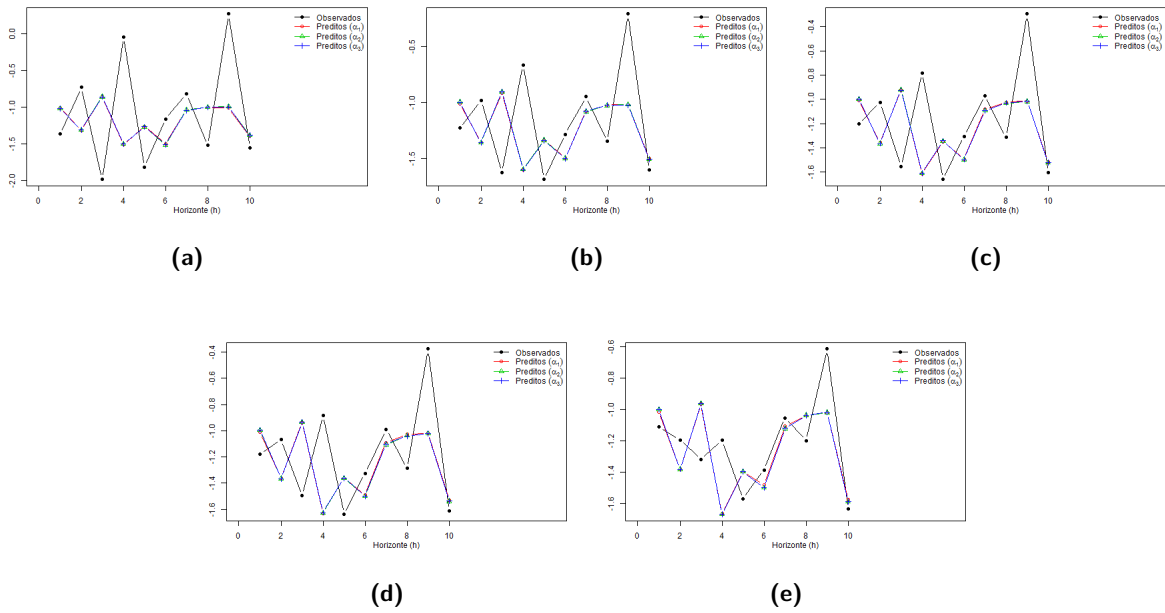


Figura F.181: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

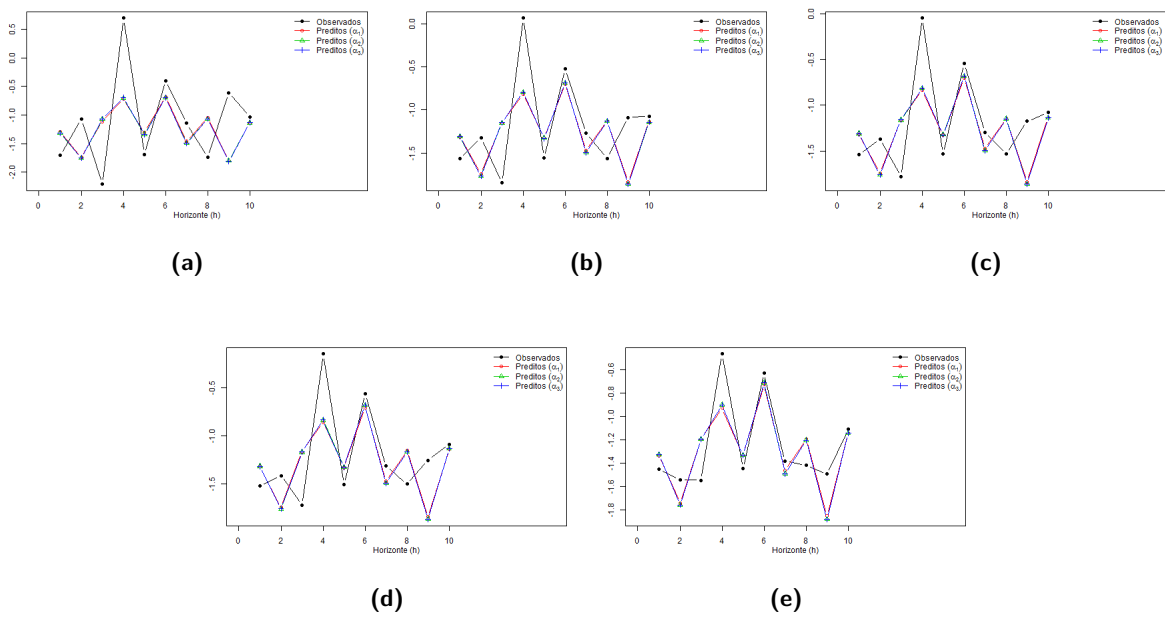


Figura F.182: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.2$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

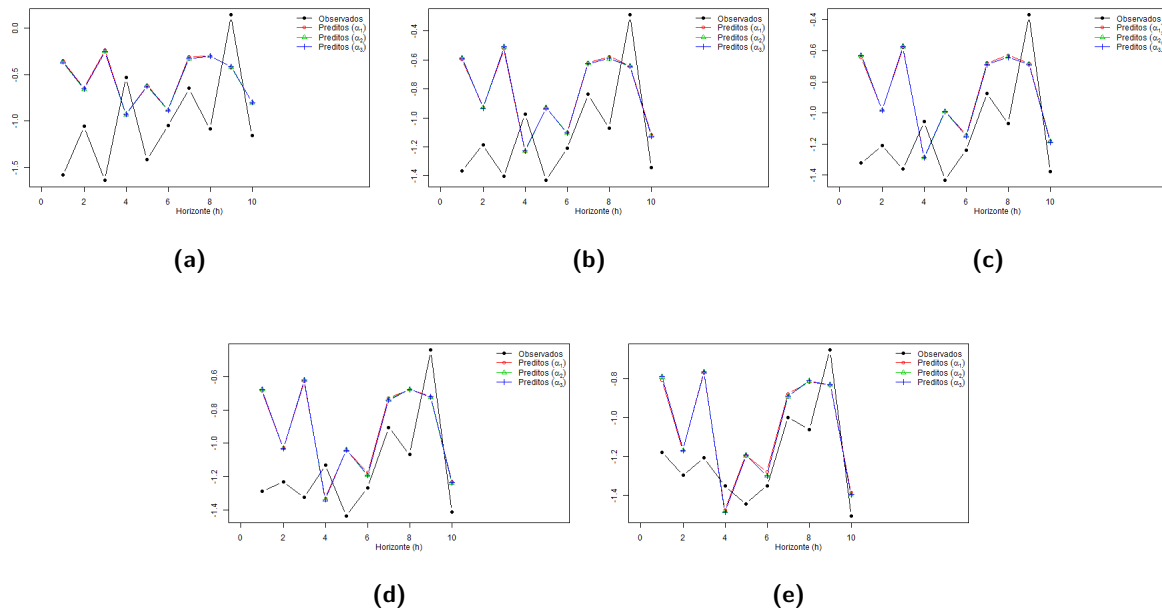


Figura F.183: Valores preditos e observados para o modelo M12, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

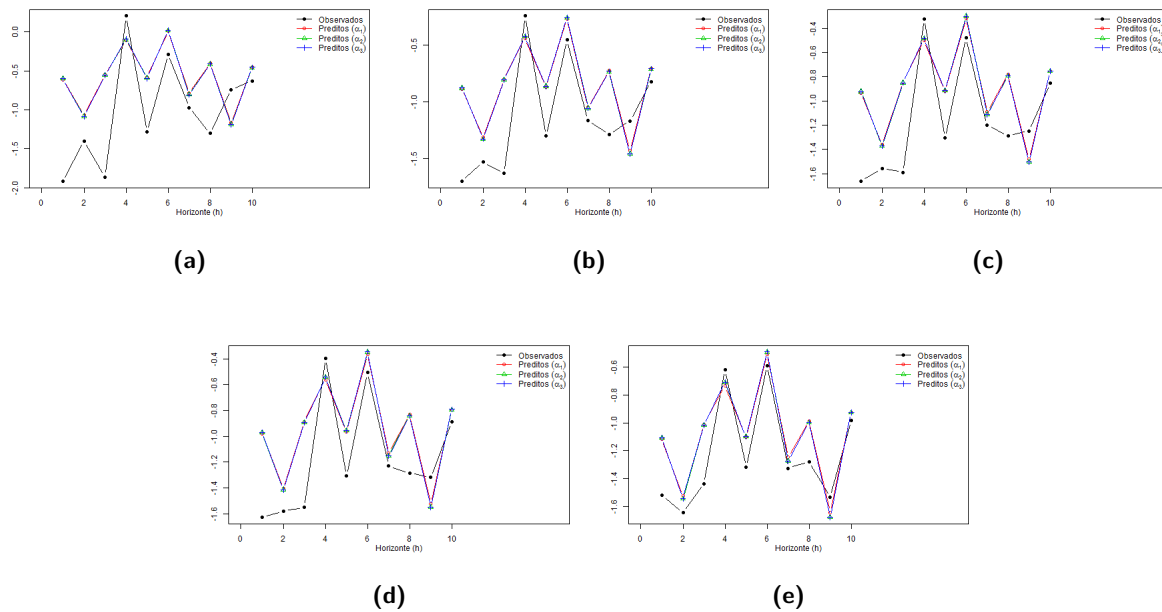


Figura F.184: Valores preditos e observados para o modelo M14, número de replicações $re = 500$, $d = 0.4$, $n_1 = 1000$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, para $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, com SNR (a) -5, (b) -1, (c) 0, (d) 1 e (e) 5.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.185 - F.188 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por M_l , com $l \in \{12, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} = \{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

Apresentamos nas Figuras Figuras F.189 - F.196 alguns dos gráficos auxiliares na descrição dos modelos denotados, respectivamente, por M_l , com $l \in \{12, 14\}$. Utilizou-se $\beta \in \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\} =$

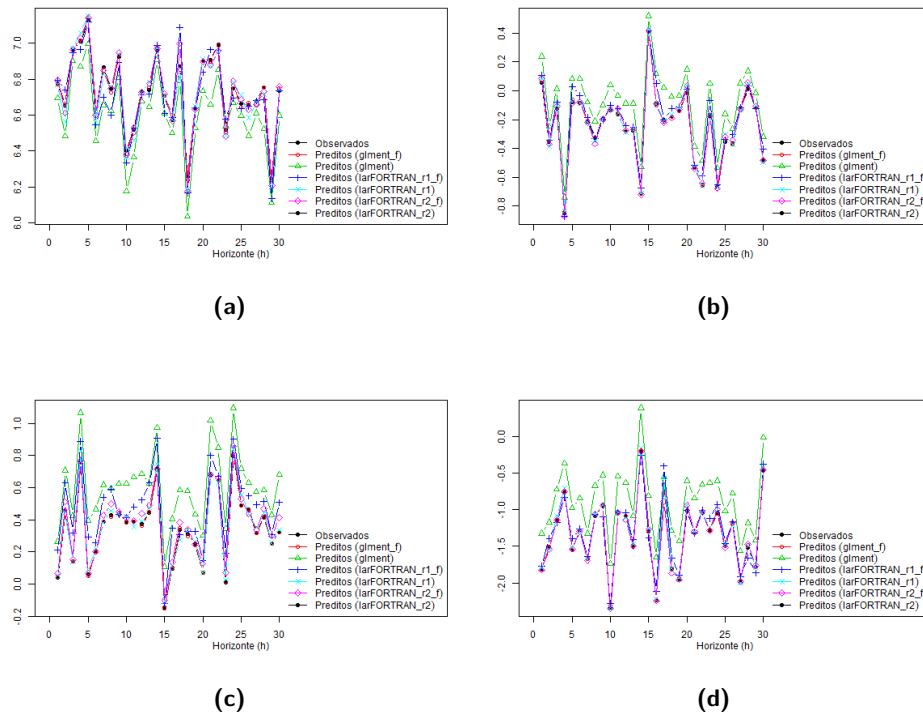


Figura F.185: Valores preditos e observados para o modelo M4; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$; para (a) $\beta^{(1)}$, (b) $\beta^{(2)}$, (c) $\beta^{(3)}$, (d) $\beta^{(4)}$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

$\{(0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)\}$.

Tabelas Auxiliares do Capítulo 4.

As Tabelas F.1 - F.10 correspondem à simulação com os modelos M_l para $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$.

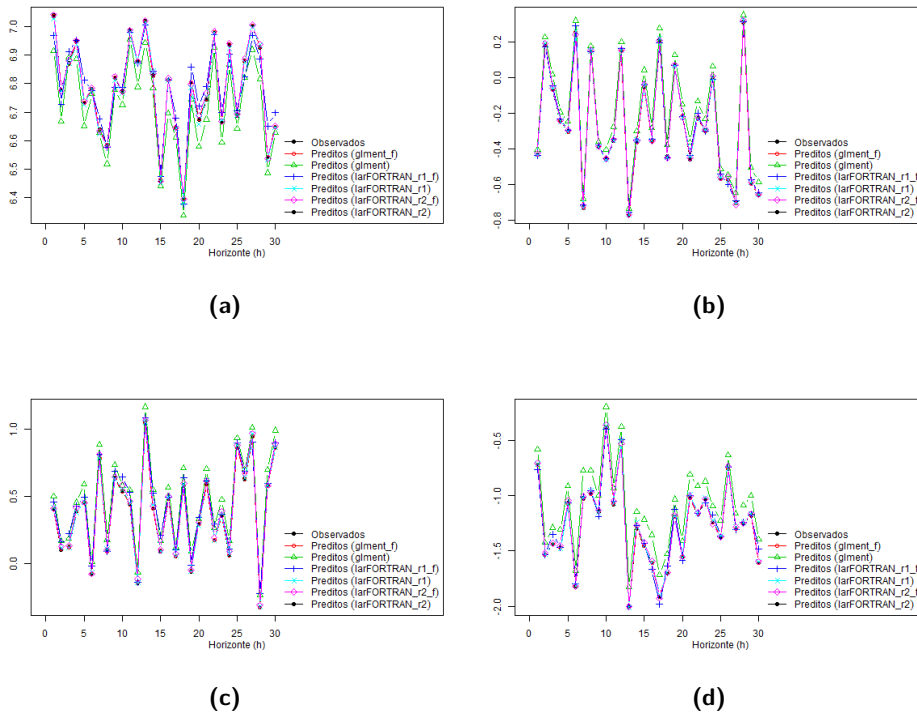


Figura F.186: Valores preditos e observados para o modelo M4; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$ para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$; para (a) $\beta^{(1)}$, (b) $\beta^{(2)}$, (c) $\beta^{(3)}$, (d) $\beta^{(4)}$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

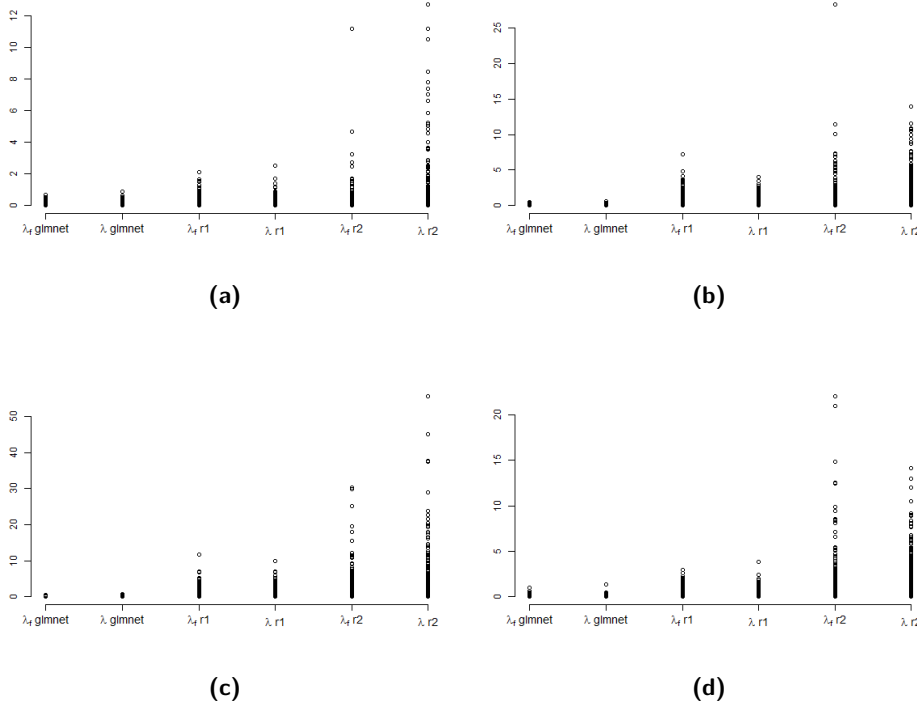


Figura F.187: Valores de λ para o modelo M4, $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$; para (a) $\beta^{(1)}$, (b) $\beta^{(2)}$, (c) $\beta^{(3)}$, (d) $\beta^{(4)}$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

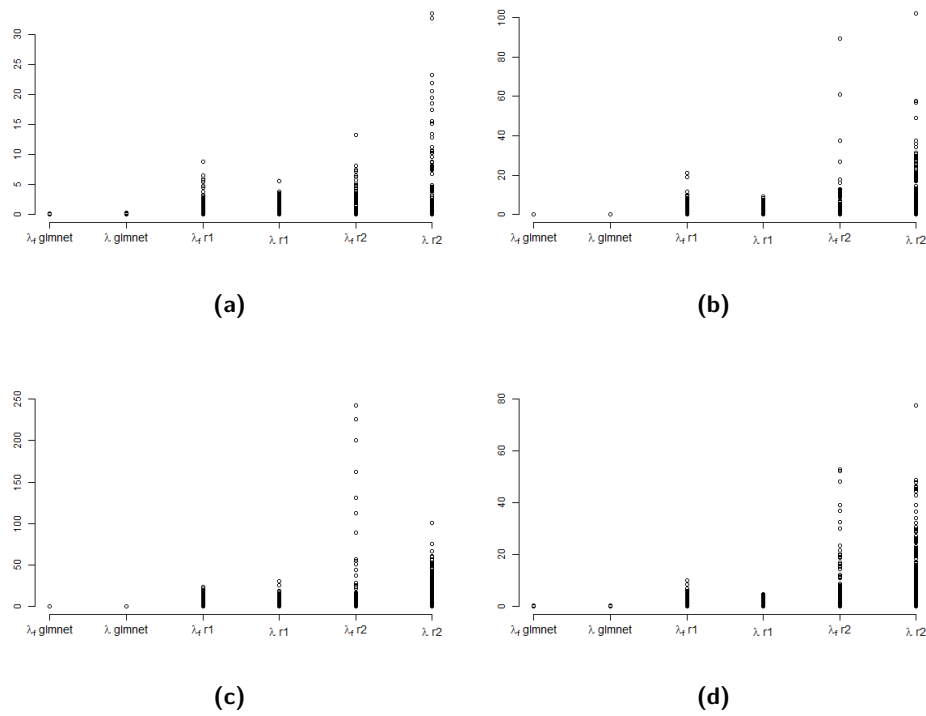


Figura F.188: Valores de λ para o modelo M4, $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$; para (a) $\beta^{(1)}$, (b) $\beta^{(2)}$, (c) $\beta^{(3)}$, (d) $\beta^{(4)}$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

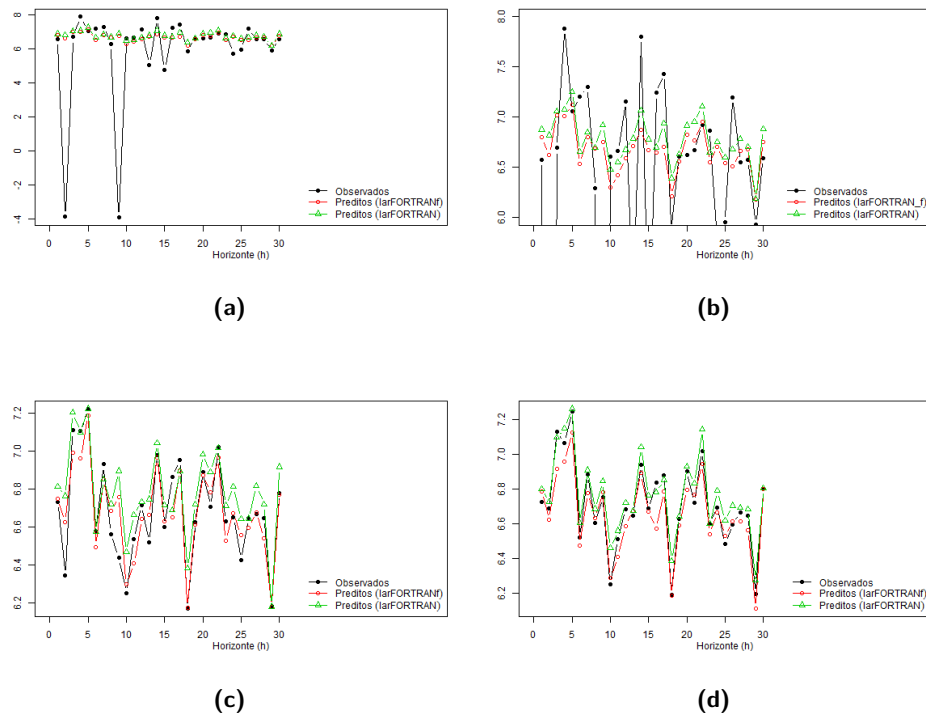


Figura F.189: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, $\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

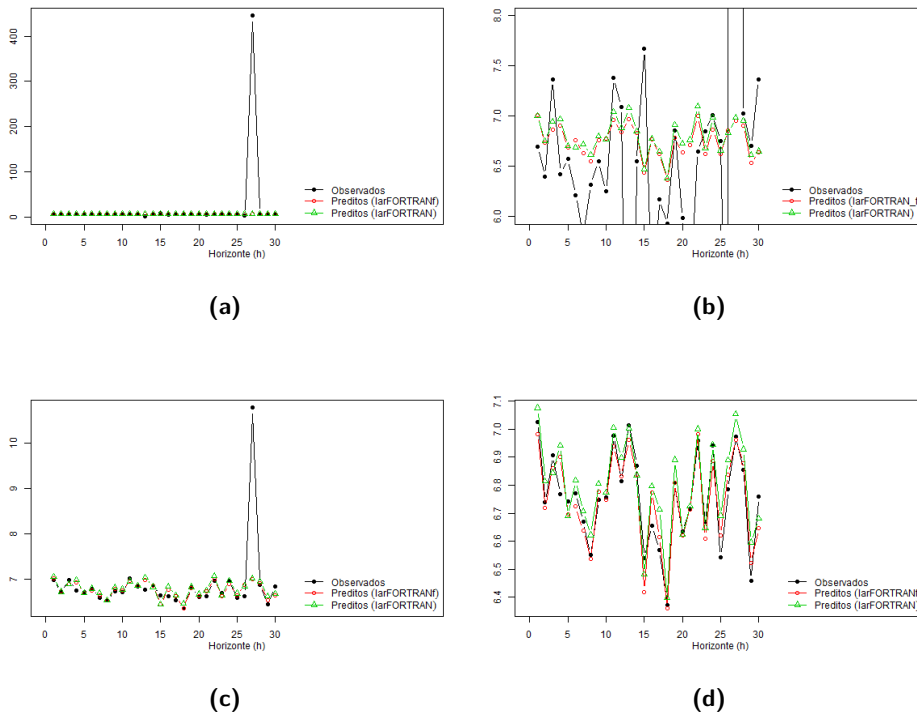


Figura F.190: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$, $\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

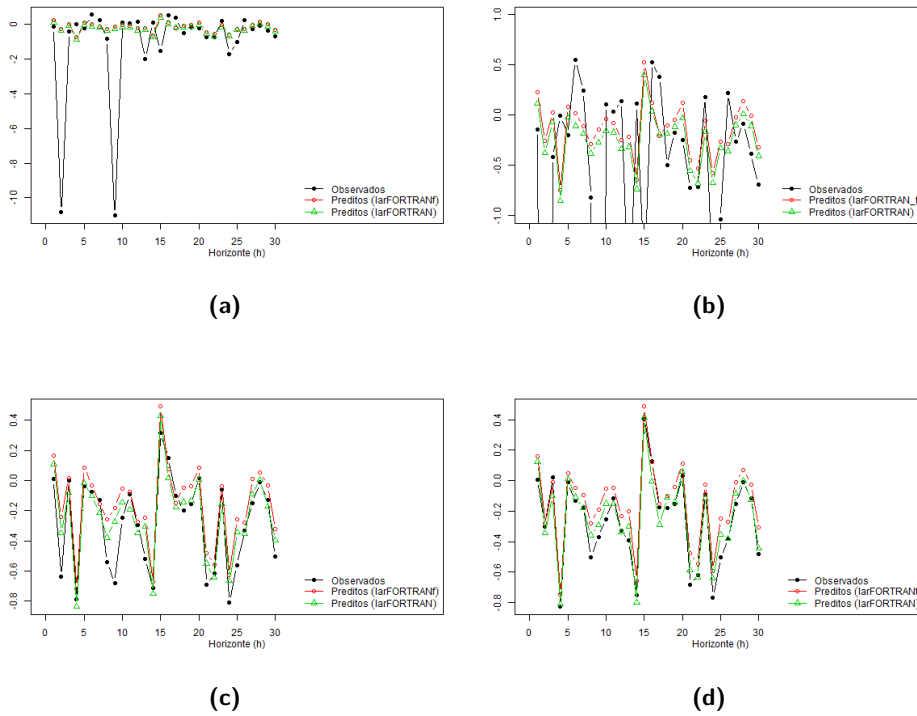


Figura F.191: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, $\beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

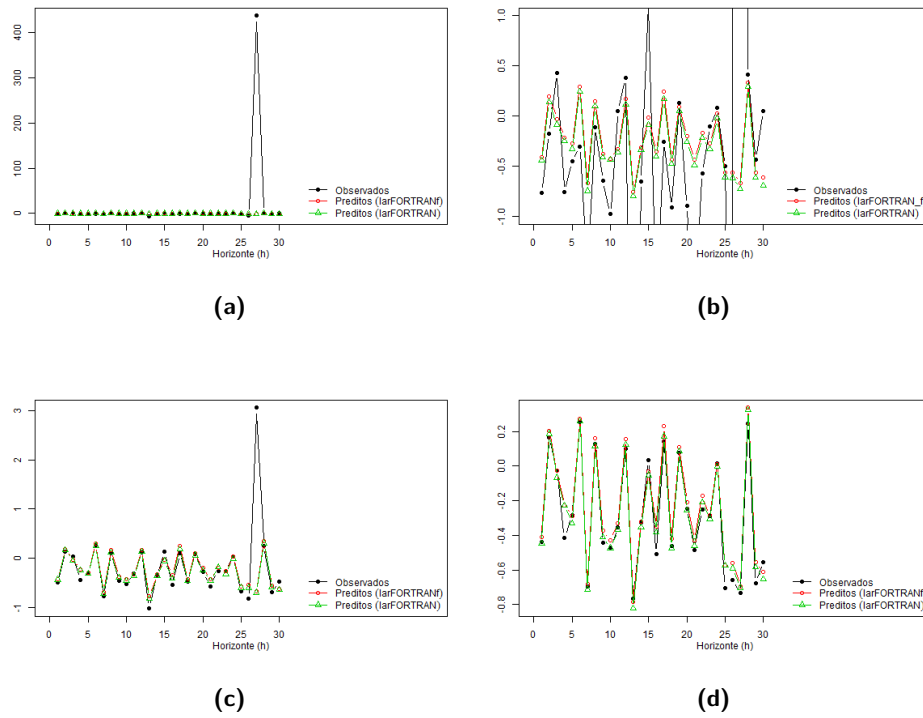


Figura F.192: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$, $\beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

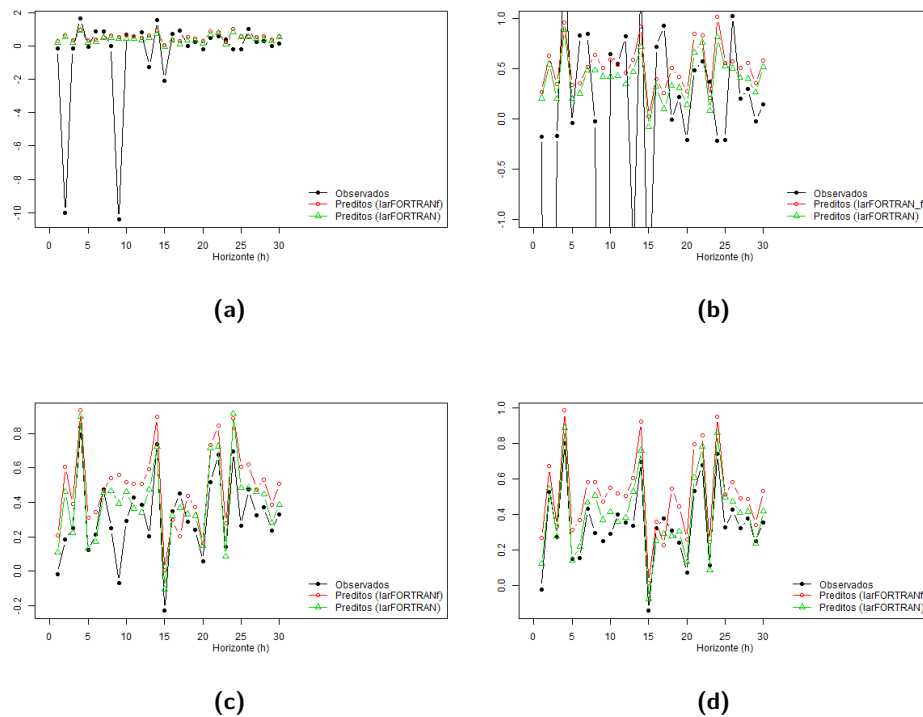


Figura F.193: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, $\beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

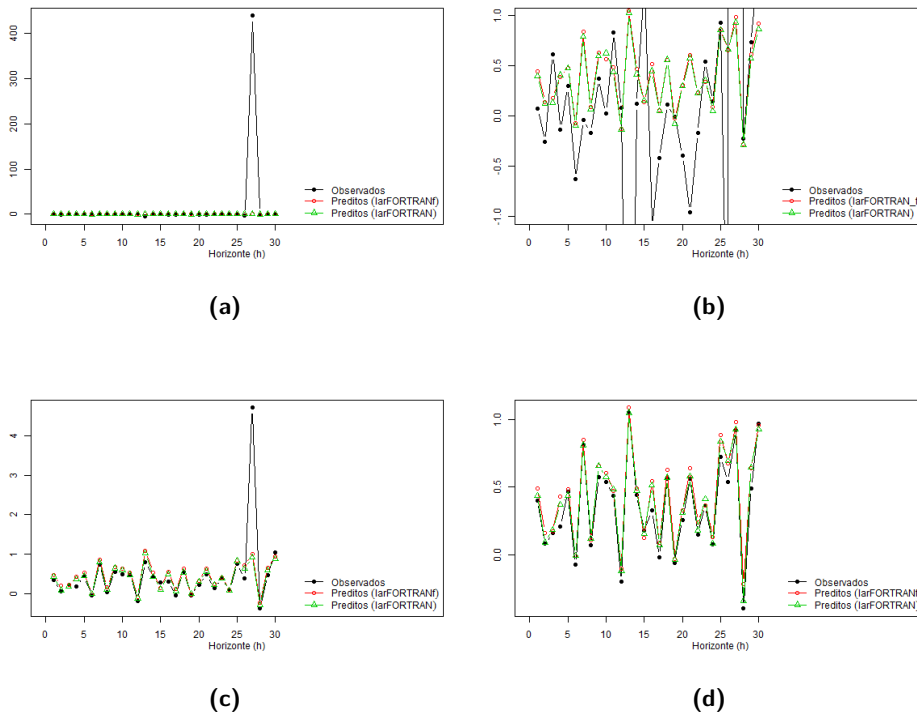


Figura F.194: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$, $\beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

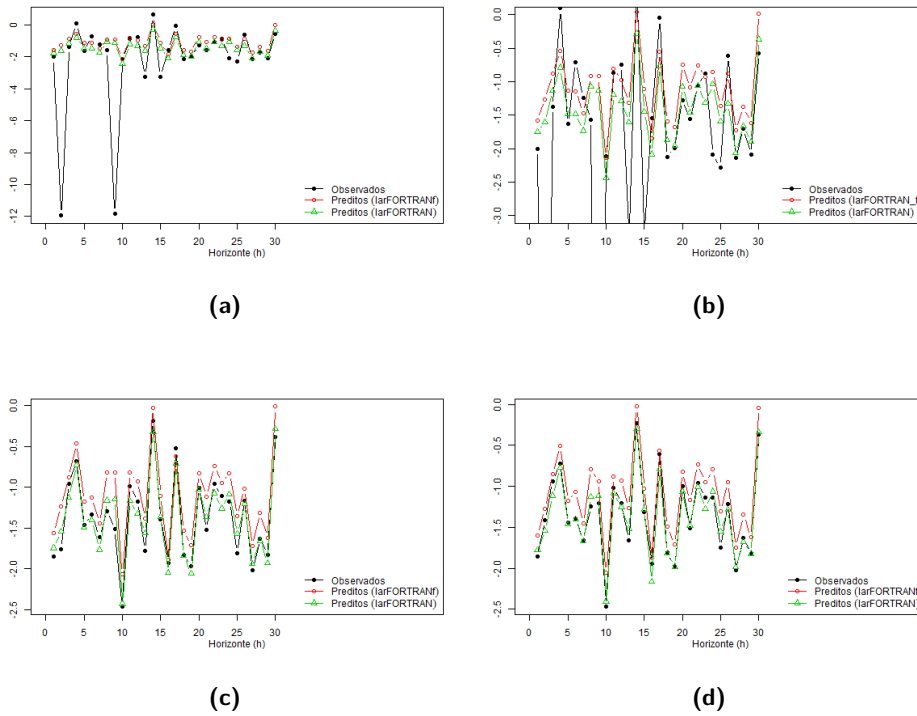


Figura F.195: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 500$, $\beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

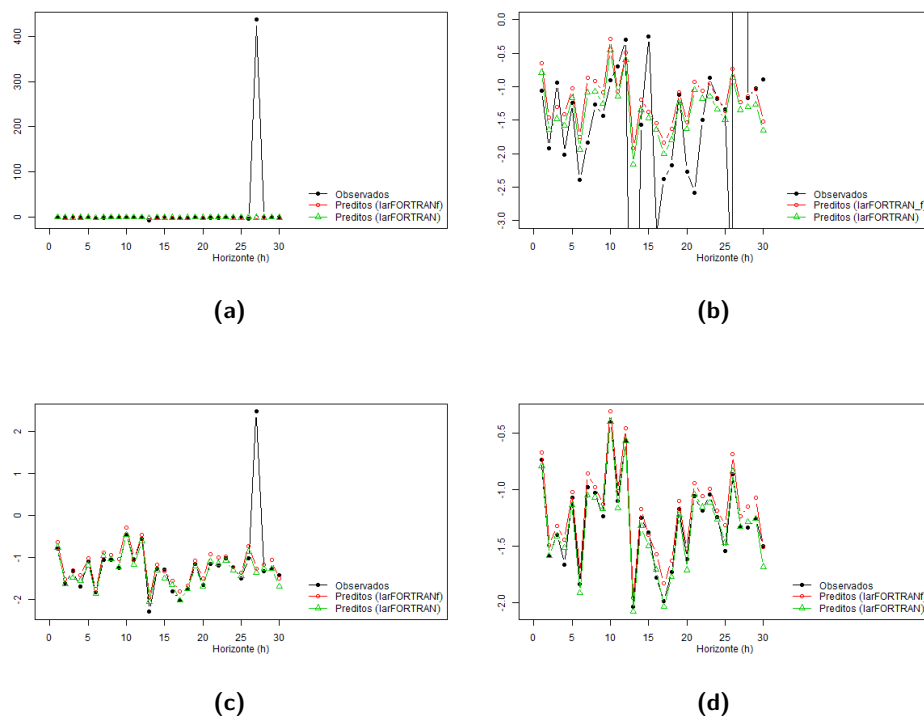


Figura F.196: Valores preditos e observados para o modelo M15; $re = 500$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 = 3000$, $\beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$; (a) $\alpha = 1.2$, (b) *zoom* $\alpha = 1.2$ (c) $\alpha = 1.8$, (d) $\alpha = 2$. f representa $\beta_0 = 0$.

Tabela F.1: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -25$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0515	0.0515	2.0627	1.6386	4.2572	Inf
β_1	0.0605	-0.0395	1.0392	0.7469	1.0815	7.4685
β_2	0.3653	-0.4847	1.1395	0.9815	1.5333	1.1548
β_3	1.2109	-1.2891	1.2964	1.6159	3.3424	0.6464
β_4	0.9502	-1.0498	1.1766	1.3823	2.4866	0.6912
β_5	2.4072	-2.5928	1.8290	2.8147	10.0677	0.5629
β_6	0.8444	-0.6556	1.1085	1.0980	1.6585	0.7320
β_7	0.3452	-0.5048	1.0884	0.9739	1.4393	1.1458
β_8	0.0152	-0.0848	1.1159	0.7748	1.2524	7.7477
M4						
Intercepto	0.2542	0.2542	2.1522	1.7322	4.6967	Inf
β_1	0.0681	-0.0319	1.1584	0.8127	1.3428	8.1268
β_2	0.5024	-0.3476	1.1419	0.9750	1.4247	1.1471
β_3	1.3389	-1.1611	1.2814	1.4881	2.9903	0.5952
β_4	1.0054	-0.9946	1.3046	1.3910	2.6913	0.6955
β_5	2.5803	-2.4197	1.8267	2.6759	9.1917	0.5352
β_6	0.7694	-0.7306	1.1953	1.1661	1.9625	0.7774
β_7	0.4386	-0.4114	1.1878	0.9757	1.5802	1.1479
β_8	0.0055	-0.0945	1.0742	0.7810	1.1628	7.8103
M7						
Intercepto	4.7917	4.7917	4.0444	5.4682	39.3177	Inf
β_1	0.0109	-0.0891	1.1808	0.8249	1.4023	8.2486
β_2	0.4299	-0.4201	1.0701	0.9402	1.3216	1.1061
β_3	1.2214	-1.2786	1.2907	1.5819	3.3007	0.6328
β_4	1.0003	-0.9997	1.1564	1.3037	2.3366	0.6518
β_5	2.4662	-2.5338	1.8191	2.7448	9.7289	0.5490
β_6	0.7563	-0.7437	1.1528	1.1540	1.8820	0.7693
β_7	0.3898	-0.4602	1.0312	0.9100	1.2751	1.0706
β_8	-0.0348	-0.1348	1.1239	0.7893	1.2814	7.8926
M8						
Intercepto	1.6410	1.6410	2.7924	2.6228	10.4904	Inf
β_1	0.0935	-0.0065	1.2202	0.8302	1.4889	8.3018
β_2	0.3930	-0.4570	1.1050	0.9602	1.4298	1.1296
β_3	1.2078	-1.2922	1.2877	1.5931	3.3279	0.6372
β_4	0.9482	-1.0518	1.2190	1.3988	2.5922	0.6994
β_5	2.4624	-2.5376	1.8695	2.7677	9.9347	0.5535
β_6	0.8510	-0.6490	1.2822	1.2177	2.0652	0.8118
β_7	0.4182	-0.4318	1.1271	0.9525	1.4569	1.1206
β_8	0.0477	-0.0523	1.1315	0.8119	1.2829	8.1192
M9						
Intercepto	4.9092	4.9092	4.0160	5.4808	40.2285	Inf
β_1	0.0855	-0.0145	1.0193	0.7248	1.0393	7.2484
β_2	0.4463	-0.4037	1.0259	0.8916	1.2155	1.0490
β_3	1.3558	-1.1442	1.3823	1.5521	3.2200	0.6209
β_4	1.0098	-0.9902	1.2288	1.3500	2.4904	0.6750
β_5	2.4450	-2.5550	1.7647	2.7401	9.6422	0.5480
β_6	0.7140	-0.7860	1.1801	1.2017	2.0104	0.8011
β_7	0.4432	-0.4068	1.0833	0.9405	1.3390	1.1065
β_8	0.0596	-0.0404	1.0605	0.7551	1.1264	7.5512
M10						
Intercepto	1.7269	1.7269	2.9504	2.7451	11.6872	Inf
β_1	0.0340	-0.0660	1.1045	0.7549	1.2243	7.5492
β_2	0.4702	-0.3798	1.0723	0.9021	1.2941	1.0612
β_3	1.1868	-1.3132	1.2693	1.6112	3.3355	0.6445
β_4	1.0318	-0.9682	1.1710	1.2953	2.3087	0.6477
β_5	2.5367	-2.4633	1.8699	2.6943	9.5645	0.5389
β_6	0.8440	-0.6560	1.1542	1.1168	1.7625	0.7445
β_7	0.4680	-0.3820	1.1534	0.9505	1.4762	1.1183
β_8	0.0876	-0.0124	1.1020	0.7761	1.2146	7.7615

Tabela F.2: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0032	0.0032	0.1306	0.1038	0.0171	Inf
β_1	0.0911	-0.0089	0.1177	0.0957	0.0139	0.9566
β_2	0.8022	-0.0478	0.1252	0.1062	0.0180	0.1250
β_3	2.3745	-0.1255	0.1214	0.1463	0.0305	0.0585
β_4	1.8984	-0.1016	0.1162	0.1258	0.0238	0.0629
β_5	4.7388	-0.2612	0.1151	0.2629	0.0815	0.0526
β_6	1.4355	-0.0645	0.1162	0.1070	0.0177	0.0713
β_7	0.7949	-0.0551	0.1208	0.1069	0.0176	0.1257
β_8	0.0919	-0.0081	0.1236	0.0990	0.0153	0.9899
M4						
Intercepto	0.0159	0.0159	0.1363	0.1097	0.0188	Inf
β_1	0.0970	-0.0030	0.1270	0.0983	0.0161	0.9834
β_2	0.8108	-0.0392	0.1285	0.1059	0.0181	0.1246
β_3	2.3770	-0.1230	0.1202	0.1413	0.0296	0.0565
β_4	1.8957	-0.1043	0.1305	0.1347	0.0279	0.0674
β_5	4.7448	-0.2552	0.1228	0.2591	0.0802	0.0518
β_6	1.4250	-0.0750	0.1258	0.1151	0.0215	0.0767
β_7	0.8089	-0.0411	0.1296	0.1050	0.0185	0.1236
β_8	0.0848	-0.0152	0.1202	0.0955	0.0147	0.9554
M7						
Intercepto	0.4799	0.4799	0.2848	0.4921	0.3115	Inf
β_1	0.0899	-0.0101	0.1270	0.1013	0.0162	1.0133
β_2	0.8065	-0.0435	0.1191	0.1032	0.0161	0.1214
β_3	2.3709	-0.1291	0.1206	0.1458	0.0312	0.0583
β_4	1.9058	-0.0942	0.1135	0.1180	0.0217	0.0590
β_5	4.7441	-0.2559	0.1184	0.2574	0.0795	0.0515
β_6	1.4252	-0.0748	0.1202	0.1140	0.0200	0.0760
β_7	0.8040	-0.0460	0.1151	0.0993	0.0154	0.1169
β_8	0.0860	-0.0140	0.1247	0.1002	0.0157	1.0020
M8						
Intercepto	0.1683	0.1683	0.2409	0.2321	0.0863	Inf
β_1	0.1020	0.0020	0.1295	0.1018	0.0168	1.0177
β_2	0.8031	-0.0469	0.1223	0.1056	0.0172	0.1243
β_3	2.3695	-0.1305	0.1209	0.1462	0.0316	0.0585
β_4	1.8941	-0.1059	0.1193	0.1304	0.0254	0.0652
β_5	4.7425	-0.2575	0.1181	0.2584	0.0802	0.0517
β_6	1.4316	-0.0684	0.1245	0.1145	0.0202	0.0763
β_7	0.8083	-0.0417	0.1242	0.1050	0.0172	0.1235
β_8	0.0925	-0.0075	0.1252	0.1014	0.0157	1.0145
M9						
Intercepto	0.4993	0.4993	0.3005	0.5140	0.3395	Inf
β_1	0.0956	-0.0044	0.1180	0.0937	0.0139	0.9369
β_2	0.8090	-0.0410	0.1198	0.0979	0.0160	0.1151
β_3	2.3850	-0.1150	0.1223	0.1375	0.0282	0.0550
β_4	1.9003	-0.0997	0.1311	0.1297	0.0271	0.0649
β_5	4.7387	-0.2613	0.1181	0.2640	0.0822	0.0528
β_6	1.4173	-0.0827	0.1229	0.1189	0.0219	0.0792
β_7	0.8061	-0.0439	0.1217	0.1026	0.0167	0.1207
β_8	0.0966	-0.0034	0.1192	0.0960	0.0142	0.9597
M10						
Intercepto	0.1802	0.1802	0.2410	0.2392	0.0906	Inf
β_1	0.0901	-0.0099	0.1207	0.0943	0.0147	0.9430
β_2	0.8130	-0.0370	0.1167	0.0970	0.0150	0.1141
β_3	2.3645	-0.1355	0.1195	0.1531	0.0326	0.0612
β_4	1.9034	-0.0966	0.1162	0.1220	0.0228	0.0610
β_5	4.7490	-0.2510	0.1179	0.2534	0.0769	0.0507
β_6	1.4358	-0.0642	0.1168	0.1062	0.0178	0.0708
β_7	0.8120	-0.0380	0.1262	0.1038	0.0174	0.1221
β_8	0.1042	0.0042	0.1263	0.0989	0.0160	0.9890

Tabela F.3: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0050	0.0050	0.1897	0.1508	0.0360	Inf
β_1	0.9588	-0.0412	0.1729	0.1452	0.0316	0.1452
β_2	4.8118	-0.1882	0.1823	0.2150	0.0687	0.0430
β_3	-1.9259	0.0741	0.1784	0.1518	0.0373	0.0759
β_4	1.9267	-0.0733	0.1707	0.1479	0.0345	0.0739
β_5	-3.8662	0.1338	0.1768	0.1770	0.0491	0.0442
β_6	4.8349	-0.1651	0.1678	0.1939	0.0554	0.0388
β_7	2.3916	-0.1084	0.1785	0.1691	0.0436	0.0676
β_8	-0.9672	0.0328	0.1821	0.1480	0.0343	0.1480
M4						
Intercepto	0.0230	0.0230	0.1971	0.1588	0.0394	Inf
β_1	0.9656	-0.0344	0.1868	0.1478	0.0361	0.1478
β_2	4.8191	-0.1809	0.1896	0.2122	0.0687	0.0424
β_3	-1.9182	0.0818	0.1757	0.1556	0.0376	0.0778
β_4	1.9219	-0.0781	0.1899	0.1605	0.0422	0.0802
β_5	-3.8504	0.1496	0.1829	0.1901	0.0558	0.0475
β_6	4.8140	-0.1860	0.1829	0.2112	0.0680	0.0422
β_7	2.4096	-0.0904	0.1910	0.1649	0.0447	0.0659
β_8	-0.9787	0.0213	0.1770	0.1395	0.0318	0.1395
M7						
Intercepto	0.1653	0.1653	0.4198	0.3642	0.2036	Inf
β_1	0.9569	-0.0431	0.1874	0.1531	0.0370	0.1531
β_2	4.8176	-0.1824	0.1732	0.2105	0.0632	0.0421
β_3	-1.9311	0.0689	0.1766	0.1529	0.0359	0.0765
β_4	1.9376	-0.0624	0.1681	0.1406	0.0321	0.0703
β_5	-3.8583	0.1417	0.1809	0.1830	0.0528	0.0457
β_6	4.8200	-0.1800	0.1742	0.2064	0.0627	0.0413
β_7	2.4051	-0.0949	0.1691	0.1559	0.0376	0.0623
β_8	-0.9767	0.0233	0.1824	0.1473	0.0338	0.1473
M8						
Intercepto	0.1354	0.1354	0.3516	0.2999	0.1419	Inf
β_1	0.9744	-0.0256	0.1912	0.1519	0.0372	0.1519
β_2	4.8129	-0.1871	0.1784	0.2125	0.0668	0.0425
β_3	-1.9332	0.0668	0.1782	0.1555	0.0362	0.0777
β_4	1.9206	-0.0794	0.1761	0.1534	0.0373	0.0767
β_5	-3.8606	0.1394	0.1822	0.1852	0.0526	0.0463
β_6	4.8299	-0.1701	0.1804	0.2050	0.0615	0.0410
β_7	2.4117	-0.0883	0.1834	0.1626	0.0414	0.0651
β_8	-0.9669	0.0331	0.1855	0.1529	0.0355	0.1529
M9						
Intercepto	0.1947	0.1947	0.4389	0.3769	0.2305	Inf
β_1	0.9642	-0.0358	0.1735	0.1402	0.0314	0.1402
β_2	4.8175	-0.1825	0.1750	0.2109	0.0639	0.0422
β_3	-1.9071	0.0929	0.1805	0.1592	0.0412	0.0796
β_4	1.9279	-0.0721	0.1888	0.1521	0.0408	0.0761
β_5	-3.8614	0.1386	0.1802	0.1812	0.0517	0.0453
β_6	4.8051	-0.1949	0.1791	0.2195	0.0701	0.0439
β_7	2.4065	-0.0935	0.1799	0.1615	0.0411	0.0646
β_8	-0.9605	0.0395	0.1754	0.1446	0.0323	0.1446
M10						
Intercepto	0.1584	0.1584	0.3520	0.3022	0.1490	Inf
β_1	0.9559	-0.0441	0.1784	0.1431	0.0338	0.1431
β_2	4.8232	-0.1768	0.1708	0.2002	0.0604	0.0400
β_3	-1.9406	0.0594	0.1753	0.1452	0.0343	0.0726
β_4	1.9320	-0.0680	0.1696	0.1442	0.0334	0.0721
β_5	-3.8512	0.1488	0.1819	0.1871	0.0552	0.0468
β_6	4.8312	-0.1688	0.1694	0.1971	0.0572	0.0394
β_7	2.4134	-0.0866	0.1855	0.1605	0.0419	0.0642
β_8	-0.9493	0.0507	0.1864	0.1514	0.0373	0.1514

Tabela F.4: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = 0$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0045	0.0045	0.1691	0.1345	0.0286	Inf
β_1	0.9573	-0.0427	0.1538	0.1305	0.0255	0.1305
β_2	4.8020	-0.1980	0.1621	0.2148	0.0655	0.0430
β_3	-1.9219	0.0781	0.1588	0.1397	0.0313	0.0698
β_4	1.9225	-0.0775	0.1518	0.1364	0.0291	0.0682
β_5	-3.8564	0.1436	0.1574	0.1726	0.0454	0.0432
β_6	4.8225	-0.1775	0.1492	0.1947	0.0538	0.0389
β_7	2.3883	-0.1117	0.1588	0.1578	0.0377	0.0631
β_8	-0.9646	0.0354	0.1620	0.1326	0.0275	0.1326
M4						
Intercepto	0.0205	0.0205	0.1757	0.1415	0.0313	Inf
β_1	0.9631	-0.0369	0.1661	0.1328	0.0290	0.1328
β_2	4.8077	-0.1923	0.1683	0.2109	0.0653	0.0422
β_3	-1.9147	0.0853	0.1564	0.1436	0.0317	0.0718
β_4	1.9180	-0.0820	0.1690	0.1472	0.0353	0.0736
β_5	-3.8419	0.1581	0.1626	0.1865	0.0514	0.0466
β_6	4.8032	-0.1968	0.1633	0.2118	0.0654	0.0424
β_7	2.4039	-0.0961	0.1699	0.1538	0.0381	0.0615
β_8	-0.9748	0.0252	0.1574	0.1246	0.0254	0.1246
M7						
Intercepto	0.1747	0.1747	0.3735	0.3326	0.1700	Inf
β_1	0.9556	-0.0444	0.1668	0.1375	0.0298	0.1375
β_2	4.8070	-0.1930	0.1540	0.2093	0.0610	0.0419
β_3	-1.9265	0.0735	0.1571	0.1403	0.0301	0.0702
β_4	1.9321	-0.0679	0.1496	0.1290	0.0270	0.0645
β_5	-3.8494	0.1506	0.1610	0.1776	0.0486	0.0444
β_6	4.8092	-0.1908	0.1549	0.2072	0.0604	0.0414
β_7	2.4002	-0.0998	0.1504	0.1455	0.0326	0.0582
β_8	-0.9731	0.0269	0.1622	0.1317	0.0270	0.1317
M8						
Intercepto	0.1449	0.1449	0.3129	0.2731	0.1189	Inf
β_1	0.9711	-0.0289	0.1701	0.1360	0.0298	0.1360
β_2	4.8029	-0.1971	0.1587	0.2124	0.0640	0.0425
β_3	-1.9283	0.0717	0.1585	0.1422	0.0303	0.0711
β_4	1.9171	-0.0829	0.1566	0.1415	0.0314	0.0707
β_5	-3.8515	0.1485	0.1622	0.1792	0.0484	0.0448
β_6	4.8180	-0.1820	0.1604	0.2044	0.0588	0.0409
β_7	2.4061	-0.0939	0.1631	0.1509	0.0354	0.0603
β_8	-0.9644	0.0356	0.1651	0.1371	0.0285	0.1371
M9						
Intercepto	0.2011	0.2011	0.3912	0.3458	0.1935	Inf
β_1	0.9619	-0.0381	0.1543	0.1258	0.0253	0.1258
β_2	4.8067	-0.1933	0.1558	0.2111	0.0617	0.0422
β_3	-1.9049	0.0951	0.1606	0.1473	0.0348	0.0736
β_4	1.9234	-0.0766	0.1690	0.1404	0.0344	0.0702
β_5	-3.8518	0.1482	0.1599	0.1760	0.0476	0.0440
β_6	4.7955	-0.2045	0.1592	0.2195	0.0671	0.0439
β_7	2.4013	-0.0987	0.1600	0.1504	0.0353	0.0601
β_8	-0.9587	0.0413	0.1561	0.1297	0.0261	0.1297
M10						
Intercepto	0.1658	0.1658	0.3132	0.2775	0.1256	Inf
β_1	0.9546	-0.0454	0.1587	0.1285	0.0272	0.1285
β_2	4.8115	-0.1885	0.1521	0.2028	0.0587	0.0406
β_3	-1.9346	0.0654	0.1559	0.1325	0.0286	0.0663
β_4	1.9269	-0.0731	0.1508	0.1325	0.0281	0.0663
β_5	-3.8426	0.1574	0.1620	0.1821	0.0510	0.0455
β_6	4.8186	-0.1814	0.1508	0.1978	0.0557	0.0396
β_7	2.4074	-0.0926	0.1650	0.1487	0.0358	0.0595
β_8	-0.9487	0.0513	0.1658	0.1363	0.0301	0.1363

Tabela F.5: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0041	0.0041	0.1508	0.1199	0.0227	Inf
β_1	0.9558	-0.0442	0.1368	0.1177	0.0207	0.1177
β_2	4.7927	-0.2073	0.1442	0.2173	0.0638	0.0435
β_3	-1.9180	0.0820	0.1413	0.1295	0.0267	0.0648
β_4	1.9186	-0.0814	0.1350	0.1267	0.0249	0.0633
β_5	-3.8472	0.1528	0.1401	0.1709	0.0430	0.0427
β_6	4.8109	-0.1891	0.1328	0.1983	0.0534	0.0397
β_7	2.3851	-0.1149	0.1413	0.1487	0.0332	0.0595
β_8	-0.9623	0.0377	0.1441	0.1191	0.0222	0.1191
M4						
Intercepto	0.0183	0.0183	0.1566	0.1261	0.0249	Inf
β_1	0.9608	-0.0392	0.1477	0.1198	0.0234	0.1198
β_2	4.7971	-0.2029	0.1493	0.2128	0.0635	0.0426
β_3	-1.9113	0.0887	0.1392	0.1338	0.0272	0.0669
β_4	1.9143	-0.0857	0.1505	0.1364	0.0300	0.0682
β_5	-3.8338	0.1662	0.1446	0.1849	0.0485	0.0462
β_6	4.7931	-0.2069	0.1460	0.2152	0.0641	0.0430
β_7	2.3986	-0.1014	0.1513	0.1452	0.0332	0.0581
β_8	-0.9713	0.0287	0.1400	0.1116	0.0204	0.1116
M7						
Intercepto	0.1835	0.1835	0.3323	0.3063	0.1441	Inf
β_1	0.9543	-0.0457	0.1484	0.1239	0.0241	0.1239
β_2	4.7971	-0.2029	0.1370	0.2114	0.0599	0.0423
β_3	-1.9221	0.0779	0.1398	0.1299	0.0256	0.0650
β_4	1.9271	-0.0729	0.1332	0.1195	0.0231	0.0598
β_5	-3.8410	0.1590	0.1432	0.1757	0.0458	0.0439
β_6	4.7990	-0.2010	0.1378	0.2105	0.0594	0.0421
β_7	2.3956	-0.1044	0.1338	0.1375	0.0288	0.0550
β_8	-0.9698	0.0302	0.1443	0.1181	0.0217	0.1181
M8						
Intercepto	0.1537	0.1537	0.2785	0.2511	0.1012	Inf
β_1	0.9681	-0.0319	0.1513	0.1219	0.0239	0.1219
β_2	4.7935	-0.2065	0.1412	0.2151	0.0626	0.0430
β_3	-1.9238	0.0762	0.1411	0.1311	0.0257	0.0655
β_4	1.9138	-0.0862	0.1394	0.1315	0.0269	0.0658
β_5	-3.8430	0.1570	0.1444	0.1764	0.0455	0.0441
β_6	4.8069	-0.1931	0.1426	0.2063	0.0576	0.0413
β_7	2.4009	-0.0991	0.1451	0.1414	0.0309	0.0566
β_8	-0.9620	0.0380	0.1469	0.1233	0.0230	0.1233
M9						
Intercepto	0.2074	0.2074	0.3485	0.3200	0.1644	Inf
β_1	0.9598	-0.0402	0.1373	0.1132	0.0205	0.1132
β_2	4.7964	-0.2036	0.1389	0.2142	0.0607	0.0428
β_3	-1.9027	0.0973	0.1429	0.1374	0.0299	0.0687
β_4	1.9192	-0.0808	0.1510	0.1308	0.0293	0.0654
β_5	-3.8428	0.1572	0.1421	0.1742	0.0449	0.0435
β_6	4.7865	-0.2135	0.1415	0.2214	0.0656	0.0443
β_7	2.3964	-0.1036	0.1424	0.1417	0.0310	0.0567
β_8	-0.9569	0.0431	0.1389	0.1167	0.0212	0.1167
M10						
Intercepto	0.1729	0.1729	0.2787	0.2577	0.1075	Inf
β_1	0.9533	-0.0467	0.1412	0.1159	0.0221	0.1159
β_2	4.8004	-0.1996	0.1356	0.2077	0.0582	0.0415
β_3	-1.9291	0.0709	0.1388	0.1222	0.0243	0.0611
β_4	1.9223	-0.0777	0.1342	0.1233	0.0240	0.0617
β_5	-3.8345	0.1655	0.1444	0.1805	0.0482	0.0451
β_6	4.8068	-0.1932	0.1343	0.2021	0.0554	0.0404
β_7	2.4017	-0.0983	0.1469	0.1398	0.0312	0.0559
β_8	-0.9480	0.0520	0.1476	0.1230	0.0245	0.1230

Tabela F.6: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = 25$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0007	0.0007	0.0130	0.0103	0.0002	Inf
β_1	0.9473	-0.0527	0.0119	0.0527	0.0029	0.0527
β_2	4.7353	-0.2647	0.0107	0.2647	0.0702	0.0529
β_3	-1.8942	0.1058	0.0124	0.1058	0.0114	0.0529
β_4	1.8938	-0.1062	0.0118	0.1062	0.0114	0.0531
β_5	-3.7884	0.2116	0.0123	0.2116	0.0449	0.0529
β_6	4.7359	-0.2641	0.0100	0.2641	0.0699	0.0528
β_7	2.3669	-0.1331	0.0121	0.1331	0.0179	0.0532
β_8	-0.9471	0.0529	0.0119	0.0529	0.0029	0.0529
M4						
Intercepto	0.0011	0.0011	0.0135	0.0105	0.0002	Inf
β_1	0.9456	-0.0544	0.0128	0.0544	0.0031	0.0544
β_2	4.7289	-0.2711	0.0198	0.2711	0.0739	0.0542
β_3	-1.8906	0.1094	0.0145	0.1094	0.0122	0.0547
β_4	1.8913	-0.1087	0.0141	0.1087	0.0120	0.0544
β_5	-3.7825	0.2175	0.0177	0.2175	0.0476	0.0544
β_6	4.7284	-0.2716	0.0206	0.2716	0.0742	0.0543
β_7	2.3645	-0.1355	0.0153	0.1355	0.0186	0.0542
β_8	-0.9468	0.0532	0.0125	0.0532	0.0030	0.0532
M7						
Intercepto	0.2389	0.2389	0.0277	0.2389	0.0578	Inf
β_1	0.9473	-0.0527	0.0125	0.0527	0.0029	0.0527
β_2	4.7346	-0.2654	0.0106	0.2654	0.0706	0.0531
β_3	-1.8942	0.1058	0.0119	0.1058	0.0113	0.0529
β_4	1.8940	-0.1060	0.0122	0.1060	0.0114	0.0530
β_5	-3.7876	0.2124	0.0119	0.2124	0.0453	0.0531
β_6	4.7346	-0.2654	0.0108	0.2654	0.0705	0.0531
β_7	2.3673	-0.1327	0.0119	0.1327	0.0177	0.0531
β_8	-0.9474	0.0526	0.0117	0.0526	0.0029	0.0526
M8						
Intercepto	0.2107	0.2107	0.0233	0.2107	0.0449	Inf
β_1	0.9480	-0.0520	0.0126	0.0520	0.0029	0.0520
β_2	4.7347	-0.2653	0.0109	0.2653	0.0705	0.0531
β_3	-1.8947	0.1053	0.0119	0.1053	0.0112	0.0527
β_4	1.8938	-0.1062	0.0119	0.1062	0.0114	0.0531
β_5	-3.7887	0.2113	0.0121	0.2113	0.0448	0.0528
β_6	4.7354	-0.2646	0.0103	0.2646	0.0701	0.0529
β_7	2.3677	-0.1323	0.0120	0.1323	0.0176	0.0529
β_8	-0.9470	0.0530	0.0127	0.0530	0.0030	0.0530
M9						
Intercepto	0.2438	0.2438	0.0305	0.2438	0.0604	Inf
β_1	0.9461	-0.0539	0.0126	0.0539	0.0031	0.0539
β_2	4.7307	-0.2693	0.0168	0.2693	0.0728	0.0539
β_3	-1.8910	0.1090	0.0142	0.1090	0.0121	0.0545
β_4	1.8919	-0.1081	0.0131	0.1081	0.0118	0.0540
β_5	-3.7847	0.2153	0.0157	0.2153	0.0466	0.0538
β_6	4.7300	-0.2700	0.0167	0.2700	0.0732	0.0540
β_7	2.3655	-0.1345	0.0141	0.1345	0.0183	0.0538
β_8	-0.9462	0.0538	0.0126	0.0538	0.0031	0.0538
M10						
Intercepto	0.2162	0.2162	0.0257	0.2162	0.0474	Inf
β_1	0.9462	-0.0538	0.0123	0.0538	0.0030	0.0538
β_2	4.7297	-0.2703	0.0175	0.2703	0.0733	0.0541
β_3	-1.8925	0.1075	0.0131	0.1075	0.0117	0.0538
β_4	1.8919	-0.1081	0.0129	0.1081	0.0118	0.0540
β_5	-3.7836	0.2164	0.0166	0.2164	0.0471	0.0541
β_6	4.7301	-0.2699	0.0170	0.2699	0.0731	0.0540
β_7	2.3649	-0.1351	0.0140	0.1351	0.0184	0.0540
β_8	-0.9451	0.0549	0.0133	0.0549	0.0032	0.0549

Tabela F.7: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = -1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0033	0.0033	0.1304	0.1037	0.0170	Inf
β_1	0.0874	-0.0126	0.1154	0.0962	0.0135	0.9618
β_2	0.8240	-0.0260	0.1307	0.1060	0.0178	0.1247
β_3	2.4753	-0.0247	0.1279	0.1025	0.0170	0.0410
β_4	1.9753	-0.0247	0.1230	0.0990	0.0157	0.0495
β_5	4.9586	-0.0414	0.1275	0.1059	0.0180	0.0212
β_6	1.4889	-0.0111	0.1217	0.0985	0.0149	0.0656
β_7	0.8163	-0.0337	0.1278	0.1064	0.0175	0.1252
β_8	0.0887	-0.0113	0.1219	0.0998	0.0150	0.9985
M4						
Intercepto	0.0159	0.0159	0.1359	0.1094	0.0187	Inf
β_1	0.0931	-0.0069	0.1234	0.0975	0.0153	0.9754
β_2	0.8331	-0.0169	0.1357	0.1078	0.0187	0.1268
β_3	2.4778	-0.0222	0.1270	0.1005	0.0166	0.0402
β_4	1.9721	-0.0279	0.1344	0.1068	0.0189	0.0534
β_5	4.9656	-0.0344	0.1313	0.1047	0.0184	0.0209
β_6	1.4771	-0.0229	0.1315	0.1065	0.0178	0.0710
β_7	0.8303	-0.0197	0.1366	0.1059	0.0191	0.1246
β_8	0.0791	-0.0209	0.1172	0.0959	0.0142	0.9588
M7						
Intercepto	0.1101	0.1101	0.3022	0.2594	0.1034	Inf
β_1	0.0863	-0.0137	0.1252	0.1014	0.0159	1.0142
β_2	0.8287	-0.0213	0.1255	0.1029	0.0162	0.1210
β_3	2.4717	-0.0283	0.1264	0.1026	0.0168	0.0410
β_4	1.9832	-0.0168	0.1201	0.0955	0.0147	0.0477
β_5	4.9643	-0.0357	0.1295	0.1082	0.0180	0.0216
β_6	1.4785	-0.0215	0.1258	0.1023	0.0163	0.0682
β_7	0.8261	-0.0239	0.1208	0.0991	0.0152	0.1166
β_8	0.0829	-0.0171	0.1213	0.0986	0.0150	0.9863
M8						
Intercepto	0.0491	0.0491	0.2501	0.2050	0.0650	Inf
β_1	0.0975	-0.0025	0.1286	0.1021	0.0165	1.0211
β_2	0.8257	-0.0243	0.1284	0.1052	0.0171	0.1238
β_3	2.4708	-0.0292	0.1276	0.1048	0.0171	0.0419
β_4	1.9714	-0.0286	0.1252	0.1013	0.0165	0.0506
β_5	4.9636	-0.0364	0.1311	0.1098	0.0185	0.0220
β_6	1.4860	-0.0140	0.1307	0.1033	0.0173	0.0689
β_7	0.8312	-0.0188	0.1315	0.1062	0.0177	0.1250
β_8	0.0900	-0.0100	0.1229	0.1007	0.0152	1.0073
M9						
Intercepto	0.1278	0.1278	0.3232	0.2718	0.1208	Inf
β_1	0.0920	-0.0080	0.1153	0.0930	0.0134	0.9305
β_2	0.8315	-0.0185	0.1264	0.0983	0.0163	0.1157
β_3	2.4872	-0.0128	0.1291	0.1006	0.0168	0.0402
β_4	1.9777	-0.0223	0.1371	0.1015	0.0193	0.0507
β_5	4.9600	-0.0400	0.1300	0.1072	0.0185	0.0214
β_6	1.4708	-0.0292	0.1302	0.1067	0.0178	0.0712
β_7	0.8286	-0.0214	0.1279	0.1022	0.0168	0.1202
β_8	0.0935	-0.0065	0.1168	0.0948	0.0137	0.9484
M10						
Intercepto	0.0629	0.0629	0.2504	0.2016	0.0666	Inf
β_1	0.0860	-0.0140	0.1180	0.0940	0.0141	0.9398
β_2	0.8353	-0.0147	0.1233	0.0983	0.0154	0.1157
β_3	2.4637	-0.0363	0.1252	0.1058	0.0170	0.0423
β_4	1.9798	-0.0202	0.1223	0.0978	0.0154	0.0489
β_5	4.9671	-0.0329	0.1286	0.1077	0.0176	0.0215
β_6	1.4889	-0.0111	0.1232	0.0973	0.0153	0.0649
β_7	0.8334	-0.0166	0.1324	0.1050	0.0178	0.1235
β_8	0.1002	0.0002	0.1239	0.0973	0.0153	0.9728

Tabela F.8: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 0$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0029	0.0029	0.1162	0.0924	0.0135	Inf
β_1	0.0877	-0.0123	0.1033	0.0862	0.0108	0.8618
β_2	0.8271	-0.0229	0.1164	0.0943	0.0141	0.1110
β_3	2.4781	-0.0219	0.1138	0.0910	0.0134	0.0364
β_4	1.9781	-0.0219	0.1095	0.0879	0.0125	0.0440
β_5	4.9629	-0.0371	0.1136	0.0943	0.0143	0.0189
β_6	1.4903	-0.0097	0.1086	0.0879	0.0119	0.0586
β_7	0.8203	-0.0297	0.1138	0.0948	0.0138	0.1115
β_8	0.0889	-0.0111	0.1091	0.0895	0.0120	0.8955
M4						
Intercepto	0.0142	0.0142	0.1211	0.0975	0.0149	Inf
β_1	0.0926	-0.0074	0.1105	0.0876	0.0123	0.8756
β_2	0.8348	-0.0152	0.1220	0.0961	0.0151	0.1130
β_3	2.4801	-0.0199	0.1127	0.0894	0.0131	0.0358
β_4	1.9751	-0.0249	0.1196	0.0950	0.0149	0.0475
β_5	4.9689	-0.0311	0.1168	0.0933	0.0146	0.0187
β_6	1.4796	-0.0204	0.1172	0.0949	0.0142	0.0633
β_7	0.8326	-0.0174	0.1215	0.0942	0.0151	0.1109
β_8	0.0804	-0.0196	0.1049	0.0861	0.0114	0.8612
M7						
Intercepto	0.1000	0.1000	0.2692	0.2318	0.0824	Inf
β_1	0.0869	-0.0131	0.1118	0.0909	0.0127	0.9086
β_2	0.8310	-0.0190	0.1116	0.0915	0.0128	0.1076
β_3	2.4746	-0.0254	0.1126	0.0914	0.0133	0.0366
β_4	1.9849	-0.0151	0.1072	0.0853	0.0117	0.0427
β_5	4.9676	-0.0324	0.1152	0.0965	0.0143	0.0193
β_6	1.4808	-0.0192	0.1120	0.0911	0.0129	0.0607
β_7	0.8287	-0.0213	0.1077	0.0883	0.0120	0.1039
β_8	0.0836	-0.0164	0.1084	0.0884	0.0120	0.8843
M8						
Intercepto	0.0452	0.0452	0.2218	0.1824	0.0513	Inf
β_1	0.0969	-0.0031	0.1148	0.0914	0.0132	0.9142
β_2	0.8282	-0.0218	0.1143	0.0938	0.0135	0.1103
β_3	2.4735	-0.0265	0.1134	0.0933	0.0136	0.0373
β_4	1.9742	-0.0258	0.1115	0.0903	0.0131	0.0452
β_5	4.9667	-0.0333	0.1165	0.0979	0.0147	0.0196
β_6	1.4873	-0.0127	0.1166	0.0922	0.0138	0.0614
β_7	0.8331	-0.0169	0.1170	0.0945	0.0140	0.1112
β_8	0.0898	-0.0102	0.1101	0.0906	0.0122	0.9061
M9						
Intercepto	0.1158	0.1158	0.2865	0.2421	0.0955	Inf
β_1	0.0918	-0.0082	0.1033	0.0835	0.0107	0.8354
β_2	0.8335	-0.0165	0.1126	0.0876	0.0130	0.1030
β_3	2.4884	-0.0116	0.1147	0.0892	0.0133	0.0357
β_4	1.9800	-0.0200	0.1221	0.0904	0.0153	0.0452
β_5	4.9638	-0.0362	0.1156	0.0957	0.0147	0.0191
β_6	1.4739	-0.0261	0.1159	0.0951	0.0141	0.0634
β_7	0.8309	-0.0191	0.1139	0.0910	0.0133	0.1070
β_8	0.0932	-0.0068	0.1046	0.0850	0.0110	0.8495
M10						
Intercepto	0.0580	0.0580	0.2238	0.1806	0.0535	Inf
β_1	0.0863	-0.0137	0.1056	0.0845	0.0113	0.8447
β_2	0.8367	-0.0133	0.1099	0.0877	0.0123	0.1032
β_3	2.4672	-0.0328	0.1117	0.0944	0.0136	0.0378
β_4	1.9816	-0.0184	0.1087	0.0868	0.0121	0.0434
β_5	4.9697	-0.0303	0.1147	0.0963	0.0141	0.0193
β_6	1.4898	-0.0102	0.1099	0.0870	0.0122	0.0580
β_7	0.8350	-0.0150	0.1180	0.0936	0.0142	0.1102
β_8	0.0992	-0.0008	0.1105	0.0871	0.0122	0.8715

Tabela F.9: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 5, 1.5, 0.85, 0.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0026	0.0026	0.1036	0.0824	0.0107	Inf
β_1	0.0882	-0.0118	0.0924	0.0772	0.0087	0.7719
β_2	0.8296	-0.0204	0.1040	0.0842	0.0112	0.0991
β_3	2.4803	-0.0197	0.1015	0.0814	0.0107	0.0325
β_4	1.9804	-0.0196	0.0974	0.0783	0.0099	0.0391
β_5	4.9664	-0.0336	0.1008	0.0839	0.0113	0.0168
β_6	1.4913	-0.0087	0.0969	0.0782	0.0095	0.0521
β_7	0.8235	-0.0265	0.1011	0.0843	0.0109	0.0991
β_8	0.0893	-0.0107	0.0974	0.0800	0.0096	0.8003
M4						
Intercepto	0.0126	0.0126	0.1079	0.0869	0.0118	Inf
β_1	0.0924	-0.0076	0.0989	0.0786	0.0098	0.7862
β_2	0.8361	-0.0139	0.1098	0.0857	0.0123	0.1008
β_3	2.4820	-0.0180	0.1005	0.0798	0.0104	0.0319
β_4	1.9776	-0.0224	0.1068	0.0847	0.0119	0.0423
β_5	4.9717	-0.0283	0.1038	0.0833	0.0116	0.0167
β_6	1.4817	-0.0183	0.1043	0.0844	0.0112	0.0563
β_7	0.8344	-0.0156	0.1081	0.0839	0.0119	0.0988
β_8	0.0814	-0.0186	0.0937	0.0771	0.0091	0.7714
M7						
Intercepto	0.0923	0.0923	0.2397	0.2076	0.0660	Inf
β_1	0.0874	-0.0126	0.0998	0.0813	0.0101	0.8127
β_2	0.8329	-0.0171	0.0995	0.0817	0.0102	0.0961
β_3	2.4768	-0.0232	0.1001	0.0814	0.0105	0.0326
β_4	1.9861	-0.0139	0.0955	0.0760	0.0093	0.0380
β_5	4.9702	-0.0298	0.1025	0.0863	0.0114	0.0173
β_6	1.4825	-0.0175	0.0998	0.0813	0.0103	0.0542
β_7	0.8308	-0.0192	0.0960	0.0787	0.0096	0.0926
β_8	0.0841	-0.0159	0.0972	0.0797	0.0097	0.7971
M8						
Intercepto	0.0420	0.0420	0.1969	0.1623	0.0405	Inf
β_1	0.0964	-0.0036	0.1025	0.0818	0.0105	0.8178
β_2	0.8303	-0.0197	0.1018	0.0835	0.0108	0.0982
β_3	2.4759	-0.0241	0.1006	0.0829	0.0107	0.0332
β_4	1.9765	-0.0235	0.0992	0.0805	0.0104	0.0402
β_5	4.9694	-0.0306	0.1037	0.0874	0.0117	0.0175
β_6	1.4883	-0.0117	0.1040	0.0822	0.0110	0.0548
β_7	0.8347	-0.0153	0.1040	0.0841	0.0111	0.0989
β_8	0.0895	-0.0105	0.0988	0.0816	0.0099	0.8156
M9						
Intercepto	0.1058	0.1058	0.2544	0.2166	0.0759	Inf
β_1	0.0918	-0.0082	0.0923	0.0748	0.0086	0.7485
β_2	0.8351	-0.0149	0.1004	0.0780	0.0103	0.0918
β_3	2.4892	-0.0108	0.1023	0.0797	0.0106	0.0319
β_4	1.9818	-0.0182	0.1088	0.0805	0.0122	0.0402
β_5	4.9669	-0.0331	0.1027	0.0853	0.0116	0.0171
β_6	1.4765	-0.0235	0.1032	0.0847	0.0112	0.0565
β_7	0.8328	-0.0172	0.1015	0.0810	0.0106	0.0953
β_8	0.0928	-0.0072	0.0938	0.0763	0.0088	0.7633
M10						
Intercepto	0.0531	0.0531	0.1991	0.1610	0.0424	Inf
β_1	0.0867	-0.0133	0.0945	0.0758	0.0091	0.7585
β_2	0.8380	-0.0120	0.0977	0.0780	0.0097	0.0917
β_3	2.4704	-0.0296	0.0994	0.0839	0.0107	0.0336
β_4	1.9834	-0.0166	0.0967	0.0772	0.0096	0.0386
β_5	4.9724	-0.0276	0.1020	0.0859	0.0112	0.0172
β_6	1.4907	-0.0093	0.0979	0.0775	0.0097	0.0517
β_7	0.8365	-0.0135	0.1053	0.0836	0.0113	0.0983
β_8	0.0983	-0.0017	0.0989	0.0782	0.0098	0.7819

Tabela F.10: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 2.5, -1)$, $\alpha^* = 1$ e $SNR = 25$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.0003	0.0003	0.0096	0.0076	0.0001	Inf
β_1	0.9785	-0.0215	0.0090	0.0215	0.0005	0.0215
β_2	4.9785	-0.0215	0.0096	0.0216	0.0006	0.0043
β_3	-1.9787	0.0213	0.0094	0.0214	0.0005	0.0107
β_4	1.9788	-0.0212	0.0089	0.0213	0.0005	0.0106
β_5	-3.9794	0.0206	0.0093	0.0207	0.0005	0.0052
β_6	4.9796	-0.0204	0.0089	0.0205	0.0005	0.0041
β_7	2.4779	-0.0221	0.0094	0.0222	0.0006	0.0089
β_8	-0.9790	0.0210	0.0095	0.0211	0.0005	0.0211
M4						
Intercepto	0.0012	0.0012	0.0099	0.0080	0.0001	Inf
β_1	0.9783	-0.0217	0.0108	0.0217	0.0006	0.0217
β_2	4.9785	-0.0215	0.0114	0.0215	0.0006	0.0043
β_3	-1.9778	0.0222	0.0109	0.0223	0.0006	0.0112
β_4	1.9779	-0.0221	0.0113	0.0223	0.0006	0.0111
β_5	-3.9786	0.0214	0.0096	0.0216	0.0006	0.0054
β_6	4.9782	-0.0218	0.0112	0.0219	0.0006	0.0044
β_7	2.4783	-0.0217	0.0112	0.0218	0.0006	0.0087
β_8	-0.9791	0.0209	0.0107	0.0210	0.0006	0.0210
M7						
Intercepto	0.0213	0.0213	0.0218	0.0253	0.0009	Inf
β_1	0.9785	-0.0215	0.0097	0.0217	0.0006	0.0217
β_2	4.9788	-0.0212	0.0092	0.0213	0.0005	0.0043
β_3	-1.9790	0.0210	0.0092	0.0210	0.0005	0.0105
β_4	1.9793	-0.0207	0.0089	0.0208	0.0005	0.0104
β_5	-3.9790	0.0210	0.0094	0.0211	0.0005	0.0053
β_6	4.9789	-0.0211	0.0092	0.0212	0.0005	0.0042
β_7	2.4786	-0.0214	0.0088	0.0215	0.0005	0.0086
β_8	-0.9795	0.0205	0.0096	0.0207	0.0005	0.0207
M8						
Intercepto	0.0207	0.0207	0.0183	0.0226	0.0008	Inf
β_1	0.9793	-0.0207	0.0100	0.0208	0.0005	0.0208
β_2	4.9785	-0.0215	0.0094	0.0215	0.0006	0.0043
β_3	-1.9791	0.0209	0.0094	0.0210	0.0005	0.0105
β_4	1.9784	-0.0216	0.0092	0.0216	0.0006	0.0108
β_5	-3.9791	0.0209	0.0095	0.0209	0.0005	0.0052
β_6	4.9794	-0.0206	0.0096	0.0208	0.0005	0.0042
β_7	2.4789	-0.0211	0.0096	0.0211	0.0005	0.0085
β_8	-0.9789	0.0211	0.0098	0.0212	0.0005	0.0212
M9						
Intercepto	0.0230	0.0230	0.0242	0.0269	0.0011	Inf
β_1	0.9781	-0.0219	0.0122	0.0220	0.0006	0.0220
β_2	4.9786	-0.0214	0.0095	0.0216	0.0005	0.0043
β_3	-1.9770	0.0230	0.0133	0.0232	0.0007	0.0116
β_4	1.9784	-0.0216	0.0119	0.0221	0.0006	0.0110
β_5	-3.9787	0.0213	0.0123	0.0213	0.0006	0.0053
β_6	4.9778	-0.0222	0.0125	0.0223	0.0006	0.0045
β_7	2.4783	-0.0217	0.0129	0.0218	0.0006	0.0087
β_8	-0.9782	0.0218	0.0120	0.0218	0.0006	0.0218
M10						
Intercepto	0.0219	0.0219	0.0184	0.0238	0.0008	Inf
β_1	0.9783	-0.0217	0.0093	0.0219	0.0006	0.0219
β_2	4.9790	-0.0210	0.0091	0.0211	0.0005	0.0042
β_3	-1.9793	0.0207	0.0093	0.0208	0.0005	0.0104
β_4	1.9787	-0.0213	0.0090	0.0214	0.0005	0.0107
β_5	-3.9782	0.0218	0.0096	0.0219	0.0006	0.0055
β_6	4.9794	-0.0206	0.0090	0.0206	0.0005	0.0041
β_7	2.4786	-0.0214	0.0097	0.0215	0.0006	0.0086
β_8	-0.9776	0.0224	0.0100	0.0226	0.0006	0.0226

As abelas F.11 - F.30 correspondem à simulação com os modelos M_l para $l \in \{1, \dots, 6, 9\}$.

Tabela F.11: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -5$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.5187	0.5187	1.0479	0.9508	1.3671	Inf
β_1	0.0967	-0.0033	0.2950	0.2367	0.0870	2.3671
β_2	0.8164	-0.0336	0.3113	0.2471	0.0981	0.2907
β_3	2.3865	-0.1135	0.3139	0.2614	0.1114	0.1046
β_4	1.9204	-0.0796	0.3039	0.2556	0.0987	0.1278
β_5	0.0761	-0.0239	0.3001	0.2391	0.0907	2.3909
β_6	1.4450	-0.0550	0.3031	0.2486	0.0949	0.1657
$\beta_{7,2}$	5.8073	-0.1927	0.6302	0.5291	0.4343	0.0882
$\beta_{8,2}$	3.7685	-0.4315	1.0778	0.9550	1.3480	0.2274
$\beta_{8,3}$	1.6671	-0.4329	1.1233	0.9935	1.4492	0.4731
M2						
Intercepto	0.5111	0.5111	1.0641	0.9448	1.3934	Inf
β_1	0.0854	-0.0146	0.2975	0.2414	0.0887	2.4141
β_2	0.8244	-0.0256	0.3291	0.2658	0.1090	0.3127
β_3	2.4094	-0.0906	0.3185	0.2647	0.1097	0.1059
β_4	1.9473	-0.0527	0.2968	0.2375	0.0909	0.1187
β_5	0.0854	-0.0146	0.3176	0.2573	0.1011	2.5731
β_6	1.4774	-0.0226	0.3015	0.2406	0.0914	0.1604
$\beta_{7,2}$	5.7786	-0.2214	0.6487	0.5435	0.4697	0.0906
$\beta_{8,2}$	3.7666	-0.4334	1.0069	0.8925	1.2017	0.2125
$\beta_{8,3}$	1.7200	-0.3800	1.0337	0.8888	1.2129	0.4232
M3						
Intercepto	0.5454	0.5454	1.0235	0.9127	1.3451	Inf
β_1	0.1034	0.0034	0.3025	0.2375	0.0915	2.3749
β_2	0.8370	-0.0130	0.3036	0.2397	0.0923	0.2820
β_3	2.4106	-0.0894	0.3148	0.2641	0.1071	0.1056
β_4	1.9370	-0.0630	0.3007	0.2443	0.0944	0.1222
β_5	0.1066	0.0066	0.3018	0.2379	0.0911	2.3792
β_6	1.4781	-0.0219	0.3020	0.2423	0.0917	0.1615
$\beta_{7,2}$	5.7920	-0.2080	0.6575	0.5483	0.4756	0.0914
$\beta_{8,2}$	3.7349	-0.4651	1.0063	0.8846	1.2289	0.2106
$\beta_{8,3}$	1.6241	-0.4759	1.0835	0.9504	1.4004	0.4526
M4						
Intercepto	0.5799	0.5799	1.0577	0.9743	1.4550	Inf
β_1	0.0844	-0.0156	0.3137	0.2457	0.0986	2.4567
β_2	0.8325	-0.0175	0.3036	0.2412	0.0925	0.2838
β_3	2.3966	-0.1034	0.3167	0.2655	0.1110	0.1062
β_4	1.9612	-0.0388	0.3389	0.2630	0.1164	0.1315
β_5	0.1155	0.0155	0.2997	0.2373	0.0900	2.3732
β_6	1.4362	-0.0638	0.3358	0.2716	0.1168	0.1810
$\beta_{7,2}$	5.7908	-0.2092	0.6524	0.5421	0.4694	0.0903
$\beta_{8,2}$	3.7274	-0.4726	1.0384	0.9139	1.3016	0.2176
$\beta_{8,3}$	1.6317	-0.4683	1.1006	0.9783	1.4307	0.4658

Tabela F.12: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse* e *mape* para os modelos M1, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$, $SNR = -5$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M1				M2				M3				M4			
	β	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	6.6798	3.0973	6.7154	54.2128	6.7802	2.1842	6.8122	50.7415	6.7802	2.1842	6.8122	50.7415	6.7802	2.1842	6.8122	50.7415
β_1	-0.0166	-0.1166	0.4826	0.8412	-0.0082	0.5102	0.2871	0.2720	-0.0082	0.5102	0.2871	0.2720	-0.0082	0.5102	0.2871	0.2720
β_2	-0.0496	-0.8996	0.9131	1.0410	-0.0153	0.6219	0.9253	1.1355	-0.0153	0.6219	0.9253	1.1355	-0.0153	0.6219	0.9253	1.1355
β_3	0.0144	-2.4856	0.8482	2.5138	0.0323	0.6580	2.4848	6.5226	0.0323	0.6580	2.4848	6.5226	0.0323	0.6580	2.4848	6.5226
β_4	0.0425	-1.9575	1.1296	2.0893	0.0057	0.6516	2.0238	4.4018	0.0057	0.6516	2.0238	4.4018	0.0057	0.6516	2.0238	4.4018
β_5	-0.0082	-0.1082	0.9772	0.4698	0.0131	0.6047	0.3050	0.3732	0.0131	0.6047	0.3050	0.3732	0.0131	0.6047	0.3050	0.3732
β_6	-0.0141	-1.5141	0.8610	1.6045	0.0099	0.5478	1.5139	2.5204	0.0099	0.5478	1.5139	2.5204	0.0099	0.5478	1.5139	2.5204
$\beta_{7,2}$	-0.0182	-6.0182	1.6707	6.0373	0.0968	1.1492	5.9055	36.1688	0.0968	1.1492	5.9055	36.1688	0.0968	1.1492	5.9055	36.1688
$\beta_{8,2}$	-0.0031	-4.2031	1.6515	4.2613	-0.0708	1.6063	4.3252	20.8198	-0.0708	1.6063	4.3252	20.8198	-0.0708	1.6063	4.3252	20.8198
$\beta_{8,3}$	0.0206	-2.0794	1.8820	2.3244	0.0292	1.7900	2.2877	7.4923	0.0292	1.7900	2.2877	7.4923	0.0292	1.7900	2.2877	7.4923
Intercepto	6.8074	3.1676	6.8457	56.3752	6.9373	2.4815	6.9373	54.2841	6.9373	2.4815	6.9373	54.2841	6.9373	2.4815	6.9373	54.2841
β_1	-0.0086	-0.1086	0.4135	0.8583	0.0287	0.5767	0.3182	0.3376	0.0287	0.5767	0.3182	0.3376	0.0287	0.5767	0.3182	0.3376
β_2	-0.0231	-0.8731	0.8022	1.0093	0.0395	0.5251	0.8868	0.9326	0.0395	0.5251	0.8868	0.9326	0.0395	0.5251	0.8868	0.9326
β_3	-0.0564	-2.5564	0.8624	2.5895	0.0440	0.5378	2.4648	6.3210	0.0440	0.5378	2.4648	6.3210	0.0440	0.5378	2.4648	6.3210
β_4	-0.0231	-2.0231	0.9201	2.0988	-0.0352	0.5263	2.0374	4.4191	-0.0352	0.5263	2.0374	4.4191	-0.0352	0.5263	2.0374	4.4191
β_5	0.0707	-0.0293	0.8234	0.4056	-0.0209	0.5848	0.3102	0.3566	-0.0209	0.5848	0.3102	0.3566	-0.0209	0.5848	0.3102	0.3566
β_6	-0.0065	-1.5065	0.7924	1.5538	0.0490	0.5523	1.4810	2.4105	0.0490	0.5523	1.4810	2.4105	0.0490	0.5523	1.4810	2.4105
$\beta_{7,2}$	0.0823	-5.9177	1.6976	5.9964	-0.0309	1.2387	6.0309	37.9064	-0.0309	1.2387	6.0309	37.9064	-0.0309	1.2387	6.0309	37.9064
$\beta_{8,2}$	0.0727	-4.1273	1.6210	4.1456	-0.1185	1.4577	4.3226	20.7746	-0.1185	1.4577	4.3226	20.7746	-0.1185	1.4577	4.3226	20.7746
$\beta_{8,3}$	-0.1557	-2.2557	1.7372	2.4080	-0.1009	1.5856	2.2503	7.3582	-0.1009	1.5856	2.2503	7.3582	-0.1009	1.5856	2.2503	7.3582
Intercepto	6.7621	3.0564	6.8432	55.0678	6.7797	2.0949	6.8328	50.3524	6.7797	2.0949	6.8328	50.3524	6.7797	2.0949	6.8328	50.3524
β_1	0.0086	-0.0914	0.8939	0.4156	0.0426	0.5003	0.2538	0.2536	0.0426	0.5003	0.2538	0.2536	0.0426	0.5003	0.2538	0.2536
β_2	0.0210	-0.8290	0.8071	0.9794	0.0267	0.4570	0.8855	0.8867	0.0267	0.4570	0.8855	0.8867	0.0267	0.4570	0.8855	0.8867
β_3	0.0417	-2.4583	0.9031	2.4948	0.0124	0.4166	2.4931	6.3617	0.0124	0.4166	2.4931	6.3617	0.0124	0.4166	2.4931	6.3617
β_4	-0.0113	-2.0113	0.7834	2.0503	-0.0250	0.4108	2.0304	4.2692	-0.0250	0.4108	2.0304	4.2692	-0.0250	0.4108	2.0304	4.2692
β_5	-0.0112	-0.1112	0.9412	0.8982	-0.0075	0.4081	0.2323	0.1781	-0.0075	0.4081	0.2323	0.1781	-0.0075	0.4081	0.2323	0.1781
β_6	-0.0158	-1.5158	0.7869	1.5684	0.0290	0.4411	1.4892	2.3583	0.0290	0.4411	1.4892	2.3583	0.0290	0.4411	1.4892	2.3583
$\beta_{7,2}$	-0.1326	-6.1326	1.8005	6.1847	-0.0253	0.9268	6.0255	37.1636	-0.0253	0.9268	6.0255	37.1636	-0.0253	0.9268	6.0255	37.1636
$\beta_{8,2}$	-0.0975	-4.2975	1.7157	4.3719	-0.0216	0.7226	4.2216	18.3438	-0.0216	0.7226	4.2216	18.3438	-0.0216	0.7226	4.2216	18.3438
$\beta_{8,3}$	0.1028	-1.9972	1.4885	2.1794	-0.0151	0.7928	2.1489	5.1023	-0.0151	0.7928	2.1489	5.1023	-0.0151	0.7928	2.1489	5.1023
Intercepto	6.5637	3.4225	6.7068	54.7949	6.7830	2.1696	6.8235	50.7159	6.7830	2.1696	6.8235	50.7159	6.7830	2.1696	6.8235	50.7159
β_1	0.0409	-0.0591	0.7359	0.3624	0.0426	0.4804	0.2518	0.2341	0.0426	0.4804	0.2518	0.2341	0.0426	0.4804	0.2518	0.2341
β_2	-0.0162	-0.8662	0.8715	0.9857	0.0345	0.4596	0.8676	0.8762	0.0345	0.4596	0.8676	0.8762	0.0345	0.4596	0.8676	0.8762
β_3	0.0132	-2.4868	0.9730	2.5562	-0.0104	0.4786	2.5104	6.5310	-0.0104	0.4786	2.5104	6.5310	-0.0104	0.4786	2.5104	6.5310
β_4	-0.0390	-2.0390	0.9519	2.0945	0.0252	0.4833	1.9866	4.1334	0.0252	0.4833	1.9866	4.1334	0.0252	0.4833	1.9866	4.1334
β_5	0.0623	-0.0377	0.7692	0.3706	-0.0388	0.6597	0.2660	0.4545	-0.0388	0.6597	0.2660	0.4545	-0.0388	0.6597	0.2660	0.4545
β_6	-0.0512	-1.5512	0.6781	1.5855	-0.0173	0.5600	1.5478	2.6157	-0.0173	0.5600	1.5478	2.6157	-0.0173	0.5600	1.5478	2.6157
$\beta_{7,2}$	-0.0446	-6.0446	1.6421	6.0769	0.0060	0.9693	5.9940	36.8680	0.0060	0.9693	5.9940	36.8680	0.0060	0.9693	5.9940	36.8680
$\beta_{8,2}$	0.0325	-4.1675	1.6562	4.2369	-0.0280	1.1100	4.2656	19.1081	-0.0280	1.1100	4.2656	19.1081	-0.0280	1.1100	4.2656	19.1081
$\beta_{8,3}$	-0.0115	-2.1115	1.7998	2.3000	0.0731	1.1516	2.1531	5.4344	0.0731	1.1516	2.1531	5.4344	0.0731	1.1516	2.1531	5.4344

Tabela F.13: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.4081	0.4081	0.5970	0.5842	0.5230	Inf
β_1	0.0978	-0.0022	0.1879	0.1508	0.0353	1.5082
β_2	0.8262	-0.0238	0.1980	0.1572	0.0398	0.1849
β_3	2.4208	-0.0792	0.1965	0.1668	0.0449	0.0667
β_4	1.9441	-0.0559	0.1936	0.1639	0.0406	0.0820
β_5	0.0847	-0.0153	0.1913	0.1524	0.0368	1.5241
β_6	1.4610	-0.0390	0.1924	0.1583	0.0385	0.1055
$\beta_{7,2}$	5.8606	-0.1394	0.3863	0.3278	0.1687	0.0546
$\beta_{8,2}$	3.8504	-0.3496	0.6394	0.5941	0.5311	0.1415
$\beta_{8,3}$	1.7479	-0.3521	0.6709	0.6189	0.5741	0.2947
M2						
Intercepto	0.4002	0.4002	0.6108	0.5828	0.5333	Inf
β_1	0.0903	-0.0097	0.1897	0.1539	0.0361	1.5392
β_2	0.8317	-0.0183	0.2097	0.1697	0.0443	0.1997
β_3	2.4357	-0.0643	0.1990	0.1670	0.0437	0.0668
β_4	1.9613	-0.0387	0.1874	0.1511	0.0366	0.0756
β_5	0.0906	-0.0094	0.2024	0.1641	0.0411	1.6406
β_6	1.4820	-0.0180	0.1916	0.1531	0.0370	0.1021
$\beta_{7,2}$	5.8427	-0.1573	0.3949	0.3356	0.1807	0.0559
$\beta_{8,2}$	3.8522	-0.3478	0.5953	0.5533	0.4754	0.1317
$\beta_{8,3}$	1.7848	-0.3152	0.6171	0.5542	0.4802	0.2639
M3						
Intercepto	0.4385	0.4385	0.5955	0.5805	0.5468	Inf
β_1	0.1016	0.0016	0.1931	0.1513	0.0373	1.5128
β_2	0.8386	-0.0114	0.1929	0.1522	0.0373	0.1791
β_3	2.4341	-0.0659	0.1970	0.1662	0.0432	0.0665
β_4	1.9528	-0.0472	0.1894	0.1547	0.0381	0.0774
β_5	0.1039	0.0039	0.1920	0.1513	0.0369	1.5134
β_6	1.4805	-0.0195	0.1918	0.1542	0.0372	0.1028
$\beta_{7,2}$	5.8456	-0.1544	0.4044	0.3438	0.1874	0.0573
$\beta_{8,2}$	3.8177	-0.3823	0.6047	0.5636	0.5119	0.1342
$\beta_{8,3}$	1.7095	-0.3905	0.6588	0.6057	0.5865	0.2884
M4						
Intercepto	0.4547	0.4547	0.6175	0.6258	0.5881	Inf
β_1	0.0898	-0.0102	0.2004	0.1567	0.0403	1.5670
β_2	0.8359	-0.0141	0.1927	0.1531	0.0374	0.1801
β_3	2.4262	-0.0738	0.1984	0.1687	0.0448	0.0675
β_4	1.9688	-0.0312	0.2140	0.1669	0.0468	0.0835
β_5	0.1098	0.0098	0.1914	0.1515	0.0367	1.5152
β_6	1.4545	-0.0455	0.2126	0.1726	0.0473	0.1150
$\beta_{7,2}$	5.8476	-0.1524	0.4009	0.3390	0.1840	0.0565
$\beta_{8,2}$	3.8173	-0.3827	0.6235	0.5866	0.5351	0.1397
$\beta_{8,3}$	1.7185	-0.3815	0.6682	0.6242	0.5921	0.2973

Tabela F.14: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos Ml, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5					M2					M3					M4					
	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	
Intercepto	6.6865	2.1202	6.7053	49.2041	Inf	6.7644	1.4577	6.7785	47.8822	Inf	6.7702	2.0801	6.7899	50.1630	Inf	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	
β_1	0.0013	-0.0987	0.3485	0.4166	3.4848	0.0033	0.3508	0.2150	0.1324	2.1503	0.0099	-0.0901	0.3088	0.3955	3.0877	0.0352	0.5075	0.2626	0.2618	2.6256	0.0352
β_2	-0.0201	-0.8701	0.6638	1.1977	1.1194	-0.0104	0.4096	0.8773	0.9080	1.0321	-0.0124	-0.8624	0.9254	1.1355	1.0887	-0.0124	-0.8624	0.9254	1.1355	1.0887	-0.0124
β_3	0.0113	-2.4887	0.5795	2.4953	0.9981	0.0192	0.4258	2.4836	6.3355	0.9934	0.0142	-2.4858	0.6478	2.5078	1.0031	0.0142	-2.4858	0.6478	2.5078	1.0031	0.0142
β_4	0.0381	-1.9619	0.7782	2.0101	1.0050	0.0040	0.4320	2.0002	4.1706	1.0001	-0.0210	-2.0210	0.6505	2.0365	1.0183	-0.0210	-2.0210	0.6505	2.0365	1.0183	-0.0210
β_5	-0.0305	-0.1305	0.6718	0.3354	3.3537	0.0131	0.3960	0.2259	0.1643	2.2590	-0.0305	-0.1305	0.6718	0.3354	3.3537	-0.0305	-0.1305	0.6718	0.3354	3.3537	-0.0305
β_6	-0.0125	-1.5125	0.5790	1.5477	1.0318	0.0082	0.3418	1.4946	2.3422	0.9964	-0.0125	-1.5125	0.5790	1.5477	1.0318	-0.0125	-1.5125	0.5790	1.5477	1.0318	-0.0125
$\beta_{7,2}$	-0.0404	-6.0404	1.1049	6.0404	37.7067	0.0530	0.7530	5.9470	35.9344	0.9912	-0.0404	-6.0404	1.1049	6.0404	37.7067	-0.0404	-6.0404	1.1049	6.0404	37.7067	-0.0404
$\beta_{8,2}$	0.0388	-4.1612	1.2083	4.2095	18.7751	-0.0310	1.0580	4.2583	19.0209	1.0139	0.0388	-4.1612	1.2083	4.2095	18.7751	-0.0310	1.0580	4.2583	19.0209	1.0139	0.0388
$\beta_{8,3}$	0.0698	-2.0302	1.6310	2.2190	6.7820	0.0293	1.1766	2.1693	5.6722	1.0330	0.0698	-2.0302	1.6310	2.2190	6.7820	0.0293	1.1766	2.1693	5.6722	1.0330	0.0698
Intercepto	6.7237	2.0428	6.7256	49.3808	Inf	6.8709	1.6208	6.8709	49.8358	Inf	6.7237	2.0428	6.7256	49.3808	Inf	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	
β_1	-0.0104	-0.1104	0.2898	0.3582	2.8982	0.0284	0.3907	0.2354	0.1578	2.3538	-0.0104	-0.1104	0.2898	0.3582	2.8982	-0.0104	-0.1104	0.2898	0.3582	2.8982	-0.0104
β_2	-0.0188	-0.8688	0.5200	0.9287	1.0252	0.0200	0.3552	0.8561	0.8151	1.0072	-0.0188	-0.8688	0.5200	0.9287	1.0252	-0.0188	-0.8688	0.5200	0.9287	1.0252	-0.0188
β_3	-0.0354	-2.5354	0.5543	2.5411	6.7353	0.0274	0.3450	2.4726	6.2328	0.9890	-0.0354	-2.5354	0.5543	2.5411	6.7353	-0.0354	-2.5354	0.5543	2.5411	6.7353	-0.0354
β_4	-0.0276	-2.0276	0.6098	2.0532	4.4831	-0.0201	0.3505	2.0201	4.2036	1.0100	-0.0276	-2.0276	0.6098	2.0532	4.4831	-0.0201	0.3505	2.0201	4.2036	1.0100	-0.0276
β_5	0.0443	-0.0557	0.5511	0.2939	0.3068	-0.0103	0.3970	0.2335	0.1698	2.3354	0.0443	-0.0557	0.5511	0.2939	0.3068	-0.0103	0.3970	0.2335	0.1698	2.3354	0.0443
β_6	-0.0203	-1.5203	0.4915	1.5257	2.5528	0.0288	0.3735	1.4773	2.3040	0.9849	-0.0203	-1.5203	0.4915	1.5257	2.5528	0.0288	0.3735	1.4773	2.3040	0.9849	-0.0203
$\beta_{7,2}$	0.0219	-5.9781	1.1049	5.9929	36.9584	-0.0286	0.8481	6.0286	37.0634	1.0048	0.0219	-5.9781	1.1049	5.9929	36.9584	-0.0286	0.8481	6.0286	37.0634	1.0048	0.0219
$\beta_{8,2}$	0.1066	-4.0934	0.9358	4.1195	17.6320	-0.0736	0.9359	4.2736	19.1396	1.0175	0.1066	-4.0934	0.9358	4.1195	17.6320	-0.0736	0.9359	4.2736	19.1396	1.0175	0.1066
$\beta_{8,3}$	-0.0171	-2.1171	1.3364	2.2820	6.2679	-0.0464	1.0196	2.1581	5.6467	1.0277	-0.0171	-2.1171	1.3364	2.2820	6.2679	-0.0464	1.0196	2.1581	5.6467	1.0277	-0.0171
Intercepto	6.7702	2.0801	6.7899	50.1630	Inf	6.7617	1.4107	6.7853	47.7113	Inf	6.7702	2.0801	6.7899	50.1630	Inf	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	
β_1	0.0099	-0.0901	0.6224	0.3088	3.0877	0.0336	0.3465	0.1935	0.1244	1.9353	0.0099	-0.0901	0.6224	0.3088	3.0877	0.0336	0.3465	0.1935	0.1244	1.9353	0.0099
β_2	0.0068	-0.8432	0.5292	0.9110	1.0718	0.0170	0.3085	0.8531	0.7891	1.0037	0.0068	-0.8432	0.5292	0.9110	1.0718	0.0170	0.3085	0.8531	0.7891	1.0037	0.0068
β_3	0.0320	-2.4680	0.6023	2.4717	6.4538	0.0065	0.2935	2.4940	6.3038	0.9976	0.0320	-2.4680	0.6023	2.4717	6.4538	0.0065	0.2935	2.4940	6.3038	0.9976	0.0320
β_4	0.0007	-1.9993	0.5455	2.0076	4.2948	-0.0182	0.2914	2.0188	4.1579	1.0094	0.0007	-1.9993	0.5455	2.0076	4.2948	-0.0182	0.2914	2.0188	4.1579	1.0094	0.0007
β_5	-0.0060	-0.1060	0.6486	0.3468	3.4680	-0.0074	0.2734	0.1832	0.0863	1.8320	-0.0060	-0.1060	0.6486	0.3468	3.4680	-0.0074	0.2734	0.1832	0.0863	1.8320	-0.0060
β_6	-0.0023	-1.5023	0.5303	1.5214	2.5382	0.0192	0.3167	1.4860	2.2930	0.9907	-0.0023	-1.5023	0.5303	1.5214	2.5382	0.0192	0.3167	1.4860	2.2930	0.9907	-0.0023
$\beta_{7,2}$	-0.0970	-6.0970	1.2326	6.1242	38.6923	-0.0067	0.6113	6.0067	36.4538	1.0011	-0.0970	-6.0970	1.2326	6.1242	38.6923	-0.0067	0.6113	6.0067	36.4538	1.0011	-0.0970
$\beta_{8,2}$	-0.0543	-4.2543	1.1743	4.2986	19.4784	-0.0090	0.5044	4.2090	17.9698	1.0021	-0.0543	-4.2543	1.1743	4.2986	19.4784	-0.0090	0.5044	4.2090	17.9698	1.0021	-0.0543
$\beta_{8,3}$	0.0709	-2.0291	1.1032	2.1320	5.3342	-0.0097	0.5786	2.1256	4.7855	1.0122	0.0709	-2.0291	1.1032	2.1320	5.3342	-0.0097	0.5786	2.1256	4.7855	1.0122	0.0709
Intercepto	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	6.7638	1.6674	6.8022	48.5289	Inf	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	6.6241	2.2784	6.6642	49.0694	Inf	
β_1	0.0352	-0.0648	0.5075	0.2618	2.6256	0.0328	0.3443	0.1953	0.1230	1.9530	0.0352	-0.0648	0.5075	0.2618	2.6256	0.0328	0.3443	0.1953	0.1230	1.9530	0.0352
β_2	-0.0124	-0.8624	0.6259	0.9254	1.1355	0.0201	0.3199	0.8490	0.7910	0.9988	-0.0124	-0.8624	0.6259	0.9254	1.1355	0.0201	0.3199	0.8490	0.7910	0.9988	-0.0124
β_3	0.0142	-2.4858	0.6478	2.5078	6.5990	-0.0039	0.3248	2.5039	6.3752	1.0016	0.0142	-2.4858	0.6478	2.5078	6.5990	-0.0039	0.3248	2.5039	6.3752	1.0016	0.0142
β_4	-0.0210	-2.0210	0.6505	2.0365	4.5077	0.0195	0.3405	1.9812	4.0382	0.9906	-0.0210	-2.0210	0.6505	2.0365	4.5077	0.0195	0.3405	1.9812	4.0382	0.9906	-0.0210
β_5	0.0414	-0.0586	0.5235	0.2766	2.7655	-0.0259	0.4557	0.2113	0.2235	2.1131	0.0414	-0.0586	0.5235	0.2766	2.7655	-0.0259	0.4557	0.2113	0.2235	2.1131	0.0414
β_6	-0.0415	-1.5415	0.4717	1.5485	2.5987	-0.0113	0.3966	1.5225	2.4412	1.0150	-0.0415	-1.5415	0.4717	1.5485	2.5987	-0.0113	0.3966	1.5225	2.4412	1.0150	-0.0415
$\beta_{7,2}$	-0.0421	-6.0421	1.1427	6.0516	37.8131	0.0115	0.7097	5.9885	36.3655	0.9981	-0.0421	-6.0421	1.1427	6.0516	37.8131	0.0115	0.7097	5.9885	36.3655	0.9981	-0.0421
$\beta_{8,2}$	0.0245	-4.1755	1.1233	4.1963	18.6962	-0.0118	1.1142	4.2595	18.9802	1.0142	0.0245	-4.1755	1.1233	4.1963	18.6962	-0.0118	1.1142	4.2595	18.9802	1.0142	0.0245
$\beta_{8,3}$	-0.0309	-2.1309	1.2298	2.2133	6.0531	0.0525	1.0939	2.1442	5.3889	1.0210	-0.0309	-2.1309	1.2298	2.2133	6.0531	0.0525	1.0939	2.1442	5.3889	1.0210	-0.0309

Tabela F.15: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M5						
Intercepto	-0.4684	-0.4684	0.8528	0.7856	0.9467	Inf
β_1	0.9708	-0.0292	0.2719	0.2163	0.0748	0.2163
β_2	4.8630	-0.1370	0.2593	0.2375	0.0860	0.0475
β_3	-1.9331	0.0669	0.2543	0.2126	0.0692	0.1063
β_4	1.9393	-0.0607	0.2675	0.2233	0.0753	0.1116
β_5	-3.8789	0.1211	0.2565	0.2230	0.0804	0.0558
β_6	4.8698	-0.1302	0.2844	0.2505	0.0978	0.0501
$\beta_{7,2}$	5.2390	-0.1610	0.5265	0.4395	0.3032	0.0814
$\beta_{8,2}$	-5.3847	0.6153	0.8506	0.8593	1.1020	0.1432
$\beta_{8,3}$	-2.3994	0.6006	0.9031	0.8735	1.1762	0.2912
M6						
Intercepto	-0.4257	-0.4257	0.8379	0.7485	0.8834	Inf
β_1	0.9556	-0.0444	0.2653	0.2145	0.0724	0.2145
β_2	4.8631	-0.1369	0.2731	0.2421	0.0933	0.0484
β_3	-1.9412	0.0588	0.2615	0.2146	0.0719	0.1073
β_4	1.9403	-0.0597	0.2571	0.2096	0.0697	0.1048
β_5	-3.8863	0.1137	0.2739	0.2390	0.0879	0.0597
β_6	4.8755	-0.1245	0.2705	0.2390	0.0886	0.0478
$\beta_{7,2}$	5.2257	-0.1743	0.5228	0.4476	0.3037	0.0829
$\beta_{8,2}$	-5.4028	0.5972	0.8102	0.8058	1.0131	0.1343
$\beta_{8,3}$	-2.4103	0.5897	0.8749	0.8627	1.1133	0.2876
M9						
Intercepto	-0.4711	-0.4711	0.8571	0.7772	0.9565	Inf
β_1	0.9665	-0.0335	0.3318	0.2308	0.1112	0.2308
β_2	4.8665	-0.1335	0.2813	0.2351	0.0970	0.0470
β_3	-1.9372	0.0628	0.2871	0.2335	0.0863	0.1167
β_4	1.9184	-0.0816	0.2567	0.2151	0.0726	0.1075
β_5	-3.8792	0.1208	0.2701	0.2283	0.0875	0.0571
β_6	4.8612	-0.1388	0.2789	0.2443	0.0970	0.0489
$\beta_{7,2}$	5.2436	-0.1564	0.5551	0.4528	0.3326	0.0839
$\beta_{8,2}$	-5.3745	0.6255	0.8972	0.8790	1.1962	0.1465
$\beta_{8,3}$	-2.3848	0.6152	0.9202	0.8868	1.2253	0.2956

Tabela F.16: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M1, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = -1$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5					M6					M9				
	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	-1.1586	3.4289	2.7096	13.0998	Inf	-1.3231	2.2473	1.9598	6.8010	Inf	-1.4260	3.0471	2.6365	11.3182	Inf
β_1	0.1690	1.0185	1.0829	1.7280	1.0829	0.1913	0.6256	0.9426	1.0454	0.9426	-0.0371	0.6543	1.0909	1.5037	1.0909
β_2	0.0097	4.9903	4.9923	25.6108	0.9985	-0.0474	0.5191	5.0474	25.7460	1.0095	-0.0146	5.0146	7.427	5.0167	25.6980
β_3	-0.1083	1.8917	1.9571	4.3088	0.9786	0.0200	0.5834	2.0298	4.4209	1.0149	-0.3702	1.6298	0.9654	1.8042	3.5883
β_4	-0.0088	2.0088	2.0583	4.8823	1.0292	-0.0109	0.5051	1.9923	4.2115	0.9962	-0.0395	2.0395	0.7807	2.0610	4.7692
β_5	-0.0007	3.9993	3.9993	16.7529	0.9998	-0.0289	0.5068	3.9711	16.0263	0.9928	-0.0077	3.9923	0.7741	4.0076	16.5377
β_6	-0.0095	5.0095	5.0181	25.9411	1.0036	0.0334	0.5386	4.9666	24.9569	0.9933	-0.0269	4.9731	0.8766	4.9979	25.4996
$\beta_{7,2}$	-0.0341	1.7923	5.5099	32.7414	1.0204	0.0410	1.1524	5.3745	30.0473	0.9953	0.0469	1.5433	5.4042	31.0373	1.0008
$\beta_{8,2}$	-0.2743	5.7257	2.3498	5.9898	0.9983	-0.0992	1.4892	6.0030	37.0370	1.0005	-0.0366	5.9634	1.2421	5.9887	37.1052
$\beta_{8,3}$	-0.1205	2.8795	3.2912	15.4164	1.0971	-0.1053	1.7222	3.0861	11.3452	1.0287	-0.1335	2.8665	1.7170	3.0917	11.1649
Intercepto	-1.1260	3.0235	2.5516	10.4093	Inf	-1.2064	1.8707	1.7556	4.9549	Inf	-1.4260	3.0471	2.6365	11.3182	Inf
β_1	0.2046	0.8868	1.0548	1.4192	1.0548	0.1615	0.5556	0.9500	1.0118	0.9500	-0.0371	0.6543	1.0909	1.5037	1.0909
β_2	-0.0356	5.0356	5.0376	26.2134	1.0075	0.0072	4.9928	4.9928	25.1325	0.9986	-0.0356	5.0356	5.0376	26.2134	1.0075
β_3	-0.0794	1.9206	2.0559	4.7425	1.0280	-0.0122	1.9878	4.1858	4.1858	0.9994	-0.0794	1.9206	2.0559	4.7425	1.0280
β_4	0.0403	1.9597	2.0309	4.7481	1.0154	-0.0078	2.0078	2.0166	4.2821	1.0083	0.0403	1.9597	2.0309	4.7481	1.0154
β_5	-0.0837	3.9163	3.9320	16.1463	0.9830	-0.0043	3.9957	3.9980	16.2827	0.9995	-0.0837	3.9163	3.9320	16.1463	0.9830
β_6	0.0296	4.9704	4.9704	25.4911	0.9941	-0.0053	5.0053	5.0053	25.2588	1.0011	0.0296	4.9704	4.9704	25.4911	0.9941
$\beta_{7,2}$	-0.0391	5.4391	5.4922	32.7023	1.0171	-0.0291	5.4291	5.4291	30.2488	1.0054	-0.0391	5.4391	5.4922	32.7023	1.0171
$\beta_{8,2}$	0.0656	6.0656	6.1537	40.1056	1.0256	0.0526	6.0526	6.0526	37.2742	1.0088	0.0656	6.0656	6.1537	40.1056	1.0256
$\beta_{8,3}$	-0.1861	2.8139	3.1240	12.5707	1.0413	-0.0212	2.9788	3.0113	9.7068	1.0038	-0.1861	2.8139	3.1240	12.5707	1.0413
Intercepto	-1.4260	3.0471	2.6365	11.3182	Inf	-1.4608	1.9839	1.9572	6.0695	Inf	-1.4260	3.0471	2.6365	11.3182	Inf
β_1	-0.0371	1.0371	1.0909	1.5037	1.0909	0.0573	0.5554	1.0081	1.1972	1.0081	-0.0371	1.0371	1.0909	1.5037	1.0909
β_2	-0.0146	5.0146	7.427	5.0167	25.6980	0.0086	4.9914	4.9914	25.1679	0.9983	-0.0146	5.0146	7.427	5.0167	25.6980
β_3	-0.3702	1.6298	0.9654	1.8042	3.5883	-0.4617	1.5383	1.6332	3.0239	0.8166	-0.3702	1.6298	0.9654	1.8042	3.5883
β_4	-0.0395	2.0395	0.7807	2.0610	4.7692	0.0030	0.5272	2.0042	4.2658	1.0021	-0.0395	2.0395	0.7807	2.0610	4.7692
β_5	-0.0077	3.9923	0.7741	4.0076	16.5377	-0.0006	0.5339	3.9994	16.2801	0.9998	-0.0077	3.9923	0.7741	4.0076	16.5377
β_6	0.0269	4.9731	0.8766	4.9979	25.4996	0.0272	4.9728	4.9758	25.0804	0.9952	0.0269	4.9731	0.8766	4.9979	25.4996
$\beta_{7,2}$	0.0469	5.3531	1.5433	5.4042	31.0373	-0.0473	5.4473	5.4473	30.8210	1.0088	0.0469	5.3531	1.5433	5.4042	31.0373
$\beta_{8,2}$	-0.0366	5.9634	1.2421	5.9887	37.1052	0.1301	6.1301	6.1301	38.6882	1.0217	-0.0366	5.9634	1.2421	5.9887	37.1052
$\beta_{8,3}$	-0.1335	2.8665	1.7170	3.0917	11.1649	0.0299	3.0299	3.0401	10.3437	1.0134	-0.1335	2.8665	1.7170	3.0917	11.1649

Tabela F.17: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0$ e $SNR = 0$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	-0.4758	-0.4758	0.7205	0.6891	0.7455	Inf
β_1	0.9696	-0.0304	0.2281	0.1857	0.0530	0.1857
β_2	4.8433	-0.1567	0.2369	0.2215	0.0807	0.0443
β_3	-1.9629	0.0371	0.2378	0.1943	0.0579	0.0972
β_4	1.9288	-0.0712	0.2341	0.1988	0.0599	0.0994
β_5	-3.8929	0.1071	0.2325	0.2057	0.0655	0.0514
β_6	4.8429	-0.1571	0.2302	0.2207	0.0777	0.0441
$\beta_{7,2}$	5.2401	-0.1599	0.4785	0.4030	0.2546	0.0746
$\beta_{8,2}$	-5.3433	0.6567	0.7611	0.8156	1.0106	0.1359
$\beta_{8,3}$	-2.3727	0.6273	0.7963	0.8079	1.0276	0.2693
M2						
Intercepto	-0.4912	-0.4912	0.7312	0.7149	0.7760	Inf
β_1	0.9605	-0.0395	0.2305	0.1897	0.0547	0.1897
β_2	4.8479	-0.1521	0.2515	0.2395	0.0864	0.0479
β_3	-1.9422	0.0578	0.2429	0.2001	0.0623	0.1001
β_4	1.9504	-0.0496	0.2272	0.1836	0.0541	0.0918
β_5	-3.8842	0.1158	0.2470	0.2189	0.0744	0.0547
β_6	4.8672	-0.1328	0.2300	0.2125	0.0705	0.0425
$\beta_{7,2}$	5.2187	-0.1813	0.4883	0.4107	0.2713	0.0760
$\beta_{8,2}$	-5.3341	0.6659	0.7044	0.8068	0.9396	0.1345
$\beta_{8,3}$	-2.3215	0.6785	0.7298	0.8190	0.9930	0.2730
M3						
Intercepto	-0.4575	-0.4575	0.6982	0.6725	0.6968	Inf
β_1	0.9737	-0.0263	0.2354	0.1859	0.0561	0.1859
β_2	4.8562	-0.1438	0.2304	0.2182	0.0738	0.0436
β_3	-1.9433	0.0567	0.2401	0.1982	0.0608	0.0991
β_4	1.9401	-0.0599	0.2294	0.1885	0.0562	0.0943
β_5	-3.8673	0.1327	0.2337	0.2192	0.0722	0.0548
β_6	4.8649	-0.1351	0.2298	0.2134	0.0710	0.0427
$\beta_{7,2}$	5.2243	-0.1757	0.4993	0.4207	0.2802	0.0779
$\beta_{8,2}$	-5.3637	0.6363	0.7055	0.7837	0.9026	0.1306
$\beta_{8,3}$	-2.4010	0.5990	0.7754	0.8100	0.9600	0.2700
M4						
Intercepto	-0.4365	-0.4365	0.7383	0.6897	0.7357	Inf
β_1	0.9597	-0.0403	0.2433	0.1925	0.0608	0.1925
β_2	4.8526	-0.1474	0.2301	0.2190	0.0747	0.0438
β_3	-1.9519	0.0481	0.2416	0.1941	0.0607	0.0970
β_4	1.9602	-0.0398	0.2594	0.2028	0.0689	0.1014
β_5	-3.8602	0.1398	0.2321	0.2204	0.0734	0.0551
β_6	4.8337	-0.1663	0.2559	0.2439	0.0931	0.0488
$\beta_{7,2}$	5.2270	-0.1730	0.4965	0.4157	0.2764	0.0770
$\beta_{8,2}$	-5.3652	0.6348	0.7399	0.8078	0.9504	0.1346
$\beta_{8,3}$	-2.3912	0.6088	0.7915	0.8071	0.9971	0.2690

Tabela F.18: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$ e $SNR = 0$.

Coeficiente	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M5						
Intercepto	0.1849	0.1849	0.6446	0.5171	0.4497	Inf
β_1	0.0953	-0.0047	0.1751	0.1389	0.0307	1.3891
β_2	0.8388	-0.0112	0.1745	0.1397	0.0306	0.1644
β_3	2.4845	-0.0155	0.1707	0.1364	0.0294	0.0546
β_4	1.9775	-0.0225	0.1798	0.1467	0.0328	0.0734
β_5	0.0995	-0.0005	0.1656	0.1319	0.0274	1.3186
β_6	1.4909	-0.0091	0.1923	0.1534	0.0371	0.1023
$\beta_{7,2}$	5.9469	-0.0531	0.3545	0.2862	0.1285	0.0477
$\beta_{8,2}$	4.0206	-0.1794	0.6438	0.5257	0.4467	0.1252
$\beta_{8,3}$	1.9155	-0.1845	0.6818	0.5592	0.4989	0.2663
M6						
Intercepto	0.2125	0.2125	0.6223	0.5301	0.4324	Inf
β_1	0.0852	-0.0148	0.1712	0.1373	0.0295	1.3726
β_2	0.8390	-0.0110	0.1841	0.1453	0.0340	0.1710
β_3	2.4792	-0.0208	0.1748	0.1396	0.0310	0.0559
β_4	1.9783	-0.0217	0.1704	0.1365	0.0295	0.0683
β_5	0.0967	-0.0033	0.1762	0.1426	0.0311	1.4256
β_6	1.4947	-0.0053	0.1824	0.1470	0.0333	0.0980
$\beta_{7,2}$	5.9376	-0.0624	0.3521	0.2914	0.1279	0.0486
$\beta_{8,2}$	4.0090	-0.1910	0.6054	0.5159	0.4030	0.1228
$\beta_{8,3}$	1.9092	-0.1908	0.6561	0.5393	0.4669	0.2568
M9						
Intercepto	0.1916	0.1916	0.6664	0.5294	0.4809	Inf
β_1	0.0920	-0.0080	0.2226	0.1496	0.0496	1.4958
β_2	0.8433	-0.0067	0.1823	0.1435	0.0333	0.1689
β_3	2.4787	-0.0213	0.1934	0.1539	0.0379	0.0616
β_4	1.9632	-0.0368	0.1780	0.1424	0.0330	0.0712
β_5	0.0966	-0.0034	0.1679	0.1306	0.0282	1.3060
β_6	1.4873	-0.0127	0.1851	0.1467	0.0344	0.0978
$\beta_{7,2}$	5.9499	-0.0501	0.3702	0.2907	0.1395	0.0485
$\beta_{8,2}$	4.0167	-0.1833	0.6897	0.5468	0.5093	0.1302
$\beta_{8,3}$	1.9181	-0.1819	0.7059	0.5620	0.5313	0.2676

Tabela F.19: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$ e $SNR = 0$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5					M6					M9				
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>
Intercepto	6.7995	6.7995	2.2512	6.8010	51.3016	Inf	6.6627	6.6627	1.6082	6.6963	46.9784	Inf	6.6627	6.6627	1.6082
β_1	-0.0319	-0.1319	0.6654	0.2985	0.4601	2.9847	0.0196	-0.0804	0.3262	0.1785	0.1129	1.7854	0.0196	-0.0804	0.3262
β_2	-0.0122	-0.8622	0.6387	0.9412	1.1512	1.1073	-0.0319	-0.8819	0.3560	0.8999	0.9045	1.0587	-0.0319	-0.8819	0.3560
β_3	-0.0687	-2.5687	0.6636	2.5711	7.0386	1.0284	-0.0072	-2.5072	0.3669	2.5072	6.4206	1.0029	-0.0072	-2.5072	0.3669
β_4	-0.0172	-2.0172	0.6504	2.0268	4.4922	1.0134	0.0036	-1.9964	0.3435	1.9964	4.1035	0.9982	0.0036	-1.9964	0.3435
β_5	-0.0048	-0.1048	0.5579	0.2779	0.3222	2.7793	-0.0256	-0.1256	0.3657	0.2069	0.1495	2.0695	-0.0256	-0.1256	0.3657
β_6	-0.0112	-1.5112	0.5661	1.5313	2.6042	1.0209	0.0130	-1.4870	0.3427	1.4929	2.3286	0.9953	0.0130	-1.4870	0.3427
$\beta_{7,2}$	-0.0073	-6.0073	1.1710	6.0083	37.4586	1.0014	0.0599	-5.9401	0.8592	5.9401	36.0235	0.9900	0.0599	-5.9401	0.8592
$\beta_{8,2}$	-0.1284	-4.3284	1.5707	4.3680	21.2017	1.0400	-0.0135	-4.2135	1.2283	4.2796	19.2620	1.0189	-0.0135	-4.2135	1.2283
$\beta_{8,3}$	-0.0800	-2.1800	1.5894	2.2714	7.2788	1.0816	-0.0271	-2.1271	1.2503	2.2326	6.0879	1.0632	-0.0271	-2.1271	1.2503
Intercepto	6.7935	6.7935	1.9965	6.8023	50.1377	Inf	6.8287	6.8287	1.2217	6.8287	48.1242	Inf	6.8287	6.8287	1.2217
β_1	0.0708	-0.0292	0.6839	0.3202	0.4686	3.2022	0.0105	-0.0895	0.3320	0.1776	0.1183	1.7759	0.0105	-0.0895	0.3320
β_2	-0.0486	-0.8986	0.6956	0.9794	1.2913	1.1522	0.0097	-0.8403	0.3180	0.8560	0.8073	1.0071	0.0097	-0.8403	0.3180
β_3	-0.0095	-2.5095	0.6067	2.5206	6.6659	1.0082	-0.0219	-2.5219	0.3437	2.5219	6.4783	1.0088	-0.0219	-2.5219	0.3437
β_4	-0.0072	-2.0072	0.6829	2.0257	4.4952	1.0128	0.0077	-1.9923	0.3346	1.9928	4.0814	0.9964	0.0077	-1.9923	0.3346
β_5	-0.0669	-0.1669	0.6064	0.2948	0.3956	2.9476	0.0091	-0.0909	0.3146	0.1846	0.1073	1.8462	0.0091	-0.0909	0.3146
β_6	0.0091	-1.4909	0.6134	1.5333	2.5991	1.0222	0.0001	-1.4999	0.3037	1.5083	2.3420	1.0055	0.0001	-1.4999	0.3037
$\beta_{7,2}$	-0.0648	-6.0648	1.2021	6.0746	38.2274	1.0124	-0.0518	-6.0518	0.5952	6.0518	36.9785	1.0086	-0.0518	-6.0518	0.5952
$\beta_{8,2}$	0.0531	-4.1469	1.2210	4.1690	18.6879	0.9926	-0.0026	-4.2026	0.5129	4.2026	17.9249	1.0006	-0.0026	-4.2026	0.5129
$\beta_{8,3}$	-0.0459	-2.1459	1.6320	2.3315	7.2682	1.1103	-0.0497	-2.1497	0.6364	2.1549	5.0264	1.0262	-0.0497	-2.1497	0.6364
Intercepto	6.6512	6.6512	2.0013	6.6590	48.2441	Inf	6.6772	6.6772	1.3313	6.6772	46.3573	Inf	6.6772	6.6772	1.3313
β_1	-0.0036	-0.1036	0.7351	0.3060	0.5511	3.0598	0.0425	-0.0575	0.4813	0.2708	0.2349	2.7076	0.0425	-0.0575	0.4813
β_2	-0.0184	-0.8684	0.5668	0.9256	1.0754	1.0889	-0.0112	-0.8612	0.3680	0.8797	0.8770	1.0349	-0.0112	-0.8612	0.3680
β_3	0.7876	-1.7124	1.2052	1.9220	4.3848	0.7688	1.1609	-1.3391	0.9970	1.4476	2.7873	0.5790	1.1609	-1.3391	0.9970
β_4	-0.0351	-2.0351	0.5986	2.0458	4.4999	1.0229	-0.0197	-2.0197	0.4852	2.0197	4.3147	1.0099	-0.0197	-2.0197	0.4852
β_5	0.0001	-0.0999	0.6041	0.2921	0.3749	2.9214	-0.0077	-0.1077	0.4594	0.2657	0.2226	2.6573	-0.0077	-0.1077	0.4594
β_6	0.0321	-1.4679	0.7430	1.5499	2.7069	1.0333	0.0338	-1.4662	0.4962	1.4936	2.3958	0.9957	0.0338	-1.4662	0.4962
$\beta_{7,2}$	0.0175	-5.9825	1.2619	6.0068	37.3827	1.0011	-0.0446	-6.0446	0.9046	6.0446	37.3561	1.0074	-0.0446	-6.0446	0.9046
$\beta_{8,2}$	-0.0773	-4.2773	1.1166	4.2904	19.5424	1.0215	0.0369	-4.1631	0.9111	4.1731	18.1611	0.9936	0.0369	-4.1631	0.9111
$\beta_{8,3}$	-0.1121	-2.2121	1.2496	2.2658	6.4547	1.0790	-0.0248	-2.1248	1.0209	2.1871	5.5572	1.0415	-0.0248	-2.1248	1.0209

Tabela F.20: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.1641	0.1641	0.5380	0.4515	0.3164	Inf
β_1	0.0957	-0.0043	0.1483	0.1199	0.0220	1.1988
β_2	0.8351	-0.0149	0.1607	0.1275	0.0261	0.1500
β_3	2.4661	-0.0339	0.1597	0.1291	0.0266	0.0516
β_4	1.9771	-0.0229	0.1571	0.1286	0.0252	0.0643
β_5	0.0853	-0.0147	0.1505	0.1207	0.0229	1.2072
β_6	1.4830	-0.0170	0.1564	0.1269	0.0247	0.0846
$\beta_{7,2}$	5.9636	-0.0364	0.3205	0.2566	0.1040	0.0428
$\beta_{8,2}$	4.0542	-0.1458	0.5718	0.4800	0.3482	0.1143
$\beta_{8,3}$	1.9409	-0.1591	0.6016	0.5096	0.3872	0.2426
M2						
Intercepto	0.1666	0.1666	0.5523	0.4569	0.3328	Inf
β_1	0.0905	-0.0095	0.1487	0.1212	0.0222	1.2124
β_2	0.8385	-0.0115	0.1704	0.1373	0.0292	0.1616
β_3	2.4773	-0.0227	0.1620	0.1307	0.0268	0.0523
β_4	1.9901	-0.0099	0.1524	0.1207	0.0233	0.0603
β_5	0.0905	-0.0095	0.1589	0.1292	0.0254	1.2917
β_6	1.4990	-0.0010	0.1548	0.1233	0.0240	0.0822
$\beta_{7,2}$	5.9470	-0.0530	0.3278	0.2635	0.1103	0.0439
$\beta_{8,2}$	4.0476	-0.1524	0.5386	0.4468	0.3134	0.1064
$\beta_{8,3}$	1.9622	-0.1378	0.5586	0.4562	0.3311	0.2173
M3						
Intercepto	0.1801	0.1801	0.5330	0.4335	0.3165	Inf
β_1	0.0996	-0.0004	0.1517	0.1195	0.0230	1.1947
β_2	0.8457	-0.0043	0.1570	0.1238	0.0247	0.1456
β_3	2.4786	-0.0214	0.1610	0.1303	0.0264	0.0521
β_4	1.9855	-0.0145	0.1533	0.1224	0.0237	0.0612
β_5	0.1008	0.0008	0.1514	0.1196	0.0229	1.1962
β_6	1.4996	-0.0004	0.1566	0.1244	0.0245	0.0830
$\beta_{7,2}$	5.9552	-0.0448	0.3332	0.2667	0.1130	0.0444
$\beta_{8,2}$	4.0348	-0.1652	0.5436	0.4372	0.3227	0.1041
$\beta_{8,3}$	1.9173	-0.1827	0.5912	0.4878	0.3829	0.2323
M4						
Intercepto	0.1940	0.1940	0.5496	0.4607	0.3397	Inf
β_1	0.0898	-0.0102	0.1579	0.1237	0.0250	1.2373
β_2	0.8435	-0.0065	0.1571	0.1247	0.0247	0.1467
β_3	2.4721	-0.0279	0.1616	0.1293	0.0269	0.0517
β_4	1.9985	-0.0015	0.1737	0.1339	0.0302	0.0669
β_5	0.1056	0.0056	0.1505	0.1191	0.0227	1.1912
β_6	1.4785	-0.0215	0.1718	0.1375	0.0300	0.0917
$\beta_{7,2}$	5.9566	-0.0434	0.3309	0.2633	0.1114	0.0439
$\beta_{8,2}$	4.0337	-0.1663	0.5544	0.4510	0.3350	0.1074
$\beta_{8,3}$	1.9233	-0.1767	0.5931	0.4953	0.3830	0.2359

Tabela F.21: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos MI, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	MI					M2					M3					M4								
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	6.6868	6.6868	1.8342	6.6927	48.0770	Inf	6.7418	6.7418	1.7356	6.7418	48.4639	Inf	6.7782	6.7782	2.0993	6.7929	50.3515	Inf	6.6993	6.6993	2.0573	6.7259	49.1133	Inf
β_1	-0.0040	-0.1040	0.6006	0.2916	0.3715	2.9164	-0.0002	-0.1002	0.5978	0.2464	0.3675	2.4641	0.0262	-0.0738	0.5469	0.2431	0.3045	2.4312	0.0226	-0.0774	0.4699	0.2226	0.2268	2.2258
β_2	-0.0284	-0.8784	0.5457	0.9320	1.0694	1.0965	-0.0115	-0.8615	0.5018	0.9236	0.9940	1.0865	0.0060	-0.8440	0.4824	0.9159	0.9449	1.0775	-0.0025	-0.8525	0.6082	0.9253	1.0967	1.0885
β_3	0.0327	-2.4673	0.5446	2.4718	6.3844	0.9887	-0.0331	-2.5331	0.4911	2.5337	6.6577	1.0135	0.0144	-2.4856	0.5343	2.4875	6.4635	0.9950	-0.0160	-2.4840	0.6123	2.5034	6.5450	1.0014
β_4	0.0382	-1.9618	0.6992	1.9908	4.3376	0.9954	-0.0258	-2.0258	0.4859	2.0332	4.3400	1.0166	-0.0064	-2.0064	0.5059	2.0151	4.2815	1.0075	-0.0208	-2.0208	0.5859	2.0332	4.4270	1.0166
β_5	-0.0289	-0.1289	0.6341	0.2692	0.4188	2.6923	0.0268	-0.0732	0.5002	0.2395	0.2555	2.3945	0.0216	-0.0784	0.5898	0.2879	0.3540	2.8786	0.0377	-0.0623	0.4851	0.2392	0.2392	2.3616
β_6	-0.0006	-1.5006	0.5518	1.5300	2.5562	1.0200	-0.0289	-1.5289	0.4556	1.5342	2.5450	1.0228	0.0023	-1.4977	0.4684	1.5183	2.4624	1.0122	-0.0393	-1.5393	0.4572	1.5463	2.5785	1.0309
$\beta_{7,2}$	-0.0375	-6.0375	0.8925	6.0375	37.2475	1.0062	-0.0137	-6.0137	1.0189	6.0241	37.2029	1.0040	-0.0466	-6.0466	1.0597	6.0638	37.6842	1.0106	-0.0903	-6.0903	1.0985	6.0937	38.2990	1.0156
$\beta_{8,2}$	0.0689	-4.1311	1.0559	4.1738	18.1812	0.9938	0.0686	-4.1314	0.8727	4.1579	17.8304	0.9900	-0.0591	-4.2591	1.4367	4.3044	20.2040	1.0248	-0.0255	-4.2255	1.2003	4.2502	19.2956	1.0120
$\beta_{8,3}$	0.0396	-2.0604	1.1424	2.1914	5.5504	1.0435	0.0043	-2.0957	1.2453	2.2452	5.9426	1.0691	-0.0183	-2.1183	1.5760	2.2475	6.9711	1.0702	-0.0181	-2.1181	1.2876	2.2192	6.1443	1.0568
Intercepto	6.7826	6.7826	1.3079	6.7947	47.7142	Inf	6.8684	6.8684	1.4230	6.8684	49.1998	Inf	6.7556	6.7556	1.2475	6.7687	47.1940	Inf	6.7514	6.7514	1.4939	6.7861	47.8129	Inf
β_1	0.0045	-0.0955	0.3216	0.1902	0.1125	1.9020	0.0268	-0.0732	0.3742	0.2064	0.1454	2.0643	0.0266	-0.0734	0.3523	0.1850	0.1295	1.8497	0.0216	-0.0784	0.3167	0.1700	0.1064	1.7003
β_2	-0.0122	-0.8622	0.3874	0.8827	0.8935	1.0384	0.0162	-0.8338	0.3411	0.8613	0.8115	1.0132	-0.0007	-0.8507	0.3278	0.8702	0.8311	1.0237	0.0207	-0.8293	0.2996	0.8497	0.7776	0.9996
β_3	0.0059	-2.4941	0.3956	2.4941	6.3771	0.9976	-0.0218	-2.4782	0.3162	2.4782	6.2416	0.9913	-0.0041	-2.5041	0.2969	2.5048	6.3585	1.0019	-0.0078	-2.5078	0.3091	2.5078	6.3847	1.0031
β_4	0.0042	-1.9958	0.4139	1.9973	4.1545	0.9987	0.0313	-2.0313	0.3501	2.0313	4.2489	1.0157	-0.0160	-2.0160	0.2843	2.0162	4.1450	1.0081	0.0181	-1.9819	0.3206	1.9823	4.0306	0.9911
β_5	0.0038	-0.0902	0.3755	0.1995	0.1502	1.9953	-0.0003	-0.1003	0.3854	0.2088	0.1586	2.0877	-0.0034	-0.1034	0.2685	0.1685	0.0828	1.6852	-0.0287	-0.1287	0.4186	0.1951	0.1918	1.9507
β_6	0.0093	-1.4930	0.3119	1.4930	2.3194	0.9953	0.0214	-5.9786	0.7288	5.9786	36.2752	0.9964	0.0130	-1.4870	0.3490	1.4931	2.3330	0.9954	-0.0264	-1.5264	0.3820	1.5314	2.4757	1.0209
$\beta_{7,2}$	-0.0364	-4.2364	0.9816	4.2541	18.9103	1.0129	-0.0273	-6.0273	0.8462	6.0273	37.0439	1.0045	0.0079	-5.9921	0.6194	5.9921	36.2893	0.9987	0.0092	-5.9908	0.6888	5.9908	36.3640	0.9985
$\beta_{8,2}$	-0.0364	-4.2364	0.9816	4.2541	18.9103	1.0129	-0.0842	-4.2842	0.8824	4.2842	19.1333	1.0201	-0.0070	-4.2070	0.5514	4.2124	18.0028	1.0030	-0.0012	-4.2012	1.0585	4.2490	18.7708	1.0117
$\beta_{8,3}$	0.0249	-2.0751	1.0934	2.1588	5.5016	1.0280	-0.0430	-2.1430	1.0170	2.1722	5.6267	1.0344	-0.0137	-2.1137	0.6991	2.1390	4.9566	1.0186	0.0662	-2.0338	1.1108	2.1490	5.3701	1.0233

Tabela F.22: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 0$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M5						
Intercepto	0.1909	0.1909	0.6491	0.5193	0.4578	Inf
β_1	0.0941	-0.0059	0.1736	0.1377	0.0302	1.3770
β_2	0.8366	-0.0134	0.1751	0.1402	0.0308	0.1649
β_3	2.4857	-0.0143	0.1711	0.1368	0.0295	0.0547
β_4	1.9777	-0.0223	0.1798	0.1466	0.0328	0.0733
β_5	0.0984	-0.0016	0.1645	0.1312	0.0271	1.3116
β_6	1.4901	-0.0099	0.1924	0.1535	0.0371	0.1024
$\beta_{7,2}$	5.9512	-0.0488	0.3554	0.2864	0.1287	0.0477
$\beta_{8,2}$	4.0120	-0.1880	0.6486	0.5290	0.4560	0.1260
$\beta_{8,3}$	1.9039	-0.1961	0.6861	0.5628	0.5092	0.2680
M6						
Intercepto	0.2173	0.2173	0.6264	0.5327	0.4397	Inf
β_1	0.0842	-0.0158	0.1698	0.1365	0.0291	1.3654
β_2	0.8369	-0.0131	0.1847	0.1459	0.0343	0.1717
β_3	2.4806	-0.0194	0.1749	0.1397	0.0310	0.0559
β_4	1.9786	-0.0214	0.1710	0.1369	0.0297	0.0685
β_5	0.0960	-0.0040	0.1748	0.1415	0.0306	1.4155
β_6	1.4940	-0.0060	0.1831	0.1475	0.0336	0.0983
$\beta_{7,2}$	5.9421	-0.0579	0.3520	0.2902	0.1272	0.0484
$\beta_{8,2}$	4.0016	-0.1984	0.6115	0.5210	0.4132	0.1240
$\beta_{8,3}$	1.8988	-0.2012	0.6636	0.5455	0.4809	0.2598
M7						
Intercepto	0.2015	0.2015	0.6787	0.5382	0.5012	Inf
β_1	0.0907	-0.0093	0.2253	0.1490	0.0508	1.4899
β_2	0.8406	-0.0094	0.1826	0.1437	0.0334	0.1690
β_3	2.4795	-0.0205	0.1926	0.1533	0.0375	0.0613
β_4	1.9628	-0.0372	0.1778	0.1426	0.0330	0.0713
β_5	0.0953	-0.0047	0.1666	0.1300	0.0278	1.3001
β_6	1.4859	-0.0141	0.1858	0.1467	0.0347	0.0978
$\beta_{7,2}$	5.9536	-0.0464	0.3674	0.2895	0.1372	0.0482
$\beta_{8,2}$	4.0042	-0.1958	0.7083	0.5568	0.5400	0.1326
$\beta_{8,3}$	1.9029	-0.1971	0.7225	0.5738	0.5609	0.2733

Tabela F.23: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 0$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5										M6										M9									
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>						
Intercepto	6.7970	6.7970	2.3050	6.8025	51.5126	Inf	6.6691	6.6691	1.6456	6.7053	47.1853	Inf	6.8078	6.8078	2.0233	6.8182	50.4395	Inf	6.6537	6.6537	2.0279	6.6702	48.3835	Inf						
β_1	-0.0352	-0.1352	0.7016	0.3037	0.5105	3.0371	0.0190	-0.0810	0.3494	0.1827	0.1287	1.8274	0.0646	-0.0354	0.6871	0.3128	0.4734	3.1278	0.0098	-0.0583	0.4946	0.2669	0.2480	2.6695						
β_2	-0.0053	-0.8553	0.6838	0.9545	1.1992	1.1229	-0.0334	-0.8834	0.3765	0.9056	0.9221	1.0654	-0.0461	-0.8961	0.7169	0.9840	1.3169	1.1577	0.0099	-0.8605	0.3721	0.8819	0.8789	1.0376						
β_3	-0.0769	-2.5769	0.7026	2.5803	7.1340	1.0321	-0.0089	-2.5089	0.3904	2.5089	6.4468	1.0035	-0.0318	-2.5318	0.6022	2.5467	6.7727	1.0187	-0.0280	-1.2658	1.0504	1.4081	2.7055	0.5633						
β_4	-0.0172	-2.0172	0.6682	2.0306	4.5157	1.0153	-0.0020	-1.9980	0.3662	1.9987	4.1261	0.9994	-0.0126	-2.0126	0.6810	2.0348	4.5144	1.0174	0.0120	-2.0101	0.4838	2.0114	4.2746	1.0057						
β_5	-0.0038	-0.1038	0.5992	0.2859	0.3699	2.8590	-0.0223	-0.1223	0.3786	0.2060	0.1583	2.0598	-0.0565	-0.1565	0.6231	0.2885	0.4127	2.8847	0.0094	-0.1108	0.4591	0.2534	0.2230	2.5343						
β_6	-0.0050	-1.5050	0.6172	1.5366	6.6459	1.0244	0.0161	-1.4839	0.3520	1.4927	2.3259	0.9952	-0.0081	-1.5081	0.6483	1.5579	2.6946	1.0386	-0.0015	-1.4614	0.4954	1.4934	2.3812	0.9956						
$\beta_{7,2}$	-0.0081	-6.0081	1.2234	6.0158	37.5934	1.0026	0.0523	-5.9477	0.8980	5.9477	36.1810	0.9913	-0.0940	-6.0940	1.2524	6.1047	38.7048	1.0174	-0.0561	-6.0561	6.0561	37.0907	1.0094							
$\beta_{8,2}$	-0.1250	-4.3250	1.6479	4.3814	21.4212	1.0432	-0.0160	-4.2160	1.2822	4.2862	19.4189	1.0205	0.0619	-4.1381	1.2370	4.1708	18.6541	0.9930	0.0051	-4.1949	0.6116	4.2013	17.9712	1.0003						
$\beta_{8,3}$	-0.0894	-2.1894	1.6703	2.3035	7.5835	1.0969	-0.0331	-2.1331	1.2967	2.2429	6.2317	1.0680	-0.0506	-2.1506	1.6134	2.3249	7.2281	1.1071	-0.0337	-2.1337	0.7847	2.1679	5.1685	1.0323						
Intercepto	6.6537	6.6537	2.0279	6.6702	48.3835	Inf	6.6684	6.6684	1.3739	6.6684	46.3555	Inf	6.8078	6.8078	2.0233	6.8182	50.4395	Inf	6.6537	6.6537	2.0279	6.6702	48.3835	Inf						
β_1	0.0087	-0.0913	0.7537	0.2927	0.5765	2.9272	0.0417	-0.0583	0.4946	0.2669	0.2480	2.6695	0.0087	-0.0913	0.7537	0.2927	0.5765	2.9272	0.0098	-0.0583	0.4946	0.2669	0.2480	2.6695						
β_2	-0.0197	-0.8697	0.5886	0.9349	1.1028	1.0999	-0.0105	-0.8605	0.3721	0.8819	0.8789	1.0376	-0.0197	-0.8697	0.5886	0.9349	1.1028	1.0999	-0.0105	-0.8605	0.3721	0.8819	0.8789	1.0376						
β_3	0.8156	-1.6844	1.2747	1.9340	4.4619	0.7736	1.2342	-1.2658	1.0504	1.4081	2.7055	0.5633	0.8156	-1.6844	1.2747	1.9340	4.4619	0.7736	1.2342	-1.2658	1.0504	1.4081	2.7055	0.5633						
β_4	-0.0409	-2.0409	0.6012	2.0500	4.5267	1.0250	-0.0101	-2.0101	0.4838	2.0114	4.2746	1.0057	-0.0409	-2.0409	0.6012	2.0500	4.5267	1.0250	-0.0101	-2.0101	0.4838	2.0114	4.2746	1.0057						
β_5	0.0146	-0.0854	0.6295	0.2892	0.4035	2.8919	-0.0108	-0.1108	0.4591	0.2534	0.2230	2.5343	0.0146	-0.0854	0.6295	0.2892	0.4035	2.8919	-0.0108	-0.1108	0.4591	0.2534	0.2230	2.5343						
β_6	0.0401	-1.4599	0.7635	1.5506	2.7142	1.0337	0.0386	-1.4614	0.4954	1.4934	2.3812	0.9956	0.0401	-1.4599	0.7635	1.5506	2.7142	1.0337	0.0386	-1.4614	0.4954	1.4934	2.3812	0.9956						
$\beta_{7,2}$	0.0112	-5.9888	1.2925	6.0201	37.5361	1.0033	-0.0473	-6.0473	0.9076	6.0473	37.3940	1.0079	0.0112	-5.9888	1.2925	6.0201	37.5361	1.0033	-0.0473	-6.0473	0.9076	6.0473	37.3940	1.0079						
$\beta_{8,2}$	-0.0740	-4.2740	1.2039	4.3045	19.7167	1.0249	0.0540	-4.1460	0.9819	4.1619	18.1531	0.9909	-0.0740	-4.2740	1.2039	4.3045	19.7167	1.0249	0.0540	-4.1460	0.9819	4.1619	18.1531	0.9909						
$\beta_{8,3}$	-0.1204	-2.2204	1.3172	2.2919	6.6653	1.0914	-0.0234	-2.1234	1.1037	2.2086	5.7272	1.0517	-0.1204	-2.2204	1.3172	2.2919	6.6653	1.0914	-0.0234	-2.1234	1.1037	2.2086	5.7272	1.0517						

Tabela F.24: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.1713	0.1713	0.5395	0.4550	0.3204	Inf
β_1	0.0943	-0.0057	0.1473	0.1194	0.0217	1.1938
β_2	0.8331	-0.0169	0.1611	0.1278	0.0263	0.1504
β_3	2.4670	-0.0330	0.1599	0.1292	0.0267	0.0517
β_4	1.9771	-0.0229	0.1575	0.1289	0.0253	0.0645
β_5	0.0841	-0.0159	0.1492	0.1200	0.0225	1.2004
β_6	1.4821	-0.0179	0.1567	0.1272	0.0249	0.0848
$\beta_{7,2}$	5.9670	-0.0330	0.3214	0.2570	0.1044	0.0428
$\beta_{8,2}$	4.0450	-0.1550	0.5741	0.4833	0.3536	0.1151
$\beta_{8,3}$	1.9287	-0.1713	0.6036	0.5147	0.3936	0.2451
M2						
Intercepto	0.1751	0.1751	0.5591	0.4622	0.3432	Inf
β_1	0.0894	-0.0106	0.1473	0.1203	0.0218	1.2034
β_2	0.8363	-0.0137	0.1711	0.1381	0.0295	0.1625
β_3	2.4781	-0.0219	0.1623	0.1308	0.0268	0.0523
β_4	1.9900	-0.0100	0.1525	0.1208	0.0233	0.0604
β_5	0.0893	-0.0107	0.1573	0.1280	0.0249	1.2799
β_6	1.4980	-0.0020	0.1551	0.1236	0.0241	0.0824
$\beta_{7,2}$	5.9504	-0.0496	0.3285	0.2634	0.1104	0.0439
$\beta_{8,2}$	4.0369	-0.1631	0.5463	0.4532	0.3250	0.1079
$\beta_{8,3}$	1.9484	-0.1516	0.5655	0.4620	0.3428	0.2200
M3						
Intercepto	0.1877	0.1877	0.5356	0.4368	0.3221	Inf
β_1	0.0983	-0.0017	0.1504	0.1187	0.0226	1.1873
β_2	0.8437	-0.0063	0.1572	0.1240	0.0247	0.1459
β_3	2.4794	-0.0206	0.1612	0.1302	0.0264	0.0521
β_4	1.9854	-0.0146	0.1535	0.1226	0.0238	0.0613
β_5	0.0993	-0.0007	0.1502	0.1190	0.0226	1.1900
β_6	1.4987	-0.0013	0.1573	0.1249	0.0247	0.0833
$\beta_{7,2}$	5.9583	-0.0417	0.3333	0.2662	0.1128	0.0444
$\beta_{8,2}$	4.0253	-0.1747	0.5485	0.4422	0.3313	0.1053
$\beta_{8,3}$	1.9051	-0.1949	0.5956	0.4933	0.3927	0.2349
M4						
Intercepto	0.2005	0.2005	0.5515	0.4649	0.3444	Inf
β_1	0.0887	-0.0113	0.1566	0.1229	0.0247	1.2293
β_2	0.8415	-0.0085	0.1576	0.1252	0.0249	0.1472
β_3	2.4730	-0.0270	0.1620	0.1295	0.0270	0.0518
β_4	1.9986	-0.0014	0.1742	0.1344	0.0303	0.0672
β_5	0.1045	0.0045	0.1492	0.1181	0.0223	1.1812
β_6	1.4776	-0.0224	0.1720	0.1377	0.0301	0.0918
$\beta_{7,2}$	5.9601	-0.0399	0.3312	0.2633	0.1113	0.0439
$\beta_{8,2}$	4.0252	-0.1748	0.5571	0.4558	0.3409	0.1085
$\beta_{8,3}$	1.9119	-0.1881	0.5965	0.5010	0.3912	0.2386

Tabela F.25: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.4$ e $SNR = 1$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	MI					M2					M3					M4								
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	6.6759	6.6759	1.8749	6.6841	48.0825	Inf	6.7692	6.7692	1.3527	6.7824	47.6513	Inf	6.7440	6.7440	1.2646	6.7571	47.0814	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf
β_1	-0.0107	-0.1107	0.6452	0.3008	0.4286	3.0081	0.0042	-0.0958	0.3452	0.1957	0.1283	1.9570	0.0247	-0.0753	0.3690	0.1877	0.1418	1.8769	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868
β_2	-0.0280	-0.8780	0.5748	0.9402	1.1013	1.1061	-0.0119	-0.8619	0.4129	0.8878	0.9134	1.0445	-0.0005	-0.8505	0.3316	0.8736	0.8333	1.0278	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864
β_3	0.0323	-2.4677	0.5795	2.4742	6.4252	0.9897	0.0060	-2.4940	0.4106	2.4940	6.3885	0.9976	-0.0026	-2.5026	0.3002	2.5041	6.3533	1.0016	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014
β_4	0.0346	-1.9654	0.7372	2.0023	4.4062	1.0012	0.0077	-1.9923	0.4427	1.9942	4.1651	0.9971	-0.0175	-2.0175	0.2957	2.0182	4.1576	1.0091	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903
β_5	-0.0313	-0.1313	0.6696	0.2735	0.4656	2.7348	0.0069	-0.0931	0.3953	0.2032	0.1650	2.0325	-0.0026	-0.1026	0.2710	0.1653	0.0840	1.6528	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607
β_6	0.0002	-1.4998	0.5703	1.5300	2.5747	1.0200	0.0092	-1.4908	0.3316	1.4943	2.3326	0.9962	0.0164	-1.4836	0.3585	1.4920	2.3295	0.9946	-0.0332	-1.5332	0.3994	1.5402	2.5104	1.0268
$\beta_{7,2}$	-0.0329	-6.0329	0.8623	6.0329	37.1392	1.0055	0.0340	-5.9660	0.7625	5.9660	36.1742	0.9943	0.0032	-4.1968	0.5942	4.2032	17.9659	1.0008	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988
$\beta_{8,2}$	0.0786	-4.1214	1.1669	4.1702	18.3473	0.9929	-0.0321	-4.2321	1.0447	4.2525	19.0019	1.0125	-0.0916	-4.2916	0.9470	4.2916	19.3148	1.0218	-0.0076	-4.2076	1.1217	4.2620	18.9620	1.0148
$\beta_{8,3}$	0.0464	-2.0536	1.2299	2.2113	5.7301	1.0530	0.0357	-2.0643	1.1531	2.1661	5.5909	1.0315	-0.0603	-2.1603	1.0954	2.2009	5.8670	1.0481	0.0666	-2.0334	1.1714	2.1608	5.5068	1.0289
Intercepto	6.7320	6.7320	1.7758	6.7327	48.4738	Inf	6.8807	6.8807	1.4674	6.8807	49.4974	Inf	6.7440	6.7440	1.2646	6.7571	47.0814	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf
β_1	-0.0004	-0.1004	0.6320	0.2495	0.4095	2.4950	0.0305	-0.0695	0.4034	0.2141	0.1675	2.1412	0.0247	-0.0753	0.3690	0.1877	0.1418	1.8769	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868
β_2	-0.0129	-0.8629	0.5542	0.9388	1.0517	1.1045	0.0208	-0.8292	0.3548	0.8634	0.8134	1.0157	-0.0005	-0.8505	0.3316	0.8736	0.8333	1.0278	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864
β_3	-0.0360	-2.5360	0.5142	2.5369	6.6955	1.0148	0.0243	-2.4757	0.3603	2.4757	6.2423	0.9903	-0.0026	-2.5026	0.3002	2.5041	6.3533	1.0016	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014
β_4	-0.0283	-2.0283	0.5243	2.0402	4.3888	1.0201	0.0326	-2.0326	0.3802	2.0326	4.2761	1.0163	-0.0032	-2.0326	0.3802	2.0326	4.2761	1.0163	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903
β_5	0.0285	-0.0715	0.5190	0.2386	0.2745	2.3859	-0.0033	-0.1033	0.4068	0.2144	0.1762	2.1437	0.0265	-1.4735	0.3623	1.4784	2.3023	0.9856	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607
β_6	-0.0271	-1.5271	0.4779	1.5364	2.5604	1.0243	0.0265	-1.4735	0.3623	1.4784	2.3023	0.9856	-0.0916	-4.2916	0.9470	4.2916	19.3148	1.0218	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988
$\beta_{7,2}$	-0.0181	-6.0181	1.0865	6.0312	37.3983	1.0052	-0.0306	-6.0306	0.8985	6.0306	37.1755	1.0051	-0.0603	-2.1603	1.0954	2.2009	5.8670	1.0481	0.0666	-2.0334	1.1714	2.1608	5.5068	1.0289
$\beta_{8,2}$	0.0750	-4.1250	0.9326	4.1569	17.8853	0.9897	-0.0916	-4.2916	0.9470	4.2916	19.3148	1.0218	-0.0916	-4.2916	0.9470	4.2916	19.3148	1.0218	-0.0916	-4.2916	0.9470	4.2916	19.3148	1.0218
$\beta_{8,3}$	0.0254	-2.0746	1.3342	2.2618	6.0838	1.0770	-0.0603	-2.1603	1.0954	2.2009	5.8670	1.0481	-0.0603	-2.1603	1.0954	2.2009	5.8670	1.0481	0.0666	-2.0334	1.1714	2.1608	5.5068	1.0289
Intercepto	6.8110	6.8110	2.1816	6.8260	51.1490	Inf	6.7440	6.7440	1.2646	6.7571	47.0814	Inf	6.7440	6.7440	1.2646	6.7571	47.0814	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf
β_1	0.0191	-0.0809	0.5863	0.2473	0.3503	2.4728	0.0247	-0.0753	0.3690	0.1877	0.1418	1.8769	0.0247	-0.0753	0.3690	0.1877	0.1418	1.8769	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868
β_2	0.0072	-0.8428	0.5252	0.9293	0.9862	1.0933	-0.0005	-0.8505	0.3316	0.8736	0.8333	1.0278	-0.0005	-0.8505	0.3316	0.8736	0.8333	1.0278	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864
β_3	0.0245	-2.4755	0.5660	2.4807	6.4484	0.9923	-0.0026	-2.5026	0.3002	2.5041	6.3533	1.0016	-0.0026	-2.5026	0.3002	2.5041	6.3533	1.0016	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014
β_4	-0.0091	-2.0091	0.5405	2.0213	4.3287	1.0107	0.0326	-2.0326	0.3802	2.0326	4.2761	1.0163	-0.0032	-2.0326	0.3802	2.0326	4.2761	1.0163	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903
β_5	0.0161	-0.0839	0.6193	0.2926	0.3905	2.9256	-0.0026	-0.1026	0.2710	0.1653	0.0840	1.6528	-0.0026	-0.1026	0.2710	0.1653	0.0840	1.6528	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607
β_6	0.0029	-1.4971	0.4918	1.5218	2.4831	1.0145	0.0164	-1.4836	0.3585	1.4920	2.3295	0.9946	0.0164	-1.4836	0.3585	1.4920	2.3295	0.9946	-0.0332	-1.5332	0.3994	1.5402	2.5104	1.0268
$\beta_{7,2}$	-0.0421	-6.0421	1.1026	6.0592	37.7231	1.0099	0.0137	-5.9863	0.6486	5.9863	36.2563	0.9977	0.0137	-5.9863	0.6486	5.9863	36.2563	0.9977	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988
$\beta_{8,2}$	-0.1009	-4.3009	1.5240	4.3486	20.8205	1.0354	0.0032	-4.1968	0.5942	4.2032	17.9659	1.0008	0.0032	-4.1968	0.5942	4.2032	17.9659	1.0008	-0.0076	-4.2076	1.1217	4.2620	18.9620	1.0148
$\beta_{8,3}$	-0.0469	-2.1469	1.6410	2.2857	7.3021	1.0884	-0.0070	-2.1070	0.7446	2.1402	4.9937	1.0191	-0.0070	-2.1070	0.7446	2.1402	4.9937	1.0191	0.0666	-2.0334	1.1714	2.1608	5.5068	1.0289
Intercepto	6.7039	6.7039	2.1104	6.7382	49.3961	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf	6.7554	6.7554	1.5345	6.7945	47.9902	Inf
β_1	0.0154	-0.0846	0.4883	0.2206	0.2456	2.2065	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868	0.0187	-0.0813	0.3228	0.1687	0.1108	1.6868
β_2	-0.0064	-0.8564	0.6466	0.9335	1.1515	1.0983	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864	0.0223	0.3182	0.8529	0.7864	1.0035	0.7864
β_3	0.0231	-2.4769	0.6361	2.5021	6.5398	1.0009	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014	-0.0034	-2.5034	0.3113	2.5034	6.3638	1.0014
β_4	-0.0209	-2.0209	0.6199	2.0388	4.4681	1.0194	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903	0.0203	-1.9797	0.3316	1.9806	4.0292	0.9903
β_5	0.0442	-0.0558	0.5029	0.2373	0.2560	2.3733	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607	-0.0305	-0.1305	0.4275	0.1961	0.1998	1.9607
β_6	-0.0359	-1.5359	0.4762	1.5498	2.5858	1.0332	-0.0332	-1.5332	0.3994	1.5402	2.5104	1.0268	-0.0332	-1.5332	0.3994	1.5402	2.5104	1.0268	-0.0332	-1.5332	0.3994	1.5402	2.5104	1.0268
$\beta_{7,2}$	-0.1085	-6.1085	1.1764	6.1135	38.6971	1.0189	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988	0.0075	-5.9925	0.6967	5.9925	36.3954	0.9988
$\beta_{8,2}$																								

Tabela F.26: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.8$ e $SNR = 5$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1						
Intercepto	0.1124	0.1124	0.3357	0.2845	0.1253	Inf
β_1	0.0938	-0.0062	0.0927	0.0756	0.0086	0.7564
β_2	0.8385	-0.0115	0.1016	0.0806	0.0105	0.0949
β_3	2.4797	-0.0203	0.1009	0.0817	0.0106	0.0327
β_4	1.9856	-0.0144	0.0992	0.0812	0.0100	0.0406
β_5	0.0876	-0.0124	0.0941	0.0761	0.0090	0.7608
β_6	1.4884	-0.0116	0.0986	0.0802	0.0099	0.0534
$\beta_{7,2}$	5.9811	-0.0189	0.2031	0.1626	0.0416	0.0271
$\beta_{8,2}$	4.0966	-0.1034	0.3572	0.3026	0.1383	0.0720
$\beta_{8,3}$	1.9850	-0.1150	0.3755	0.3217	0.1542	0.1532
M2						
Intercepto	0.1181	0.1181	0.3465	0.2873	0.1340	Inf
β_1	0.0901	-0.0099	0.0935	0.0771	0.0088	0.7715
β_2	0.8401	-0.0099	0.1080	0.0872	0.0118	0.1026
β_3	2.4866	-0.0134	0.1024	0.0825	0.0107	0.0330
β_4	1.9936	-0.0064	0.0962	0.0764	0.0093	0.0382
β_5	0.0904	-0.0096	0.0990	0.0813	0.0099	0.8135
β_6	1.4981	-0.0019	0.0982	0.0784	0.0096	0.0523
$\beta_{7,2}$	5.9701	-0.0299	0.2068	0.1659	0.0436	0.0277
$\beta_{8,2}$	4.0882	-0.1118	0.3389	0.2824	0.1273	0.0672
$\beta_{8,3}$	1.9939	-0.1061	0.3512	0.2888	0.1346	0.1375
M3						
Intercepto	0.1274	0.1274	0.3383	0.2785	0.1307	Inf
β_1	0.0965	-0.0035	0.0946	0.0753	0.0090	0.7526
β_2	0.8447	-0.0053	0.0995	0.0785	0.0099	0.0923
β_3	2.4871	-0.0129	0.1013	0.0818	0.0104	0.0327
β_4	1.9905	-0.0095	0.0968	0.0773	0.0095	0.0386
β_5	0.0969	-0.0031	0.0945	0.0751	0.0089	0.7513
β_6	1.4984	-0.0016	0.0998	0.0790	0.0100	0.0526
$\beta_{7,2}$	5.9746	-0.0254	0.2109	0.1684	0.0451	0.0281
$\beta_{8,2}$	4.0797	-0.1203	0.3462	0.2828	0.1344	0.0673
$\beta_{8,3}$	1.9654	-0.1346	0.3746	0.3122	0.1584	0.1487
M4						
Intercepto	0.1374	0.1374	0.3427	0.2942	0.1363	Inf
β_1	0.0897	-0.0103	0.0988	0.0785	0.0099	0.7846
β_2	0.8431	-0.0069	0.0992	0.0789	0.0099	0.0928
β_3	2.4829	-0.0171	0.1022	0.0819	0.0107	0.0328
β_4	1.9986	-0.0014	0.1098	0.0850	0.0121	0.0425
β_5	0.1000	0.0000	0.0943	0.0750	0.0089	0.7501
β_6	1.4850	-0.0150	0.1089	0.0872	0.0121	0.0582
$\beta_{7,2}$	5.9754	-0.0246	0.2092	0.1665	0.0444	0.0278
$\beta_{8,2}$	4.0777	-0.1223	0.3479	0.2909	0.1360	0.0693
$\beta_{8,3}$	1.9676	-0.1324	0.3723	0.3197	0.1561	0.1522

Tabela F.27: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 4\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.8$ e $SNR = 5$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coefficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1												
Intercepto	6.7271	6.7271	1.5394	6.7403	47.6242	Inf	6.7598	6.7598	1.0116	6.7626	46.7178	Inf
β_1	0.0184	-0.0816	0.5294	0.2626	0.2869	2.6261	0.0027	-0.0973	0.2929	0.1791	0.0953	1.7909
β_2	-0.0247	-0.8747	0.4548	0.9162	0.9720	1.0779	-0.0057	-0.8557	0.2850	0.8627	0.8134	1.0150
β_3	0.0374	-2.4626	0.4922	2.4631	6.3068	0.9852	-0.0015	-2.5015	0.2981	2.5015	6.3464	1.0006
β_4	0.0422	-1.9578	0.5711	1.9759	4.1589	0.9879	0.0037	-1.9963	0.3135	1.9963	4.0837	0.9982
β_5	-0.0304	-0.1304	0.5429	0.2435	0.3117	2.4349	0.0048	-0.0952	0.2815	0.1708	0.0883	1.7080
β_6	-0.0097	-1.5097	0.4632	1.5229	2.4938	1.0152	-0.0078	-1.5078	0.2136	1.5078	2.3191	1.0052
$\beta_{7,2}$	-0.0564	-6.0564	0.7696	6.0564	37.2722	1.0094	0.0369	-5.9631	0.5557	5.9631	35.8678	0.9939
$\beta_{8,2}$	0.0400	-4.1600	0.9378	4.1888	18.1848	0.9973	-0.0194	-4.2194	0.7843	4.2287	18.4184	1.0068
$\beta_{8,3}$	0.0604	-2.0396	0.9847	2.1697	5.1296	1.0332	0.0051	-2.0949	0.7883	2.1269	5.0099	1.0128
M2												
Intercepto	6.6872	6.6872	1.4962	6.7160	46.9574	Inf	6.7987	6.7987	1.0368	6.7987	47.2974	Inf
β_1	-0.0084	-0.1084	0.4983	0.2275	0.2601	2.2747	0.0235	-0.0765	0.2857	0.1732	0.0875	1.7318
β_2	-0.0177	-0.8677	0.4540	0.9132	0.9590	1.0744	0.0001	-0.8499	0.2733	0.8640	0.7969	1.0164
β_3	-0.0161	-2.5161	0.4406	2.5161	6.5250	1.0064	0.0094	-2.4906	0.2468	2.4906	6.2638	0.9962
β_4	-0.0266	-2.0266	0.4327	2.0336	4.2941	1.0168	-0.0159	-2.0159	0.2937	2.0159	4.1502	1.0080
β_5	0.0173	-0.0827	0.4273	0.2089	0.1895	2.0892	-0.0043	-0.1043	0.2988	0.1806	0.1001	1.8056
β_6	-0.0302	-1.5302	0.3946	1.5332	2.4973	1.0221	0.0135	-1.4865	0.2626	1.4865	2.2787	0.9910
$\beta_{7,2}$	0.0164	-5.9836	0.9768	5.9850	36.7574	0.9975	-0.0051	-6.0051	0.6851	6.0051	36.5311	1.0009
$\beta_{8,2}$	0.0527	-4.1473	1.1608	4.2172	18.5472	1.0041	-0.0274	-4.2274	0.6665	4.2305	18.3149	1.0073
$\beta_{8,3}$	0.0389	-2.0611	1.1861	2.2173	5.6550	1.0559	0.0006	-2.0994	0.7559	2.1331	4.9790	1.0158
M3												
Intercepto	6.8195	6.8195	1.9555	6.8711	50.3302	Inf	6.7321	6.7321	0.9553	6.7321	46.2345	Inf
β_1	0.0188	-0.0812	0.4571	0.2153	0.2155	2.1530	0.0228	-0.0772	0.2676	0.1562	0.0776	1.5618
β_2	-0.0159	-0.8659	0.4387	0.9086	0.9422	1.0689	-0.0030	-0.8530	0.2649	0.8590	0.7978	1.0106
β_3	-0.0021	-2.5021	0.4468	2.5034	6.4602	1.0014	-0.0106	-2.5106	0.2405	2.5106	6.3610	1.0042
β_4	-0.0116	-2.0116	0.4658	2.0197	4.2634	1.0099	-0.0198	-2.0198	0.2375	2.0198	4.1361	1.0099
β_5	0.0098	-0.0902	0.4603	0.2325	0.2200	2.3254	-0.0066	-0.1066	0.2133	0.1485	0.0569	1.4846
β_6	-0.0001	-1.5001	0.4357	1.5231	2.4402	1.0154	0.0081	-1.4919	0.2751	1.4926	2.3013	0.9950
$\beta_{7,2}$	-0.0710	-6.0710	0.9042	6.0772	37.6746	1.0129	0.0314	-5.9686	0.4976	5.9686	35.8722	0.9948
$\beta_{8,2}$	-0.0596	-4.2596	1.5890	4.3656	20.6687	1.0394	0.0119	-4.1881	0.4982	4.1907	17.7883	0.9978
$\beta_{8,3}$	-0.0454	-2.1454	1.6758	2.3044	7.4108	1.0973	-0.0200	-2.1200	0.5869	2.1375	4.8390	1.0179
M4												
Intercepto	6.6737	6.6737	1.3592	6.6744	46.3853	Inf	6.7559	6.7559	1.1858	6.7555	47.0489	Inf
β_1	0.0190	-0.0810	0.3921	0.1819	0.1603	1.8191	0.0137	-0.0863	0.2535	0.1514	0.0717	1.5140
β_2	0.0014	-0.8486	0.4835	0.8999	0.9539	1.0587	-0.0036	-0.8464	0.2428	0.8517	0.7754	1.0021
β_3	0.0251	-2.4749	0.4338	2.4807	6.3133	0.9923	-0.0049	-2.5049	0.2484	2.5049	6.3363	1.0020
β_4	-0.0156	-2.0156	0.4605	2.0210	4.2746	1.0105	0.0213	-1.9787	0.2762	1.9787	3.9915	0.9893
β_5	0.0194	-0.0806	0.3510	0.1884	0.1297	1.8839	-0.0242	-0.1242	0.3203	0.1760	0.1180	1.7595
β_6	-0.0387	-1.5387	0.3763	1.5439	2.5091	1.0292	-0.0235	-1.5235	0.3243	1.5243	2.4263	1.0162
$\beta_{7,2}$	-0.0552	-6.0552	0.8414	6.0552	37.3732	1.0092	0.0187	-5.9813	0.5845	5.9813	36.1182	0.9969
$\beta_{8,2}$	0.0014	-4.1986	0.7366	4.1987	18.1712	0.9997	-0.0055	-4.2055	0.9111	4.2409	18.5165	1.0097
$\beta_{8,3}$	-0.0073	-2.1073	0.7627	2.1531	5.0224	1.0253	0.0197	-2.0803	0.9044	2.1360	5.1456	1.0171

Tabela F.28: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *ML*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$ e $SNR = 1$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M5						
Intercepto	0.1691	0.1691	0.5693	0.4589	0.3526	Inf
β_1	0.0936	-0.0064	0.1539	0.1226	0.0237	1.2265
β_2	0.8370	-0.0130	0.1559	0.1249	0.0245	0.1469
β_3	2.4893	-0.0107	0.1524	0.1215	0.0234	0.0486
β_4	1.9812	-0.0188	0.1602	0.1306	0.0260	0.0653
β_5	0.0972	-0.0028	0.1463	0.1173	0.0214	1.1734
β_6	1.4912	-0.0088	0.1717	0.1371	0.0296	0.0914
$\beta_{7,2}$	5.9622	-0.0378	0.3155	0.2538	0.1009	0.0423
$\beta_{8,2}$	4.0308	-0.1692	0.5714	0.4683	0.3552	0.1115
$\beta_{8,3}$	1.9207	-0.1793	0.6060	0.5008	0.3994	0.2385
M6						
Intercepto	0.1956	0.1956	0.5567	0.4745	0.3482	Inf
β_1	0.0841	-0.0159	0.1506	0.1218	0.0229	1.2184
β_2	0.8369	-0.0131	0.1654	0.1309	0.0275	0.1540
β_3	2.4844	-0.0156	0.1561	0.1248	0.0246	0.0499
β_4	1.9817	-0.0183	0.1525	0.1219	0.0236	0.0610
β_5	0.0948	-0.0052	0.1551	0.1260	0.0241	1.2596
β_6	1.4946	-0.0054	0.1630	0.1313	0.0266	0.0875
$\beta_{7,2}$	5.9535	-0.0465	0.3136	0.2581	0.1005	0.0430
$\beta_{8,2}$	4.0187	-0.1813	0.5445	0.4657	0.3294	0.1109
$\beta_{8,3}$	1.9133	-0.1867	0.5915	0.4882	0.3848	0.2325
M9						
Intercepto	0.1737	0.1737	0.5958	0.4736	0.3852	Inf
β_1	0.0903	-0.0097	0.2044	0.1328	0.0419	1.3284
β_2	0.8409	-0.0091	0.1643	0.1284	0.0271	0.1511
β_3	2.4846	-0.0154	0.1719	0.1372	0.0298	0.0549
β_4	1.9686	-0.0314	0.1588	0.1271	0.0262	0.0635
β_5	0.0942	-0.0058	0.1488	0.1164	0.0222	1.1641
β_6	1.4883	-0.0117	0.1658	0.1314	0.0276	0.0876
$\beta_{7,2}$	5.9663	-0.0337	0.3292	0.2579	0.1095	0.0430
$\beta_{8,2}$	4.0279	-0.1721	0.6210	0.4929	0.4153	0.1174
$\beta_{8,3}$	1.9239	-0.1761	0.6361	0.5101	0.4357	0.2429

Tabela F.29: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$ e $SNR = 1$, para $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5					M6					M9				
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>
Intercepto	6.7791	6.7791	2.2075	6.7946	50.8286	6.8276	6.8276	2.3013	6.8503	50.6835	6.6456	6.6456	1.9644	6.6740	48.0224
β_1	-0.0304	-0.1304	0.6956	0.3004	0.5009	0.0101	-0.0899	0.7326	0.3257	0.5376	0.0375	-0.0625	0.4605	0.2490	0.2159
β_2	0.0018	-0.8482	0.6813	0.9502	1.1836	0.0036	-0.8464	0.7333	0.9885	1.3382	-0.0103	-0.8603	0.3469	0.8780	0.8605
β_3	-0.0651	-2.5651	0.6714	2.5678	7.0304	-0.0284	-2.5284	0.6003	2.5320	6.6720	1.4041	-1.0959	1.0609	1.2750	2.3266
β_4	-0.0029	-2.0029	0.6420	2.0193	4.4238	0.0132	-1.9868	0.6654	2.0370	4.5254	-0.0122	-2.0122	0.4553	2.0138	4.2562
β_5	0.0017	-0.0983	0.6023	0.2760	0.3724	0.0065	-0.0935	0.6176	0.2834	0.4008	-0.0066	-1.5066	0.3067	1.5152	0.2088
β_6	-0.0158	-1.5158	0.5987	1.5480	2.6561	0.0066	-1.5066	0.6738	1.5714	2.7700	-0.0500	-6.0500	0.6016	6.0500	0.2088
$\beta_{7,2}$	0.0279	-5.9721	1.1699	5.9778	37.0344	-0.0500	-6.0500	1.2499	6.0973	38.6519	-0.0500	-6.0500	0.6016	6.0500	2.3639
$\beta_{8,2}$	-0.1156	-4.3156	1.6710	4.3900	21.4165	-0.0070	-4.2070	1.7974	4.2438	19.8853	-0.0070	-4.2070	0.6209	4.2218	18.0843
$\beta_{8,3}$	-0.0777	-2.1777	1.6470	2.3271	7.4549	-0.0448	-2.1448	2.1549	2.3848	8.8530	-0.0448	-2.1448	0.7449	2.1739	5.1551
Intercepto	6.7370	6.7370	2.3013	6.8503	50.6835	6.8276	6.8276	2.3013	6.8503	50.6835	6.8276	6.8276	1.1796	6.8276	48.0071
β_1	0.0713	-0.0287	0.7326	0.3257	0.5376	0.0101	-0.0899	0.7326	0.3257	0.5376	0.0101	-0.0899	0.3319	0.1734	0.1182
β_2	-0.0447	-0.8947	0.7333	0.9885	1.3382	0.0036	-0.8464	0.7333	0.9885	1.3382	0.0036	-0.8464	0.3569	0.8676	0.8439
β_3	-0.0123	-2.5123	0.6003	2.5320	6.6720	-0.0284	-2.5284	0.6003	2.5320	6.6720	-0.0284	-2.5284	0.3527	2.5284	6.5173
β_4	-0.0206	-2.0206	0.6654	2.0370	4.5254	0.0132	-1.9868	0.6654	2.0370	4.5254	0.0132	-1.9868	0.3404	1.9876	4.0632
β_5	-0.0395	-0.1395	0.6176	0.2834	0.4008	0.0065	-0.0935	0.6176	0.2834	0.4008	0.0065	-0.0935	0.3253	0.1824	0.1146
β_6	-0.0218	-1.5218	0.6738	1.5714	2.7700	-0.0066	-1.5066	0.6738	1.5714	2.7700	-0.0066	-1.5066	0.3067	1.5152	0.2369
$\beta_{7,2}$	-0.0901	-6.0901	1.2499	6.0973	38.6519	-0.0500	-6.0500	1.2499	6.0973	38.6519	-0.0500	-6.0500	0.6016	6.0500	36.9648
$\beta_{8,2}$	0.1190	-4.0810	1.7974	4.2438	19.8853	-0.0070	-4.2070	1.7974	4.2438	19.8853	-0.0070	-4.2070	0.6209	4.2218	18.0843
$\beta_{8,3}$	0.0483	-2.0517	2.1549	2.3848	8.8530	-0.0448	-2.1448	2.1549	2.3848	8.8530	-0.0448	-2.1448	0.7449	2.1739	5.1551
Intercepto	6.6456	6.6456	1.9644	6.6740	48.0224	6.6762	6.6762	1.3159	6.6762	46.3037	6.6762	6.6762	1.3159	6.6762	46.3037
β_1	0.0054	-0.0946	0.7641	0.2934	0.5928	0.0375	-0.0625	0.4605	0.2490	0.2159	0.0375	-0.0625	0.4605	0.2490	0.2159
β_2	-0.0114	-0.8614	0.5869	0.9343	1.0865	-0.0103	-0.8603	0.3469	0.8780	0.8605	-0.0103	-0.8603	0.3469	0.8780	0.8605
β_3	0.9539	-1.5461	1.3435	1.8347	4.1954	1.4041	-1.0959	1.0609	1.2750	2.3266	1.4041	-1.0959	1.0609	1.2750	2.3266
β_4	-0.0305	-2.0305	0.5762	2.0405	4.4550	-0.0122	-2.0122	0.4553	2.0138	4.2562	-0.0122	-2.0122	0.4553	2.0138	4.2562
β_5	0.0167	-0.0833	0.6157	0.2767	0.3860	-0.0126	-0.1126	0.4429	0.2436	0.2088	-0.0126	-0.1126	0.4429	0.2436	0.2088
β_6	0.0394	-1.4606	0.7516	1.5500	2.6982	0.0368	-1.4632	0.4782	1.4907	2.3697	0.0368	-1.4632	0.4782	1.4907	2.3697
$\beta_{7,2}$	0.0328	-5.9672	1.2367	5.9934	37.1367	-0.0488	-6.0488	0.8726	6.0488	37.3492	-0.0488	-6.0488	0.8726	6.0488	37.3492
$\beta_{8,2}$	-0.0581	-4.2581	1.2955	4.3182	19.8093	0.0546	-4.1454	0.9819	4.1578	18.1484	0.0546	-4.1454	0.9819	4.1578	18.1484
$\beta_{8,3}$	-0.1171	-2.2171	1.3575	2.3077	6.7584	-0.0182	-2.1182	1.0668	2.1906	5.6248	-0.0182	-2.1182	1.0668	2.1906	5.6248

As Tabelas F.31 - F.49 correspondem a simulação com os modelos *MI* para $l \in \{11, \dots, 14\}$.

Tabela F.30: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{5, 6, 9\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 1$ e $SNR = 5$, $n_1 \in \{40, 100\}$.

Coeficiente	M5										M6										M9									
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>						
Intercepto	-1.0969	-1.0969	2.8166	2.1370	9.1362	Inf	-1.2643	1.6470	1.6278	4.3110	Inf	-1.1998	-1.1998	1.5372	1.5534	3.8023	Inf	-1.4078	-1.4078	1.5676	1.6546	4.4390	Inf	-1.3560	-1.3560	2.3955	2.0879	7.5770	Inf	
β_1	0.1974	-0.8026	0.9092	1.0892	1.4709	1.0892	-0.2588	0.6701	0.9346	0.9984	1.0892	0.2403	-0.7597	0.6236	0.9362	0.9660	0.9362	0.0442	-0.9558	0.4984	1.0093	1.1619	1.0093	-0.2440	-0.2440	0.6032	1.0970	1.4124	1.0970	
β_2	-0.0057	-5.0057	0.6972	5.0057	25.5433	1.0011	-0.0410	0.4223	5.0410	25.5899	1.0082	-0.062	5.0062	0.4004	5.0062	25.2224	1.0012	0.0261	-4.9739	0.6528	4.9836	4.9975	25.1673	0.9995	0.0261	-4.9739	0.6528	4.9836	4.9975	25.1673
β_3	-0.0322	1.9678	0.6548	2.0078	4.3012	1.0039	0.0231	0.5166	2.0234	4.3600	1.0117	-0.0122	1.9878	0.4397	1.9931	4.1446	0.9966	-0.5153	1.4847	1.1656	1.7752	3.5629	2.4921	0.7029	-0.0205	-2.0205	0.7486	2.0618	4.6429	1.0309
β_4	0.0329	-1.9671	0.7539	2.0110	4.4376	1.0055	-0.0235	0.4161	2.0243	4.2679	1.0121	-0.0120	2.0174	0.4553	2.0174	4.2556	1.0087	0.0205	-2.0205	0.7486	2.0618	4.6429	1.0309	1.0037	-0.0205	-2.0205	0.7486	2.0618	4.6429	
β_5	0.0006	4.0006	0.7686	4.0022	16.5959	1.0005	-0.0080	0.4483	3.9920	16.1369	0.9980	0.0135	4.0135	0.4921	4.0145	16.3501	1.0036	-0.0079	3.9921	0.6684	3.9938	16.3838	0.9984	0.0074	-4.9926	0.7144	4.9708	25.1246	0.9942	
β_6	-0.0206	-5.0206	0.8420	5.0206	25.9154	1.0041	0.0126	0.4157	4.9874	25.0469	0.9975	-0.0110	5.0110	0.3957	5.0110	25.2665	1.0022	0.0387	-4.9613	0.7144	4.9708	25.1246	0.9942	0.0040	-5.4250	1.3385	5.4466	31.2220	1.0086	
$\beta_{7,2}$	-0.0199	-5.4199	1.3801	5.4259	31.2797	1.0048	0.0329	0.9468	5.3704	29.7027	0.9945	-0.0071	-5.4071	0.7915	5.4071	29.8630	1.0013	-0.0307	-5.4307	1.4667	5.4398	31.6439	1.0074	0.0047	-6.0047	1.4330	6.0461	38.1102	1.0077	
$\beta_{8,2}$	-0.2626	5.7374	2.4188	6.0475	38.7680	1.0079	-0.0878	1.3714	5.9988	36.8348	0.9998	0.0319	6.0319	1.0666	6.0390	37.5217	1.0065	0.0594	6.0594	1.7771	6.1541	39.8746	1.0257	0.0047	-6.0047	1.4330	6.0461	38.1102	1.0077	
$\beta_{8,3}$	-0.1566	2.8434	2.5028	3.2962	14.3491	1.0987	-0.1059	1.4216	3.0890	10.3970	1.0297	-0.0737	2.9263	1.2513	3.0714	10.1291	1.0238	-0.0760	2.9240	1.7990	3.1649	11.7860	1.0550	-0.0211	-2.9789	1.8489	3.1840	12.2924	1.0613	
Intercepto	-1.1874	-1.1874	2.3852	2.0250	7.0991	Inf	-1.1998	1.5372	1.5534	3.8023	Inf	-1.1998	-1.1998	1.5372	1.5534	3.8023	Inf	-1.3560	-1.3560	2.3955	2.0879	7.5770	Inf	-1.3560	-1.3560	2.3955	2.0879	7.5770	Inf	
β_1	0.2447	-0.7553	0.8390	1.0454	1.2743	1.0454	-0.2403	0.6236	0.9362	0.9660	1.0454	0.2403	-0.7597	0.6236	0.9362	0.9660	0.9362	0.0442	-0.9558	0.4984	1.0093	1.1619	1.0093	-0.2440	-0.2440	0.6032	1.0970	1.4124	1.0970	
β_2	0.0039	-4.9961	0.7699	4.9961	25.5534	0.9992	-0.062	5.0062	4.004	5.0062	25.2224	-0.062	5.0062	0.4004	5.0062	25.2224	1.0012	0.0261	-4.9739	0.6528	4.9836	4.9975	25.1673	0.9995	0.0261	-4.9739	0.6528	4.9836	4.9975	25.1673
β_3	-0.0554	1.9446	0.7986	2.0184	4.4190	1.0092	-0.0122	1.9878	0.4397	1.9931	4.1446	-0.0122	1.9878	0.4397	1.9931	4.1446	0.9966	-0.5153	1.4847	1.1656	1.7752	3.5629	2.4921	0.7029	-0.0205	-2.0205	0.7486	2.0618	4.6429	1.0309
β_4	0.0212	-1.9788	0.7375	2.0290	4.4594	1.0145	-0.0120	0.4553	2.0174	4.2556	1.0087	-0.0120	2.0174	0.4553	2.0174	4.2556	1.0087	0.0212	-1.9788	0.7375	2.0290	4.4594	1.0145	1.0037	-0.0205	-2.0205	0.7486	2.0618	4.6429	1.0309
β_5	-0.0319	3.9681	0.6073	3.9688	16.1150	0.9922	0.0135	4.0135	4.0145	16.3501	1.0036	0.0135	4.0135	0.4921	4.0145	16.3501	1.0036	-0.0319	3.9681	0.6073	3.9688	16.1150	0.9922	0.0074	-4.9926	0.7144	4.9708	25.1246	0.9942	
β_6	0.0139	-4.9861	0.7900	4.9861	25.4854	0.9972	-0.0110	0.3957	5.0110	25.2665	1.0022	-0.0110	5.0110	0.3957	5.0110	25.2665	1.0022	0.0139	-4.9861	0.7900	4.9861	25.4854	0.9972	0.0040	-5.4250	1.3385	5.4466	31.2220	1.0086	
$\beta_{7,2}$	-0.0307	-5.4307	1.4667	5.4398	31.6439	1.0074	-0.0071	0.7915	5.4071	29.8630	1.0013	-0.0071	-5.4071	0.7915	5.4071	29.8630	1.0013	-0.0307	-5.4307	1.4667	5.4398	31.6439	1.0074	0.0047	-6.0047	1.4330	6.0461	38.1102	1.0077	
$\beta_{8,2}$	0.0594	6.0594	1.7771	6.1541	39.8746	1.0257	0.0319	1.0666	6.0390	37.5217	1.0065	0.0319	6.0319	1.0666	6.0390	37.5217	1.0065	0.0594	6.0594	1.7771	6.1541	39.8746	1.0257	0.0047	-6.0047	1.4330	6.0461	38.1102	1.0077	
$\beta_{8,3}$	-0.0760	2.9240	1.7990	3.1649	11.7860	1.0550	-0.0737	1.2513	3.0714	10.1291	1.0238	-0.0737	2.9263	1.2513	3.0714	10.1291	1.0238	-0.0760	2.9240	1.7990	3.1649	11.7860	1.0550	-0.0211	-2.9789	1.8489	3.1840	12.2924	1.0613	

Tabela F.31: Coeficientes ajustados e os valores de bias, sd, mae, mse e mape para os modelos MI, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$, $SNR = -5$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Table with 15 columns: Coeficiente, beta, bias, sd, mae, mse, mape, beta, bias, sd, mae, mse, mape, beta, bias, sd, mae, mse, mape. The table is divided into sections for n1 = 3000, n1 = 40, and n1 = 100, each with a sub-section for MI1 and MI2. Each section contains data for coefficients beta_1 through beta_8,2 and an Intercepto row.

Tabela F.33: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M1, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$					
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1																
Intercepto	1.1986	1.1986	0.9309	1.2798	2.3030	6.9508	6.9508	3.6600	7.0138	61.7096	6.8308	6.8308	2.9496	6.8456	55.3596	Inf
β_1	9.7174	9.6174	0.1316	9.6174	92.5124	9.1662	9.0662	0.9561	9.0662	83.5504	9.5490	9.4490	0.8358	9.4490	89.9822	94.4901
β_2	0.7829	-0.0671	0.0547	0.0720	0.0075	-0.0482	-0.8952	0.1645	1.0778	1.7164	-0.0031	0.8531	0.6155	0.8953	1.1066	1.0533
β_3	2.3006	-0.1994	0.0584	0.1994	0.0432	0.0027	-2.4973	0.9092	2.4993	7.0634	-0.0217	-2.5217	0.5357	2.5217	6.6459	1.0087
β_4	1.8415	-0.1585	0.0550	0.1586	0.0282	-0.0161	-2.0161	0.8215	2.0205	4.7396	-0.0085	-2.0085	0.5392	2.0085	4.3250	1.0043
β_5	0.0918	-0.0082	0.0559	0.0453	0.0032	-0.0370	-0.1370	0.9039	0.7220	0.8358	-0.0204	-0.1204	0.5265	0.4301	0.2917	4.3009
β_6	1.3751	-0.1249	0.0554	0.1252	0.0187	-0.0090	-1.5090	0.8984	1.5465	3.0843	-0.0065	-1.5065	0.5358	1.5065	2.5666	1.0043
$\beta_{7,2}$	5.5148	-0.4852	0.1176	0.4852	0.2493	-0.1457	-6.1457	1.8354	6.1457	41.1385	-0.0848	-6.0848	1.0864	6.0848	38.2045	1.0141
$\beta_{8,2}$	3.1986	-1.0014	0.1564	1.0014	1.0273	0.0971	-4.1029	2.1501	4.1769	21.4568	0.0511	-4.1489	1.3730	4.1489	19.0988	0.9878
$\beta_{8,3}$	1.1414	-0.9586	0.1582	0.9586	0.9440	-0.0403	-2.1403	2.4799	2.6403	10.7309	0.0324	-2.0676	1.5141	2.1961	6.5672	1.0458
M2																
Intercepto	0.4683	0.4683	1.0752	0.9380	1.3755	6.8942	6.8942	3.8016	6.9854	61.9829	6.8581	6.8581	2.7576	6.8880	54.6372	Inf
β_1	1.0190	0.0090	0.1977	1.0190	0.0392	0.0554	-0.0446	0.6975	0.3270	0.4885	0.0362	-0.0638	0.3809	0.1492	0.1492	2.1941
β_2	0.8174	-0.0326	0.1964	0.1599	0.0396	0.0194	-0.8306	0.6550	0.9417	1.1190	0.0021	-0.8479	0.3833	0.8794	0.8659	1.0346
β_3	2.4545	-0.0455	0.1885	0.1545	0.0376	-0.0233	-2.5233	0.5452	2.5251	6.6645	-0.0125	-2.5125	0.3208	2.5125	6.4156	1.0050
β_4	1.9621	-0.0379	0.1985	0.1578	0.0408	0.0138	-1.9862	0.5799	2.0028	4.2811	0.0166	-1.9834	0.3825	1.9850	4.0801	0.9925
β_5	0.0979	-0.0021	0.1883	0.1510	0.0354	-0.0031	-1.0131	0.6623	0.3317	0.4492	-0.0056	-0.1056	0.3785	0.2309	0.1544	2.3095
β_6	1.4701	-0.0299	0.1855	0.1481	0.0353	0.0559	-1.4441	0.5641	1.4887	2.4038	0.0179	-1.4821	0.3469	1.4846	2.3170	0.9897
$\beta_{7,2}$	5.8344	-0.1656	0.3856	0.3384	0.1762	-0.0702	-6.0702	1.1290	6.0753	38.1215	-0.0531	-6.0531	0.6923	6.0531	37.1198	1.0089
$\beta_{8,2}$	3.8071	-0.3929	0.6432	0.6042	0.5681	-0.0094	-4.2094	1.1433	4.2408	19.0266	0.0055	-4.1945	0.8730	4.2203	18.3556	1.0048
$\beta_{8,3}$	1.7226	-0.3774	0.6480	0.6011	0.5623	-0.0035	-2.1035	1.3412	2.2587	6.2236	-0.0256	-2.1256	0.9096	2.1609	5.3458	1.0290
M3																
Intercepto	1.1988	1.1988	0.9303	1.2797	2.3026	6.8867	6.8867	3.5348	6.9609	59.9205	6.8365	6.8365	2.9549	6.8461	55.4689	Inf
β_1	9.7174	9.6174	0.1322	9.6174	92.5120	9.1491	9.0491	1.1999	9.0491	83.3256	9.5298	9.4298	0.8175	9.4298	89.5886	94.2975
β_2	0.7829	-0.0671	0.0547	0.0721	0.0075	-0.0730	-0.9230	0.8870	1.0861	1.6387	-0.0395	-0.8895	0.5541	0.9164	1.0982	1.0781
β_3	2.3007	-0.1993	0.0572	0.1993	0.0430	-0.0315	-2.5315	0.9526	2.5386	7.3157	0.0211	-2.4789	0.5404	2.4789	6.4368	0.9915
β_4	1.8388	-0.1612	0.0527	0.1612	0.0288	0.0003	-0.9997	0.9580	2.0268	4.8165	-0.0107	-2.0107	0.5570	2.0107	4.3532	1.0054
β_5	0.0935	-0.0065	0.0565	0.0451	0.0032	0.0086	-0.0914	0.9328	0.7450	0.8785	-0.0044	-0.1044	0.5395	0.4492	0.3020	4.4923
β_6	1.3790	-0.1210	0.0542	0.1216	0.0176	0.0128	-1.4872	0.9302	1.5497	3.0775	0.0257	-1.4743	0.5392	1.4753	2.4643	0.9836
$\beta_{7,2}$	5.5145	-0.4855	0.1190	0.4855	0.2499	-0.1281	-6.1281	1.7698	6.1281	40.6859	-0.1068	-6.1068	1.1155	6.1068	38.5372	1.0178
$\beta_{8,2}$	3.1984	-1.0016	0.1554	1.0016	1.0273	0.1356	-4.0644	2.1466	4.0978	21.1272	0.0528	-4.1472	1.4259	4.1517	19.2320	0.9885
$\beta_{8,3}$	1.1414	-0.9586	0.1568	0.9586	0.9435	-0.0161	-2.1161	2.4004	2.5899	10.2397	0.0018	-2.0982	1.6220	2.2333	7.0332	1.0635
M4																
Intercepto	1.1988	1.1988	0.9295	1.2796	2.3010	6.8347	6.8347	3.7679	6.9635	60.9093	6.8965	6.8965	3.0301	6.9301	56.7427	Inf
β_1	9.7172	9.6172	0.1320	9.6172	92.5083	9.1060	9.0060	1.2415	9.0060	82.6501	9.5471	9.4471	0.8318	9.4471	89.9399	94.4711
β_2	0.7830	-0.0670	0.0549	0.0721	0.0075	-0.0377	-0.8877	0.8838	1.0437	1.5693	-0.0061	-0.8561	0.5842	0.8927	1.0743	1.0503
β_3	2.2945	-0.2055	0.0580	0.2055	0.0456	-0.0072	-2.0072	0.9739	2.5191	7.2343	-0.0256	-2.5256	0.5752	2.5266	6.7094	1.0106
β_4	1.8358	-0.1642	0.0592	0.1642	0.0305	-0.0322	-2.0322	0.8985	2.0429	4.9371	0.0133	-1.9867	0.5411	1.9876	4.2398	0.9938
β_5	0.0913	-0.0087	0.0569	0.0454	0.0033	-0.0225	-0.1225	0.9133	0.7125	0.8492	-0.0010	-0.1010	0.5511	0.4470	0.3139	4.4668
β_6	1.3823	-0.1177	0.0527	0.1183	0.0166	-0.0789	-1.4927	0.9628	1.5487	3.1553	-0.0024	-1.5024	0.5680	1.5035	2.5797	1.0023
$\beta_{7,2}$	5.5153	-0.4847	0.1180	0.4847	0.2489	-0.0896	-6.0896	1.8352	6.0912	40.4514	-0.1515	-6.1515	1.1149	6.1515	39.0833	1.0252
$\beta_{8,2}$	3.1979	-1.0021	0.1548	1.0021	1.0281	0.0845	-4.1155	2.1884	4.2644	21.7261	0.0030	-4.1970	1.4332	4.2020	19.6684	1.0005
$\beta_{8,3}$	1.1411	-0.9589	0.1571	0.9589	0.9442	-0.0232	-2.1232	2.4123	2.6444	10.3274	0.0711	-2.0289	1.6099	2.1935	6.7083	1.0445

Tabela F.34: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$, $SNR = 5$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$					
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1																
Intercepto	1.0246	1.0246	0.4691	1.0279	1.2698	6.8819	6.8819	2.3440	6.8842	52.8550	6.7808	6.7808	1.8419	6.7808	49.3719	Inf
β_1	4.9870	4.8870	0.0658	4.8870	23.8873	4.0902	3.9902	1.1489	3.9902	17.2416	4.7662	4.6662	0.6937	4.6662	22.2548	46.6621
β_2	0.7932	-0.0568	0.0280	0.0570	0.0040	-0.0330	-0.8830	0.7727	0.9841	1.3767	0.0005	-0.8495	0.5371	0.8715	1.0101	1.0253
β_3	2.3226	-0.1674	0.0300	0.1674	0.0289	-0.0075	-2.5075	0.7395	2.5075	6.8347	-0.0365	-2.5365	0.4741	2.5365	6.6586	1.0146
β_4	1.8667	-0.1333	0.0283	0.1333	0.0186	-0.0181	-2.0181	0.6643	2.0186	4.5140	-0.0043	-2.0043	0.4783	2.0043	4.2488	1.0021
β_5	0.0934	-0.0066	0.0286	0.0237	0.0009	-0.0304	-0.1304	0.7408	0.5842	5.8416	-0.0220	-0.1220	0.4715	0.3880	0.2372	3.8803
β_6	1.3972	-0.1028	0.0286	0.1028	0.0114	-1.4868	0.7263	1.5034	2.7380	1.0023	0.0020	-1.4980	0.4693	1.4980	2.4643	0.9987
β_7	5.5954	-0.4046	0.0600	0.4046	0.1673	-0.1540	-6.1540	1.6471	6.1540	39.9663	-0.0789	-6.0789	0.9641	6.0789	37.8821	1.0131
$\beta_{8,2}$	3.3312	-0.8688	0.0871	0.8688	0.7624	0.1247	-4.0753	1.4404	4.1228	19.2988	0.0765	-4.1235	1.2283	4.1235	18.5118	0.9818
$\beta_{8,3}$	1.2636	-0.8364	0.0879	0.8364	0.7072	0.0078	-2.0922	1.8670	2.3477	7.8628	0.0512	-2.0488	1.3352	2.1377	5.9803	1.0179
MI2																
Intercepto	0.6537	0.6537	0.5294	0.7006	0.7075	6.8228	6.8228	2.0670	6.8228	50.8226	6.8058	6.8058	1.4467	6.8058	48.4116	Inf
β_1	0.1016	0.0016	0.0977	0.0783	0.0096	0.0288	-0.0712	0.4387	0.2316	0.1976	0.0262	-0.0738	0.2209	0.1599	0.0542	1.5990
β_2	0.8115	-0.0385	0.0972	0.0845	0.0109	0.0167	-0.8333	0.4127	0.8729	0.8648	0.0050	-0.8450	0.2411	0.8543	0.7722	1.0051
β_3	2.4112	-0.0888	0.0935	0.1082	0.0166	0.0073	-2.4927	0.3235	2.4927	6.3180	-0.0034	-2.5034	0.1936	2.5034	6.3046	1.0014
β_4	1.9281	-0.0719	0.0983	0.0973	0.0148	-1.9922	0.3397	1.9922	4.0842	0.9961	0.0084	-1.9916	0.2314	1.9916	4.0200	0.9958
β_5	0.0963	-0.0037	0.0931	0.0746	0.0087	-0.0062	-0.1062	0.3949	0.2309	0.1672	-0.0020	-0.1020	0.2219	0.1618	0.0596	1.6175
β_6	1.4454	-0.0546	0.0918	0.0855	0.0114	-1.4786	0.3366	1.4863	2.2994	0.9908	0.0076	-1.4924	0.2178	1.4924	2.2748	0.9949
β_7	5.7589	-0.2411	0.1879	0.2583	0.0934	-0.0351	-6.0351	0.6870	6.0351	36.8948	-0.0310	-6.0310	0.4351	6.0310	36.5620	1.0052
$\beta_{8,2}$	3.6396	-0.5604	0.3058	0.5665	0.4075	-0.0116	-4.2116	0.6580	4.2116	18.1708	0.0044	-4.1956	0.4596	4.2041	17.8144	1.0010
$\beta_{8,3}$	1.5577	-0.5423	0.3053	0.5478	0.3873	-0.0250	-2.1250	0.7928	2.1594	5.1442	0.0011	-2.0989	0.4609	2.1133	4.6180	1.0063
MI3																
Intercepto	1.0247	1.0247	0.4688	1.0281	1.2698	6.8477	6.8477	2.2296	6.8525	51.8628	6.7958	6.7958	1.8485	6.7958	49.6001	Inf
β_1	4.9870	4.8870	0.0662	4.8870	23.8872	4.0554	3.9554	1.1912	3.9554	17.0643	4.7226	4.6226	0.6601	4.6226	21.8046	46.2264
β_2	0.7932	-0.0568	0.0280	0.0570	0.0040	-0.0651	-0.9151	0.7024	0.9921	1.3307	-0.0332	-0.8832	0.4789	0.8978	1.0094	1.0562
β_3	2.3228	-0.1672	0.0294	0.1672	0.0288	-0.0356	-2.5356	0.7363	2.5358	6.9715	0.0137	-2.4863	0.4715	2.4863	6.4038	0.9945
β_4	1.8654	-0.1346	0.0272	0.1346	0.0189	-0.0189	-2.0189	0.6691	2.0049	4.5809	-0.0080	-2.0080	0.4925	2.0080	4.2748	1.0040
β_5	0.0941	-0.0059	0.0291	0.0236	0.0009	-0.0332	-0.0868	0.7659	0.6008	5.941	-0.0032	-0.1032	0.4757	0.3960	0.2369	3.9600
β_6	1.3990	-0.1010	0.0279	0.1010	0.0110	-1.4765	0.7415	1.5083	2.7298	1.0055	0.0236	-1.4764	0.4762	1.4772	2.4066	0.9848
β_7	5.5952	-0.4048	0.0610	0.4048	0.1676	-0.1217	-6.1217	1.4182	6.1217	39.4860	-0.0942	-6.0942	0.9846	6.0942	38.1091	1.0157
$\beta_{8,2}$	3.3311	-0.8689	0.0863	0.8689	0.7624	0.1374	-4.0626	1.5664	4.0742	18.9581	0.0659	-4.1341	1.2470	4.1402	18.6457	0.9858
$\beta_{8,3}$	1.2637	-0.8363	0.0868	0.8363	0.7070	-0.0148	-2.1148	1.7644	2.3052	7.5852	0.0009	-2.0991	1.4132	2.1720	6.4032	1.0343
MI4																
Intercepto	1.0247	1.0247	0.4678	1.0279	1.2688	6.8154	6.8154	2.3944	6.8312	52.1833	6.8620	6.8620	1.9146	6.8620	50.7529	Inf
β_1	4.9869	4.8869	0.0660	4.8869	23.8862	4.0176	3.9176	1.2188	3.9176	16.8329	4.7441	4.6441	0.6730	4.6441	22.0202	46.4025
β_2	0.7933	-0.0567	0.0281	0.0569	0.0040	-0.0340	-0.8840	0.6885	0.9525	1.2555	-0.0042	-0.8542	0.5028	0.8737	0.9825	1.0278
β_3	2.3297	-0.1703	0.0297	0.1703	0.0299	-0.0111	-2.5111	0.7491	2.5114	6.8665	-0.0171	-2.5171	0.5051	2.5171	6.5910	1.0068
β_4	1.8659	-0.1361	0.0305	0.1361	0.0194	-0.0157	-2.0157	0.7082	2.0168	4.5645	-0.0140	-1.9833	0.4656	1.9833	4.1504	0.9917
β_5	0.0932	-0.0068	0.0291	0.0237	0.0009	-0.0165	-0.1165	0.7385	0.5619	5.6193	-0.0140	-0.1140	0.4819	0.3956	0.2453	3.9560
β_6	1.4004	-0.0996	0.0273	0.0996	0.0107	-0.0664	-0.0773	0.7480	1.5108	2.7876	-0.0022	-1.5022	0.4913	1.5022	2.4980	1.0015
β_7	5.5958	-0.4042	0.0606	0.4042	0.1670	-0.1162	-6.1162	1.4120	6.1162	39.4014	-0.1455	-6.1455	0.9833	6.1455	38.7346	1.0243
$\beta_{8,2}$	3.3307	-0.8693	0.0853	0.8693	0.7629	0.0772	-4.1228	1.6071	4.1706	19.5804	0.0125	-4.1875	1.2524	4.1876	19.1034	0.9970
$\beta_{8,3}$	1.2633	-0.8367	0.0867	0.8367	0.7075	-0.0081	-2.0919	1.7489	2.3209	7.4347	0.0692	-2.0308	1.3921	2.1458	6.0623	1.0218

Tabela F.35: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0$, $SNR = 5$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M11															
Intercepto	0.9478	0.9478	2.4126	2.0610	6.7191	6.9606	6.9606	6.9606	6.9606	6.9606	6.8908	3.6991	6.9769	61.1669	Inf
β_1	3.6910	3.5910	0.0666	3.5910	12.8996	2.2900	2.1290	1.1029	2.1359	5.7490	3.0574	0.7023	2.9574	9.2395	29.5741
β_2	8.074	-0.0426	0.0533	0.0552	0.0047	-0.0176	-0.8676	0.6623	0.9409	1.1914	0.0038	0.5219	0.8692	0.9885	1.0226
β_3	2.3709	-0.1291	0.0580	0.1292	0.0200	-0.0051	-0.2501	0.6251	2.5051	6.6715	-0.0257	0.4605	2.5257	6.5911	1.0103
β_4	1.8965	-0.1035	0.0543	0.1050	0.0137	-0.0135	-0.2135	0.5564	2.0135	4.3638	-0.0104	0.4650	2.0104	4.2578	1.0052
β_5	0.0937	-0.0063	0.0547	0.0443	0.0030	-0.0279	-0.1279	0.6254	0.4747	4.4075	-0.0241	0.4601	0.3775	2.2770	3.7752
β_6	1.4162	-0.0838	0.0568	0.0874	0.0103	0.0031	-1.4969	0.6348	1.5098	2.6436	-0.0041	-1.5041	0.4622	1.5041	1.0028
$\beta_{7,2}$	5.6842	-0.3158	0.1168	0.3161	0.1134	-0.1157	-6.1157	1.2585	6.1157	38.9859	-0.0719	0.9413	6.0719	37.7538	1.0120
$\beta_{8,2}$	3.4881	-0.7119	0.1603	0.7119	0.5325	0.1341	-4.0659	1.3113	4.1215	18.2508	0.0603	-4.1397	4.1397	18.3450	0.9856
$\beta_{8,3}$	1.4113	-0.6887	0.1660	0.6887	0.5018	0.0171	-2.0829	1.5125	2.2342	6.6263	0.0446	-2.0554	2.1234	5.6751	1.0111
M12															
Intercepto	0.7928	0.7928	2.4084	2.0135	6.4291	6.9102	6.9102	6.9102	6.9102	6.9102	6.9079	3.4782	6.9769	59.8170	Inf
β_1	0.9252	-0.0048	0.0663	0.0698	0.0075	0.0136	-0.0864	0.3805	0.2127	1.1522	0.0169	-0.0831	0.1859	0.1494	1.4945
β_2	8.097	-0.0403	0.0879	0.0772	0.0094	0.0108	-0.8392	0.3863	0.8710	0.8534	0.0048	0.2180	0.8554	0.7619	1.0063
β_3	2.4070	-0.0930	0.0832	0.1053	0.0156	0.0121	-2.4879	0.3076	1.9946	6.2842	-0.0007	0.1756	2.4993	6.2776	0.9997
β_4	1.9236	-0.0764	0.0869	0.0944	0.0134	0.0054	-1.9946	0.3119	1.9946	4.0755	-0.0023	0.2026	2.0023	4.0504	1.0012
β_5	0.0939	-0.0061	0.0838	0.0672	0.0071	-0.0168	-0.1168	0.3390	0.2070	1.286	0.0025	-0.0975	0.1488	0.0423	1.4883
β_6	1.4428	-0.0572	0.0839	0.0831	0.0103	0.0069	-1.4931	0.3117	1.4963	2.3266	0.0069	-1.4931	0.1969	1.4931	2.2680
$\beta_{7,2}$	5.7498	-0.2502	0.1705	0.2592	0.0917	-0.0432	-6.0436	0.6269	6.0436	36.9176	-0.0225	-6.0225	6.0225	36.4283	1.0037
$\beta_{8,2}$	3.6185	-0.5815	0.2728	0.5842	0.4126	0.0143	-4.1857	0.7055	4.2105	18.0178	-0.0036	-4.2036	4.2036	17.7765	1.0008
$\beta_{8,3}$	1.5374	-0.5626	0.2690	0.5656	0.3889	-0.0256	-2.1256	0.7894	2.1657	5.1413	-0.0043	-2.1043	2.1043	4.5520	1.0021
M13															
Intercepto	0.9481	0.9481	2.4133	2.0618	6.7226	6.9425	6.9425	6.9425	6.9425	6.9425	6.9029	3.6556	6.9892	61.0134	Inf
β_1	3.6911	3.5911	0.0667	3.5911	12.9003	2.2908	2.1298	1.1435	2.1352	5.8434	3.0057	0.6835	2.9057	9.9104	29.0573
β_2	8.074	-0.0426	0.0533	0.0552	0.0047	-0.0500	-0.9000	0.6052	0.9543	1.1763	-0.0289	-0.8789	0.8929	0.9904	1.0505
β_3	2.3711	-0.1289	0.0590	0.1296	0.0201	-0.0273	-2.5273	0.6414	2.5273	6.7987	0.0179	-2.4821	2.4821	6.3769	0.9929
β_4	1.8953	-0.1047	0.0508	0.1053	0.0135	0.0076	-0.9924	0.6731	1.9972	4.4226	-0.0055	0.4746	2.0055	4.2474	1.0028
β_5	0.0968	-0.0032	0.0555	0.0443	0.0031	0.0102	-0.0898	0.6598	0.4929	4.9290	-0.0066	0.4618	0.3832	2.2416	3.820
β_6	1.4214	-0.0786	0.0539	0.0825	0.0091	0.0196	-1.4804	0.6574	1.5077	2.6238	0.0183	-1.4817	0.4649	1.4822	2.4116
$\beta_{7,2}$	5.6839	-0.3161	0.1176	0.3166	0.1138	-0.0930	-6.0930	1.2081	6.0930	38.5842	-0.0927	0.9622	6.0927	38.0471	1.0155
$\beta_{8,2}$	3.4880	-0.7120	0.1592	0.7120	0.5323	0.1491	-4.0509	1.2253	4.0566	17.9111	0.0574	-4.1426	4.1512	18.4334	0.9884
$\beta_{8,3}$	1.4114	-0.6886	0.1652	0.6886	0.5014	-0.0314	-2.1314	1.4976	2.2715	6.7859	0.0003	-2.0997	2.1613	6.0831	1.0292
M14															
Intercepto	0.9477	0.9477	2.4112	2.0593	6.7123	6.9117	6.9117	6.9117	6.9117	6.9117	6.9681	3.7059	6.9769	62.2891	Inf
β_1	3.6909	3.5909	0.0667	3.5909	12.8993	2.1548	2.0548	1.1588	2.0590	5.6552	3.0348	0.6967	2.9348	9.0986	29.3483
β_2	8.075	-0.0425	0.0533	0.0552	0.0046	-0.0264	-0.8764	0.5843	0.9234	1.1095	-0.0057	-0.8557	0.8749	0.9757	1.0293
β_3	2.3658	-0.1342	0.0579	0.1353	0.0214	-0.0092	-2.5092	0.6171	2.5095	6.6769	-0.0163	-2.5163	2.5163	6.5682	1.0065
β_4	1.8931	-0.1069	0.0574	0.1080	0.0147	-0.0102	-2.0102	0.5877	2.0112	4.3887	0.0125	-1.9875	0.4535	1.9875	0.9938
β_5	0.0954	-0.0046	0.0556	0.0439	0.0031	0.0016	-0.0984	0.6470	0.4626	4.6264	-0.0026	-0.1026	0.4700	0.3835	0.2314
β_6	1.4231	-0.0769	0.0525	0.0802	0.0087	0.0053	-1.4947	0.6529	1.5064	2.6604	0.0006	-1.4994	0.4756	1.4995	2.4744
$\beta_{7,2}$	5.6845	-0.3155	0.1171	0.3159	0.1132	-0.1024	-6.1024	1.2130	6.1024	38.7112	-0.1430	0.9615	6.1430	38.6616	1.0238
$\beta_{8,2}$	3.4878	-0.7122	0.1580	0.7122	0.5322	0.1065	-4.0995	1.2906	4.1360	18.4712	0.0065	-4.1935	4.1963	18.9065	0.9991
$\beta_{8,3}$	1.4115	-0.6885	0.1651	0.6885	0.5013	0.0179	-2.0821	1.4901	2.2223	6.3520	0.0648	-2.0352	2.1933	5.8146	1.0149

Tabela F.36: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2.0, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	0.1867	0.1867	0.7645	0.9145	Inf	6.9069	6.9069	6.9775	59.5398	Inf	6.8270	6.8270	6.8441	54.6763	Inf
β_1	10.5251	10.4251	10.1436	108.7040	104.2513	9.0897	8.9897	8.9897	82.4840	89.8966	9.7533	9.6533	9.6533	94.0921	96.5331
β_2	0.8380	-0.0120	0.0465	0.0034	0.0204	-0.0257	-0.8757	0.7876	1.3873	1.1761	0.0001	-0.8499	0.5266	0.8803	1.0357
β_3	2.4845	-0.0155	0.0509	0.0039	0.0204	0.0012	-2.4988	0.7592	2.4998	0.9999	-0.0159	-2.5159	0.4491	2.5159	1.0064
β_4	1.9860	-0.0140	0.0579	0.0036	0.0239	-0.0182	-2.0182	0.6645	4.5148	1.0097	-0.0166	-2.0166	0.4486	2.0166	1.0083
β_5	0.9911	-0.0089	0.0562	0.0046	0.0239	-0.0313	-0.1313	0.7451	0.5309	0.5273	-0.0225	-0.1225	0.4419	0.3364	0.2102
β_6	1.4814	-0.0186	0.0576	0.0476	0.0318	0.0003	-1.4977	0.7515	1.5298	2.8139	-0.0001	-1.5001	0.4558	1.5001	1.0001
$\beta_7, 2$	5.9597	-0.0403	0.1242	0.1027	0.0171	-0.1128	-6.1128	1.5056	6.1128	39.6331	-0.0727	-6.0727	0.8968	6.0727	37.6823
$\beta_{8, 2}$	4.0420	-0.1580	0.1943	0.0627	0.0491	0.0901	-4.1099	1.7750	20.0422	1.0079	0.0426	-4.1574	1.0987	4.1609	18.4908
$\beta_{8, 3}$	1.9366	-0.1634	0.2033	0.0680	0.1008	-0.0208	-2.1208	1.9543	8.3173	1.1627	0.0330	-2.0670	1.2000	2.1517	5.7122
MI2															
Intercepto	0.2957	0.2957	0.9541	1.4172	Inf	6.8749	6.8749	6.9999	62.7358	Inf	6.8778	6.8778	6.9077	54.8896	Inf
β_1	0.1065	0.0065	0.1944	0.0378	1.5588	0.0533	-0.0467	0.7796	0.3111	0.6099	0.0369	-0.0631	0.4297	0.2125	0.1887
β_2	0.8186	-0.0314	0.2009	0.0414	0.1918	0.0152	-0.8348	0.7412	0.9764	1.2462	0.0070	-0.8430	0.4462	0.8892	0.9098
β_3	2.4879	-0.0121	0.1922	0.0371	0.0612	-0.0431	-2.5431	0.5989	2.5457	6.8260	-0.0004	-2.5004	0.3699	2.5004	6.3887
β_4	1.9859	-0.0141	0.2034	0.0416	0.0801	0.0236	-1.9764	0.6993	2.0167	4.3409	0.0280	-1.9720	0.4436	1.9770	4.0856
β_5	0.9952	-0.0048	0.1847	0.0341	1.4788	0.0110	-0.0890	0.7571	0.3265	0.5812	-0.0111	-0.1111	0.4413	0.2348	0.2071
β_6	1.4843	-0.0157	0.1899	0.0363	0.0958	-0.0672	-1.4328	0.6316	1.5002	2.4518	0.0298	-1.4702	0.3739	1.4757	2.3013
$\beta_7, 2$	5.9198	-0.0802	0.4076	0.1725	0.0556	-0.0839	-6.0839	1.3068	6.1074	38.7212	-0.0448	-6.0448	0.8294	6.0448	37.2274
$\beta_{8, 2}$	3.9465	-0.2535	0.6211	0.6226	0.1479	-0.0034	-4.2034	1.2825	4.2678	19.3137	-0.0190	-4.2190	0.9683	4.2510	18.7374
$\beta_{8, 3}$	1.8480	-0.2520	0.7578	0.6377	0.3003	0.0436	-2.0564	1.6208	2.3371	6.8556	-0.0573	-2.1573	0.9732	2.2136	5.6008
MI3															
Intercepto	0.1873	0.1873	0.9387	0.9162	Inf	6.9154	6.9154	6.9810	59.1944	Inf	6.8219	6.8219	6.8375	54.6411	Inf
β_1	10.5251	10.4251	10.1437	108.7035	104.2511	9.0881	8.9881	8.9881	82.5438	89.8807	9.7026	9.6026	9.6026	93.0915	96.0256
β_2	0.8380	-0.0120	0.0573	0.0034	0.0546	-0.0474	-0.8974	0.7241	1.3296	1.1802	-0.0270	-0.8770	0.4565	0.8924	1.0499
β_3	2.4846	-0.0154	0.0601	0.0038	0.0202	-0.0301	-2.5301	0.7759	2.5338	7.0035	0.0188	-2.4812	0.4509	2.4812	6.3597
β_4	1.9831	-0.0169	0.0543	0.0032	0.0226	0.0092	-1.9908	0.8004	2.0076	4.6038	-0.0079	-2.0079	0.4599	2.0079	1.0039
β_5	0.9938	-0.0062	0.0566	0.0032	0.0468	0.0148	-0.0852	0.7702	0.5423	0.6005	0.0069	-0.0931	0.4409	0.3352	0.2031
β_6	1.4858	-0.0142	0.0561	0.0470	0.0314	0.0211	-1.4789	0.7487	1.5230	2.7478	0.0267	-1.4733	0.4498	1.4749	2.3730
$\beta_7, 2$	5.9592	-0.0408	0.1242	0.1028	0.0171	-0.1075	-6.1075	1.4114	6.1075	39.2936	-0.0966	-6.0966	0.9203	6.0966	38.0154
$\beta_{8, 2}$	4.0416	-0.1584	0.1945	0.0629	0.0491	0.0822	-4.1178	1.6955	4.1642	19.8314	0.0617	-4.1383	1.2043	4.1561	18.5757
$\beta_{8, 3}$	1.9363	-0.1637	0.2033	0.0681	0.1010	-0.0497	-2.1497	2.0397	2.4645	8.7813	0.0101	-2.0899	1.3172	2.1818	6.1027
MI4															
Intercepto	0.1866	0.1866	0.9374	0.9136	Inf	6.8307	6.8307	6.9116	58.1271	Inf	6.8956	6.8956	6.9189	55.9290	Inf
β_1	10.5251	10.4251	10.1439	108.7028	104.2507	9.0384	8.9384	8.9384	81.7610	89.3841	9.7350	9.6350	9.6350	93.7201	96.3498
β_2	0.8380	-0.0120	0.0574	0.0034	0.0547	-0.0173	-0.8673	0.6909	0.9465	1.2294	-0.0087	-0.8567	0.4925	0.8834	0.9800
β_3	2.4789	-0.0211	0.0605	0.0041	0.0201	-0.0159	-2.5159	0.7836	2.5251	6.9435	-0.0224	-2.5224	0.4839	2.5227	6.5967
β_4	1.9810	-0.0190	0.0619	0.0042	0.0288	-0.0261	-2.0261	0.7165	2.0321	4.6184	0.0193	-1.9807	0.4475	1.9816	4.1233
β_5	0.9906	-0.0094	0.0586	0.0035	0.0470	-0.0152	-0.1152	0.7250	0.4924	0.5390	-0.0063	-0.1063	0.4589	0.3499	0.2219
β_6	1.4881	-0.0119	0.0552	0.0456	0.0304	0.0172	-1.4828	0.7848	1.5201	2.8145	-0.0010	-1.5010	0.4706	1.5016	1.0011
$\beta_7, 2$	5.9598	-0.0402	0.1239	0.1022	0.0170	-0.1011	-6.1011	1.4740	6.1011	39.3959	-0.1193	-6.1193	0.9405	6.1193	38.3301
$\beta_{8, 2}$	4.0419	-0.1581	0.1944	0.0628	0.0491	0.0946	-4.1054	1.7193	4.2025	19.8101	-0.0167	-4.2167	1.2074	4.2314	19.2386
$\beta_{8, 3}$	1.9370	-0.1630	0.2031	0.0678	0.1007	0.0261	-2.0739	1.9073	2.3846	7.9388	0.0438	-2.0562	1.3238	2.1730	5.9805

Tabela F.37: Coeficientes ajustados e os valores de bias, sd, mae, mse e mape para os modelos MI, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.2$, $SNR = -1$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Table with columns for Coeficiente, bias, sd, mae, mse, mape, beta, bias, sd, mae, mse, mape, beta, bias, sd, mae, mse, mape. It is divided into three sections for n1 = 3000, n1 = 40, and n1 = 100, each containing data for models M11, M12, M13, and M14.

Tabela F.38: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0.2$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	-0.1746	-0.1746	1.2846	1.6806	14.2735	-0.9050	5.2733	4.1362	28.6265	Inf	-1.0706	4.1994	3.4437	18.7811	Inf
β_1	15.2735	14.2735	0.1969	203.7704	0.0776	12.7331	2.1671	11.7331	142.3626	11.7331	13.8658	1.5838	12.8658	168.0362	12.8658
β_2	4.9690	-0.0310	0.0788	0.0671	0.0134	-0.0829	5.0831	1.2412	27.3766	1.0166	-0.0274	0.8113	5.0274	25.9325	1.0055
β_3	-1.9735	0.0265	0.0831	0.0708	-0.1251	1.8749	1.2349	1.9957	5.0402	0.9978	1.9558	0.7751	1.9686	4.4257	0.9843
β_4	1.9811	-0.0189	0.0794	0.0656	-0.0031	2.0031	1.2162	2.0938	5.4916	1.0469	-0.0475	0.7906	2.0549	4.8173	1.0275
β_5	-3.9698	0.0302	0.0791	0.0675	0.0576	4.0576	1.3013	4.0576	18.1578	1.0144	-0.0421	0.8344	3.9579	16.3611	0.9895
β_6	4.9623	-0.0377	0.0788	0.0686	0.0137	0.0578	1.2503	4.9422	25.9885	1.9884	0.0644	0.7311	4.9356	24.8946	0.9871
$\beta_{7,2}$	5.3499	-0.0501	0.1705	0.1396	-0.0366	5.4948	2.3677	5.4948	35.1630	1.0176	-0.0254	1.5444	5.4331	31.8197	1.0061
$\beta_{8,2}$	-5.7471	0.2529	0.2655	0.2978	0.1345	5.9782	3.3390	6.3036	46.8877	1.0506	-0.0601	5.9399	6.0676	40.8302	1.0113
$\beta_{8,3}$	-2.7386	0.2614	0.2774	0.1453	-0.3818	2.6182	3.7631	3.5741	21.0158	1.1914	-0.0717	2.9283	3.2934	14.8056	1.0978
Intercepto	-0.0519	-0.0519	1.5246	2.3272	14.2735	-1.1675	5.7100	4.5007	33.9672	Inf	-1.0472	3.9562	3.2461	16.7480	Inf
β_1	1.0037	0.0037	0.2765	0.0764	0.2212	0.3419	1.3461	1.1996	2.2451	1.1996	0.2406	0.7563	1.0065	1.1486	1.0065
β_2	4.9608	-0.0392	0.2739	0.0765	0.0444	0.0489	-0.9511	4.9603	25.5134	0.9921	0.0072	0.5954	4.9928	25.2828	0.9886
β_3	-1.9644	0.0356	0.2657	0.2134	0.1067	0.0019	1.1022	2.1105	5.2223	1.0552	-0.0296	1.9704	1.9883	4.1979	0.9941
β_4	1.9974	-0.0006	0.2774	0.2169	0.1084	0.0215	1.2498	2.1450	5.4766	1.0677	-0.0136	0.6119	2.0170	4.3202	1.0085
β_5	-3.9799	0.0201	0.2634	0.0698	0.0533	0.0181	1.0004	4.0267	17.1461	1.0067	-0.0312	0.5755	3.9699	16.0823	0.9925
β_6	4.9868	-0.0132	0.2594	0.2057	0.0674	0.0536	-0.9464	4.9555	25.4053	0.9911	0.0205	-4.9795	4.9795	25.1002	0.9959
$\beta_{7,2}$	5.3374	-0.0626	0.5516	0.4459	0.3082	-0.1455	5.5455	5.6264	34.5873	1.0419	-0.0602	1.1403	5.4682	31.1145	1.0126
$\beta_{8,2}$	-5.8751	0.1249	0.9874	0.7807	0.1301	0.2929	3.0245	6.3860	48.7482	1.0643	0.0110	1.6524	6.1075	38.8626	1.0179
$\beta_{8,3}$	-2.8610	0.1390	1.0030	1.0253	0.2712	0.1632	3.2952	3.4394	20.8642	1.1465	-0.0498	2.9502	3.1076	11.2484	1.0359
Intercepto	-0.1742	-0.1742	1.2842	1.6795	14.2736	-1.1405	5.1779	4.0527	28.1118	Inf	-1.2417	4.1131	3.3084	18.4597	Inf
β_1	15.2736	14.2736	0.1969	203.7737	0.0776	12.7643	2.3230	11.7643	143.7940	11.7643	13.8131	1.5269	12.8131	166.5064	12.8131
β_2	4.9690	-0.0310	0.0786	0.0669	0.0134	-0.0784	5.0784	1.2151	27.2668	1.0157	-0.0500	0.7885	5.0500	26.1243	1.0100
β_3	-1.9734	0.0266	0.0822	0.0693	0.0075	0.0291	1.3720	2.1607	5.9998	1.0804	0.0524	0.8144	2.0568	4.8755	1.0284
β_4	1.9774	-0.0226	0.0742	0.0619	0.0309	-0.0385	1.2770	2.0658	5.4779	1.0329	-0.0204	0.7520	1.9629	4.4843	0.9915
β_5	-3.9663	0.0337	0.0801	0.0684	0.0171	0.0186	1.1364	4.0301	17.4408	1.0075	0.0072	0.7167	4.0072	16.5712	1.0018
β_6	4.9685	-0.0315	0.0769	0.0674	0.0069	-0.0458	1.2390	5.0458	26.9955	1.0092	-0.0229	0.7753	5.0229	25.8311	1.0046
$\beta_{7,2}$	5.3494	-0.0506	0.1702	0.1394	0.0315	-0.0583	5.2923	5.5110	36.5136	1.0206	-0.0861	1.6259	5.4880	32.7410	1.0163
$\beta_{8,2}$	-5.7472	0.2528	0.2650	0.2979	0.1341	0.0321	6.0321	6.2159	44.7895	1.0360	0.0820	2.1068	6.1278	41.4300	1.0213
$\beta_{8,3}$	-2.7388	0.2612	0.2762	0.1445	-0.1038	0.0255	3.4211	3.6213	20.8574	1.2071	0.1306	2.2292	3.3605	14.7702	1.1202
Intercepto	-0.1750	-0.1750	1.2833	1.6775	14.2736	-1.1392	4.9028	3.8939	25.3353	Inf	-1.0891	4.1536	3.4005	18.4384	Inf
β_1	15.2736	14.2736	0.1972	203.7746	0.0776	12.5375	2.2622	11.5375	138.2314	11.5375	13.8501	1.5974	12.8501	167.6763	12.8501
β_2	4.9689	-0.0311	0.0788	0.0671	0.0134	-0.0436	5.0436	1.1422	26.7429	1.0087	-0.0605	0.8235	5.0605	26.2870	1.0121
β_3	-1.9812	0.0188	0.0829	0.0657	0.0072	0.0134	2.0134	1.4570	6.1767	1.0782	-0.0394	1.9606	1.9693	4.4205	0.9846
β_4	1.9745	-0.0255	0.0849	0.0707	0.0353	-0.0489	2.0489	1.2383	5.5844	1.0691	-0.0194	0.7620	2.0296	4.6586	1.0148
β_5	-3.9709	0.0291	0.0826	0.0684	0.0171	-0.0362	3.9638	3.9829	17.3643	0.9957	0.0401	0.7992	4.0401	16.9613	1.0100
β_6	4.9717	-0.0283	0.0756	0.0655	0.0065	0.1255	4.4209	4.9117	25.7797	0.9823	0.0131	-4.9869	4.9869	25.5222	0.9974
$\beta_{7,2}$	5.3500	-0.0500	0.1699	0.1387	0.0314	-0.0798	5.4798	5.5098	35.5900	1.0203	-0.1331	1.5764	5.5331	33.1003	1.0247
$\beta_{8,2}$	-5.7469	0.2531	0.2649	0.2979	0.1342	0.1617	2.7570	6.2658	45.5681	1.0443	0.0082	2.1374	6.0409	40.6664	1.0068
$\beta_{8,3}$	-2.7380	0.2620	0.2765	0.1451	-0.1040	-0.0621	2.9379	3.4523	17.7455	1.1508	0.0407	3.0407	3.3166	14.2947	1.1055

Tabela F.39: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI_l*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0.2$, $SNR = -1$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	0.1581	0.1581	5.3352	43.5664	Inf	-0.6962	10.6371	8.4144	113.6326	Inf	-0.7743	9.6269	7.7469	93.2766	Inf
β_1	11.3265	10.3265	0.1919	10.3265	10.3265	7.9751	2.1289	6.9751	53.1836	6.9751	8.3498	1.4416	8.3498	71.7978	8.3498
β_2	4.9777	-0.0223	0.1528	0.0238	0.0244	-0.0688	-5.0688	1.2415	27.2340	1.0141	-0.0191	0.8416	5.0191	25.8998	1.0038
β_3	-1.9718	0.0282	0.1648	0.0279	0.0674	-0.0899	1.9101	2.0239	5.1091	1.0119	1.9832	0.7782	1.9956	4.5388	0.9078
β_4	1.9855	-0.0145	0.1551	0.0243	0.0617	0.0165	-1.9835	1.2128	5.4049	1.0410	-0.0510	0.8084	2.0655	4.8601	1.0327
β_5	-3.9767	0.0233	0.1568	0.0251	0.0318	0.0490	4.0490	1.2326	17.9141	1.0123	-0.0493	0.8388	3.9507	16.3113	0.9877
β_6	4.9568	-0.0432	0.1615	0.0280	0.0264	0.0394	-4.9606	1.2510	26.1726	0.9923	0.0421	0.8388	4.9579	25.1920	0.9916
$\beta_7,2$	5.3578	-0.0422	0.3330	0.2687	0.0498	-0.0560	-5.4580	3.3432	35.2589	1.0203	-0.0540	1.6388	5.4698	32.4319	1.0129
$\beta_8,2$	-5.7725	0.2275	0.5221	0.3243	0.0752	0.1088	6.1068	3.0333	46.5179	1.0515	-0.0612	5.9388	6.0846	40.8592	1.0141
$\beta_8,3$	-2.7650	0.2350	0.5502	0.3580	0.1575	-0.2556	2.7444	3.5856	20.3885	1.1756	-0.0655	2.9345	3.2882	14.9037	1.0961
Intercepto	0.2496	0.2496	6.5880	43.4641	Inf	-0.7763	10.7367	8.5942	115.8798	Inf	-0.7464	9.4911	7.5863	90.6376	Inf
β_1	0.9869	-0.0131	0.2443	0.0599	0.1978	0.2431	-0.7569	1.0680	1.7136	1.0939	0.2162	-0.7838	0.6465	1.0323	0.9657
β_2	4.9614	-0.0386	0.2483	0.0631	0.0400	0.0485	-4.9515	0.9804	4.9809	0.9962	0.0003	-4.9997	0.5405	4.9997	0.9999
β_3	-1.9620	0.0380	0.2359	0.0571	0.0956	-0.0468	1.9532	0.9285	2.0434	1.0217	-0.0054	1.9946	0.5167	2.0008	1.0004
β_4	1.9990	-0.0010	0.2457	0.0604	0.0669	0.0603	-1.9397	0.9812	4.7252	1.0306	-0.0215	0.5774	2.0412	4.4199	1.0206
β_5	-3.9870	0.0130	0.2376	0.0566	0.0478	-0.0190	3.9810	0.8287	16.5355	0.9989	-0.0043	3.9957	0.4542	3.9957	0.9989
β_6	4.9888	-0.0112	0.2368	0.0562	0.0381	0.0302	-4.9698	0.8297	4.9724	0.9945	0.0114	-4.9886	0.4741	4.9886	25.1107
$\beta_7,2$	5.3481	-0.0519	0.5005	0.4077	0.0755	-0.1412	-5.5412	1.6999	33.5946	1.0347	-0.0516	-5.4516	1.1054	5.4721	30.9423
$\beta_8,2$	-5.8684	0.1316	0.8770	0.7864	0.1147	0.1993	6.1993	2.4029	44.2050	1.0405	-0.0389	5.9611	1.4681	6.0740	37.6903
$\beta_8,3$	-2.8551	0.1449	0.8818	0.7986	0.2388	0.0148	3.0148	2.7132	3.2589	1.0863	-0.0557	2.9443	3.1255	11.0109	1.0418
Intercepto	0.1600	0.1600	6.5985	43.5657	Inf	-0.8076	10.5397	8.3621	111.7374	Inf	-0.9045	9.6376	7.7183	93.7009	Inf
β_1	11.3270	10.3270	0.1917	10.3270	10.3270	8.0094	2.2138	7.0094	54.0322	7.0094	9.2838	1.4114	8.2838	70.6133	8.2838
β_2	4.9779	-0.0221	0.1527	0.0238	0.0244	-0.1058	-5.1058	1.1750	27.4501	1.0212	-0.0502	0.8082	5.0502	26.1579	1.0100
β_3	-1.9718	0.0282	0.1680	0.0290	0.0684	0.0174	2.0174	1.3422	5.8714	1.0792	0.0640	0.8335	2.0680	4.9546	1.0340
β_4	1.9821	-0.0179	0.1444	0.0212	0.0581	-0.0005	-2.0005	1.2386	5.5359	1.0458	-0.0022	-1.9978	0.7694	2.0072	1.0036
β_5	-3.9666	0.0334	0.1582	0.0262	0.0318	0.0043	4.0043	1.1323	17.3169	1.0036	-0.0068	3.9932	3.9932	16.4778	0.9983
β_6	4.9728	-0.0272	0.1529	0.0241	0.0252	-0.0449	-5.0449	1.2123	26.9203	1.0093	-0.0304	0.8226	5.0304	25.9816	1.0061
$\beta_7,2$	5.3566	-0.0434	0.3322	0.2682	0.1122	-0.0682	-5.4682	2.6447	36.8953	1.0241	-0.1036	-5.5036	1.6524	33.0197	1.0210
$\beta_8,2$	-5.7739	0.2261	0.5211	0.3227	0.0752	0.0435	6.0435	2.7169	43.9053	1.0340	0.0309	6.0309	2.1081	6.0982	40.8161
$\beta_8,3$	-2.7661	0.2339	0.5491	0.3563	0.1575	-0.0348	2.9652	3.4968	21.0198	1.1773	0.0910	3.0910	3.3218	14.6464	1.1073
Intercepto	0.1574	0.1574	6.5990	43.5720	Inf	-0.6728	10.4936	8.2887	110.5680	Inf	-0.7473	9.6621	7.8151	93.9139	Inf
β_1	11.3265	10.3265	0.1923	10.3265	10.3265	7.7688	2.2256	6.7688	50.7695	6.7688	9.3108	1.4767	8.3108	71.2507	8.3108
β_2	4.9776	-0.0224	0.1528	0.0238	0.0244	-0.0296	-5.0296	1.1105	26.5306	1.0060	-0.0579	0.8589	5.0579	26.3203	1.0116
β_3	-1.9861	0.0139	0.1650	0.0274	0.0644	0.0099	2.0099	1.4061	6.0170	1.0709	-0.0417	1.9583	1.9734	4.4564	0.9867
β_4	1.9763	-0.0237	0.1641	0.0275	0.0662	-0.0482	-2.0482	1.0997	5.4043	1.0584	-0.0276	0.7996	2.0412	4.7505	1.0206
β_5	-3.9723	0.0277	0.1596	0.0262	0.0316	0.0490	4.0490	1.2426	17.9389	1.0167	0.0574	0.8472	4.0574	17.1807	1.0144
β_6	4.9774	-0.0226	0.1493	0.0228	0.0240	0.1522	-4.8478	1.3799	4.8854	0.9771	0.0149	-4.9851	0.8479	4.9851	25.5700
$\beta_7,2$	5.3573	-0.0427	0.3317	0.2672	0.1119	-0.0670	-5.4670	2.3492	35.4066	1.0243	-0.1592	-5.5592	1.6306	33.5632	1.0296
$\beta_8,2$	-5.7719	0.2281	0.5200	0.3224	0.0751	-0.0172	5.9828	2.6035	42.5719	1.0208	-0.0376	5.9624	2.1455	6.0167	40.1534
$\beta_8,3$	-2.7629	0.2371	0.5492	0.3579	0.1575	-0.2713	2.7287	3.0008	16.4507	1.1181	-0.0176	2.9824	3.3070	14.0853	1.1023

Tabela F.40: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.4$, $SNR = 5$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	0.2316	2.4146	1.9527	5.8840	Inf	6.9569	6.9569	3.9671	7.0779	64.1360	6.9021	3.6114	6.9898	60.6815	Inf
β_1	3.8834	3.7834	3.7834	14.3187	37.8336	2.4399	2.3399	0.9935	2.3451	6.4623	3.0313	0.6518	2.9313	9.0177	29.3134
β_2	0.8438	-0.0062	0.0560	0.0032	0.0524	0.0125	-0.8375	0.5343	0.9030	0.9668	0.0020	-0.8480	0.8606	0.8551	1.0125
β_3	2.4919	-0.0081	0.0603	0.0037	0.0198	-0.0107	-2.5107	0.4919	2.5107	6.5453	-0.0187	0.3145	2.5187	6.4427	1.0075
β_4	1.9916	-0.0084	0.0568	0.0033	0.0228	-0.0054	-2.0054	0.4240	2.0054	4.2014	-0.0134	0.3162	2.0134	4.1537	1.0067
β_5	0.0922	-0.0078	0.0563	0.0032	0.0414	-0.0265	-0.1265	0.4956	0.3052	2.6616	-0.0221	0.3195	0.2275	0.1170	2.2747
β_6	1.4854	-0.0146	0.0482	0.0037	0.0321	0.0017	-1.4983	0.5032	1.5074	2.4981	0.0025	-1.4975	1.4975	2.3447	0.9983
$\beta_7, 2$	5.9768	-0.0232	0.1219	0.0154	0.0165	-0.0874	-6.0874	1.0172	6.0874	38.0916	-0.0470	-6.0470	6.0393	6.0470	36.9754
$\beta_{8, 2}$	4.0976	-0.1024	0.1913	0.0471	0.0421	0.0988	-4.1012	1.1678	4.1762	18.1839	0.0297	-4.1703	4.1703	17.9256	0.9929
$\beta_{8, 3}$	1.9938	-0.1062	0.2019	0.0520	0.0874	0.0112	-2.0888	1.2331	2.2144	5.8837	0.0139	-2.0861	0.7664	2.1259	4.9390
MI2															
Intercepto	0.2462	2.4154	1.9585	5.8950	Inf	6.9197	6.9197	4.0083	7.0546	63.9487	6.8947	3.5094	6.9718	59.8524	Inf
β_1	0.0945	-0.0055	0.0867	0.0075	0.7095	-0.0026	-0.1026	0.4660	0.2276	0.2277	0.0256	0.2396	0.1592	0.0629	1.5919
β_2	0.8354	-0.0146	0.0913	0.0086	0.0867	-0.0104	-0.8604	0.4692	0.9062	0.9604	0.0053	-0.8447	0.8645	0.7895	1.0170
β_3	2.4978	-0.0022	0.0861	0.0074	0.0277	0.0048	-2.4952	0.3607	2.4952	6.3561	0.0036	0.2176	2.4964	6.2794	0.9986
β_4	1.9948	-0.0052	0.0898	0.0071	0.0355	-0.0067	-2.0067	0.3426	2.0067	4.1444	-0.0030	0.2460	2.0030	4.0724	1.0015
β_5	0.0928	-0.0072	0.0845	0.0072	0.6837	-0.0180	-0.1180	0.3945	0.2004	0.1696	0.0047	-0.0953	0.2276	0.1573	0.0609
β_6	1.4944	-0.0056	0.0868	0.0076	0.0467	0.0058	-1.4942	0.3977	1.5119	2.3909	0.0131	-1.4869	0.2375	1.4869	2.2673
$\beta_7, 2$	5.9693	-0.0307	0.1827	0.0343	0.0250	-0.0358	-6.0358	0.8032	6.0358	37.0764	-0.0278	-6.0278	4.9955	6.0278	36.5804
$\beta_{8, 2}$	4.0858	-0.1142	0.3219	0.1167	0.0637	-0.0082	-4.2082	0.8125	4.2390	18.3692	0.2002	-4.1798	4.1856	17.7700	0.9966
$\beta_{8, 3}$	1.9851	-0.1149	0.3223	0.1171	0.1298	-0.0140	-2.1140	0.9705	2.1926	5.4107	0.0071	-2.0929	0.5122	2.1151	4.6426
MI3															
Intercepto	0.2321	2.4152	1.9536	5.8870	Inf	6.9643	6.9643	3.9061	7.0868	63.7585	6.8884	3.5566	6.9715	60.1003	Inf
β_1	3.8835	3.7835	3.7835	14.3196	37.8347	2.4831	2.3831	1.0036	2.3871	6.6864	2.9887	0.6450	2.8887	8.7604	28.8865
β_2	0.8439	-0.0061	0.0560	0.0032	0.0523	-0.0286	-0.8786	0.4805	0.9177	1.0028	-0.0097	-0.8597	0.8649	0.8344	1.0175
β_3	2.4920	-0.0080	0.0615	0.0038	0.0200	-0.0078	-2.5078	0.5281	2.5090	6.5679	0.0072	-2.4928	0.3248	2.4928	0.9971
β_4	1.9903	-0.0097	0.0529	0.0430	0.0215	-0.0077	-1.9923	0.5545	1.9993	4.2768	-0.0050	0.3229	2.0050	4.1241	1.0025
β_5	0.0959	-0.0041	0.0569	0.0033	0.4580	0.0169	-0.0831	0.5257	0.3196	0.2833	0.0216	-0.0784	0.3066	0.2122	0.1002
β_6	1.4912	-0.0088	0.0561	0.0462	0.0308	0.0298	-1.4702	0.5174	1.4939	2.4292	0.0189	-1.4811	1.4811	2.2871	0.9874
$\beta_7, 2$	5.9763	-0.0237	0.1218	0.0991	0.0154	-0.0770	-6.0770	0.9373	6.0770	37.8090	-0.0721	-6.0721	6.0492	6.0721	37.2921
$\beta_{8, 2}$	4.0974	-0.1026	0.1909	0.0470	0.0420	0.0837	-4.1163	0.9821	4.1257	17.9086	0.0557	-4.1443	4.1595	17.7626	0.9904
$\beta_{8, 3}$	1.9938	-0.1062	0.2016	0.0519	0.0871	-0.0284	-2.1284	1.1496	2.2518	5.8515	0.0094	-2.0906	0.8800	2.1329	5.1450
MI4															
Intercepto	0.2320	2.4151	1.9528	5.8864	Inf	6.9328	6.9328	3.8855	7.0468	63.1611	6.9692	3.5202	7.0264	60.9612	Inf
β_1	3.8833	3.7833	3.7833	14.3183	37.8330	2.4061	2.3061	1.0600	2.3101	6.4419	3.0174	0.6349	2.9174	8.9143	29.1741
β_2	0.8438	-0.0062	0.0560	0.0032	0.0524	-0.0096	-0.8596	0.4308	0.8842	0.9245	-0.0077	-0.8577	0.8672	0.8469	1.0203
β_3	2.4866	-0.0134	0.0604	0.0038	0.0193	-0.0154	-2.5154	0.4950	2.5158	6.5723	-0.0034	-2.5034	0.3352	2.5034	1.0014
β_4	1.9881	-0.0119	0.0600	0.0037	0.0244	-0.0053	-1.9947	0.4371	1.9973	4.1700	0.0170	-1.9830	0.2934	1.9833	4.0185
β_5	0.0939	-0.0061	0.0573	0.0033	0.4564	-0.0006	-0.1006	0.5119	0.2939	0.2722	-0.0071	-0.1071	0.3091	0.2206	0.1070
β_6	1.4928	-0.0072	0.0548	0.0439	0.0293	-0.0032	-1.5032	0.5125	1.5154	2.5224	0.0073	-0.3239	1.4927	2.3331	0.9952
$\beta_7, 2$	5.9766	-0.0234	0.1215	0.0988	0.0153	-0.0786	-6.0786	0.9820	6.0786	37.9139	-0.0861	-6.0861	6.0453	6.0861	37.4569
$\beta_{8, 2}$	4.0971	-0.1029	0.1906	0.0469	0.0420	0.0551	-4.1449	1.1416	4.2088	18.4838	-0.0312	-4.2312	4.2417	18.5288	1.0099
$\beta_{8, 3}$	1.9939	-0.1061	0.2014	0.0518	0.0873	0.0276	-2.0724	1.2254	2.2149	5.7966	0.0092	-2.0908	0.8562	2.1316	5.1043

Tabela F.41: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5, 4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0.4$, $SNR = -5$, $d = 0.2$, $\tau_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$\tau_1 = 3000$					$\tau_1 = 40$					$\tau_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	-0.2798	-0.2798	2.0363	4.2249	Inf	-0.8336	6.9033	5.4507	48.3499	Inf	-1.0112	5.9213	4.7980	36.0840	Inf
β_1	23.6535	22.6535	0.3125	513.2786	22.6535	20.8396	19.8396	19.8396	399.9259	19.8396	22.0036	2.0358	21.0036	445.2940	21.0036
β_2	4.9611	-0.0389	0.1251	0.0172	0.0207	-0.0720	1.2453	5.0744	27.2761	1.0149	-0.0205	0.8021	5.0205	25.8489	1.0041
β_3	-1.9576	0.0424	0.1319	0.1124	0.0562	-0.1065	1.2935	2.0330	5.0917	1.0165	-0.0103	0.7134	2.0018	4.4678	1.0009
β_4	-3.9589	-0.0304	0.1261	0.1041	0.0168	-0.0218	1.2050	2.1231	5.5396	1.0616	-0.0425	0.7479	2.0507	4.7312	1.0254
β_5	4.9650	0.0411	0.1255	0.1051	0.0263	0.0514	1.2501	4.0523	17.9768	1.0131	-0.0436	0.8136	3.9564	16.3146	0.9891
β_6	5.3247	-0.0495	0.1252	0.1059	0.0212	-0.0491	1.2233	4.9599	26.0967	0.9920	-0.0453	0.7132	4.9547	25.0573	0.9909
$\beta_{7,2}$	-5.6006	0.3994	0.4237	0.3390	0.0787	-0.0433	3.1465	6.2294	45.3828	1.0382	-0.0626	1.4887	5.4750	32.0557	1.0139
$\beta_{8,2}$	-2.5809	0.4191	0.4424	0.3714	0.1662	-0.3482	3.6308	3.5441	20.2152	1.1814	-0.0561	2.1847	6.0655	40.1025	1.0109
$\beta_{8,3}$	-0.0848	-0.0848	2.4622	6.0694	Inf	-1.0296	6.5406	6.7961	74.0016	Inf	-0.9616	6.1316	4.8904	38.5211	Inf
β_1	0.9961	-0.0039	0.4410	0.3534	0.3534	0.4636	-0.5364	1.9259	1.3781	1.3781	0.2617	-0.7383	1.0904	1.7340	1.1413
β_2	4.9332	-0.0648	0.4376	0.1957	0.0710	0.0963	-4.9037	5.0030	26.5275	1.0006	0.0141	-4.9859	4.9859	25.5428	0.9972
β_3	-1.9349	0.0651	0.4269	0.3442	0.1721	-0.0693	1.9307	2.2236	6.2736	1.1118	-0.0341	1.9659	2.0385	4.5165	1.0192
β_4	1.9902	-0.0098	0.4450	0.3483	0.1981	0.1279	-1.8721	2.2673	6.6698	1.1336	0.0457	-1.9543	2.0709	4.7653	1.0355
β_5	-3.9635	0.0365	0.4190	0.3393	0.1733	0.0124	4.0124	4.0689	17.9391	1.0172	-0.0733	3.9267	3.9491	16.1915	0.9873
β_6	4.9763	-0.0237	0.4156	0.3284	0.1763	0.1137	-4.8863	4.9657	26.2048	0.9931	0.0426	-4.9574	4.9621	25.2745	0.9924
$\beta_{7,2}$	5.2848	-0.1152	0.8788	0.7079	0.1311	-0.2986	2.8144	5.9143	40.3954	1.0952	-0.0869	1.7868	5.5882	33.2984	1.0293
$\beta_{8,2}$	-5.7859	0.2141	1.6650	2.8182	0.2184	0.3303	6.3303	6.8577	57.1513	1.0976	-0.0059	5.9941	6.2185	42.3363	1.0364
$\beta_{8,3}$	-2.7723	0.2277	1.6818	2.8802	0.4506	0.1965	3.1965	3.8093	31.6110	1.2698	-0.0911	2.9089	3.2492	14.4093	1.0831
MI3															
Intercepto	-0.2792	-0.2792	2.0356	4.2218	Inf	-1.0922	6.9419	5.4853	49.3829	Inf	-1.1681	5.8960	4.7212	36.1275	Inf
β_1	23.6537	22.6537	0.3127	513.2864	22.6537	20.8340	19.8340	19.8340	400.2675	19.8340	21.9401	2.0915	20.9401	442.4544	20.9401
β_2	4.9611	-0.0389	0.1248	0.0171	0.0207	-0.0967	1.1764	5.0967	27.3606	1.0193	-0.0411	0.7615	5.0411	25.9926	1.0082
β_3	-1.9575	0.0425	0.1306	0.1089	0.0551	0.0042	2.0042	2.1517	5.8265	1.0759	0.0584	0.7736	2.0625	4.8354	1.0313
β_4	1.9637	-0.0363	0.1178	0.0982	0.0491	-0.0250	1.2464	2.1050	5.5418	1.0525	-0.0106	1.9894	1.9937	4.4388	0.9969
β_5	-3.9533	0.0467	0.1271	0.1065	0.0266	0.0250	1.0981	4.0332	17.4063	1.0083	-0.0030	3.9970	3.9970	16.4043	0.9993
β_6	4.9604	-0.0396	0.1221	0.1042	0.0208	-0.0578	1.2144	5.0593	27.0563	1.0119	-0.0239	0.7569	5.0239	25.8122	1.0048
$\beta_{7,2}$	5.3239	-0.0761	0.2702	0.2203	0.0788	0.0629	3.6303	6.2478	36.8123	1.0259	-0.0767	1.5214	5.4844	32.8086	1.0156
$\beta_{8,2}$	-5.6007	0.3993	0.4228	0.3382	0.0788	0.0415	6.0415	6.4787	44.5968	1.0413	0.0485	1.9618	6.0914	40.4328	1.0152
$\beta_{8,3}$	-2.5810	0.4190	0.4410	0.3700	0.1662	0.0706	3.5775	3.6457	22.2269	1.2152	0.0735	3.0735	3.2491	13.7263	1.0830
MI4															
Intercepto	-0.2807	-0.2807	2.0349	4.2195	Inf	-0.9767	6.6703	5.2937	45.4470	Inf	-1.0169	5.8950	4.7989	35.7852	Inf
β_1	23.6536	22.6536	0.3130	513.2841	22.6536	20.6344	19.6344	19.6344	392.3017	19.6344	22.0003	2.0454	21.0003	445.1957	21.0003
β_2	4.9610	-0.0390	0.1251	0.0172	0.0207	-0.0299	1.1128	5.0313	26.5384	1.0063	-0.0526	0.8177	5.0526	26.1973	1.0105
β_3	-1.9697	0.0303	0.1315	0.1043	0.0521	-0.0211	1.9789	1.4169	5.9237	1.0604	-0.0493	1.9507	1.9608	4.3325	0.9804
β_4	1.9592	-0.0408	0.1348	0.1123	0.0198	-0.0308	1.1141	2.1115	5.3655	1.0557	-0.0314	2.0314	2.0438	4.6735	1.0219
β_5	-3.9605	0.0395	0.1311	0.1066	0.0267	0.0001	4.0001	4.0198	17.5449	1.0050	0.0463	4.0463	4.0463	16.9800	1.0116
β_6	4.9654	-0.0346	0.1199	0.1010	0.0202	0.1337	1.4016	4.9091	25.6479	0.9818	-0.0020	5.0020	5.0020	25.6724	1.0004
$\beta_{7,2}$	5.3247	-0.0753	0.2696	0.2192	0.0406	-0.0736	5.4736	5.5281	35.3865	1.0237	-0.1252	1.5161	5.5281	32.8258	1.0232
$\beta_{8,2}$	-5.5999	0.4001	0.4227	0.3388	0.0788	0.0372	6.0372	6.6521	43.4817	1.0256	-0.0323	5.9677	6.0255	39.9446	1.0043
$\beta_{8,3}$	-2.5793	0.4207	0.4417	0.3720	0.1667	-0.1879	2.8121	3.3519	16.6033	1.1173	-0.0047	2.2054	3.2960	13.8359	1.0987

Tabela F.42: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5, 4, -6, -3)$, $\alpha^* = 0.4$, $SNR = -5$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$							
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1																		
Intercepto	0.2674	0.2674	10.4593	8.4562	109.4682	Inf	-0.4965	-0.4965	16.2627	12.8706	264.7221	Inf	-0.5126	-0.5126	15.0271	11.9854	226.0760	Inf
β_1	17.3898	16.3898	0.3041	16.3898	268.7164	16.3898	13.3084	13.3084	2.4534	12.3084	157.5158	12.3084	14.8073	13.8073	1.7852	13.8073	193.8273	13.8073
β_2	4.9764	-0.0236	0.2429	0.1927	0.0595	0.0385	-0.3054	-0.3054	1.4516	5.0626	27.6508	1.0125	-0.0253	-0.0253	0.9288	5.0263	26.1165	1.0051
β_3	-1.9570	0.0430	0.2614	0.2137	0.0610	0.1068	-0.0507	-0.0507	1.3439	2.1216	5.6057	1.0608	0.8231	0.9989	0.8231	2.0165	4.6732	1.0083
β_4	1.9788	-0.0212	0.2461	0.1954	0.0777	0.0977	0.1114	-1.9886	1.3955	2.1473	5.9020	1.0737	-0.0376	-0.0376	0.8819	2.0711	4.9296	1.0356
β_5	-3.9714	0.0286	0.2489	0.2011	0.0628	0.0503	0.0617	1.9568	1.3568	4.0685	18.3381	1.0171	-0.0426	-0.0426	0.9882	3.9574	16.4677	0.9894
β_6	4.9433	-0.0567	0.2562	0.2075	0.0688	0.0415	-0.0230	-0.9770	1.4947	4.9938	26.8866	0.9988	-0.9688	-0.9688	0.9003	4.9688	25.6962	0.9978
$\beta_{7,2}$	5.3411	-0.0589	0.5288	0.4262	0.2831	0.0789	-0.1209	-5.5209	2.7747	5.6429	38.1792	1.0450	-0.0587	-0.0587	1.7649	5.4877	32.9123	1.0162
$\beta_{8,2}$	-5.6651	0.3349	0.8339	0.7109	0.8075	0.1185	0.2096	6.2096	3.1584	6.3947	48.5348	1.0658	-0.1355	-0.1355	2.5368	6.0497	40.8279	1.0083
$\beta_{8,3}$	-2.6481	0.3519	0.8791	0.7460	0.8967	0.2487	-0.2141	2.7859	3.8822	3.6513	22.8327	1.2171	-0.1125	-0.1125	2.6477	3.2931	15.3481	1.0977
M2																		
Intercepto	0.4238	0.4238	10.4511	8.5083	109.4054	Inf	-0.4709	-0.4709	16.7861	13.3738	281.9958	Inf	-0.4505	-0.4505	14.9239	11.9252	222.9247	Inf
β_1	0.9757	-0.0243	0.3901	0.3163	0.1528	0.0316	0.2816	-0.7184	1.4322	1.2335	2.5673	1.2335	0.2006	-0.7994	0.8653	1.0797	1.3878	1.0797
β_2	4.9441	-0.0559	0.3966	0.3184	0.1604	0.0637	0.0904	-4.9096	1.4917	4.9009	26.3290	0.9982	0.1019	-4.9891	0.7832	4.9891	25.5041	0.9978
β_3	-1.9382	0.0618	0.3767	0.3052	0.1457	0.1526	-0.0144	1.9856	1.2709	2.1584	5.5579	1.0792	0.7334	0.7334	2.0396	4.4875	4.4875	1.0198
β_4	1.9967	-0.0033	0.3920	0.3103	0.1537	0.1552	0.0888	-1.9112	1.4873	2.1955	5.8650	1.0978	-0.0077	-0.0077	0.8433	2.0766	4.7420	1.0383
β_5	-3.9824	0.0176	0.3775	0.3043	0.1428	0.0761	-0.0434	3.9566	1.1664	4.0165	17.0150	1.0041	-0.0247	-0.0247	0.6651	3.9753	16.2455	0.9938
β_6	4.9875	-0.0125	0.3762	0.3035	0.1432	0.0607	0.0474	-4.9526	1.2451	5.0058	26.0789	1.0012	-0.9670	-0.9670	0.6724	4.9870	25.3218	0.9974
$\beta_{7,2}$	5.3172	-0.0828	0.7972	0.6473	0.6424	0.1199	-0.2374	-5.6374	2.5129	5.7857	38.0952	1.0714	-0.0931	-0.0931	1.5644	5.5607	32.6219	1.0298
$\beta_{8,2}$	-5.8209	0.1791	1.4618	1.1237	2.1689	0.1873	0.2110	6.2110	3.1394	6.3895	48.4327	1.0649	-0.0899	-0.0899	2.0823	6.1263	39.2657	1.0210
$\beta_{8,3}$	-2.8044	0.1956	1.4603	1.1694	2.1709	0.3898	0.0186	3.0186	3.4870	3.4731	21.2716	1.1577	-0.1519	-0.1519	2.8481	3.1932	12.9162	1.0644
M3																		
Intercepto	0.2687	0.2687	10.4589	8.4555	109.4612	Inf	-0.5239	-0.5239	16.3732	12.9622	268.3553	Inf	-0.6738	-0.6738	15.0178	12.0342	225.9895	Inf
β_1	17.3900	16.3900	0.3038	16.3900	268.7242	16.3900	13.3378	12.3378	2.4871	12.3378	158.4071	12.3378	14.8249	13.8249	1.7433	13.8249	194.1658	13.8249
β_2	4.9764	-0.0236	0.2427	0.1924	0.0595	0.0385	-0.1016	-5.1016	1.3424	5.1071	27.8286	1.0214	-0.0436	-0.0436	0.8911	5.0436	26.2316	1.0087
β_3	-1.9567	0.0433	0.2666	0.2169	0.0729	0.1085	0.0051	1.5479	2.2153	2.2153	6.4165	1.1077	0.0812	0.0812	0.9273	2.0991	5.1911	1.0495
β_4	1.9731	-0.0269	0.2295	0.1845	0.0534	0.0923	-0.0206	2.0206	1.3920	2.1719	6.0203	1.0859	-0.0082	-0.0082	0.8398	2.0282	4.7380	1.0141
β_5	-3.9551	0.0449	0.2512	0.2012	0.0651	0.0503	0.0185	4.0185	1.2867	4.0334	17.8036	1.0084	0.0080	0.0080	0.7938	4.0080	16.6943	1.0020
β_6	4.9685	-0.0315	0.2431	0.1995	0.0601	0.0399	-0.0571	-5.0571	1.4165	5.0669	27.5811	1.0134	-0.0519	-0.0519	0.9266	5.0534	26.3806	1.0107
$\beta_{7,2}$	5.3388	-0.0612	0.5274	0.4251	0.2819	0.0787	-0.0520	-5.4520	3.1420	5.6425	39.5957	1.0449	-0.1034	-0.1034	1.7850	5.5291	33.4739	1.0239
$\beta_{8,2}$	-5.6651	0.3349	0.8340	0.7106	0.8077	0.1184	0.0295	6.0295	3.3888	6.3804	47.6364	1.0634	0.0007	0.0007	2.3190	6.1231	41.3860	1.0205
$\beta_{8,3}$	-2.6477	0.3523	0.8803	0.7468	0.8997	0.2489	-0.1511	2.8489	4.4057	3.7889	27.5268	1.2630	0.0654	0.0654	2.4360	3.3919	15.3309	1.1306
M4																		
Intercepto	0.2646	0.2646	10.4584	8.4563	109.4479	Inf	-0.3592	-0.3592	16.1989	12.8171	262.5337	Inf	-0.5816	-0.5816	15.0190	12.0746	225.9083	Inf
β_1	17.3892	16.3892	0.3051	16.3892	268.6998	16.3892	13.1096	12.1096	2.5040	12.1096	152.9116	12.1096	14.8393	13.8393	1.7888	13.8393	194.7272	13.8393
β_2	4.9759	-0.0241	0.2423	0.1923	0.0593	0.0385	-0.0563	-5.0563	1.2892	5.0617	27.2280	1.0123	-0.0501	-0.0501	0.9649	5.0501	26.4344	1.0100
β_3	-1.9794	0.0206	0.2621	0.2044	0.0691	0.1022	-0.0060	1.9940	1.5564	2.1961	6.3983	1.0980	0.8674	0.9769	0.8674	1.9769	4.5046	0.9884
β_4	1.9639	-0.0361	0.2602	0.2098	0.0690	0.1049	-0.0473	-2.0473	1.2274	2.1580	5.6982	1.0790	-0.0296	-0.0296	0.8924	2.0639	4.9155	1.0320
β_5	-3.9642	0.0358	0.2536	0.1996	0.0656	0.0499	0.0937	4.0937	1.4029	4.1084	18.6450	1.0271	0.0674	0.0674	0.9395	4.0674	17.4285	1.0169
β_6	4.9757	-0.0243	0.2369	0.1888	0.0567	0.0378	0.1327	-4.8673	1.5157	4.8913	25.9881	0.9783	-0.9891	-0.9891	0.9390	4.9891	25.7724	0.9978
$\beta_{7,2}$	5.3388	-0.0602	0.5274	0.4240	0.2818	0.0785	-0.0939	-5.4939	2.7209	5.6451	37.5858	1.0454	-0.2007	-0.2007	1.7938	5.6145	34.5858	1.0397
$\beta_{8,2}$	-5.6620	0.3380	0.8347	0.7114	0.8110	0.1186	-0.0658	5.9342	3.2699	6.2889	45.9070	1.0481	0.0295	0.0295	2.3873	6.1429	42.0538	1.0238
$\beta_{8,3}$	-2.6427	0.3573	0.8838	0.7469	0.9087	0.2490	-0.3621	2.6379	3.7510	3.6024	21.0288	1.2008	0.0559	0.0559	2.4756	3.4277	15.4672	1.1426

Tabela F.43: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.8$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$						
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M11																	
Intercepto	0.2208	0.2208	0.9383	0.7700	0.9291	Inf	6.8712	3.1379	6.9264	57.0596	Inf	6.7993	6.7993	2.6905	6.8176	53.4688	Inf
β_1	10.5485	10.4485	0.1441	10.4485	109.1921	104.4851	9.2573	9.1573	9.1573	85.3583	91.5733	9.8029	9.7029	0.9396	9.7029	95.0292	97.0290
β_2	0.8325	-0.0175	0.0575	0.0476	0.0036	0.0560	0.0102	-0.8398	0.5573	0.9113	1.0158	-0.0035	-0.8535	0.3691	0.8680	0.8647	1.0212
β_3	2.4840	-0.0160	0.0608	0.0512	0.0040	0.0205	-0.0039	-2.5039	0.4548	6.5496	1.0015	-0.0199	-2.5199	0.3038	2.5199	6.4421	1.0080
β_4	1.9840	-0.0160	0.0581	0.0485	0.0036	0.0242	-0.0007	-2.0007	0.4548	2.0007	3.0833	-0.0127	-2.0127	0.3038	2.0127	4.1432	1.0063
β_5	0.0844	-0.0156	0.0551	0.0473	0.0033	0.0242	-0.0174	-0.1174	0.5242	0.3083	0.2886	-0.0144	-0.1144	0.3149	0.2140	0.1123	2.1402
β_6	1.4780	-0.0220	0.0578	0.0486	0.0038	0.0324	0.0013	-1.4987	0.5417	1.5148	2.5397	0.0074	-1.4926	0.3205	1.4926	2.3305	0.9951
$\beta_{7,2}$	5.9614	-0.0386	0.1246	0.1026	0.0170	0.0171	-0.0859	-6.0859	1.0779	6.0859	38.2004	0.1043	-6.0221	0.5963	6.0221	36.6213	1.0037
$\beta_{8,2}$	4.0050	-0.1950	0.1955	0.2293	0.0763	0.0546	0.0999	-4.1001	1.3162	4.1993	18.5432	0.9998	-4.1578	0.6321	4.1593	17.8871	0.9903
$\beta_{8,3}$	1.8934	-0.2066	0.2044	0.2394	0.0844	0.1140	0.0199	-2.0801	1.3824	2.2625	6.2376	1.0774	-2.0834	0.6953	2.1256	4.8240	1.0122
M12																	
Intercepto	0.3047	0.3047	1.1700	0.9661	1.4618	Inf	6.8419	4.0725	7.0119	63.3960	Inf	6.8869	6.8869	2.7867	6.9160	55.1956	Inf
β_1	10.5487	10.4487	0.1442	10.4487	109.1963	104.4871	9.2896	9.1896	9.1896	85.9270	91.8957	9.7574	9.6574	0.9377	9.6574	94.1440	96.5737
β_2	0.8327	-0.0173	0.0574	0.0476	0.0036	0.0560	-0.0165	-0.8665	0.5031	0.9154	1.0404	-0.0102	-0.8602	0.3058	0.8662	0.8335	1.0191
β_3	2.4843	-0.0157	0.0602	0.0505	0.0039	0.0202	-0.0067	-2.5067	0.5088	2.5078	6.6071	-0.0058	-2.4947	0.3202	2.4947	6.3263	0.9979
β_4	1.9812	-0.0188	0.0544	0.0460	0.0033	0.0230	-0.0015	-2.0015	0.5939	2.0133	3.0063	-0.0099	-2.0099	0.3113	2.0099	4.1365	1.0049
β_5	0.0871	-0.0129	0.0555	0.0465	0.0032	0.0246	0.0249	-0.0751	0.5428	0.3153	0.3003	0.1660	-0.0840	0.2876	0.1956	0.0898	1.9556
β_6	1.4825	-0.0175	0.0563	0.0478	0.0035	0.0319	0.0383	-1.4617	0.5246	1.4875	2.4119	0.0017	-1.4795	0.3058	1.4796	2.2826	0.9864
$\beta_{7,2}$	5.9612	-0.0388	0.1243	0.1025	0.0170	0.0171	-0.0726	-6.0726	0.9854	6.0726	37.8479	1.0121	-6.0568	0.6253	6.0568	37.0754	1.0095
$\beta_{8,2}$	4.0061	-0.1939	0.1960	0.2287	0.0760	0.0544	0.0610	-4.1390	1.0885	4.1549	18.3158	0.9893	-4.1350	0.7758	4.1509	17.6998	0.9883
$\beta_{8,3}$	1.8947	-0.2053	0.2047	0.2389	0.0841	0.1138	-0.0363	-2.1363	1.3395	2.2918	6.3583	1.0913	-2.0725	0.8689	2.1212	5.0501	1.0101
M13																	
Intercepto	0.2199	0.2199	0.9390	0.7701	0.9301	Inf	6.9009	3.0587	6.9139	56.9786	Inf	6.7896	6.7896	2.6742	6.7954	53.2505	Inf
β_1	10.5487	10.4487	0.1442	10.4487	109.1963	104.4871	9.2896	9.1896	9.1896	85.9270	91.8957	9.7574	9.6574	0.9377	9.6574	94.1440	96.5737
β_2	0.8327	-0.0173	0.0574	0.0476	0.0036	0.0560	-0.0165	-0.8665	0.5031	0.9154	1.0404	-0.0102	-0.8602	0.3058	0.8662	0.8335	1.0191
β_3	2.4843	-0.0157	0.0602	0.0505	0.0039	0.0202	-0.0067	-2.5067	0.5088	2.5078	6.6071	-0.0058	-2.4947	0.3202	2.4947	6.3263	0.9979
β_4	1.9812	-0.0188	0.0544	0.0460	0.0033	0.0230	-0.0015	-2.0015	0.5939	2.0133	3.0063	-0.0099	-2.0099	0.3113	2.0099	4.1365	1.0049
β_5	0.0871	-0.0129	0.0555	0.0465	0.0032	0.0246	0.0249	-0.0751	0.5428	0.3153	0.3003	0.1660	-0.0840	0.2876	0.1956	0.0898	1.9556
β_6	1.4825	-0.0175	0.0563	0.0478	0.0035	0.0319	0.0383	-1.4617	0.5246	1.4875	2.4119	0.0017	-1.4795	0.3058	1.4796	2.2826	0.9864
$\beta_{7,2}$	5.9612	-0.0388	0.1243	0.1025	0.0170	0.0171	-0.0726	-6.0726	0.9854	6.0726	37.8479	1.0121	-6.0568	0.6253	6.0568	37.0754	1.0095
$\beta_{8,2}$	4.0061	-0.1939	0.1960	0.2287	0.0760	0.0544	0.0610	-4.1390	1.0885	4.1549	18.3158	0.9893	-4.1350	0.7758	4.1509	17.6998	0.9883
$\beta_{8,3}$	1.8947	-0.2053	0.2047	0.2389	0.0841	0.1138	-0.0363	-2.1363	1.3395	2.2918	6.3583	1.0913	-2.0725	0.8689	2.1212	5.0501	1.0101
M14																	
Intercepto	0.2206	0.2206	0.9379	0.7692	0.9283	Inf	6.8831	2.9955	6.8966	56.3497	Inf	6.8774	6.8774	2.6672	6.8924	54.4133	Inf
β_1	10.5485	10.4485	0.1443	10.4485	109.1926	104.4853	9.2184	9.1184	9.1184	84.7599	91.1840	9.7884	9.6884	0.9422	9.6884	94.7521	96.8836
β_2	0.8325	-0.0175	0.0575	0.0476	0.0036	0.0560	-0.0139	-0.8639	0.4472	0.8913	0.9464	-0.0095	-0.8595	0.3334	0.8701	0.8499	1.0236
β_3	2.4784	-0.0216	0.0606	0.0506	0.0041	0.0202	-0.0155	-2.5155	0.5412	2.5219	6.6208	-0.0017	-2.5017	0.3234	2.5017	6.3633	1.0007
β_4	1.9790	-0.0210	0.0621	0.0524	0.0043	0.0242	-0.0039	-2.0039	0.4494	2.0088	4.2174	0.0044	-1.9848	0.3088	1.9855	4.0206	0.9928
β_5	0.0839	-0.0161	0.0574	0.0482	0.0036	0.0242	-0.0091	-0.1091	0.5241	0.2546	0.2486	0.0022	-0.0978	0.2982	0.2066	0.0985	2.0660
β_6	1.4846	-0.0154	0.0554	0.0465	0.0033	0.0310	0.0091	-1.4909	0.5154	1.5053	2.4885	0.0021	-1.4979	0.3221	1.4979	2.3474	0.9986
$\beta_{7,2}$	5.9615	-0.0385	0.1243	0.1021	0.0169	0.0170	-0.0708	-6.0708	1.0007	6.0708	37.8561	1.0118	-6.0673	0.5990	6.0673	37.1709	1.0112
$\beta_{8,2}$	4.0050	-0.1950	0.1952	0.2282	0.0761	0.0546	0.0154	-4.1846	1.0791	4.2258	18.6757	1.0036	-4.0299	0.8079	4.2409	18.5449	1.0097
$\beta_{8,3}$	1.8939	-0.2061	0.2039	0.2386	0.0840	0.1136	-0.0106	-2.1106	1.1710	2.2151	5.8256	1.0599	-2.0860	0.8506	2.1304	5.0751	1.0145

Tabela F.44: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae*, *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.8$, $SNR = -1$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mae</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	0.4091	4.8197	3.9969	23.3967	Inf	7.0885	7.4170	8.3792	105.2584	Inf	7.0336	7.0336	6.9388	8.1854	97.6189
β_1	7.6587	0.1401	7.5587	57.1533	75.5868	5.8330	5.7330	1.1766	5.7330	34.2513	6.5675	6.4675	0.8333	6.4675	64.6754
β_2	0.8403	-0.0097	0.1118	0.0887	0.1043	-0.0063	-0.8563	0.6344	0.9469	1.1357	0.0093	-0.8407	0.4398	0.8728	0.9002
β_3	2.4911	-0.0089	0.1205	0.0983	0.0146	-0.0039	-2.5029	6.6081	2.5089	6.6394	-0.0058	-2.5058	0.3769	2.5058	6.4213
β_4	1.9691	-0.0109	0.1135	0.0904	0.0130	-0.0167	-2.0167	0.5243	2.0192	4.3418	-0.0214	-2.0214	0.3596	2.0214	4.2153
β_5	0.0895	-0.0105	0.1075	0.0880	0.0117	-0.0290	-0.1290	0.6002	0.3396	3.3965	-0.0170	-0.1170	0.3708	0.2354	0.1512
β_6	1.4753	-0.0247	0.1183	0.0955	0.0146	0.0303	-1.4697	0.6321	1.5128	2.5595	-0.0021	-1.5021	0.3896	1.5024	2.4082
$\beta_{7,2}$	5.9708	-0.0292	0.2439	0.1965	0.0603	-0.0984	-6.0984	1.2533	6.0984	38.7669	-0.0358	-6.0358	0.7264	6.0358	36.9583
$\beta_{8,2}$	4.0432	-0.1568	0.3827	0.3357	0.1710	4.0777	1.3514	4.1898	18.4539	0.9976	0.0076	-4.1924	0.8427	4.1957	18.2860
$\beta_{8,3}$	1.9353	-0.1647	0.4043	0.3497	0.1665	-2.0724	1.4746	2.3077	6.4693	1.0989	0.0157	-2.0843	0.9390	2.1425	5.2260
MI2															
Intercepto	0.4916	4.8344	3.9223	23.6133	Inf	7.1318	7.8312	8.6252	112.1899	Inf	7.0739	7.0739	6.8923	8.1835	97.5437
β_1	0.0925	-0.0075	0.1689	0.1381	0.0286	-0.0968	0.7152	0.2811	0.5208	2.8115	0.0185	-0.0815	0.3837	0.2023	0.1539
β_2	0.8174	-0.0326	0.1834	0.1479	0.0347	0.282	-0.8218	0.7691	0.9524	1.2669	0.0135	-0.8365	0.4502	0.8896	0.9024
β_3	2.4967	-0.0033	0.1732	0.1389	0.0300	-0.0070	-2.5070	0.5473	2.5128	6.5846	-0.0035	-2.5035	0.3567	2.5035	6.3949
β_4	1.9693	-0.0107	0.1815	0.1441	0.0330	-0.0010	-2.0010	0.5939	2.0314	4.3566	-0.0022	-2.0022	0.3852	2.0022	4.1570
β_5	0.0888	-0.0112	0.1654	0.1330	0.0275	0.0167	-0.0833	0.6281	0.2707	0.4014	0.0170	-0.0830	0.3658	0.1989	0.1407
β_6	1.4872	-0.0128	0.1750	0.1415	0.0308	0.0251	-1.4749	0.6261	1.5429	2.5673	0.0237	-1.4763	0.3410	1.4807	2.2956
$\beta_{7,2}$	5.9434	-0.0566	0.3678	0.3007	0.1385	-0.0966	-6.0966	1.2311	6.1102	38.6846	-0.0502	-6.0502	0.7746	6.0502	37.2050
$\beta_{8,2}$	3.9694	-0.2306	0.6891	0.5527	0.281	-0.0368	-4.2368	1.3846	4.3048	19.8675	-0.0198	-4.2198	0.8515	4.2419	18.5320
$\beta_{8,3}$	1.8657	-0.2343	0.6917	0.5333	0.2702	-0.0280	-2.1280	1.7213	2.3469	7.4913	-0.0267	-2.1267	0.9419	2.1916	5.4101
MI3															
Intercepto	0.4094	4.8199	3.9960	23.3915	Inf	7.1188	7.3717	8.3777	105.0193	Inf	7.0157	7.0157	6.8890	8.1590	96.6784
β_1	7.6590	0.1399	7.5590	57.1577	75.5898	5.9000	5.8000	1.1778	5.8000	35.0275	6.5009	6.4009	0.8291	6.4009	41.6584
β_2	0.8404	-0.0096	0.1119	0.0887	0.1026	-0.0429	-0.8929	0.6054	0.9634	1.1639	-0.0102	-0.8602	0.3529	0.8707	0.8644
β_3	2.4913	-0.0087	0.1229	0.0991	0.0152	-0.0024	-2.5024	0.6899	2.5112	6.7381	0.0289	-2.4711	0.3816	2.4711	6.2518
β_4	1.9685	-0.0135	0.1058	0.0852	0.0114	-0.0193	-2.0193	0.6848	2.0278	4.5464	-0.0014	-2.0014	0.3670	2.0014	4.1402
β_5	0.0964	-0.0036	0.1091	0.0877	0.0119	0.0107	-0.0893	0.6153	0.3459	3.4586	0.0086	-0.0914	0.3305	0.2135	0.1176
β_6	1.4868	-0.0132	0.1122	0.0920	0.0128	0.0215	-1.4785	0.6439	1.5262	2.6006	0.0157	-1.4843	0.3528	1.4868	2.3277
$\beta_{7,2}$	5.9703	-0.0300	0.2432	0.1961	0.0600	-0.0719	-6.0719	1.1422	6.0719	38.1723	-0.0699	-6.0699	0.7189	6.0699	37.3601
$\beta_{8,2}$	4.0435	-0.1565	0.3828	0.3349	0.1710	0.0728	-4.1272	1.3464	4.1838	18.8468	0.0415	-4.1585	0.8634	4.1816	18.0390
$\beta_{8,3}$	1.9358	-0.1642	0.4042	0.3474	0.1903	-0.0575	-2.1575	1.7882	2.4007	7.8524	-0.0354	-2.0646	1.0121	2.1339	5.2868
MI4															
Intercepto	0.4106	4.8169	3.8940	23.3708	Inf	7.1169	7.2831	8.3176	103.6943	Inf	7.1118	7.1118	6.8624	8.1870	97.6702
β_1	7.6585	0.1403	7.5585	57.1512	75.5854	5.8394	5.7394	1.2271	5.7394	34.4464	6.5548	6.4548	0.8318	6.4548	42.3567
β_2	0.8401	-0.0099	0.1119	0.0889	0.1026	-0.0037	-0.8537	0.5580	0.9187	1.0402	-0.0048	-0.8548	0.3962	0.8746	0.8877
β_3	2.4804	-0.0196	0.1208	0.0953	0.0150	-0.0099	-2.5099	0.6032	2.5201	6.6634	-0.0061	-2.5061	0.3839	2.5061	6.4281
β_4	1.9621	-0.0179	0.1199	0.0969	0.0147	-0.0002	-2.0002	0.5595	2.0063	4.3138	0.0047	-0.0047	0.3511	1.9960	4.1044
β_5	0.0923	-0.0077	0.1100	0.0875	0.0122	0.0059	-0.0941	0.5621	0.3248	3.0584	0.0151	-0.0849	0.3619	0.2321	0.1382
β_6	1.4900	-0.0100	0.1095	0.0872	0.0121	0.0090	-1.4910	0.6651	1.5326	2.6655	-0.0012	-1.5012	0.3817	1.5024	2.3995
$\beta_{7,2}$	5.9703	-0.0297	0.2430	0.1959	0.0599	-0.0649	-6.0649	1.1517	6.0649	38.1095	-0.0801	-6.0801	0.7739	6.0801	37.5661
$\beta_{8,2}$	4.0416	-0.1584	0.3798	0.3339	0.1694	0.0199	-4.1801	1.2080	4.2162	18.9323	-0.0526	-4.2526	0.9598	4.2713	19.0055
$\beta_{8,3}$	1.9347	-0.1653	0.4022	0.3490	0.1891	-0.0531	-2.1531	1.2810	2.2754	6.2767	-0.0053	-2.1053	1.0289	2.1686	5.4910

Tabela F.45: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M1, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 0.8$, $SNR = 0$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
M1															
Intercepto	0.2036	0.2036	0.8366	0.7414	Inf	6.8470	6.8470	6.8866	55.1517	Inf	6.7946	6.7946	6.8031	52.0579	Inf
β_1	9.4117	9.3117	0.1284	9.3117	0.6876	8.1661	8.0661	8.0661	66.4353	80.6614	8.6935	8.6935	8.5935	74.6216	85.9347
β_2	8.8339	-0.0161	0.0514	0.0426	0.0502	0.0081	-0.8419	0.5368	0.9078	1.0680	-0.0016	-0.8516	0.3579	0.8553	1.0177
β_3	2.4851	-0.0149	0.0542	0.0457	0.0332	-0.0042	-2.5042	0.0032	6.5361	1.0017	-2.5211	0.2965	0.2511	6.4437	1.0084
β_4	1.9851	-0.0149	0.0518	0.0434	0.0029	0.0007	-1.9993	0.4410	1.9993	0.9996	-0.0132	0.2954	2.0132	4.1404	1.0066
β_5	0.0850	-0.0150	0.0499	0.0428	0.0027	-0.0149	-0.1149	0.5084	0.2995	2.9951	-0.0130	0.3066	0.2094	0.1068	2.0935
β_6	1.4798	-0.0202	0.0515	0.0435	0.0031	-0.0005	-1.5005	0.5227	1.5123	2.5247	0.0045	-1.4955	0.3059	1.4955	0.9970
$\beta_{7,2}$	5.9642	-0.0358	0.1111	0.0917	0.0136	-0.0731	-6.0731	1.0403	6.0731	37.9646	-0.0216	6.0216	0.6216	36.5908	1.0036
$\beta_{8,2}$	4.0197	-0.1803	0.1747	0.2086	0.0497	0.1083	-4.0917	1.2823	4.1839	18.3864	0.0439	-4.1561	0.6187	17.6561	0.9898
$\beta_{8,3}$	1.9091	-0.1909	0.1826	0.2186	0.1041	0.0292	-2.0708	1.3421	2.2417	6.0895	0.0107	-2.0893	0.6833	4.8320	1.0144
M2															
Intercepto	0.2614	0.2614	1.0281	0.8490	1.1252	6.8426	6.8426	6.9492	60.1306	Inf	6.8670	6.8670	6.8891	53.3960	Inf
β_1	0.1035	0.0035	0.1723	0.1387	0.0297	0.0504	-0.0496	0.8062	0.3066	3.0659	0.0384	-0.0616	0.4323	0.1907	2.1277
β_2	8.1917	-0.0303	0.1799	0.1463	0.0333	0.0031	-0.8469	0.7177	0.9739	1.2323	0.0182	-0.8318	0.4308	0.8819	1.0375
β_3	2.4936	-0.0064	0.1719	0.1366	0.0296	-0.0442	-2.5442	0.6267	2.5503	6.8656	0.0032	-2.4968	0.3829	2.4968	0.9987
β_4	1.9898	-0.0102	0.1815	0.1426	0.0330	0.0116	-1.9884	0.6443	2.0263	4.3689	0.0213	-1.9787	0.4270	1.9827	0.9913
β_5	0.0937	-0.0063	0.1632	0.1313	0.0267	0.0200	-0.0800	0.7550	0.3122	0.5764	-0.0066	-0.1066	0.4493	0.2300	2.2996
β_6	1.4863	-0.0137	0.1699	0.1339	0.0290	0.0770	-1.4230	0.6292	1.5037	2.4208	0.0252	-1.4748	0.3747	1.4803	0.9868
$\beta_{7,2}$	5.9405	-0.0595	0.3626	0.2952	0.1350	-0.0838	-6.0838	1.3662	6.1152	38.8795	-0.0313	6.0313	0.8182	6.0313	1.0052
$\beta_{8,2}$	3.9703	-0.2297	0.6717	0.5569	0.5039	0.0127	-4.1873	1.2844	4.2681	19.1831	-0.0246	-4.2246	1.0194	4.2572	18.8867
$\beta_{8,3}$	1.8662	-0.2338	0.6834	0.5667	0.5217	0.0864	-2.0136	1.6989	2.3281	6.9410	-0.0608	-2.1608	0.9496	2.2202	5.5708
M3															
Intercepto	0.2041	0.2041	0.8363	0.6876	0.7410	6.8939	6.8939	6.9016	55.2903	Inf	6.7882	6.7882	6.7951	52.0021	Inf
β_1	9.4117	9.3117	0.1285	9.3117	0.6876	8.2036	8.1036	8.1036	67.0125	81.0358	8.6507	8.5507	8.5507	73.8840	85.5071
β_2	8.8339	-0.0161	0.0512	0.0426	0.0029	-0.0193	-0.8693	0.4874	0.9141	0.9932	-0.0081	-0.8581	0.2970	0.8637	0.8246
β_3	2.4852	-0.0148	0.0537	0.0453	0.0031	-0.0063	-2.5063	0.5507	2.5074	6.5847	0.0046	-2.4954	0.3108	2.4954	0.9981
β_4	1.9825	-0.0175	0.0485	0.0412	0.0027	0.0009	-1.9991	0.5806	2.0108	4.3336	-0.0106	-2.0106	0.3031	2.0106	1.0053
β_5	0.0873	-0.0127	0.0502	0.0420	0.0027	0.0251	-0.0749	0.5380	0.3132	0.2951	0.0148	-0.0852	0.2799	0.1913	0.0856
β_6	1.4837	-0.0163	0.0501	0.0428	0.0028	0.0381	-1.4619	0.5164	1.4863	2.4038	0.0220	-1.4780	0.2989	1.4780	0.9853
$\beta_{7,2}$	5.9638	-0.0362	0.1110	0.0918	0.0136	-0.0723	-6.0723	0.9660	6.0723	37.8066	-0.0607	-6.0607	0.6104	37.1043	1.0101
$\beta_{8,2}$	4.0194	-0.1806	0.1739	0.2085	0.0628	0.0613	-4.1387	1.0505	4.1512	18.2323	0.0662	-4.1338	0.7772	17.6925	0.9880
$\beta_{8,3}$	1.9088	-0.1912	0.1819	0.2181	0.0696	-0.0344	-2.1344	1.2820	2.2766	6.1990	0.0184	-2.0816	0.8632	2.1284	1.0135
M4															
Intercepto	0.2032	0.2032	0.8362	0.6867	0.7405	6.8875	6.8875	6.8911	54.9334	Inf	6.8693	6.8693	6.8779	52.9439	Inf
β_1	9.4117	9.3117	0.1287	9.3117	0.6876	8.1319	8.0319	8.0319	66.0048	80.3187	8.6704	8.5704	8.5704	74.3776	85.7935
β_2	8.8338	-0.0162	0.0513	0.0426	0.0029	-0.0123	-0.8623	0.4318	0.8882	0.9299	-0.0092	-0.8592	0.3221	0.8686	0.8420
β_3	2.4801	-0.0199	0.0540	0.0453	0.0034	-0.0195	-2.5195	0.5293	2.5250	6.6280	0.0016	-2.4984	0.3153	2.4984	0.9993
β_4	1.9807	-0.0193	0.0550	0.0468	0.0030	-0.0056	-2.0056	0.4370	2.0106	4.2133	0.0166	-1.9834	0.2759	1.9839	0.9920
β_5	0.0845	-0.0155	0.0522	0.0438	0.0030	-0.0059	-1.0159	0.2698	0.2698	2.6982	0.0018	-0.0982	0.2892	0.2020	0.0982
β_6	1.4857	-0.0143	0.0494	0.0416	0.0026	0.0099	-1.4901	0.4992	1.5026	2.4697	0.0017	-1.4983	0.3114	1.4983	0.9989
$\beta_{7,2}$	5.9644	-0.0356	0.1107	0.0914	0.0135	-0.0825	-6.0825	0.9715	6.0825	37.9400	-0.0630	-6.0630	0.5752	37.0906	1.0105
$\beta_{8,2}$	4.0199	-0.1801	0.1745	0.2086	0.0497	0.1011	-4.1899	1.0677	4.2203	18.6956	-0.0293	-4.2293	0.7615	18.4669	1.0094
$\beta_{8,3}$	1.9097	-0.1903	0.1826	0.2186	0.0695	-0.0142	-2.1142	1.1425	2.2193	6.7750	0.0140	-2.0860	0.8136	2.1271	1.0129

Tabela F.46: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos M_l , com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>
Intercepto	0.2253	0.2253	0.9386	0.7708	0.9318	6.8600	6.8600	3.1251	6.9146	56.8257	6.8013	6.8013	2.6639	6.8118	53.3536
β_1	10.5514	10.4514	0.1441	10.4514	109.2532	9.3255	9.2255	1.2044	9.2255	86.5997	9.8309	9.7309	0.9419	9.7309	95.5770
β_2	0.8318	-0.0182	0.0576	0.0478	0.0036	0.0025	-0.8475	0.5281	0.9098	0.9971	-0.0011	-0.8511	0.3507	0.8655	0.8474
β_3	2.4839	-0.0161	0.0609	0.0512	0.0040	-0.0031	-2.0073	0.5053	6.4247	1.0035	-0.0206	-2.5206	2.0266	6.4374	1.0083
β_4	1.9837	-0.0163	0.0582	0.0485	0.0036	-0.0031	-2.0031	0.4373	2.0031	4.2034	-0.0113	-2.0113	0.2893	4.1257	1.0057
β_5	0.0835	-0.0165	0.0549	0.0474	0.0033	-0.0212	-0.1212	0.4928	0.2855	2.8547	-0.0160	-0.1160	0.3024	0.2034	0.1049
β_6	1.4776	-0.0224	0.0578	0.0488	0.0038	0.0032	-1.4968	0.5054	1.5110	2.4957	0.0021	-1.4979	0.2991	2.3350	0.9986
$\beta_{7,2}$	5.9616	-0.0384	0.1247	0.1027	0.0170	-0.0854	-6.0854	0.0068	36.0456	1.0142	-0.0076	-6.0076	0.5571	36.4011	1.0013
$\beta_{8,2}$	4.0002	-0.1998	0.1962	0.2326	0.0784	0.1088	-4.0912	1.2677	4.1908	18.3450	0.0269	-4.1731	0.5787	17.7496	0.9936
$\beta_{8,3}$	1.8879	-0.2121	0.2052	0.2439	0.0871	0.0248	-2.0752	1.3400	2.2575	6.1022	0.0107	-2.0893	0.6403	4.7751	1.0097
Intercepto	0.3062	0.3062	1.1701	0.9674	1.4629	6.8324	6.8324	4.0772	7.0077	63.3061	6.8836	6.8836	2.7919	6.9125	55.1791
β_1	10.5516	10.4516	0.1442	10.4516	109.2558	9.3675	9.2675	1.2064	9.2675	87.3414	6.7914	6.7914	2.6679	6.7976	53.2408
β_2	0.8319	-0.0181	0.0575	0.0478	0.0036	-0.0204	-0.8704	0.4643	0.9099	0.9732	-0.0037	-0.8537	0.2878	0.8595	0.8117
β_3	2.4841	-0.0159	0.0603	0.0506	0.0039	-0.0005	-2.4995	0.5433	2.5007	6.5427	0.0077	-2.4923	2.0923	6.3067	0.9969
β_4	1.9809	-0.0191	0.0544	0.0461	0.0033	-0.0093	-2.0093	0.5710	2.0197	4.3631	-0.0104	-2.0104	0.2996	4.1316	1.0052
β_5	0.0862	-0.0138	0.0553	0.0466	0.0032	0.0240	-0.0760	0.5221	0.2954	2.783	0.0114	-0.0886	0.2709	0.1822	0.0812
β_6	1.4820	-0.0180	0.0563	0.0480	0.0035	0.0370	-1.4630	0.5049	1.4867	2.3953	0.0218	-1.4782	0.2896	2.2689	0.9855
$\beta_{7,2}$	5.9613	-0.0387	0.1246	0.1026	0.0170	-0.0464	-6.0464	0.9350	6.0464	37.4325	-0.0560	-6.0560	0.5996	6.0560	37.0351
$\beta_{8,2}$	4.0006	-0.1994	0.1959	0.2320	0.0781	0.0756	-4.1244	1.0030	4.1413	18.0170	0.0573	-4.1427	0.7669	17.7499	0.9902
$\beta_{8,3}$	1.8884	-0.2116	0.2046	0.2432	0.0866	-0.0163	-2.1163	1.2720	2.2678	6.0967	0.0338	-2.0662	0.8492	4.9903	1.0072
Intercepto	0.2253	0.2253	0.9378	0.7702	0.9302	6.8817	6.8817	2.9753	6.8929	56.2106	6.8806	6.8806	2.6630	6.8953	54.4339
β_1	10.5514	10.4514	0.1443	10.4514	109.2533	9.2965	9.1965	1.2657	9.1965	86.1773	6.8806	6.8806	2.6630	6.8953	54.4339
β_2	0.8318	-0.0182	0.0576	0.0478	0.0036	-0.0146	-0.8646	0.4214	0.8893	0.9251	-0.0076	-0.8576	0.3177	0.8676	0.8364
β_3	2.4783	-0.0217	0.0607	0.0507	0.0042	-0.0176	-2.5176	0.5138	2.5214	6.6024	0.0026	-2.4974	0.3020	2.4974	6.3284
β_4	1.9787	-0.0213	0.0621	0.0525	0.0043	0.0045	-1.9955	0.4184	1.9984	4.1570	0.0141	-1.9859	0.2699	1.9866	4.0165
β_5	0.0831	-0.0169	0.0573	0.0485	0.0036	-0.0082	-0.1082	0.4608	0.2521	2.240	0.0024	-0.0976	0.2822	0.1962	0.0892
β_6	1.4841	-0.0159	0.0555	0.0467	0.0033	0.0115	-1.4885	0.4902	1.5016	2.4558	0.0031	-1.4969	0.3069	1.4969	2.3348
$\beta_{7,2}$	5.9616	-0.0384	0.1244	0.1022	0.0169	-0.0656	-6.0656	0.9607	6.0656	37.7145	-0.0606	-6.0606	0.5630	6.0606	37.4482
$\beta_{8,2}$	4.0000	-0.2000	0.1956	0.2327	0.0783	0.0098	-4.1902	1.0491	4.2183	18.6585	-0.0369	-4.2369	0.7292	4.2444	18.4831
$\beta_{8,3}$	1.8881	-0.2119	0.2045	0.2430	0.0867	-0.0063	-2.1063	1.1101	2.2035	5.6687	0.0026	-2.0974	0.7825	2.1273	5.0116

snr1b1ar1n23 As Tabelas F.50 - F.68 correspondem a simulação com os modelos M_l para $l \in \{12, 14\}$.

Tabela F.47: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae*, *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{1, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = -1$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	0.4106	0.4106	4.8196	3.8969	23.3975	7.0823	7.0823	7.3964	8.6453	104.8656	7.0231	7.0231	6.9245	8.1725	97.2717
β_1	7.6604	7.5604	0.1402	7.5604	57.1799	5.8978	5.7978	1.1677	5.7978	34.9779	6.6049	6.5049	0.8386	6.5049	43.0164
β_2	0.8399	-0.101	0.1118	0.0887	0.0126	-0.0081	-0.8581	0.5222	0.9452	1.1223	1.1120	0.0083	0.8706	0.8835	1.0242
β_3	2.4912	-0.0088	0.1109	0.0983	0.0146	-0.0072	-2.5072	0.5928	2.5121	6.6374	-0.0116	-2.5116	0.3606	2.5116	6.4382
β_4	1.9891	-0.0109	0.1136	0.0904	0.0130	-0.0166	-2.0166	0.5096	2.0188	4.3262	-0.0232	-0.3460	0.3460	2.0232	4.2133
β_5	0.0891	-0.0109	0.1073	0.0879	0.0116	-0.0247	-0.1247	0.5750	0.3199	3.3461	-0.1169	-0.3569	0.3569	0.2241	1.0116
β_6	1.4751	-0.0249	0.1182	0.0955	0.0146	-0.0327	-0.1460	0.6093	1.5107	2.5291	1.0071	0.3746	1.4982	2.3839	0.9888
$\beta_{7,2}$	5.9713	-0.0287	0.2438	0.1965	0.0603	-0.0902	-6.0902	1.2394	6.0902	38.6262	-0.0275	-6.0275	6.6948	6.0275	36.8135
$\beta_{8,2}$	4.0415	-0.1585	0.3825	0.3363	0.1714	0.1193	4.0807	1.3593	4.1953	18.4996	0.167	-4.1833	0.8217	4.1872	18.1753
$\beta_{8,3}$	1.9328	-0.1672	0.4041	0.3503	0.1912	0.0323	-2.1677	1.4496	2.2969	6.3769	-0.0616	-2.0839	0.9024	2.1399	5.1570
MI2															
Intercepto	0.4919	0.4919	4.8343	3.9221	23.6120	7.1529	7.1529	7.8793	8.6453	113.2480	7.0752	7.0752	6.8937	8.1842	97.5805
β_1	0.0924	-0.0076	0.1687	0.1379	0.0285	0.0090	-0.0910	0.7252	0.2852	0.5342	2.8524	0.0188	0.3879	0.2034	1.0471
β_2	0.8170	-0.0330	0.1835	0.1481	0.0348	0.0331	-0.8169	0.7850	0.9574	1.2835	1.1263	-0.8362	0.4536	0.8001	1.0471
β_3	2.4970	-0.0030	0.1731	0.1387	0.0300	-0.0037	-2.5037	0.5792	2.5166	6.6039	1.0066	-0.0041	0.3598	2.5041	6.3998
β_4	1.9895	-0.0105	0.1814	0.1442	0.0330	-0.0016	-2.0016	0.6068	2.0327	4.3746	-0.0026	-2.0026	0.3896	2.0027	4.1622
β_5	0.0886	-0.0114	0.1652	0.1329	0.0274	0.0157	-0.0843	0.6561	0.2755	4.8775	0.0165	-0.0835	0.3685	0.2000	1.4428
β_6	1.4871	-0.0129	0.1750	0.1415	0.0308	0.0278	-1.4722	0.6479	1.5446	2.5775	1.0298	0.0242	1.4758	2.2968	0.9871
$\beta_{7,2}$	5.9445	-0.0555	0.3680	0.3008	0.1385	-0.0821	-6.0821	1.2488	6.067	38.5518	-0.0501	-6.0501	6.7850	6.0501	37.2195
$\beta_{8,2}$	3.9685	-0.2315	0.6909	0.5534	0.5309	-0.0658	-4.2658	1.5777	4.3387	20.6888	0.0330	-4.2217	0.8729	4.2444	18.5847
$\beta_{8,3}$	1.8642	-0.2358	0.6939	0.5690	0.5371	-0.0618	-2.1618	1.9292	2.3933	8.3950	-0.0217	-2.1272	0.9620	2.1951	5.4505
MI3															
Intercepto	0.4104	0.4104	4.8189	3.8958	23.3906	7.1218	7.1218	7.3442	8.3762	104.6578	7.0173	7.0173	6.8907	8.1613	96.7240
β_1	7.6608	7.5608	0.1401	7.5608	57.1849	5.9734	5.8734	1.1696	5.8734	35.8652	6.5483	6.4483	0.8228	6.4483	42.2576
β_2	0.8401	-0.0099	0.1119	0.0887	0.0126	-0.0377	-0.8877	0.5878	0.9581	1.1355	1.1272	-0.0097	0.8597	0.8556	1.0226
β_3	2.4915	-0.0085	0.1129	0.0991	0.0152	-0.0034	-2.5034	0.6687	2.5123	6.7188	0.0267	-2.4733	0.3738	2.4733	6.2567
β_4	1.9865	-0.0135	0.1058	0.0852	0.0114	-0.0213	-2.0213	0.5628	2.0294	4.5327	-0.0007	-2.0007	0.3562	2.0007	4.1298
β_5	0.0961	-0.0039	0.1088	0.0876	0.0119	0.0109	-0.0891	0.6028	0.3315	3.3154	0.0068	-0.0932	0.3170	0.2043	1.0092
β_6	1.4867	-0.0133	0.1121	0.0920	0.0128	0.0613	-1.4808	0.6221	1.5226	2.5799	0.0114	-1.4886	0.3399	1.4912	2.3316
$\beta_{7,2}$	5.9705	-0.0295	0.2431	0.1960	0.0599	-0.0777	-6.0777	1.1129	6.0777	38.1776	-0.0692	-6.0692	6.7006	6.0692	37.3255
$\beta_{8,2}$	4.0421	-0.1579	0.3829	0.3354	0.1715	0.0667	-4.1333	1.3054	4.1855	18.7878	0.0425	-4.1575	0.8569	4.1815	18.0191
$\beta_{8,3}$	1.9338	-0.1662	0.4045	0.3480	0.1912	-0.0468	-2.1468	1.7608	2.3766	7.7089	0.0265	-2.0735	0.9906	2.1413	5.2808
MI4															
Intercepto	0.4118	0.4118	4.8161	3.8933	23.3646	7.1037	7.1037	7.2774	8.3007	103.4235	7.1037	7.1037	6.8606	8.1775	97.5302
β_1	7.6604	7.5604	0.1404	7.5604	57.1787	5.9246	5.8246	1.2285	5.8246	35.4356	6.6048	6.5048	0.8333	6.5048	43.0068
β_2	0.8397	-0.1013	0.1119	0.0889	0.0126	-0.0011	-0.8511	0.5483	0.9154	1.0249	1.0769	-0.0010	0.3846	0.8704	1.0240
β_3	2.4805	-0.0195	0.1208	0.0952	0.0150	-0.0140	-2.5140	0.5873	2.5224	6.6653	1.0089	-2.5018	0.3744	2.5018	6.3990
β_4	1.9821	-0.0179	0.1199	0.0969	0.0147	-0.0081	-1.9989	0.5499	2.0053	4.2980	1.0027	-1.9991	0.3449	2.0000	4.1155
β_5	0.0919	-0.0081	0.1098	0.0874	0.0121	0.0029	-0.0971	0.5478	0.3095	2.9424	0.0133	-0.0867	0.3506	0.2230	1.0000
β_6	1.4898	-0.0102	0.1095	0.0872	0.0121	0.0581	-1.4975	0.6541	1.5391	2.6704	0.0000	-1.5000	0.3706	1.5013	2.3872
$\beta_{7,2}$	5.9709	-0.0291	0.2429	0.1959	0.0599	-0.0596	-6.0596	1.1182	6.0596	37.9691	-0.0699	-6.0699	6.7522	6.0699	37.4094
$\beta_{8,2}$	4.0401	-0.1599	0.3800	0.3345	0.1700	0.0292	-4.1708	1.2071	4.2079	18.8524	0.0019	-4.2482	0.9519	4.2671	18.9537
$\beta_{8,3}$	1.9325	-0.1675	0.4025	0.3498	0.1900	-0.0512	-2.1512	1.2579	2.2704	6.2101	-0.0842	-2.1084	1.0231	2.1713	5.4922

Tabela F.48: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
MI1															
Intercepto	0.2027	0.2027	0.8362	0.6871	0.7403	6.8423	6.8423	6.8820	55.0263	81.4275	6.7952	2.4010	6.7986	51.9391	Inf
β_1	9.4147	9.3147	0.1285	9.3147	86.7797	8.2427	8.1427	8.1427	67.6354	8.7219	0.8803	8.6219	75.1127	86.2194	
β_2	0.8337	-0.0163	0.0514	0.0427	0.0029	0.0141	-0.8359	0.5157	0.9001	-0.0006	0.3404	0.8636	0.8395	1.0160	
β_3	2.4855	-0.0145	0.0543	0.0457	0.0032	-0.0059	0.4975	2.5059	6.9271	-0.0217	0.2828	2.5217	6.4390	1.0087	
β_4	1.9853	-0.0147	0.0518	0.0433	0.0029	-0.0012	0.4275	2.0012	4.1876	-0.0114	0.2773	2.0114	4.1226	1.0057	
β_5	0.0846	-0.0154	0.0499	0.0429	0.0027	-0.0168	0.4882	0.2828	2.2519	-0.0160	0.2932	0.2009	0.0994	2.0092	
β_6	1.4798	-0.0202	0.0516	0.0435	0.0031	0.0020	0.4983	1.5093	2.4923	0.0024	0.2885	1.4976	2.3261	0.9984	
$\beta_7, 2$	5.9654	-0.0346	0.1111	0.0916	0.0135	-0.0809	0.9987	6.0809	37.9753	-0.0064	0.5384	6.0064	36.3664	1.0011	
$\beta_8, 2$	4.0201	-0.1799	0.1746	0.2087	0.0628	0.1188	-4.0812	1.2572	4.1743	0.0270	0.5695	4.1730	17.7385	0.9936	
$\beta_8, 3$	1.9090	-0.1910	0.1823	0.2182	0.0697	0.0369	-2.0631	1.3077	5.9665	0.0105	0.6304	2.1204	4.7635	1.0097	
MI2															
Intercepto	0.2623	0.2623	1.0323	0.8506	1.1345	6.8422	6.8422	6.6606	60.2162	6.8676	2.5035	6.8897	53.4317	Inf	
β_1	0.1033	0.0033	0.1721	0.1386	0.0296	0.0420	-0.0580	0.8053	0.3030	0.0390	0.4373	0.2140	0.1950	2.1398	
β_2	0.8193	-0.0307	0.1801	0.1464	0.0334	0.0054	-0.8446	0.7278	0.9749	0.0195	0.4380	0.8830	0.8817	1.0388	
β_3	2.4939	-0.0061	0.1718	0.1365	0.0296	-0.0471	-2.5471	0.6404	2.5538	0.0016	0.3871	2.4984	6.3920	0.9994	
β_4	1.9898	-0.0102	0.1816	0.1427	0.0331	0.0082	-1.9918	0.6513	2.0314	-0.0069	0.4261	1.9842	4.1013	0.9921	
β_5	0.0934	-0.0066	0.1630	0.1313	0.0266	0.0157	-0.0843	0.7665	0.3120	-0.0069	0.4548	0.2319	0.2183	2.3195	
β_6	1.4862	-0.0138	0.1699	0.1338	0.0290	0.0817	-1.4183	0.6314	1.5006	0.0250	0.3778	1.4806	2.3183	0.9871	
$\beta_7, 2$	5.9415	-0.0585	0.3630	0.2954	0.1352	-0.0857	6.1187	38.9611	1.0198	-0.0316	0.8294	6.0316	37.0678	1.0053	
$\beta_8, 2$	3.9688	-0.2312	0.6752	0.5590	0.5093	0.0160	-4.1840	1.3211	19.2514	-0.0247	1.0373	4.2575	18.9243	1.0137	
$\beta_8, 3$	1.8642	-0.2358	0.6872	0.5692	0.5278	0.0839	-2.0161	1.7325	2.3365	-0.0625	0.9637	2.2237	5.6053	1.0589	
MI3															
Intercepto	0.2030	0.2030	0.8365	0.6873	0.7410	6.8721	6.8721	6.8796	54.7392	6.7826	2.4160	6.7889	51.8405	Inf	
β_1	9.4147	9.3147	0.1286	9.3147	86.7809	8.2755	8.1755	8.1755	68.1596	8.6949	0.8671	8.5949	74.6234	85.9486	
β_2	0.8337	-0.0163	0.0512	0.0426	0.0029	-0.0154	-0.8654	0.4472	0.9018	-0.0039	0.2815	0.8591	0.8084	1.0107	
β_3	2.4856	-0.0144	0.0537	0.0452	0.0031	-0.0034	0.5251	2.5046	6.5430	0.0043	0.2982	2.4957	6.3174	0.9983	
β_4	1.9828	-0.0172	0.0485	0.0411	0.0026	-0.0064	0.5537	2.0184	4.3322	-0.0131	0.2930	2.0131	4.1386	1.0066	
β_5	0.0870	-0.0130	0.0501	0.0421	0.0027	0.0175	-0.0825	0.5131	0.2932	0.0105	0.2668	0.1803	0.0792	1.8027	
β_6	1.4837	-0.0163	0.0501	0.0428	0.0028	0.0360	-1.4640	0.4820	1.4817	0.0242	0.2748	1.4759	2.2581	0.9839	
$\beta_7, 2$	5.9650	-0.0350	0.1111	0.0916	0.0136	-0.0518	6.0518	37.4458	1.0086	-0.0521	0.5829	6.0521	36.9676	1.0087	
$\beta_8, 2$	4.0200	-0.1800	0.1747	0.2083	0.0629	0.0673	-4.1327	0.9546	4.1456	0.0590	0.7552	4.1563	17.7182	0.9896	
$\beta_8, 3$	1.9089	-0.1911	0.1826	0.2186	0.0698	-0.0191	-2.1191	1.1700	2.2383	0.0328	0.8338	2.1138	4.9685	1.0066	
MI4															
Intercepto	0.2026	0.2026	0.8355	0.6862	0.7390	6.8750	6.8750	6.8784	54.6528	6.8760	2.3974	6.8848	53.0274	Inf	
β_1	9.4147	9.3147	0.1287	9.3147	86.7809	8.2026	8.1026	8.1026	67.1517	8.7224	0.8774	8.6224	75.1163	86.2244	
β_2	0.8336	-0.0164	0.0513	0.0427	0.0029	-0.0226	-0.8626	0.4105	0.8861	-0.0075	0.3034	0.8660	0.8273	1.0189	
β_3	2.4805	-0.0195	0.0540	0.0452	0.0033	-0.0188	-2.5188	0.5012	2.5229	0.0047	0.2951	2.4953	6.3134	0.9981	
β_4	1.9809	-0.0191	0.0553	0.0468	0.0034	-0.0049	-1.9951	0.4041	1.9984	0.0153	0.2621	1.9854	4.0079	0.9927	
β_5	0.0841	-0.0159	0.0521	0.0439	0.0030	-0.0061	-0.1061	0.4532	0.2493	0.0027	0.2748	0.1924	0.0850	1.9244	
β_6	1.4857	-0.0143	0.0494	0.0417	0.0025	0.0107	-0.4869	0.4800	1.5070	0.0023	0.2998	1.4977	2.3331	0.9985	
$\beta_7, 2$	5.9655	-0.0345	0.1108	0.0911	0.0135	-0.0669	6.0669	0.9377	37.6869	-0.0620	0.5449	6.0620	37.0449	1.0103	
$\beta_8, 2$	4.0200	-0.1800	0.1740	0.2084	0.0627	0.0110	-4.1890	1.0485	4.2184	-0.0370	0.7072	4.2443	18.4525	1.0106	
$\beta_8, 3$	1.9093	-0.1907	0.1817	0.2174	0.0694	-0.0090	-2.1090	1.0990	2.2052	0.0037	0.7521	2.1252	4.9599	1.0120	

Tabela F.49: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{11, \dots, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5, 4, -6, -3)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 5$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{3000, 40, 100\}$.

Coeficiente	$n_1 = 3000$					$n_1 = 40$					$n_1 = 100$					
	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	
M11																
Intercepto	0.0132	0.0132	3.3077	2.6778	10.9409	Inf	-0.8709	5.8575	4.6396	35.0686	Inf	-0.9797	5.0109	4.0732	26.0686	Inf
β_1	6.1825	5.1825	0.0963	5.1825	26.8678	5.1825	2.9753	1.8705	3.0939	12.3515	3.0939	4.8545	1.1497	3.8545	16.1792	3.8545
β_2	4.9857	-0.0142	0.0769	0.0618	0.0061	0.0124	-0.0433	0.8817	5.0433	26.2123	1.0087	-0.0156	0.5210	5.0156	25.4274	1.0031
β_3	-1.9779	0.0221	0.0828	0.0690	0.0073	0.0345	-0.1058	1.8942	1.9559	4.7366	1.0274	-0.0462	0.5075	1.9660	4.0893	0.9830
β_4	1.9849	-0.0151	0.0780	0.0632	0.0063	0.0316	-0.0052	0.8461	2.0547	4.7366	1.0274	-0.0169	0.4843	2.0169	4.3023	1.0084
β_5	-3.9836	0.0164	0.0787	0.0645	0.0065	0.0161	0.0645	4.0645	4.0645	17.2202	1.0161	-0.0278	0.5701	3.9722	16.1034	0.9931
β_6	4.9751	-0.0249	0.0811	0.0670	0.0072	0.0134	0.0579	-4.9421	4.9421	25.1092	0.9884	0.0365	0.4633	4.9635	24.8506	0.9927
$\beta_{7,2}$	5.3648	-0.0352	0.1675	0.1367	0.0293	0.0253	-0.0281	5.4281	1.8579	31.9789	1.0116	-0.0164	1.0018	5.4168	30.3414	1.0031
$\beta_{8,2}$	-5.8061	0.1939	0.2635	0.2613	0.1070	0.0435	0.0015	6.0015	6.1886	42.5628	1.0314	-0.0476	1.5963	6.0159	37.9796	1.0026
$\beta_{8,3}$	-2.7940	0.2060	0.2777	0.2760	0.1196	0.0920	-0.2355	2.7645	3.2473	15.4343	1.0824	-0.0597	1.7515	3.1187	11.7129	1.0396
M12																
Intercepto	0.0591	0.0591	3.3020	2.6902	10.9066	Inf	-1.0077	5.6924	4.5842	33.4192	Inf	-0.9761	4.8491	3.9447	24.4663	Inf
β_1	0.9846	-0.0154	0.1228	0.1001	0.0153	0.0101	0.2420	-0.7580	0.9095	1.0473	1.4017	0.2402	0.5999	0.9163	0.9372	0.9163
β_2	4.9764	-0.0236	0.1248	0.1012	0.0161	0.0202	-0.0084	-5.0084	6.1119	5.0084	1.0017	0.0060	0.4488	4.9940	25.1413	0.9988
β_3	1.9918	0.0288	0.1184	0.0968	0.0147	0.0484	-0.0256	1.9744	0.8332	2.0203	4.5116	0.0171	0.4047	2.0175	4.2324	1.0087
β_4	-1.9732	-0.0082	0.1234	0.0975	0.0153	0.0487	0.138	-1.9862	0.8133	2.0557	4.6066	-0.0143	0.3754	2.0143	4.1985	1.0072
β_5	-3.9881	0.0119	0.1194	0.0964	0.0144	0.0241	-0.0223	3.9777	6.2507	3.9876	16.2131	0.0112	0.3379	4.0112	16.2038	1.0028
β_6	4.9902	-0.0098	0.1190	0.0962	0.0143	0.0192	0.0439	-4.9561	4.9680	25.0628	0.9936	0.0079	0.3937	4.9921	25.0757	0.9984
$\beta_{7,2}$	5.3597	-0.0403	0.2513	0.2063	0.0648	0.0382	-0.1022	5.5022	1.4042	5.3535	32.2458	-0.0384	0.8304	5.4389	30.2655	1.0072
$\beta_{8,2}$	-5.8535	0.1465	0.4415	0.3663	0.2164	0.0610	0.1513	6.1513	1.7165	40.7850	1.0252	-0.0092	1.9146	6.0073	36.7285	1.0012
$\beta_{8,3}$	-2.8397	0.1603	0.4446	0.3801	0.2234	0.1267	0.0775	3.0775	3.1419	12.9549	1.0473	0.0283	3.0963	3.0963	10.3013	1.0321
M13																
Intercepto	0.0135	0.0135	3.3074	2.6780	10.9393	Inf	-1.0305	5.6498	4.4869	32.9824	Inf	-1.1228	5.0069	4.0622	26.3299	Inf
β_1	6.1826	5.1826	0.0963	5.1826	26.8689	5.1826	3.0516	1.9087	3.1637	12.9555	3.1637	4.8516	1.1356	3.8516	16.1241	3.8516
β_2	4.9857	-0.0143	0.0769	0.0617	0.0061	0.0123	-0.0591	-5.0591	5.0591	26.2884	1.0118	-0.0150	0.4784	5.0150	25.3790	1.0030
β_3	-1.9779	0.0221	0.0844	0.0701	0.0076	0.0350	0.0105	2.0105	2.0769	4.9354	1.0385	0.0348	0.5084	2.0348	4.3987	1.0174
β_4	1.9831	-0.0169	0.0726	0.0597	0.0056	0.0298	-0.0001	-2.0001	0.8418	2.0509	4.7089	0.0221	-1.9779	1.9780	4.1304	0.9890
β_5	-3.9784	0.0216	0.0795	0.0650	0.0068	0.0162	0.0068	4.0068	4.0068	16.5642	1.0022	0.0080	0.4370	4.0080	16.2551	1.0020
β_6	4.9832	-0.0168	0.0769	0.0638	0.0062	0.0128	-0.0264	-5.0264	5.0264	25.8422	1.0053	-0.0087	0.4973	5.0087	25.3348	1.0017
$\beta_{7,2}$	5.3641	-0.0359	0.1670	0.1362	0.0292	0.0252	-0.0124	5.4124	1.7900	5.4331	32.4985	-0.0308	1.0302	5.4308	30.5549	1.0057
$\beta_{8,2}$	-5.8060	0.1940	0.2623	0.2613	0.1064	0.0436	-0.0127	5.9873	1.8427	6.0756	39.2430	0.0636	1.3717	6.0983	38.6488	1.0164
$\beta_{8,3}$	-2.7938	0.2062	0.2768	0.2757	0.1192	0.0919	0.0152	3.0152	3.2685	14.6742	1.0895	0.0228	3.1229	3.1229	11.2483	1.0410
M14																
Intercepto	0.0127	0.0127	3.3075	2.6782	10.9396	Inf	-0.9521	5.5357	4.4085	31.5508	Inf	-1.0086	5.0047	4.0799	26.0647	Inf
β_1	6.1826	5.1826	0.0966	5.1826	26.8682	5.1826	3.8289	1.8924	2.9692	11.5838	2.9692	4.8494	1.1527	3.8494	16.1466	3.8494
β_2	4.9857	-0.0143	0.0769	0.0618	0.0061	0.0124	-0.0035	-5.0035	5.0035	25.9968	1.0007	-0.0242	0.4835	5.0242	25.4761	1.0048
β_3	-1.9851	0.0149	0.0829	0.0655	0.0071	0.0328	-0.0030	1.9970	2.0681	4.9231	1.0340	-0.0133	0.4696	1.9909	4.1674	0.9954
β_4	1.9802	-0.0198	0.0825	0.0679	0.0072	0.0339	-0.0303	-2.0303	0.7125	2.0560	4.6299	-0.0187	-2.0187	2.0223	4.2837	1.0112
β_5	-3.9815	0.0185	0.0803	0.0641	0.0068	0.0160	0.0179	4.0179	4.0744	16.7885	1.0069	0.0344	0.5013	4.0344	16.5274	1.0086
β_6	4.9855	-0.0145	0.0751	0.0610	0.0059	0.0122	0.0847	-4.9153	0.9569	4.9162	25.0757	-0.0087	0.5297	5.0087	25.3675	1.0017
$\beta_{7,2}$	5.3646	-0.0354	0.1668	0.1358	0.0291	0.0251	-0.0094	5.4494	1.5637	5.4647	32.1410	-0.0645	0.9911	5.4645	30.8426	1.0119
$\beta_{8,2}$	-5.8056	0.1944	0.2629	0.2616	0.1069	0.0436	0.0051	6.0051	1.9647	6.0984	39.9214	-0.0047	1.3123	6.0045	37.6664	1.0008
$\beta_{8,3}$	-2.7928	0.2072	0.2777	0.2764	0.1201	0.0921	-0.0639	2.9361	1.9198	3.1671	12.3066	0.0058	3.0058	3.1242	11.1300	1.0414

Tabela F.50: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos MI, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2.0, 1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -5$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$					
	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
Intercepto	3.6852	3.6852	4.0855	4.5841	30.2721	3.2126	3.2126	4.5272	4.5757	30.8162	3.1535	3.1535	4.6541	4.6370	31.6056	Inf
β_1	0.0587	-0.0413	0.7314	0.5490	0.5367	-0.0405	-0.0405	0.7377	0.4406	0.5458	0.0595	-0.0405	0.7415	0.4309	0.5514	4.3086
β_2	0.5211	-0.3289	0.7753	0.6877	0.7092	0.4993	-0.3507	0.8513	0.8046	0.8478	0.4887	-0.3613	0.8690	0.8268	0.8856	0.9727
β_3	1.4537	-1.0463	1.0059	1.2506	2.1066	1.5779	-0.9221	1.2401	1.2801	2.3879	1.5865	-0.9135	1.2862	1.3029	2.4887	0.5211
β_4	1.2668	-0.7952	0.9588	1.0687	1.5485	1.2593	-0.7407	1.1751	1.1802	1.9294	1.2485	-0.7515	1.2240	1.2266	2.0630	0.6133
β_5	0.0296	-0.0704	0.7967	0.5985	0.6396	0.0475	-0.0525	0.8307	0.5021	0.6928	0.0636	-0.0364	0.8276	0.4856	0.6863	4.8558
β_6	0.8308	-0.6692	0.7743	0.8774	1.0474	0.7872	-0.7128	0.9329	1.0352	1.3783	0.7797	-0.7203	0.9586	1.0636	1.4378	0.7091
$\beta_{7,2}$	3.6241	-2.3759	2.2298	2.7853	10.6170	1.9043	-1.9043	2.7099	2.6897	10.9651	4.1456	-1.8544	2.8066	2.7234	11.3161	0.4539
$\beta_{8,2}$	1.7523	-2.4477	2.1106	2.8658	10.4460	1.9174	-2.2826	2.8936	3.2453	13.5834	1.9480	-2.2520	3.0468	3.3330	14.3545	0.7936
$\beta_{8,3}$	0.0897	-2.0103	2.0928	2.4900	8.4211	0.3867	-1.7133	2.6208	2.6989	9.8041	0.4242	-1.6758	2.7594	2.7538	10.4225	1.3113
Intercepto	3.5930	3.5930	4.2248	4.6216	30.7588	3.1026	3.1026	4.6851	4.6055	31.5762	3.0259	3.0259	4.7851	4.6275	32.0530	Inf
β_1	0.0878	-0.0122	0.7802	0.5846	0.6088	0.0796	-0.0204	0.8137	0.4955	0.6626	0.0865	-0.0135	0.8248	0.4908	0.6806	4.9081
β_2	0.5283	-0.3217	0.8097	0.7244	0.7590	0.4847	-0.3653	0.8755	0.8298	0.9000	0.4846	-0.3654	0.8956	0.8476	0.9357	0.9972
β_3	1.5302	-0.9698	1.0237	1.2066	1.9884	1.6636	-0.8364	1.2513	1.2548	2.2654	1.6933	-0.8067	1.2883	1.2656	2.3107	0.5063
β_4	1.2384	-0.7616	0.9173	1.0173	1.4216	1.2675	-0.7325	1.1393	1.1494	1.8345	1.2793	-0.7207	1.1773	1.1697	1.9053	0.5849
β_5	0.0751	-0.0249	0.8207	0.5912	0.6742	0.0555	-0.0445	0.8637	0.5104	0.7480	0.0557	-0.0443	0.8800	0.5104	0.7763	5.1043
β_6	0.9365	-0.5635	0.8251	0.8360	0.9984	0.8984	-0.6016	0.9934	1.0079	1.3488	0.8998	-0.6002	1.0253	1.0368	1.4114	0.6912
$\beta_{7,2}$	3.6851	-2.3149	2.2584	2.7725	10.4595	4.1755	-1.8245	2.6852	2.6437	10.5389	4.2721	-1.7279	2.7759	2.6562	10.6910	0.4427
$\beta_{8,2}$	1.8334	-2.3666	2.2009	2.8109	10.4446	2.0220	-2.1780	2.9677	3.1820	13.5513	2.0442	-2.1558	3.1229	3.2857	14.4002	0.7823
$\beta_{8,3}$	0.1228	-1.9772	2.1702	2.4940	8.6191	0.4031	-1.6969	2.7014	2.7073	10.1773	0.4315	-1.6685	2.8379	2.7680	10.8379	1.3181
Intercepto	3.1456	3.1456	3.5327	3.8777	22.3752	2.6690	2.6690	3.8131	3.7822	21.6635	2.5407	2.5407	3.8824	3.7596	21.5281	Inf
β_1	-0.0166	-0.1166	0.6817	0.5389	0.4783	-0.0182	-0.1182	0.6612	0.4524	0.4511	-0.0219	-0.1219	0.6758	0.4571	0.4716	4.5711
β_2	0.5845	-0.2655	0.7546	0.6464	0.6400	0.5740	-0.2760	0.8220	0.7405	0.7519	0.5821	-0.2679	0.8439	0.7602	0.7840	0.8943
β_3	1.7118	-0.7882	0.8764	0.9920	1.3895	1.8892	-0.6108	1.0297	0.9640	1.4334	1.9266	-0.5734	1.0589	0.9615	1.4501	0.3846
β_4	1.3752	-0.6248	0.9726	0.9130	1.3364	1.4647	-0.5353	1.1488	0.9890	1.6062	1.4922	-0.5078	1.1793	1.0057	1.6487	0.5028
β_5	0.1103	0.0103	0.7442	0.5785	0.5540	0.1133	0.0133	0.7561	0.5047	0.5719	0.1181	0.0181	0.7712	0.5074	0.5950	5.0737
β_6	1.0456	-0.4544	0.7559	0.7253	0.7779	1.0542	-0.4458	0.8800	0.8194	0.9732	1.0691	-0.4309	0.9082	0.8347	1.0105	0.5564
$\beta_{7,2}$	4.1708	-1.8292	1.9115	2.2194	6.9999	4.7502	-1.2498	2.1797	2.0097	6.3130	4.8602	-1.1398	2.2321	1.9941	6.2814	0.3324
$\beta_{8,2}$	1.8842	-2.3158	1.7965	2.6560	8.5903	2.0008	-2.1992	2.4428	2.9361	10.8035	2.0713	-2.1287	2.5828	2.9984	11.2020	0.7139
$\beta_{8,3}$	0.1851	-1.9149	1.7171	2.2404	6.6152	0.3881	-1.7119	2.1906	2.4862	7.7291	0.4550	-1.6450	2.3189	2.5329	8.0833	1.2061
Intercepto	3.0492	3.0492	3.5677	3.8215	21.9480	2.6264	2.6264	3.7876	3.7816	21.5909	2.5313	2.5313	3.9162	3.7962	21.7437	Inf
β_1	0.0599	-0.0401	0.7058	0.5409	0.4997	0.0459	-0.0541	0.6983	0.4533	0.4906	0.0457	-0.0540	0.7047	0.4510	0.4996	4.5100
β_2	0.5870	-0.2630	0.7031	0.6086	0.5635	0.5498	-0.3002	0.7522	0.6982	0.6560	0.5528	-0.2972	0.7677	0.7157	0.6776	0.8420
β_3	1.7907	-0.7093	0.8682	0.9290	1.2568	1.9555	-0.5445	1.0351	0.9212	1.3679	1.9827	-0.5173	1.0694	0.9367	1.4112	0.3747
β_4	1.4087	-0.5913	0.8080	0.8420	1.0025	1.4775	-0.5225	0.9715	0.8990	1.2168	1.4872	-0.5128	1.0090	0.9219	1.2810	0.4610
β_5	0.0990	-0.0010	0.7549	0.5777	0.5699	0.0721	-0.0279	0.7642	0.5026	0.5848	0.0671	-0.0329	0.7761	0.5054	0.6035	4.0540
β_6	1.0638	-0.4362	0.7650	0.7224	0.7755	1.0530	-0.4470	0.9050	0.8433	0.9189	1.0579	-0.4421	0.9274	0.8626	1.0554	0.5751
$\beta_{7,2}$	4.2631	-1.7369	1.8889	2.1219	6.5849	4.7774	-1.2226	2.2130	1.9811	6.3921	4.8628	-1.1372	2.2562	1.9615	6.3838	0.3269
$\beta_{8,2}$	1.9380	-2.2620	1.8121	2.5861	8.4006	2.0265	-2.1735	2.4448	2.9190	10.7014	2.0712	-2.1288	2.5703	2.9790	11.1387	0.7093
$\beta_{8,3}$	0.2182	-1.8818	1.8539	2.2853	6.9779	0.4237	-1.6763	2.3339	2.5536	8.2570	0.4817	-1.6183	2.4729	2.6120	8.7343	1.2438

Tabela F.51: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -5$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{400, 500\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$				$\alpha = 0.4$				$\alpha = 1$			
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	M12											
Intercepto	2.5589	3.6200	3.6311	19.6527	2.2376	3.8913	3.6706	20.1492	2.1402	3.9516	3.6790	20.1957
β_1	0.0490	-0.0510	0.6589	0.4367	5.1910	0.0376	0.4367	0.3946	4.3798	-0.0666	0.6297	4.3648
β_2	0.6089	-0.2411	0.7117	0.5646	0.7118	0.5651	0.6250	0.6532	0.8149	-0.2834	0.7013	0.6669
β_3	1.9242	-0.5758	0.7895	0.8019	0.9548	-0.4290	0.9054	0.8018	1.0125	0.3207	0.8035	1.0264
β_4	1.5846	-0.4154	0.7716	0.7165	0.6369	-0.3631	0.9078	0.7899	0.9560	-0.3457	0.9309	0.9861
β_5	0.0631	-0.0369	0.6902	0.5540	0.4777	0.5402	0.6575	0.4620	0.4335	-0.0404	0.6612	0.4388
β_6	1.1388	-0.3612	0.7454	0.6686	0.6861	0.4457	0.8532	0.7627	0.8691	-0.3679	0.8719	0.8956
$\beta_{7,2}$	4.7581	-1.2419	1.7781	1.7549	4.7042	0.2925	1.9496	4.4064	0.2731	-0.6860	1.9784	4.3846
$\beta_{8,2}$	2.2615	-1.9385	1.8126	2.3330	2.2777	-1.9223	2.3796	2.6898	0.6404	-1.8767	2.7376	9.6800
$\beta_{8,3}$	0.4786	-1.6214	1.8823	2.0900	0.5881	-1.5119	2.2902	2.4450	1.1643	-1.4620	2.3892	7.8458
	M14											
Intercepto	2.4999	3.5694	3.5970	18.9900	2.1466	3.8186	3.6126	19.1899	2.0492	3.8517	3.6011	19.0346
β_1	0.0633	-0.0367	0.6578	0.4474	5.2829	0.0567	0.4433	0.4297	4.4832	-0.0482	0.6594	4.4624
β_2	0.6497	-0.2003	0.7477	0.6238	0.5992	0.6255	0.7902	0.7052	0.6749	-0.2238	0.8018	0.6930
β_3	1.9382	-0.5618	0.7858	0.9331	0.3198	-0.4299	0.8864	0.7745	0.9170	-0.4040	0.9006	0.9743
β_4	1.5554	-0.4446	0.7853	0.7391	0.8144	0.3696	0.9295	0.8219	1.0179	-0.3794	0.9555	1.0569
β_5	0.0731	-0.0269	0.6620	0.5267	0.4390	0.5268	0.6390	0.4693	0.4093	-0.0323	0.6442	0.4160
β_6	1.1603	-0.3397	0.7181	0.6572	0.6311	0.4381	0.8371	0.7554	0.8244	-0.3448	0.8570	0.8534
$\beta_{7,2}$	4.7955	-1.2045	1.7336	1.6937	4.4560	0.2823	1.8995	1.5929	0.2655	-0.6449	1.9206	4.1045
$\beta_{8,2}$	2.2965	-1.9035	1.8133	2.2938	2.3486	-1.8514	2.3254	2.6051	0.6203	-1.8056	2.3987	9.0140
$\beta_{8,3}$	0.5302	-1.5698	1.8791	2.0637	0.6584	-1.4416	2.2461	2.4087	1.1470	-1.3772	2.3368	7.3575
	M12											
Intercepto	2.2542	3.3607	3.2869	16.3759	1.8416	3.5819	3.2816	16.2214	1.7518	3.6219	3.2780	16.1870
β_1	0.0723	-0.0277	0.6352	0.5054	4.4042	0.0623	0.4377	0.4117	4.4117	-0.0390	0.6238	4.4108
β_2	0.7331	-0.1169	0.6461	0.5193	0.4312	0.6110	0.6003	0.5213	0.7062	-0.1546	0.7173	0.5384
β_3	2.0199	-0.4801	0.7166	0.7440	0.2852	-0.3435	0.7986	0.7018	0.7557	-0.3176	0.8088	0.7950
β_4	1.6508	-0.3492	0.7282	0.6514	0.6522	1.7175	0.7095	0.7095	1.7347	-0.2653	0.8515	0.7180
β_5	0.0814	-0.0186	0.6270	0.4859	0.3935	0.4858	0.6094	0.4201	0.3721	-0.0295	0.6160	0.3803
β_6	1.2130	-0.2870	0.6614	0.5812	0.5199	0.3875	0.7652	0.6571	0.4381	-0.2712	0.7804	0.6825
$\beta_{7,2}$	4.8454	-1.1546	1.5517	1.5770	3.7407	0.2628	1.6924	1.4590	0.2432	-0.6670	1.7182	3.3970
$\beta_{8,2}$	2.6347	-1.5653	1.9405	2.1312	2.8038	-1.3962	2.4423	2.3963	0.7914	-1.3435	2.5197	8.1537
$\beta_{8,3}$	0.7132	-1.3868	1.9108	2.0057	0.9247	-1.1753	2.2874	2.3142	1.1020	-1.1275	2.3673	6.8749
	M14											
Intercepto	2.2381	3.3502	3.2885	16.2331	1.8567	3.5838	3.2814	16.2914	1.7536	3.6497	3.2897	16.3954
β_1	0.0714	-0.0286	0.6026	0.4623	4.6227	0.0520	0.4480	0.3983	3.8932	-0.0475	0.5872	3.9169
β_2	0.7234	-0.1266	0.6435	0.5232	0.4302	0.6156	0.5959	0.5115	0.7010	-0.1646	0.7027	0.5209
β_3	2.0461	-0.4539	0.7012	0.6977	0.2710	-0.3164	0.7797	0.6611	0.7080	-0.2901	0.7894	0.7072
β_4	1.6545	-0.3455	0.7240	0.6484	0.6436	1.7176	0.7042	0.7042	1.7327	-0.2673	0.8390	0.7114
β_5	0.0602	-0.0398	0.6224	0.4985	0.3889	0.3242	0.6094	0.4277	0.3516	-0.0597	0.5962	0.3590
β_6	1.2549	-0.2451	0.6637	0.5721	0.5006	0.3814	0.7752	0.6649	0.4433	-0.2413	0.7952	0.6906
$\beta_{7,2}$	4.8621	-1.1379	1.5544	1.5837	3.7109	0.2640	1.6926	1.4843	0.2474	-0.6634	1.7224	3.4067
$\beta_{8,2}$	2.6421	-1.5579	1.9152	2.1165	2.7843	-1.4157	2.3854	2.3085	0.7694	-1.3507	2.4839	7.9941
$\beta_{8,3}$	0.7203	-1.3797	1.9399	2.0304	0.9002	-1.1998	2.2861	2.3885	1.0993	-1.1288	2.3670	6.9611

Tabela F.52: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI_l*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -5$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{600, 700\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	$n_1 = 600$														
	MI_{12}														
Intercepto	1.9368	3.1696	3.0567	13.7974	Inf	1.6065	3.3240	3.0357	13.6296	Inf	1.5342	3.3510	3.0280	13.5832	Inf
β_1	0.0614	-0.0386	0.5801	0.3380	4.5898	0.0556	-0.0444	0.5474	0.3888	0.3016	0.0536	-0.0464	0.5501	0.3873	3.8728
β_2	0.7540	-0.0960	0.6084	0.3793	0.5720	0.7130	-0.1370	0.6806	0.5481	0.4421	0.7132	-0.1368	0.6606	0.5605	0.6594
β_3	2.1354	-0.3646	0.6312	0.5830	0.2332	2.2586	-0.2414	0.6865	0.5719	0.5296	2.2811	-0.2189	0.6907	0.5672	0.2269
β_4	1.6518	-0.3462	0.6254	0.5886	0.5124	1.6993	-0.3007	0.7094	0.6248	0.5937	1.7115	-0.2885	0.7242	0.6310	0.3155
β_5	0.0586	-0.0414	0.6191	0.3850	4.9814	0.0506	-0.0494	0.5814	0.4285	0.3405	0.0497	-0.0503	0.5834	0.4283	0.3429
β_6	1.2496	-0.2504	0.6279	0.5422	0.4569	1.2419	-0.2581	0.7103	0.6144	0.5712	1.2479	-0.2521	0.7204	0.6215	0.5826
$\beta_{7,2}$	5.0790	-0.9210	1.4688	1.4041	3.0054	5.4544	-0.5456	1.5461	1.3150	2.6881	5.5191	-0.4809	1.5463	1.2929	2.6222
$\beta_{8,2}$	2.8636	-1.3364	1.9350	5.5301	0.4763	2.9613	-1.2387	2.3577	2.2879	7.0931	2.9983	-1.2017	2.4296	2.3363	7.3471
$\beta_{8,3}$	0.8334	-1.2666	1.9077	1.9519	0.9295	0.9868	-1.1132	2.1945	2.2301	6.0552	1.0241	-1.0759	2.2598	2.2810	6.2643
	$n_1 = 700$														
	MI_{14}														
Intercepto	1.8749	3.2032	3.0553	13.7754	Inf	1.6059	3.4262	3.1138	14.3176	Inf	1.5148	3.4617	3.1319	14.2780	Inf
β_1	0.0824	-0.0176	0.5914	0.3501	4.7240	0.0733	-0.0267	0.5573	0.4013	0.3113	0.0754	-0.0246	0.5608	0.4012	0.3151
β_2	0.6991	-0.1509	0.6124	0.3979	0.5902	0.6505	-0.1995	0.6433	0.5616	0.4536	0.6507	-0.1993	0.6534	0.5715	0.4667
β_3	2.1100	-0.3900	0.6567	0.6036	0.5833	2.2141	-0.2859	0.7330	0.6137	0.6191	2.2378	-0.2622	0.7429	0.6134	0.6207
β_4	1.7001	-0.2999	0.6682	0.5974	0.5364	1.7390	-0.2610	0.7636	0.6515	0.6512	1.7525	-0.2475	0.7745	0.6544	0.6611
β_5	0.1004	0.0004	0.5615	0.4375	4.3754	0.0863	-0.0137	0.5218	0.3639	0.2725	0.0872	-0.0128	0.5253	0.3621	0.2761
β_6	1.2400	-0.2600	0.6461	0.4850	0.3713	1.2281	-0.2719	0.7253	0.6267	0.6000	1.2338	-0.2662	0.7369	0.6349	0.6139
$\beta_{7,2}$	5.1079	-0.8921	1.4548	1.3879	2.9125	5.4404	-0.5596	1.5235	1.3053	2.6342	5.5093	-0.4907	1.5436	1.2977	2.6235
$\beta_{8,2}$	2.9172	-1.2828	1.9720	1.9857	5.5342	2.9732	-1.2268	2.3813	2.2780	7.1758	3.0275	-1.1725	2.4511	2.3120	7.3827
$\beta_{8,3}$	0.8738	-1.2262	1.9666	1.9776	0.9417	0.9924	-1.1076	2.2231	2.2618	6.1691	1.0503	-1.0497	2.2905	2.2986	6.3485
	$n_1 = 700$														
	MI_{12}														
Intercepto	1.8961	2.9896	2.8306	12.5329	Inf	1.5912	3.1792	2.8447	12.6389	Inf	1.5070	3.2130	2.8407	12.5946	Inf
β_1	0.1316	0.0316	0.4409	0.3031	4.4092	0.1195	0.0195	0.5185	0.2692	0.2692	0.1207	0.0207	0.5242	0.2752	3.7668
β_2	0.7201	-0.1299	0.5487	0.4535	0.3179	0.6718	-0.1782	0.5806	0.5047	0.3689	0.6718	-0.1782	0.5886	0.5124	0.3782
β_3	2.1545	-0.3455	0.6642	0.5953	0.5606	2.2545	-0.2455	0.7162	0.5919	0.5732	2.2767	-0.2233	0.7250	0.5932	0.2373
β_4	1.7786	-0.2214	0.5885	0.5056	0.3954	1.8258	-0.1742	0.6528	0.5349	0.4564	1.8401	-0.1599	0.6659	0.4690	0.2703
β_5	0.0777	-0.0223	0.5686	0.4543	3.3238	0.0609	-0.0391	0.5382	0.3909	0.2912	0.0600	-0.0400	0.5418	0.3898	0.2951
β_6	1.2960	-0.2040	0.5676	0.4802	0.3638	1.2880	-0.2120	0.6428	0.5427	0.4581	1.2949	-0.2051	0.6530	0.5478	0.4685
$\beta_{7,2}$	5.1410	-0.8590	1.2955	1.2811	2.4163	5.4578	-0.5422	1.3547	1.1828	2.1293	5.5187	-0.4813	1.3663	1.1730	2.0984
$\beta_{8,2}$	2.8775	-1.3225	1.6684	1.8214	4.5325	2.9891	-1.2109	2.1188	2.0722	5.9554	3.0426	-1.1574	2.1811	2.0953	6.0970
$\beta_{8,3}$	0.8551	-1.2449	1.7989	1.7818	0.8566	0.9140	-1.0860	2.0781	2.0888	5.4981	0.9947	-1.0337	2.1387	2.1280	5.6428
	$n_1 = 700$														
	MI_{14}														
Intercepto	1.9306	3.0067	2.8361	12.7676	Inf	1.6368	3.2455	2.9074	13.2128	Inf	1.5605	3.2806	2.9164	13.1979	Inf
β_1	0.1230	0.0230	0.5621	0.3165	4.5242	0.1109	0.0109	0.5385	0.3972	0.2901	0.1077	0.0077	0.5422	0.3981	3.9806
β_2	0.6981	-0.1519	0.5481	0.4534	0.3234	0.6523	-0.1977	0.5903	0.5154	0.3875	0.6520	-0.1980	0.6002	0.5233	0.3995
β_3	2.1076	-0.3924	0.6066	0.5841	0.5219	2.2151	-0.2849	0.6804	0.5882	0.5042	2.2360	-0.2640	0.6579	0.5589	0.5025
β_4	1.7232	-0.2768	0.5889	0.5271	0.4234	1.7727	-0.2273	0.6610	0.5885	0.4896	1.7894	-0.2146	0.6720	0.5615	0.4976
β_5	0.0943	-0.0057	0.5405	0.4289	0.2922	0.0865	-0.0135	0.5076	0.3640	0.2578	0.0847	-0.0153	0.5114	0.3637	0.2617
β_6	1.2711	-0.2289	0.5988	0.5173	0.4448	1.2609	-0.2391	0.6844	0.5894	0.5255	1.2648	-0.2352	0.6935	0.5562	0.3967
$\beta_{7,2}$	5.1214	-0.8786	1.3059	1.2977	2.4771	5.4486	-0.5514	1.3944	1.2078	2.2485	5.5051	-0.4949	1.4066	1.1993	2.2233
$\beta_{8,2}$	2.8487	-1.3513	1.6357	1.8154	4.5016	2.9446	-1.2554	2.1241	2.1062	6.0877	2.9907	-1.2093	2.1910	2.1328	6.2630
$\beta_{8,3}$	0.8383	-1.2617	1.7540	1.7859	0.8504	0.9721	-1.1279	2.0599	2.1012	5.5151	1.0006	-1.0787	2.1211	2.1383	5.6629

Tabela F.53: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	
Intercepto	β_1	2.1933	2.1933	2.9432	13.4729	4.7812	1.8851	1.8851	3.0580	13.8172	3.9741	1.7635	1.7635	3.2409	3.0362	13.6134	3.9831	13.6134	Inf
	β_2	0.0710	-0.0290	0.6042	0.3659	4.7812	0.0693	-0.0307	0.5671	0.3275	4.2641	0.0678	-0.0322	0.5746	0.3983	0.3322	3.9831	0.3322	3.9831
	β_3	0.6926	-0.1574	0.6281	0.4194	0.6170	0.0693	-0.1972	0.6603	0.5825	0.7133	0.6525	-0.3682	0.7366	0.5986	0.4941	0.7007	0.4941	0.7007
	β_4	1.9811	-0.5189	0.7378	0.8137	0.2973	2.0959	-0.4041	0.8242	0.7377	0.8426	0.8395	-0.3246	0.8553	0.7337	0.8368	0.8403	0.2946	0.8368
	β_5	0.0535	-0.0465	0.6573	0.5187	0.4343	0.0612	-0.0388	0.6382	0.4467	0.4088	0.4668	-0.0376	0.6452	0.4471	0.4177	4.4709	0.4177	4.4709
	β_6	1.1539	-0.3461	0.6032	0.5643	0.4836	1.1316	-0.3684	0.6982	0.6459	0.6232	4.4668	-0.3605	0.7227	0.6596	0.6523	0.4397	0.6523	0.4397
	$\beta_{7,2}$	4.8197	-1.1803	1.5860	1.6199	3.9085	5.1874	-0.8126	1.7125	1.4976	3.5930	0.2496	-0.7055	1.7515	1.4866	3.5656	0.2478	3.5656	0.2478
	$\beta_{8,2}$	2.6442	-1.5558	1.9260	2.1286	0.5068	2.7223	-1.4777	2.3770	2.3801	7.8337	0.5667	-1.4157	2.4933	2.4374	8.2209	0.5803	8.2209	0.5803
$\beta_{8,3}$	0.6591	-1.4409	1.9452	2.0729	5.8601	0.7963	-1.3037	2.1893	2.3013	6.4927	1.0988	-1.2379	2.2915	2.3618	6.7633	1.1247	6.7633	1.1247	
Intercepto	β_1	2.1205	2.1205	2.9827	13.3927	4.9848	1.7910	1.7910	3.2055	13.4828	4.2641	1.6356	1.6356	3.2780	3.0018	13.4207	4.2641	13.4207	Inf
	β_2	0.6837	-0.1663	0.6387	0.5408	0.6363	0.0910	-0.0090	0.6039	0.4264	0.3647	0.0891	-0.0109	0.6144	0.4281	0.3776	4.2806	0.3776	4.2806
	β_3	2.0178	-0.4822	0.7315	0.7150	0.2860	2.1360	-0.3640	0.8141	0.7088	0.5045	2.1745	-0.2038	0.6970	0.6236	0.5274	0.7336	0.5274	0.7336
	β_4	1.6299	-0.3701	0.6792	0.6343	0.5984	1.6760	-0.3240	0.7851	0.6854	0.7214	1.6994	-0.3006	0.8120	0.6935	0.7498	0.3468	0.7498	0.3468
	β_5	0.0868	-0.0132	0.6482	0.4940	0.4203	0.0627	-0.0373	0.6311	0.4321	0.3996	0.4321	-0.0380	0.6392	0.4343	0.4100	4.3434	0.4100	4.3434
	β_6	1.2279	-0.2721	0.6313	0.5473	0.4726	1.2149	-0.2851	0.7221	0.6302	0.6027	1.2249	-0.2751	0.7455	0.6458	0.6314	0.4305	0.6314	0.4305
	$\beta_{7,2}$	4.8475	-1.1525	1.5893	1.6116	3.8543	5.2191	-0.7809	1.7056	1.4871	3.5189	0.2478	-0.6721	1.7378	1.4696	3.4717	0.2449	3.4717	0.2449
	$\beta_{8,2}$	2.7151	-1.4849	1.9462	2.0869	5.9927	2.8112	-1.3888	2.4289	2.3299	7.8284	0.5547	-1.2887	2.5664	2.3977	8.2469	0.5709	8.2469	0.5709
$\beta_{8,3}$	0.7093	-1.3907	1.9555	2.0251	5.7581	0.8723	-1.2277	2.2853	2.3143	6.7297	1.1021	-1.2877	2.3983	2.3599	7.0260	1.1238	7.0260	1.1238	
Intercepto	β_1	1.8205	1.8205	2.5018	9.5732	4.2603	1.5670	1.5670	2.6676	2.5112	9.5714	1.4583	1.4583	2.7087	2.5008	9.4634	4.2603	9.4634	Inf
	β_2	0.0173	-0.0827	0.5258	0.4260	0.2833	0.0145	-0.0855	0.4853	0.3627	0.2428	0.0150	-0.0850	0.4872	0.3622	0.2446	4.2615	0.2446	4.2615
	β_3	0.7264	-0.1236	0.5723	0.4734	0.3428	0.6861	-0.1639	0.6112	0.5255	0.4004	0.6864	-0.1636	0.6235	0.5382	0.4156	0.6332	0.4156	0.6332
	β_4	2.1284	-0.3716	0.5986	0.5650	0.4965	2.2235	-0.2765	0.6483	0.5570	0.4968	2.2522	-0.2478	0.6555	0.5504	0.4911	0.2201	0.4911	0.2201
	β_5	0.1173	-0.2881	0.6880	0.5681	0.5563	1.7504	-0.2046	0.7541	0.6046	0.6309	1.7678	-0.2322	0.7729	0.6122	0.6512	0.3061	0.6512	0.3061
	β_6	1.2919	-0.2081	0.5739	0.4576	0.3297	1.1067	-0.0067	0.5421	0.3978	0.2939	3.9778	-0.0063	0.5482	0.3980	0.3006	3.9798	0.3006	3.9798
	$\beta_{7,2}$	5.1618	-0.8382	1.2633	1.2282	2.2986	5.4671	-0.2255	0.6287	0.5315	0.4461	5.3279	-0.2186	0.6446	0.5414	0.4633	0.3610	0.4633	0.3610
	$\beta_{8,2}$	2.7453	-1.4547	1.5741	1.8478	4.5939	2.8020	-1.3980	1.9887	2.0789	5.9490	0.4950	-1.3369	2.0890	2.1208	6.1515	0.5049	6.1515	0.5049
$\beta_{8,3}$	0.8003	-1.2997	1.6279	1.7659	4.3393	0.9226	-1.1774	1.8936	2.0007	4.9722	0.9527	-1.1067	1.9786	2.0427	5.1396	0.9727	5.1396	0.9727	
Intercepto	β_1	1.7635	1.7635	2.5118	2.4724	4.4192	1.5626	1.5626	2.6720	2.5112	9.5816	1.4794	1.4794	2.7378	2.5373	9.6838	4.4192	9.6838	Inf
	β_2	0.0801	-0.0109	0.5405	0.4252	0.2925	0.0752	-0.0248	0.5082	0.3649	0.2589	0.0759	-0.0241	0.5102	0.3625	0.2609	4.2625	0.2609	4.2625
	β_3	0.7292	-0.1208	0.5275	0.4373	0.3299	0.6809	-0.1691	0.5586	0.4910	0.3407	0.6793	-0.1707	0.5724	0.5050	0.3568	0.5942	0.3568	0.5942
	β_4	2.1835	-0.3165	0.5890	0.5340	0.4471	2.2768	-0.2232	0.6251	0.5246	0.4406	2.3095	-0.1945	0.6381	0.5258	0.4450	0.2103	0.4450	0.2103
	β_5	0.1085	-0.0085	0.5777	0.4527	0.3338	1.7779	-0.2221	0.6072	0.5162	0.4180	1.7961	-0.2039	0.6210	0.5185	0.4273	0.2593	0.4273	0.2593
	β_6	1.3033	-0.1967	0.5545	0.4667	0.3462	1.2899	-0.2101	0.6133	0.5150	0.4203	1.2956	-0.2044	0.6254	0.5222	0.4329	0.3481	0.4329	0.3481
	$\beta_{7,2}$	5.2150	-0.7850	1.2579	1.1771	2.1985	5.5040	-0.4960	1.3139	1.0937	1.9723	5.5819	-0.4181	1.3342	1.0916	1.9549	0.1819	1.9549	0.1819
	$\beta_{8,2}$	2.7806	-1.4194	1.5782	1.8134	4.5054	2.7970	-1.4030	1.9495	2.0437	5.7669	0.4866	-1.3624	2.0376	2.0889	5.9679	0.5093	5.9679	0.5093
$\beta_{8,3}$	0.8136	-1.2864	1.6751	1.7654	4.4607	0.8780	-1.2220	1.9415	2.0570	5.2632	0.9375	-1.1815	2.0076	2.0986	5.4240	0.9993	5.4240	0.9993	

Tabela F.54: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae* e *mape* para os modelos MI, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{400, 500\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>			
	$n_1 = 400$					$n_1 = 500$					$n_1 = 400$					$n_1 = 500$			
Intercepto	1.4081	1.4081	2.5077	2.3379	8.2714	1.2398	1.2398	2.6849	2.4223	8.7457	1.1407	1.1407	2.7215	2.4152	8.7079	Inf	Inf		
β_1	0.0676	-0.0324	0.4830	0.3860	0.2344	0.0612	-0.0388	0.4503	0.3385	0.2043	0.0607	-0.0393	0.4532	0.3390	0.2070	3.3897	3.3897		
β_2	0.7304	-0.1196	0.5106	0.4198	0.2750	0.6875	-0.1625	0.5371	0.4626	0.3149	0.6883	-0.1617	0.5457	0.4700	0.3240	0.5530	0.5530		
β_3	2.2505	-0.2495	0.5290	0.4731	0.3421	2.3215	-0.1785	0.5660	0.4752	0.3522	2.3471	-0.1529	0.5725	0.4741	0.3511	0.1896	0.1896		
β_4	1.8300	-0.1700	0.5299	0.4400	0.3097	1.8609	-0.1391	0.5725	0.4668	0.3471	1.8785	-0.1215	0.5804	0.4705	0.3516	0.2353	0.2353		
β_5	0.0777	-0.0223	0.5067	0.4121	0.2572	0.0772	-0.0228	0.4726	0.3594	0.2239	0.0780	-0.0220	0.4748	0.3596	0.2259	3.5955	3.5955		
β_6	1.3377	-0.1623	0.5248	0.4314	0.3017	1.3249	-0.1751	0.5609	0.4613	0.3453	1.3339	-0.1661	0.5708	0.4662	0.3534	0.3108	0.3108		
$\beta_7, 2$	5.4949	-0.5051	1.1623	0.9932	1.6062	5.7266	-0.2734	1.2230	0.9897	1.5706	5.7966	-0.2034	1.2350	0.9907	1.5666	0.1651	0.1651		
$\beta_8, 2$	3.0451	-1.1549	1.5129	1.5867	3.6226	3.0643	-1.1357	1.8689	1.8122	4.7826	3.1262	-1.0738	1.9298	1.8333	4.8771	0.4365	0.4365		
$\beta_8, 3$	1.0759	-1.0241	1.5932	1.5576	3.5872	1.1360	-0.9640	1.8275	1.7719	4.2691	1.2026	-0.8974	1.8896	1.8064	4.3761	0.8602	0.8602		
Intercepto	1.3722	1.3722	2.4692	2.3142	7.9800	1.2301	1.2301	2.6508	2.4254	8.5396	1.1525	1.1525	2.6904	2.4317	8.5665	Inf	Inf		
β_1	0.0803	-0.0197	0.4909	0.3919	0.2414	0.0741	-0.0259	0.4595	0.3421	0.2118	0.0730	-0.0270	0.4617	0.3408	0.2139	3.4081	3.4081		
β_2	0.7578	-0.0922	0.5399	0.4402	0.3000	0.5179	-0.1266	0.5590	0.4759	0.3286	0.7235	-0.1265	0.5649	0.4820	0.3352	0.5671	0.5671		
β_3	2.2553	-0.2447	0.5219	0.4613	0.3323	2.3241	-0.1759	0.5449	0.4524	0.3278	2.3446	-0.1554	0.5485	0.4509	0.3250	0.1804	0.1804		
β_4	1.8050	-0.1950	0.5451	0.4634	0.3352	1.8294	-0.1706	0.5901	0.4897	0.3774	1.8412	-0.1588	0.5992	0.4927	0.3842	0.2463	0.2463		
β_5	0.0873	-0.0127	0.4809	0.3888	0.2315	0.0901	-0.0099	0.4479	0.3347	0.2007	0.0898	-0.0102	0.4478	0.3312	0.2006	3.3122	3.3122		
β_6	1.3521	-0.1479	0.5049	0.4295	0.2768	1.3391	-0.1609	0.5589	0.4705	0.3382	1.3420	-0.1580	0.5710	0.4791	0.3510	0.3194	0.3194		
$\beta_7, 2$	5.5177	-0.4823	1.1298	0.9659	1.5092	5.7422	-0.2578	1.1743	0.9479	1.4454	5.8009	-0.1991	1.1894	0.9564	1.4544	0.1594	0.1594		
$\beta_8, 2$	3.0663	-1.1337	1.5013	1.5630	3.5393	3.0688	-1.1312	1.7982	1.7537	4.5131	3.1136	-1.0864	1.8584	1.7771	4.6341	0.4231	0.4231		
$\beta_8, 3$	1.1072	-0.9928	1.5883	1.5530	3.5085	1.1306	-0.9694	1.7993	1.8009	4.1770	1.1818	-0.9182	1.8587	1.8390	4.2980	0.8757	0.8757		
Intercepto	1.1972	1.1972	2.2706	2.0625	6.5889	1.0633	1.0633	2.4296	2.1337	7.0338	1.0130	1.0130	2.4483	2.1240	7.0202	Inf	Inf		
β_1	0.0858	-0.0142	0.4526	0.3627	0.2051	0.0738	-0.0262	0.4263	0.3264	0.1824	0.0719	-0.0281	0.4266	0.3243	0.1828	3.2432	3.2432		
β_2	0.8128	-0.0372	0.4516	0.3558	0.2053	0.4186	-0.0795	0.4822	0.3897	0.2388	0.4584	-0.0819	0.4891	0.3969	0.2460	0.4669	0.4669		
β_3	2.2931	-0.2069	0.4723	0.4145	0.2659	2.3498	-0.1502	0.5048	0.4194	0.2774	2.3659	-0.1341	0.5052	0.4150	0.2732	0.1660	0.1660		
β_4	1.8576	-0.1424	0.4961	0.4146	0.2664	1.8606	-0.1194	0.5299	0.4374	0.2950	1.8904	-0.1096	0.5367	0.4428	0.3001	0.2214	0.2214		
β_5	0.0928	-0.0072	0.4460	0.3498	0.1990	0.0816	-0.0184	0.4221	0.3114	0.1785	0.0798	-0.0202	0.4219	0.3098	0.1784	3.0977	3.0977		
β_6	1.3753	-0.1247	0.4627	0.3787	0.2296	1.3660	-0.1340	0.5042	0.4102	0.2721	1.3689	-0.1311	0.5143	0.4166	0.2817	0.2777	0.2777		
$\beta_7, 2$	5.4981	-0.5019	1.0030	0.8992	1.2579	5.6696	-0.3304	1.0427	0.8715	1.1963	5.7159	-0.2841	1.0475	0.8637	1.1781	0.1439	0.1439		
$\beta_8, 2$	3.3305	-0.8695	1.5104	1.4366	3.0372	3.3616	-0.8384	1.7978	1.6394	3.9351	3.3861	-0.8139	1.8530	1.6711	4.0961	0.3979	0.3979		
$\beta_8, 3$	1.2859	-0.8141	1.5367	1.4362	3.0240	1.3301	-0.7699	1.7592	1.6698	3.6875	1.3559	-0.7441	1.8060	1.7169	3.8152	0.8176	0.8176		
Intercepto	1.1991	1.1991	2.2693	2.0715	6.5877	1.0840	1.0840	2.4483	2.1691	7.1692	1.0184	1.0184	2.4771	2.1748	7.1734	Inf	Inf		
β_1	0.0874	-0.0126	0.4277	0.3319	0.1831	0.0774	-0.0226	0.4007	0.2914	0.1611	0.0750	-0.0250	0.4023	0.2914	0.1625	2.9138	2.9138		
β_2	0.8041	-0.0459	0.4520	0.3630	0.2064	0.4271	-0.0876	0.4800	0.3957	0.2380	0.4656	-0.0910	0.4867	0.4015	0.2451	0.4723	0.4723		
β_3	2.3074	-0.1926	0.4640	0.4020	0.2524	2.3605	-0.1395	0.4846	0.4024	0.2543	2.3784	-0.1216	0.4887	0.4025	0.2536	0.1610	0.1610		
β_4	1.8561	-0.1419	0.4913	0.4092	0.2615	1.8762	-0.1238	0.5239	0.4330	0.2898	1.8869	-0.1131	0.5314	0.4368	0.2952	0.2184	0.2184		
β_5	0.0748	-0.0252	0.4437	0.3582	0.1975	0.0644	-0.0356	0.4093	0.3117	0.1688	0.0631	-0.0369	0.4096	0.3096	0.1692	3.0957	3.0957		
β_6	1.4044	-0.0956	0.4584	0.3765	0.2192	1.3909	-0.1091	0.5002	0.4071	0.2621	1.3949	-0.1051	0.5068	0.4117	0.2679	0.2745	0.2745		
$\beta_7, 2$	5.5001	-0.4999	0.9997	0.9025	1.2494	5.6643	-0.3357	1.0449	0.8814	1.2046	5.7115	-0.2885	1.0470	0.8727	1.1795	0.1455	0.1455		
$\beta_8, 2$	3.3274	-0.8726	1.4883	1.4180	2.9767	3.3419	-0.8581	1.7631	1.6251	3.8449	3.3817	-0.8183	1.8248	1.6583	3.9995	0.3948	0.3948		
$\beta_8, 3$	1.2828	-0.8172	1.5456	1.4469	3.0566	1.3087	-0.7913	1.7469	1.6687	3.6777	1.3528	-0.7472	1.8005	1.7079	3.8000	0.8133	0.8133		

Tabela F.56: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2.0, 1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 0$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>			
	$n_1 = 200$					$n_1 = 300$					$n_1 = 200$					$n_1 = 300$			
Intercepto	1.8811	2.6958	2.7210	10.8059	Inf	1.5874	1.5874	2.9134	2.7102	11.0077	Inf	1.4848	2.9759	2.7590	11.0609	Inf			
β_1	0.0750	-0.0250	0.4472	0.3173	4.4716	0.0740	-0.0260	0.5235	0.3790	0.2748	3.7900	0.0770	-0.0230	0.5256	0.3753	3.7532			
β_2	0.7235	-0.1265	0.5820	0.3548	0.5666	0.6837	-0.1663	0.6149	0.5360	0.4057	0.6306	0.6840	-0.1660	0.6253	0.5469	0.6434			
β_3	2.0753	-0.4247	0.6682	0.6268	0.2500	2.1754	-0.3246	0.7374	0.6472	0.6491	0.2589	2.2061	-0.2939	0.7489	0.6427	0.6473			
β_4	1.6837	-0.3163	0.6520	0.5916	0.5252	1.7232	-0.2768	0.7340	0.6285	0.6194	0.3143	1.7412	-0.2588	0.7536	0.6372	0.6348			
β_5	0.0583	-0.0417	0.6115	0.4844	0.3756	0.0661	-0.0339	0.5830	0.4165	0.3410	4.1654	0.0671	-0.0329	0.5870	0.4136	0.3457			
β_6	1.2140	-0.2860	0.5557	0.5033	0.3905	1.1968	-0.3032	0.6327	0.5649	0.4922	0.3766	1.2008	-0.2920	0.6510	0.5749	0.5133			
$\beta_{7,2}$	5.0371	-0.9629	1.4251	2.9583	0.2336	5.0473	-0.6430	1.5054	1.2975	2.6797	0.2162	5.4538	-0.5462	1.5348	1.2887	2.6540			
$\beta_{8,2}$	2.8459	-1.3541	1.8454	5.2389	0.4630	2.9413	-1.2587	2.2038	2.1945	6.4410	0.5082	2.9912	-1.2088	2.3178	2.2047	6.8332			
$\beta_{8,3}$	0.8188	-1.2812	1.8758	1.9358	0.9218	0.9633	-1.1367	2.0876	2.1415	5.6501	1.0197	1.0125	-1.0875	2.1788	2.2138	5.9298			
Intercepto	1.8168	2.7221	2.7099	10.7106	Inf	1.5514	1.5514	2.8850	2.7102	10.7303	Inf	1.4149	2.9181	2.6626	10.5173	Inf			
β_1	0.0993	-0.0007	0.5851	0.3424	4.6517	0.0834	-0.0166	0.5579	0.4040	0.3115	4.0396	0.0829	-0.0171	0.5638	0.4048	4.0483			
β_2	0.7132	-0.1368	0.5904	0.3674	0.5836	0.6722	-0.1778	0.6251	0.5501	0.4224	0.6472	0.6735	-0.1765	0.6388	0.5626	0.4393			
β_3	2.1065	-0.3935	0.6603	0.6223	0.5909	2.2058	-0.2942	0.7110	0.6116	0.5921	0.2446	2.2435	-0.2585	0.7283	0.6123	0.5963			
β_4	1.6995	-0.3005	0.6203	0.5604	0.4750	1.7410	-0.2590	0.6956	0.5976	0.5510	0.2988	1.7635	-0.2365	0.7135	0.6037	0.5611			
β_5	0.0897	-0.0103	0.6000	0.4600	0.3601	0.0664	-0.0336	0.5752	0.4035	0.3320	4.0348	0.0631	-0.0369	0.5801	0.4045	0.3379			
β_6	1.2800	-0.2200	0.5790	0.3836	0.3278	1.2671	-0.2329	0.6491	0.5568	0.4755	0.3712	1.2768	-0.2232	0.6628	0.5640	0.4891			
$\beta_{7,2}$	5.0573	-0.9427	1.4339	1.3983	2.9447	5.3665	-0.6335	1.4945	1.2939	2.6350	0.2157	5.4685	-0.5315	1.5162	1.2754	2.5815			
$\beta_{8,2}$	2.9107	-1.2893	1.8524	1.9063	0.4539	2.9811	-1.2189	2.2263	2.1185	6.4421	0.5044	3.0650	-1.1350	2.3247	2.1502	6.6924			
$\beta_{8,3}$	0.8677	-1.2323	1.8752	1.8868	0.9085	0.9916	-1.1084	2.1563	2.1730	5.8783	1.0348	1.0743	-1.0257	2.2506	2.2261	6.1172			
Intercepto	1.5594	2.2825	2.2359	7.6417	Inf	1.3602	1.3602	2.4560	2.2657	7.8820	Inf	1.2915	2.5001	2.2855	7.9183	Inf			
β_1	0.0252	-0.0748	0.4828	0.3917	0.2387	0.0265	-0.0735	0.4445	0.3364	0.2029	3.3638	0.0240	-0.0760	0.4451	0.3346	0.2039			
β_2	0.7496	-0.1004	0.5246	0.4321	0.2853	0.7098	-0.1402	0.5597	0.4757	0.3329	0.5937	0.7047	-0.1453	0.5693	0.4859	0.3452			
β_3	2.1976	-0.3024	0.5407	0.4925	0.3838	2.2751	-0.2249	0.5804	0.4891	0.3875	0.1956	2.2967	-0.2033	0.5889	0.4905	0.3881			
β_4	1.7667	-0.2333	0.6237	0.5047	0.4434	1.7981	-0.2019	0.6730	0.5333	0.4937	0.2666	1.8098	-0.1902	0.6824	0.5367	0.5018			
β_5	0.1178	0.0178	0.5276	0.4212	0.2786	0.1063	0.0063	0.4963	0.3692	0.2463	3.6917	0.1055	0.0055	0.4970	0.3670	0.2470			
β_6	1.3319	-0.1681	0.5106	0.4280	0.2890	1.3166	-0.1834	0.5682	0.4730	0.3565	0.3154	1.3188	-0.1812	0.5806	0.4827	0.3699			
$\beta_{7,2}$	5.3228	-0.6772	1.1317	1.0615	1.7393	5.5695	-0.4305	1.1736	0.9989	1.5626	0.1665	5.6364	-0.3636	1.1785	0.9892	1.5210			
$\beta_{8,2}$	2.9330	-1.2670	1.4916	1.6653	0.3965	2.9737	-1.2263	1.8635	1.8914	4.9764	0.4503	3.0024	-1.1976	1.9562	1.9497	5.2610			
$\beta_{8,3}$	0.9543	-1.1457	1.6267	1.6267	0.7746	1.0442	-1.0858	1.7885	1.8314	4.3135	0.8721	1.0827	-1.0173	1.8558	1.8906	4.4700			
Intercepto	1.5113	2.2837	2.1999	7.4994	Inf	1.3484	1.3484	2.4547	2.2764	7.8439	Inf	1.2936	2.4917	2.2941	7.8819	Inf			
β_1	0.0830	-0.0170	0.4958	0.3908	0.2461	0.0743	-0.0257	0.4654	0.3405	0.2173	3.4053	0.0734	-0.0266	0.4648	0.3362	0.2167			
β_2	0.7525	-0.0975	0.4828	0.3980	0.2426	0.7074	-0.1426	0.5127	0.4425	0.2832	0.5206	0.7028	-0.1472	0.5222	0.4526	0.2943			
β_3	2.2469	-0.2531	0.5295	0.4664	0.3444	2.3224	-0.1776	0.5597	0.4646	0.3448	0.1888	2.3452	-0.1548	0.5678	0.4666	0.3464			
β_4	1.7900	-0.2100	0.5105	0.4410	0.3048	1.8212	-0.1788	0.5475	0.4571	0.3317	0.2285	1.8347	-0.1653	0.5556	0.4594	0.3360			
β_5	0.1093	0.0093	0.5300	0.4160	0.2810	0.0925	-0.0075	0.5045	0.3688	0.2547	3.6877	0.0888	-0.0112	0.5060	0.3672	0.2561			
β_6	1.3420	-0.1500	0.5045	0.4181	0.2795	1.3296	-0.1704	0.5527	0.4576	0.3345	0.3050	1.3319	-0.1681	0.5610	0.4636	0.3430			
$\beta_{7,2}$	5.3698	-0.6302	1.1255	1.0164	1.6639	5.6020	-0.3980	1.1684	0.9612	1.5236	0.1602	5.6666	-0.3334	1.1841	0.9611	1.5132			
$\beta_{8,2}$	2.9623	-1.2377	1.4879	1.6349	0.3893	2.9775	-1.2225	1.8219	1.8492	4.8137	0.4403	2.9952	-1.2048	1.8909	1.8903	5.0269			
$\beta_{8,3}$	0.9630	-1.1370	1.5886	1.6177	0.8164	1.0156	-1.0844	1.8304	1.8723	4.5264	0.8916	1.0352	-1.0648	1.9307	1.9328	4.7086			

Tabela F.58: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 0$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{600, 700\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
$n_1 = 600$															
M12															
Intercepto	0.8566	1.8951	1.6708	4.3253	Inf	0.8084	2.0070	1.7331	4.6815	Inf	0.7783	2.0295	1.7432	4.7248	Inf
β_1	0.0805	-0.0195	0.2910	0.1347	2.9102	0.0772	-0.0284	0.3424	0.2609	1.1178	0.7977	-0.0223	0.3412	0.2585	1.1669
β_2	0.8298	-0.0202	0.3793	0.2989	0.1442	0.7956	-0.0544	0.3897	0.3149	0.3704	0.7908	-0.0592	0.3189	0.1589	0.3752
β_3	2.3859	-0.1141	0.3613	0.2978	0.1435	2.4200	-0.0800	0.3796	0.3053	0.1505	2.4316	-0.0684	0.3825	0.3050	0.1510
β_4	1.8749	-0.1251	0.3747	0.3204	0.1560	1.8850	-0.1150	0.3928	0.3307	0.1675	1.8909	-0.1091	0.3972	0.3317	0.1696
β_5	0.0782	-0.0218	0.3894	0.3156	0.1521	0.0716	-0.0284	0.3638	0.2839	0.1331	0.0703	-0.0297	0.3628	0.2817	0.1325
β_6	1.4115	-0.0885	0.3853	0.3161	0.1563	1.3998	-0.1002	0.4069	0.3369	0.1756	1.4007	-0.0993	0.4122	0.3404	0.1798
$\beta_{7,2}$	5.6977	-0.3023	0.8428	0.7135	0.8017	5.8051	-0.1949	0.8639	0.7053	0.7843	5.8386	-0.1614	0.8627	0.7016	0.7703
$\beta_{8,2}$	3.5809	-0.6191	1.3079	1.1784	2.0940	3.5640	-0.6360	1.5287	1.3725	2.7414	3.5750	-0.6250	1.5650	1.3989	2.8399
$\beta_{8,3}$	1.4673	-0.6327	1.3305	1.2232	2.1705	1.4484	-0.6516	1.5205	1.3906	2.7367	1.4591	-0.6409	1.5571	1.4242	2.8351
$n_1 = 700$															
M14															
Intercepto	0.8195	1.9056	1.6706	4.3030	Inf	0.7450	2.0374	1.7399	4.7062	Inf	0.7083	2.0661	1.7485	4.7706	Inf
β_1	0.0915	-0.0085	0.3744	0.2995	0.1403	0.0850	-0.0150	0.3523	0.2706	0.1244	0.0827	-0.0173	0.3518	0.2695	0.1241
β_2	0.7929	-0.0571	0.3809	0.3049	0.1483	0.7622	-0.0878	0.3951	0.3233	0.1638	0.7583	-0.0917	0.3992	0.3276	0.1678
β_3	2.3688	-0.1312	0.3873	0.3155	0.1672	2.4029	-0.0971	0.4076	0.3214	0.1756	2.4144	-0.0856	0.4089	0.3202	0.1745
β_4	1.9019	-0.0981	0.4011	0.3317	0.1705	1.9147	-0.0853	0.4216	0.3479	0.1850	1.9214	-0.0786	0.4259	0.3506	0.1875
β_5	1.0050	0.0050	0.3509	0.2762	0.1232	0.0948	-0.0052	0.3287	0.2484	0.1081	0.0924	-0.0076	0.3290	0.2481	0.1083
β_6	1.4057	-0.0943	0.3948	0.3216	0.1647	1.3962	-0.1038	0.4154	0.3352	0.1833	1.3973	-0.1027	0.4192	0.3391	0.1863
$\beta_{7,2}$	5.7118	-0.2882	0.8317	0.7075	0.7747	5.8211	-0.1789	0.8702	0.7153	0.7893	5.8536	-0.1464	0.8710	0.7097	0.7801
$\beta_{8,2}$	3.6143	-0.5857	1.3138	1.1660	2.0692	3.6244	-0.5756	1.5108	1.3245	2.6139	3.6433	-0.5567	1.5511	1.3547	2.7158
$\beta_{8,3}$	1.4955	-0.6045	1.3383	1.2140	2.1565	1.5055	-0.5945	1.5194	1.3767	2.6619	1.5252	-0.5748	1.5525	1.4017	2.7406
$n_1 = 700$															
M12															
Intercepto	0.8328	0.8328	1.7727	1.5383	3.8360	0.7698	0.7698	1.8868	1.6199	4.1526	0.7511	0.7511	1.9089	1.6301	4.2079
β_1	0.1246	0.0246	0.3424	0.2767	0.1178	0.1167	0.0167	0.3230	0.2522	0.1046	0.1144	0.0144	0.3219	0.2495	0.1038
β_2	0.8031	-0.0469	0.3392	0.2759	0.1173	0.7711	-0.0789	0.3548	0.2940	0.1321	0.7664	-0.0836	0.3584	0.2975	0.1354
β_3	2.3861	-0.1139	0.3872	0.3159	0.1629	2.4157	-0.0843	0.4026	0.3222	0.1692	2.4246	-0.0754	0.4037	0.3214	0.1687
β_4	1.9429	-0.0571	0.3472	0.2801	0.1238	1.9552	-0.0448	0.3626	0.2916	0.1335	1.9600	-0.0400	0.3664	0.2929	0.1358
β_5	0.0900	-0.0100	0.3553	0.2849	0.1264	0.0818	-0.0182	0.3326	0.2595	0.1109	0.0808	-0.0192	0.3305	0.2571	0.1096
β_6	1.4361	-0.0639	0.3449	0.2789	0.1230	1.4288	-0.0712	0.3603	0.2925	0.1349	1.4292	-0.0708	0.3628	0.2935	0.1367
$\beta_{7,2}$	5.7114	-0.2886	0.7396	0.6482	0.6303	5.8064	-0.1936	0.7576	0.6383	0.6115	5.8334	-0.1666	0.7625	0.6358	0.6092
$\beta_{8,2}$	3.6011	-0.5989	1.1328	1.0468	1.6420	3.6089	-0.5911	1.3338	1.1811	2.1284	3.6120	-0.5880	1.3783	1.2044	2.2456
$\beta_{8,3}$	1.5008	-0.5992	1.2364	1.0950	1.8877	1.5043	-0.5957	1.4201	1.2655	2.3716	1.5070	-0.5930	1.4552	1.3010	2.4694
$n_1 = 700$															
M14															
Intercepto	0.8422	0.8422	1.7826	1.5434	3.8869	0.7743	0.7743	1.9156	1.6332	4.2690	0.7433	0.7433	1.9267	1.6440	4.2648
β_1	0.1179	0.0179	0.3528	0.2845	0.1248	0.1119	0.0119	0.3320	0.2619	0.1103	0.1101	0.0101	0.3312	0.2603	0.1098
β_2	0.7909	-0.0591	0.3400	0.2748	0.1191	0.7617	-0.0883	0.3583	0.2931	0.1362	0.7578	-0.0922	0.3619	0.2965	0.1395
β_3	2.3626	-0.1374	0.3549	0.2996	0.1448	2.3954	-0.1046	0.3658	0.2971	0.1448	2.4058	-0.0942	0.3688	0.2974	0.1449
β_4	1.9138	-0.0862	0.3514	0.2881	0.1309	1.9278	-0.0722	0.3670	0.2952	0.1399	1.9338	-0.0662	0.3709	0.2966	0.1419
β_5	0.1012	0.0012	0.3370	0.2689	0.1135	0.0931	-0.0069	0.3179	0.2436	0.1011	0.0917	-0.0083	0.3163	0.2408	0.1001
β_6	1.4210	-0.0790	0.3651	0.2999	0.1395	1.4141	-0.0859	0.3835	0.3154	0.1545	1.4155	-0.0845	0.3868	0.3183	0.1567
$\beta_{7,2}$	5.7042	-0.2958	0.7409	0.6504	0.6365	5.8053	-0.1947	0.7762	0.6510	0.6403	5.8344	-0.1656	0.7756	0.6420	0.6290
$\beta_{8,2}$	3.5937	-0.6063	1.1236	1.0341	1.6302	3.6043	-0.5957	1.3095	1.1646	2.0695	3.6196	-0.5804	1.3360	1.1802	2.1219
$\beta_{8,3}$	1.4984	-0.6016	1.2310	1.0943	1.8773	1.5018	-0.5982	1.4049	1.2418	2.3317	1.5160	-0.5840	1.4335	1.2623	2.3961

Tabela F.59: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 0$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{800, 900\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$				
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	$n_1 = 800$														
	$M12$														
Intercepto	0.7363	1.5955	1.4106	3.0877	Inf	0.6614	1.7300	1.5048	3.4305	Inf	0.6327	1.7376	1.5058	3.4196	Inf
β_1	0.0855	-0.0145	0.2713	0.1160	2.7135	0.0812	-0.0188	0.2468	0.1018	2.4683	0.0805	-0.0195	0.2454	0.1009	2.4535
β_2	0.8057	-0.0443	0.3252	0.2619	0.3081	0.7791	-0.0709	0.3372	0.2771	0.3260	0.7763	-0.0737	0.3400	0.2797	0.3291
β_3	2.3676	-0.1324	0.3208	0.2778	0.1111	2.3951	-0.1049	0.3293	0.2754	0.1102	2.4042	-0.0958	0.3315	0.2759	0.1104
β_4	1.9039	-0.0961	0.3301	0.2784	0.1182	1.9147	-0.0853	0.3471	0.2899	0.1450	1.9195	-0.0805	0.3494	0.2911	0.1455
β_5	0.1157	0.0157	0.3199	0.2545	0.1026	0.1078	0.0078	0.3039	0.2328	0.0924	0.1063	0.0063	0.3025	0.2312	0.0915
β_6	1.4250	-0.0750	0.3212	0.2635	0.1088	1.4193	-0.0807	0.3314	0.2716	0.1163	1.4207	-0.0793	0.3341	0.2737	0.1179
$\beta_{7,2}$	5.7422	-0.2578	0.7148	0.6025	0.5775	5.8313	-0.1687	0.7387	0.6000	0.5741	5.8570	-0.1430	0.7401	0.5964	0.0994
$\beta_{8,2}$	3.6755	-0.5245	1.0733	0.9670	1.4272	3.7013	-0.4957	1.2807	1.1082	0.8639	3.7161	-0.4839	1.3064	1.1243	0.2677
$\beta_{8,3}$	1.5361	-0.5639	1.1668	1.0529	1.6793	1.5558	-0.5442	1.3628	1.1922	1.0567	1.5704	-0.5296	1.3845	1.2086	2.1972
	$n_1 = 900$														
	$M14$														
Intercepto	0.7294	1.5800	1.3860	3.0284	Inf	0.6792	1.7367	1.4691	3.4776	Inf	0.6637	1.7424	1.4712	3.4766	Inf
β_1	0.0968	-0.0032	0.3155	0.1095	2.5165	0.0887	-0.0113	0.2984	0.2319	0.0892	0.0870	-0.0130	0.2979	0.2312	0.0889
β_2	0.8215	-0.0285	0.3444	0.2735	0.3218	0.7946	-0.0554	0.3567	0.2869	0.3375	0.7903	-0.0597	0.3606	0.2907	0.3420
β_3	2.4059	-0.0941	0.3509	0.2867	0.1147	2.4319	-0.0681	0.3658	0.2945	0.1178	2.4397	-0.0603	0.3662	0.2941	0.1177
β_4	1.9051	-0.0949	0.3281	0.2701	0.1147	1.9138	-0.0862	0.3375	0.2759	0.1214	1.9180	-0.0820	0.3397	0.2776	0.1221
β_5	0.1143	0.0143	0.3250	0.2627	0.1059	0.1023	0.0023	0.3088	0.2447	0.0954	0.1000	-0.0000	0.3068	0.2428	0.0941
β_6	1.4427	-0.0573	0.3291	0.2676	0.1116	1.4355	-0.0645	0.3485	0.2858	0.1905	1.4353	-0.0647	0.3523	0.2887	0.1924
$\beta_{7,2}$	5.7502	-0.2498	0.7035	0.5954	0.5573	5.8336	-0.1664	0.7319	0.5953	0.5634	5.8573	-0.1427	0.7272	0.5884	0.0981
$\beta_{8,2}$	3.6778	-0.5222	1.0495	0.9460	1.3741	3.6811	-0.5189	1.2523	1.0945	0.8606	3.6830	-0.5170	1.2823	1.1187	0.2664
$\beta_{8,3}$	1.5398	-0.5602	1.1508	1.0428	1.6382	1.5539	-0.5661	1.3526	1.2097	1.0571	1.5541	-0.5659	1.3829	1.2348	2.2526
	$n_1 = 900$														
	$M12$														
Intercepto	0.6263	1.6376	1.3988	3.0740	Inf	0.5608	1.7681	1.4807	3.4407	Inf	0.5433	1.7784	1.4871	3.4578	Inf
β_1	0.1043	0.0043	0.3051	0.2495	0.0931	0.0981	-0.0019	0.2864	0.2282	0.0820	0.0963	-0.0037	0.2846	0.2257	0.0810
β_2	0.8064	-0.0436	0.3090	0.2452	0.0974	0.7835	-0.0665	0.3196	0.2590	0.3048	0.7795	-0.0705	0.3220	0.2619	0.3081
β_3	2.3894	-0.1106	0.3389	0.2810	0.1271	2.4155	-0.0845	0.3528	0.2864	0.1316	2.4223	-0.0777	0.3531	0.2849	0.1340
β_4	1.8985	-0.1015	0.3039	0.2522	0.1026	1.9089	-0.0911	0.3159	0.2597	0.1081	1.9122	-0.0878	0.3170	0.2588	0.1082
β_5	0.0878	-0.0122	0.2947	0.2372	0.0870	0.0800	-0.0200	0.2774	0.2186	0.0774	0.0788	-0.0212	0.2748	0.2160	0.0760
β_6	1.4689	-0.0311	0.3242	0.2602	0.1061	1.4654	-0.0346	0.3384	0.2729	0.1157	1.4657	-0.0343	0.3391	0.2734	0.1162
$\beta_{7,2}$	5.7519	-0.2481	0.6379	0.5447	0.4685	5.8338	-0.1662	0.6560	0.5408	0.0901	5.8543	-0.1457	0.6566	0.5366	0.4510
$\beta_{8,2}$	3.7331	-0.4669	1.1240	0.9791	1.4813	3.7547	-0.4453	1.3383	1.1211	0.9894	3.7604	-0.4396	1.3631	1.1394	0.2713
$\beta_{8,3}$	1.6701	-0.4299	1.1583	1.0066	1.5264	1.6808	-0.4192	1.3577	1.1523	0.9620	1.6862	-0.4138	1.3803	1.1690	2.0766
	$n_1 = 900$														
	$M14$														
Intercepto	0.6207	1.6235	1.3978	3.0209	Inf	0.5699	1.7655	1.4988	3.4417	Inf	0.5481	1.7748	1.5017	3.4501	Inf
β_1	0.0994	-0.0006	0.3017	0.2413	0.0910	0.0906	-0.0094	0.2870	0.2258	0.0825	0.0896	-0.0104	0.2860	0.2242	0.0819
β_2	0.7831	-0.0669	0.3031	0.2451	0.0963	0.7581	-0.0919	0.3214	0.2629	0.3093	0.7547	-0.0953	0.3260	0.2672	0.3144
β_3	2.3807	-0.1193	0.3009	0.2582	0.1048	2.4049	-0.0951	0.3108	0.2597	0.1056	2.4131	-0.0869	0.3130	0.2589	0.1055
β_4	1.9145	-0.0855	0.3201	0.2677	0.1098	1.9240	-0.0760	0.3357	0.2781	0.1185	1.9286	-0.0714	0.3372	0.2778	0.1188
β_5	0.1094	0.0094	0.3274	0.2556	0.1073	0.1017	0.0017	0.3121	0.2378	0.0974	0.1002	0.0002	0.3109	0.2369	0.0967
β_6	1.4345	-0.0655	0.3160	0.2540	0.1042	1.4291	-0.0709	0.3318	0.2690	0.1151	1.4301	-0.0699	0.3344	0.2709	0.1167
$\beta_{7,2}$	5.7483	-0.2517	0.6389	0.5477	0.4716	5.8267	-0.1733	0.6576	0.5407	0.4624	5.8501	-0.1499	0.6582	0.5371	0.4557
$\beta_{8,2}$	3.7413	-0.4587	1.1204	0.9765	1.4656	3.7495	-0.4505	1.3263	1.1192	0.9620	3.7589	-0.4411	1.3414	1.1280	0.2666
$\beta_{8,3}$	1.6792	-0.4208	1.1607	1.0061	1.5243	1.6752	-0.4248	1.3711	1.1764	0.9602	1.6826	-0.4171	1.3910	1.1889	2.2091

Tabela F.60: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mse*, *mae* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 0$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$					
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	$n_1 = 200$					$n_1 = 300$					$n_1 = 300$					
MI4																
Intercepto	1.6924	1.6924	5.9134	4.8345	37.8329	1.5370	1.5370	6.0289	4.8890	38.7107	1.4371	1.4371	6.0513	4.8924	38.6634	Inf
β_1	0.0687	-0.0313	0.5092	0.4010	2.2602	0.0629	-0.0371	0.4709	0.3439	2.2231	0.0622	-0.0378	0.4725	0.3412	2.2246	3.4123
β_2	0.7475	-0.1025	0.5080	0.4211	2.6886	0.7020	-0.1480	0.5403	0.4656	3.1388	0.7007	-0.1493	0.5506	0.4760	3.2554	0.5600
β_3	2.1952	-0.3048	0.5787	0.5294	0.4278	2.2586	-0.2814	0.6092	0.5253	0.4294	2.2863	-0.2137	0.6187	0.5243	0.4285	0.2097
β_4	1.7804	-0.2196	0.5512	0.4806	0.3520	1.8047	-0.1953	0.6082	0.5074	0.4080	1.8207	-0.1793	0.6218	0.5116	0.4187	0.2558
β_5	0.0565	-0.0435	0.5341	0.4250	0.2872	0.0571	-0.0429	0.4976	0.3742	0.2494	0.0600	-0.0400	0.4985	0.3699	0.2501	3.6993
β_6	1.2962	-0.2038	0.4734	0.4072	0.2657	1.2757	-0.2243	0.5287	0.4539	0.3298	1.2811	-0.2189	0.5430	0.4611	0.3428	0.3074
$\beta_{7,2}$	5.3236	-0.6764	1.2095	1.1043	1.9204	5.5312	-0.4688	1.2307	1.0363	1.7343	5.6130	-0.3870	1.2441	1.0239	1.6976	0.1706
$\beta_{8,2}$	3.1132	-1.0868	1.7492	1.1043	4.2408	3.1351	-1.0649	2.0684	1.9282	5.4123	3.1916	-1.0084	2.1468	1.9618	5.6256	0.4671
$\beta_{8,3}$	1.0494	-1.0506	1.7394	1.7022	4.1295	1.1050	-0.9950	1.9541	1.9245	4.8085	1.1602	-0.9398	2.0166	1.9564	4.9498	0.9316
Intercepto	1.6462	1.6462	5.9264	4.8355	37.8323	1.5111	1.5111	6.0268	4.8940	38.6055	1.4265	1.4265	6.0703	4.8980	38.8830	Inf
β_1	0.1073	0.0073	0.5018	0.4006	0.2519	0.0936	-0.0064	0.4669	0.3438	0.2180	0.0937	-0.0063	0.4670	0.3397	0.2181	3.3972
β_2	0.7448	-0.1052	0.5131	0.4198	0.2743	0.6964	-0.1536	0.5364	0.4587	0.3113	0.6933	-0.1567	0.5462	0.4702	0.3229	0.5532
β_3	2.2210	-0.2790	0.5561	0.4970	0.3871	2.2856	-0.2144	0.5914	0.4962	0.3957	2.3131	-0.1869	0.6049	0.4990	0.4009	0.1996
β_4	1.7850	-0.2150	0.5297	0.4575	0.3268	1.8072	-0.1928	0.5776	0.4871	0.3708	1.8220	-0.1760	0.5880	0.4916	0.3774	0.2458
β_5	0.0967	-0.0033	0.5313	0.4158	0.2823	0.0808	-0.0192	0.4983	0.3638	0.2487	0.0789	-0.0211	0.4991	0.3612	0.2496	3.6121
β_6	1.3636	-0.1364	0.5020	0.4173	0.2706	1.3460	-0.1540	0.5589	0.4653	0.3361	1.3511	-0.1489	0.5722	0.4745	0.3496	0.3163
$\beta_{7,2}$	5.3306	-0.6694	1.2178	1.1066	1.9311	5.5323	-0.4677	1.2547	1.0534	1.7930	5.6087	-0.3913	1.2673	1.0432	1.7592	0.1739
$\beta_{8,2}$	3.1620	-1.0380	1.7209	1.1627	4.0389	3.1679	-1.0321	2.0501	1.9169	5.2683	3.2108	-0.9892	2.1494	1.9854	5.5984	0.4727
$\beta_{8,3}$	1.0941	-1.0059	1.7174	1.6522	3.9612	1.1271	-0.9729	1.9641	1.9546	4.8041	1.1707	-0.9293	2.0394	2.0202	5.0227	0.9620
MI2																
Intercepto	1.4156	1.4156	5.5998	4.5431	33.3620	1.3200	1.3200	5.6315	4.5379	33.4567	1.2693	1.2693	5.6638	4.5462	33.6904	Inf
β_1	0.0395	-0.0605	0.4160	0.3408	0.1767	0.0359	-0.0641	0.3839	0.2970	0.1515	0.0344	-0.0656	0.3815	0.2931	0.1498	2.9306
β_2	0.7834	-0.0666	0.4620	0.3785	0.2179	0.7406	-0.1094	0.4932	0.4172	0.2553	0.7354	-0.1146	0.5027	0.4264	0.2659	0.5016
β_3	2.2702	-0.2298	0.4614	0.4023	0.2657	2.3194	-0.1806	0.4847	0.4056	0.2676	2.3402	-0.1598	0.4901	0.4004	0.2658	0.1618
β_4	1.8275	-0.1725	0.4990	0.4150	0.2788	1.8456	-0.1544	0.5323	0.4361	0.3072	1.8572	-0.1428	0.5337	0.4335	0.3052	0.2167
β_5	0.1129	0.0129	0.4596	0.3694	0.2114	0.1076	0.0076	0.4285	0.3255	0.1836	0.1079	0.0079	0.4280	0.3220	0.1833	3.2199
β_6	1.3817	-0.1183	0.4349	0.3628	0.2031	1.3666	-0.1334	0.4722	0.3894	0.2408	1.3687	-0.1313	0.4817	0.3942	0.2493	0.2628
$\beta_{7,2}$	5.5223	-0.4777	0.9767	0.8763	1.1821	5.6849	-0.3151	0.9962	0.8277	1.0918	5.7427	-0.2573	1.0060	0.8192	1.0783	0.1365
$\beta_{8,2}$	3.2148	-0.9852	1.3637	1.4170	2.8304	3.2052	-0.9948	1.6423	1.6206	3.6868	3.2224	-0.9776	1.7214	1.6662	3.9190	0.3967
$\beta_{8,3}$	1.1754	-0.9246	1.4670	1.4484	3.0069	1.1877	-0.9123	1.6670	1.6597	3.6113	1.2090	-0.8910	1.7148	1.7002	3.7544	0.8096
MI4																
Intercepto	1.3792	1.3792	5.6298	4.5678	33.5974	1.2806	1.2806	5.7253	4.5993	34.4187	1.2310	1.2310	5.7192	4.5958	34.2251	Inf
β_1	0.0798	-0.0202	0.4395	0.3497	0.1935	0.0738	-0.0262	0.4104	0.3080	0.1691	0.0756	-0.0244	0.4059	0.3027	0.1670	3.0273
β_2	0.7690	-0.0810	0.4176	0.3503	0.1810	0.7267	-0.1233	0.4478	0.3867	0.2157	0.7204	-0.1296	0.4579	0.3956	0.2246	0.4630
β_3	2.3102	-0.1898	0.4603	0.3916	0.2479	2.3603	-0.1397	0.4799	0.3919	0.2499	2.3780	-0.1220	0.4827	0.3899	0.2479	0.1560
β_4	1.8475	-0.1525	0.4545	0.3797	0.2298	1.8669	-0.1331	0.4836	0.3936	0.2516	1.8763	-0.1237	0.4901	0.3978	0.2555	0.1989
β_5	0.1224	0.0224	0.4695	0.3730	0.2209	0.1107	0.0107	0.4456	0.3371	0.1987	0.1076	0.0076	0.4452	0.3329	0.1983	3.3294
β_6	1.3926	-0.1074	0.4352	0.3540	0.2360	1.3808	-0.1192	0.4699	0.3833	0.2350	1.3818	-0.1182	0.4751	0.3872	0.2397	0.2581
$\beta_{7,2}$	5.5487	-0.4513	0.9760	0.8490	1.1562	5.7102	-0.2998	1.0258	0.8369	1.1363	5.7614	-0.2386	1.0310	0.8316	1.1199	0.1386
$\beta_{8,2}$	3.2439	-0.9561	1.3631	1.3917	2.7720	3.2420	-0.9580	1.6373	1.5920	3.5984	3.2620	-0.9380	1.6957	1.6280	3.7552	0.3876
$\beta_{8,3}$	1.1862	-0.9138	1.4871	1.4528	3.0465	1.1961	-0.9039	1.7102	1.6755	3.7418	1.2202	-0.8798	1.7588	1.7179	3.8675	0.8181

Tabela F.61: Coeficientes ajustados e os valores de bias, sd, mae, mse e mape para os modelos MI, com l ∈ {12, 14}, re = 500 e β = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1), α* ∈ {0, 0.4, 1}, SNR = 0, d = 0.4, n1 ∈ {400, 500}.

Table with multiple columns for bias, mae, mse, mape, and sd for different coefficients (Intercepto, beta_1 to beta_8,3) across three alpha values (0, 0.4, 1) and two sample sizes (n1 = 400, n1 = 500). The table is organized into three main sections corresponding to alpha = 0, alpha = 0.4, and alpha = 1.

Tabela F.62: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *M_l*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0, 1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>			
	$n_1 = 200$					$n_1 = 300$					$n_1 = 200$					$n_1 = 300$			
Intercepto	1.5982	1.5982	2.4554	2.4187	8.5832	1.3756	1.3756	1.3756	2.6147	2.4539	8.7288	1.2765	1.2765	2.6731	2.4638	8.7749	Inf		
β_1	0.0787	-0.0213	0.5201	0.4143	0.2710	0.0734	-0.0266	0.4801	0.4801	0.3512	3.5405	0.0739	-0.0261	0.4823	0.3532	0.2333	3.5318		
β_2	1.7495	-0.1005	0.3677	0.4414	0.2982	0.7070	-0.1430	0.5639	0.4867	0.4867	0.3384	0.7060	-0.1440	0.5728	0.4959	0.3488	0.5834		
β_3	2.1551	-0.3449	0.6039	0.5651	0.4836	2.2351	-0.2649	0.6260	0.5630	0.4930	0.2252	2.2362	-0.2632	0.6612	0.5633	0.4930	0.2253		
β_4	1.7453	-0.2547	0.5923	0.5237	0.4156	1.7760	-0.2240	0.6536	0.5252	0.4773	0.2762	1.7930	-0.2070	0.6662	0.4867	0.2786	0.2786		
β_5	0.0629	-0.0371	0.5649	0.4485	0.3205	0.0671	-0.0329	0.5331	0.3890	0.3890	3.8995	0.0680	-0.0320	0.5340	0.3856	0.2862	3.8560		
β_6	1.2652	-0.2348	0.5091	0.4483	0.3143	1.2480	-0.2520	0.5696	0.4988	0.3680	0.3325	1.2528	-0.2472	0.5889	0.5078	0.4044	0.3385		
$\beta_{7,2}$	5.2226	-0.7774	1.2808	1.2141	2.2449	5.4762	-0.5238	1.3344	1.1350	2.0550	1.892	5.6220	-0.4380	1.3610	1.1317	2.0443	0.1886		
$\beta_{8,2}$	3.0340	-1.1660	1.7454	1.7640	4.4060	3.0988	-1.1012	2.0391	1.9360	5.3707	0.4610	3.1498	-1.0502	2.1256	1.9806	5.6212	0.4716		
$\beta_{8,3}$	0.9760	-1.1240	1.7847	1.7855	4.4485	1.0768	-1.0232	1.9566	1.9644	4.8754	0.9354	1.1318	-0.9682	2.0380	2.0231	5.0909	0.9634		
Intercepto	1.5469	1.5469	2.4708	2.4153	8.4980	1.3281	1.3281	1.3281	2.6295	2.4593	8.6781	1.2149	1.2149	2.6614	2.4079	8.5591	Inf		
β_1	0.1007	0.0007	0.5398	0.4301	0.2914	0.0899	-0.0101	0.5086	0.3764	0.3764	0.2588	0.0903	-0.0097	0.5118	0.3738	0.2621	3.7383		
β_2	0.7379	-0.1121	0.5420	0.4530	0.3063	0.6946	-0.1554	0.5703	0.4968	0.3494	0.5845	0.6942	-0.1588	0.5815	0.5072	0.3624	0.5966		
β_3	2.1809	-0.3191	0.5938	0.5425	0.4545	2.2613	-0.2387	0.6307	0.5373	0.4548	0.2149	2.2920	-0.2080	0.6426	0.5383	0.4562	0.2153		
β_4	1.7580	-0.2420	0.5629	0.4945	0.3755	1.7911	-0.2089	0.6141	0.5226	0.4207	0.2613	1.8092	-0.1908	0.6318	0.5284	0.4356	0.2642		
β_5	0.0917	-0.0083	0.5522	0.4248	0.3050	0.0746	-0.0254	0.5235	0.3726	0.3726	3.7264	0.0696	-0.0304	0.5264	0.3718	0.2780	3.7182		
β_6	1.3231	-0.1769	0.5286	0.4423	0.3107	1.3090	-0.1910	0.5911	0.4946	0.3659	0.3297	1.3159	-0.1841	0.6022	0.5004	0.3965	0.3336		
$\beta_{7,2}$	5.2340	-0.7660	1.2853	1.2134	2.2389	5.4879	-0.5121	1.3230	1.1348	2.0127	1.891	5.5737	-0.4263	1.3411	1.1244	1.9803	0.1874		
$\beta_{8,2}$	3.0891	-1.1109	1.7425	1.7336	4.2703	3.1516	-1.0484	2.0703	1.9305	5.3851	0.4596	3.2181	-0.9819	2.1590	1.9635	5.6255	0.4675		
$\beta_{8,3}$	1.0189	-1.0811	1.7738	1.7400	4.3149	1.1145	-0.9855	2.0361	2.0272	5.1169	0.9653	1.1868	-0.9132	2.1198	2.0902	5.3276	0.9953		
Intercepto	1.3321	1.3321	2.0718	1.9815	6.0668	1.1969	1.1969	1.1969	2.2217	2.0302	6.3688	1.1099	1.1099	2.2487	2.0180	6.2885	Inf		
β_1	0.0328	-0.0672	0.4407	0.3580	0.1988	0.0337	-0.0663	0.4036	0.3101	0.3101	0.1673	0.0327	-0.0673	0.4048	0.3091	0.1684	3.0914		
β_2	0.7687	-0.0813	0.4781	0.3923	0.2352	0.4615	-0.1222	0.5100	0.4310	0.4310	0.2751	0.4615	-0.1240	0.5188	0.4382	0.2845	0.5155		
β_3	2.2544	-0.2456	0.4855	0.4300	0.2960	2.3124	-0.1876	0.5131	0.4314	0.4314	0.2985	2.3374	-0.1626	0.5179	0.4286	0.2947	0.1714		
β_4	1.8118	-0.1882	0.5627	0.4472	0.3520	1.8335	-0.1665	0.6022	0.4739	0.3903	0.2369	1.8493	-0.1507	0.6082	0.4735	0.3926	0.2367		
β_5	0.1176	0.0176	0.4826	0.3852	0.2332	0.1046	0.0046	0.4525	0.3396	0.3396	0.2048	0.1048	0.0048	0.4543	0.3394	0.2065	3.3941		
β_6	1.3644	-0.1356	0.4640	0.3842	0.2336	1.3474	-0.1526	0.5092	0.4171	0.2826	0.2781	1.3538	-0.1462	0.5194	0.4233	0.2911	0.2822		
$\beta_{7,2}$	5.4554	-0.5446	1.0121	0.9208	1.3210	5.6427	-0.3573	1.0307	0.8732	1.1899	0.1455	5.7132	-0.2868	1.0417	0.8675	1.1674	0.1446		
$\beta_{8,2}$	3.1004	-1.0996	1.3937	1.4907	3.1516	3.1133	-1.0867	1.6965	1.6959	4.0590	0.4038	3.1619	-1.0381	1.7654	1.7194	4.1942	0.4094		
$\beta_{8,3}$	1.0958	-1.0042	1.4697	1.4850	3.1684	1.1458	-0.9542	1.6741	1.6704	3.7130	0.7954	1.1974	-0.9026	1.7279	1.7043	3.8004	0.8116		
Intercepto	1.2928	1.2928	2.0725	1.9529	5.9664	1.1576	1.1576	1.1576	2.2343	2.0340	6.3320	1.1077	1.1077	2.2756	2.0530	6.4053	Inf		
β_1	0.0856	-0.0144	0.4519	0.3568	0.2045	0.0774	-0.0226	0.4242	0.3147	0.3147	0.1804	0.0760	-0.0240	0.4230	0.3115	0.1795	3.1153		
β_2	0.7710	-0.0790	0.4399	0.3608	0.1997	0.7309	-0.1191	0.4677	0.3980	0.2330	0.4683	0.7248	-0.1252	0.4763	0.4050	0.2425	0.4764		
β_3	2.2981	-0.2019	0.4759	0.4088	0.2672	2.3582	-0.1418	0.4982	0.4104	0.2683	0.1642	2.3783	-0.1217	0.5030	0.4099	0.2678	0.1639		
β_4	1.8322	-0.1678	0.4615	0.3897	0.2411	1.8574	-0.1426	0.4912	0.4065	0.2616	0.2032	1.8684	-0.1316	0.4978	0.4083	0.2652	0.2041		
β_5	0.1095	0.0095	0.4838	0.3801	0.2342	0.0955	-0.0045	0.4579	0.3390	0.3390	0.2097	0.0906	-0.0094	0.4586	0.3375	0.2104	3.3747		
β_6	1.3734	-0.1266	0.4576	0.3754	0.2254	1.3634	-0.1366	0.4931	0.4039	0.2618	0.2693	1.3656	-0.1344	0.5052	0.4127	0.2703	0.2751		
$\beta_{7,2}$	5.4946	-0.5054	1.0058	0.8818	1.2671	5.6802	-0.3198	1.0408	0.8447	1.1855	0.1408	5.7367	-0.2633	1.0501	0.8469	1.1719	0.1412		
$\beta_{8,2}$	3.1243	-1.0757	1.3839	1.4633	3.0722	3.1445	-1.0555	1.6600	1.6477	3.8699	0.3923	3.1620	-1.0380	1.7397	1.6989	4.1041	0.4045		
$\beta_{8,3}$	1.1011	-0.9989	1.4861	1.4719	3.2061	1.1424	-0.9576	1.7029	1.6863	3.8169	0.8030	1.1614	-0.9386	1.7644	1.7517	3.9940	0.8341		

Tabela F.63: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{400, 500\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$						
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
$n_1 = 400$																	
M12																	
Intercepto	1.0141	1.0141	2.0348	1.8341	5.1691	0.9120	0.9120	0.9120	1.9662	5.7454	Inf	0.8616	2.2314	1.9637	5.7216	Inf	
β_1	0.0751	-0.0249	0.3989	0.3191	0.1597	0.0661	-0.0339	0.3765	0.2895	0.1429	2.8954	0.0648	0.3766	0.2881	0.1430	2.8812	
β_2	0.7672	-0.0828	0.4194	0.3415	0.1828	0.7318	-0.1182	0.4446	0.3722	0.2116	0.4379	0.7286	0.4529	0.3805	0.2199	0.4476	
β_3	2.3411	-0.1589	0.4261	0.3668	0.2068	2.3854	-0.1146	0.4435	0.3662	0.2099	0.1465	2.4024	0.4486	0.3669	0.2108	0.1468	
β_4	1.8968	-0.1032	0.4303	0.3500	0.1958	1.9165	-0.0835	0.4521	0.3640	0.2114	0.1820	1.9269	0.4566	0.3675	0.2138	0.1838	
β_5	0.0825	-0.0175	0.4192	0.3411	0.1760	0.0800	-0.0200	0.3902	0.3054	0.1526	3.0537	0.0787	0.3906	0.3050	0.1531	3.0502	
β_6	1.3938	-0.1062	0.4288	0.3467	0.1951	1.3834	-0.1166	0.4547	0.3660	0.2203	0.2440	1.3868	0.4594	0.3683	0.2239	0.2455	
$\beta_{7,2}$	5.6933	-0.3067	0.9243	0.7628	0.9484	5.8383	-0.1617	0.9634	0.7760	0.9543	0.1293	5.8862	0.9656	0.7701	0.9453	0.1284	
$\beta_{8,2}$	3.3420	-0.8580	1.2987	1.2687	2.4227	3.3544	-0.8456	1.5645	1.4393	3.1628	0.3427	3.3786	1.6088	1.4670	3.2630	0.3493	
$\beta_{8,3}$	1.3278	-0.7722	1.3748	1.2785	2.4864	1.3538	-0.7462	1.5726	1.4379	3.0300	0.6847	1.3790	1.6248	1.4817	3.1600	0.7056	
$n_1 = 500$																	
M14																	
Intercepto	0.9866	0.9866	2.0016	1.8155	4.9798	0.9070	0.9070	0.9070	1.9665	5.6481	Inf	0.8558	2.2179	1.9709	5.6515	Inf	
β_1	0.0855	-0.0145	0.4053	0.3238	0.1644	0.0761	-0.0239	0.3813	0.2891	0.1460	2.8909	0.0728	0.3818	0.2888	0.1465	2.8883	
β_2	0.7884	-0.0616	0.4440	0.3605	0.2010	0.7533	-0.0967	0.4651	0.3856	0.2257	0.4536	0.7501	0.4714	0.3914	0.2322	0.4605	
β_3	2.3428	-0.1572	0.4172	0.3530	0.1988	2.3837	-0.1163	0.4324	0.3540	0.2005	0.1416	2.3995	0.4337	0.3519	0.1982	0.1407	
β_4	1.8741	-0.1259	0.4428	0.3679	0.2119	1.8878	-0.1122	0.4627	0.3866	0.2332	0.1933	1.8965	0.4740	0.3886	0.2354	0.1943	
β_5	0.0918	-0.0082	0.3963	0.3212	0.1571	0.0897	-0.0103	0.3705	0.2843	0.1374	2.8428	0.0905	0.3700	0.2814	0.1370	2.8143	
β_6	1.4050	-0.0950	0.4126	0.3446	0.1792	1.3947	-0.1053	0.4369	0.3649	0.2019	0.2433	1.3973	0.4437	0.3696	0.2075	0.2464	
$\beta_{7,2}$	5.7087	-0.2913	0.8973	0.7415	0.8899	5.8444	-0.1556	0.9388	0.7533	0.9056	0.1255	5.8901	0.9458	0.7561	0.9066	0.1260	
$\beta_{8,2}$	3.3595	-0.8405	1.2833	1.2422	2.3532	3.3556	-0.8444	1.5367	1.4016	3.0746	0.3337	3.3816	1.5854	1.4290	3.1832	0.3402	
$\beta_{8,3}$	1.3535	-0.7465	1.3682	1.2745	2.4293	1.3558	-0.7442	1.5568	1.4589	2.9775	0.6947	1.3841	1.6023	1.4882	3.0798	0.7087	
$n_1 = 500$																	
M12																	
Intercepto	0.8648	0.8648	1.8100	1.6014	4.0238	0.7659	0.7659	0.7659	1.7134	4.5415	Inf	0.7182	2.0026	1.7087	4.5263	Inf	
β_1	0.0901	-0.0099	0.3706	0.2972	0.1374	0.0772	-0.0228	0.3514	0.2764	0.1240	2.7640	0.0757	0.3508	0.2744	0.1237	2.7443	
β_2	0.8313	-0.0187	0.3677	0.2893	0.1356	0.8020	-0.0480	0.3860	0.3080	0.1513	0.3623	0.7998	0.3980	0.3124	0.1553	0.3675	
β_3	2.3651	-0.1349	0.3775	0.3194	0.1607	2.4014	-0.0986	0.3973	0.3252	0.1676	0.1301	2.4150	0.3980	0.3228	0.1657	0.1291	
β_4	1.9106	-0.0894	0.4001	0.3305	0.1681	1.9248	-0.0752	0.4165	0.3417	0.1791	0.1709	1.9334	0.4191	0.3421	0.1801	0.1711	
β_5	0.0957	-0.0043	0.3649	0.2868	0.1332	0.0868	-0.0132	0.3454	0.2616	0.1195	2.6164	0.0859	0.3451	0.2609	0.1193	2.6092	
β_6	1.4184	-0.0816	0.3757	0.3034	0.1478	1.4124	-0.0876	0.3998	0.3221	0.1676	0.2147	1.4159	0.4054	0.3257	0.1715	0.2171	
$\beta_{7,2}$	5.6717	-0.3283	0.7955	0.6844	0.7406	5.7819	-0.2181	0.8195	0.6703	0.7191	0.1117	5.8191	0.8254	0.6693	0.7140	0.1116	
$\beta_{8,2}$	3.5628	-0.6372	1.2388	1.1269	1.9408	3.6000	-0.6000	1.4735	1.2954	2.5311	0.3084	3.6285	1.4990	1.3065	2.5736	0.3111	
$\beta_{8,3}$	1.4925	-0.6075	1.2797	1.1497	2.0065	1.5292	-0.5708	1.4822	1.3215	2.5226	0.6293	1.5571	1.5100	1.3436	2.5749	0.6398	
$n_1 = 500$																	
M14																	
Intercepto	0.8671	0.8671	1.8171	1.6112	4.0538	0.8079	0.8079	0.8079	1.9732	4.5464	Inf	0.7801	1.9988	1.7379	4.6036	Inf	
β_1	0.0913	-0.0087	0.3498	0.2718	0.1225	0.0826	-0.0174	0.3279	0.2449	0.1078	2.4492	0.0818	0.3257	0.2418	0.1064	2.4179	
β_2	0.8237	-0.0263	0.3682	0.2950	0.1363	0.7927	-0.0573	0.3858	0.3147	0.1522	0.3703	0.7874	0.3909	0.3187	0.1567	0.3750	
β_3	2.3759	-0.1241	0.3723	0.3132	0.1540	2.4088	-0.0912	0.3828	0.3163	0.1549	0.1265	2.4205	0.3842	0.3144	0.1539	0.1258	
β_4	1.9107	-0.0893	0.3974	0.3270	0.1659	1.9214	-0.0786	0.4174	0.3426	0.1804	0.1713	1.9271	0.4192	0.3449	0.1811	0.1724	
β_5	0.0803	-0.0197	0.3632	0.2934	0.1323	0.0728	-0.0272	0.3374	0.2634	0.1146	2.6342	0.0701	0.3358	0.2611	0.1136	2.6108	
β_6	1.4419	-0.0581	0.3728	0.3029	0.1424	1.4324	-0.0676	0.3940	0.3188	0.1598	0.2125	1.4325	0.3992	0.3218	0.1639	0.2146	
$\beta_{7,2}$	5.6705	-0.3295	0.7914	0.6874	0.7349	5.7739	-0.2261	0.8190	0.6816	0.7218	0.1136	5.8068	0.8215	0.6760	0.7122	0.1127	
$\beta_{8,2}$	3.5614	-0.6386	1.2327	1.1213	1.9273	3.5592	-0.6408	1.4597	1.2989	2.5415	0.3093	3.5681	1.5009	1.3350	2.6520	0.3179	
$\beta_{8,3}$	1.4913	-0.6087	1.2878	1.1619	2.0289	1.4862	-0.6138	1.4905	1.3517	2.5982	0.6437	1.4958	1.5321	1.3908	2.7123	0.6623	

Tabela F.64: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *MI*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 1$, $d = 0.2$, $n_1 \in \{600, 700\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$							
	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>β</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
$n_1 = 600$																		
M12																		
Intercepto	0.7406	0.7406	1.6808	1.4695	3.3736	Inf	0.6987	0.6987	1.7941	1.5359	3.7070	Inf	0.6866	0.6866	1.8194	1.5500	3.7818	Inf
β_1	0.0830	-0.0170	0.3300	0.2621	0.1092	2.6215	0.0774	-0.0226	0.3089	0.2380	0.0959	2.3796	0.0765	-0.0235	0.3077	0.2359	0.0952	2.3586
β_2	0.8356	-0.0144	0.3412	0.2685	0.1166	0.3159	0.8065	-0.0436	0.3510	0.2803	0.1251	0.3298	0.8009	-0.0491	0.3535	0.2846	0.1274	0.3348
β_3	2.4078	-0.0922	0.3212	0.2627	0.1116	0.1051	2.4356	-0.0644	0.3377	0.2705	0.1182	0.1082	2.4443	-0.0557	0.3390	0.2695	0.1180	0.1078
β_4	1.8959	-0.1041	0.3348	0.2836	0.1229	0.1418	1.9045	-0.0955	0.3491	0.2925	0.1310	0.1462	1.9085	-0.0915	0.3528	0.2946	0.1329	0.1473
β_5	0.0808	-0.0192	0.3505	0.2841	0.1232	2.8411	0.0732	-0.0268	0.3290	0.2597	0.1090	2.5969	0.0725	-0.0275	0.3263	0.2553	0.1072	2.5535
β_6	1.4269	-0.0731	0.3461	0.2832	0.1251	0.1888	1.4173	-0.0827	0.3621	0.2983	0.1380	0.1988	1.4170	-0.0830	0.3672	0.3026	0.1417	0.2017
$\beta_{7,2}$	5.7532	-0.2468	0.7482	0.6288	0.6207	0.1048	5.8400	-0.1600	0.7680	0.6291	0.6154	0.1048	5.8676	-0.1324	0.7735	0.6286	0.6159	0.1048
$\beta_{8,2}$	3.6602	-0.5398	1.1637	1.0378	1.6455	0.2471	3.6515	-0.5485	1.3852	1.2198	2.2197	0.2904	3.6474	-0.5526	1.4247	1.2519	2.3350	0.2981
$\beta_{8,3}$	1.5432	-0.5568	1.1893	1.0813	1.7246	0.5149	1.5272	-0.5728	1.3930	1.2442	2.2684	0.5925	1.5214	-0.5786	1.4297	1.2791	2.3789	0.6091
$n_1 = 600$																		
M14																		
Intercepto	0.7116	0.7116	1.6877	1.4695	3.3547	Inf	0.6419	0.6419	1.8448	1.5734	3.8153	Inf	0.6055	0.6055	1.8586	1.5672	3.8209	Inf
β_1	0.0926	-0.0074	0.3371	0.2696	0.1137	2.6958	0.0871	-0.0129	0.3187	0.2471	0.1018	2.4710	0.0867	-0.0133	0.3169	0.2453	0.1006	2.4533
β_2	0.8018	-0.0482	0.3423	0.2736	0.1195	0.3219	0.7750	-0.0750	0.3558	0.2888	0.1322	0.3398	0.7720	-0.0780	0.3593	0.2915	0.1352	0.3430
β_3	2.3916	-0.1084	0.3462	0.2796	0.1316	0.1118	2.4201	-0.0799	0.3633	0.2855	0.1384	0.1142	2.4306	-0.0694	0.3650	0.2854	0.1381	0.1142
β_4	1.9194	-0.0806	0.3591	0.2953	0.1354	0.1476	1.9308	-0.0692	0.3749	0.3072	0.1453	0.1536	1.9369	-0.0631	0.3770	0.3089	0.1461	0.1545
β_5	0.1049	0.0049	0.3155	0.2484	0.0996	2.4842	0.0953	-0.0047	0.2967	0.2262	0.0880	2.2624	0.0943	-0.0057	0.2956	0.2249	0.0874	2.2489
β_6	1.4209	-0.0791	0.3540	0.2872	0.1316	0.1915	1.4138	-0.0862	0.3710	0.2988	0.1451	0.1992	1.4154	-0.0846	0.3730	0.2997	0.1463	0.1998
$\beta_{7,2}$	5.7637	-0.2363	0.7373	0.6220	0.5994	0.1037	5.8543	-0.1457	0.7757	0.6315	0.6229	0.1052	5.8839	-0.1161	0.7750	0.6275	0.6141	0.1046
$\beta_{8,2}$	3.6869	-0.5131	1.1677	1.0262	1.6268	0.2443	3.7058	-0.4942	1.3825	1.1966	2.1554	0.2849	3.7264	-0.4736	1.4120	1.2125	2.2182	0.2887
$\beta_{8,3}$	1.5656	-0.5344	1.1912	1.0696	1.7046	0.5093	1.5783	-0.5217	1.3955	1.2298	2.2196	0.5856	1.5994	-0.5006	1.4176	1.2432	2.2602	0.5920
$n_1 = 700$																		
M12																		
Intercepto	0.7304	0.7304	1.5673	1.3519	2.9900	Inf	0.6543	0.6543	1.6869	1.4344	3.2736	Inf	0.6424	0.6424	1.7014	1.4381	3.3073	Inf
β_1	0.1226	0.0226	0.3076	0.2486	0.0951	2.4860	0.1157	0.0157	0.2932	0.2306	0.0862	2.3056	0.1146	0.0146	0.2916	0.2286	0.0852	2.2860
β_2	0.8103	-0.0397	0.3045	0.2472	0.0943	0.2908	0.7856	-0.0644	0.3175	0.2610	0.1050	0.3071	0.7804	-0.0696	0.3209	0.2650	0.1078	0.3118
β_3	2.4049	-0.0951	0.3441	0.2790	0.1274	0.1116	2.4319	-0.0681	0.3560	0.2833	0.1314	0.1133	2.4395	-0.0605	0.3579	0.2839	0.1317	0.1136
β_4	1.9546	-0.0454	0.3097	0.2488	0.0980	0.1244	1.9672	-0.0328	0.3220	0.2576	0.1048	0.1288	1.9710	-0.0290	0.3249	0.2601	0.1064	0.1300
β_5	0.0911	-0.0089	0.3193	0.2560	0.1021	2.5597	0.0835	-0.0165	0.3013	0.2373	0.0910	2.3725	0.0828	-0.0172	0.2991	0.2342	0.0898	2.3420
β_6	1.4473	-0.0527	0.3096	0.2499	0.0986	0.1666	1.4437	-0.0563	0.3202	0.2607	0.1057	0.1738	1.4437	-0.0563	0.3213	0.2608	0.1064	0.1739
$\beta_{7,2}$	5.7581	-0.2419	0.6520	0.5675	0.4836	0.0946	5.8434	-0.1566	0.6810	0.5684	0.4883	0.0947	5.8654	-0.1346	0.6816	0.5646	0.4828	0.0941
$\beta_{8,2}$	3.6705	-0.5295	1.0023	0.9162	1.2850	0.2181	3.7007	-0.4993	1.1930	1.0397	1.6726	0.2475	3.6999	-0.5001	1.2257	1.0584	1.7523	0.2520
$\beta_{8,3}$	1.5665	-0.5335	1.1020	0.9675	1.4991	0.4607	1.5877	-0.5123	1.2869	1.1177	1.9185	0.5322	1.5849	-0.5151	1.3156	1.1445	1.9961	0.5450
$n_1 = 700$																		
M14																		
Intercepto	0.7373	0.7373	1.5760	1.3596	3.0275	Inf	0.6619	0.6619	1.7074	1.4513	3.3533	Inf	0.6420	0.6420	1.7195	1.4590	3.3689	Inf
β_1	0.1164	0.0164	0.3171	0.2557	0.1008	2.5574	0.1085	0.0085	0.2995	0.2377	0.0898	2.3768	0.1085	0.0085	0.2973	0.2358	0.0885	2.3577
β_2	0.7994	-0.0506	0.3053	0.2462	0.0957	0.2896	0.7763	-0.0737	0.3201	0.2607	0.1079	0.3068	0.7721	-0.0779	0.3223	0.2621	0.1099	0.3084
β_3	2.3842	-0.1158	0.3158	0.2639	0.1131	0.1055	2.4135	-0.0865	0.3251	0.2631	0.1132	0.1052	2.4221	-0.0779	0.3269	0.2621	0.1129	0.1048
β_4	1.9287	-0.0713	0.3137	0.2557	0.1035	0.1279	1.9425	-0.0575	0.3271	0.2631	0.1103	0.1315	1.9473	-0.0527	0.3289	0.2638	0.1110	0.1319
β_5	0.1015	0.0015	0.3028	0.2416	0.0917	2.4157	0.0935	-0.0065	0.2866	0.2219	0.0822	2.2193	0.0925	-0.0075	0.2854	0.2199	0.0815	2.1992
β_6	1.4336	-0.0664	0.3271	0.2682	0.1114	0.1788	1.4303	-0.0697	0.3418	0.2801	0.1217	0.1867	1.4308	-0.0692	0.3439	0.2817	0.1231	0.1878
$\beta_{7,2}$	5.7521	-0.2479	0.6541	0.5693	0.4893	0.0949	5.8412	-0.1588	0.6879	0.5745	0.4985	0.0958	5.8652	-0.1348	0.6896	0.5711	0.4937	0.0952
$\beta_{8,2}$	3.6652	-0.5348	0.9990	0.9091	1.2840	0.2165	3.6934	-0.5066	1.1850	1.0313	1.6608	0.2456	3.7003	-0.4997	1.2060	1.0426	1.7040	0.2482
$\beta_{8,3}$	1.5657	-0.5343	1.0990	0.9684	1.4933	0.4611	1.5829	-0.5171	1.2825	1.1044	1.9123	0.5259	1.5873	-0.5127	1.3105	1.1260	1.9804	0.5362

Tabela F.65: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *ML*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = -1$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{600, 700\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>				
	$n_1 = 600$					$n_1 = 700$					$n_1 = 600$					$n_1 = 700$			
Intercepto	-0.0176	7.9569	6.3250	63.3128	Inf	0.1983	8.0227	6.3394	64.4031	Inf	0.2129	8.0360	6.3745	64.6226	Inf				
β_1	0.9358	-0.0642	0.3900	0.2411	0.3900	0.9250	0.5075	0.4079	0.2631	0.4079	0.9217	0.5128	0.4118	0.2691	0.4118				
β_2	4.8297	-0.1703	0.5232	0.3028	0.0871	4.9528	-0.0472	0.5399	0.2937	0.0868	4.9670	-0.0330	0.5385	0.2911	0.0853				
β_3	-1.8964	0.1036	0.4015	0.2514	0.2008	-1.9149	0.0851	0.4138	0.2704	0.2092	-1.9152	0.0848	0.4170	0.2743	0.2085				
β_4	1.9100	-0.0900	0.4086	0.2618	0.2043	1.9300	-0.0700	0.4185	0.2700	0.2100	1.9306	-0.0694	0.4189	0.2775	0.2094				
β_5	-3.8752	0.1248	0.5379	0.4483	0.3049	-3.9633	0.3677	0.5556	0.3100	0.1131	-3.9730	0.0270	0.5571	0.4525	0.1131				
β_6	4.8027	-0.1973	0.5111	0.4419	0.0884	4.9247	-0.0753	0.5315	0.4338	0.0868	4.9387	-0.0613	0.4328	0.2860	0.0866				
$\beta_{7,2}$	5.2464	-0.1536	1.0895	1.2106	0.1657	5.3364	-0.0636	1.1262	0.9137	0.1692	5.3443	-0.0557	1.1327	0.9179	0.1700				
$\beta_{8,2}$	-5.1638	0.8362	1.4954	3.3837	0.2492	-5.4677	0.5323	1.9949	1.6728	0.2788	-5.4684	0.5116	2.0303	1.6941	0.2823				
$\beta_{8,3}$	-2.2549	0.7451	1.6905	3.4128	0.5016	-2.5463	0.4537	2.0373	4.3564	0.5669	-2.5697	0.4303	2.0737	1.7280	0.5760				
Intercepto	-0.0300	7.9457	6.3086	63.1358	Inf	0.1830	8.0054	6.3332	64.1201	Inf	0.1961	8.0076	6.3341	64.1602	Inf				
β_1	0.9526	-0.0474	0.5136	0.4104	0.4104	0.9429	-0.0571	0.5315	0.4276	0.4276	0.9406	-0.0594	0.5353	0.2900	0.4315				
β_2	4.7998	-0.2002	0.5103	0.3005	0.0878	4.9197	-0.0803	0.5293	0.4299	0.2866	4.9340	-0.0660	0.5285	0.4275	0.2836				
β_3	-1.9162	0.0838	0.5005	0.3988	0.2575	-1.9365	0.0635	0.5214	0.4144	0.2759	-1.9376	0.0624	0.5235	0.4167	0.2780				
β_4	1.9358	-0.0642	0.4265	0.2828	0.2133	1.9551	-0.0449	0.4402	0.3009	0.2201	1.9562	-0.0438	0.5497	0.3040	0.2216				
β_5	-3.8418	0.1582	0.4750	0.4447	0.1003	-3.9273	0.0727	0.4963	0.3967	0.0992	-3.9371	-0.0629	0.4974	0.3952	0.0988				
β_6	4.8017	-0.1983	0.5252	0.4447	0.0889	4.9206	-0.0794	0.5457	0.4333	0.3041	4.9347	-0.0653	0.5443	0.4310	0.0862				
$\beta_{7,2}$	5.2555	-0.1445	1.0883	1.2053	0.1646	5.3425	-0.0575	1.1342	0.9202	0.1704	5.3507	-0.0493	1.1385	0.9234	0.1710				
$\beta_{8,2}$	-5.1546	0.8454	1.4981	3.4260	0.2497	-5.4526	0.5474	1.9958	1.6789	0.2798	-5.4722	0.5278	2.0334	1.7041	0.2840				
$\beta_{8,3}$	-2.2488	0.7512	1.6961	3.4411	0.5046	-2.5361	0.4639	2.0509	1.7101	0.4213	-2.5569	0.4431	2.0878	1.7385	0.5795				
Intercepto	0.1456	7.8465	6.3403	61.5883	Inf	0.3841	7.9102	6.3871	62.7181	Inf	0.3943	7.9119	6.3846	62.7530	Inf				
β_1	1.0117	0.4690	0.3718	0.2201	0.3718	1.0058	0.0058	0.4851	0.3833	0.3833	1.0045	0.0045	0.4872	0.3849	0.3849				
β_2	4.8066	-0.1934	0.3986	0.2502	0.0797	4.9235	-0.0765	0.4870	0.3965	0.2431	4.9356	-0.0644	0.4853	0.3937	0.2396				
β_3	-1.9292	0.0708	0.4043	0.2600	0.2022	-1.9513	0.0487	0.4176	0.2756	0.2088	-1.9524	0.0476	0.5254	0.4199	0.2783				
β_4	1.9719	-0.0281	0.4567	0.2094	0.1809	1.9955	-0.0045	0.4775	0.2280	0.1880	1.9967	-0.0033	0.4810	0.3793	0.2100				
β_5	-3.8632	0.1368	0.4847	0.4073	0.2537	-3.9488	0.0512	0.5046	0.4085	0.1021	-3.9576	-0.0424	0.5051	0.4093	0.1023				
β_6	4.8234	-0.1766	0.4695	0.3991	0.2516	4.9410	-0.0590	0.4901	0.3965	0.2436	4.9536	-0.0464	0.4906	0.3961	0.2429				
$\beta_{7,2}$	5.1732	-0.2268	0.9667	0.9860	0.1491	5.2571	-0.1429	1.0084	0.8218	0.1522	5.2634	-0.1366	1.0127	0.8248	0.1527				
$\beta_{8,2}$	-5.2755	0.7245	1.4178	2.5351	0.2091	-5.5999	0.4001	1.7372	1.4088	0.2348	-5.6155	0.3845	1.7639	1.4248	0.2375				
$\beta_{8,3}$	-2.3144	0.6896	1.5654	1.3809	0.4603	-2.6269	0.3731	1.8991	1.5592	0.3721	-2.6428	0.3572	1.9240	1.5761	0.5254				
Intercepto	0.1433	7.8681	6.3526	61.9282	Inf	0.3807	7.9445	6.4165	63.2592	Inf	0.3887	7.9535	6.4217	63.4097	Inf				
β_1	0.9990	-0.0010	0.4662	0.2174	0.3748	0.9955	-0.0045	0.4850	0.3902	0.2353	0.9928	-0.0072	0.4876	0.3921	0.3921				
β_2	4.7935	-0.2065	0.4051	0.2582	0.0810	4.9129	-0.0871	0.4854	0.3900	0.2432	4.9246	-0.0754	0.4854	0.3885	0.2413				
β_3	-1.9467	0.0533	0.4744	0.2279	0.1897	-1.9720	0.0280	0.4905	0.3881	0.2413	-1.9727	0.0273	0.4912	0.3881	0.2420				
β_4	1.9447	-0.0553	0.4825	0.2359	0.1910	1.9691	-0.0309	0.3960	0.3960	0.2549	1.9693	-0.0307	0.5061	0.3975	0.1987				
β_5	-3.8588	0.1412	0.4624	0.3836	0.2337	-3.9468	0.0532	0.4834	0.3823	0.2366	-3.9545	-0.0455	0.4834	0.3820	0.2358				
β_6	4.8131	-0.1869	0.4207	0.2727	0.0841	4.9328	-0.0672	0.5101	0.4138	0.2648	4.9444	-0.0556	0.5099	0.4116	0.2631				
$\beta_{7,2}$	5.1688	-0.2312	0.9663	0.9872	0.1496	5.2578	-0.1422	1.0073	0.8217	0.1522	5.2630	-0.1370	1.0108	0.8242	0.1526				
$\beta_{8,2}$	-5.2715	0.7285	1.4165	2.5370	0.2101	-5.5997	0.4003	1.7277	1.4661	0.2344	-5.6122	0.3878	1.7518	1.4218	0.2370				
$\beta_{8,3}$	-2.3076	0.6924	1.5663	1.3806	0.4602	-2.6269	0.3799	1.8991	1.5675	0.3750	-2.6422	0.3678	1.9240	1.5824	0.5275				

Tabela F.66: Coeficientes ajustados e os valores de bias, sd, mae, mse e mape para os modelos MI, com l ∈ {12, 14}, re = 500 e β = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3), α* ∈ {0, 0.4, 1}, SNR = -1, d = 0.4, n1 ∈ {800, 900}.

Table with columns for Coeficiente, bias, sd, mae, mse, mape, β, bias, sd, mae, mse, mape, β, bias, sd, mae, mse, mape. It is organized into sections for alpha = 0, alpha = 0.4, and alpha = 1, with sub-sections for n1 = 800 and n1 = 900. Each section contains data for an Intercepto and parameters beta_1 through beta_8.3.

Tabela F.67: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para os modelos *ML*, com $l \in \{12, 14\}$, $re = 500$ e $\beta = (1, 5, -2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* \in \{0, 0.4, 1\}$, $SNR = 0$, $d = 0.4$, $n_1 \in \{200, 300\}$.

Coeficiente	$\alpha = 0$					$\alpha = 0.4$					$\alpha = 1$								
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>				
	$n_1 = 200$					$n_1 = 300$					$n_1 = 200$					$n_1 = 300$			
Intercepto	-0.4181	7.9374	6.2850	63.1778	Inf	-0.2456	8.0505	6.3302	64.8705	Inf	-0.1842	8.0841	6.3964	65.3387	Inf				
β_1	0.9024	-0.0976	0.7306	0.5807	0.5432	0.8773	-0.1227	0.7499	0.6123	0.5774	0.8792	-0.1208	0.7577	0.6190	0.5887				
β_2	4.6441	-0.3559	0.7620	0.7073	0.1364	4.8152	-0.1848	0.8008	0.6625	0.6755	4.8576	-0.1424	0.8031	0.6603	0.6653				
β_3	-1.8988	0.1012	0.7648	0.6150	0.5952	-1.9002	0.0998	0.8173	0.6559	0.6759	-1.9076	0.0924	0.8278	0.6633	0.6938				
β_4	1.8731	-0.1269	0.7559	0.5875	0.3067	1.8745	-0.1255	0.8089	0.6570	0.6700	1.8814	-0.1186	0.8175	0.6633	0.6824				
β_5	-3.7680	0.2320	0.7867	0.6479	0.6728	-3.8834	0.1166	0.8246	0.6551	0.6936	-3.9150	0.0850	0.8291	0.6555	0.6947				
β_6	4.6086	-0.3914	0.6972	0.6377	0.6393	4.7769	-0.2231	0.7187	0.5958	0.5664	4.8195	-0.1805	0.7223	0.5859	0.5543				
$\beta_{7,2}$	5.0169	-0.3831	1.6061	1.2990	2.7264	5.0863	-0.3137	1.7153	1.3769	3.0406	5.1134	-0.2866	1.7388	1.3932	3.1057				
$\beta_{8,2}$	-4.7611	1.2389	2.4564	2.2525	7.5688	-4.9948	1.0052	2.9632	2.5983	9.7910	-5.0792	0.9208	3.0498	2.6532	10.1494				
$\beta_{8,3}$	-1.8803	1.1197	2.4347	2.1687	7.1816	-2.1275	0.8725	2.8959	2.5658	9.1479	-2.2178	0.7822	2.9628	2.6381	9.5090				
Intercepto	-0.4539	8.0002	6.3293	64.2089	Inf	-0.3166	8.1261	6.4226	66.1336	Inf	-0.2429	8.1413	6.4356	66.3390	Inf				
β_1	0.9600	-0.0400	0.7262	0.5793	0.5290	0.9266	-0.0734	0.7514	0.6111	0.5700	0.9278	-0.0722	0.7614	0.6199	0.5850				
β_2	4.6390	-0.3610	0.7761	0.6802	0.7327	4.7977	-0.2023	0.8108	0.6666	0.6984	4.8416	-0.1584	0.8132	0.6612	0.6863				
β_3	-1.8598	0.1411	0.7472	0.6044	0.5782	-1.8525	0.1475	0.7974	0.6465	0.6576	-1.8603	0.1397	0.8069	0.6515	0.6705				
β_4	1.8704	-0.1296	0.7342	0.5940	0.5558	1.8623	-0.1377	0.7896	0.6421	0.6424	1.8712	-0.1288	0.7995	0.6489	0.6558				
β_5	-3.7073	0.2927	0.7790	0.6659	0.6925	-3.8139	0.1861	0.8156	0.6669	0.6998	-3.8479	0.1521	0.8221	0.6641	0.6989				
β_6	4.6944	-0.3056	0.7385	0.6409	0.6387	4.8578	-0.1422	0.7644	0.6178	0.6046	4.9043	-0.0957	0.7671	0.6133	0.5977				
$\beta_{7,2}$	5.0032	-0.3968	1.6036	1.3011	2.7288	5.0618	-0.3382	1.7060	1.3764	3.0249	5.0938	-0.3062	1.7191	1.3799	3.0491				
$\beta_{8,2}$	-4.7062	1.2938	2.4494	2.2848	7.6735	-4.8936	1.1064	2.9683	2.6467	10.0348	-4.9939	1.0061	3.0254	2.6580	10.1653				
$\beta_{8,3}$	-1.8362	1.1638	2.4546	2.2047	7.3794	-2.0391	0.9609	2.9139	2.6358	9.4138	-2.1456	0.8544	2.9902	2.6931	9.6716				
Intercepto	-0.2255	7.6536	6.0373	58.6287	Inf	-0.0278	7.7765	6.1180	60.4744	Inf	0.0077	7.7850	6.1244	60.6065	Inf				
β_1	0.8673	-0.1327	0.5882	0.4899	0.3635	0.8473	-0.1527	0.6060	0.5156	0.5156	0.8440	-0.1560	0.6123	0.5213	0.3902				
β_2	4.7429	-0.2571	0.6681	0.5124	0.1151	4.8835	-0.1165	0.6894	0.5650	0.4888	4.9100	-0.0900	0.6916	0.5642	0.4884				
β_3	-1.9293	0.0707	0.6326	0.4929	0.4052	-1.9414	0.0586	0.6679	0.5334	0.4495	-1.9444	0.0556	0.6742	0.5381	0.4576				
β_4	1.8867	-0.1133	0.6929	0.5464	0.2751	1.8965	-0.1035	0.7151	0.5633	0.5221	1.8996	-0.1004	0.7205	0.5681	0.2840				
β_5	-3.7616	0.2384	0.6652	0.5614	0.4993	-3.8563	0.1437	0.6895	0.5646	0.4961	-3.8745	0.1255	0.6926	0.5652	0.4955				
β_6	4.7494	-0.2506	0.6251	0.4535	0.1083	4.8898	-0.1102	0.6467	0.5334	0.4303	4.9160	-0.0840	0.6462	0.5293	0.4246				
$\beta_{7,2}$	5.1492	-0.2508	1.3002	1.0420	1.7533	5.2268	-0.1732	1.3483	1.0694	1.8478	5.2434	-0.1566	1.3600	1.0776	1.8742				
$\beta_{8,2}$	-5.1758	0.8242	1.8354	1.6306	4.0481	-5.4498	0.5502	2.2815	1.9122	5.5081	-5.4990	0.5010	2.3391	1.9488	5.7224				
$\beta_{8,3}$	-2.2058	0.7942	2.0321	1.7445	4.7603	-2.4723	0.5277	2.4426	2.0740	6.2450	-2.5257	0.4743	2.4974	2.1218	6.4621				
Intercepto	-0.2109	7.6610	6.0578	58.7356	Inf	-0.0004	7.7653	6.1221	60.2993	Inf	0.0373	7.7751	6.1237	60.4543	Inf				
β_1	0.9321	-0.0679	0.6257	0.4986	0.3961	0.9153	-0.0847	0.6514	0.5271	0.4314	0.9148	-0.0852	0.6567	0.5315	0.4386				
β_2	4.7351	-0.2649	0.5992	0.5434	0.4292	4.8734	-0.1266	0.6268	0.5294	0.4089	4.9000	-0.1000	0.6273	0.5250	0.4035				
β_3	-1.8897	0.1103	0.6129	0.4947	0.3878	-1.9031	0.0969	0.6559	0.5251	0.4395	-1.9069	0.0931	0.6637	0.5306	0.4492				
β_4	1.9081	-0.0919	0.6204	0.4875	0.3933	1.9212	-0.0788	0.6546	0.5158	0.4347	1.9262	-0.0738	0.6593	0.5187	0.2593				
β_5	-3.7608	0.2392	0.6724	0.5094	0.1432	-3.8529	0.1441	0.7030	0.5767	0.5149	-3.8749	0.1251	0.7050	0.5750	0.5127				
β_6	4.7667	-0.2333	0.6081	0.4242	0.1027	4.9067	-0.0933	0.6303	0.5043	0.4060	4.9339	-0.0661	0.6317	0.5021	0.4034				
$\beta_{7,2}$	5.1764	-0.2236	1.2922	1.1909	1.9102	5.2548	-0.1452	1.3506	1.0649	1.8452	5.2737	-0.1263	1.3606	1.0719	1.8671				
$\beta_{8,2}$	-5.2014	0.7986	1.8585	1.6264	4.0916	-5.4689	0.5111	2.2720	1.9036	5.4234	-5.5431	0.4569	2.3206	1.9281	5.5940				
$\beta_{8,3}$	-2.2570	0.7490	2.0781	1.7625	4.8706	-2.5387	0.4613	2.4944	2.0942	6.4348	-2.5941	0.4059	2.5359	2.1248	6.5956				

Tabela F.69: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.2, 2.1)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por *r1* e *r2*. *f* representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

Coeficiente	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$					
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	<i>glmnet f</i>											
$\beta_0 = 0$	0.8321	0.8321	1.6648	1.5131	3.4639	Inf	0.2089	0.2089	0.6451	0.5303	0.4598	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0872	-0.0128	0.4132	0.3004	0.1709	3.0036	0.0872	-0.0128	0.1762	0.1389	0.0312	1.3887
$\beta_2 = 0.85$	0.7459	-0.1041	0.4720	0.3834	0.2336	0.4510	0.8398	-0.0102	0.1786	0.1419	0.0320	0.1670
$\beta_3 = 2.5$	2.3625	-0.1375	0.4481	0.3524	0.2197	0.1410	2.4725	-0.0275	0.1837	0.1466	0.0345	0.0586
$\beta_4 = 2$	1.9144	-0.0856	0.4415	0.3527	0.2023	0.1763	2.0001	0.0001	0.1951	0.1501	0.0381	0.0750
$\beta_5 = 0.1$	0.0965	-0.0035	0.3604	0.2669	0.1299	2.6693	0.1062	0.0062	0.1673	0.1328	0.0280	1.3279
$\beta_6 = 1.5$	1.4083	-0.0917	0.4499	0.3649	0.2108	0.2433	1.4755	-0.0245	0.1925	0.1532	0.0377	0.1022
$\beta_{7,2} = 6$	5.7724	-0.2276	0.8807	0.7147	0.8275	0.1191	5.9628	-0.0372	0.3720	0.2941	0.1398	0.0490
$\beta_{8,2} = 4.2$	3.4360	-0.7640	1.6833	1.5096	3.4172	0.3594	4.0168	-0.1832	0.6486	0.5203	0.4543	0.1239
$\beta_{8,3} = 2.1$	1.3496	-0.7504	1.7296	1.6156	3.5545	0.7693	1.9013	-0.1987	0.6985	0.5688	0.5274	0.2709
<i>glmnet</i>												
$\beta_0 = 0$	0.8164	0.8164	1.6469	1.4826	3.3788	Inf	0.2369	0.2369	0.6463	0.5356	0.4738	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0830	-0.0170	0.4111	0.3029	0.1693	3.0292	0.0864	-0.0136	0.1732	0.1360	0.0302	1.3605
$\beta_2 = 0.85$	0.7484	-0.1016	0.4708	0.3810	0.2320	0.4483	0.8372	-0.0128	0.1777	0.1415	0.0317	0.1665
$\beta_3 = 2.5$	2.3662	-0.1338	0.4448	0.3517	0.2157	0.1407	2.4698	-0.0302	0.1828	0.1457	0.0343	0.0583
$\beta_4 = 2$	1.9170	-0.0830	0.4450	0.3526	0.2049	0.1763	1.9975	-0.0025	0.1968	0.1514	0.0387	0.0757
$\beta_5 = 0.1$	0.0956	-0.0044	0.3621	0.2665	0.1311	2.6647	0.1035	0.0035	0.1656	0.1308	0.0274	1.3082
$\beta_6 = 1.5$	1.4112	-0.0888	0.4463	0.3612	0.2071	0.2408	1.4730	-0.0270	0.1942	0.1558	0.0385	0.1039
$\beta_{7,2} = 6$	5.7775	-0.2225	0.8856	0.7137	0.8337	0.1190	5.9573	-0.0427	0.3727	0.2955	0.1407	0.0492
$\beta_{8,2} = 4.2$	3.4496	-0.7504	1.6559	1.4768	3.3049	0.3516	3.9897	-0.2103	0.6520	0.5259	0.4693	0.1252
$\beta_{8,3} = 2.1$	1.3642	-0.7358	1.7062	1.5771	3.4524	0.7510	1.8726	-0.2274	0.6975	0.5775	0.5382	0.2750
<i>larFORTRAN r1 f</i>												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.0179	-0.0821	0.4796	0.3630	0.2367	3.6299	0.0761	-0.0239	0.1796	0.1351	0.0328	1.3506
$\beta_2 = 0.85$	0.8024	-0.0476	0.4471	0.3426	0.2021	0.4030	0.8430	-0.0070	0.1682	0.1306	0.0283	0.1537
$\beta_3 = 2.5$	2.4357	-0.0643	0.4207	0.3252	0.1811	0.1301	2.4866	-0.0134	0.1773	0.1372	0.0316	0.0549
$\beta_4 = 2$	1.9542	-0.0458	0.4294	0.3278	0.1865	0.1639	2.0016	0.0016	0.1720	0.1298	0.0296	0.0649
$\beta_5 = 0.1$	0.0303	-0.0697	0.4159	0.3283	0.1779	3.2833	0.0640	-0.0360	0.2188	0.1510	0.0492	1.5097
$\beta_6 = 1.5$	1.4556	-0.0444	0.4061	0.3204	0.1669	0.2136	1.4954	-0.0046	0.1598	0.1282	0.0255	0.0855
$\beta_{7,2} = 6$	6.0143	0.0143	1.0537	0.8076	1.1104	0.1346	6.0331	0.0331	0.5212	0.3808	0.2727	0.0635
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.1415	-0.0585	0.9606	0.7442	0.9262	0.1772	4.1543	-0.0457	0.4554	0.3314	0.2094	0.0789
$\beta_{8,3} = 2.1$	1.8194	-0.2806	1.2279	0.9642	1.5865	0.4592	1.9890	-0.1110	0.6614	0.4734	0.4497	0.2254
<i>larFORTRAN r1</i>												
$\beta_0 = 0$	1.6232	1.6232	2.0675	2.1227	6.9092	Inf	0.9644	0.9644	1.3380	1.2629	2.7202	Inf
$\beta_1 = 0.1$	-0.0048	-0.1048	0.4712	0.3557	0.2330	3.5574	0.0466	-0.0534	0.2031	0.1488	0.0441	1.4876
$\beta_2 = 0.85$	0.7734	-0.0766	0.4518	0.3532	0.2100	0.4156	0.8379	-0.0121	0.1885	0.1437	0.0357	0.1690
$\beta_3 = 2.5$	2.4351	-0.0649	0.4156	0.3297	0.1769	0.1319	2.4871	-0.0129	0.1751	0.1356	0.0308	0.0542
$\beta_4 = 2$	1.9784	-0.0216	0.4125	0.3187	0.1706	0.1593	2.0023	0.0023	0.1819	0.1371	0.0331	0.0686
$\beta_5 = 0.1$	0.0099	-0.0901	0.4575	0.3439	0.2174	3.4392	0.0723	-0.0277	0.1852	0.1423	0.0351	1.4235
$\beta_6 = 1.5$	1.4608	-0.0392	0.4056	0.3223	0.1661	0.2149	1.4848	-0.0152	0.1814	0.1388	0.0332	0.0925
$\beta_{7,2} = 6$	5.5586	-0.4414	1.0496	0.9036	1.2965	0.1506	5.8203	-0.1797	0.4802	0.3653	0.2629	0.0609
$\beta_{8,2} = 4.2$	2.7323	-1.4677	2.0829	2.0608	6.4927	0.4907	3.2814	-0.9186	1.3574	1.2699	2.6864	0.3023
$\beta_{8,3} = 2.1$	0.5013	-1.5987	2.1032	2.1353	6.9791	1.0168	1.1541	-0.9459	1.4038	1.3183	2.8655	0.6278
<i>larFORTRAN r2 f</i>												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.1046	0.0046	0.4688	0.3607	0.2198	3.6067	0.0931	-0.0069	0.1828	0.1426	0.0335	1.4264
$\beta_2 = 0.85$	0.8452	-0.0048	0.4711	0.3633	0.2220	0.4274	0.8559	0.0059	0.1764	0.1403	0.0311	0.1651
$\beta_3 = 2.5$	2.4738	-0.0262	0.4339	0.3284	0.1890	0.1314	2.4895	-0.0105	0.1815	0.1435	0.0330	0.0574
$\beta_4 = 2$	2.0293	0.0293	0.4306	0.3429	0.1862	0.1714	2.0166	0.0166	0.1952	0.1515	0.0384	0.0757
$\beta_5 = 0.1$	0.1182	0.0182	0.4195	0.3315	0.1763	3.3150	0.1112	0.0112	0.1749	0.1387	0.0307	1.3867
$\beta_6 = 1.5$	1.5215	0.0215	0.4360	0.3450	0.1905	0.2300	1.4920	-0.0080	0.1939	0.1540	0.0377	1.0127
$\beta_{7,2} = 6$	6.0109	0.0109	0.8238	0.6580	0.6788	0.1097	6.0053	0.0053	0.3457	0.2716	0.1196	0.0453
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.2139	0.0139	0.7903	0.6189	0.6248	0.1474	4.2140	0.0140	0.2996	0.2412	0.0899	0.0574
$\beta_{8,3} = 2.1$	2.0652	-0.0348	0.9440	0.7461	0.8923	0.3553	2.1058	0.0058	0.3984	0.3227	0.1588	0.1537
<i>larFORTRAN r2</i>												
$\beta_0 = 0$	0.1394	0.1394	1.5472	1.1621	2.4133	Inf	0.0961	0.0961	0.6429	0.5113	0.4225	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.1027	0.0027	0.4737	0.3640	0.2244	3.6405	0.0942	-0.0058	0.1833	0.1437	0.0336	1.4374
$\beta_2 = 0.85$	0.8481	-0.0019	0.4716	0.3642	0.2224	0.4285	0.8529	0.0029	0.1779	0.1411	0.0317	0.1660
$\beta_3 = 2.5$	2.4721	-0.0279	0.4330	0.3269	0.1883	0.1308	2.4892	-0.0108	0.1810	0.1429	0.0329	0.0571
$\beta_4 = 2$	2.0263	0.0263	0.4323	0.3416	0.1876	0.1708	2.0171	0.0171	0.1955	0.1516	0.0385	0.0758
$\beta_5 = 0.1$	0.1102	0.0102	0.4368	0.3371	0.1909	3.3708	0.1088	0.0088	0.1764	0.1395	0.0312	1.3948
$\beta_6 = 1.5$	1.5173	0.0173	0.4347	0.3433	0.1892	0.2288	1.4927	-0.0073	0.1932	0.1534	0.0374	1.0122
$\beta_{7,2} = 6$	5.9781	-0.0219	0.8697	0.6949	0.7568	0.1158	5.9813	-0.0187	0.3805	0.3010	0.1451	0.0502
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.0886	-0.1114	1.5672	1.1762	2.4685	0.2801	4.1292	-0.0708	0.6494	0.5049	0.4267	0.1202
$\beta_{8,3} = 2.1$	1.9395	-0.1605	1.7495	1.3660	3.0864	0.6505	2.0255	-0.0745	0.6810	0.5408	0.4693	0.2575

Tabela F.70: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

Coeficiente	$n_1 = 500$					$n_1 = 3000$						
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	<i>glmnet f</i>											
$\beta_0 = 0$	-0.1798	-0.1798	0.9804	0.7790	0.9935	Inf	-0.0374	-0.0374	0.4512	0.3627	0.2050	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0913	-0.0087	0.2892	0.2166	0.0837	2.1657	0.0914	-0.0086	0.1247	0.0991	0.0156	0.9905
$\beta_2 = -0.85$	-0.7883	0.0617	0.3332	0.2632	0.1148	0.3096	-0.8359	0.0141	0.1224	0.0974	0.0152	0.1146
$\beta_3 = -2.5$	-2.4486	0.0514	0.3105	0.2421	0.0990	0.0968	-2.4976	0.0024	0.1270	0.1003	0.0161	0.0401
$\beta_4 = 2$	1.9510	-0.0490	0.3050	0.2427	0.0954	0.1213	2.0016	0.0016	0.1372	0.1064	0.0188	0.0532
$\beta_5 = 5$	4.9438	-0.0562	0.3020	0.2390	0.0944	0.0478	4.9980	-0.0020	0.1238	0.0976	0.0153	0.0195
$\beta_6 = -0.5$	-0.4296	0.0704	0.2937	0.2402	0.0912	0.4804	-0.4955	0.0045	0.1357	0.1077	0.0184	0.2154
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.6664	-0.1336	0.6163	0.5034	0.3976	0.2797	1.7773	-0.0227	0.2621	0.2079	0.0692	0.1155
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.4814	0.3186	1.0471	0.8832	1.1979	0.4907	-1.7279	0.0721	0.4730	0.3779	0.2289	0.2100
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.6506	0.2494	1.1042	0.9556	1.2816	1.0618	-0.8348	0.0652	0.5035	0.3997	0.2578	0.4441
	<i>glmnet</i>											
$\beta_0 = 0$	-0.2255	-0.2255	0.9381	0.7806	0.9308	Inf	-0.0869	-0.0869	0.4310	0.3527	0.1933	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0879	-0.0121	0.2841	0.2120	0.0808	2.1205	0.0873	-0.0127	0.1203	0.0957	0.0146	0.9567
$\beta_2 = -0.85$	-0.7844	0.0656	0.3309	0.2612	0.1138	0.3073	-0.8302	0.0198	0.1225	0.0983	0.0154	0.1156
$\beta_3 = -2.5$	-2.4432	0.0568	0.3098	0.2429	0.0992	0.0972	-2.4919	0.0081	0.1261	0.0997	0.0160	0.0399
$\beta_4 = 2$	1.9460	-0.0540	0.3106	0.2453	0.0994	0.1226	1.9959	-0.0041	0.1369	0.1060	0.0188	0.0530
$\beta_5 = 5$	4.9394	-0.0606	0.3011	0.2392	0.0943	0.0478	4.9923	-0.0077	0.1235	0.0973	0.0153	0.0195
$\beta_6 = -0.5$	-0.4253	0.0747	0.2928	0.2407	0.0913	0.4814	-0.4899	0.0101	0.1357	0.1082	0.0185	0.2164
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.6568	-0.1432	0.6157	0.5032	0.3996	0.2796	1.7658	-0.0342	0.2604	0.2075	0.0690	0.1153
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.4252	0.3748	1.0012	0.8801	1.1429	0.4889	-1.6666	0.1334	0.4485	0.3710	0.2190	0.2061
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.5908	0.3092	1.0546	0.9519	1.2077	1.0577	-0.7692	0.1308	0.4737	0.3909	0.2415	0.4343
	<i>larFORTRAN r1 f</i>											
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	Inf	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.1521	0.0521	0.3007	0.2303	0.0931	2.3027	0.1261	0.0261	0.1270	0.0975	0.0168	0.9754
$\beta_2 = -0.85$	-0.7796	0.0704	0.3069	0.2456	0.0991	0.2889	-0.8167	0.0333	0.1470	0.1120	0.0227	0.1318
$\beta_3 = -2.5$	-2.4270	0.0730	0.3027	0.2408	0.0970	0.0963	-2.4546	0.0454	0.1442	0.1099	0.0228	0.0440
$\beta_4 = 2$	2.0477	0.0477	0.2813	0.2189	0.0814	0.1095	2.0276	0.0276	0.1234	0.0969	0.0160	0.0485
$\beta_5 = 5$	5.0376	0.0376	0.2832	0.2210	0.0816	0.0442	5.0246	0.0246	0.1158	0.0892	0.0140	0.0178
$\beta_6 = -0.5$	-0.4286	0.0714	0.2845	0.2316	0.0860	0.4632	-0.4611	0.0389	0.1355	0.1091	0.0199	0.2182
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.4705	-0.3295	0.7143	0.6094	0.6188	0.3385	1.6636	-0.1364	0.3546	0.2701	0.1443	0.1500
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.4381	0.3619	0.6458	0.5745	0.5481	0.3192	-1.6518	0.1482	0.3179	0.2445	0.1230	0.1359
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.4101	0.4899	0.8385	0.7615	0.9431	0.8461	-0.6777	0.2223	0.4357	0.3434	0.2392	0.3815
	<i>larFORTRAN r1</i>											
$\beta_0 = 0$	-0.8269	-0.8269	1.1341	1.1503	1.9699	Inf	-0.6066	-0.6066	0.8034	0.8178	1.0133	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.1504	0.0504	0.2918	0.2316	0.0877	2.3160	0.1155	0.0155	0.1185	0.0932	0.0143	0.9316
$\beta_2 = -0.85$	-0.7749	0.0751	0.2837	0.2268	0.0861	0.2668	-0.8164	0.0336	0.1352	0.1053	0.0194	0.1239
$\beta_3 = -2.5$	-2.4462	0.0538	0.2657	0.2150	0.0735	0.0860	-2.4684	0.0316	0.1260	0.0984	0.0169	0.0393
$\beta_4 = 2$	2.0634	0.0634	0.2649	0.2237	0.0742	0.1118	2.0250	0.0250	0.1279	0.1004	0.0170	0.0502
$\beta_5 = 5$	5.0263	0.0263	0.2830	0.2166	0.0808	0.0433	5.0116	0.0116	0.1145	0.0886	0.0132	0.0177
$\beta_6 = -0.5$	-0.4368	0.0632	0.2796	0.2297	0.0822	0.4594	-0.4676	0.0324	0.1326	0.1052	0.0186	0.2105
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7767	-0.0233	0.6735	0.5334	0.4541	0.2963	1.7934	-0.0066	0.3461	0.2543	0.1198	0.1413
$\beta_{8,2} = -1.8$	-0.8505	0.9495	1.1273	1.2131	2.1723	0.6740	-1.1258	0.6742	0.8043	0.8463	1.1014	0.4702
$\beta_{8,3} = -0.9$	0.1297	1.0297	1.1927	1.2958	2.4827	1.4398	-0.1565	0.7435	0.8724	0.9298	1.3138	1.0331
	<i>larFORTRAN r2 f</i>											
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	Inf	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.1087	0.0087	0.3264	0.2522	0.1066	2.5218	0.0970	-0.0030	0.1281	0.1000	0.0164	0.9996
$\beta_2 = -0.85$	-0.8482	0.0018	0.3281	0.2530	0.1077	0.2977	-0.8434	0.0066	0.1240	0.0986	0.0154	0.1160
$\beta_3 = -2.5$	-2.5123	-0.0123	0.3039	0.2306	0.0925	0.0922	-2.5048	-0.0048	0.1275	0.1010	0.0163	0.0404
$\beta_4 = 2$	2.0242	0.0242	0.3010	0.2405	0.0912	0.1203	2.0139	0.0139	0.1373	0.1059	0.0191	0.0529
$\beta_5 = 5$	5.0159	0.0159	0.2938	0.2323	0.0866	0.0465	5.0087	0.0087	0.1224	0.0969	0.0151	0.0194
$\beta_6 = -0.5$	-0.4791	0.0209	0.3024	0.2385	0.0919	0.4770	-0.5036	-0.0036	0.1355	0.1079	0.0184	0.2158
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7969	-0.0031	0.5799	0.4626	0.3362	0.2570	1.7938	-0.0062	0.2469	0.1940	0.0610	0.1078
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.7755	0.0245	0.5583	0.4382	0.3124	0.2434	-1.7796	0.0204	0.2178	0.1736	0.0479	0.0964
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.9006	-0.0006	0.6651	0.5247	0.4424	0.5830	-0.8777	0.0223	0.2936	0.2351	0.0867	0.2612
	<i>larFORTRAN r2</i>											
$\beta_0 = 0$	-0.1038	-0.1038	1.1266	0.8482	1.2800	Inf	-0.0720	-0.0720	0.5467	0.4240	0.3041	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.1081	0.0081	0.3254	0.2507	0.1060	2.5073	0.0980	-0.0020	0.1282	0.0999	0.0164	0.9987
$\beta_2 = -0.85$	-0.8414	0.0086	0.3313	0.2569	0.1098	0.3023	-0.8420	0.0080	0.1291	0.1018	0.0167	0.1198
$\beta_3 = -2.5$	-2.5061	-0.0061	0.3012	0.2291	0.0908	0.0916	-2.4975	0.0025	0.1331	0.1057	0.0177	0.0423
$\beta_4 = 2$	2.0263	0.0263	0.3021	0.2412	0.0920	0.1206	2.0152	0.0152	0.1414	0.1096	0.0202	0.0548
$\beta_5 = 5$	5.0184	0.0184	0.2949	0.2330	0.0873	0.0466	5.0081	0.0081	0.1243	0.0984	0.0155	0.0197
$\beta_6 = -0.5$	-0.4755	0.0245	0.3043	0.2400	0.0932	0.4800	-0.4995	0.0005	0.1395	0.1112	0.0195	0.2224
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7982	-0.0018	0.6266	0.4931	0.3927	0.2739	1.7981	-0.0019	0.2759	0.2158	0.0761	0.1199
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.6618	0.1382	1.1223	0.8436	1.2788	0.4687	-1.6984	0.1016	0.5666	0.4314	0.3314	0.2396
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.7806	0.1194	1.2325	0.9561	1.5333	1.0623	-0.8050	0.0950	0.5996	0.4629	0.3685	0.5144

Tabela F.71: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

Coeficiente	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$					
	<i>glmnet</i>			<i>larFORTRAN</i>			<i>glmnet</i>			<i>larFORTRAN</i>		
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	<i>glmnet f</i>											
$\beta_0 = 0$	0.2522	0.2522	1.1310	0.9139	1.3427	Inf	0.0882	0.0882	0.4883	0.3929	0.2462	Inf
$\beta_1 = -0.1$	-0.0898	0.0102	0.3216	0.2427	0.1036	2.4274	-0.1033	-0.0033	0.1381	0.1087	0.0191	1.0868
$\beta_2 = 0.85$	0.7855	-0.0645	0.3648	0.2875	0.1372	0.3383	0.8457	-0.0043	0.1363	0.1078	0.0186	0.1268
$\beta_3 = 2.5$	2.4147	-0.0853	0.3403	0.2656	0.1231	0.1063	2.4827	-0.0173	0.1407	0.1119	0.0201	0.0448
$\beta_4 = -2$	-1.9143	0.0857	0.3386	0.2760	0.1220	0.1380	-1.9782	0.0218	0.1510	0.1180	0.0233	0.0590
$\beta_5 = -5$	-4.9197	0.0803	0.3334	0.2710	0.1176	0.0542	-4.9824	0.0176	0.1362	0.1090	0.0189	0.0218
$\beta_6 = -1.5$	-1.4192	0.0808	0.3444	0.2769	0.1251	0.1846	-1.4971	0.0029	0.1498	0.1186	0.0224	0.0791
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.2708	0.1292	0.6830	0.5542	0.4832	0.2309	-2.3843	0.0157	0.2885	0.2287	0.0835	0.0953
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.0379	-0.3621	1.2371	1.0277	1.6615	0.4282	2.3078	-0.0922	0.5107	0.4007	0.2693	0.1670
$\beta_{8,3} = 1.2$	0.8506	-0.3494	1.2863	1.1393	1.7768	0.9494	1.1027	-0.0973	0.5422	0.4287	0.3035	0.3572
	<i>glmnet</i>											
$\beta_0 = 0$	0.2705	0.2705	1.1147	0.9057	1.3157	Inf	0.1489	0.1489	0.4840	0.4025	0.2565	Inf
$\beta_1 = -0.1$	-0.0897	0.0103	0.3176	0.2411	0.1010	2.4106	-0.0977	0.0023	0.1335	0.1052	0.0178	1.0518
$\beta_2 = 0.85$	0.7832	-0.0668	0.3617	0.2845	0.1353	0.3347	0.8383	-0.0117	0.1370	0.1085	0.0189	0.1277
$\beta_3 = 2.5$	2.4116	-0.0884	0.3416	0.2669	0.1245	0.1068	2.4753	-0.0247	0.1410	0.1130	0.0205	0.0452
$\beta_4 = -2$	-1.9109	0.0891	0.3412	0.2769	0.1243	0.1384	-1.9709	0.0291	0.1506	0.1186	0.0235	0.0593
$\beta_5 = -5$	-4.9172	0.0828	0.3372	0.2708	0.1205	0.0542	-4.9751	0.0249	0.1362	0.1099	0.0192	0.0220
$\beta_6 = -1.5$	-1.4159	0.0841	0.3425	0.2746	0.1244	0.1831	-1.4897	0.0103	0.1493	0.1192	0.0224	0.0795
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.2645	0.1355	0.6876	0.5549	0.4912	0.2312	-2.3691	0.0309	0.2881	0.2289	0.0840	0.0954
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.0134	-0.3866	1.2215	1.0261	1.6416	0.4276	2.2317	-0.1683	0.5038	0.4117	0.2822	0.1715
$\beta_{8,3} = 1.2$	0.8259	-0.3741	1.2542	1.1160	1.7129	0.9300	1.0220	-0.1780	0.5366	0.4460	0.3197	0.3716
	<i>larFORTRAN r1 f</i>											
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	Inf	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = -0.1$	0.0696	0.1696	0.4445	0.3518	0.2263	3.5178	-0.0205	0.0795	0.2256	0.1632	0.0572	1.6324
$\beta_2 = 0.85$	0.9787	0.1287	0.4153	0.3250	0.1890	0.3824	0.9210	0.0710	0.1967	0.1414	0.0437	0.1664
$\beta_3 = 2.5$	2.6653	0.1653	0.4364	0.3376	0.2177	0.1351	2.5580	0.0580	0.1978	0.1422	0.0425	0.0569
$\beta_4 = -2$	-1.8184	0.1816	0.4236	0.3280	0.2124	0.1640	-1.9085	0.0915	0.2326	0.1707	0.0625	0.0853
$\beta_5 = -5$	-4.8379	0.1621	0.3400	0.2906	0.1419	0.0581	-4.9196	0.0804	0.1878	0.1420	0.0417	0.0284
$\beta_6 = -1.5$	-1.3337	0.1663	0.4054	0.3350	0.1920	0.2234	-1.4242	0.0758	0.2197	0.1570	0.0540	0.1046
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.2563	0.1437	0.9820	0.8034	0.9850	0.3347	-2.3869	0.0131	0.6169	0.4434	0.3807	0.1847
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.5063	0.1063	0.8631	0.7020	0.7562	0.2925	2.4814	0.0814	0.5275	0.3936	0.2849	0.1640
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.5582	0.3582	1.1655	0.9888	1.4868	0.8240	1.3888	0.1888	0.7822	0.6031	0.6475	0.5025
	<i>larFORTRAN r1</i>											
$\beta_0 = 0$	-1.0238	-1.0238	1.9159	1.7719	4.7189	Inf	-0.5973	-0.5973	1.4236	1.1965	2.3835	Inf
$\beta_1 = -0.1$	0.0486	0.1486	0.3917	0.3240	0.1755	3.2402	-0.0242	0.0758	0.2066	0.1474	0.0484	1.4737
$\beta_2 = 0.85$	1.0005	0.1505	0.4098	0.3234	0.1906	0.3805	0.9237	0.0737	0.1945	0.1458	0.0432	0.1715
$\beta_3 = 2.5$	2.6578	0.1578	0.4164	0.3273	0.1983	0.1309	2.5761	0.0761	0.2058	0.1569	0.0481	0.0628
$\beta_4 = -2$	-1.7933	0.2067	0.4114	0.3425	0.2120	0.1713	-1.9065	0.0935	0.1986	0.1611	0.0482	0.0806
$\beta_5 = -5$	-4.8336	0.1664	0.3351	0.2833	0.1400	0.0567	-4.9255	0.0745	0.1559	0.1264	0.0298	0.0253
$\beta_6 = -1.5$	-1.3130	0.1870	0.3892	0.3203	0.1864	0.2135	-1.4034	0.0966	0.1968	0.1604	0.0480	0.1069
$\beta_{7,2} = -2.4$	-1.9744	0.4256	1.0414	0.8602	1.2657	0.3584	-2.1481	0.2519	0.6000	0.4488	0.4235	0.1870
$\beta_{8,2} = 2.4$	3.3134	0.9134	1.8932	1.7137	4.4184	0.7140	2.9157	0.5157	1.4792	1.2244	2.4541	0.5102
$\beta_{8,3} = 1.2$	2.3782	1.1782	2.0301	1.9457	5.5093	1.6214	1.8531	0.6531	1.6209	1.3449	3.0540	1.1208
	<i>larFORTRAN r2 f</i>											
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	Inf	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = -0.1$	-0.0874	0.0126	0.3659	0.2831	0.1341	2.8307	-0.0969	0.0031	0.1596	0.1172	0.0255	1.1722
$\beta_2 = 0.85$	0.8526	0.0026	0.3721	0.2856	0.1385	0.3360	0.8606	0.0106	0.1464	0.1131	0.0215	0.1331
$\beta_3 = 2.5$	2.4903	-0.0097	0.3425	0.2584	0.1174	0.1034	2.4958	-0.0042	0.1412	0.1116	0.0200	0.0447
$\beta_4 = -2$	-1.9656	0.0344	0.3426	0.2697	0.1186	0.1349	-1.9808	0.0192	0.1617	0.1214	0.0265	0.0607
$\beta_5 = -5$	-4.9713	0.0287	0.3446	0.2630	0.1196	0.0526	-4.9816	0.0184	0.1457	0.1119	0.0216	0.0224
$\beta_6 = -1.5$	-1.4718	0.0282	0.3365	0.2683	0.1141	0.1788	-1.4997	0.0003	0.1571	0.1229	0.0247	0.0819
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.3871	0.0129	0.6705	0.5284	0.4497	0.2201	-2.3761	0.0239	0.3624	0.2389	0.1319	0.0996
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.4224	0.0224	0.6344	0.4953	0.4030	0.2064	2.4086	0.0086	0.2714	0.2055	0.0737	0.0856
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.2037	0.0037	0.7749	0.5963	0.6005	0.4970	1.2070	0.0070	0.3811	0.2742	0.1453	0.2285
	<i>larFORTRAN r2</i>											
$\beta_0 = 0$	-0.2005	-0.2005	1.4678	1.1296	2.1947	Inf	-0.1537	-0.1537	0.8391	0.5899	0.7277	Inf
$\beta_1 = -0.1$	-0.0688	0.0312	0.3685	0.2832	0.1368	2.8316	-0.0843	0.0157	0.1494	0.1175	0.0226	1.1751
$\beta_2 = 0.85$	0.8734	0.0234	0.3708	0.2873	0.1381	0.3380	0.8745	0.0245	0.1544	0.1211	0.0244	0.1425
$\beta_3 = 2.5$	2.5027	0.0027	0.3414	0.2563	0.1165	0.1025	2.5057	0.0057	0.1527	0.1178	0.0233	0.0471
$\beta_4 = -2$	-1.9415	0.0585	0.3506	0.2812	0.1263	0.1406	-1.9699	0.0301	0.1633	0.1268	0.0276	0.0634
$\beta_5 = -5$	-4.9565	0.0435	0.3221	0.2586	0.1057	0.0517	-4.9738	0.0262	0.1394	0.1127	0.0201	0.0225
$\beta_6 = -1.5$	-1.4512	0.0488	0.3438	0.2738	0.1206	0.1825	-1.4853	0.0147	0.1755	0.1309	0.0310	0.0873
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.3163	0.0837	0.7587	0.5998	0.5826	0.2499	-2.3533	0.0467	0.3561	0.2587	0.1290	0.1078
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.5995	0.1995	1.5036	1.1525	2.3007	0.4802	2.5625	0.1625	0.8632	0.6140	0.7716	0.2558
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.4009	0.2009	1.6809	1.3202	2.8659	1.1001	1.3939	0.1939	0.8953	0.6421	0.8392	0.5351

Tabela F.72: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, para os casos *glmnet*, *larFORTRAN* com $r \in \{1, 2\}$, respectivamente, denotados por $r1$ e $r2$. f representa $\lambda \in \{0, 0.01, \dots, 1\}$ e $\beta_0 = 0$, respectivamente, para *glmnet* e *larFORTRAN*.

Coeficiente	$n_1 = 500$					$n_1 = 3000$						
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
<i>glmnet f</i>												
$\beta_0 = 0$	-0.2144	-0.2144	2.1310	1.6351	4.5873	Inf	0.0125	0.0125	0.8484	0.6719	0.7199	Inf
$\beta_1 = 1$	0.9621	-0.0379	0.6311	0.4935	0.3997	0.4935	0.9871	-0.0129	0.2518	0.1967	0.0636	0.1967
$\beta_2 = 5$	4.9323	-0.0677	0.6432	0.5038	0.4183	0.1008	5.0048	0.0048	0.2419	0.1922	0.0585	0.0384
$\beta_3 = -2$	-1.9713	0.0287	0.5961	0.4550	0.3561	0.2275	-2.0115	-0.0115	0.2492	0.1973	0.0623	0.0986
$\beta_4 = 2$	1.9773	-0.0227	0.5937	0.4723	0.3530	0.2362	2.0193	0.0193	0.2683	0.2082	0.0724	0.1041
$\beta_5 = -4$	-3.9072	0.0928	0.5951	0.4700	0.3627	0.1175	-3.9810	0.0190	0.2405	0.1910	0.0582	0.0478
$\beta_6 = 5$	4.9647	-0.0353	0.6044	0.4805	0.3665	0.0961	4.9855	-0.0145	0.2659	0.2118	0.0709	0.0424
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.2743	-0.1257	1.2085	0.9707	1.4762	0.1798	5.3880	-0.0120	0.5128	0.4063	0.2631	0.0752
$\beta_{8,2} = -6$	-5.6326	0.3674	2.2460	1.7414	5.1795	0.2902	-5.9770	0.0230	0.8681	0.6752	0.7541	0.1125
$\beta_{8,3} = -3$	-2.7299	0.2701	2.4424	1.9614	6.0383	0.6538	-2.9864	0.0136	0.9325	0.7308	0.8698	0.2436
<i>glmnet</i>												
$\beta_0 = 0$	-0.2667	-0.2667	2.1228	1.6282	4.5774	Inf	-0.1000	-0.1000	0.8432	0.6731	0.7209	Inf
$\beta_1 = 1$	0.9532	-0.0468	0.6348	0.4974	0.4052	0.4974	0.9738	-0.0262	0.2521	0.1976	0.0642	0.1976
$\beta_2 = 5$	4.9257	-0.0743	0.6397	0.5037	0.4147	0.1007	4.9916	-0.0084	0.2421	0.1923	0.0587	0.0385
$\beta_3 = -2$	-1.9653	0.0347	0.5994	0.4582	0.3605	0.2291	-1.9982	0.0018	0.2487	0.1963	0.0618	0.0981
$\beta_4 = 2$	1.9720	-0.0280	0.5923	0.4709	0.3516	0.2354	2.0061	0.0061	0.2682	0.2076	0.0720	0.1038
$\beta_5 = -4$	-3.9019	0.0981	0.5918	0.4689	0.3598	0.1172	-3.9677	0.0323	0.2398	0.1921	0.0585	0.0480
$\beta_6 = 5$	4.9589	-0.0411	0.6032	0.4784	0.3655	0.0957	4.9722	-0.0278	0.2652	0.2117	0.0711	0.0423
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.2626	-0.1374	1.2008	0.9592	1.4609	0.1776	5.3610	-0.0390	0.5113	0.4054	0.2629	0.0751
$\beta_{8,2} = -6$	-5.5683	0.4317	2.2048	1.7095	5.0473	0.2849	-5.8371	0.1629	0.8598	0.6891	0.7658	0.1148
$\beta_{8,3} = -3$	-2.6587	0.3413	2.4106	1.9375	5.9275	0.6458	-2.8374	0.1626	0.9212	0.7365	0.8751	0.2455
<i>larFORTRAN r1 f</i>												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 1$	1.0766	0.0766	0.6250	0.4820	0.3965	0.4820	1.0330	0.0330	0.3070	0.2292	0.0953	0.2292
$\beta_2 = 5$	5.0867	0.0867	0.5934	0.4790	0.3597	0.0958	5.0618	0.0618	0.2662	0.2094	0.0747	0.0419
$\beta_3 = -2$	-1.8795	0.1205	0.6049	0.4884	0.3805	0.2442	-1.9181	0.0819	0.3421	0.2511	0.1237	0.1256
$\beta_4 = 2$	2.1826	0.1826	0.6258	0.4840	0.4250	0.2420	2.0832	0.0832	0.2989	0.2346	0.0963	0.1173
$\beta_5 = -4$	-3.8171	0.1829	0.7389	0.4891	0.5795	0.1223	-3.9226	0.0774	0.2780	0.2115	0.0833	0.0529
$\beta_6 = 5$	5.1399	0.1399	0.5741	0.4617	0.3492	0.0923	5.0607	0.0607	0.2877	0.2248	0.0865	0.0450
$\beta_{7,2} = 5.4$	4.1515	-1.2485	1.4755	1.5381	3.7359	0.2848	4.9466	-0.4534	0.8164	0.6493	0.8721	0.1202
$\beta_{8,2} = -6$	-4.7551	1.2449	1.3676	1.5046	3.4202	0.2508	-5.5468	0.4532	0.7251	0.5877	0.7311	0.0979
$\beta_{8,3} = -3$	-1.4449	1.5551	1.6411	1.8432	5.1116	0.6144	-2.3575	0.6425	1.0653	0.8683	1.5477	0.2894
<i>larFORTRAN r1</i>												
$\beta_0 = 0$	-2.0864	-2.0864	1.8679	2.3781	7.8418	Inf	-1.5509	-1.5509	1.6720	1.9247	5.2010	Inf
$\beta_1 = 1$	1.0797	0.0797	0.6032	0.4783	0.3702	0.4783	1.0412	0.0412	0.2613	0.1976	0.0700	0.1976
$\beta_2 = 5$	5.0106	0.0106	0.5420	0.4253	0.2939	0.0851	5.0602	0.0602	0.2519	0.1977	0.0671	0.0395
$\beta_3 = -2$	-1.9676	0.0324	0.5475	0.4246	0.3008	0.2123	-1.9287	0.0713	0.2700	0.2161	0.0780	0.1080
$\beta_4 = 2$	2.0768	0.0768	0.5482	0.4226	0.3064	0.2113	2.0498	0.0498	0.2293	0.1863	0.0550	0.0932
$\beta_5 = -4$	-3.9081	0.0919	0.5804	0.4565	0.3453	0.1141	-3.9305	0.0695	0.2439	0.1963	0.0643	0.0491
$\beta_6 = 5$	5.0584	0.0584	0.5615	0.4429	0.3186	0.0886	5.0434	0.0434	0.2654	0.2078	0.0723	0.0416
$\beta_{7,2} = 5.4$	4.9051	-0.4949	1.4124	1.1551	2.2398	0.2139	5.2923	-0.1077	0.7205	0.5205	0.5307	0.0964
$\beta_{8,2} = -6$	-3.2985	2.7015	2.0099	2.8922	11.3377	0.4820	-4.2008	1.7992	1.6664	2.0521	6.0138	0.3420
$\beta_{8,3} = -3$	-0.2522	2.7478	2.0920	2.9635	11.9270	0.9878	-1.0778	1.9222	1.7689	2.1872	6.8236	0.7291
<i>larFORTRAN r2 f</i>												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 1$	1.0191	0.0191	0.6462	0.4968	0.4179	0.4968	0.9923	-0.0077	0.2558	0.2004	0.0655	0.2004
$\beta_2 = 5$	5.0034	0.0034	0.6457	0.4941	0.4170	0.0988	5.0133	0.0133	0.2441	0.1944	0.0598	0.0389
$\beta_3 = -2$	-2.0234	-0.0234	0.5984	0.4543	0.3587	0.2272	-2.0115	-0.0115	0.2532	0.1996	0.0642	0.0998
$\beta_4 = 2$	2.0533	0.0533	0.5923	0.4711	0.3537	0.2355	2.0254	0.0254	0.2681	0.2083	0.0725	0.1042
$\beta_5 = -4$	-3.9633	0.0367	0.5766	0.4567	0.3338	0.1142	-3.9790	0.0210	0.2387	0.1888	0.0574	0.0472
$\beta_6 = 5$	5.0405	0.0405	0.5978	0.4729	0.3590	0.0946	4.9929	-0.0071	0.2650	0.2112	0.0703	0.0422
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.3776	-0.0224	1.1529	0.9140	1.3298	0.1693	5.3726	-0.0274	0.5147	0.3921	0.2657	0.0726
$\beta_{8,2} = -6$	-5.9325	0.0675	1.0950	0.8550	1.2036	0.1425	-5.9459	0.0541	0.4277	0.3413	0.1859	0.0569
$\beta_{8,3} = -3$	-2.9710	0.0290	1.3137	1.0311	1.7266	0.3437	-2.9413	0.0587	0.6000	0.4713	0.3635	0.1571
<i>larFORTRAN r2</i>												
$\beta_0 = 0$	-0.4101	-0.4101	2.1982	1.6609	5.0004	Inf	-0.3268	-0.3268	1.0808	0.8550	1.2749	Inf
$\beta_1 = 1$	1.0175	0.0175	0.6402	0.4949	0.4102	0.4949	1.0032	0.0032	0.2570	0.1989	0.0661	0.1989
$\beta_2 = 5$	5.0068	0.0068	0.6499	0.4993	0.4224	0.0999	5.0224	0.0224	0.2473	0.1970	0.0616	0.0394
$\beta_3 = -2$	-2.0129	-0.0129	0.5973	0.4567	0.3569	0.2284	-1.9972	0.0028	0.2585	0.2016	0.0668	0.1008
$\beta_4 = 2$	2.0533	0.0533	0.5957	0.4726	0.3577	0.2363	2.0347	0.0347	0.2680	0.2092	0.0730	0.1046
$\beta_5 = -4$	-3.9408	0.0592	0.6501	0.4656	0.4261	0.1164	-3.9679	0.0321	0.2381	0.1931	0.0577	0.0483
$\beta_6 = 5$	5.0495	0.0495	0.5950	0.4733	0.3565	0.0947	4.9981	-0.0019	0.2726	0.2174	0.0743	0.0435
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.4040	0.0040	1.2264	0.9708	1.5040	0.1798	5.3898	-0.0102	0.5484	0.4313	0.3008	0.0799
$\beta_{8,2} = -6$	-5.5118	0.4882	2.2271	1.7233	5.1985	0.2872	-5.6061	0.3939	1.1283	0.8900	1.4281	0.1483
$\beta_{8,3} = -3$	-2.5421	0.4579	2.4367	1.9202	6.1473	0.6401	-2.5744	0.4256	1.1933	0.9352	1.6052	0.3117

Tabela F.73: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(1)} = (0.1, 0.85, 2.5, 2, 0.1, 1.5, 6, 4.20, 2.1)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$. f representa $\beta_0 = 0$.

Coeficiente	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$					
	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	$\alpha = 1.2 f$											
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.0535	-0.0465	0.2147	0.1360	0.0483	1.3603	0.0898	-0.0102	0.1036	0.0472	0.0108	0.4721
$\beta_2 = 0.85$	0.8087	-0.0413	0.2184	0.1288	0.0494	0.1515	0.8494	-0.0006	0.0607	0.0371	0.0037	0.0437
$\beta_3 = 2.5$	2.4639	-0.0361	0.1722	0.1181	0.0310	0.0473	2.4994	-0.0006	0.0510	0.0334	0.0026	0.0134
$\beta_4 = 2$	1.9546	-0.0454	0.2379	0.1326	0.0587	0.0663	1.9960	-0.0040	0.0464	0.0326	0.0022	0.0163
$\beta_5 = 0.1$	0.0660	-0.0340	0.2324	0.1418	0.0552	1.4184	0.0852	-0.0148	0.1182	0.0537	0.0142	0.5372
$\beta_6 = 1.5$	1.4641	-0.0359	0.2232	0.1312	0.0511	0.0875	1.4970	-0.0030	0.0957	0.0368	0.0092	0.0246
$\beta_{7,2} = 6$	5.9603	-0.0397	0.6246	0.4086	0.3917	0.0681	5.9970	-0.0030	0.1843	0.1052	0.0340	0.0175
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.2079	0.0079	0.5735	0.3570	0.3289	0.0850	4.1909	-0.0091	0.1890	0.1056	0.0358	0.0251
$\beta_{8,3} = 2.1$	2.0220	-0.0780	0.7902	0.5048	0.6304	0.2404	2.0832	-0.0168	0.2151	0.1123	0.0466	0.0535
$\alpha = 1.2$												
$\beta_0 = 0$	1.7180	1.7180	2.3477	2.1958	8.4632	Inf	0.6983	0.6983	1.9926	1.2779	4.4581	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0269	-0.0731	0.2257	0.1482	0.0563	1.4818	0.0603	-0.0397	0.1639	0.0793	0.0284	0.7927
$\beta_2 = 0.85$	0.7877	-0.0623	0.2127	0.1380	0.0491	0.1624	0.8245	-0.0255	0.0887	0.0512	0.0085	0.0602
$\beta_3 = 2.5$	2.4473	-0.0527	0.1946	0.1219	0.0407	0.0488	2.4866	-0.0134	0.0803	0.0489	0.0066	0.0196
$\beta_4 = 2$	1.9434	-0.0566	0.2248	0.1395	0.0538	0.0698	1.9858	-0.0142	0.0944	0.0553	0.0091	0.0277
$\beta_5 = 0.1$	0.0250	-0.0750	0.2845	0.1662	0.0866	1.6616	0.0691	-0.0309	0.1585	0.0828	0.0261	0.8281
$\beta_6 = 1.5$	1.4475	-0.0525	0.2340	0.1473	0.0575	0.0982	1.4672	-0.0328	0.1442	0.0756	0.0219	0.0504
$\beta_{7,2} = 6$	5.8254	-0.1746	0.5336	0.3705	0.3152	0.0618	5.9414	-0.0586	0.2462	0.1445	0.0640	0.0241
$\beta_{8,2} = 4.2$	2.5078	-1.6922	2.3713	2.2221	8.4866	0.5291	3.4911	-0.7089	2.0807	1.3545	4.8318	0.3225
$\beta_{8,3} = 2.1$	0.3063	-1.7937	2.4427	2.3231	9.1845	1.1063	1.3886	-0.7114	2.0581	1.3351	4.7420	0.6358
$\alpha = 1.8 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.0588	-0.0412	0.2477	0.1424	0.0630	1.4235	0.0846	-0.0154	0.1420	0.0542	0.0204	0.5416
$\beta_2 = 0.85$	0.8243	-0.0257	0.2054	0.1253	0.0428	0.1474	0.8481	-0.0019	0.0813	0.0438	0.0066	0.0515
$\beta_3 = 2.5$	2.4502	-0.0498	0.2233	0.1370	0.0524	0.0548	2.4975	-0.0025	0.0818	0.0420	0.0067	0.0168
$\beta_4 = 2$	1.9705	-0.0295	0.1947	0.1194	0.0388	0.0597	1.9942	-0.0058	0.0620	0.0366	0.0039	0.0183
$\beta_5 = 0.1$	0.0502	-0.0498	0.2634	0.1375	0.0719	1.3755	0.0922	-0.0078	0.0939	0.0477	0.0089	0.4775
$\beta_6 = 1.5$	1.4625	-0.0375	0.2208	0.1265	0.0502	0.0843	1.4987	-0.0013	0.0615	0.0367	0.0038	0.0245
$\beta_{7,2} = 6$	5.9733	-0.0267	0.5908	0.3952	0.3498	0.0659	5.9820	-0.0180	0.2190	0.1274	0.0483	0.0212
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.1701	-0.0299	0.5101	0.3307	0.2611	0.0787	4.1970	-0.0030	0.2261	0.1235	0.0511	0.0294
$\beta_{8,3} = 2.1$	2.0723	-0.0277	0.7775	0.5011	0.6053	0.2386	2.1086	0.0086	0.2533	0.1364	0.0642	0.0649
$\alpha = 1.8$												
$\beta_0 = 0$	1.8903	1.8903	2.3832	2.2837	9.2529	Inf	0.6548	0.6548	1.9259	1.2170	4.1377	Inf
$\beta_1 = 0.1$	0.0127	-0.0873	0.2513	0.1666	0.0708	1.6661	0.0772	-0.0228	0.1226	0.0719	0.0156	0.7186
$\beta_2 = 0.85$	0.7902	-0.0598	0.2415	0.1418	0.0619	0.1668	0.8203	-0.0297	0.1083	0.0556	0.0126	0.0655
$\beta_3 = 2.5$	2.4482	-0.0518	0.1793	0.1238	0.0348	0.0495	2.4794	-0.0206	0.0987	0.0509	0.0102	0.0204
$\beta_4 = 2$	1.9569	-0.0431	0.2416	0.1349	0.0602	0.0674	1.9817	-0.0183	0.1132	0.0612	0.0132	0.0306
$\beta_5 = 0.1$	0.0178	-0.0822	0.2775	0.1660	0.0837	1.6596	0.0642	-0.0358	0.1581	0.0802	0.0263	0.8020
$\beta_6 = 1.5$	1.4357	-0.0643	0.2480	0.1555	0.0657	0.1037	1.4711	-0.0289	0.1203	0.0688	0.0153	0.0458
$\beta_{7,2} = 6$	5.7775	-0.2225	0.6628	0.4443	0.4888	0.0741	5.9424	-0.0576	0.2651	0.1512	0.0736	0.0252
$\beta_{8,2} = 4.2$	2.3556	-1.8444	2.3912	2.2871	9.1198	0.5445	3.5354	-0.6646	1.9896	1.2888	4.4003	0.3068
$\beta_{8,3} = 2.1$	0.1502	-1.9498	2.4221	2.3877	9.6687	1.1370	1.4196	-0.6804	1.9857	1.2631	4.4060	0.6015
$\alpha = 2 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 0.1$	0.0461	-0.0539	0.2360	0.1404	0.0586	1.4043	0.0927	-0.0073	0.0984	0.0503	0.0097	0.5025
$\beta_2 = 0.85$	0.8135	-0.0365	0.2580	0.1441	0.0679	0.1695	0.8488	-0.0012	0.0866	0.0466	0.0075	0.0548
$\beta_3 = 2.5$	2.4637	-0.0363	0.2132	0.1298	0.0468	0.0519	2.5034	0.0034	0.0778	0.0439	0.0061	0.0176
$\beta_4 = 2$	1.9450	-0.0550	0.2469	0.1360	0.0640	0.0680	1.9916	-0.0084	0.0509	0.0362	0.0027	0.0181
$\beta_5 = 0.1$	0.0279	-0.0721	0.2935	0.1567	0.0914	1.5671	0.0846	-0.0154	0.1236	0.0547	0.0155	0.5474
$\beta_6 = 1.5$	1.4568	-0.0432	0.2654	0.1384	0.0723	0.0923	1.4992	-0.0008	0.0647	0.0386	0.0042	0.0257
$\beta_{7,2} = 6$	5.9616	-0.0384	0.6322	0.4152	0.4012	0.0692	6.0006	0.0006	0.2444	0.1350	0.0597	0.0225
$\beta_{8,2} = 4.2$	4.1719	-0.0281	0.5117	0.3433	0.2626	0.0817	4.1786	-0.0214	0.2376	0.1315	0.0569	0.0313
$\beta_{8,3} = 2.1$	2.0591	-0.0409	0.8301	0.5344	0.6907	0.2545	2.0899	-0.0101	0.2765	0.1409	0.0765	0.0671
$\alpha = 2$												
$\beta_0 = 0$	1.8017	1.8017	2.3581	2.2952	8.8068	Inf	0.7457	0.7457	1.7854	1.1571	3.7438	Inf
$\beta_1 = 0.1$	-0.0080	-0.1080	0.3554	0.1867	0.1380	1.8665	0.0729	-0.0271	0.1177	0.0678	0.0146	0.6785
$\beta_2 = 0.85$	0.7763	-0.0737	0.2336	0.1447	0.0600	0.1702	0.8300	-0.0200	0.0912	0.0507	0.0087	0.0597
$\beta_3 = 2.5$	2.4443	-0.0557	0.1841	0.1296	0.0370	0.0519	2.4842	-0.0158	0.0738	0.0466	0.0057	0.0187
$\beta_4 = 2$	1.9469	-0.0531	0.2404	0.1381	0.0606	0.0690	1.9866	-0.0134	0.1011	0.0531	0.0104	0.0265
$\beta_5 = 0.1$	0.0220	-0.0780	0.2738	0.1676	0.0810	1.6759	0.0635	-0.0365	0.1454	0.0791	0.0225	0.7913
$\beta_6 = 1.5$	1.4348	-0.0652	0.2506	0.1560	0.0671	0.1040	1.4795	-0.0205	0.1005	0.0634	0.0105	0.0423
$\beta_{7,2} = 6$	5.7451	-0.2549	0.7116	0.4492	0.5714	0.0749	5.9479	-0.0521	0.2273	0.1407	0.0544	0.0234
$\beta_{8,2} = 4.2$	2.4681	-1.7319	2.3915	2.3098	8.7189	0.5499	3.4371	-0.7629	1.8461	1.2195	3.9902	0.2903
$\beta_{8,3} = 2.1$	0.2729	-1.8271	2.4154	2.3731	9.1726	1.1300	1.3262	-0.7738	1.8519	1.2096	4.0283	0.5760

Tabela F.74: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(2)} = (0.1, -0.85, -2.5, 2, 5, -0.5, 1.8, -1.8, -0.9)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$. *f* representa $\beta_0 = 0$.

Coeficiente	β						β										
	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>		
	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$										
	$\alpha = 1.2$																
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
$\beta_1 = 0.1$	0.1348	0.0348	0.1584	0.1115	0.0263	1.1153	0.1103	0.0103	0.0555	0.0393	0.0032	0.3932	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.7962	0.0538	0.1626	0.1186	0.0293	0.1395	-0.8263	0.0237	0.0807	0.0497	0.0071	0.0584	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4472	0.0528	0.1749	0.1204	0.0334	0.0481	-2.4766	0.0234	0.0767	0.0465	0.0064	0.0186	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0395	0.0395	0.1574	0.1131	0.0263	0.0565	2.0187	0.0187	0.0638	0.0421	0.0044	0.0210	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0164	0.0164	0.1477	0.0992	0.0221	0.0198	5.0115	0.0115	0.0641	0.0396	0.0042	0.0079	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4651	0.0349	0.1672	0.1165	0.0292	0.2329	-0.4804	0.0196	0.0715	0.0453	0.0055	0.0905	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.5922	-0.2078	0.4457	0.3456	0.2418	0.1920	1.7331	-0.0669	0.2069	0.1145	0.0473	0.0636	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.5731	0.2269	0.3927	0.3114	0.2057	0.1730	-1.7257	0.0743	0.1885	0.1107	0.0410	0.0615	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.5812	0.3188	0.5017	0.4080	0.3533	0.4533	-0.7909	0.1091	0.2523	0.1531	0.0755	0.1702	-	-	-	-	
	$\alpha = 1.2$																
$\beta_0 = 0$	-0.7802	-0.7802	0.9301	0.9769	1.4738	Inf	-0.5082	0.7270	0.6147	0.7867	Inf	-	-	-	-		
$\beta_1 = 0.1$	0.1228	0.0228	0.1333	0.0948	0.0183	0.9475	0.1133	0.0133	0.0524	0.0390	0.0029	0.3902	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.8073	0.0427	0.1295	0.1021	0.0186	0.1201	-0.8345	0.0155	0.0583	0.0429	0.0036	0.0504	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4656	0.0344	0.1352	0.0964	0.0195	0.0386	-2.4834	0.0166	0.0657	0.0429	0.0046	0.0172	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0203	0.0203	0.1284	0.0970	0.0169	0.0485	2.0063	0.0063	0.0592	0.0434	0.0035	0.0217	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0038	0.0038	0.1369	0.0885	0.0188	0.0177	5.0070	0.0070	0.0520	0.0379	0.0028	0.0076	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4716	0.0284	0.1338	0.0993	0.0187	0.1986	-0.4885	0.0115	0.0608	0.0429	0.0038	0.0858	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7648	-0.0352	0.3336	0.2494	0.1125	0.1386	1.8206	0.0206	0.1751	0.1235	0.0311	0.0686	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-0.9307	0.8693	0.9216	1.0234	1.6049	0.5685	-1.2762	0.5238	0.7444	0.6224	0.8285	0.3458	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	0.0349	0.9349	0.9908	1.0998	1.8557	1.2220	-0.3309	0.5691	0.8020	0.6722	0.9671	0.7469	-	-	-	-	
	$\alpha = 1.8$																
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
$\beta_1 = 0.1$	0.1341	0.0341	0.1238	0.0979	0.0165	0.9794	0.1114	0.0114	0.0602	0.0407	0.0037	0.4074	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.8069	0.0431	0.1437	0.1085	0.0225	0.1276	-0.8388	0.0112	0.0679	0.0445	0.0047	0.0523	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4523	0.0477	0.1546	0.1110	0.0262	0.0444	-2.4756	0.0244	0.0752	0.0479	0.0063	0.0192	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0411	0.0411	0.1387	0.1056	0.0209	0.0528	2.0119	0.0119	0.0674	0.0415	0.0047	0.0208	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0237	0.0237	0.1222	0.0939	0.0155	0.0188	5.0099	0.0099	0.0568	0.0382	0.0033	0.0076	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4517	0.0483	0.1531	0.1130	0.0258	0.2260	-0.4902	0.0098	0.0728	0.0453	0.0054	0.0905	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.6233	-0.1767	0.3975	0.3046	0.1892	0.1692	1.7227	-0.0773	0.2193	0.1263	0.0541	0.0702	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.6095	0.1905	0.3583	0.2857	0.1647	0.1587	-1.7248	0.0752	0.2032	0.1170	0.0469	0.0650	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.6137	0.2863	0.4928	0.3987	0.3249	0.4430	-0.7817	0.1183	0.2623	0.1610	0.0828	0.1789	-	-	-	-	
	$\alpha = 1.8$																
$\beta_0 = 0$	-0.7646	-0.7646	0.9083	0.9658	1.4096	Inf	-0.4478	-0.4478	0.7180	0.5861	0.7161	Inf	-	-	-	-	
$\beta_1 = 0.1$	0.1252	0.0252	0.1047	0.0820	0.0116	0.8203	0.1097	0.0097	0.0560	0.0412	0.0032	0.4121	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.8122	0.0378	0.1289	0.1004	0.0180	0.1181	-0.8369	0.0131	0.0634	0.0451	0.0042	0.0531	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4601	0.0399	0.1336	0.1027	0.0195	0.0411	-2.4809	0.0191	0.0714	0.0459	0.0055	0.0183	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0345	0.0345	0.1293	0.0985	0.0179	0.0492	2.0106	0.0106	0.0658	0.0468	0.0044	0.0234	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0071	0.0071	0.1261	0.0866	0.0160	0.0173	5.0057	0.0057	0.0585	0.0393	0.0035	0.0079	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4668	0.0332	0.1181	0.0892	0.0150	0.1783	-0.4831	0.0169	0.0635	0.0459	0.0043	0.0919	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7662	-0.0338	0.3590	0.2692	0.1300	0.1496	1.8109	0.0109	0.1944	0.1283	0.0379	0.0713	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-0.9423	0.8577	0.8733	1.0000	1.4983	0.5556	-1.3199	0.4801	0.7290	0.5965	0.7619	0.3314	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	0.0365	0.9365	0.9411	1.0908	1.7626	1.2120	-0.3769	0.5231	0.7818	0.6480	0.8849	0.7200	-	-	-	-	
	$\alpha = 2$																
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
$\beta_1 = 0.1$	0.1318	0.0318	0.1496	0.1070	0.0234	1.0702	0.1080	0.0080	0.0627	0.0420	0.0040	0.4200	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.8156	0.0344	0.1517	0.1130	0.0242	0.1329	-0.8339	0.0161	0.0657	0.0452	0.0046	0.0531	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4445	0.0555	0.1497	0.1170	0.0255	0.0468	-2.4748	0.0252	0.0820	0.0502	0.0074	0.0201	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0379	0.0379	0.1519	0.1073	0.0245	0.0536	2.0148	0.0148	0.0663	0.0414	0.0046	0.0207	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0230	0.0230	0.1285	0.0983	0.0170	0.0197	5.0117	0.0117	0.0491	0.0372	0.0025	0.0074	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4551	0.0449	0.1376	0.1060	0.0210	0.2119	-0.4817	0.0183	0.0707	0.0444	0.0053	0.0888	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.5903	-0.2097	0.4277	0.3390	0.2269	0.1884	1.7400	-0.0600	0.1728	0.1093	0.0335	0.0607	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-1.5866	0.2134	0.3628	0.3008	0.1772	0.1671	-1.7384	0.0616	0.1635	0.1044	0.0305	0.0580	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.5735	0.3265	0.5133	0.4293	0.3702	0.4770	-0.7948	0.1052	0.2447	0.1526	0.0710	0.1696	-	-	-	-	
	$\alpha = 2$																
$\beta_0 = 0$	-0.7542	-0.7542	0.8618	0.9413	1.3114	Inf	-0.4371	-0.4371	0.6634	0.5590	0.6312	Inf	-	-	-	-	
$\beta_1 = 0.1$	0.1265	0.0265	0.1176	0.0895	0.0145	0.8954	0.1121	0.0121	0.0559	0.0407	0.0033	0.4070	-	-	-	-	
$\beta_2 = -0.85$	-0.8090	0.0410	0.1302	0.1025	0.0186	0.1206	-0.8325	0.0175	0.0617	0.0437	0.0041	0.0514	-	-	-	-	
$\beta_3 = -2.5$	-2.4595	0.0405	0.1338	0.1021	0.0195	0.0408	-2.4762	0.0238	0.0659	0.0466	0.0049	0.0186	-	-	-	-	
$\beta_4 = 2$	2.0322	0.0322	0.1372	0.1033	0.0199	0.0517	2.0130	0.0130	0.0568	0.0413	0.0034	0.0206	-	-	-	-	
$\beta_5 = 5$	5.0128	0.0128	0.1112	0.0855	0.0125	0.0171	5.0098	0.0098	0.0512	0.0389	0.0027	0.0078	-	-	-	-	
$\beta_6 = -0.5$	-0.4659	0.0341	0.1246	0.0929	0.0167	0.1857	-0.4893	0.0107	0.0593	0.0428	0.0036	0.0856	-	-	-	-	
$\beta_{7,2} = 1.8$	1.7829	-0.0171	0.3667	0.2670	0.1348	0.1483	1.8141	0.0141	0.1841	0.1257	0.0341	0.0698	-	-	-	-	
$\beta_{8,2} = -1.8$	-0.9519	0.8481	0.8580	0.9960	1.4554	0.5533	-1.3376	0.4624	0.6528	0.5592	0.6400	0.3106	-	-	-	-	
$\beta_{8,3} = -0.9$	-0.0066	0.8934	0.9197	1.0480	1.6440	1.1644	-0.3875	0.5125	0.7098	0.6141	0.7664	0.6823	-	-	-	-	

Tabela F.75: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(3)} = (-0.1, 0.85, 2.5, -2, -5, -1.5, -2.4, 2.4, 1.2)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$. f representa $\beta_0 = 0$.

Coeficiente	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	β	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$					
$\alpha = 1.2 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = -0.1$	0.0332	0.1332	0.2990	0.1989	0.1071	1.9887	-0.0537	0.0463	0.1501	0.0779	0.0247	0.7787
$\beta_2 = 0.85$	0.9656	0.1156	0.2785	0.1816	0.0909	0.2136	0.8873	0.0373	0.1310	0.0630	0.0185	0.0742
$\beta_3 = 2.5$	2.5842	0.0842	0.2513	0.1646	0.0702	0.0658	2.5287	0.0287	0.1302	0.0617	0.0178	0.0247
$\beta_4 = -2$	-1.8832	0.1168	0.2820	0.2011	0.0932	0.1005	-1.9578	0.0422	0.1307	0.0708	0.0189	0.0354
$\beta_5 = -5$	-4.8844	0.1156	0.3006	0.1615	0.1037	0.0323	-4.9615	0.0385	0.1020	0.0590	0.0119	0.0118
$\beta_6 = -1.5$	-1.4013	0.0987	0.2773	0.1894	0.0866	0.1263	-1.4592	0.0408	0.1452	0.0704	0.0228	0.0469
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.4504	-0.0504	0.6248	0.4644	0.3929	0.1935	-2.3777	0.0223	0.4118	0.2354	0.1700	0.0981
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.5566	0.1566	0.5497	0.4217	0.3267	0.1757	2.4212	0.0212	0.3136	0.1900	0.0988	0.0792
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.5892	0.3892	0.8681	0.7047	0.9051	0.5873	1.2531	0.0531	0.5267	0.3288	0.2802	0.2740
$\alpha = 1.2$												
$\beta_0 = 0$	-0.7790	-0.7790	1.8077	1.5179	3.8744	Inf	-0.5193	-0.5193	1.2827	0.9543	1.9152	Inf
$\beta_1 = -0.1$	0.0169	0.1169	0.2446	0.1771	0.0735	1.7710	-0.0532	0.0468	0.1222	0.0770	0.0171	0.7702
$\beta_2 = 0.85$	0.9682	0.1182	0.2736	0.1790	0.0888	0.2106	0.8874	0.0374	0.1150	0.0702	0.0146	0.0826
$\beta_3 = 2.5$	2.5967	0.0967	0.2608	0.1790	0.0774	0.0716	2.5299	0.0299	0.1075	0.0676	0.0124	0.0271
$\beta_4 = -2$	-1.8930	0.1070	0.2250	0.1663	0.0621	0.0832	-1.9480	0.0520	0.1160	0.0759	0.0162	0.0379
$\beta_5 = -5$	-4.8917	0.1083	0.2730	0.1517	0.0863	0.0303	-4.9507	0.0493	0.1603	0.0661	0.0281	0.0132
$\beta_6 = -1.5$	-1.3758	0.1242	0.2614	0.1877	0.0838	0.1251	-1.4410	0.0590	0.1487	0.0809	0.0256	0.0539
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.1779	0.2221	0.6718	0.4972	0.5007	0.2072	-2.2835	0.1165	0.3354	0.2133	0.1261	0.0889
$\beta_{8,2} = 2.4$	3.1195	0.7195	1.8000	1.5009	3.7577	0.6254	2.8823	0.4823	1.2885	0.9479	1.8929	0.3950
$\beta_{8,3} = 1.2$	2.1070	0.9070	1.8744	1.6121	4.3361	1.3434	1.8021	0.6021	1.4166	1.0696	2.3692	0.8914
$\alpha = 1.8 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = -0.1$	0.0139	0.1139	0.2556	0.1861	0.0783	1.8611	-0.0521	0.0479	0.1283	0.0787	0.0188	0.7867
$\beta_2 = 0.85$	0.9412	0.0912	0.2588	0.1654	0.0753	0.1946	0.8860	0.0360	0.1185	0.0651	0.0153	0.0765
$\beta_3 = 2.5$	2.5948	0.0948	0.2412	0.1706	0.0671	0.0683	2.5382	0.0382	0.0994	0.0614	0.0113	0.0245
$\beta_4 = -2$	-1.8972	0.1028	0.2497	0.1793	0.0729	0.0897	-1.9482	0.0518	0.1307	0.0748	0.0198	0.0374
$\beta_5 = -5$	-4.8831	0.1169	0.3059	0.1614	0.1072	0.0323	-4.9514	0.0486	0.1256	0.0680	0.0181	0.0136
$\beta_6 = -1.5$	-1.3907	0.1093	0.2781	0.1912	0.0893	0.1275	-1.4656	0.0344	0.1143	0.0682	0.0142	0.0454
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.3257	0.0743	0.7501	0.5266	0.5682	0.2194	-2.4218	-0.0218	0.3625	0.2389	0.1318	0.0996
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.4671	0.0671	0.6197	0.4529	0.3886	1.8887	2.4654	0.0654	0.3002	0.2029	0.0944	0.0846
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.4191	0.2191	0.8834	0.6761	0.8284	0.5634	1.3466	0.1466	0.5333	0.3705	0.3059	0.3088
$\alpha = 1.8$												
$\beta_0 = 0$	-0.7188	-0.7188	1.7084	1.4723	3.4352	Inf	-0.4747	-0.4747	1.2677	0.9467	1.8325	Inf
$\beta_1 = -0.1$	0.0089	0.1089	0.2492	0.1728	0.0739	1.7277	-0.0498	0.0502	0.1133	0.0770	0.0154	0.7701
$\beta_2 = 0.85$	0.9417	0.0917	0.2355	0.1563	0.0639	0.1839	0.8927	0.0427	0.1045	0.0705	0.0128	0.0829
$\beta_3 = 2.5$	2.5919	0.0919	0.2217	0.1565	0.0576	0.0626	2.5447	0.0447	0.1170	0.0679	0.0157	0.0272
$\beta_4 = -2$	-1.8808	0.1192	0.2855	0.1807	0.0957	0.0904	-1.9472	0.0528	0.0995	0.0728	0.0127	0.0364
$\beta_5 = -5$	-4.9101	0.0899	0.1722	0.1306	0.0378	0.0261	-4.9539	0.0461	0.0784	0.0606	0.0083	0.0121
$\beta_6 = -1.5$	-1.3947	0.1053	0.2310	0.1555	0.0645	0.1037	-1.4448	0.0552	0.1286	0.0776	0.0196	0.0518
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.1895	0.2105	0.5604	0.4292	0.3584	0.1788	-2.2949	0.1051	0.3148	0.2038	0.1101	0.0849
$\beta_{8,2} = 2.4$	3.0840	0.6840	1.7201	1.4808	3.4266	0.6170	2.8490	0.4490	1.2707	0.9581	1.8164	0.3992
$\beta_{8,3} = 1.2$	2.0212	0.8212	1.7805	1.5758	3.8444	1.3132	1.7423	0.5423	1.4130	1.0878	2.2906	0.9065
$\alpha = 2 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = -0.1$	0.0063	0.1063	0.2561	0.1880	0.0769	1.8797	-0.0496	0.0504	0.1538	0.0801	0.0262	0.8011
$\beta_2 = 0.85$	0.9412	0.0912	0.2502	0.1729	0.0709	0.2034	0.8847	0.0347	0.1260	0.0637	0.0171	0.0749
$\beta_3 = 2.5$	2.5911	0.0911	0.2341	0.1687	0.0631	0.0675	2.5326	0.0326	0.1056	0.0573	0.0122	0.0229
$\beta_4 = -2$	-1.8714	0.1286	0.3167	0.1968	0.1168	0.0984	-1.9512	0.0488	0.1302	0.0743	0.0193	0.0371
$\beta_5 = -5$	-4.8846	0.1154	0.3021	0.1580	0.1045	0.0316	-4.9585	0.0415	0.1322	0.0642	0.0192	0.0128
$\beta_6 = -1.5$	-1.3810	0.1190	0.2944	0.2011	0.1008	0.1341	-1.4595	0.0405	0.1538	0.0741	0.0253	0.0494
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.3916	0.0084	0.7079	0.5015	0.5012	0.2090	-2.4103	-0.0103	0.3321	0.2075	0.1104	0.0865
$\beta_{8,2} = 2.4$	2.5168	0.1168	0.5839	0.4388	0.3546	0.1828	2.4516	0.0516	0.2789	0.1753	0.0805	0.0730
$\beta_{8,3} = 1.2$	1.5073	0.3073	0.8977	0.6949	0.9003	0.5790	1.3095	0.1095	0.4983	0.3196	0.2603	0.2663
$\alpha = 2$												
$\beta_0 = 0$	-0.8728	-0.8728	1.7363	1.5136	3.7766	Inf	-0.4699	-0.4699	1.4091	1.0232	2.2063	Inf
$\beta_1 = -0.1$	-0.0125	0.0875	0.2069	0.1541	0.0505	1.5410	-0.0511	0.0489	0.1185	0.0867	0.0164	0.8674
$\beta_2 = 0.85$	0.9448	0.0948	0.2279	0.1621	0.0609	0.1907	0.9024	0.0524	0.1569	0.0832	0.0274	0.0979
$\beta_3 = 2.5$	2.5704	0.0704	0.1847	0.1420	0.0391	0.0568	2.5456	0.0456	0.1229	0.0761	0.0172	0.0304
$\beta_4 = -2$	-1.9023	0.0977	0.2276	0.1601	0.0614	0.0800	-1.9375	0.0625	0.1216	0.0851	0.0187	0.0426
$\beta_5 = -5$	-4.9036	0.0964	0.1941	0.1336	0.0470	0.0267	-4.9493	0.0507	0.0850	0.0652	0.0098	0.0130
$\beta_6 = -1.5$	-1.4088	0.0912	0.2115	0.1540	0.0531	0.1026	-1.4484	0.0516	0.1202	0.0807	0.0171	0.0538
$\beta_{7,2} = -2.4$	-2.1878	0.2122	0.5880	0.4282	0.3907	0.1784	-2.2567	0.1433	0.3722	0.2558	0.1590	0.1066
$\beta_{8,2} = 2.4$	3.2301	0.8301	1.7202	1.5057	3.6480	0.6274	2.8237	0.4237	1.4021	1.0248	2.1454	0.4270
$\beta_{8,3} = 1.2$	2.2038	1.0038	1.8426	1.6552	4.4028	1.3793	1.7230	0.5230	1.5132	1.1492	2.5634	0.9576

Tabela F.76: Coeficientes ajustados e os valores de *bias*, *sd*, *mae*, *mse* e *mape* para o modelo M4, $re = 500$, $\beta^{(4)} = (1, 5, -2, 2, -4, 5, 5.4, -6, -3)$, $\alpha^* = 1$, $SNR = 0$, $n_1 \in \{500, 3000\}$, $\alpha \in \{1.2, 1.8, 2\}$. *f* representa $\beta_0 = 0$.

Coeficiente	$n_1 = 500$						$n_1 = 3000$					
	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>	$\hat{\beta}$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	<i>mae</i>	<i>mse</i>	<i>mape</i>
$\alpha = 1.2 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 1$	1.0750	0.0750	0.3095	0.1986	0.1014	0.1986	1.0287	0.0287	0.1306	0.0747	0.0179	0.0747
$\beta_2 = 5$	5.0731	0.0731	0.2658	0.1886	0.0760	0.0377	5.0355	0.0355	0.1390	0.0730	0.0206	0.0146
$\beta_3 = -2$	-1.8972	0.1028	0.3601	0.2337	0.1402	0.1169	-1.9744	0.0256	0.1627	0.0847	0.0271	0.0424
$\beta_4 = 2$	2.0837	0.0837	0.2814	0.1937	0.0862	0.0968	2.0229	0.0229	0.1170	0.0698	0.0142	0.0349
$\beta_5 = -4$	-3.9030	0.0970	0.2258	0.1727	0.0604	0.0432	-3.9586	0.0414	0.1133	0.0696	0.0145	0.0174
$\beta_6 = 5$	5.0655	0.0655	0.2657	0.1848	0.0749	0.0370	5.0285	0.0285	0.1410	0.0719	0.0207	0.0144
$\beta_{7,2} = 5.4$	4.8618	-0.5382	0.8487	0.6440	1.0100	0.1193	5.1761	-0.2239	0.5501	0.2655	0.3528	0.0492
$\beta_{8,2} = -6$	-5.4656	0.5344	0.7556	0.5960	0.8564	0.0993	-5.7804	0.2196	0.4962	0.2488	0.2944	0.0415
$\beta_{8,3} = -3$	-2.2102	0.7898	1.1965	0.9410	2.0555	0.3137	-2.6775	0.3225	0.6954	0.3693	0.5876	0.1231
$\alpha = 1.2$												
$\beta_0 = 0$	-1.9785	-1.9785	2.1305	2.3574	8.4533	Inf	-1.2969	-1.2969	1.6201	1.4786	4.3066	Inf
$\beta_1 = 1$	1.0482	0.0482	0.2122	0.1447	0.0473	0.1447	1.0218	0.0218	0.1189	0.0653	0.0146	0.0653
$\beta_2 = 5$	5.0322	0.0322	0.1965	0.1382	0.0396	0.0276	5.0261	0.0261	0.1114	0.0690	0.0131	0.0138
$\beta_3 = -2$	-1.9415	0.0585	0.2269	0.1494	0.0549	0.0747	-1.9542	0.0458	0.1617	0.0933	0.0283	0.0467
$\beta_4 = 2$	2.0494	0.0494	0.2177	0.1343	0.0498	0.0671	2.0307	0.0307	0.1041	0.0659	0.0118	0.0329
$\beta_5 = -4$	-3.9422	0.0578	0.1999	0.1398	0.0433	0.0349	-3.9632	0.0368	0.1050	0.0667	0.0124	0.0167
$\beta_6 = 5$	5.0326	0.0326	0.2212	0.1456	0.0500	0.0291	5.0263	0.0263	0.1129	0.0679	0.0134	0.0136
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.2325	-0.1675	0.6197	0.3994	0.4121	0.0740	5.3942	-0.0058	0.3215	0.2079	0.1034	0.0385
$\beta_{8,2} = -6$	-3.8024	2.1976	2.1577	2.4846	9.4851	0.4141	-4.6247	1.3753	1.6329	1.4927	4.5578	0.2488
$\beta_{8,3} = -3$	-0.6713	2.3287	2.1646	2.6046	10.1088	0.8682	-1.5782	1.4218	1.6763	1.5662	4.8313	0.5221
$\alpha = 1.8 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 1$	1.0948	0.0948	0.2861	0.1996	0.0909	0.1996	1.0345	0.0345	0.1603	0.0756	0.0269	0.0756
$\beta_2 = 5$	5.0773	0.0773	0.2591	0.1847	0.0731	0.0369	5.0205	0.0205	0.1242	0.0657	0.0158	0.0131
$\beta_3 = -2$	-1.8909	0.1091	0.3079	0.2161	0.1067	0.1080	-1.9660	0.0340	0.1879	0.0846	0.0365	0.0423
$\beta_4 = 2$	2.0948	0.0948	0.3062	0.1980	0.1028	0.0990	2.0282	0.0282	0.1273	0.0675	0.0170	0.0338
$\beta_5 = -4$	-3.9035	0.0965	0.2842	0.1698	0.0901	0.0424	-3.9511	0.0489	0.1232	0.0738	0.0176	0.0185
$\beta_6 = 5$	5.0725	0.0725	0.2607	0.1841	0.0732	0.0368	5.0334	0.0334	0.1328	0.0743	0.0188	0.0149
$\beta_{7,2} = 5.4$	4.7888	-0.6112	0.9398	0.7053	1.2568	0.1306	5.2249	-0.1751	0.4552	0.2182	0.2379	0.0404
$\beta_{8,2} = -6$	-5.4072	0.5928	0.8575	0.6565	1.0867	0.1094	-5.8071	0.1929	0.4360	0.2248	0.2273	0.0375
$\beta_{8,3} = -3$	-2.1454	0.8546	1.1856	0.9696	2.1359	0.3232	-2.7059	0.2941	0.6590	0.3478	0.5208	0.1159
$\alpha = 1.8$												
$\beta_0 = 0$	-1.7891	-1.7891	1.9757	2.1367	7.1043	Inf	-1.2738	-1.2738	1.6432	1.4674	4.3227	Inf
$\beta_1 = 1$	1.0517	0.0517	0.2261	0.1452	0.0538	0.1452	1.0221	0.0221	0.1214	0.0688	0.0152	0.0688
$\beta_2 = 5$	5.0462	0.0462	0.1930	0.1354	0.0394	0.0271	5.0208	0.0208	0.1269	0.0732	0.0165	0.0146
$\beta_3 = -2$	-1.9254	0.0746	0.2662	0.1568	0.0764	0.0784	-1.9566	0.0434	0.1334	0.0874	0.0197	0.0437
$\beta_4 = 2$	2.0443	0.0443	0.2099	0.1373	0.0460	0.0687	2.0212	0.0212	0.0952	0.0625	0.0095	0.0313
$\beta_5 = -4$	-3.9411	0.0589	0.1940	0.1375	0.0411	0.0344	-3.9559	0.0441	0.1653	0.0732	0.0293	0.0183
$\beta_6 = 5$	5.0385	0.0385	0.2132	0.1511	0.0469	0.0302	5.0316	0.0316	0.1214	0.0784	0.0157	0.0157
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.2228	-0.1772	0.6521	0.4413	0.4566	0.0817	5.4061	0.0061	0.3274	0.2134	0.1072	0.0395
$\beta_{8,2} = -6$	-3.9626	2.0374	2.0113	2.2800	8.1965	0.3800	-4.6538	1.3462	1.6621	1.4817	4.5749	0.2470
$\beta_{8,3} = -3$	-0.8830	2.1170	2.0511	2.3631	8.6884	0.7877	-1.6026	1.3974	1.7246	1.5571	4.9268	0.5190
$\alpha = 2 f$												
$\beta_0 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\beta_1 = 1$	1.0863	0.0863	0.3204	0.2204	0.1101	0.2204	1.0301	0.0301	0.1146	0.0700	0.0140	0.0700
$\beta_2 = 5$	5.0742	0.0742	0.2433	0.1718	0.0647	0.0344	5.0231	0.0231	0.1260	0.0679	0.0164	0.0136
$\beta_3 = -2$	-1.9109	0.0891	0.3337	0.2270	0.1193	0.1135	-1.9599	0.0401	0.1241	0.0759	0.0170	0.0380
$\beta_4 = 2$	2.0809	0.0809	0.2713	0.1860	0.0802	0.0930	2.0230	0.0230	0.1028	0.0605	0.0111	0.0303
$\beta_5 = -4$	-3.9029	0.0971	0.2590	0.1771	0.0765	0.0443	-3.9542	0.0458	0.1905	0.0732	0.0384	0.0183
$\beta_6 = 5$	5.0600	0.0600	0.2640	0.1853	0.0733	0.0371	5.0331	0.0331	0.1259	0.0680	0.0169	0.0136
$\beta_{7,2} = 5.4$	4.7913	-0.6087	0.9509	0.6907	1.2747	0.1279	5.2661	-0.1339	0.3807	0.1842	0.1629	0.0341
$\beta_{8,2} = -6$	-5.4117	0.5883	0.8520	0.6586	1.0719	0.1098	-5.8456	0.1544	0.3500	0.1857	0.1464	0.0309
$\beta_{8,3} = -3$	-2.1446	0.8554	1.1825	0.9592	2.1300	0.3197	-2.7395	0.2605	0.5623	0.3148	0.3840	0.1049
$\alpha = 2$												
$\beta_0 = 0$	-1.9208	-1.9208	1.8522	2.1966	7.1202	Inf	-1.2871	-1.2871	1.6648	1.5181	4.4283	Inf
$\beta_1 = 1$	1.0338	0.0338	0.2044	0.1395	0.0429	0.1395	1.0267	0.0267	0.0953	0.0666	0.0098	0.0666
$\beta_2 = 5$	5.0407	0.0407	0.1935	0.1390	0.0391	0.0278	5.0342	0.0342	0.1323	0.0754	0.0187	0.0151
$\beta_3 = -2$	-1.9470	0.0530	0.2532	0.1621	0.0669	0.0810	-1.9644	0.0356	0.1373	0.0876	0.0201	0.0438
$\beta_4 = 2$	2.0444	0.0444	0.1655	0.1205	0.0294	0.0602	2.0214	0.0214	0.0808	0.0581	0.0070	0.0290
$\beta_5 = -4$	-3.9437	0.0563	0.1778	0.1282	0.0348	0.0320	-3.9623	0.0377	0.1044	0.0681	0.0123	0.0170
$\beta_6 = 5$	5.0325	0.0325	0.1988	0.1383	0.0406	0.0277	5.0274	0.0274	0.1077	0.0715	0.0123	0.0143
$\beta_{7,2} = 5.4$	5.2932	-0.1068	0.6103	0.3858	0.3839	0.0714	5.3979	-0.0021	0.2992	0.2040	0.0895	0.0378
$\beta_{8,2} = -6$	-3.8750	2.1250	1.8619	2.3191	7.9820	0.3865	-4.6267	1.3733	1.6557	1.5334	4.6274	0.2556
$\beta_{8,3} = -3$	-0.7707	2.2293	1.9343	2.4280	8.7110	0.8093	-1.5753	1.4247	1.7192	1.6136	4.9855	0.5379

APÊNDICE G

ARTIGO FIGUEIRA E LOPES (2013)

Autoras: Cleonis Viater Figueira e Sílvia Regina Costa Lopes

Título: Ocorrências de Ilhas CpG em Sequências de DNA

Revista: Sigmae

Ano: 2013

Disponível em: <http://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/216>

Ocorrências de Ilhas CpG em Sequências de DNA

Cleonis V. Figueira^{1†}, Sílvia Regina C. Lopes²

¹ Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná- PR (UTFPR-PR).

² Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - RS (UFRGS - RS).

Resumo: O presente trabalho apresenta uma comparação entre três cromossomos de diferentes organismos: cromossomo 12 do *Saccharomyces cerevisiae*, o cromossomo 22 do *Homo sapiens* e o cromossomo 3L da *Drosophila melanogaster*. O objetivo é analisar a incidência de dinucleotídeos CpG em intervalos da sequência de DNA de cada cromossomo, procurando a existência ou não de ilhas CpG (ICpG). Segundo a literatura, a *D. melanogaster* e o *S. cerevisiae* não apresentam metilação ou trazem forte supressão de metilação, uma alteração da citosina do dinucleotídeo CpG que ocorre de forma significativa nas ICpG. A existência de metilação nestas ilhas é questão importante para a pesquisa no âmbito das mutações e patologias relacionadas a diferentes tipos de doenças. Algumas simulações de Monte Carlo da ocorrência de metilação em ICpG são também apresentadas.

Palavras-chave: Sequências de DNA, Ilhas CpG, Metilação, Índice de Incidência de CpG.

Abstract: This paper presents a comparison among three chromosomes from different organisms: *Saccharomyces cerevisiae* chromosome 12, *Homo sapiens* chromosome 22 and *Drosophila melanogaster* chromosome 3L. The aim is to analyze the incidence of dinucleotides CpG at intervals of DNA sequence of each chromosome, seeking for the existence of CpG islands (ICpG). According to the literature, *D. melanogaster* and *S. cerevisiae* show no methylation or bring strong suppression of methylation, a modification of the cytosine dinucleotide ICpG occurring significantly in the ICpG. The existence of these islands methylation are important for research in the context of mutations and pathologies related to different types of diseases. Some Monte Carlo simulations for the occurrence of methylation in ICpG are also presented.

Keywords: DNA Sequences, CpG Islands, Methylation, CpG Incidence Rate.

Introdução

Após sua descoberta, em 1869, pelo bioquímico alemão Johann Friedrich Miescher, o DNA tem sido alvo de estudos em diferentes abordagens e níveis de complexidade. Neste trabalho comparam-se sequências de cromossomos de três diferentes organismos com o objetivo em identificar a ocorrência ou não de ilhas CpG: cromossomo 12 do *Saccharomyces cerevisiae*, o cromossomo 22 do *Homo sapiens* e o cromossomo 3L da *Drosophila melanogaster*. Informações quantitativas e qualitativas sobre estas ilhas são de primordial importância para o estudo de diferentes mutações e tipos de doenças.

Material e métodos

Para as análises consideramos as sequências de DNA em nucleotídeos (pirimidinas são compostas por citosina (C) e timina (T), enquanto que purinas, por adenina (A) e guanina (G)), em formato FASTA, de três organismos do banco de dados do Projeto Ensembl obtidas do site <ftp://ftp.ensembl.org>. As análises foram realizadas através do uso do programa estatístico R (R CORE TEAM, 2013) e seus pacotes.

[†] autor correspondente: cleonis@utfpr.edu.br.

Foram escolhidos o cromossomo 12 do *S. cerevisiae* (fermento de pão), o cromossomo 22 do *H. sapiens* e o cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta). As escolhas da mosca da fruta e do fermento de pão foram determinadas pela propriedade de que tais genomas não apresentam metilação ou apresentam forte supressão de metilação em dinucleotídeos CpG (na literatura, o ordenamento do nucleotídeo CG é comumente representado por CpG) e que esta característica é observada em grande parte dos organismos tanto procariontes como eucariontes (ver Bird et al., 1995).

A metilação é uma alteração química/enzimática que afeta, em procariontes, apenas a citosina e é específica para uma sequência CpG, nesta ordem. Ou seja, a citosina encontra-se na posição 5 e a guanina na posição 3 na sequência de nucleotídeos. Segundo Model et al. (2009), as regiões de metilação do DNA podem ser um vasto leque de possibilidades utilizadas para diagnóstico de doenças.

A região de incidência de CpGs é chamada de ilha CpG (denotada aqui por ICpG). A definição mais difundida para uma ICpG é aquela apresentada por Gardiner-Garden e Frommer (1987). A existência de uma ICpG ocorre em uma região com pelo menos 200 pares de bases (pb), com proporção de C+G maior do que 50% e razão de CpG observado e CpG esperado acima de 0,6. A taxa ou índice de ocorrência de ICpG será denotada por λ . Outras variações para a definição de ICpG e discussões sobre estas variações podem ser encontradas em Wu et al. (2010).

A razão λ é obtida dividindo a proporção de dinucleotídeos CpG na região pela proporção esperada caso os nucleotídeos fossem assumidos como resultados independentes de uma distribuição multinomial (ver Wu et al., 2010). Matematicamente, o índice de ocorrência de ICpG pode ser dado por

$$\lambda = \frac{f_D/N}{f_C/N \times f_G/N}, \quad (1)$$

onde N é o número de pares de bases (pb), f_i é a frequência da base $i \in \{C, G\}$ e f_D é a frequência do dinucleotídeo CpG no segmento de DNA considerado.

São apresentadas algumas simulações de Monte Carlo para a análise da ocorrência de metilação em ICpG. Para as simulações das sequências de DNA utilizamos o programa estatístico R e um modelo baseado na distribuição multinomial, onde cada subsequência é um experimento de $N = 200$ ensaios.

Cada ensaio possui cinco possíveis resultados, sendo eles os quatro nucleotídeos C, A, T e G e um quinto elemento, $C_m pG$, representando a ocorrência de citosina metilada em um dinucleotídeo CpG.

As probabilidades de ocorrência de cada nucleotídeo são dadas, respectivamente, por $p_C = r(1 - m)/2$, $p_A = (1 - r)/2$, $p_T = (1 - r)/2$, $p_G = (1 - m)r/2$ e $p_{C_m pG} = rm/2$, onde m representa o índice de metilação, r indica a taxa de C+G e ambos os valores são dados em porcentagens.

O índice m de metilação em mamíferos está entre 70% e 80% das citosinas em ICpGs (ver Antequera e Bird, 1993 e Model et al., 2009). Consideramos o cenário onde $C+G \geq 0,5$ e intervalo de subsequências de $N = 200$ pb, para satisfazer as exigências da definição de uma ICpG.

Resultados e discussões

A Figura 1 apresenta a composição em nucleotídeos e dinucleotídeos de cada cromossomo em estudo. Em todos os casos pode-se perceber que há menor incidência de nucleotídeos C e G, sendo que, no caso da *D. melanogaster* (mosca da fruta), esta característica não é tão acentuada. Entretanto, para o caso em que se observam os dinucleotídeos, há evidência de menor incidência de CpG nos cromossomos do *S. cerevisiae* (fermento de pão) e do *H. sapiens*.

A Figura 2 apresenta a incidência de CpGs, (linhas verticais) em um espaço de 10000pb de nucleotídeos. Tem-se uma relativa homogeneidade das barras verticais nos cromossomos de *S. cerevisiae* e *D. melanogaster*, o que não ocorre no intervalo de 10000pb do cromossomo de *H. sapiens*.

Assim, já do indicativo da baixa concentração relativa de dinucleotídeos CpG nos cromossomos (ver Figura 1) procura-se verificar como estes dinucleotídeos estão dispersos nos cromossomos em análise e se chegam a se organizar de forma a caracterizar uma região de ICpG.

Dessa forma, desejamos identificar os sítios de ocorrência das CpGs. Para tal, precisa-se, inicialmente que haja no intervalo de 200pb a taxa de pelo menos 50% de nucleotídeos C ou G, representada por C+G, que está apresentada na Figura 3.

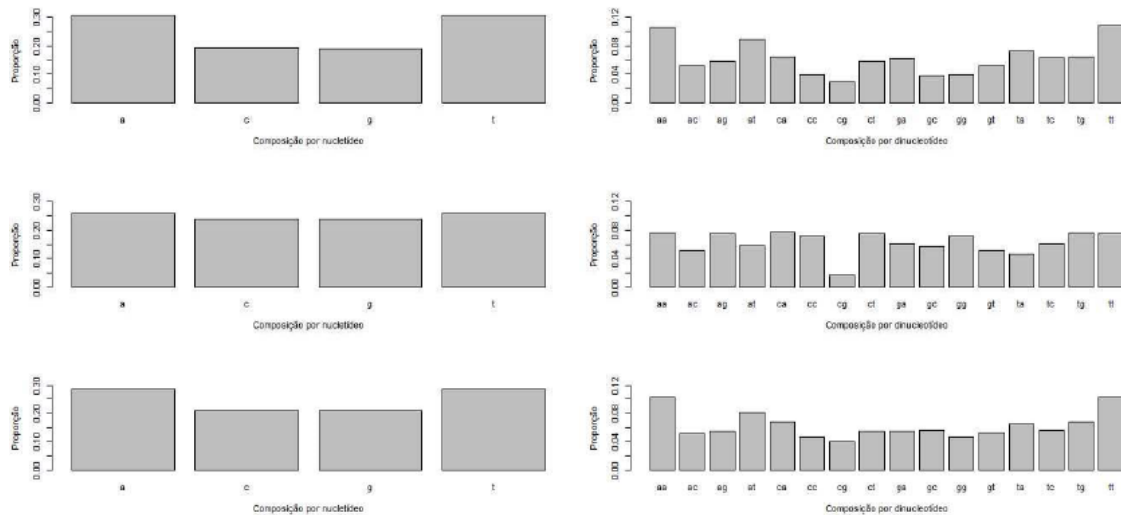


Figura 1: Composição dos Cromossomos: cromossomo 12 do *S. cerevisiae* (fermento de pão, no topo); cromossomo 22 do *H. sapiens* (no centro); cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta).

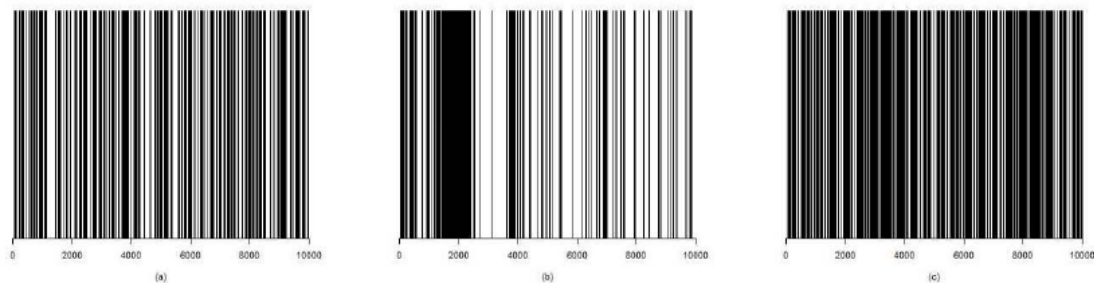


Figura 2: Sítios de CpG em intervalo de 10000pb: (a) cromossomo 12 do *S. cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H. sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta).

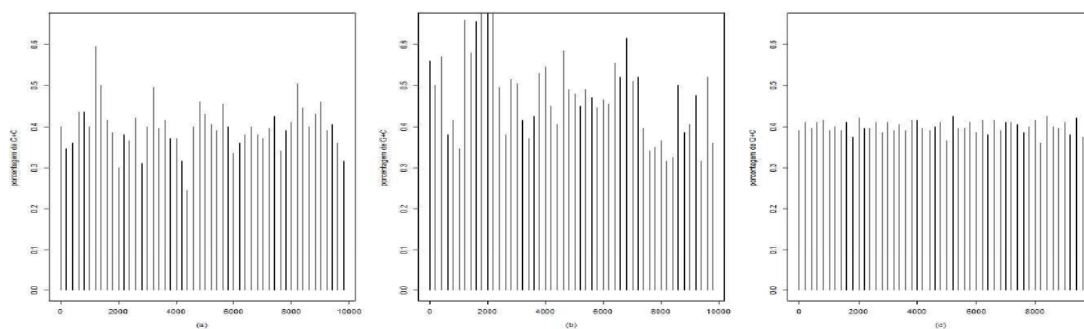


Figura 3: Proporção de C+G: (a) cromossomo 12 do *S. cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H. sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta).

Com base nas mesmas seqüências de 10000pb para cada cromossomo em estudo, investigamos a incidência de ICpG. Utilizamos a fórmula dada pela expressão (1), com $N = 200pb$. A cada 200pb, obteve-se a frequência de C, G e CpG e, desta forma, foi calculado o índice λ de ocorrência de ICpG. Estas informações estão listadas nas Tabelas 2 e 3 (cada linha, $n \in \{1, \dots, 25\}$ para a Tabela 2 e $n \in \{26, \dots, 50\}$ para a Tabela 3, representa uma subseqüência 200pb, $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$) para o cromossomo $j \in \{(a) S. cerevisiae, (b) H. sapiens, (c) D. melanogaster\}$.

As Tabelas 2 e 3 apresentam a análise da existência ou não de ICpG para um intervalo total de 10000pb divididos em subintervalos de 200pb dos três cromossomos em estudo. Sendo que os primeiros 5000pb estão apresentados na Tabela 2 e os 5000pb subsequentes estão na Tabela 3.

As informações destacadas em **negrito**, nas Tabelas 2 e 3, trazem locais onde ocorreram, de forma simultânea, a proporção de C + G acima de 50% e o índice λ de ocorrência de ICpG acima de 0,6.

Foram simuladas seqüências com $N = 200pb$, com índice m de metilação, para $m \in \{0,5; 0,7; 0,8\}$, e com índice r de C+G, para $r \in \{0,5; 0,6; 0,7\}$. Tais simulações, e respectivas seqüências, são representadas na Figura 4.

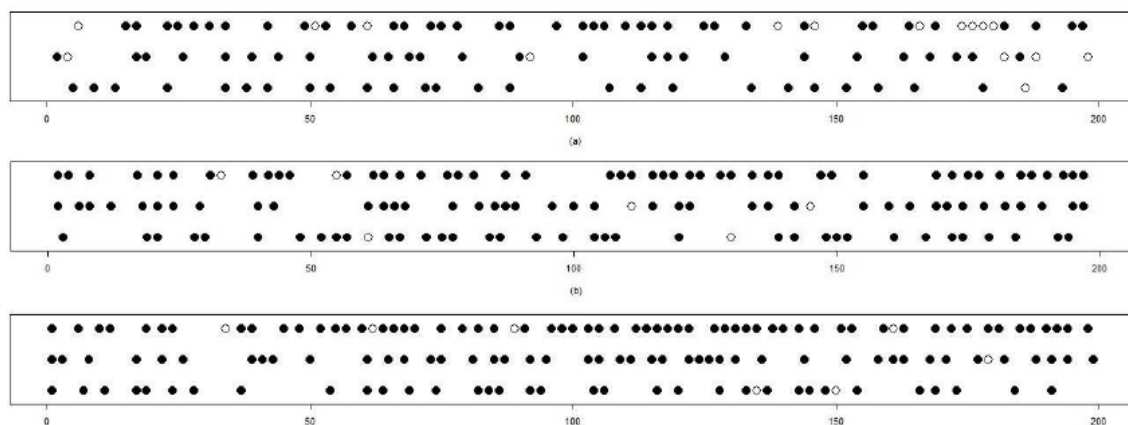


Figura 4: Ocorrências de CpG em intervalo de 200pb: (a) $m = 0,5$; (b) $m = 0,7$; (c) $m = 0,8$. Cada gráfico apresenta $r = 0,7$ (topo), $r = 0,6$ (centro) e $r = 0,5$ (embaixo). CpG é representada por \circ , C_mP é representada por \bullet .

A Figura 4 representa a simulação de seqüências de nucleotídeos com $m = 0,5$ para o gráfico (a), $m = 0,7$ para o gráfico (b) e $m = 0,8$ para o gráfico (c). Em todos os gráficos são apresentados três valores para a taxa de C + G: $r = 0,5$ (embaixo), $r = 0,6$ (centro) e $r = 0,7$ (topo). As Figuras 4(a) e 4(c) mostram que o aumento de r de 0,5 para 0,7 resulta em aumento ou estabilidade da ocorrência de CpG não metilada. Para a Figura 4(c) houve a diminuição da ocorrência de CpG quando comparada com as seqüências do centro ($r = 0,6$) e topo ($r = 0,7$).

A Tabela 1 apresenta o índice λ de ocorrência de ICpG, dado pela expressão (1), para cada caso apresentado na Figura 4. Em todos os casos, o valor obtido ficou acima de 0,6 evidenciando que as seqüências simuladas correspondem a regiões de ICpG.

Tabela 1: Resultados do índice λ de ocorrência de ICpG, para cada um dos casos simulados.

$m \setminus r$	$r = 0,5$	$r = 0,6$	$r = 0,7$
$m = 0,5$	6,109	3,726	3,654
$m = 0,7$	7,650	11,728	7,650
$m = 0,8$	15,652	19,287	11,532

Tabela 2: Resultado do índice de ocorrência de ICpG (λ): (a) cromossomo 12 do *S.cerevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H. sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta) em um intervalo total de 5000pb e subintervalos de tamanho $N = 200$ pb.

n	$f_{C(a)}$	$f_{G(a)}$	$f_{D(a)}$	$\lambda_{(a)}$	$C + G_{(a)}$	$f_{C(b)}$	$f_{G(b)}$	$f_{D(b)}$	$\lambda_{(b)}$	$C + G_{(b)}$	$f_{C(c)}$	$f_{G(c)}$	$f_{D(c)}$	$\lambda_{(c)}$	$C + G_{(c)}$
1	81	13	3	0,570	0,400	52	59	8	0,522	0,555	32	46	10	1,359	0,390
2	57	21	5	0,835	0,350	49	52	6	0,471	0,505	46	36	9	1,087	0,410
3	55	17	5	1,070	0,355	50	63	9	0,571	0,565	36	43	8	1,034	0,395
4	54	40	9	0,833	0,440	43	33	2	0,282	0,380	40	42	10	1,190	0,410
5	66	36	13	1,094	0,435	55	29	6	0,752	0,420	44	39	7	0,816	0,415
6	52	32	4	0,481	0,400	46	23	2	0,378	0,345	38	40	10	1,316	0,390
7	62	29	7	0,779	0,595	92	39	10	0,557	0,655	44	36	9	1,136	0,400
8	44	36	7	0,884	0,500	60	57	12	0,702	0,585	36	42	8	1,058	0,390
9	34	58	3	0,304	0,410	70	61	10	0,468	0,655	44	38	9	1,077	0,410
10	29	67	6	0,618	0,385	76	68	18	0,697	0,720	36	39	8	1,140	0,375
11	35	70	6	0,490	0,300	82	69	19	0,672	0,755	42	42	8	0,907	0,420
12	56	42	6	0,510	0,380	79	86	20	0,589	0,825	38	41	8	1,027	0,395
13	59	34	7	0,698	0,365	37	62	4	0,349	0,495	40	39	11	1,410	0,395
14	57	28	6	0,752	0,425	37	39	1	0,139	0,380	45	37	7	0,841	0,410
15	46	40	5	0,543	0,305	60	43	0	0,000	0,515	40	37	9	1,216	0,385
16	61	43	12	0,915	0,400	55	46	1	0,079	0,505	44	38	7	0,837	0,410
17	50	34	6	0,706	0,500	48	35	0	0,000	0,415	32	46	10	1,359	0,390
18	54	46	10	0,805	0,390	30	45	0	0,000	0,375	46	35	9	1,118	0,405
19	51	46	12	1,023	0,415	42	43	7	0,775	0,425	35	43	7	0,930	0,390
20	47	48	18	1,596	0,370	51	54	6	0,436	0,525	40	43	11	1,279	0,415
21	46	38	9	1,030	0,370	63	46	2	0,138	0,545	45	38	7	0,819	0,415
22	46	45	9	0,870	0,315	49	42	3	0,292	0,455	38	41	10	1,284	0,395
23	37	40	8	1,081	0,245	41	39	1	0,125	0,400	43	35	8	1,063	0,390
24	45	36	10	1,235	0,405	69	48	2	0,121	0,585	37	43	9	1,131	0,400
25	33	31	3	0,587	0,455	58	40	3	0,259	0,490	44	38	9	1,077	0,410

Nota: cada linha $n \in \{1, \dots, 25\}$ representa uma subsequência 200pb. $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$ para o cromossomo $j \in \{(a)S. cerevisiae, (b)H. sapiens, (c)D. melanogaster\}$.

Tabela 3: Resultado do índice de ocorrência de ICpG (λ): (a) cromossomo 12 do *S.serevisiae* (fermento do pão); (b) cromossomo 22 do *H. sapiens*; (c) cromossomo 3L da *D. melanogaster* (mosca da fruta) em um intervalo total de 5000pb e subintervalos de tamanho $N = 200$ pb.

n	$f_{C^{(a)}}$	$f_{G^{(a)}}$	$f_{D^{(a)}}$	$\lambda_{(a)}$	$C + G^{(a)}$	$f_{C^{(b)}}$	$f_{G^{(b)}}$	$f_{D^{(b)}}$	$\lambda_{(b)}$	$C + G^{(b)}$	$f_{C^{(c)}}$	$f_{G^{(c)}}$	$f_{D^{(c)}}$	$\lambda_{(c)}$	$C + G^{(c)}$
26	41	39	8	1,001	0,435	51	45	4	0,349	0,480	35	38	7	1,053	0,365
27	49	38	13	1,396	0,400	48	43	1	0,097	0,455	43	42	9	0,997	0,425
28	52	30	8	1,026	0,395	65	32	2	0,192	0,485	38	41	8	1,027	0,395
29	77	16	4	0,649	0,450	48	47	0	0,000	0,475	40	39	11	1,410	0,395
30	62	21	4	0,614	0,400	36	53	1	0,105	0,445	45	37	7	0,841	0,410
31	50	14	5	1,429	0,340	45	47	1	0,095	0,460	39	38	9	1,215	0,385
32	57	37	10	0,948	0,360	53	38	2	0,199	0,455	45	38	8	0,936	0,415
33	60	42	12	0,952	0,375	43	68	1	0,068	0,555	31	45	10	1,434	0,380
34	62	27	7	0,836	0,405	55	50	3	0,218	0,525	47	36	9	1,064	0,415
35	56	31	6	0,691	0,380	70	52	10	0,549	0,610	35	43	7	0,930	0,390
36	44	40	5	0,568	0,365	49	53	1	0,077	0,510	39	43	11	1,312	0,410
37	42	50	5	0,476	0,400	56	48	3	0,223	0,520	45	37	6	0,721	0,410
38	31	72	7	0,627	0,425	41	38	3	0,385	0,395	39	42	11	1,343	0,405
39	40	59	5	0,424	0,335	31	37	0	0,000	0,340	43	34	8	1,094	0,385
40	59	39	5	0,435	0,395	41	29	1	0,168	0,350	36	44	9	1,136	0,400
41	53	29	6	0,781	0,410	33	40	1	0,152	0,365	45	38	9	1,053	0,415
42	61	34	8	0,771	0,505	25	39	1	0,205	0,320	34	38	7	1,084	0,360
43	49	44	8	0,742	0,440	32	32	2	0,391	0,320	43	42	10	1,107	0,425
44	52	41	8	0,750	0,400	49	51	3	0,240	0,500	39	41	8	1,001	0,400
45	57	33	8	0,851	0,435	32	45	1	0,139	0,385	40	39	11	1,410	0,395
46	50	51	8	0,627	0,460	40	41	2	0,244	0,405	45	37	7	0,841	0,410
47	53	46	14	1,148	0,390	38	58	5	0,454	0,480	38	38	9	1,247	0,380
48	48	40	15	1,563	0,405	27	36	0	0,000	0,315	46	38	8	0,915	0,420
49	43	41	7	0,794	0,355	47	57	3	0,224	0,520	31	44	10	1,466	0,375
50	42	45	11	1,164	0,320	32	40	2	0,313	0,360	46	37	9	1,058	0,415

Nota: cada linha $n \in \{26, \dots, 50\}$ representa uma subsequência 200pb, $f_i(j)$ é a frequência do nucleotídeo/dinucleotídeo $i \in \{C, G, CpG\}$ para o cromossomo $j \in \{(a)S. cerevisiae, (b)H. sapiens, (c)D. melanogaster\}$.

Conclusões

Com base no exposto, e observando as Figuras 2 e 3 e as Tabelas 2 e 3, para o cromossomo 12 da *S.serevisiae* os valores obtidos para λ nos intervalos de pares de bases $n = 7$ e $n = 42$ ocorrem de forma esparsa não caracterizando uma região de ICpG. Para o caso do cromossomo humano considerado, existe evidência da ocorrência de ICpGs no intervalo entre $n = 8$ e $n = 11$ pois há porcentagem de C+G acima de 50%, a razão $\lambda_{(b)}$ ocorre acima de 0,6 e os intervalos são próximos ou adjacentes. Há também indicativo da supressão desta característica para o cromossomo 3L da *D. melanogaster*, no intervalo de 10000pb em análise, pois não há nenhum intervalo n que satisfaça as exigências para a existência de uma ICpG. Pelos resultados apresentados na Tabela 1, todas as simulações realizadas, baseadas no modelo multinomial, correspondem à definição de ICpG.

Agradecimentos

Cleonis V. Figueira agradece ao PPG-MAT/UFRGS pelo apoio para a participação da 58ª Reunião Anual da RBras e 15º SEAGRO. Sílvia R.C. Lopes agradece ao CNPq-Brasil e ao INCT em Matemática.

Referências

ANTEQUERA, F.; BIRD, A. Number of CpG islands and genes in human and mouse. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 90, p. 11995-11999, 1993.

BIRD, A.; TATE, P.; NAN, X.; CAMPOY, J.; MEEHAN, R.; CROSS, S.; TWEEDIE, S.; CHARLTON, J.; MACLEOD, D. Studies of DNA methylation in animals. *Journal of Cell Science*, v. 19, p. 37-39, 1995.

GARDINER-GARDEN, M.; FROMMER, M. CpG islands in vertebrate genomes. *Journal of Molecular Biology*, v. 196, p. 261-282, 1987.

MODEL, F.; LEWIN, J.; LOFTON-DAY, C.; WEISS, G. Analysis of DNA methylations in cancer. in: Wiuf, C. and Andersen, C.L. (orgs.), *Statistics and Informatics in Molecular Cancer Research*. Oxford: Oxford University Press. 2009. 217p.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2013. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

WU, H.; CAFFO, B.; JAFFEE, H.A.; IRIZARRY, R.A.; FIENBERG, A.P. Redefining CpG islands using hidden Markov models. *Biostatistics, Oxford Journals*, v. 11, n. 3, p. 499-514, 2010.