

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DA SOLIDIFICAÇÃO DIRECIONAL DE  
MATERIAIS DE MUDANÇA DE FASE

por

Antonio Flavio Aires Rodrigues

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2001

ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DA SOLIDIFICAÇÃO DIRECIONAL DE  
MATERIAIS DE MUDANÇA DE FASE

por

Antonio Flavio Aires Rodrigues  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo

Co-orientador: Prof. Dr. Milton Antônio Zaro

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Prof. Dr. Arno Müller

Prof. Dr. Alberto Tamagna  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Fevereiro de 2002

À

minha esposa Lourdes Maria Büttbender,  
meus filhos Gustavo Büttbender Rodrigues e Giulia Büttbender Rodrigues,  
meus pais Antonio Rodrigues Salvado e Maria Noemia Aires Rodrigues,  
que são a luz e alegria de minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Professor Horácio Antonio Vielmo e Professor Milton Antonio Zaro, pela oportunidade de realização deste trabalho e pela forma tranqüila e segura de sua orientação.

Ao Professor Marcus Vinicius Andrade Bianchi, pela atenção dispensada no decorrer do trabalho e pelas valiosas sugestões, as quais ajudaram a enriquecer este trabalho.

Agradeço ao colega e amigo Sandi I. S. de Sousa pelas valorosas discussões e trocas de informações no trabalho com o método numérico.

Aos colegas André L. Schemes, Cristiano Vitorino da Silva, Luis Carlos Demartini, Frederico Sporket, Pedro A.P. Borges, Rogério Luis Thum, Martin Kessler, Júlio César, Charles Rech, Mariza Camargo, Patrícia Rodriguês, que enriqueceram-me tanto na formação pessoal quanto acadêmica e aos demais colegas que de forma direta ou indireta contribuíram na execução deste trabalho.

Aos amigos do grupo de trabalho do Prof. Zaro pela ajuda no laboratório durante experimentos deste trabalho, e também ao amigo Juliano Dillenburg pela colaboração na aquisição de dados, calibração de sensores, estímulo e apoio.

À CNPQ pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

A minha esposa Lourdes M. Büttendender pelo apoio, força e incentivo para que tudo isso fosse possível.

Aos meus pais, Antonio Rodrigues Salvado e Maria N.A. Rodrigues, e aos meus filhos Gustavo Büttendender Rodrigues e Giulia Büttendender Rodrigues, sem os quais nada teria sentido.

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma análise da solidificação unidirecional a partir de um estudo experimental e numérico. A fim de possibilitar a visualização do processo são evitadas as altas temperaturas. Desta forma, materiais com baixo ponto de fusão, abaixo de 50°C, translúcidos e transparentes, são fundidos e solidificados em um solidificador direcional de forma cilíndrica. Visando um processo de solidificação controlado por difusão pura, este solidificador é resfriado pela sua base. São obtidos no experimento os campos de temperatura, além da posição da interface sólido-líquido ao longo do tempo. Na simulação numérica do processo é resolvida a equação da energia, formulada em termos da entalpia usando uma malha fixa. Os resultados são comparados e analisados de modo a validar a simulação, que passa assim a servir para a investigação de outras situações de interesse no âmbito da fusão-solidificação.

## ABSTRACT

### Experimental and Numeric Analysis of the Directional Solidification of Phase Change Material

An experimental and numerical analysis of unidirectional solidification is presented in this work. In order to enable the visualization of the process, high temperatures are avoided. Thus, materials with low melting point, below  $50^{\circ}\text{C}$ , translucent and transparent, are melted and solidified in a directional solidification system of cylindrical form. In order to control the process of solidification by pure diffusion, this solidification system has a cold system at the base. From the experiment some parameters are obtained, such as the temperature field and the position of the solid-liquid interface along the time. In the numeric of simulation the energy equation is solved, using the enthalpy formulation and a fixed mesh. The results are compared and analyzed in order to validate the simulation method. These results may be useful in future investigations related to melting/solidification problems.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolo

$a$	coeficiente da equação de transporte .....	[-]
$b$	constante no termo fonte da equação geral de transporte .....	[-]
$c$	calor específico .....	[J/kg K]
$erf$	erro da função .....	[-]
$erfc$	erro da função complementar .....	[-]
$f$	fração solidificada .....	[-]
$f_a$	freqüência de aquisição .....	[Hz]
$h$	entalpia específica .....	[J/kg]
$i$	taxa de aquisição .....	[amostras/segundo]
$k$	condutividade térmica .....	[W/m K]
$L$	calor latente .....	[J/kg]
	Local de referência de um processo .....	[m]
$m$	termo do somatório da eq. (2.51) .....	[-]
$n$	número de termopares .....	[-]
$P$	termo fonte da equação (3.21) .....	[W/m <sup>3</sup> ]
$S$	parâmetro de superaquecimento $[(T_i - T_m)/(T_w - T_m)]$ .....	[-]
	termo fonte na equação geral de transporte .....	[W/m <sup>3</sup> ]
	termo da função proposta para $T_k$ na formulação em entalpia eq. (3.17) .....	[W/m]
$Ste_s$	número de Stefan, Stefan sólido $[c_{ps}(T_m - T_w)/L_f]$ .....	[-]
$Ste_l$	número de Stefan, Stefan líquido $[c_{pl}(T_i - T_m)/L_f]$ .....	[-]
$T$	temperatura .....	[°C]
$t$	tempo .....	[s]
$V$	velocidade da frente de solidificação .....	[m/s]
$x$	eixo x .....	[-]
$y$	eixo y .....	[-]

### LETRAS GREGAS

$\alpha$	difusividade térmica $[k/\rho c_p]$ .....	[m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	parâmetro utilizado na resolução do problema de meio finito $\left[ \lambda + \frac{3}{2} \left[ -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_l}{\alpha_s}} \right] \right]$ .....	[-]
$\beta_m$	auto valores da eq. (2.51) .....	[-]
$\delta$	posição da interface sólido-líquido .....	[m]
$\Delta t$	passo de tempo .....	[s]
$\Delta T$	diferença de temperatura .....	[°C]
$\Delta x$	malha espacial ou tamanho do volume de controle .....	[m]
$\varepsilon$	critério de convergência .....	[-]
$\phi$	variável dependente na equação geral de transporte .....	[-]
$\Gamma$	parâmetro da solução dos problemas de Neumann $\sqrt{\alpha_s/\alpha_l}$ .....	[-]
	coeficiente de difusão na equação geral de transporte .....	[kg/ms]
	coeficiente na função proposta para $T_k$ na formulação em entalpia .....	[W/m]
$\eta$	variável de mudança de integração .....	[-]
$\rho$	massa específica .....	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\lambda$	constante nos problemas de Stefan e Neumann $[\delta/2\sqrt{\alpha_s t}]$ .....	[-]

$\mu$	viscosidade absoluta .....	[kg/ms]
$\xi$	posição da camada limite térmica nos problemas de meio finito, espessura de penetração... térmica $[2\beta\sqrt{\alpha_{st}}]$ .....	[m]

## SUBÍNDICES

$E$	volume de controle vizinho ao leste em uma malha
$e$	face leste de um volume de controle
$p$	indicação de calor específico a pressão constante ou ponto central de um volume de controle
$s$	fase sólida
$l$	fase líquida
$i$	indicação de condição inicial
$m$	mudança de fase ou termo do somatório da eq. (2.51)
$w$	molde ou volume de controle vizinho ao oeste de uma malha
$f$	fusão ou solidificação
$\infty$	local de referencia de um processo
$e$	parte estacionária
$h$	parte homogênea
$k$	temperatura de Kirchhoff
$W$	volume de controle vizinho ao oeste em uma malha
$w$	face oeste de um volume de controle

## SUPERÍNDICES

$o$	iteração anterior
$k$	iteração



## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Fig. 2.1 Diagrama esquemático da frente de solidificação. ....	5
Fig. 2.2 Balanço de calor na interface sólido/líquido num problema de Stefan. ....	7
Fig. 2.3 Distribuição de temperatura para o problema de Stefan. ....	10
Fig. 2.4 Distribuição de temperatura para o problema de Neumann. ....	12
Fig. 2.5 Distribuição de temperatura para o problema de Meio Finito ....	14
Fig. 2.6 Representação do canal e redimensionamento devido à simetria do problema. ....	19
Fig. 2.7 Evolução da espessura solidificada com o tempo para as diversas soluções analisadas .	20
Fig. 3.1 Diagrama $h \times T$ para uma substância pura ....	26
Fig. 3.2 Malha sobre domínio de solução ....	29
Fig. 3.3 Avaliação das propriedades nos volumes de controle em transferência de calor com e sem mudança de fase ....	30
Fig. 3.4 Distribuição de temperatura e entalpia na região de mudança de fase ....	33
Fig. 3.5 Distribuição de temperatura para posição $x=0,00745m$ problema de Stefan solução analítica e numérica. ....	35
Fig. 3.6 Distribuição de temperatura para posição $x=0,00745m$ problema de Neumann solução analítica e numérica. ....	35
Fig. 3.7 Posição da interface com o tempo para o problema de Stefan solução analítica e numérica. ....	36
Fig. 3.8 Posição da interface com o tempo para o problema de Neumann solução analítica e numérica. ....	36
Fig. 4.1 O aparato de teste desenvolvido por Jackson, et al., 1966. ....	38
Fig. 4.2 Aparato de teste desenvolvido por Hunt et al., 1966 ....	39
Fig. 4.3 Crescimento dendrítico do cyclohexanol. ....	40
Fig. 4.4 Solidificador direcional (Garcia e Prates, 1978). ....	41
Fig. 4.5 Solidificador direcional (Clyne, 1982) ....	42
Fig. 4.6 O experimento desenvolvido na presente dissertação ....	44
Fig. 4.7 Seção de teste ....	45
Fig. 4.8 Detalhes de uma medição na seção de teste. ....	46
Fig. 4.9 Vista geral do aparato experimental ....	48
Fig. 4.10 Vista focando detalhes do aparato experimental ....	49
Fig. 4.11 Vista complementar do aparato experimental. ....	49
Fig. 4.13 Antes do início do processo de solidificação ....	57
Fig. 4.15 Frente de solidificação já cobrindo o 1° termopar ....	57
Fig. 4.17 Frente de solidificação chegando no 2° termopar. ....	57
Fig. 4.14 Início do processo de solidificação com pequena camada já solidificada ..... <b>Erro!</b>	
<b>Indicador não definido.</b>	
Fig. 4.16 Frente de solidificação entre o 1° e o 2° termopar. ....	58
Fig. 4.18 Detalhe da frente de solidificação no 2° termopar. ....	58
Fig. 4.19 Detalhe da Frente de solidificação já envolvendo todo o 2° termopar ....	57
Fig. 4.20 Vista geral da seção de teste após 51 minutos e 34 segundos do início do experimento. ....	58
Fig. 4.21 Curva da temperatura da água de refrigeração com o tempo. ....	59
Fig. 4.22 Posição da interface com o tempo (numérico versus experimental). ....	60
Fig. 4.23 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição $x=2mm$ . ....	61
Fig. 4.24 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição $x=7,5mm$ . ....	61
Fig. 4.25 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição $x=11,5mm$ . ....	62

Fig. 4.26 Evolução da temperatura para o 1° termopar com o tempo.....	62
Fig. 4.27 Evolução da temperatura para o 2° termopar com o tempo.....	63
Fig. 4.28 Evolução da temperatura para o 3° termopar com o tempo.....	63

## ÍNDICE DE TABELAS

	Pág.
Tabela 4.1 Propriedades termofísicas do cyclohexanol .....	51
Tabela 4.2 Temperatura nos termopares no início do experimento .....	59

## ÍNDICE

	Pág.
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação .....	1
2 PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO .....	4
2.1 Introdução .....	4
2.4.1 Solução de Stefan .....	9
2.4.2 Solução de Neumann .....	11
2.4.3 Solução para Meio Finito .....	13
2.4.4 Estudo Comparativo da Espessura Solidificada .....	18
3 MODELO NUMÉRICO .....	21
3.1 Introdução .....	21
3.2 Equação de Conservação .....	24
3.6 Comparações entre Resultados Numéricos com os Analíticos .....	34
4 ANÁLISE EXPERIMENTAL .....	37
4.1 Introdução .....	37
4.2 O Experimento Desenvolvido na Presente Dissertação .....	43
4.3 Material de Mudança de Fase .....	50
4.3.1 Propriedades Termofísicas .....	51
4.4 Medidas Qualitativas e Quantitativas .....	52
4.4.1 Localização da Interface .....	52
4.4.2 Temperatura .....	52
4.5 Procedimento Experimental .....	55
4.6 Resultados e Discussões .....	56
4.6.1 Posição da Interface .....	56
4.6.2 Comparação entre os Resultados Experimentais e Numéricos .....	58
5 CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES .....	65
5.1 Conclusões .....	65
5.1.1 Processo de Solidificação .....	65
5.1.2 O Método da Entalpia .....	66
5.1.3 Análise Experimental .....	67
5.2 Sugestões para Futuros Trabalhos .....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA .....	69

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

Os problemas de transferência de calor com mudança de fase, em geral, e particularmente a solidificação, caracterizam-se por possuírem uma fronteira que se desloca com o tempo.

As primeiras soluções de problemas envolvendo fronteira livre remontam a meados do século passado [Neumann, 1860; Stefan, 1891]. Nestes primeiros tempos a motivação dava-se em parte a nível puramente matemático, por constituírem-se em interessantes problemas com domínio variável e em parte pela sua aplicabilidade a problemas de congelamento do mar e de águas subterrâneas. Estas primeiras formulações deram origem a famílias de problemas clássicos, ou seja, problemas de Stefan e de Neumann, com soluções analíticas da equação de Fourier para fronteira livre.

Na primeira metade deste século a necessidade de solução para certos problemas metalúrgicos levou à incorporação do molde de fundição nestes equacionamentos, dando origem ao modelo de Schwarz, 1933.

Nestas primeiras formulações do problema era resolvida somente a equação da difusão do calor, em forma transiente e uma dimensão. As necessidades no campo da metalurgia exigiram, entretanto a solução de problemas mais complexos, especialmente no caso da solidificação de ligas metálicas, onde além do processo de difusão de calor tem-se difusão de massa e de quantidade de movimento [Viskanta, 1988; Viskanta 1992; Battle, 1992]. A complexidade do fenômeno exigiu a adesão de pesquisadores de áreas afins, como as Ciências Térmicas. Em 1977 já era

obtida a primeira solução de uma formulação incorporando o movimento da fase líquida [Sparrow, Patankar e Ramadhyani, 1977].

A partir daí a análise dos fenômenos envolvendo a solidificação dos metais e ligas, tem recebido bastante atenção. Vários pesquisadores têm desenvolvido métodos e modelos matemáticos para tentar melhor reproduzir os fenômenos envolvidos na solidificação.

O histórico do desenvolvimento de modelos para os processos de solidificação pode genericamente ser dividido em três períodos. No primeiro período, antes 1970, o estudo estava concentrado nos problemas de condução de calor com mudança de fase [Ockendon e Hodgkins, 1975]. A fim de estudar defeitos em peças fundidas, foi prescrito o escoamento de fluido, com dados experimentais, e desacoplado da equação da energia. Usualmente os modelos eram limitados a uma dimensão [Flemings e Nereo, 1967].

No segundo período, até a metade dos anos 80, o acoplamento da equação de conservação da quantidade de movimento com a equação da energia foi tentado [Mehrabian et al., 1970; Fujii et al., 1979; Ridder et al., 1981]. Já abordando ligas, a influência do escoamento de fluido interdendrítico foi investigado. Normalmente era empregada a lei de Darcy, ao invés de resolver a equação de conservação completa, para obter o campo de velocidade. Além disso, o acoplamento entre as regiões sólida, bifásica e líquida foram ignoradas, ou tratadas por meio do método de múltiplas regiões. Com uma certa aproximação, foram desenvolvidas e resolvidas equações de conservação separadas para cada região, e um balanço de energia apropriado na interface foi então empregado. O modelo requer uma prescrição do tamanho e forma da região de mistura, e a interface associada com as regiões sólidas e líquidas. Consequentemente, o método de múltiplas regiões é limitado a alguns casos com geometria relativamente simples.

No terceiro período, segunda metade dos anos 80, surgiram modelos com o conceito região única, baseados na teoria clássica de mistura, empregando médias volumétricas, conforme Bennon e Incropera, 1987; Voller e Prakash, 1987 e Beckermann e Viskanta, 1993.

## **1.2 Objetivos e Escopo da Dissertação**

A capacidade de resolver-se sistemas de equações diferenciais não lineares, com o auxílio do computador, é hoje maior do que o próprio conhecimento da física do processo de transferência de massa durante a solidificação [Battle, 1992]. Este fato gera a necessidade da experimentação.

O objetivo desta dissertação é desenvolver um aparato experimental, solidificador direcional, capaz de visualizar a solidificação, permitir a análise dos fenômenos dos processos de solidificação, e validar um código numérico para analisar modelos existentes.

Para isto construiu-se um solidificador direcional a baixa temperatura [Christenson, Bennon e Incropera, 1989, Christenson e Incropera, 1989]. Ele permite visualizar a solidificação, realizar a análise dos fenômenos, e portanto validar o código numérico.

O trabalho em uma dimensão (solidificador direcional) tem por objetivo reduzir a complexidade do fenômeno, permitindo que a atenção concentre-se nos processos que ocorrem junto à interface sólido-líquido.

No capítulo 2 deste trabalho são introduzidas as equações governantes do processo de solidificação, sendo primeiramente realizada uma análise de escala, com o objetivo de estabelecer a ordem de grandeza dos fenômenos a serem observados. Também são apresentadas as soluções analíticas clássicas.

No capítulo 3 passa-se a abordar uma modelagem numérica para a solidificação, sendo esta formulada em termos da entalpia, sendo as suas equações resolvidas pelo Método dos Volumes Finitos.

O capítulo 4 trata da descrição do experimento, sua montagem, instrumentação e resultados obtidos.

As conclusões e sugestões para trabalhos futuros deste são apresentadas no capítulo 5.

## **2 PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO**

### **2.1 Introdução**

O processo de solidificação de metais ou materiais de mudança de fase, também chamados de PCM (Phase Change Materials), é um processo em regime transiente, envolvendo a remoção de calor em forma latente para que ocorra a solidificação, e a evolução da interface sólido-líquido.

O conhecimento da cinética da solidificação e da distribuição de temperaturas durante o processo é extremamente importante. A busca pelo conhecimento deste processo motivou várias investigações, de caráter tanto numérico como experimental.

No Brasil o problema da solidificação vem sendo abordado sob o ponto de vista da sua aplicação no processo de fabricação por fundição [Müller, 1994], experimentação [Zaro, 1992], e simulação computacional [Garcia e Prates, 1978; Vielmo, 1993; Braga, 1993; Awruch e Reitz, 1993; Vielmo e Prata, 1994; Awruch e Reitz, 1994; Milón e Braga, 2000; Souza, S. I. S., Vielmo, H. A., 2000; Jesus, A. B., Ismail, K. A. R., 2000].

O presente trabalho dá continuidade a alguns destes esforços, propondo-se a desenvolver um estudo teórico-experimental. A partir das respostas fornecidas por experimentos, avalia-se a precisão de algumas formulações já existentes para o problema da solidificação.

Desta forma materiais com baixo ponto de fusão, abaixo de 50° C, translúcidos e transparentes, são fundidos e solidificados em um solidificador direcional em forma cilíndrica.

Visando um processo de solidificação controlado por difusão pura, este solidificador é resfriado pela sua base.



Na simulação numérica do processo é resolvida a equação da energia, formulada em termos da entalpia sobre uma malha fixa.

## 2.2 Equação Governante

Considere uma frente solidificação plana que se encontra inicialmente no estado estacionário. A figura 2.1 mostra o diagrama esquemático para o modelo e o sistema de coordenadas. A extração de calor pela base impõe início ao processo de solidificação ocasionando o movimento da interface.

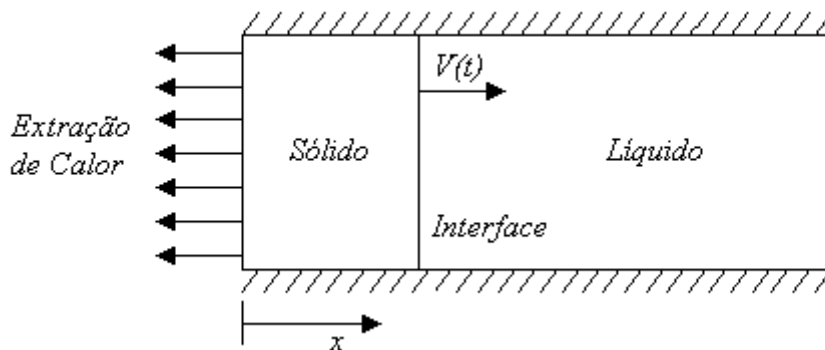


Fig. 2.1 Diagrama esquemático da frente de solidificação.

A equação da energia, particularizada para difusão pura transiente em uma dimensão sem fonte, é dada por

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (2.1)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $h$  é a entalpia específica,  $\rho$  é a densidade (massa específica),  $t$  é o tempo, e  $k$  é a condutividade térmica. Assumido que as propriedades termofísicas são constantes para cada fase, e que são independentes da temperatura, tem-se

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Utilizando a definição de calor específico a pressão constante,

$$dh = c_p dT, \quad (2.3)$$

e substituindo (2.3) na eq.(2.2) tem-se a equação da energia formulada em temperatura

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Como tem-se duas fases distintas, para a região do sólido tem-se

$$\rho_s c_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \quad (2.5)$$

e para o líquido

$$\rho_l c_{pl} \frac{\partial T_l}{\partial t} = k_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

onde, os subscritos “s e l” referem-se às fases sólida e líquida.

No instante inicial e antes de qualquer sólido ser formado, a distribuição de temperatura no líquido é uniforme e esta condição inicial é determinada por

$$T(x,0) = T_i \quad (x > 0, t = 0). \quad (2.7)$$

Se a temperatura inicial  $T_i$  for maior que a temperatura de mudança de fase  $T_m$  o problema se constitui no problema de Neumann. No caso da temperatura inicial  $T_i$  ser igual à temperatura de mudança de fase  $T_m$ , se constitui no problema de Stefan.

A extração de calor pela base é uniforme e mantida constante com temperatura na parede igual a  $T_w$ , ou seja

$$T(0,t) = T_w \quad (x = 0, t > 0). \quad (2.8)$$

Na seqüência deste capítulo serão apresentadas as soluções de ordem de grandeza ou análise de escala, e as soluções clássicas de problemas de solidificação conhecidas como soluções de Stefan e de Neumann, assim como a solução para Meio Finito. Em Vielmo, 1993, são demonstradas estas soluções clássicas passo a passo. O objetivo é efetuar uma comparação com a solução numérica, tomando as mesmas condições de contorno e inicial, e também aplicando as mesmas propriedades termofísicas.

### 2.3 Análise de Escala do Problema de Stefan

Conforme Bejan, 1995, a análise de escala é recomendada como o primeiro método para obter a máxima informação por unidade de esforço intelectual.

O uso da análise de escala permite importantes resultados que servirão como ponto de partida para estudos mais detalhados. Para os pesquisadores que realizam experimentos de laboratório pode fornecer parâmetros para confecção do experimento, como por exemplo, o seu tempo de duração e o tamanho necessário da cavidade de análise. Já para os que realizam simulações numéricas pode servir para uma comparação inicial de resultados, além de uma estimativa de malha espacial e temporal.

Considere uma frente plana de solidificação deslocada de  $\delta(t)$ , que é a posição da interface sólido/líquido, conforme a figura 2.2 abaixo,

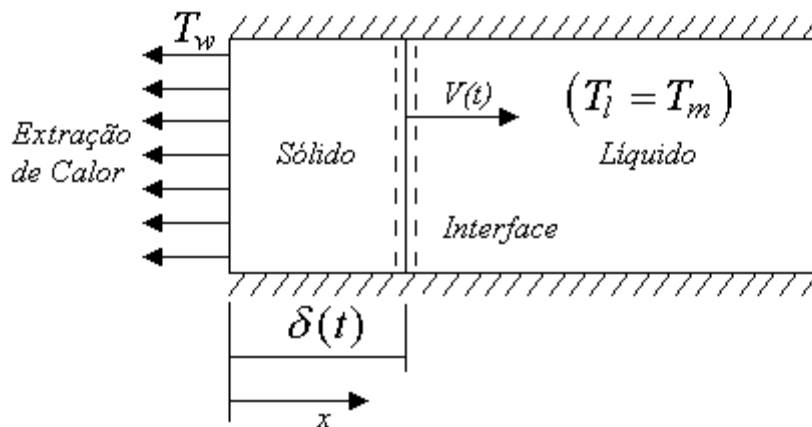


Fig. 2.2 Balanço de calor na interface sólido/líquido num problema de Stefan.

Efetuando um balanço de calor na interface mostrada na fig. 2.2, e tendo que a temperatura no líquido está na temperatura de mudança de fase ( $T_l = T_m$ ), problema de Stefan, observa-se que,

$$k \frac{T_m - T_w}{\delta} : \rho L_f \frac{d\delta}{dt}, \quad (2.9)$$

onde  $L_f$  é o calor latente de mudança de fase e  $\frac{d\delta}{dt} = V(t)$  a velocidade da frente de solidificação.

Separando a equação diferencial tem-se

$$\delta d\delta : k \frac{(T_m - T_w)}{\rho L_f} dt, \quad (2.10)$$

integrando ambos os lados resultam

$$\delta : \left( 2k \frac{(T_m - T_w)}{\rho L_f} t \right)^{1/2}, \quad (2.11)$$

utilizando o número de Stefan, definido por

$$Ste = c_p \frac{(T_m - T_w)}{L_f}, \quad (2.12)$$

obtém-se que

$$\delta : (2\alpha t Ste)^{1/2}, \quad (2.13)$$

ou

$$t : \frac{\delta^2}{2\alpha Ste}, \quad (2.14)$$

com

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (2.15)$$

Este resultado será posteriormente comparado com outras soluções, mais complexas.

## 2.4 Solução Analítica

Por motivos de aplicação em engenharia, passa-se agora a introduzir o molde nesta discussão. Soluções analíticas para os problemas de solidificação são somente avaliadas com a introdução de hipóteses simplificadoras de caráter físico, tais como:

o fluxo de calor é unidirecional;

não existe resistência térmica ao fluxo de calor na interface do material solidificado com o molde, ou seja admite-se a existência de contato térmico perfeito entre o material e o molde;

a temperatura da interface material/molde permanece constante durante o processo de solidificação;

a interface sólido/líquido é macroscopicamente plana;

não existem fluxos de massa;

as propriedades físicas do material e do molde não variam durante o processo de solidificação.

o material e o molde comportam-se como elementos semi-infinitos, não havendo perdas de calor do molde para o meio ambiente, ou seja a temperatura externa do molde deve permanecer constante durante o processo de solidificação (todo o calor do material é transferido por condução e absorvido totalmente pelo molde);

Estas hipóteses assumidas conjuntamente tornam a solução bastante distante dos casos práticos, afastando-a demasiadamente, na maioria dos casos, da física real do problema, o que inevitavelmente restringe bastante a utilização prática de tais métodos.

Soluções analíticas que empregam estas simplificações são encontradas em Carslaw e Jaeger, 1959; Rubinstein, 1971; Özisik, 1993; Crank, 1984.

#### **2.4.1 Solução de Stefan**

Esta solução foi proposta por um dos pioneiros na análise dos problemas de solidificação.

Conforme já foi descrito, neste caso o líquido encontra-se sempre na temperatura de mudança de fase.

A condição inicial é a seguinte:

$$T(x,0) = T_i = T_m \quad (x > 0, t = 0). \quad (2.16)$$

Na interface material/molde considera-se temperatura prescrita então tem-se

$$T(0,t) = T_w \quad (x = 0, t > 0). \quad (2.17)$$

Esta condição inicial torna o problema pouco realístico, pois dificilmente o material no início do processo encontrar-se-á na temperatura de mudança de fase.

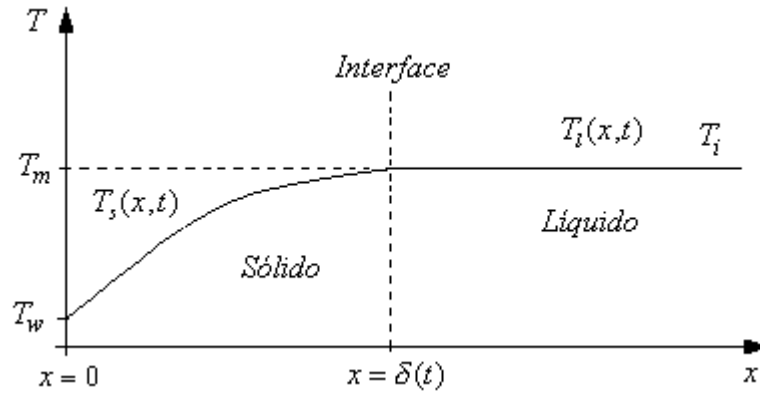


Fig. 2.3 Distribuição de temperatura para o problema de Stefan.

As condições de contorno são dadas conforme a Fig. 2.3

$$T(\delta, t) = T_m \quad \text{em } x = \delta(t) \text{ e } t > 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x \rightarrow \infty \text{ e } t > 0. \quad (2.19)$$

Este problema clássico tem solução bem conhecida e facilmente encontrada na literatura [Carslaw e Jaeger, 1959; Özisik, 1993; Vielmo, 1993].

A solução para distribuição de temperatura para a fase sólida é a dada por

$$T_s(x, t) = T_w + (T_m - T_w) \frac{\text{erf}\left(x/2\sqrt{\alpha_s t}\right)}{\text{erf}(\lambda)}, \quad (2.20)$$

com 
$$\alpha_s = \frac{k}{\rho_s c_{ps}}. \quad (2.21)$$

A posição da interface sólido-líquido com o tempo é dada pela equação

$$\delta(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t}, \quad (2.22)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro constante. Para achar uma relação para a avaliação deste parâmetro a equação de balanço de energia na interface é usada. Para o problema Stefan o balanço de energia na interface resulta

$$k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \rho L_f \frac{d\delta}{dt}. \quad (2.23)$$

Então a determinação deste parâmetro é obtida a partir da solução desta equação transcendental para  $\lambda$

$$\lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} Ste = 0. \quad (2.24)$$

Com a determinação do parâmetro  $\lambda$  solucionando a equação (2.24), pode-se determinar  $\delta(t)$  pela equação (2.22) e a distribuição de temperatura pela equação (2.20).

O valor do parâmetro  $\lambda$  que torna esta e as demais soluções que serão apresentadas de acordo com a física do problema se encontra entre 0 e 1.

#### 2.4.2 Solução de Neumann

O problema de Neumann considera que o material de mudança de fase, na condição inicial, está em uma temperatura acima da temperatura de mudança de fase. Isto é o que realmente acontece nos processos de solidificação, pois o material vazado geralmente está superaquecido, isto é, numa temperatura acima da temperatura de mudança de fase. Esta condição inicial é dada por

$$T(x, 0) = T_i \quad \text{em } (t = 0 \text{ e } x > 0). \quad (2.25)$$

Na interface material-molde considera-se temperatura prescrita conforme equação (2.17).

As condições de contorno são as mesmas do problema de Stefan equações (2.18) e (2.19).

Na figura 2.4 esquematicamente a distribuição das temperaturas para o modelo com as condições de contorno.

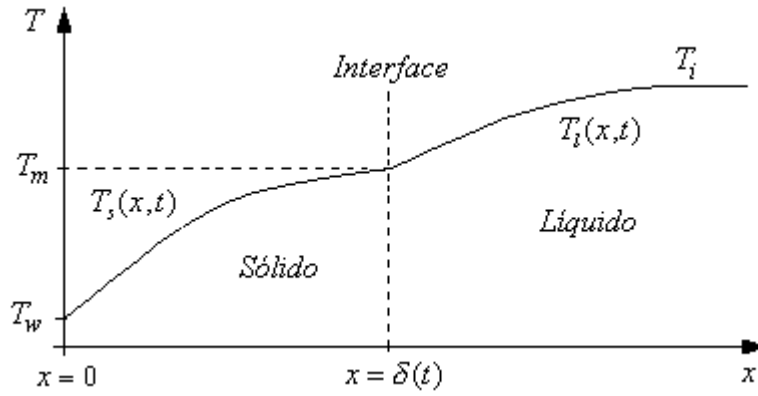


Fig. 2.4 Distribuição de temperatura para o problema de Neumann.

As soluções para distribuição de temperatura para a fase sólida e a fase líquida são dadas respectivamente por [Carslaw e Jaeger, 1959; Özisik, 1993; Vielmo, 1993].

$$T_s(x,t) = T_w + (T_m - T_w) \frac{\operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{\alpha_s t}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)}, \quad (2.26)$$

e

$$T_l(x,t) = T_i + (T_m - T_i) \frac{\operatorname{erfc}\left(x/2\sqrt{\alpha_l t}\right)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}. \quad (2.27)$$

A posição da interface sólido/líquido com o tempo é avaliada também pela equação (2.22), assim como para achar uma relação para a avaliação do parâmetro  $\lambda$  a equação de balanço de energia na interface é usada. Para o problema Neumann o balanço de energia na interface resulta

$$k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_{x=\delta} - k_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \rho L_f \frac{d\delta}{dt}. \quad (2.28)$$

Novamente a determinação deste parâmetro é obtida a partir da solução da equação transcendental para  $\lambda$

$$\frac{e^{(-\lambda^2)}}{\operatorname{erf}(\lambda)} - \Gamma \frac{k_l c_{ps}}{k_s c_{pl}} \frac{Ste_l}{Ste_s} \frac{e^{(-\lambda^2 \Gamma^2)}}{\operatorname{erfc}(\lambda \Gamma)} - \lambda \sqrt{\pi} \frac{1}{Ste_s} = 0, \quad (2.29)$$

onde  $\Gamma$  é a relação entre as difusividades térmicas,

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_l}}. \quad (2.30)$$



$Ste_s$  e  $Ste_l$  são o número de Stefan para sólido e para o líquido, respectivamente, dados por

$$Ste_s = c_{p_s} \frac{(T_m - T_w)}{L_f}, \quad (2.31)$$

$$Ste_l = c_{p_l} \frac{(T_i - T_m)}{L_f}. \quad (2.32)$$

Com a determinação do parâmetro  $\lambda$  solucionando a equação (2.29), pode-se determinar também a distribuição de temperatura, tanto para a região do sólido como para a região do líquido, a partir das equações (2.26) e (2.27).

### 2.4.3 Solução para Meio Finito

A solução para Meio Finito corresponde à solução que mais se aproxima da realidade. Esta solução é particularmente importante para este trabalho, pois retrata a cavidade do experimento. A comparação plena com os resultados experimentais só não foi possível devido a que a temperatura na base não ser constante com o tempo, no experimento, mas servirá para balizar a simulação numérica em termos de modelo finito.

Na região do líquido não se tem solução analítica. A solução encontrada é utilizar o método integral nesta região. Já para região do sólido serão apresentadas duas soluções: uma primeira sendo considerado um meio semi-infinito e outra considerando um meio finito.

#### 2.4.3.1 Meio Finito — Sólido Semi-infinito

A solução apresentada aqui foi desenvolvida por Cho e Sunderland, 1969, baseado no método integral proposto por Goodman [Goodman, 1958; Goodman, 1961; Goodman, 1964] para a solução na região do líquido sendo que na região do sólido utiliza-se a solução de meio semi-infinito conforme os casos anteriores, dadas por Stefan e Neumann.

Considere-se um domínio finito unidimensional delimitado por uma região compreendida por  $0 < x < L$ , contendo líquido em uma temperatura inicial  $T_i$ , maior que a temperatura de mudança de fase  $T_m$ , sujeito as condições de contorno de temperatura prescrita em  $x=0$  e isolamento em

$x=L$ , conforme figura 2.5. No instante  $t=0$  a temperatura no contorno de  $x=0$  é subitamente diminuída e mantida durante todo tempo do processo, em um valor  $T_w$  abaixo da temperatura de mudança de fase do líquido. Isto ocasiona o resfriamento do líquido, com a formação de uma camada de sólido, que é separada da região líquida por uma interface, através da qual se processarão as trocas de calor.

Assumindo-se que a transferência de calor através do material ocorra somente por difusão pura, a retirada de calor não vai afetar todo o domínio instantaneamente. O campo de temperaturas resultante, num dado instante pode ser visto na figura 2.5.

A figura 2.5 abaixo representa o modelo físico e a distribuição de temperatura para este modelo.

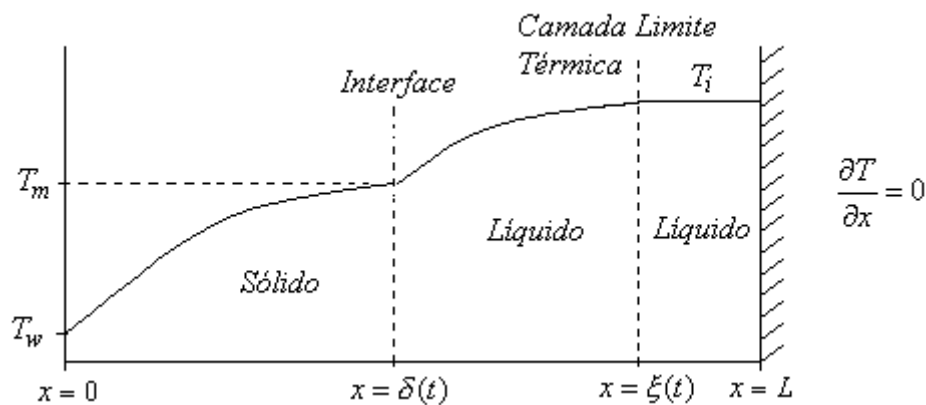


Fig. 2.5 Distribuição de temperatura para o problema de Meio Finito

A condição inicial é dada por

$$T(x,0) = T_i \quad \text{em } (t=0 \text{ e } x > 0). \quad (2.33)$$

As condições de contorno são dadas conforme a Fig. 2.5

$$T(0,t) = T_w \quad \text{em } (x=0 \text{ e } t > 0), \quad (2.34)$$

$$T(\delta,t) = T_s(\delta,t) = T_l(\delta,t) = T_m \quad \text{em } (x=\delta(t) \text{ e } t > 0), \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{em } (x=L \text{ e } t > 0). \quad (2.36)$$

O balanço de calor na interface sólido-líquido é aquele já mostrado na eq. (2.28).

Visto que o problema na região do sólido é considerado um meio semi-infinito, a solução deste fica conforme a solução de Neumann para o sólido a eq. (2.26).

O problema é agora reduzido a encontrar a distribuição de temperatura na região do líquido e  $\lambda$ . Para alcançar isto, o método integral de Goodman é aplicado nesta região.

Definindo uma espessura de penetração térmica,  $\xi(t)$ , além da qual se assume que nenhum fluxo de calor acontece, as novas condições de contorno no líquido são

$$T_l(x,t) = T_i \quad \text{em } (\xi(t) \leq x < L \text{ e } t > 0), \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \text{em } (\xi(t) \leq x < L \text{ e } t > 0). \quad (2.38)$$

Como o problema a ser resolvido é um problema de difusão pura a equação da energia dada pela a equação (2.6) integrada em relação a  $x$ , de  $\delta(t)$  até  $\xi(t)$ , resulta em

$$\int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \frac{\partial T_l}{\partial t} dx = \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} dx. \quad (2.39)$$

Da regra de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} T_l dx = \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \frac{\partial T_l}{\partial t} dx + \frac{d\xi}{dt} T_l(\xi,t) - \frac{d\delta}{dt} T_l(\delta,t). \quad (2.40)$$

Usando a condição de contorno  $T_l(\xi,t) = T_i$ , eq. (2.37), e  $T_l(\delta,t) = T_m$ , eq. (2.35) e substituindo na equação (2.40) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} T_l dx = \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \frac{\partial T_l}{\partial t} dx + \frac{d\xi}{dt} T_i - \frac{d\delta}{dt} T_m, \quad (2.41)$$

rearranjando os termos

$$\int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \frac{\partial T_l}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} T_l dx - \frac{d\xi}{dt} T_i + \frac{d\delta}{dt} T_m. \quad (2.42)$$

Resolvendo o lado direito da equação (2.39) tem-se

$$\int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} dx = \alpha_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} - \alpha_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial x} \right|_{x=\delta(t)}, \quad (2.43)$$

e utilizando a condição de contorno  $\frac{\partial T_l}{\partial x}(\xi, t) = 0$  resulta

$$\int_{\delta(t)}^{\xi(t)} \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} dx = -\alpha_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)}. \quad (2.44)$$

Substituindo na equação (2.39) as equações (2.42) e (2.44) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} T_l dx - \frac{d\xi}{dt} T_i + \frac{d\delta}{dt} T_m = -\alpha_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)}. \quad (2.45)$$

Separando os termos da equação (2.45) resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta(t)}^{\xi(t)} T_l dx = -\alpha_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)} + \frac{d\xi}{dt} T_i - \frac{d\delta}{dt} T_m. \quad (2.46)$$

Um polinômio para distribuição de temperatura satisfazendo as condições de contorno dadas pelas equações (2.35), (2.37) e (2.38) é assumido, e que vem dado por

$$T_l(x, t) = T_i + (T_m - T_i) \left( \frac{\xi - x}{\xi - \delta} \right)^2. \quad (2.47)$$

Assumindo também que

$$\xi(t) = 2\beta\sqrt{\alpha_s t}, \quad (2.48)$$

e substituindo a equação (2.47) na (2.46), utilizando as definições de  $\delta$  e  $\xi$ , resulta

$$\beta = \lambda + \frac{3}{2} \left[ -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_l}{\alpha_s}} \right]. \quad (2.49)$$

Utilizando o balanço na interface para a determinação de  $\lambda$  tem-se então a equação transcendental para  $\lambda$ ,

$$\frac{e^{(-\lambda^2)}}{\operatorname{erf}(\lambda)} - \frac{k_l c_{ps}}{k_s c_{pl}} \frac{Ste_l}{Ste_s} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \left( -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_l}{\alpha_s}} \right)} - \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{Ste_s} = 0. \quad (2.50)$$

Encontrando  $\lambda$  pode-se determinar  $\beta$  e  $\delta$ . A partir destes parâmetros tem-se  $\xi$ , e as distribuições de temperatura no sólido e no líquido.

### 2.4.3.2 Meio Finito — Sólido Finito

Uma outra forma analítica de resolver este problema é considerar o domínio do sólido não um meio semi-infinito, e sim um meio finito, utilizando separação de variáveis para resolvê-lo [Özi(ik, 1993].

O problema para o sólido é descrito pela eq.(2.5), a condição inicial (2.25) e as condições de contorno (2.17) e (2.18).

O problema apresenta condições de contorno não homogêneas. A opção é dividir a solução em duas partes:

parte estacionária -  $T_e(x)$

parte homogênea -  $T_h(x,t)$

A solução completa é a soma das duas:

$$T_s(x,t) = T_e(x) + T_h(x,t). \quad (2.51)$$

As soluções para as partes estacionária e homogênea são mostradas em Özisik, 1993,

$$T_e(x) = \frac{(T_m - T_w)}{\delta} x + T_w, \quad (2.52)$$

$$T_h(x,t) = \frac{2}{\delta} \left[ T_i - T_w - \frac{(T_m - T_w)}{\delta} x \right] \left( \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \beta_m x e^{-\alpha_s \beta_m^2 t} \frac{1}{\beta_m} (-\cos \beta_m \delta + 1) \right), \quad (2.53)$$

como  $\frac{1}{\beta_m} = \frac{\delta}{\pi m}$  então tem-se como solução para sólido

$$T_s(x,t) = T_w + \frac{(T_m - T_w)x}{\delta} + \frac{2}{\delta} \left[ T_i - T_w - \frac{(T_m - T_w)x}{\delta} \right] \left( \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{\pi m x}{\delta} \right) e^{-\frac{\alpha_s \pi^2 m^2 t}{\delta^2}} \frac{\delta}{\pi m} (-\cos(\pi m) + 1) \right). \quad (2.54)$$

Como a solução para o líquido é a mesma desenvolvida anteriormente, emprega-se o mesmo balanço de calor na interface sólido-líquido, eq. (2.28), que resulta na seguinte equação transcendental para  $\lambda$

$$\frac{1}{2} - S \left( \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m) e^{-\frac{1}{4} \frac{\pi^2 m^2}{\lambda^2}} (-\cos(\pi m) + 1) \right) - \frac{Ste_l k_l c_{ps}}{Ste_s k_s c_{pl}} \frac{\lambda}{\left( -\frac{3}{2} \lambda + \frac{1}{2} \sqrt{9\lambda^2 + 12 \frac{\alpha_l}{\alpha_s}} \right)} - \frac{\lambda^2}{Ste_s} = 0, \quad (2.55)$$

sendo  $S$  é o parâmetro de superaquecimento dado por

$$S = \frac{T_i - T_m}{T_w - T_m}. \quad (2.56)$$

Com números de  $Ste_s$  e  $Ste_l$  determinados encontra-se,  $\lambda$  pode-se então determinar  $\beta$  e  $\delta$ . A partir destes, tem-se  $\xi$  e as distribuições de temperatura no sólido e no líquido.

#### 2.4.4 Estudo Comparativo da Espessura Solidificada

Para efeito comparativo passa-se a analisar um problema resolvido por Voller e Cross, 1981a, sendo este um canal em forma quadrada, de comprimento infinito. O canal esta inicialmente cheio de líquido a temperatura de  $2^\circ\text{C}$ . No tempo  $t=0$  a temperatura das suas paredes é colocada a  $-10^\circ\text{C}$  e assim mantida ao longo do tempo. A área da seção do canal é de  $1\text{m}^2$  e as propriedades físicas da substância são as seguintes:

$$\begin{aligned} T_m &= 0^\circ\text{C}; & \rho_s &= \rho_l = 1 \text{ kg/m}^3; \\ k_l &= k_s = 2 \text{ W/m }^\circ\text{C}; & L_f &= 100 \text{ MJ/kg} \\ c_{ps} &= c_{pl} = 2 \text{ MJ/kg }^\circ\text{C}; \end{aligned}$$

A figura asseguir mostra a configuração do problema resolvido por Voller e Cross, 1981a.

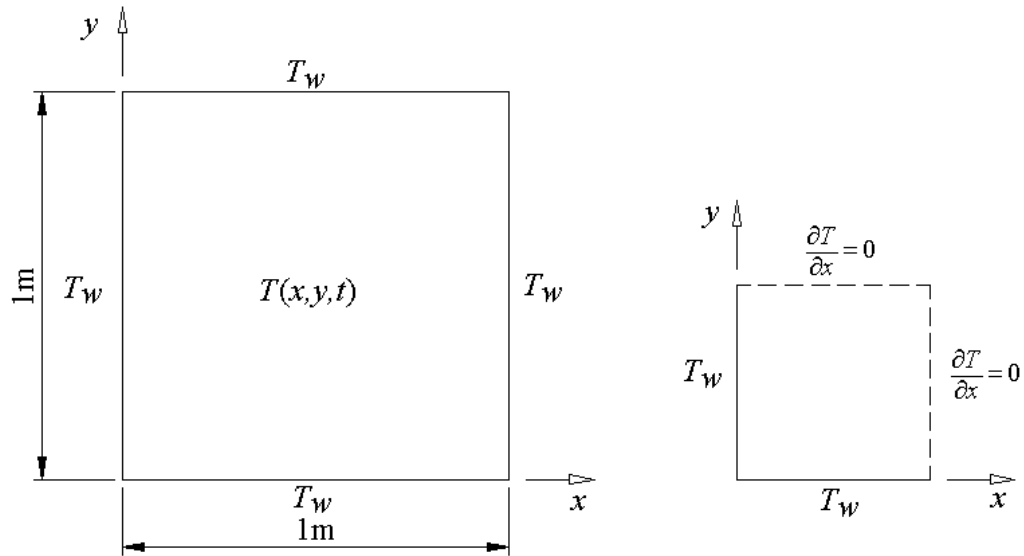


Fig. 2.6 Representação do canal e redimensionamento devido à simetria do problema

A solução a ser apresentada aqui vai considerar o modelo unidimensional para comparação das curvas.

O gráfico da figura 2.7 mostra a evolução da espessura solidificada ao longo do tempo para solução de Stefan, Neumann, meio finito sólido semi-infinito, meio finito sólido finito e análise de escala.

A determinação do parâmetro  $\lambda$  foi obtida utilizando o programa de computação simbólica Maple V, Release 5. O valor encontrado para cada solução é mostrado abaixo dentro de uma faixa de 0 a 1, valor que torna:

Stefan  $\lambda = 0,34008224541$ ;

Neumann  $\lambda = 0,3223905721$ ;

Meio finito sólido semi-infinito  $\lambda = 0,3223905721$ ;

Meio finito sólido finito  $\lambda = 0,3348609138$ .

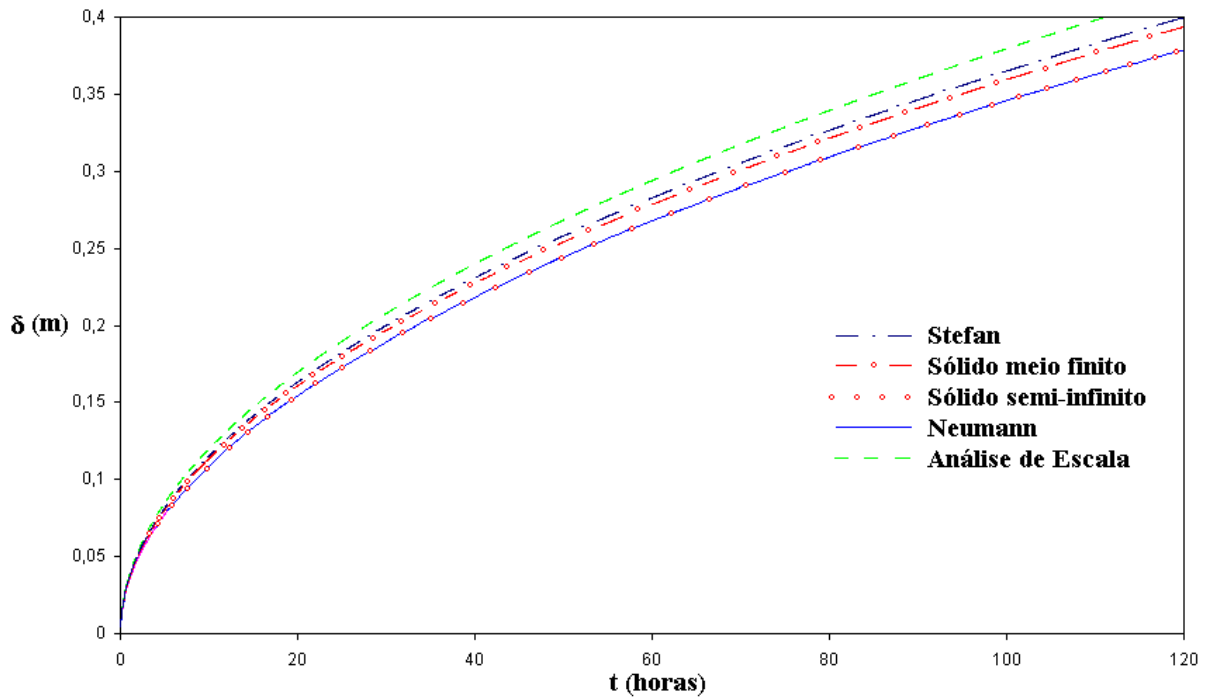


Fig. 2.7 Evolução da espessura solidificada com o tempo para as diversas soluções analisadas

A figura 2.7 mostra que as soluções de Neumann e Sólido semi-infinito são praticamente idênticas. As soluções para Sólido meio finito e Stefan se aproximam bastante. A análise de escala mostra que uma solução barata como essa pode levar a uma boa aproximação. Neste caso, por exemplo, a solução encontrada por Neumann ou Meio finito com sólido semi-infinito para 120 horas resultou em  $\delta = 0,379 m$ , e análise de escala  $\delta = 0,415 m$ . A solução não só apresenta concordância na unidade comprimento mas também bastante próximo do resultado encontrado pela solução analítica, confirmando o que já tinha-se projetado anteriormente.



## **3 MODELO NUMÉRICO**

### **3.1 Introdução**

Nos capítulos anteriores foram apresentadas as soluções clássicas analíticas para os problemas de solidificação, bem como as soluções para meio finito e de ordem de grandeza. Neste capítulo dar-se-á ênfase aos modelos numéricos.

Com o desenvolvimento cada vez maior de computadores rápidos e relativamente baratos, tem sido possível a solução de problemas mais complexos, com geometrias irregulares e descrições mais realísticas dos fenômenos envolvidos.

As simulações numéricas então se tornaram ferramentas indispensáveis em muitas situações de projetos de produtos e processos de manufatura, para avaliar a sua eficácia antes de gastar fortunas na construção de protótipos, moldes, etc. As simulações possibilitam também a análise de diferentes variáveis, muitas dessas difíceis de se obter experimentalmente [Bianchi, 1997].

Vários modelos matemáticos têm sido propostos para estudar os fenômenos de solidificação. Neste capítulo referência será feita para alguns destes modelos desenvolvidos para substâncias puras.

A transferência de calor com mudança de fase está associada a uma larga classe de problemas de prática significativa. Como resultado foi desenvolvida uma variedade de técnicas numéricas para lidar com mudança de fase [Crank, 1984]. A maioria dessas técnicas referem-se a problemas em que a difusão é predominante. Além disso, algumas técnicas numéricas têm grande complexidade, e daí suas aplicações no modelamento de problemas reais, que envolvem fenômenos físicos complexos. O movimento da frente de fusão ou solidificação é descrito

pelas soluções de Stefan e de Neumann [Carslaw e Jaeger, 1959; Rubinstein, 1971; Ockendon e Hodgkins, 1975]. A solução numérica dessas equações envolve a localização contínua da fronteira móvel de mudança de fase ao longo do tempo, sob uma região aproximada por um número finito de pontos. Isto torna muitos métodos numéricos complexos na sua implementação [Rubinstein, 1971].

Os dois mais importantes e largamente usados métodos são o da entalpia e o da temperatura, este último baseado no método da capacidade térmica equivalente. A diferença fundamental entre os dois métodos se encontra na formulação da equação da energia, em termos de entalpia ou em termos de temperatura. Ambos métodos apresentam vantagens e desvantagens.

A formulação em termos de temperatura tem a necessidade de identificar a localização da interface sólido-líquido ao longo do tempo permanentemente [Morgan, 1981; Hsiao e Chung, 1984; Crank, 1984]. Isto leva a um algoritmo mais complexo em termos de malha, pois a malha tem a necessidade de adaptar-se na medida que a interface sólido-líquido avança no tempo. Como em substâncias puras a mudança de fase ocorre em uma determinada temperatura, ou em alguns casos de ligas não eutéticas em que ocorre numa faixa de temperaturas, existe a necessidade de uma mudança de variável a fim de resolver este problema.

A técnica numérica empregada para resolver o problema é a imobilização de fronteira, através de uma transformação de coordenadas. Com isso o novo sistema, antes com fronteira irregular e móvel, agora apresenta fronteira paralela às demais e fixa [Jesus, 1998].

A outra técnica de gerar soluções numéricas de problemas de mudança de fase é reformular a equação da energia em uma única equação em termos de entalpia. A entalpia é usada como uma variável dependente junto com a temperatura [Özisik, 1993; Lewis e Roberts, 1987]. Este método é chamado o método de entalpia ou também de formulação fraca. Detalhes do método da entalpia são dados por um grande número de autores, como Price e Slack, 1954; Bonacina, et al., 1973; Meyer, 1973; Atthey, 1974; Shamsundar e Sparrow, 1975; Crowley, 1978; Voller e Cross, 1981a; Voller e Cross, 1981b; Voller e Cross, 1983; Tacke, 1985;

Voller, Markatos e Cross, 1987; Voller e Prakash, 1987; Cao et al., 1989. O degrau promovido pela formulação em entalpia, que é o calor latente de mudança de fase, remove a necessidade de localizar a fronteira de mudança de fase (em termos de energia, valor acima do calor latente significa região de líquido, valor abaixo região de sólido) e assim simplifica qualquer método numérico de solução.

Contudo, a discretização de Diferenças Finitas padrão para o método da entalpia tem uma tendência a oscilações numéricas na temperatura e na posição da frente de mudança de fase, conforme Voller, Cross e Walton, 1979; Voller e Cross, 1981a e 1983; Crowley e Ockendon, 1979. Especialmente para a frente de mudança de fase plana. A precisão do cálculo da temperatura, comparada com um problema similar sem mudança de fase, é consideravelmente reduzida, devido a este efeito. Refinando a malha de cálculo reduzem-se as oscilações, mas aumenta as exigências em termos de memória e tempo de computação.

Para superar este aspecto insatisfatório do método de entalpia, Voller e Cross sugeriram dois algoritmos. A primeira técnica [Voller e Cross, 1981a] evita as oscilações, mas produz só um número limitado de valores calculados para a distribuição de temperatura, e da posição da frente de mudança de fase. Isto é devido aos valores de  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , malha espacial e temporal, serem estipulados, e os resultados que são aproveitados serem somente aqueles onde a frente de mudança de fase coincide com um ponto do nó da malha de solução.

O segundo algoritmo de trabalho de Voller e Cross, 1983, propõe uma malha dupla que envolve tempo de computador dobrado. Embora isto tenha melhorado quanto à localização da frente de mudança de fase, não afetou as oscilações de temperatura. Também neste trabalho foi introduzido o conceito de fração de sólido, útil para determinar a posição da frente de solidificação.

Tacke, 1985 constatou que as oscilações têm sua fonte no elemento que contém a frente de mudança de fase. Então apresentou uma discretização melhorada para a fração solidificada desenvolvida por Voller e Cross, 1983. A técnica é baseada em um balanço de entalpia no volume de controle que contém a frente de mudança de fase, em

combinação com perfis de temperatura linearizados perto dele. Então dividiu a energia total contida no volume onde se encontra a frente de mudança de fase a partir de um perfil linear. Ficou sendo igual à parcela de calor latente mais parte do calor sensível no líquido e parte de calor sensível no sólido. Esta expressão evitou as oscilações tanto na distribuição de temperatura como na posição da frente de mudança de fase.

As vantagens da formulação em entalpia são que o problema a ser resolvido é formulado sobre uma malha fixa. Não é necessária modificação no esquema numérico a fim de satisfazer as condições na interface móvel de mudança de fase. Também é de fácil implementação [Crowley, 1978]. Isto pode ser estendido para problemas multidimensionais, e para solidificação de ligas.

Os métodos de entalpia mais atuais propostos por Voller e Prakash, 1987; Cao et al., 1989; Voller et al., 1990, são flexíveis e podem tratar com problemas de mudança de fase ocorrendo tanto em uma única temperatura como sobre uma faixa de temperaturas.

Apresentado um breve histórico de alguns métodos, na seção seguinte passa-se a apresentar a equação de conservação que rege o fenômeno.

### **3.2 Equação de Conservação**

O experimento que será descrito no capítulo 4 foi concebido para ser controlado por difusão pura, a fim de evitar os efeitos da convecção durante o processo de solidificação. Então, visto que não há escoamento, somente a equação de conservação de energia em sua forma difusiva pura necessita ser resolvida.

O modelo usado aqui é baseado nas seguintes hipóteses:

O processo é unidimensional e transiente.

As propriedades termofísicas de cada fase são isotrópicas e independentes da temperatura, podendo variarem de fase para fase.

A fase sólida é rígida, e da mesma forma que a líquida, não se movimenta.

As fases se encontram em equilíbrio termodinâmico.

Para o problema da solidificação unidirecional de uma substância pura, em um domínio cartesiano, a equação da energia com as hipóteses assumidas resulta

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (3.1)$$

No problema, tem-se, ainda, duas variáveis dependentes,  $h$  e  $T$ . O método numérico adotado no presente trabalho é o de Cao, Faghri, e Chang, 1989.

O método consiste em transformar a equação da energia em uma equação não linear com uma única variável dependente  $h$ . Assim, resolver um problema de mudança de fase é equivalente a resolver uma equação não linear em entalpia.

Na seção seguinte ele é mostrado.

### 3.3 Método da Entalpia

No capítulo 2, a partir da equação da energia tomou-se a definição de  $c_p$  (calor específico a pressão constante), dada por

$$\frac{dh}{dT} = c_p(T), \quad (3.2)$$

e formulou-se a equação da energia em termos de temperatura.

Da eq. (3.2), tem-se uma relação entre entalpia e temperatura,

$$\frac{dh}{c_p} = dT. \quad (3.3)$$

O problema proposto é de uma substância pura onde a mudança de fase ocorre em um única temperatura  $T_m$ . Por praticidade se estabelece para a região onde o material se encontra sólido, na temperatura  $T_m$ , que  $h=0$ .

A figura 3.10 mostra este e outros detalhes.

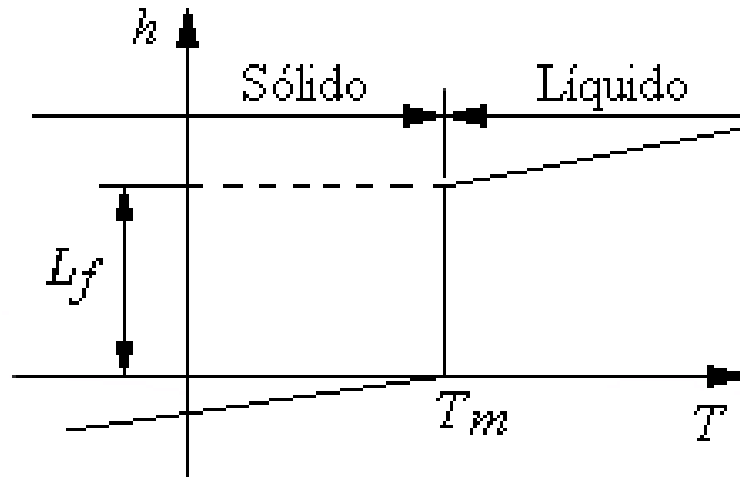


Fig. 3.1 Diagrama  $h \times T$  para uma substância pura

Conforme a figura 3.1, para a fase sólida, onde  $h \leq 0$  tem-se que

$$T = T_m + \frac{h}{c_{p_s}}, \quad (3.4)$$

onde  $c_{p_s}$  é o calor específico para a fase sólida.

Para a região compreendida entre as fases sólida e líquida, conhecida como interfase sólido-líquido, onde  $0 < h < L_f$  tem-se que

$$T = T_m, \quad (3.5)$$

e para a região correspondente à fase líquida, onde  $h \geq L_f$  tem-se

$$T = T_m + \frac{(h - L_f)}{c_{p_l}}, \quad (3.6)$$

onde  $c_{p_l}$  é o calor específico do líquido.

Como a formulação ainda se encontra com duas variáveis dependentes se faz uso uma mudança de variável, através da “Temperatura Kirchhoff” [Solomon et al., 1986] definida por

$$T_k = \int_{T_m}^T k(\eta) d\eta, \quad (3.7)$$

onde  $k(\eta)$  é a condutividade térmica.

Considerando  $k(\eta)$  constante se obtém, para a fase sólida

$$T_k = k_s (T - T_m), \quad (3.8)$$

para interface sólido-líquido

$$T_k = 0, \quad (3.9)$$

e para a fase líquida

$$T_k = k_l (T - T_m). \quad (3.10)$$

Substituindo o valor de  $T$  da eq.(3.4) na equação (3.8) obtém-se, para a fase sólida

$$T_k = \frac{k_s h}{c_{ps}} \quad (3.11)$$

e para fase líquida, substituindo a eq.(3.6) na eq.(3.10), obtém-se

$$T_k = \frac{k_l (h - L_f)}{c_{pl}}. \quad (3.12)$$

Pode-se ainda expressar, para a região do sólido,

$$T = \frac{T_k}{k_s} + T_m \quad (3.13)$$

e para região do líquido

$$T = \frac{T_k}{k_l} + T_m. \quad (3.14)$$

Sendo assim tem-se, de forma genérica, que

$$T = \frac{T_k}{k} + T_m, \quad (3.15)$$

então se pode substituir a eq.(3.15) na eq.(3.1), e obter

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}. \quad (3.16)$$

O passo seguinte é introduzir uma função para  $T_k$  que expresse para cada região as definições já dadas pelas equações (3.9), (3.11) e (3.12). A equação toma a forma de

$$T_k = \Gamma(h)h + S(h), \quad (3.17)$$

onde  $\Gamma(h)$  é o coeficiente de difusão térmica e  $S(h)$  o termo fonte da equação, dados por

$$\Gamma(h) = \frac{k_s}{c_{ps}} \text{ e } S(h) = 0 \text{ para } h \leq 0, \quad (\text{fase s\u00f3lida}) \quad (3.18)$$

$$\Gamma(h) = 0 \text{ e } S(h) = 0 \text{ para } 0 < h < L_f, \quad (\text{interface}) \quad (3.19)$$

$$\Gamma(h) = \frac{k_l}{c_{pl}} \text{ e } S(h) = \frac{-k_l L_f}{c_{pl}} \text{ para } h \geq 0. \quad (\text{fase l\u00edquida}) \quad (3.20)$$

Substituindo a eq.(3.17) na eq.(3.16), obt\u00e9m-se

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 (\Gamma h)}{\partial x^2} + P, \quad (3.21)$$

com

$$P = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad \Gamma = \Gamma(h), \quad S = S(h). \quad (3.22)$$

A equa\u00e7\u00e3o da energia foi transformada numa equa\u00e7\u00e3o, com uma \u00fanica vari\u00e1vel dependente,  $h$ .

Tendo concluido a formula\u00e7\u00e3o, passa-se ao m\u00e9todo num\u00e9rico para a solu\u00e7\u00e3o do problema.

### 3.4 M\u00e9todo Num\u00e9rico

Obtida a equa\u00e7\u00e3o diferencial, parte-se agora para o m\u00e9todo num\u00e9rico a fim de resolver esta equa\u00e7\u00e3o diferencial em derivadas parciais, eq. (3.23), que \u00e9 parab\u00f3lica no tempo e el\u00edptica no espa\u00e7o.

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Gamma h) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad \Gamma = \Gamma(h), \quad S = S(h). \quad (3.23)$$

Nos esquemas num\u00e9ricos as equa\u00e7\u00f5es diferenciais s\u00e3o aproximadas por equa\u00e7\u00f5es alg\u00e9bricas, e o dom\u00ednio \u00e9 discretizado.

Esta equa\u00e7\u00e3o \u00e9 discretizada pelo M\u00e9todo dos Volumes Finitos, conforme apresentado em Patankar, 1980; Maliska, 1995; Versteeg e Malalasekera, 1995 e Ferziger e Peric, 1997. Resultante desta discretiza\u00e7\u00e3o surge um sistema de equa\u00e7\u00f5es alg\u00e9bricas lineares a resolver.

O M\u00e9todo dos Volumes Finitos consiste em integrar as equa\u00e7\u00f5es diferenciais sobre volumes de controle, de tamanho finito, gerados na discretiza\u00e7\u00e3o de um dom\u00ednio, aplicando as leis de conserva\u00e7\u00e3o. Uma vez que as equa\u00e7\u00f5es diferenciais s\u00e3o originalmente obtidas atrav\u00e9s de



balanços sobre os volumes de controle, tem-se a garantia de que a massa, a energia e a quantidade de movimento são conservadas. Nesse sentido as soluções são exatas. Mesmo em malha grosseira haverá conservação. Em outras palavras, migra-se do domínio infinitesimal das equações diferenciais, para o domínio finito formado por volumes de controle.

Partindo para a integração da equação (3.23), sobre os volumes de controle, tem-se

$$\iiint_{\Delta V} \rho \frac{\partial h}{\partial t} dV = \iiint_{\Delta V} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Gamma h) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) dV. \quad (3.24)$$

A figura 3.2 apresenta a malha sobre o domínio de solução. O  $\Delta x$  é o tamanho do volume de controle centralizado no ponto “P”,  $\delta x_e$  e  $\delta x_w$  são as distâncias entre os centros dos volumes de controle vizinhos, posicionados nos pontos “E” (leste) e “W” (oeste) respectivamente. As letras “e” e “w” corresponde à posição das faces dos volumes de controle.

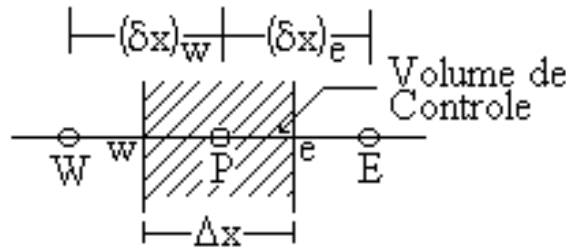


Fig. 3.2 Malha sobre domínio de solução

Usando um esquema totalmente implícito e referindo à Fig. 3.2, tem-se

$$\iiint_{\Delta V} \rho \frac{\partial h}{\partial t} dV = \rho \Delta x \frac{h_P - h_P^o}{\Delta t}, \quad (3.25)$$

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Gamma h) dV = \left( \frac{\partial(\Gamma h)}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial(\Gamma h)}{\partial x} \right)_w = \frac{\Gamma_E h_E - \Gamma_P h_P}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_P h_P - \Gamma_W h_W}{(\delta x)_w}, \quad (3.26)$$

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} dV = \frac{S_E - S_P}{(\delta x)_e} - \frac{S_P - S_W}{(\delta x)_w}, \quad (3.27)$$

onde  $\Delta t$  é passo de tempo e  $h_P^o$  é entalpia da interação anterior.

A equação algébrica resultante pode ser escrita em forma genérica como

$$a_P h_P = a_E h_E + a_W h_W + b, \quad (3.28)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_E = \frac{\Gamma_E}{(\delta x)_e}, \quad (3.29)$$

$$a_W = \frac{\Gamma_W}{(\delta x)_w}, \quad (3.30)$$

$$b = \frac{\rho \Delta x h_p^o}{\Delta t} + \frac{S_E - S_P}{(\delta x)_e} - \frac{S_P - S_W}{(\delta x)_w}, \quad (3.31)$$

$$a_P = \frac{\Gamma_P}{(\delta x)_e} + \frac{\Gamma_P}{(\delta x)_w} + \frac{\rho \Delta x}{\Delta t}. \quad (3.32)$$

Deve-se observar que contrariamente ao adotado em transferência de calor sem mudança de fase, onde os coeficientes de difusão térmica  $\Gamma$  são avaliados nas faces dos volumes de controle, no esquema em questão estes coeficientes são avaliados no centro do volume e não na interface para evitar o caso da interface, separando sólido e líquido.

Para exemplificar esta situação a figura 3.3 mostra a situação de um domínio sendo no ponto “P” sólido e no ponto “E” líquido, com a interface sólido-líquido sendo considerada em “e”. Sem mudança de fase se tem  $\frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}$ , e em situação de mudança de fase  $\frac{\Gamma_P}{(\delta x)_e}$ .

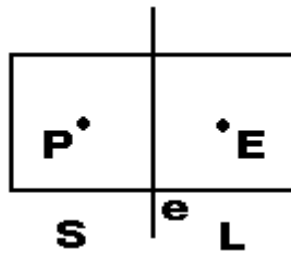


Fig. 3.3 Avaliação das propriedades nos volumes de controle em transferência de calor com e sem mudança de fase

Concluída a discretização, e conhecidas as condições iniciais e de contorno, deve-se resolver a eq.(3.28) a cada incremento de tempo.

### 3.5 Solução do Modelo Matemático

O transiente do problema estudado demanda um esquema de evolução no tempo. O procedimento de determinar os valores das variáveis físicas em um dado instante de tempo, para as equações algébricas e com conhecimento dos valores em um passo de tempo anterior, é repetido para passos de tempo sucessivos.

Para problemas altamente não lineares, é necessário o uso de sub-relaxação. Isto é freqüentemente empregado para evitar divergência na solução iterativa de equações fortemente não-lineares. Para os resultados numéricos, que serão apresentados na Seção 5.7, o coeficiente de sub-relaxação utilizado na solução da equação da energia foi 0.8. O coeficiente de relaxação serve para avançar mais rapidamente a solução, quando o processo está lento, ou segurar a variável, quando a mesma esta avançando em demasia e pode causar divergência [Maliska, 1995].

O conjunto de equações algébricas obtidas pelo procedimento de discretização foi resolvido usando TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*), com correção em bloco ao longo do domínio dimensional.

O procedimento iterativo para calcular o campo da entalpia para cada passo de tempo é executado até que o critério de convergência seja satisfeito. O critério usado requer que  $\varepsilon \leq 10^{-7}$  sendo  $\varepsilon$  dado por

$$\varepsilon = \left| \frac{h_P - h_P^o}{h_P^o} \right| \quad (3.33)$$

O passo de tempo utilizado é constante durante todo a solução. No caso das análises experimentais corresponde ao intervalo de tempo em que é feita a aquisição das amostras. Isto é feito para facilitar a comparação entre os resultados experimental e o numérico, depois de verificado se era suficientemente pequeno para não causar erro na solução numérica.

O tamanho do domínio computacional para todas as simulações foi selecionado para combinar com a dimensão vertical da seção de teste descrita no Capítulo 4. Visto que o problema é unidimensional, é possível usar um número muito grande de volumes de controle para discretizar o domínio, sem ter-se problemas de limitação de memória ou tempos de CPU muito grandes. Uma malha uniforme contendo 200 volumes de

controle foi escolhida e usada, tendo para um volume de controle um comprimento de 0,25mm.

Referente ao método é importante observar que não há necessidade de se rastrear a frente de mudança de fase, para resolver o problema. Entretanto pode-se localizá-la, a cada momento, a partir do valor de  $h$ , lembrando que a frente de mudança de fase situa-se entre  $0 < h < L_f$ .

A maneira mais simples de calculá-la consiste em varrer os volumes de controle da fronteira, partindo da região líquida, perguntando se  $h < L_f$ . Quando a resposta for afirmativa, assume-se que a frente de mudança de fase está no centro deste volume de controle. Este procedimento é satisfatório em casos de malhas refinadas, causando entretanto erros relativamente grandes em malhas menos refinadas.

Para melhorar a precisão se faz primeiro a localização do volume onde está acontecendo a mudança de fase, pelo método descrito anteriormente. Feito isso calcula-se a relação  $\left| \frac{h}{L_f} \right|$ , multiplicando pelo tamanho do volume de controle. Essa medida é considerada a fração do volume solidificado que é assumido diretamente como sendo a fração de sólido do volume de controle. Para estabelecer a posição da frente de solidificação, subtrai-se da posição da face em “w” do volume de controle o valor correspondente fração solidificada “ $f_s$ ”.

A temperatura de cada ponto do domínio de solução também pode ser calculada, a cada momento, a partir das equações (3.4), (3.5) e (3.6).

A figura 3.4 apresenta a distribuição de temperatura e entalpia na região de mudança de fase, demonstrando a linearização da temperatura e também as parcelas de calor latente indicada por “I”, parcela de calor sensível no líquido “II”, e parcela de calor sensível do sólido “III”.

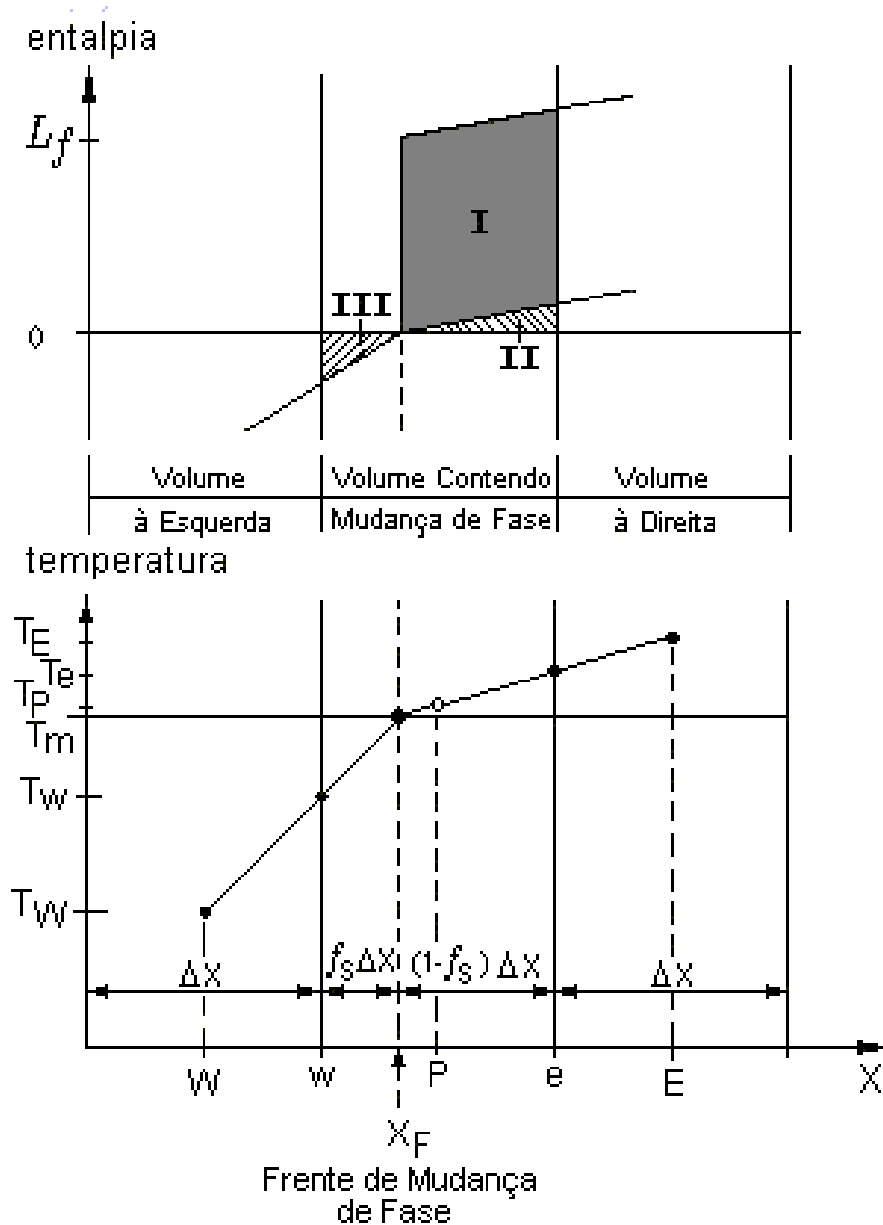


Fig. 3.4 Distribuição de temperatura e entalpia na região de mudança de fase

Como a solução no tempo é totalmente implícita, havendo não linearidades, são necessárias iterações a cada passo de tempo, conforme o algoritmo abaixo:

(1) Fazer com que  $h^k$  represente o campo de  $h$  existente no início das  $k$ th iterações.

(2) Destes valores, calcular valores tentativos de  $\Gamma$  e  $S$  de acordo com as relações deles com  $h$ , usando equações (3.18), (3.19) e (3.20).

(3) Resolver o conjunto de equações lineares discretizadas para adquirir os novos valores de  $h^{k+1}$ .

(4) Retornar para passo 2 e repetir o processo até que iterações deixem de produzir qualquer mudança significativa nos valores de  $h$ .

### 3.6 Comparações entre Resultados Numéricos com os Analíticos

Para efeito de comparação entre os métodos numéricos e os analíticos, toma-se o mesmo problema físico resolvido por Voller e Cross, 1981a, apresentado em capítulo 2 alterando-se o material e as temperaturas inicial e da parede.

O material escolhido é o cyclohexanol já que este é o material utilizado nos experimentos.

O canal está inicialmente cheio de líquido a temperatura de  $22,8^{\circ}\text{C}$ . Para o caso do problema de Stefan a temperatura inicial do líquido é a temperatura de mudança de fase deste, no caso  $22^{\circ}\text{C}$ . No tempo  $t=0$  a temperatura das suas paredes é colocada a  $0,5^{\circ}\text{C}$  e assim mantida ao longo do tempo. A área da seção do canal é de  $1\text{m}^2$  e as propriedades físicas do cyclohexanol [Reid et al., 1987; Riddick et al., 1986] são as seguintes:

$$T_m = 22^{\circ}\text{C};$$

$$T_i = 22,8^{\circ}\text{C};$$

$$k_l = k_s = 0,13683 \text{ W/m}^{\circ}\text{C};$$

$$\rho_s = \rho_l = 965 \text{ kg/m}^3;$$

$$c_{ps} = c_{pl} = 2020,966 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C};$$

$$L_f = 16972,84 \text{ J/kg}$$

Os gráficos apresentados nas figuras 3.5 e 3.6 representam as soluções analíticas dos problemas de Stefan e Neumann respectivamente, frente às soluções encontradas pelas análises numéricas. A solução apresentada é distribuição de temperatura para um determinado ponto com o tempo. As figuras mostram uma perfeita concordância entre as duas soluções.

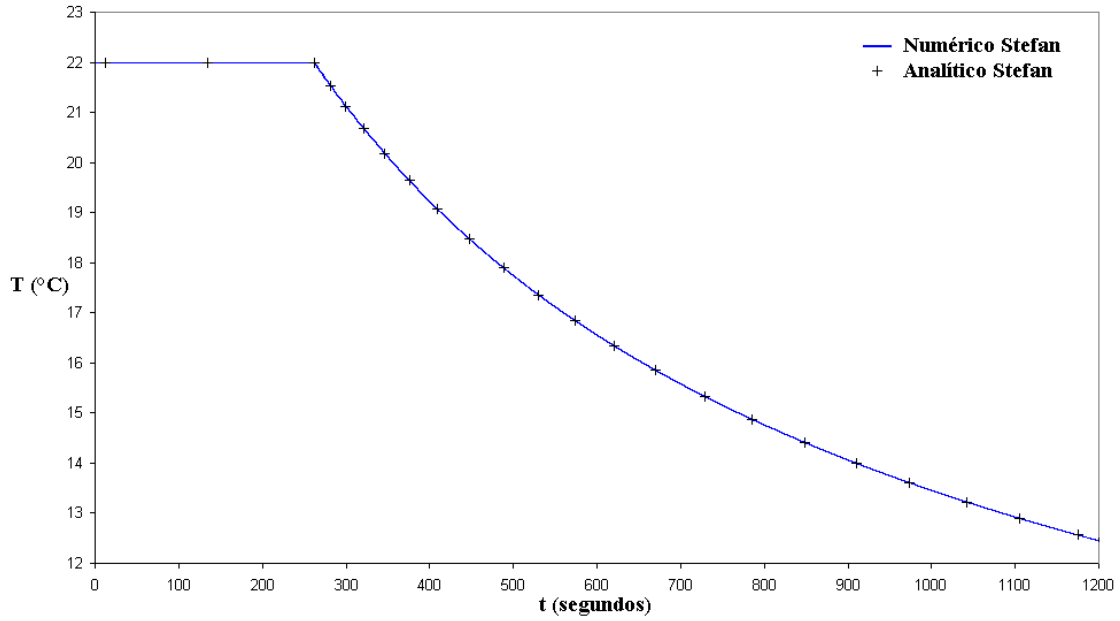


Fig. 3.5 Distribuição de temperatura para posição  $x=0,00745m$  problema de Stefan solução analítica e numérica.

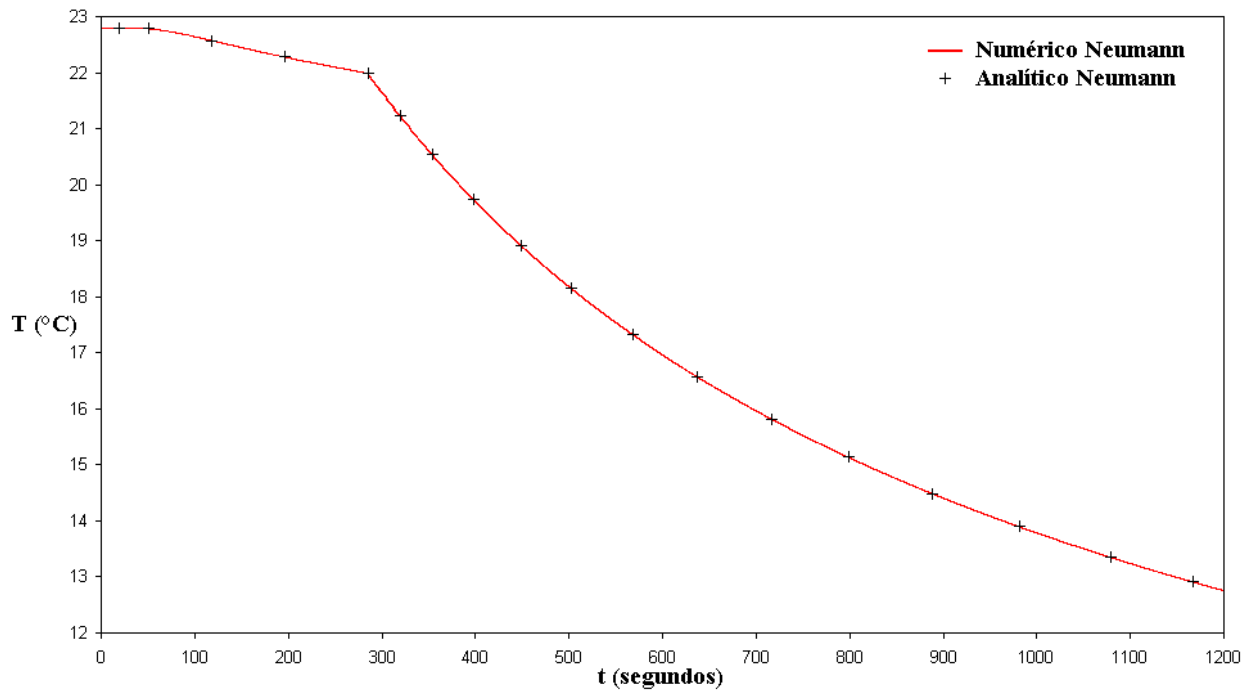


Fig. 3.6 Distribuição de temperatura para posição  $x=0,00745m$  problema de Neumann solução analítica e numérica.

Os gráficos 3.7 e 3.8 mostram a posição da interface com o tempo para a solução de Stefan e Neumann. Novamente nota-se uma perfeita concordância entre o numérico e analítico.

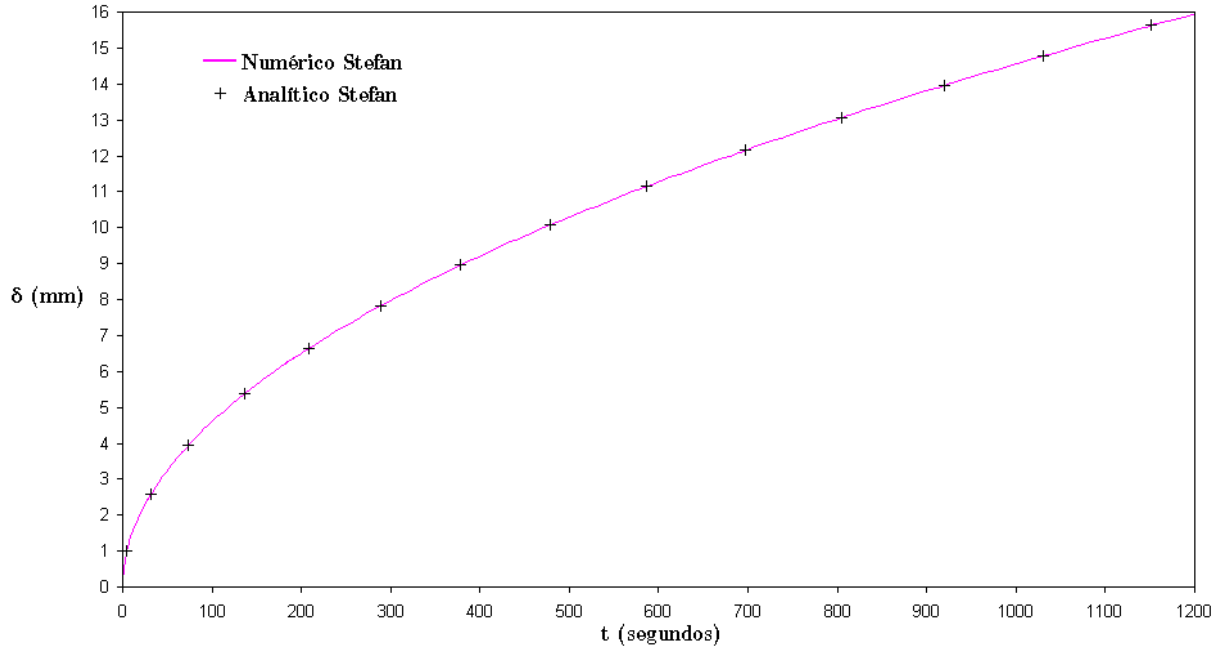


Fig. 3.7 Posição da interface com o tempo para o problema de Stefan solução analítica e numérica.

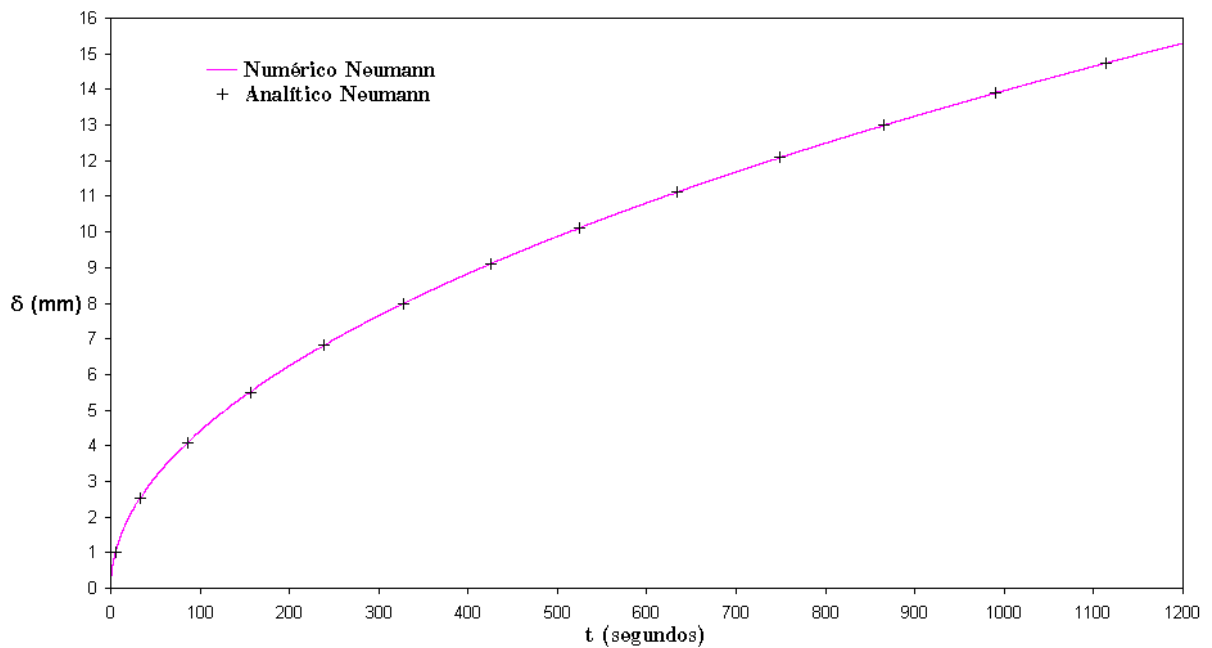


Fig. 3.8 Posição da interface com o tempo para o problema de Neumann solução analítica e numérica.



## 4 ANÁLISE EXPERIMENTAL

### 4.1 Introdução

Durante anos tem se concebido e utilizado a experimentação para buscar o entendimento dos processos de solidificação, e também para avaliar teorias. A dificuldade devido à opacidade dos metais e às altas temperaturas dificulta a realização de experimentos em laboratório, aumentando assim as dificuldades para o estudo da solidificação. O interesse em observar a interface sólido-líquido de um metal, devido à estrutura resultante da solidificação ser depende dos detalhes da morfologia da interface, conduziram à utilização de materiais transparentes que solidificam de forma semelhante aos metais. Estes compostos oferecem a oportunidade de fazer observações diretas de muitos dos fenômenos que determinam a estrutura de metais fundidos. Muitos aspectos da solidificação de metais podem ser estudados usando compostos orgânicos transparentes, através de analogias.

Os experimentos são desenvolvidos em seções de testes, geralmente recipientes transparentes de Acrílico ou vidro Pyrex, por serem relativamente baratos e fáceis de trabalhar. Estes experimentos tiveram Tammann, G., 1925 e 1929, Chalmers, 1940, Masuig, 1950, como grandes precursores.

Também são exemplos destas técnicas os trabalhos de Weinberg e Chalmers, 1951 e 1952, Rutter e Chalmers, 1953, Tiller, et al. 1953, Walton et all., 1955, Smith et all., 1955, Jackson, 1958, Cole e Winegard, 1963, Chalmers, 1964, Winegard, 1964, Jackson, et all., 1966 e Hunt et all., 1966, Jackson et all., 1967, Flemings e Nereo, 1967, Flemings et all., 1968a e 1968b.

A figura 4.1 apresenta a seção de teste desenvolvida por Jackson, et al., 1966.

Após estes trabalhos houve um grande número de publicações desenvolvidas sobre a ótica experimental, com diferentes concepções de seção de teste.

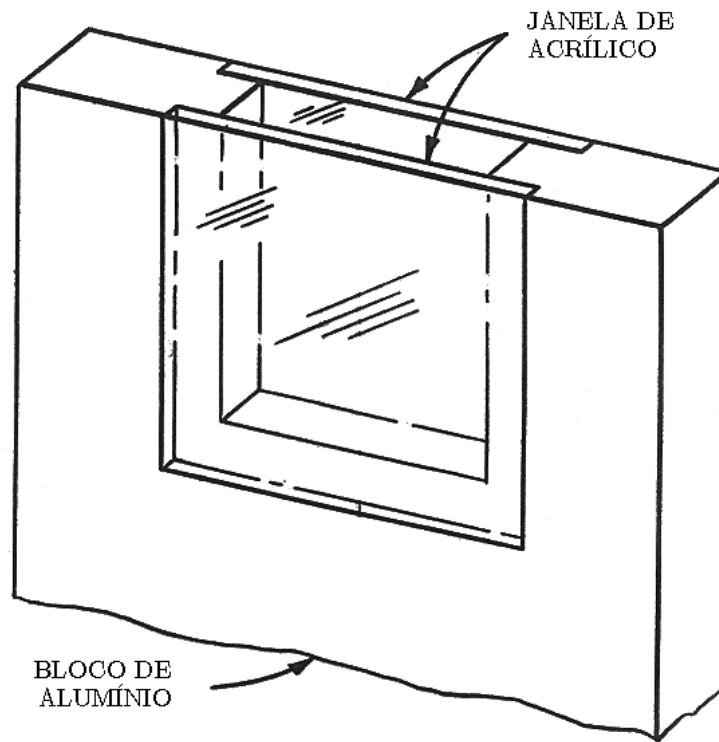


Fig. 4.1 O aparato de teste desenvolvido por Jackson, et al., 1966

Como exemplo desta técnica cita-se a formação de segregação em V, e V inversa, que ocorrem nos aços, em modelos similares empregando cloreto de amônia num molde de vidro.

O trabalho de Hunt et al., 1966, contribuiu no estudo dos fenômenos a nível microscópico, com o desenvolvimento de um aparato experimental para observar a solidificação. A figura 4.2 mostra o microscópio empregado.

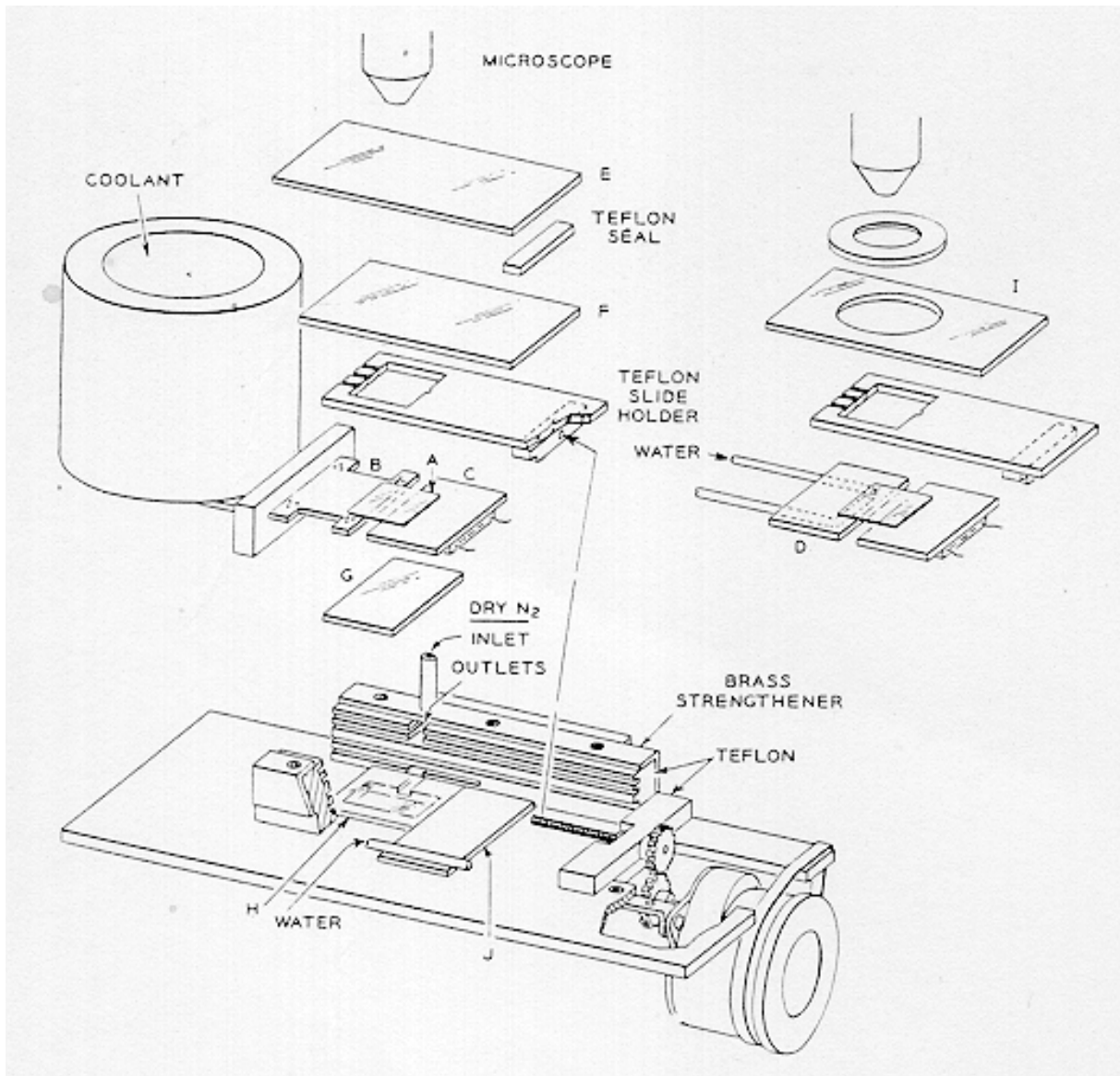


Fig. 4.2 Aparato de teste desenvolvido por Hunt et al., 1966

Uma derivação deste microscópio foi empregada no princípio da solidificação direcional com o uso da técnica de Bridgman, descrita por Flemings, 1974 e Kurz e Fisher, 1989. Este microscópio deu origem aos chamados criomicroscópios, desenvolvidos para análises do congelamento de materiais biológicos, conforme Bianchi, 1997.

A figura 4.3 apresenta um crescimento dendrítico do composto orgânico cyclohexanol, observado através do microscópio [Jackson e Hunt, 1965]. Este material fará parte dos estudos a seguir explanados.

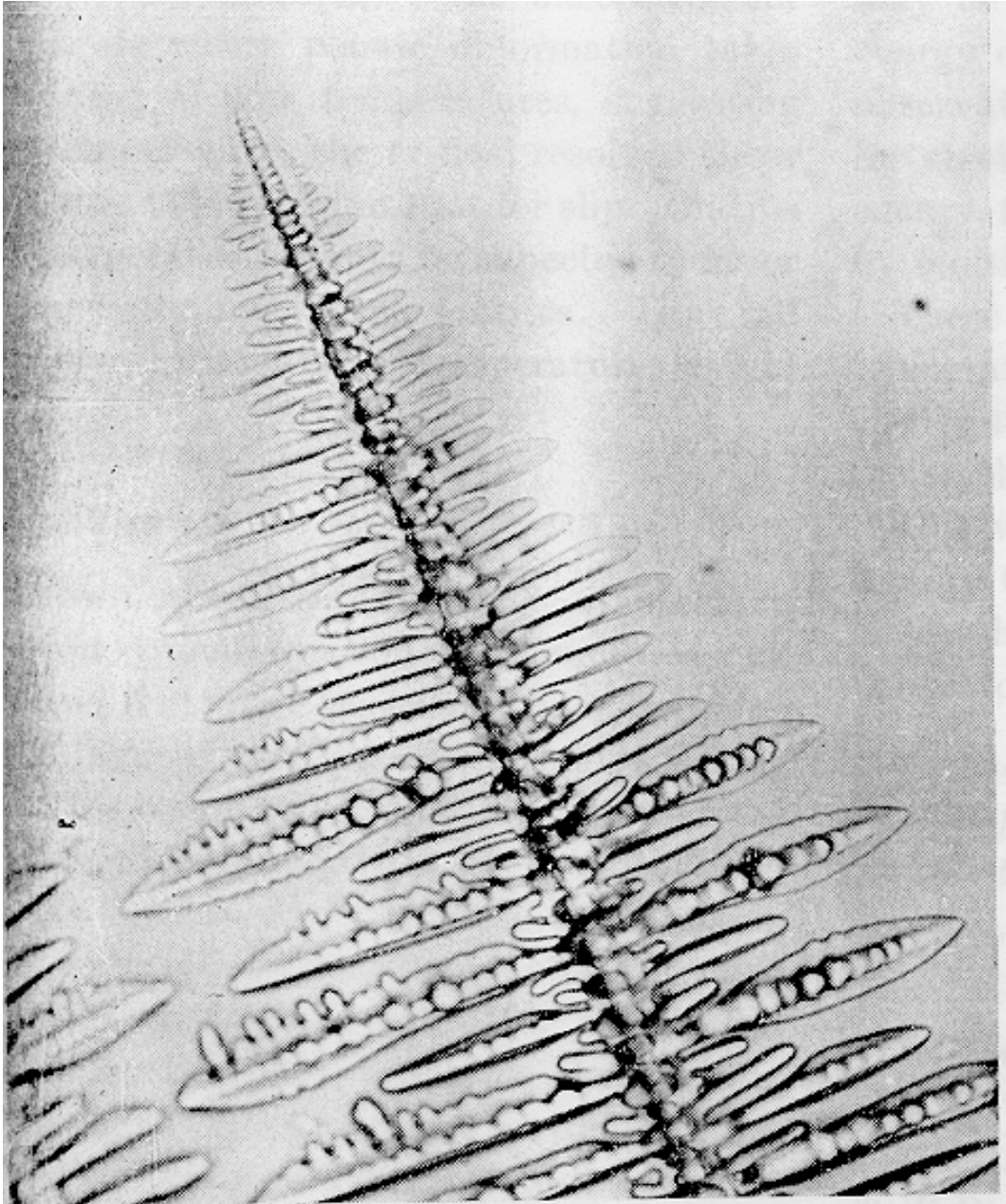


Fig. 4.3 Crescimento dendrítico do cyclohexanol

No terreno das altas temperaturas, trabalhando diretamente com aço e ligas como chumbo-alumínio, chumbo-estanho e alumínio-cobre, duas referências importantes são os solidificadores desenvolvidos por Garcia e Prates, 1978, mostrado na figura 4.4 e por Clyne, 1982, figura 4.5.

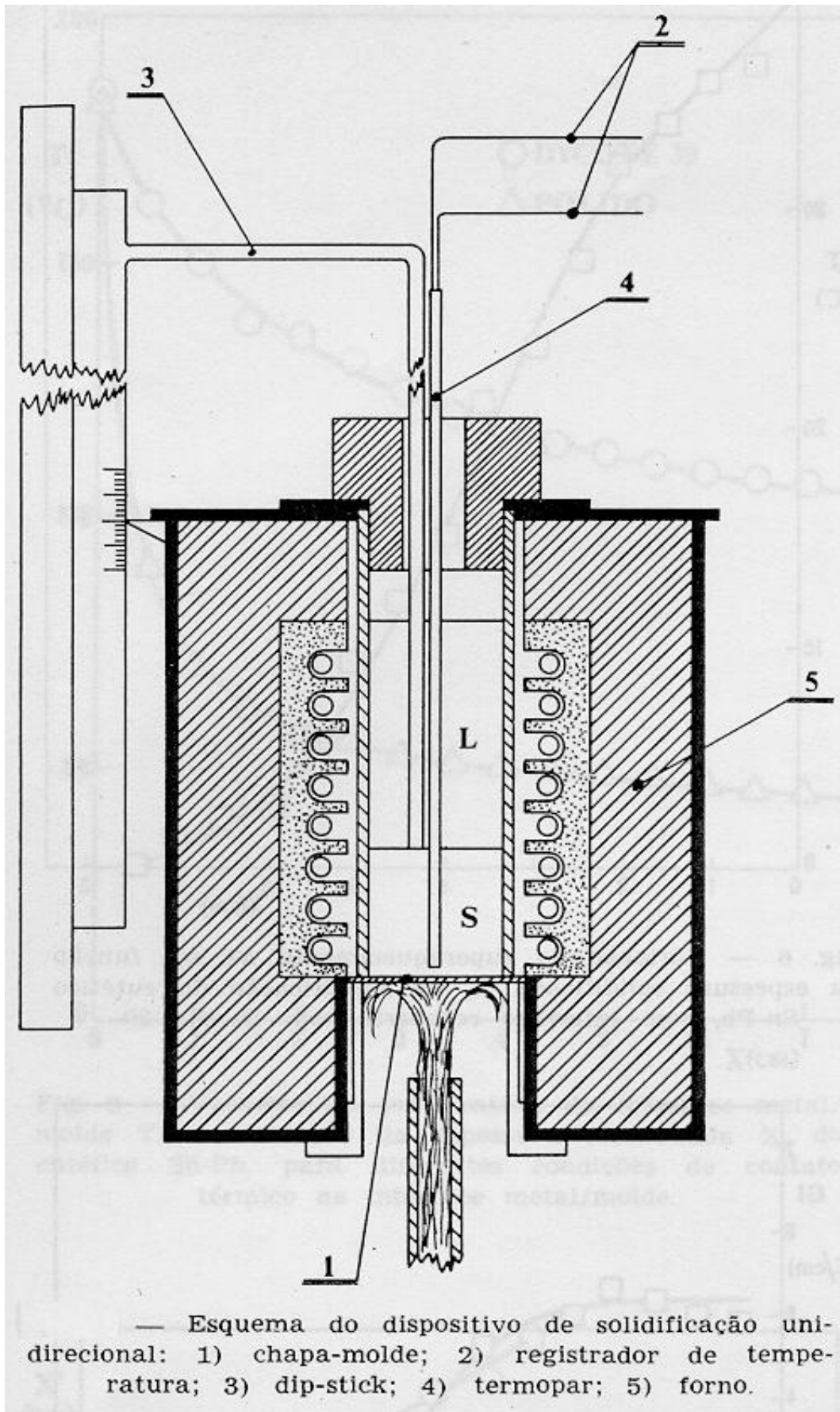


Fig. 4.4 Solidificador direcional (Garcia e Prates, 1978)

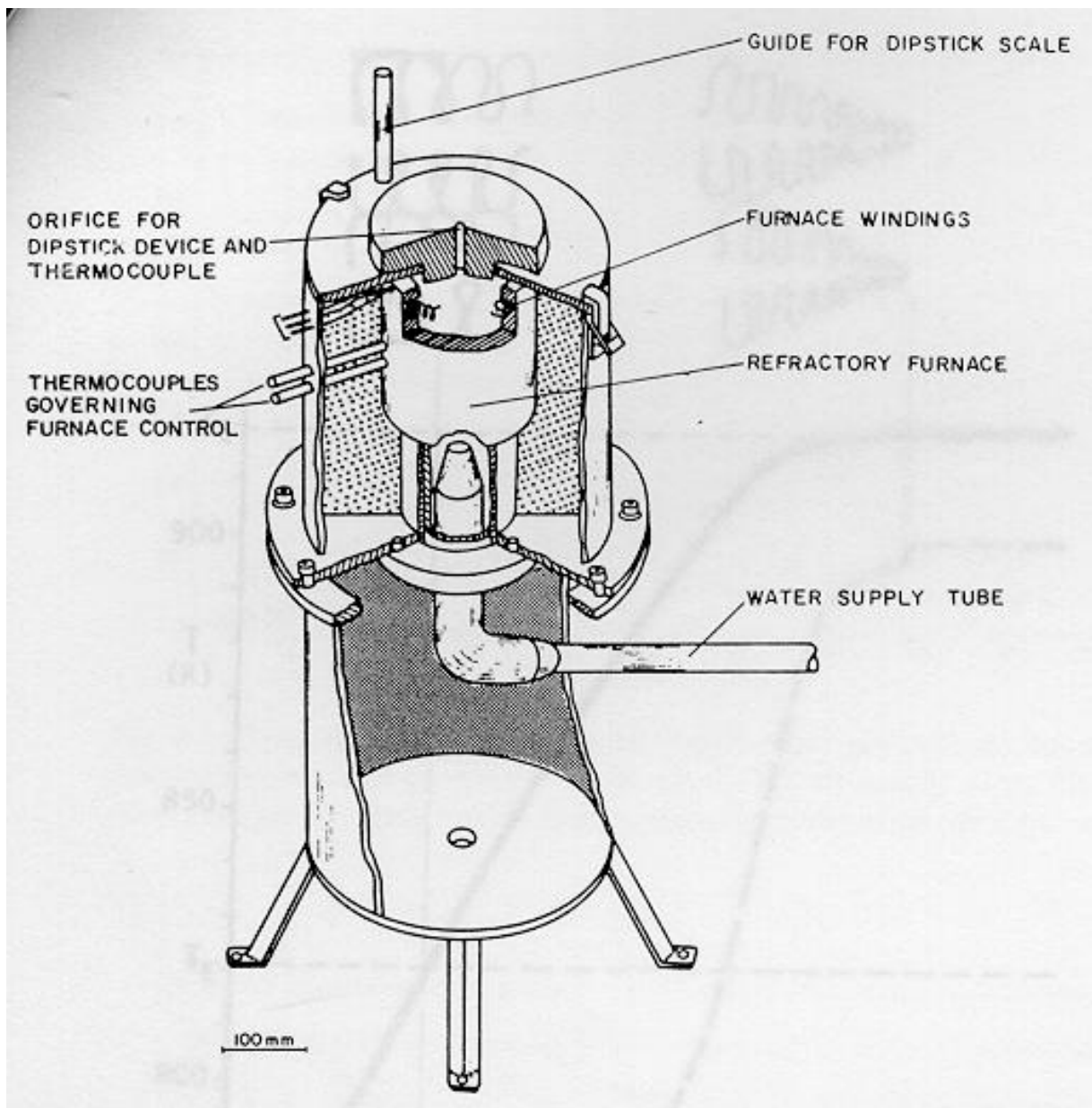


Fig. 4.5 Solidificador direcional (Clyne, 1982)

Nestes experimentos, orientados a alta temperatura, o material a ser ensaiado é fundido no interior do próprio solidificador, pelo calor fornecido por resistências elétricas contidas nele mesmo. Uma vez fundido o material, as resistências elétricas são desligadas e é iniciada a extração unidirecional de calor, causando a solidificação do material. Esta extração de calor pode dar-se através da base ou do topo, dependendo dos objetivos do ensaio.

No caso da extração pela base é assegurada a estabilidade térmica do líquido, ou seja, a convecção natural de origem térmica é evitada. No caso de ligas a estabilidade mássica depende da liga a ser ensaiada, bem como da sua concentração. A posição da frente de solidificação é indicada por um apalpador e registrada automaticamente pelo sistema de coleta de dados.

Sendo a extração de calor pelo topo tem-se convecção natural, entretanto a solidificação pode ser interrompida instantaneamente a qualquer momento removendo a camada já solidificada.

O fluido refrigerante pode ser água ou ar, dependendo da taxa de solidificação pretendida. Também o material e espessura do molde são variáveis.

#### **4.2 O Experimento Desenvolvido na Presente Dissertação**

Um estudo experimental de difusão controlada, isto é, sem fluxos advectivos, foi realizado e é descrito neste capítulo da dissertação.

Um solidificador direcional foi montado e operado no Laboratório de Medições Mecânicas do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS. Com o objetivo de acompanhar a frente de solidificação e os fenômenos envolvidos, o solidificador é concebido de forma a ser todo transparente.

O solidificador direcional aqui concebido difere daqueles apresentados anteriormente em vários aspectos, podendo-se citar principalmente:

o material a ser solidificado já se encontra em estado líquido na temperatura ambiente, não necessitando fundi-lo previamente;

a sua temperatura de mudança de fase fica próxima à temperatura ambiente, não necessitando isolamento térmico além das paredes do próprio cilindro que o contém, e de uma tampa superior;

a medição da espessura de solidificação, assim como a da velocidade da frente de solidificação, é feita diretamente com a auxílio de uma filmadora.

Um esquema para o aparato experimental com todos componentes é mostrado na figura 4.6

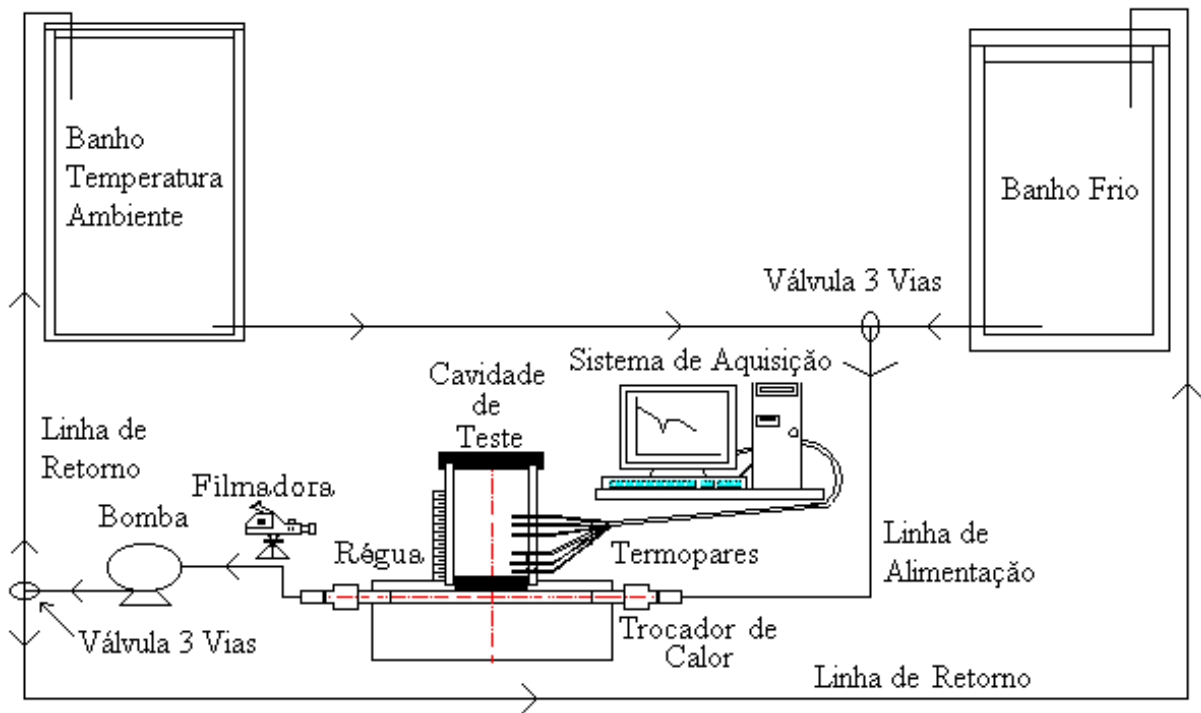


Fig. 4.6 O experimento desenvolvido na presente dissertação

Os detalhes do sistema são descritos abaixo.

Uma seção de teste cilíndrica com um trocador de calor na base e isolamento no topo.

Sistema de medição de temperatura (termopares e sistema de aquisição)

Bomba de circulação de água.

Banhos de temperatura constante, um a temperatura ambiente e outro com água resfriada por gelo.

Instrumentação para seguir a posição da interface durante a solidificação (régua e filmadora).

A cavidade de teste cilíndrica é preenchida com material de mudança de fase, MMF, neste caso o cyclohexanol. Na parte superior é colocada uma tampa de nylon technil a fim de isolá-la termicamente. As paredes verticais são de material transparente (Acrílico) o que possibilita a observação da evolução da interface sólido-líquido.



Vários fatores são importantes para a concepção de um experimento deste tipo:

Visual e acesso mecânico da seção de teste

Tempo de duração curto para rodar o experimento

Acesso à instrumentação sem afetar significativamente os fenômenos físicos

Mínima perda de calor para o ambiente

A seção de teste onde é colocado o MMF tem diâmetro externo de 50mm, diâmetro interno de 44mm e altura de 50mm. Um desenho esquemático do conjunto da seção de teste é mostrado na figura 4.7. Também se apresenta uma fotografia da seção de teste com alguns detalhes de construção mostrados na figura 4.8, como a linha de circulação de fluido, meio de homogeneização e resfriamento do sistema.

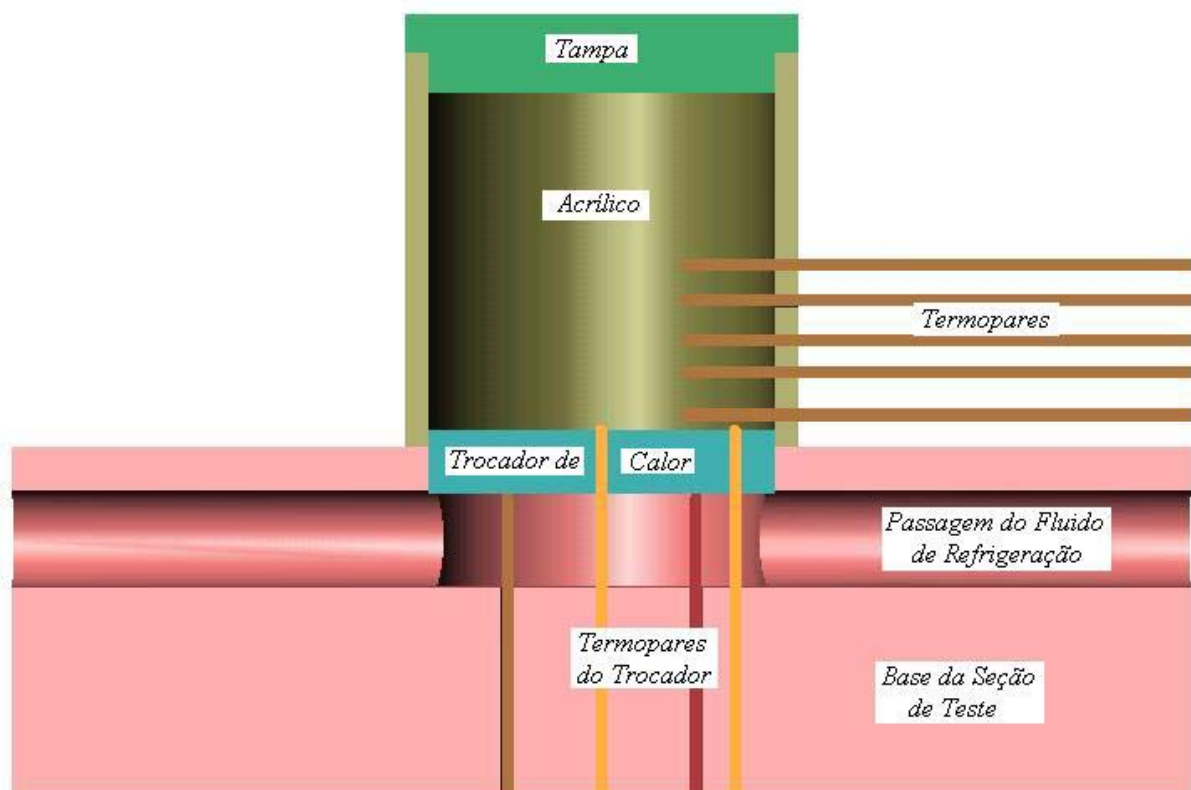


Fig. 4.7 Seção de teste

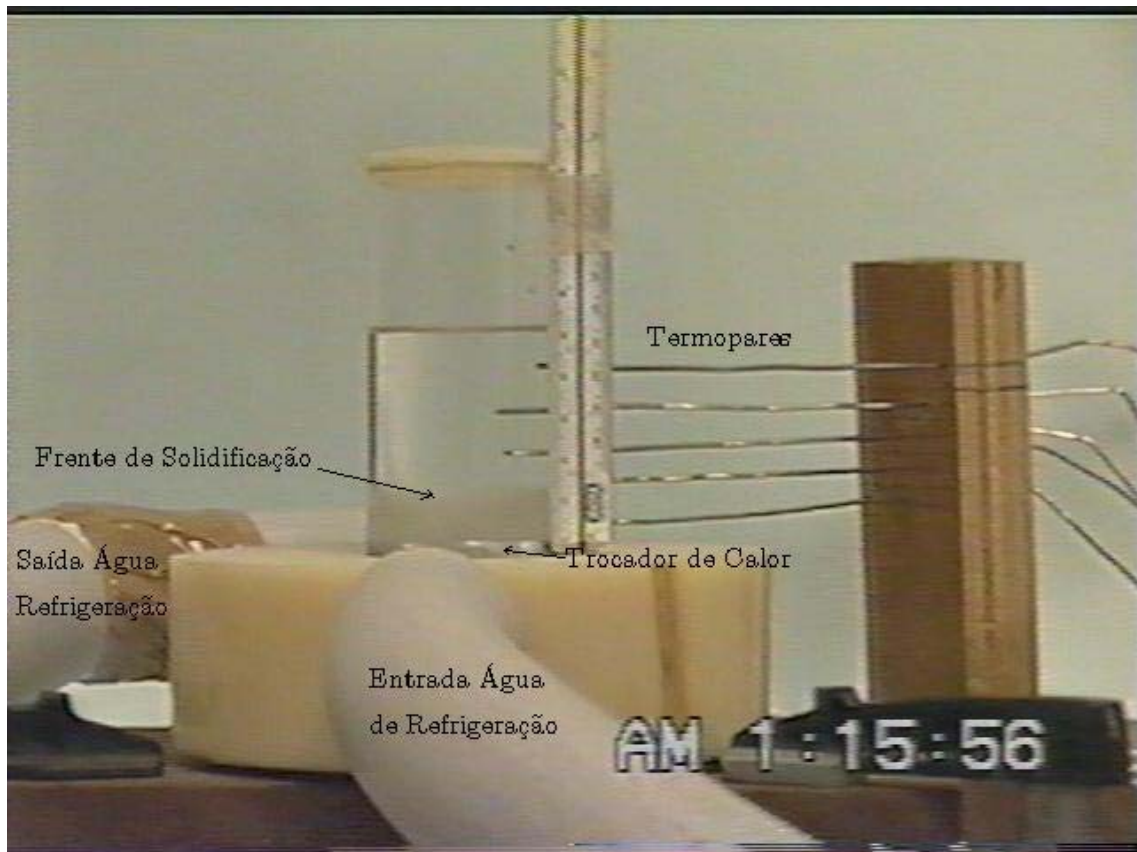


Fig. 4.8 Detalhes de uma medição na seção de teste

A seção de teste é montada sobre uma base cilíndrica de nylon technil, com diâmetro externo de 150mm e altura de 44mm. O trocador de calor é de alumínio com diâmetro externo de 43,9mm e altura de 8,1mm. Aloja-se na base de nylon technil em um rebaixo com 44mm de diâmetro e profundidade de 6mm. O fluido de circulação passa através dessa base, que forma um trocador de calor.

O fluido de circulação é proveniente de dois tanques, um com água na temperatura ambiente, a fim de homogeneizar o sistema, e outro, com água e gelo com a função de retirar calor do material de mudança de fase e provocando a solidificação deste. O fluido é transportado pelo sistema por mangueiras de borracha com dimensões de  $\frac{1}{2}$  polegada, revestidas com isolamento de poliestireno.

O sistema hidráulico é composto por:

Dois tanques: banho frio com 14 litros, e banho a temperatura ambiente, com 7 litros

Duas válvulas de 3 vias

Linhas de alimentação e de retorno

Bomba de circulação com vazão de 0,3 m<sup>3</sup>/h

O monitoramento das temperaturas dos banhos e trocador de calor é feito por seis termopares do tipo K (Chromel – Alumel) com diâmetro de 1,5mm. Em cada banho é colocado um termopar. Dois outros são colocados no trocador de calor, medindo a temperatura de passagem do fluido. Estes são espaçados de 12mm em relação ao centro, na direção do escoamento, a fim de verificar se os 2 pontos são isotérmicos. Os outros dois são colocados junto à interface metal-líquido ou metal-sólido (trocador de calor e material de mudança de fase), com a finalidade de medir a temperatura na face superior do trocador de calor. Estes dois termopares passam através do trocador de calor, um pelo centro e o outro a 17mm do centro, também na direção do escoamento. O objetivo novamente é verificar se o campo de temperaturas é isotérmico, uma vez que esta é uma condição de contorno utilizada na simulação numérica, mas não sendo condição necessária.

A vedação entre os termopares, bases, cavidade e trocador de calor é feita com borracha silicone.

O sistema de direcionamento de fluxo é composto por duas válvulas manuais de três vias, de diâmetro ½ polegada, de bronze.

Para medir as temperaturas do MMF na cavidade, foram usados termopares do tipo K (Chromel – Alumel), com diâmetro de 1,5mm, num total de cinco, e dispostos conforme mostra a figura 4.7. A disposição na horizontal se mostra mais apropriada que a vertical, pois minimiza o efeito aleta. O efeito aleta se manifesta mais na posição vertical do que na posição horizontal. Devido à remoção de calor ser pela base, existe no sentido vertical um forte gradiente de temperatura. Como os termopares ficam dentro da seção de teste, desde a posição de medida até a tampa, eles ficam submetidos a este gradiente. Isto proporciona através da bainha do termopar, ao longo da sua altura, uma troca de calor maior devido a ela ser de material metálico. Desta forma sua condutividade térmica é maior que o material de mudança de fase. Isto não acontece na posição horizontal devido o termopar estar submetido à mesma temperatura ao longo deste, dentro da seção de teste.

Durante os experimentos se fez uso, alternadamente, de dois tubos de acrílico na seção de teste, cada um com furações diferentes para a localização dos termopares. Estas modificações se deram devido à posição onde se encontravam os termopares não ser atingida pela frente de solidificação no tempo em que transcorre o experimento. As posições de cada termopar, em relação à base, para seção de teste 1 são 2; 12; 21; 31,5 e 42,5mm. Para a seção de teste 2 as posições são 2; 7,5; 11,5; 16,5 e 21mm.

A figuras 4.9, 4.10 e 4.11 mostram o aparato experimental.

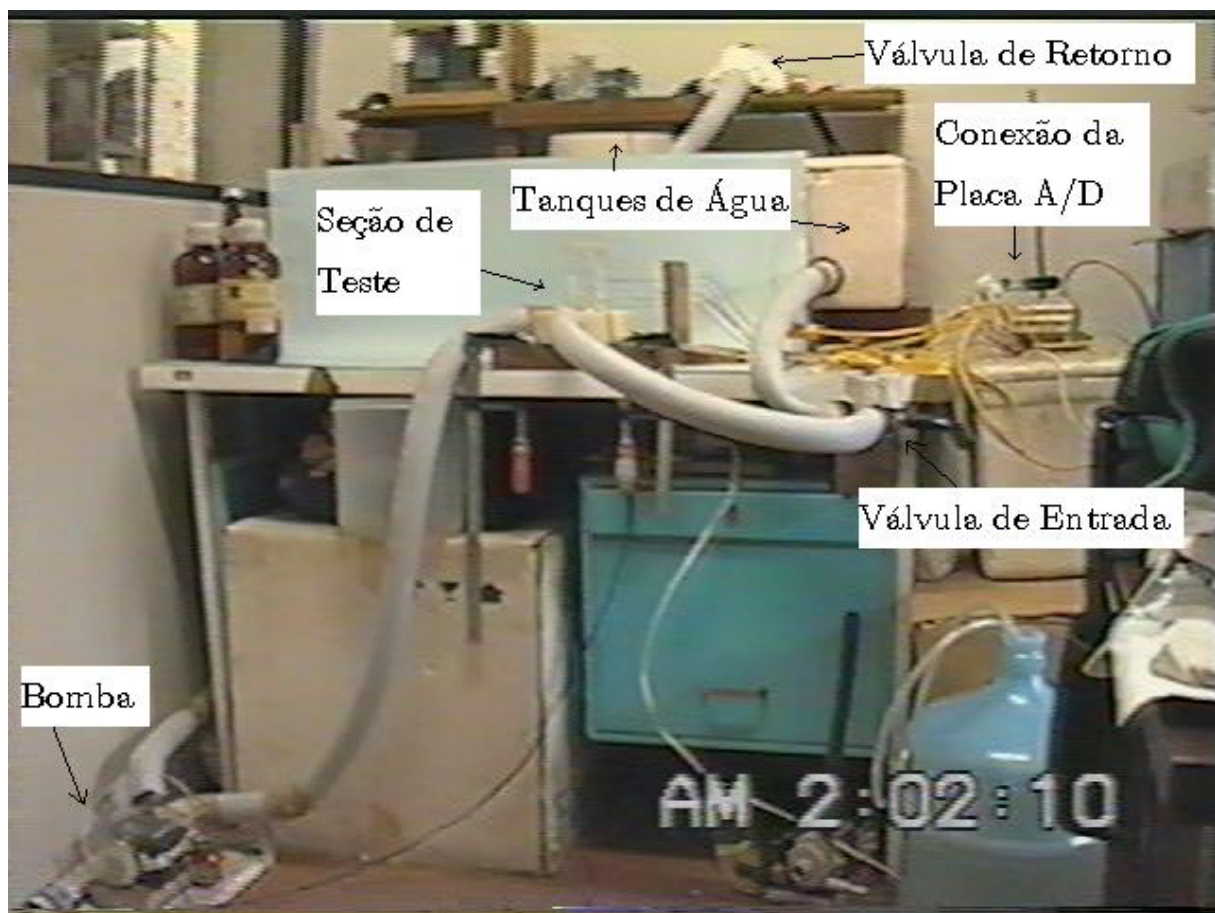


Fig. 4.9 Vista geral do aparato experimental



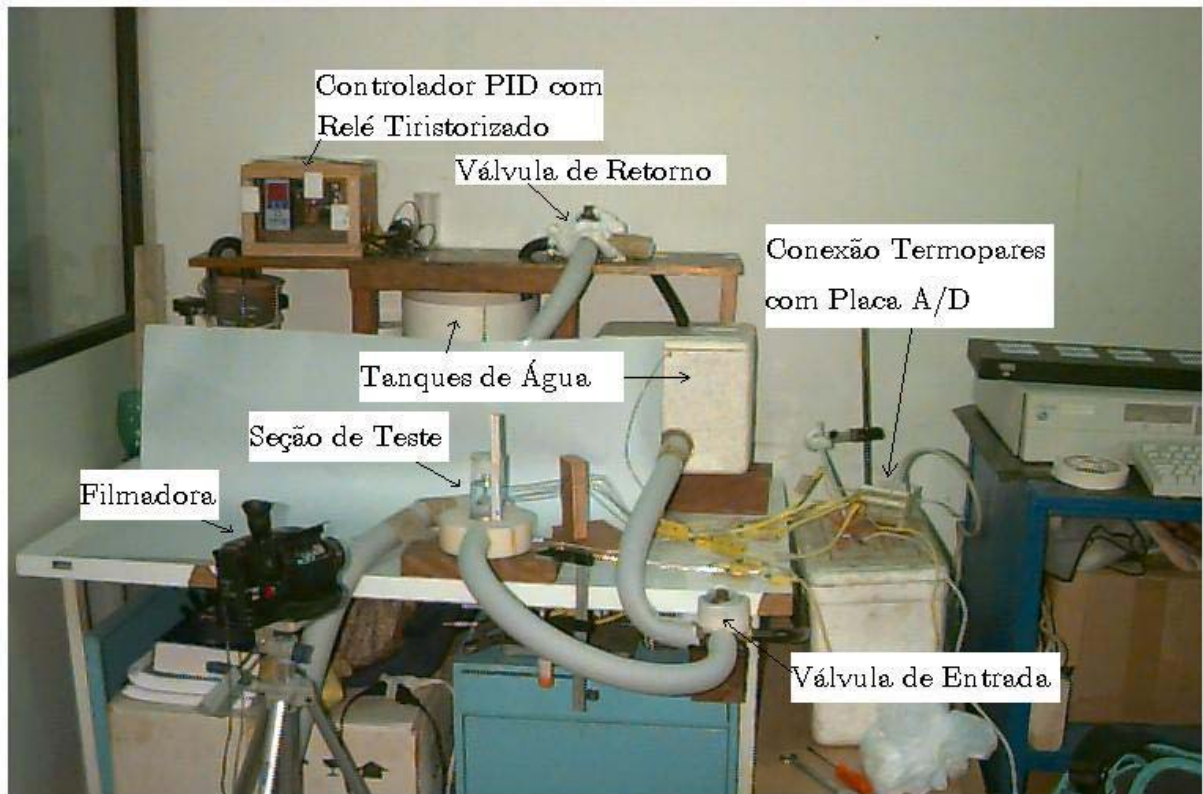


Fig. 4.10 Vista focando detalhes do aparato experimental



Fig. 4.11 Vista complementar do aparato experimental

Apresentado o equipamento passa-se relatar o sistema de medição.

### **4.3 Material de Mudança de Fase**

O material de mudança de fase escolhido para o experimento foi com o cyclohexanol, devido ao fato de ser transparente, e também devido a sua temperatura de mudança de fase ficar em torno de 23°C [Jackson e Hunt, 1965]. Na época dos testes, sob condições de temperatura ambiente ele se encontra no estado líquido, o que facilitou muito a concepção do experimento. O cyclohexanol (hexahydrophenol hexanil, C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O) é cristal plástico orgânico transparente com uma estrutura cristalina cúbica de face centrada (CFC) [Livescu et al., 1987]. Segundo Jackson e Hunt, 1965 o cyclohexanol é da classe dos materiais orgânicos caracterizados por baixa entropia de fusão. O cyclohexanol em estado líquido, difere dos outros plásticos cristalinos sendo que sua viscosidade ( $\mu=0,053$  [kg/ms]) é aproximadamente 20 vezes mais alta do que os outros plásticos cristais [Singh e Glicksman, 1989].

O cyclohexanol tem sido utilizado em diversos tipos de pesquisas. Jackson et al., 1967 em experimentos desenvolvidos sobre a natureza de crescimento de cristais em fundidos, utilizou o cyclohexanol. Isto devido a ser transparente, possibilitando observar diretamente a morfologia da interface durante todas as condições de crescimento, com o objetivo de aplicar em teoria de crescimento de cristais. Singh et al., 1988 fazem uso do cyclohexanol para estudar a morfologia de crescimento de cristais, dependendo da cinética do processo de crescimento e do processo controlado por difusão. Objetivaram condições de crescimento de um único cristal por mudança na taxa de crescimento e gradiente de temperatura. Koo, 1996 efetua uma comparação da cinética do crescimento dendrítico de vários materiais, entre eles o cyclohexanol, com a teoria de transporte, sugerindo que a cinética do crescimento dendrítico de materiais poderiam ser dependentes da micro-estrutura do cristal.

Okamoto, et al., 1975, conduzindo estudos sobre o cyclohexanol, constataram que no estado líquido este baixa o seu ponto de mudança de fase ao absorver umidade do ar. Este problema de pureza faz com que um

experimento não possa ser repetido com o material já utilizado em outro experimento.

A seção seguinte apresenta as propriedades termofísicas do cyclohexanol e a sua dependência na análise de modelos matemáticos com experimentos.

#### 4.3.1 Propriedades Termofísicas

A dificuldade na obtenção das propriedades termofísicas, e as diferenças significantes de valor em relação às fontes, levam a incertezas nos resultados. Naturalmente o resultado da simulação é totalmente dependente das propriedades termofísicas usadas. A medição destas propriedades envolve técnicas experimentais difíceis, sendo as precisões da ordem de mais ou menos cinco por cento ou melhor [Overfelt, 1994].

A tabela 4.1 apresenta as propriedades termofísicas do Cyclohexanol, a partir de 5 fontes diferentes.

Tabela 4.1 Propriedades termofísicas do cyclohexanol

Fonte	$T_m$ [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\alpha$ [m <sup>2</sup> /s]	$c_p$ [J/kgK]	$k$ [W/mK]	$hsf$ [J/kg]
1	23,9	965,0	$0,62 \cdot 10^{-7}$	2065,69	0,12359	17486,02
2	24,85	942,0	$1.16 \cdot 10^{-7}$	1250,22	0,13683	
3	25,15	968,4		2020,966		16972,84
4	25,0	962,4		2078,674		
5	23,20			1745,0		17500,0
6	23,0					
7	25,15					

Fontes:

- 1 Singh, et a., 1989;
- 2 Reid et al., 1987;
- 3 Riddick et al., 1986;
- 4 Lide, 1999-2000;

- 5 Washburn, 1928;
- 6 Jackson e Hunt, 1965;
- 7 Livescu et al., 1987.

Acredita-se o que o  $c_p$  da referência 2 deve estar com erro de edição, ou de unidades.

#### **4.4 Medidas Qualitativas e Quantitativas**

Nesta seção é apresentada a instrumentação empregada nos experimentos.

##### **4.4.1 Localização da Interface**

A interface sólido-líquido é observada diretamente através das paredes da seção de testes, feita em acrílico. Uma régua graduada é colocada junto à parede vertical, para medir a posição da interface relativa ao fundo do cilindro (trocador de calor). A precisão dessas medidas é de  $\pm 1\text{mm}$ , tendo em vista que a régua graduada permite medidas de milímetro em milímetro. A observação visual revela que a interface é realmente plana, validando portanto a hipótese já assumida no desenvolvimento de capítulos anteriores.

A posição da interface sólido-líquido é rastreada através de uma filmadora, e o desenvolvimento de cada experimento é gravado em uma fita cassete, sendo realizada uma edição posterior para obtenção dos dados.

##### **4.4.2 Temperatura**

Todas as temperaturas são medidas com termopares do tipo K (Chromel – Alumel), com diâmetro de 1,5mm, encapsulados em curto com a bainha a fim de oferecer uma reposta mais rápida ao sistema.

Os termopares são conectados por cabos de extensão a um computador, com conversor A/D e o sistema de aquisição de dados SAD32, desenvolvido no LMM-DEMEC-UFRGS. O conversor A/D utilizado foi o AXIOM AX5232, de 12 bits (4096 níveis), 32 canais,



100Hz, adotando uma faixa de utilização de  $\pm 5\text{mV}$ . No presente trabalho contam-se com a aquisição de dados por 12 termopares simultaneamente.

O programa SAD32 possui funções de conversão para sinais de termopares tipo K, J e S. Ele fornece todo o processamento dos dados obtidos no experimento, tais como diagramas temperatura versus tempo, taxa de resfriamento, etc.

Considerando as características do experimento, foram estabelecidos certos parâmetros necessários para aquisição dos dados, tais como, o tempo de aquisição e o número de amostras, que estão relacionados com a duração do experimento, que foi estipulado em duas horas.

O número de amostras por segundo (taxa de aquisição) é determinado a partir da frequência do A/D, 100Hz, dividido pelo número de termopares em atividade.

Durante os experimentos notou-se que tanto nos termopares dispostos na face inferior da base (trocador de calor), como na sua face superior, o sistema se comporta isotermicamente. Verificado isto, se optou pela aquisição de dados com somente um termopar de cada dois. Também se verificou que o banho à temperatura ambiente pode ser considerado constante em todo o experimento, não necessitando aquisição deste dado. O sistema então ficou composto por nove termopares. Cinco são colocados na seção de teste, um na face inferior e outro na face superior do trocador de calor, um colocado na saída do tanque do banho frio e o outro medindo a temperatura ambiente.

O termopar responsável pelo registro da temperatura ambiente era checado de cinco em cinco minutos através da medida por um termômetro de bulbo padrão, calibrado e com a precisão de  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ . Verificou-se então que a flutuação da temperatura ambiente se apresenta desprezível em relação a outras incertezas do sistema.

Determinada a quantidade de termopares, e com a frequência da placa determina-se a taxa de aquisição ( $i$ ):

Frequência de aquisição ( $f_a$ ): 100Hz;

Numero de termopares ( $n$ ): 8;

$$i = \frac{f_a}{n} = \frac{100\text{Hz}}{8} = 12 \text{ amostras / segundo} \quad (4.1)$$

No processo de filtragem foi utilizado o filtro média móvel ponderada, com frequência de corte 0,1Hz.

Com relação às incertezas utilizou-se como referência Zaro, 2000a e b, Oliveski, 2000 e Schneider, 2000.

Para determinar a incerteza das medições se optou por verificar o sistema como um todo: termopares, cabos de extensão, placa A/D. Foi utilizado um sistema de banho isotérmico controlado por PID (Potencial Integral Derivativo), a fim de controlar a temperatura desses durante as calibrações. A verificação foi feita utilizando um termômetro de bulbo calibrado, com precisão de  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ . O gráfico da figura 4.12 mostra as curvas obtidas para cada termopar, sendo o gráfico composto pela temperatura medida pelo termômetro de bulbo e a diferença ( $\Delta T$ ) entre o padrão, o termômetro de bulbo, e a media do termopar.

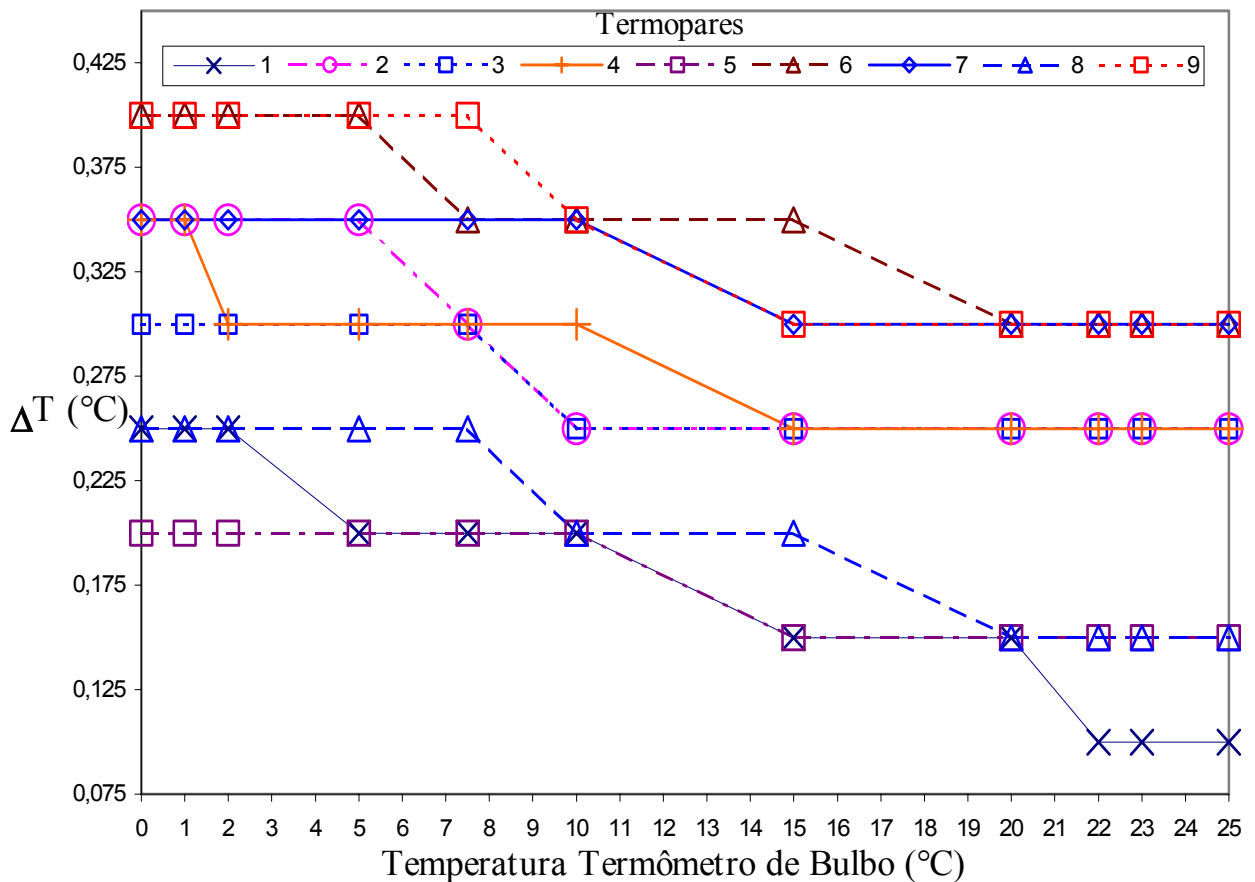


Fig. 4.12 Curvas da incerteza dos termopares frente ao termômetro de bulbo

Pode-se observar que a diferença encontrada entre os termopares e o termômetro de bulbo nas medições num banho isotérmico oscilou entre 0,1 a 0,4°C.

Decorrente disto, assumiu-se a incerteza associada à instrumentação para medição da temperatura como sendo  $\pm 0,4^\circ\text{C}$ .

A incerteza na temperatura devido à posição dos termopares, que é  $\pm 0,02\text{mm}$ , e também devido ao termopar possuir um diâmetro de 1,5mm precisa ser considerada. A partir deste diâmetro conclui-se que ele pode estar medindo em relação a posição desejada com um erro de  $\pm 0,75\text{mm}$ . Assim  $\pm 0,77\text{mm}$  de erro de posição tem que ser considerado.

#### **4.5 Procedimento Experimental**

O procedimento inicial consiste em preparar os banhos de temperatura ambiente e frio para dar início ao processo. Verificar o sistema de aquisição de dados, checar os termopares se estão devidamente ligados e medindo corretamente. Informar a temperatura ambiente, lida no termômetro de bulbo, ao programa de aquisição de dados (SAD32). Colocar o material de mudança de fase na seção de teste e fechar bem, a fim de evitar sua umidificação. Ligar a bomba e colocar o fluido do tanque de temperatura ambiente em circulação, a fim de homogeneizar o sistema. Preparar a filmadora, zerando o indicador de tempo, para fazer o registro do experimento e permitir a análise posterior e o pós-processamento das imagens. Posicionar a escala adequadamente para medir a partir da parte superior do trocador.

Após checar todo o sistema se dá início ao processo comutando a válvula de três vias que fica na saída dos terminais dos dois banhos, posicionando esta para permitir a passagem do fluido proveniente do tanque frio. Neste mesmo instante de tempo o sistema de aquisição de dados e a filmadora começam a registrar o experimento. O fluido proveniente do tanque frio (fluido de refrigeração) passa através da seção de teste retirando calor do material de mudança de fase, possibilitando o início da solidificação.

O fluido de refrigeração inicialmente, após passar pela seção de teste, retorna para o banho de temperatura ambiente, a fim de não aumentar a carga térmica do banho frio durante este transiente inicial.

Logo após este transiente inicial é comutada a válvula de três vias de retorno, fazendo com que o fluido de refrigeração retorne ao banho frio. A temperatura deste é mantida pela fusão do gelo misturado com a água no seu interior.

Ao final da solidificação, parte-se para a análise do experimento com as imagens sendo digitalizadas. É realizada a análise das curvas obtidas pela aquisição de dados, processando-se e filtrando os dados.

Ao final dessa seção fica descrita toda análise experimental. Passa-se agora à apresentação dos resultados, comparações com a simulação numérica e discussão dos resultados.

## **4.6 Resultados e Discussões**

Do procedimento experimental descrito na seção anterior são apresentados agora os resultados obtidos na comparação com o método numérico descrito em capítulo anterior.

Para geração dos resultados numéricos são usados os dados provenientes dos experimentos, como temperatura inicial de toda a seção de teste e temperatura da base ao longo do tempo (temperatura de refrigeração da base).

### **4.6.1 Posição da Interface**

Nesta seção são apresentadas as figuras do experimento com relação à posição da interface ao longo do tempo. As figuras foram digitalizadas a partir das imagens geradas pela filmadora em determinados instantes de tempo, na seqüência da evolução da solidificação.



Fig. 4.13 Antes do início do processo de solidificação

Fig. 4.15 Frente de solidificação já cobrindo o 1° termopar



Fig. 4.17 Frente de solidificação chegando no 2° termopar



Fig. 4.14 Início do processo de solidificação com pequena camada já solidificada

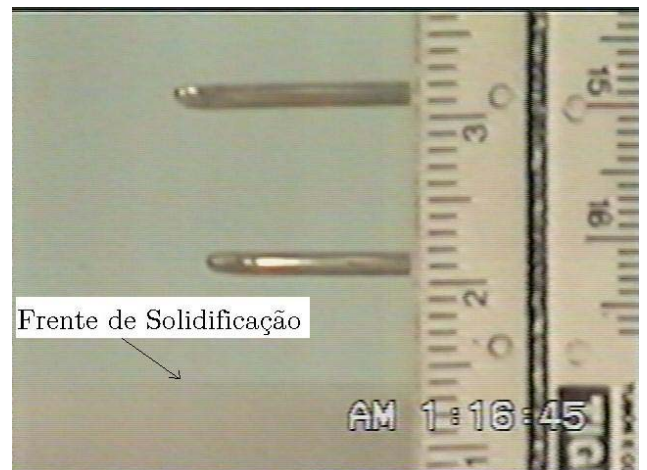


Fig. 4.19 Detalhe da Frente de solidificação já envolvendo todo o 2° termopar



Fig. 4.16 Frente de solidificação entre o 1° e o 2° termopar



Fig. 4.18 Detalhe da frente de solidificação no 2° termopar



Fig. 4.20 seção de teste após 51 minutos e 34 segundos do início do experimento.

#### 4.6.2 Comparação entre os Resultados Experimentais e Numéricos

Com os dados obtidos dos experimentos e as curvas geradas das simulações numéricas apresenta-se na figura 4.22 a posição da interface com o tempo. A simulação numérica apresenta uma boa concordância com o da experimental. Após um determinado tempo nota-se que a solidificação deixa de ser unidirecional (interface curva). Isto é devido ao fato da resistência térmica criada pela camada solidificada passar a ser da ordem da resistência térmica através das paredes laterais do cilindro. Como a simulação numérica é realizada em uma dimensão esta não tem condições de captar este fenômeno. Para fazê-lo basta adequar o software. Mas como não é objetivo neste momento devido ao fim desejado, que é a análise unidirecional, passa-se a apresentar os resultados somente para a região de interesse.

Os resultados gerados foram obtidos usando os seguintes dados relacionados abaixo.

A temperatura ambiente em torno de 22° C.

A temperatura inicial do sistema, entre 0 e 2mm, foi de  $T_i=22^{\circ}\text{C}$ . De 2mm até 21mm a temperatura é dada pela função  $T_i=24,33 * X^{0,016089}$  [°C], sendo X a coordenada vertical, dada em mm. A partir de 21mm

$T_i=22.8^{\circ}\text{C}$ . Estas temperaturas foram tiradas dos termopares conforme apresentado na tabela 4.2 abaixo.

Tabela 4.2 Temperatura nos termopares no início do experimento

Termopar	Posição [mm]	Temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ]
1 $^{\circ}$	2	22
2 $^{\circ}$	7,5	22,5
3 $^{\circ}$	11,5	22,6
4 $^{\circ}$	16,5	22,8
5 $^{\circ}$	21	22,8

As propriedades termofísicas usadas foram retiradas de Singh, et all., 1989, conforme já apresentado na tabela 4.1.

A temperatura da água de refrigeração usada no experimento, que é condição de contorno da simulação numérica, foi obtida pelo termopar da base, e é apresentada no gráfico da figura 4.21. A partir de 250 segundos a temperatura se estabiliza num determinado patamar até o final do experimento.

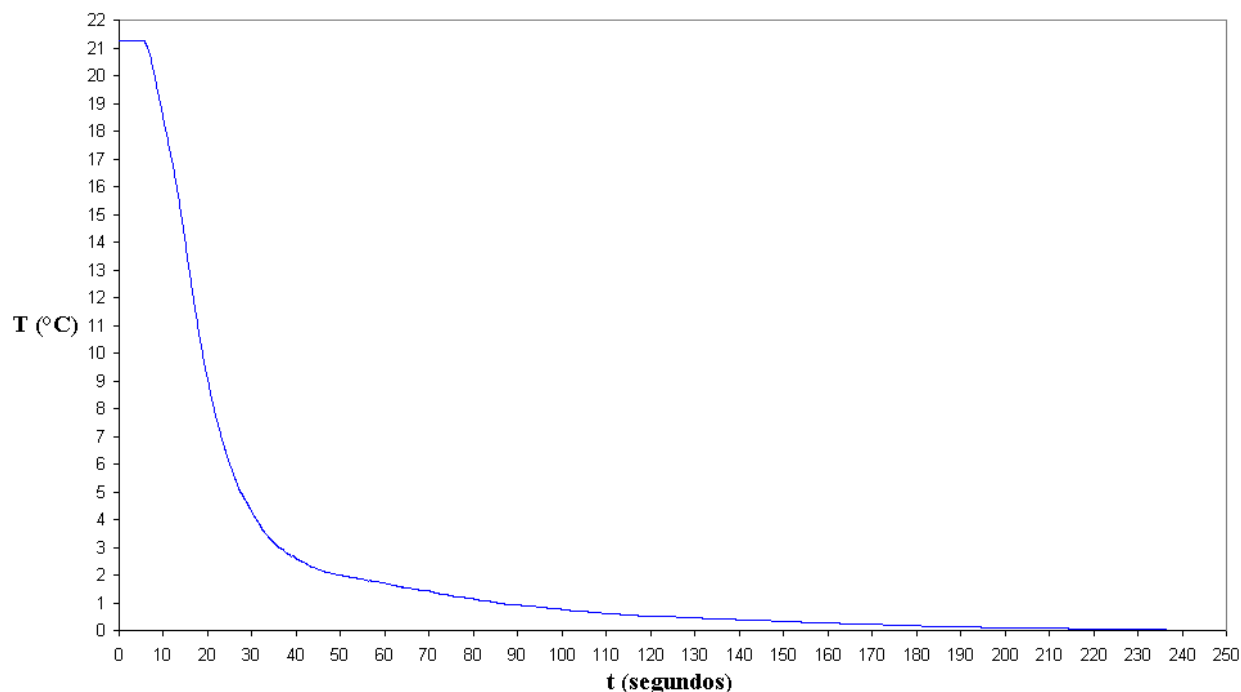


Fig. 4.21 Curva da temperatura da água de refrigeração com o tempo

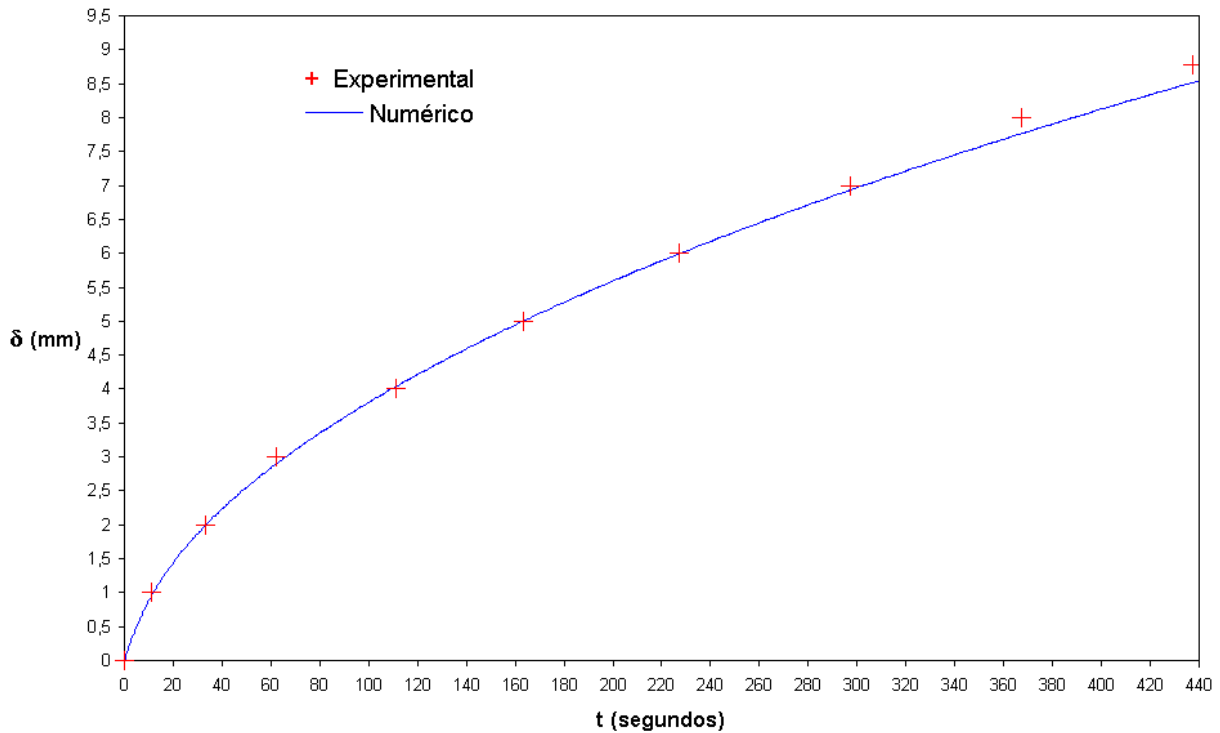


Fig. 4.22 Posição da interface com o tempo (numérico versus experimental)

Com o objetivo de efetuar comparações entre o modelo matemático e o experimental, devido à incerteza na posição dos termopares, torna-se necessário expressar esta incerteza também em temperatura. Uma maneira encontrada [Oliveski et al., 2000] foi a de utilizar os resultados encontrados na simulação numérica, uma vez que ela já mostrou-se correta, com o uso de malhas coincidindo com a posição dos termopares. A partir dos gradientes térmicos pode-se obter a incerteza na temperatura originada pela incerteza de posicionamento dos termopares. As figuras 4.23, 4.24 e 4.25 mostram as simulações considerando as posições dos termopares em  $x=2\text{mm}$ ,  $7,5\text{mm}$  e  $11,5\text{mm}$ , respectivamente, e duas outras posições que delimitam a região de incerteza geométrica.



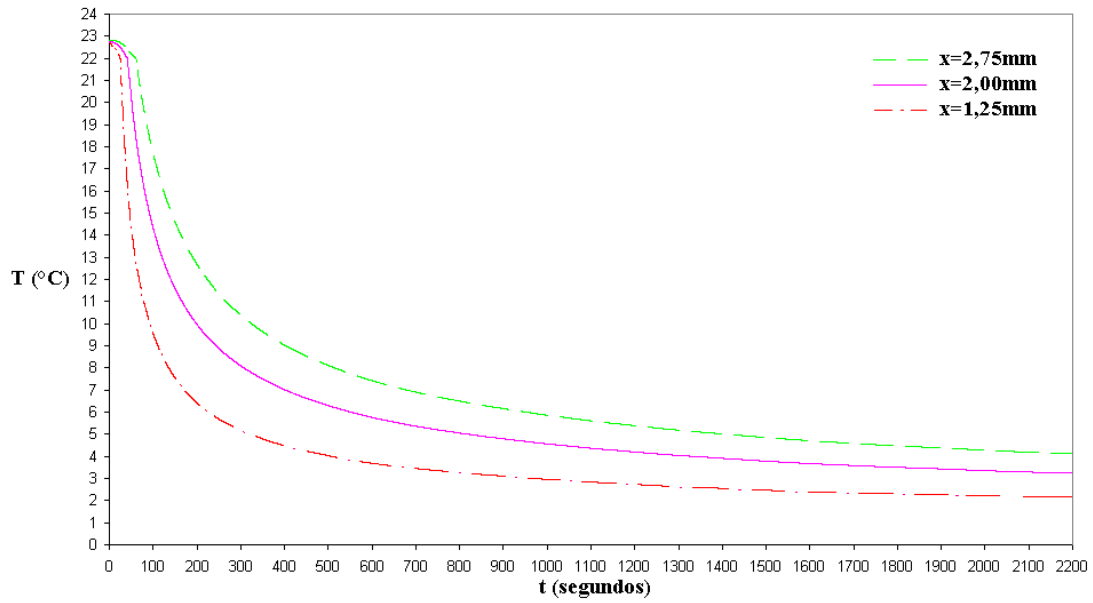


Fig. 4.23 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição  $x=2\text{mm}$

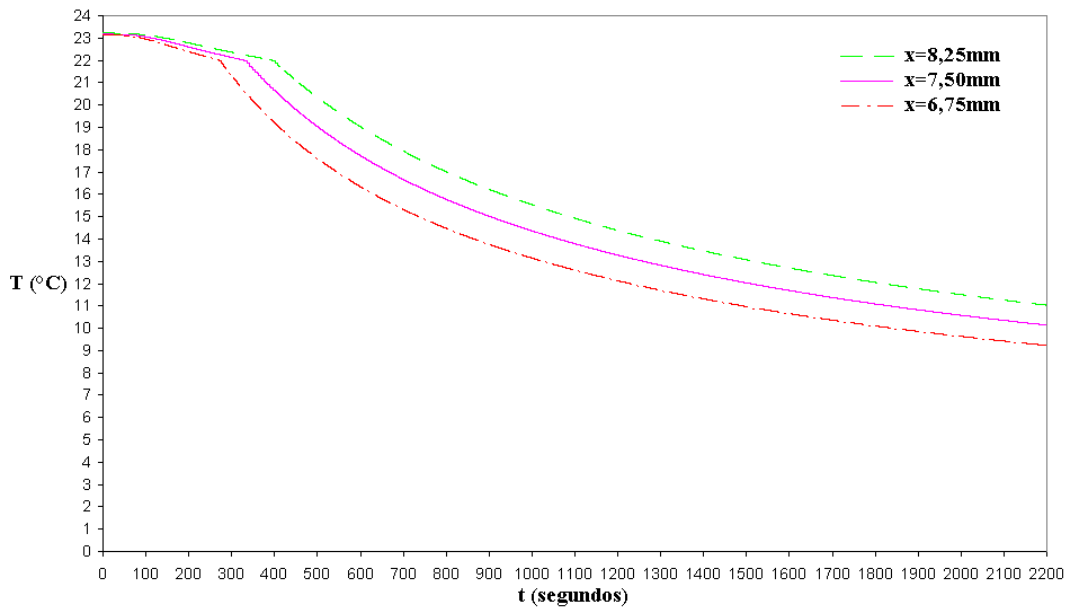


Fig. 4.24 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição  $x=7,5\text{mm}$

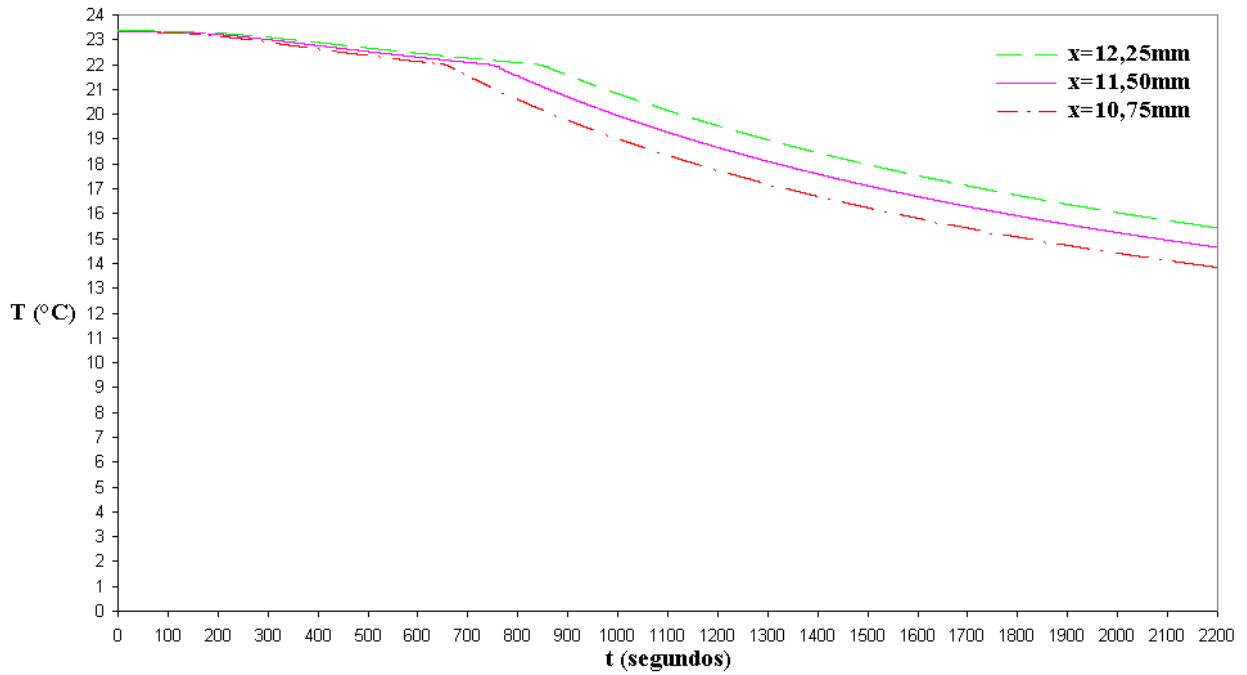


Fig. 4.25 Solução numérica da distribuição de temperaturas para análise de incerteza na posição  $x=11,5\text{mm}$

As figuras 4.26, 4.27 e 4.28 mostram temperaturas num certo ponto, correspondente à posição de um certo termopar, ao longo do tempo. Também constam os resultados numéricos.

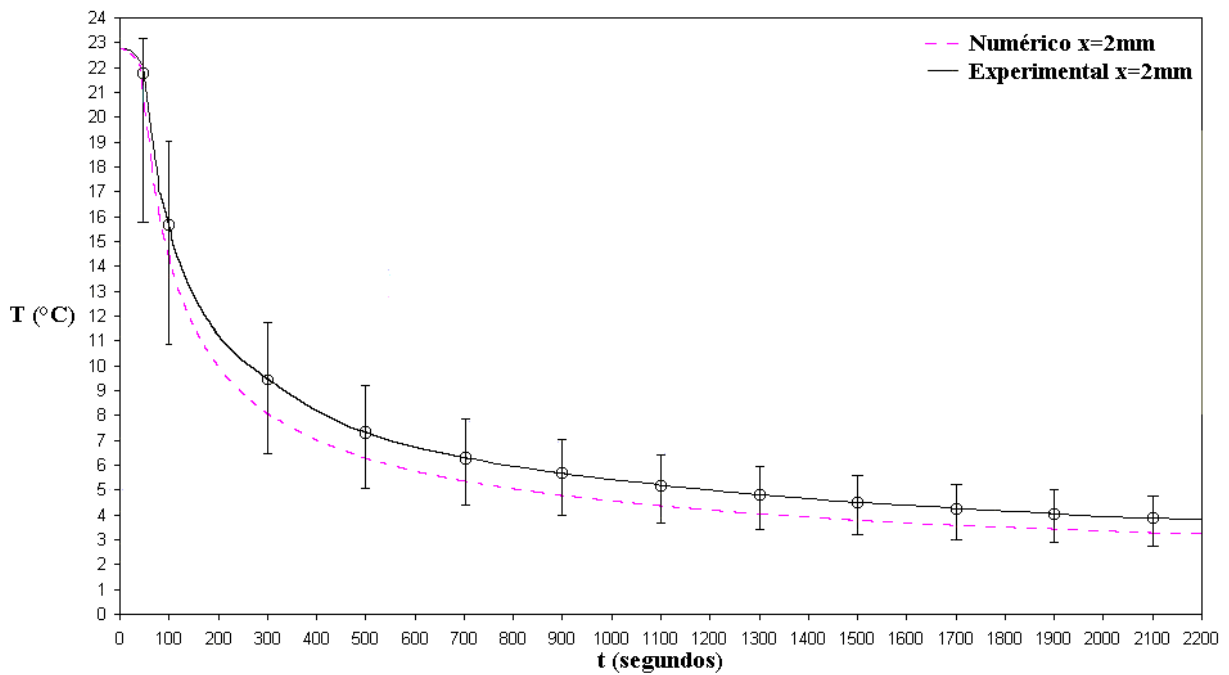


Fig. 4.26 Evolução da temperatura para o 1º termopar com o tempo

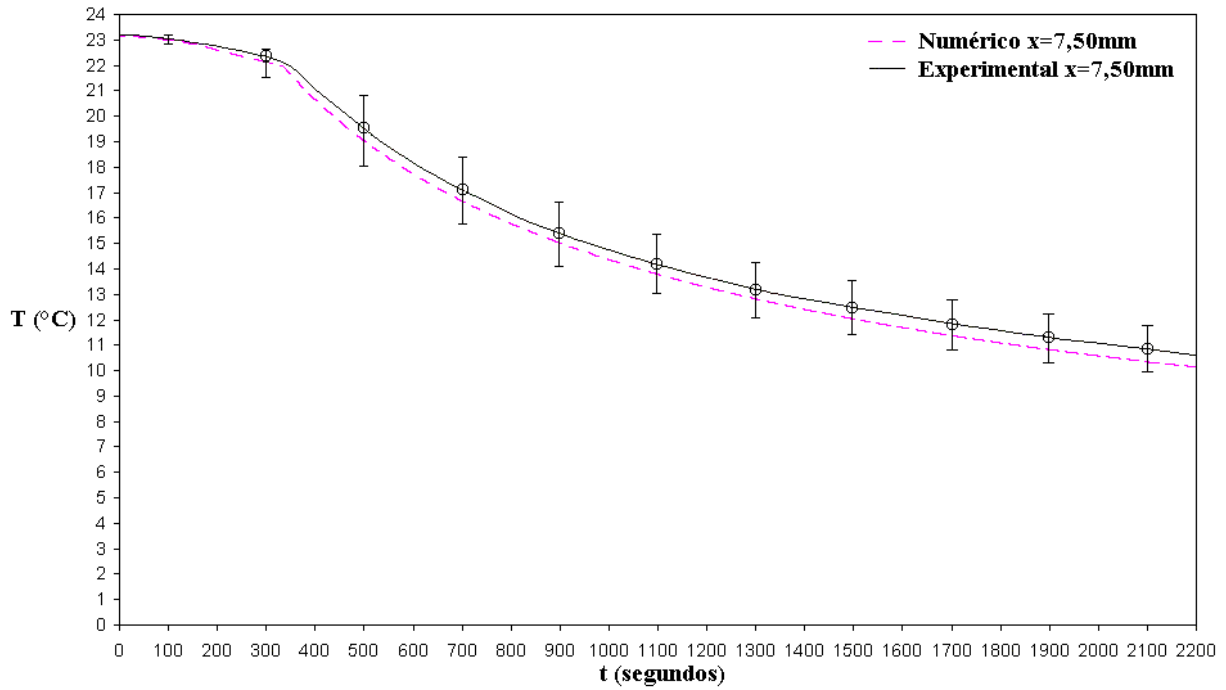


Fig. 4.27 Evolução da temperatura para o 2º termopar com o tempo

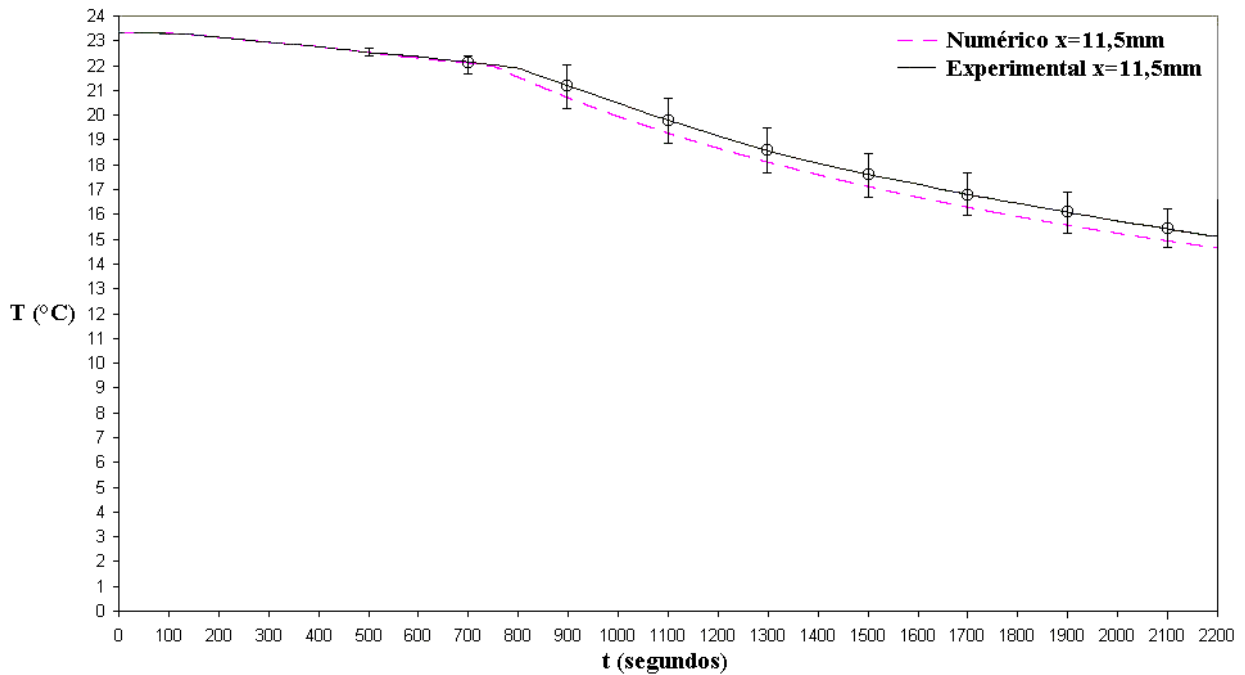


Fig. 4.28 Evolução da temperatura para o 3º termopar com o tempo

Observou-se pela simulação uma incerteza em relação à posição, em termos de temperatura, para a região mais crítica, em torno de  $\pm 2^\circ\text{C}$  (Fig. 4.26, tempo; 250 s). Já para as posições menos sensíveis esta

incerteza é de  $\pm 1^\circ\text{C}$ . Esta variação é devida à característica do problema, pois dentro da zona de incerteza geométrica pode-se ter tanto sólido quanto líquido.

Devido ao exposto acima, e levando em conta a concordância entre as soluções numéricas e as experimentais, esta barra de incertezas é adotada de agora em diante, entendendo-se que ela abarca inclusive as demais incertezas experimentais, por ser a maior delas.

A análise destes resultados, experimentais versus numéricos, mostra um comportamento muito próximo, coincidindo dentro da faixa de incerteza do experimento.

O ponto de inflexão corresponde à posição da interface sólido-líquido naquele instante.

Note-se que quanto maior o gradiente térmico maior a barra de incerteza associada. Isto deve-se à metodologia adotada para defini-la, conforme já foi descrito no presente trabalho. Em decorrência disto a barra de incerteza é menor na zona de sólido, que corresponde à região a esquerda do ponto de inflexão.

## **5 CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES**

### **5.1 Conclusões**

O presente estudo foi desenvolvido para obter um maior entendimento dos fenômenos de transporte durante o processo de solidificação de substâncias puras. Uma revisão das soluções analíticas clássicas, análise de escala e solução para meio finito foram desenvolvidas. Uma solução numérica das equações que modelam o processo de solidificação, e um estudo experimental foram também desenvolvidos neste trabalho. A análise experimental foi realizada em uma seção de teste cilíndrica refrigerada a água para melhor compreensão e avaliação dos fenômenos da solidificação. Os resultados das simulações numéricas e experimentais foram comparados, obtendo-se excelente concordância entre si. Sendo assim, estas metodologias de abordagem do fenômeno ficam validadas, e prontas para serem aplicadas a outros casos semelhantes.

#### **5.1.1 Processo de Solidificação**

Processo de solidificação de substâncias puras foram estudados através de métodos analíticos, numéricos e de ordem de escala.

Comparações entre os métodos analíticos exatos, soluções de meio finito e de ordem de escala foram apresentadas e discutidos a sua importância dentro do contexto do fenômeno de solidificação.

A análise de escala foi usada para prever a ordem de magnitude dos fenômenos de solidificação e o resultado encontrado coincide com a solução obtida através de métodos analíticos exatos.

Baseados nestas investigações as seguintes conclusões podem ser tiradas:

Métodos analíticos exatos têm sua importância como base para estudos acadêmicos. Entretanto a adoção de condições físicas mais realistas eleva enormemente o seu grau de dificuldade, encontrando-se fora do escopo do presente trabalho.

A análise de escala oferece de forma simples e barata a avaliação de alguns parâmetros do processo de solidificação, principalmente para o desenvolvimento de um aparato experimental. Através dela foram avaliados o tempo provável de duração do experimento, a ordem de magnitude da velocidade da frente de solidificação e a espessura da camada solidificada.

### **5.1.2 O Método da Entalpia**

Um modelo matemático baseado no método da entalpia foi empregado para estudar os fenômenos de solidificação sobre condições de difusão pura através da simulação numérica usando o método dos volumes finitos. A respeito do método da entalpia utilizado, as seguintes conclusões podem ser estabelecidas:

É um método de fácil implementação computacional, não necessitando de nenhum artifício matemático a fim de satisfazer as condições na interface móvel de mudança de fase. Como o domínio de cálculo é discretizado com uma malha fixa, não é necessária a implementação de nenhuma formulação do tipo Lagrangeana, o que simplificou a implementação da metodologia numérica de Volumes Finitos.

A convergência foi obtida rapidamente para cada passo de tempo, sendo necessário subrelaxar com um fator 0,8 para evitar oscilações dentro de cada passo de tempo, principalmente na região da interface devido a grande não linearidade na região.

Em relação à malha utilizada foi necessário um refinamento em todo o domínio de cálculo, devido ao método da entalpia eventualmente apresentar oscilação na distribuição de temperaturas. Este fato já foi citado por autores como Voller, Cross e Walton, 1979; Voller e Cross,

1981a e 1983; Crowley e Ockendon, 1979; Tacke, 1985. Com o refinamento no domínio de cálculo a solução encontrada apresentou excelente concordância na comparação com a solução analítica e dentro da região de incerteza do experimento.

### **5.1.3 Análise Experimental**

A solidificação do cyclohexanol,  $C_6H_{12}O$ , foi realizada numa seção de testes cilíndrica transparente, com resfriamento por água gelada na sua base. As paredes laterais ficaram em contato com o ambiente, sem isolamento, e o topo isolado. O transferência de calor durante o processo de solidificação ocorreu por difusão pura, já que o resfriamento pela base não origina correntes convectivas. O campo de temperaturas e a posição da interface foram medidos ao longo do experimento. As seguintes conclusões podem ser apresentadas:

A solidificação ocorreu de forma unidirecional por boa parte do experimento. Este comportamento começou a mudar depois de decorrido um tempo significativo. Isto deveu-se à resistência térmica crescente imposta pela camada solidificada. O fluxo de calor através da parede lateral, que inicialmente era desprezível, passou pouco a pouco a ser considerável.

O objetivo do experimento foi alcançado, tanto na avaliação dos fenômenos como na comparação com a simulação numérica.

A possibilidade de visualização dos fenômenos da solidificação, garantida pela seção de teste, demonstrou que mesmo sob concepção simples o aparato construído gerou ótimos resultados, comprovando as expectativas.

## **5.2 Sugestões para Futuros Trabalhos**

Algumas sugestões relativas a pesquisas futuras são feitas a seguir, baseadas nas conclusões do presente trabalho:

Aprimorar o aparato experimental agregando uma unidade de refrigeração que permita temperaturas mais baixas na fonte fria. Isto aumentaria a velocidade de solidificação e permitiria experimentos mais longos e com maior massa a ser solidificada. Também propiciaria um maior controle da temperatura de refrigeração.

Adoção de termopares de menor diâmetro para menor interferência no experimento e maior velocidade e, talvez, do tipo T, devido sua faixa de trabalho ser mais adequada para a faixa de temperatura do experimento.

Uma câmera digital com uma resolução de zoom maior, para melhor avaliar a interface de mudança de fase, tanto em posição quanto em forma.

Fazer experimentos com o uso de solução aquosa de cloreto de sódio ou cloreto de amônia, para o estudo de fenômenos envolvendo misturas.

Preparar o código numérico a fim de simular problemas com geometrias irregulares, com o uso de coordenadas curvilíneas ou malhas não estruturadas.

Estudar mudanças no método para diminuir os problemas de oscilações na distribuição da temperatura, que neste caso exigiram refinamento da malha e subrelaxação da solução.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

Atthey, D.R., 1974. *A Finite Difference Scheme for Melting Problems*, **Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications**, Vol. 13, pp. 353-366.

Awruch, A.M., Reitz, R., 1993. *Heat Transfer with Phase Changes by an Enthalpy Formulation Using the Finite Element Method*, **XII COBEM – Congresso de Engenharia Mecânica**, Brasília, Brasil, Anais, Vol. 2, pp. 589-592.

Awruch, A.M., Reitz, R., 1994. *Simulação Numérica de Problemas de Solidificação usando o Método dos Elementos Finitos*, **Relatório de Pesquisa RP – 111/94**, CPGECC/UFRGS.

Battle, T.P., 1992. Mathematical Modelling of solute segregation in solidifying materials, **International Materials Reviews**, Vol. 37, no. 6, pp. 249-270.

Beckermann, C., Viskanta, R., 1993. *Mathematical Modeling of Transport Phenomena During Alloy Solidification*, **Appl. Mech. Rev.**, Vol. 46, N° 1, pp. 1-27.

Bejan, A., 1995. *Convective Heat Transfer*, John Willey & Sons, New York.

Bennon, W. D., Incropera, F.P., 1987. *A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems - I. Model Formulation*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 30, N° 10, pp. 2161-2170.

Bianchi, M.V.A., 1997. *Crystal morphology and gas evolution during solidification processes*, **Ph.D. thesis**, Purdue University, West Lafayette, IN, 1997.

Bonacina, C., Comini, G., Fasano, A., Primicerio, M., 1973. *Numerical Solution of Phase-Change Problems*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 16, pp. 1825-1832.

Braga, S.L., 1993. *Recuperação de Energia Armazenada sobre Forma de Calor*, **XII COBEM – Congresso de Engenharia Mecânica**, Brasília, Brasil.

Cao, Y., Faghri, A., Chang, W.S., 1989. *A Numerical Analysis of Stefan Problems for Generalized Multi-Dimensional Phase-Change Structures Using the Enthalpy Transforming Model*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 32, N° 7, pp. 1289-1298.

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., 1959. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press.

Chalmers, B., 1940. *Proc. Roy. Soc. (London) A*, 175:100.

Chalmers, B., 1964. *Principles of Solidification*, John Wiley, New York.

Cho, S.H., Sunderland, J.E., 1969. *Heat-Conduction Problems with Melting or Freezing*, **Journal of Heat Transfer**, August, pp. 421-426.

Christenson, M.S., Bennon, W.D., and Incropera, F.P., 1989. *Solidification of an Aqueous Ammonium Chloride Solution in a Rectangular Cavity - II. Comparison of Predicted and Measured Results*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 32, N° 1, pp. 69-79.

Christenson, M.S., Incropera, F.P., 1989. *Solidification of an Aqueous Ammonium Chloride Solution in a Rectangular Cavity - I. Experimental Study*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 32, N° 1, pp. 47-68.

Clyne, T.W., 1982. *The Use of Heat Flow Modeling to Explore Solidification Phenomena*, **Metallurgical Transactions B**, Vol. 13B, September, pp. 471-478.

Cole, G. S., and Winegard, W. C., 1963. **J. Inst. Met.**, 92: 322.

Crank, J., 1984. *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford.

Crowley, A.B., 1978. *Numerical Solution of Stefan Problems*, **Int. J. of Heat Mass Transfer**, Vol. 21, pp. 215-219.

Crowley, A.B., Ockendon, J.R., 1979. *On the Numerical Solution of an Alloy Solidification Problem*, **Int. J. of Heat Mass Transfer**, Vol. 22, pp. 941-947.

Ferziger, J.H. and Peric, M., 1997. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer.

Flemings, M.C., R., Nereo, G.E., 1967. *Macrosegregation: Part I*, **Transactions of the Metallurgical Society of AIME**, Vol. 239, pp. 1449-1461.

Flemings, M.C., 1974. "Solidification Processing", **Metallurgical Transactions**, Vol. 5, October, pp. 2121-2134.

Flemings, M.C., 1974. *Solidification Processing*, McGrawHill, New York.

Flemings, M.C., Mehrabian, R., Nereo, G.E., 1968a. *Macrosegregation, Part II*, **Transactions of the Metallurgical Society of AIME**, Vol. 242, January, pp. 41-49.

Flemings, M.C., Mehrabian, R., Nereo, G.E., 1968b. *Macrosegregation, Part III*, **Transactions of the Metallurgical Society of AIME**, Vol. 242, January, pp. 50-55.

Fujii, T., Poirier, D.R., Flemings, M.C., 1979. *Macrosegregation in Multicomponent low Alloy Steel*, **Metallurgical Transactions B**, Vol. 10, pp. 331-339.

Garcia, A., Prates, M., 1978. *Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals: I. Cooled Molds*, **Metallurgical Transactions B**, Vol. 9B, pp. 449-457.

Goodman, T.R., 1958. *The Heat-Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase*, **Trans. ASME**, Vol. 80, pp. 335-342.

Goodman, T.R., 1964. *Application of Integral Method to Transient Nonlinear Heat Transfer*, **Advances in Heat Transfer**, Vol. 1, Irvine, T.F. and Hartnett, J.P., eds., p.51.

Goodman, T.R., Shea, J.J., 1960. *The Melting of Finite Slabs*, **Trans. of the ASME**, March, pp. 16-24.

Hsiao, J.S., Chung, B.T.F., 1984. *An Efficient Algorithm for Finite Element Solution to Two-Dimensional Heat Transfer With Melting and Freezing*, **ASME paper No. 84-HT-2**.

Hunt, J.D., Jackson, K.A., Brown, H., 1966. *Temperature Gradient Microscope Stage Suitable for Freezing Materials with Melting Points Between -100 and +200°C*, **Review of Scientific Instruments**, Vol. 37, pp. 805.

Jackson, K. A., 1958. *Liquid Metals and Solidification*, Am. Soc. Met., Cleveland.

Jackson, K.A., Hunt, J.D., 1965. *Transparent Compounds that Freeze Like Metals*, **Acta Metallurgica**, Vol. 13, pp. 1212-1215.

Jackson, K.A., Hunt, J.D., Uhlmann, D.R., Seward, III, T.P., 1966. *On the Origin of Equiaxed Zones in Castings*, **Transactions of the Metallurgical Society of AIME**, Vol. 236, February, pp. 149-158.

Jackson, K.A., Uhlmann, D.R., Hunt, J.D., 1967. *On the Nature of Crystal Growth from the Melt*, **Journal of Crystal Growth**, Vol. 1, pp. 1-36.

Jesus, A. B., Ismail, K. A. R., 2000. *Comparison between Models for the Heat Transfer Fluid in Latent Heat Storage Systems*, **VIII Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT**, Porto Alegre, Brasil.

Jesus, A.B., 1998. *Estudo Numérico da Solidificação em Geometria Anular*, **Dissertação de Mestrado**, FEM/UNICAMP.

Koo, K-K., 1996. *Evaluation of Dendritic Growth Theories with Experimental Data*, **J. of the Physical Society of Japan**, Vol. 65, N° 2, February, pp. 499-504.

Kurz, W., Fisher, D. J., 1986. *Fundamentals of Solidification*, Trans Tech Publication, Switzerland.

Lewis, R.W., Roberts, P.M., 1987. *Finite Element Simulation of Solidification Problems*, **Applied Scientific Research**, Vol. 44, pp. 61-92.

Lide, D.R., 1999-2000. **CRC Handbook of Chemistry and Physics**, 80<sup>th</sup> Edition, CRC Press, Boca Raton, FL.

Livescu, G., Srinivasan, M.R., Chou, H., Cummins, H.Z., 1987. *Dynamic Light Scattering at the Nonequilibrium Crystal-Melt Interface in*

*Cyclohexanol*, **Physical Review A**, Vol. 36, N° 5, September, pp. 2293-2296.

Maliska, C.R., 1995. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro.

Masuig, G., 1950. *Lehrbuch der Allgemeinen Metallkunde*, Springer - Verlag.

Mehrabian, R., Keane, M., Flemings, M.C., 1970. *Interdendritic Fluid Flow and Macrosegregation; Influence of Gravity*, **Metallurgical Transactions**, Vol. 1, May, pp. 1209-1220.

Meyer, G.H., 1973. *Multidimensional Stefan Problems*, **SIAM J. Numer. Anal.**, Vol. 10, N° 3, June, pp. 522-538.

Milón, J. J. G., Braga, S. L., 2000. *Termoacumulação com gelo em esferas*, **Mercofrio 2000**, Porto Alegre, Brasil.

Morgan, K., 1981. *A Numerical Analysis of Freezing and Melting with Convection*, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 28, pp. 275-284.

Müller, A., 1994. *Interpretação das Curvas de Resfriamento de Metais Puros utilizando o Modelo de Schwarz*, **1° Seminário de Modelamento, Simulação e Análise Térmica em Solidificação e Fundição**, UFRGS, Porto Alegre, Novembro.

Neumann, F., 1860. *Die Partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik*, Cf. **Riemann-Weber**, ed. 5, 1912, Vol. 2, p.121.

Ockendon, J. R., Hodgkins, W. R., 1975. *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*, Clarendon Press, Oxford.

Ohno, A., 1988. *Solidificação dos Metais*, 1ª ed., Ciência e Tecnologia, 185 P. : Il., Sao Paulo

Okamoto, T., Kishitake, K., 1975. *Dendritic Structure in Unidirectionally Solidified Cyclohexanol*, **Journal of Crystal Growth**, Vol. 29, pp. 131-136.

Overfelt, T., 1994. *A Note on the Sensitivity of Solidification Models to Thermophysical Properties*, **Metallurgical and Materials Transactions B**, Vol. 25B, February, pp. 154-157.

Öziçik, M.N., 1993. *Heat Conduction*, 2nd edn, Wiley Interscience, New York.

Patankar, S.V., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York.

Price, P.H., Slack, M.R., 1954. *The Effect of Latent Heat on Numerical Solutions of the Heat Flow Equation*, **British Journal of Applied Physics**, Vol. 5, August, pp. 285-287.

Reid, R.C., Prausnitz, J.M., Poling, B.E., 1987. *The Properties of Gases and Liquids*, Fourth Edition, McGraw-Hill, New York.

Ridder, S.D., Kou, S., Mehrabian, R., 1981. *Effect of Fluid Flow on Macrosegregation in axi-symmetric Ingots*, **Metallurgical Transactions B**, Vol. 12, pp. 435-447.

Riddick, J.A., Bunger, W.B., Sakano, T.K., 1986. *Organic Solvents*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, New York.

Rubinshtein, L., 1971. *The Stefan Problem*, American Mathematical Society, Providence, RI.

Rutter, J.W., Chalmers, B., 1953. *A Prismatic Substructure Formed During Solidification of Metals*, **Canadian Journal of Physics**, Vol. 31, pp. 15-39.

Schneider, P. S., 2000. *Apostilas da Disciplina de Medições Térmicas*, **Material Didático**, DEMEC/UFRGS.

Schneider, P.S., *Apostilas da Disciplina de Medições Térmicas*, **Material Didático**, DEMEC/UFRGS, 2000.

Schwarz, C., 1933. **Z. Angew. Math. Mech.**, Vol. 13, p. 202.

Shamsundar, N., Sparrow, E.M., 1975. *Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via the Enthalpy Model*, **Journal of Heat Transfer**, August, pp. 333-340.

Singh, N.B., Glicksman, M.E., 1989. *Free Dendritic Growth in Viscous Melts: Cyclohexanol*, **Journal of Crystal Growth**, Vol. 98, pp. 534-540.

Singh, N.B., Glicksman, M.E., Mazelsky, R., 1988. *Solidification Behaviour of Organic Nonlinear Optical Crystals*, **Prog. Crystal Growth and Charact.**, Vol. 17, pp. 265-278.

Smith, V.G., Tiller, W.A., Rutter, J.W., 1955. *A Mathematical Analysis of Solute Redistribution During Solidification*, **Canadian Journal of Physics**, Vol. 33, pp. 723-745.

Souza, S. I. S., Vielmo, H. A., 2000. *Simulation of the Process of Melting of a MMF in Polar Geometry in the Presence of Natural Convection*, **VIII Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT**, Porto Alegre, Brasil.

Sparrow, E.M., Patankar, S.V., Ramadhyani, S., 1977. *Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region*, **Journal of Heat Transfer**, November, pp. 520-526.

Stefan, J., 1891. *Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere yber die Eisbildung im Polarmeere*, **Ann. Phys. u. Chem. (Wiederann)** N.F. 42, pp. 269-286.

Tacke, K.-H., 1985. *Discretization of the Explicit Enthalpy Method for Planar phase Change*, **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 21, pp. 543-554.

Tammann, G., 1925. *A Textbook on Metallurgy*, The Chem. Catalog Company, New York.

Tammann, G., 1929. *Zeit. Für Metallk.*, September, 278.

Tiller, W.A., and Rutter, J.W., 1956. *The Effect of Growth Conditions upon the Solidification of a Binary Alloy*, **Canadian Journal of Physics**, Vol. 34, pp. 96-121.

Tiller, W.A., Jackson, K.A., Rutter, J.W., and Chalmers, B., 1953. *The Redistribution of Solute Atoms During the Solidification of Metals*, **Acta Metallurgica**, Vol. 1, July, pp. 428-437.

Versteeg, H.K. & Malalasekera, W., 1995. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method*, **Longman Scientific & Technical**.

Vielmo, H.A., 1993. *Simulação Numérica da Transferência de Calor e Massa na Solidificação de Ligas Binárias*, **Tese de Doutorado**, CPGEM/UFSC.

Viskanta, R., 1988. *Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals*, **Journal of Heat Transfer**, Vol. 110, pp. 1205-1219.

Viskanta, R., 1992. *Transport Phenomena During Solidification of Binary Systems*, **ENCIT 92**, pp. 39-50.

Voller, V.R., Cross, M., 1981a. *Accurate Solutions of Moving Boundary Problems Using the Enthalpy Method*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 24, pp. 545-556.

Voller, V.R., Cross, M., 1981b. *Estimating the Solidification/Melting Times of Cylindrically Symmetric Regions*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 24, pp. 1457-1462.

Voller, V.R., Cross, M., 1983. *An Explicit Numerical Method to Track a Moving Phase Change Front*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 26, pp. 147-150.

Voller, V.R., Cross, M., Markatos, N.C., 1987. *An Enthalpy Method for Convection/Diffusion Phase Change*, **Int. J. for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 24, pp. 271-284.

Voller, V.R., Cross, M., Walton, P.G., 1979. *Assessment of Weak Solution Techniques for Solving Stefan Problems*, **In Numerical Methods in Thermal Problems**, edited by R.W. Lewis and K. Morgan, Pineridge Press.

Voller, V.R., Prakash, C., 1987. *A Fixed-Grid Numerical Modeling Methodology for Convection-Diffusion Mushy Region Phase-Change Problems*, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 30, pp. 1709-1720.

Voller, V.R., Swaminathan, C.R., Thomas, B.G., 1990. *Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems: A Review*, **Int. J. for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 30, pp. 875-898.

Washburn, E.W., 1928. *International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology*, McGraw-Hill, New York.

Weinberg, F. e Chalmers, B., 1951. **Can. J. Phys.**, 29, 382.

Weinberg, F. e Chalmers, B., 1952. **Can. J. Phys.**, 30, 488.

Winegard, W. C., 1964. *An Introduction to the Solidification of Metals*, **Institute of Metals**, London.

Zaro, M.A., 1992. *Controle de Qualidade On-Line de Fundidos via Análise Térmica: Ligas Al-Si*, **Tese de Doutorado**, PPGEMM/UFRGS.

Zaro, M.A., *Medição de Temperatura - Termopares*, **Material Didático**, PROMEC/UFRGS, 2000.



Zaro, M.A., *Teoria e Propagação de Erros*, **Material Didático**, PROMEC/UFRGS, 2000.