Estudo do caos a partir do Mapa Padrão

Edson Mateus Signor

Orientadora: Sandra Denise Prado

IF - UFRGS

Introdução

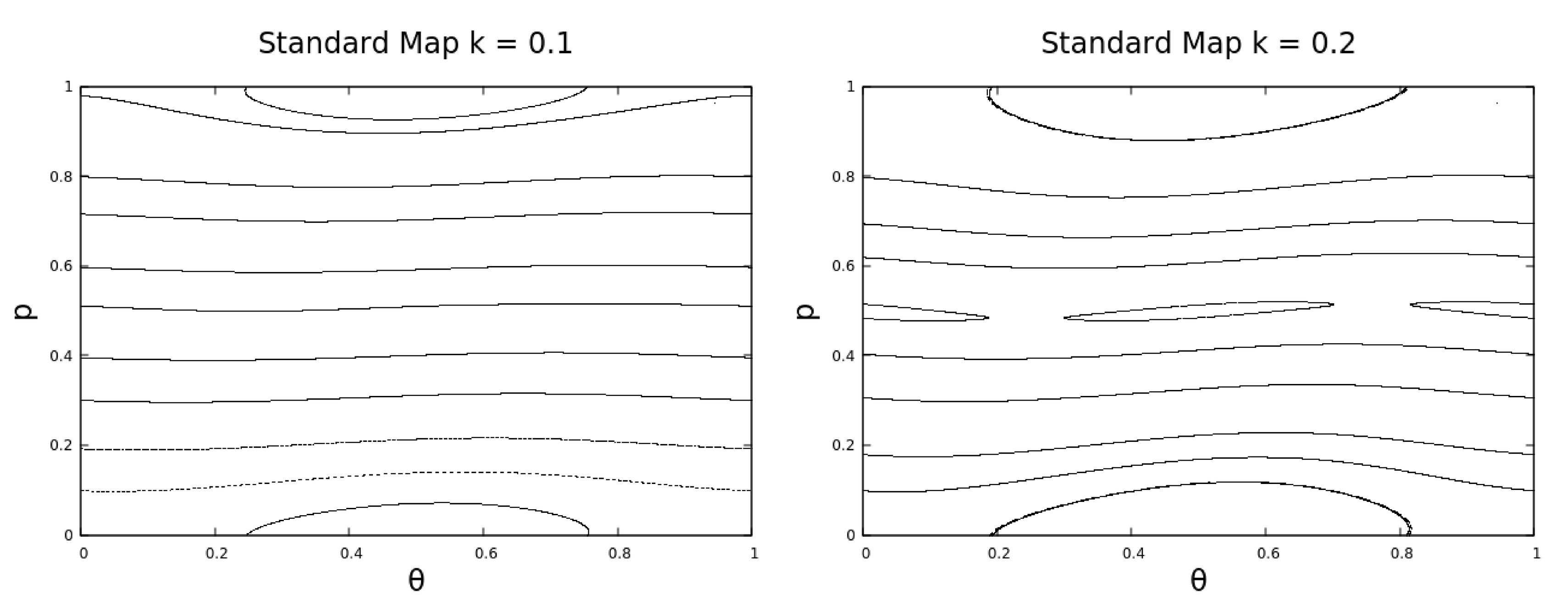
Não há uma definição precisa sobre caos, todavia o conceito chave desse campo é: em um sistema caótico duas trajetórias inicialmente muito próximas divergem exponencialmente uma da outra, desta forma gerando uma imprevisibilidade no sistema para tempos longos. Diante disso estudamos, com o auxílio do mapa padrão, os principais assuntos relacionados ao caos clássico, como: Teorema KAM e Poincaré-Birkhoff, universalidade, etc. com a finalidade de, a partir de um método semiclássico, entender o caos na mecânica quântica (caos quântico).

Metodologia:

A escolha do mapa para o estudo se deve ao fato de ser um sistema dinâmico simples e com uma transição para o caos através da rota de uma Hamiltoniana com dois graus de liberdade. O mapa padrão modela um rotor de quique periódico do tipo delta, e é dado por:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1} \quad \text{módulo } 2\pi \\ p_{n+1} &= p_n - K\sin(\theta_n) \quad \text{módulo } 2\pi \end{aligned} \tag{1}$$

o módulo em 2π se deve à simetria do mapa, que apresenta topologia de um toro. Como o determinante do Jacobiano do mapa é igual a um - sistema conservativo - o mapa apresentará apenas um tipo de ponto fixo estável e um instável, tipo centro (também chamado de elíptico) e tipo sela (também chamado de hiperbólico), respectivamente. Os únicos pontos fixos do mapa são: (0,0), do tipo sela, e (0,π), que para $k < 4$ é tipo centro e sela para $k > 4$. Definidos os pontos fixos podemos introduzir os dois teoremas mais importantes para a variação do parâmetro k do quique. O primeiro é o teorema de Poincaré-Birkhoff, que afirma que os toros racionais são substituídos por um número par de órbitas periódicas, metade estável e metade instável. Os toros racionais são os cuja razão da frequência do ângulo θ pela frequência do momento é um número racional, e as órbitas periódicas são os pontos fixos do mapa. O outro é o teorema KAM que, por sua vez, afirma que se k é suficientemente pequeno a topologia dos toros irracionais é preservada. Os toros irracionais ou invariantes são os cuja razão da frequência do ângulo θ pela frequência do momento é um número irracional.



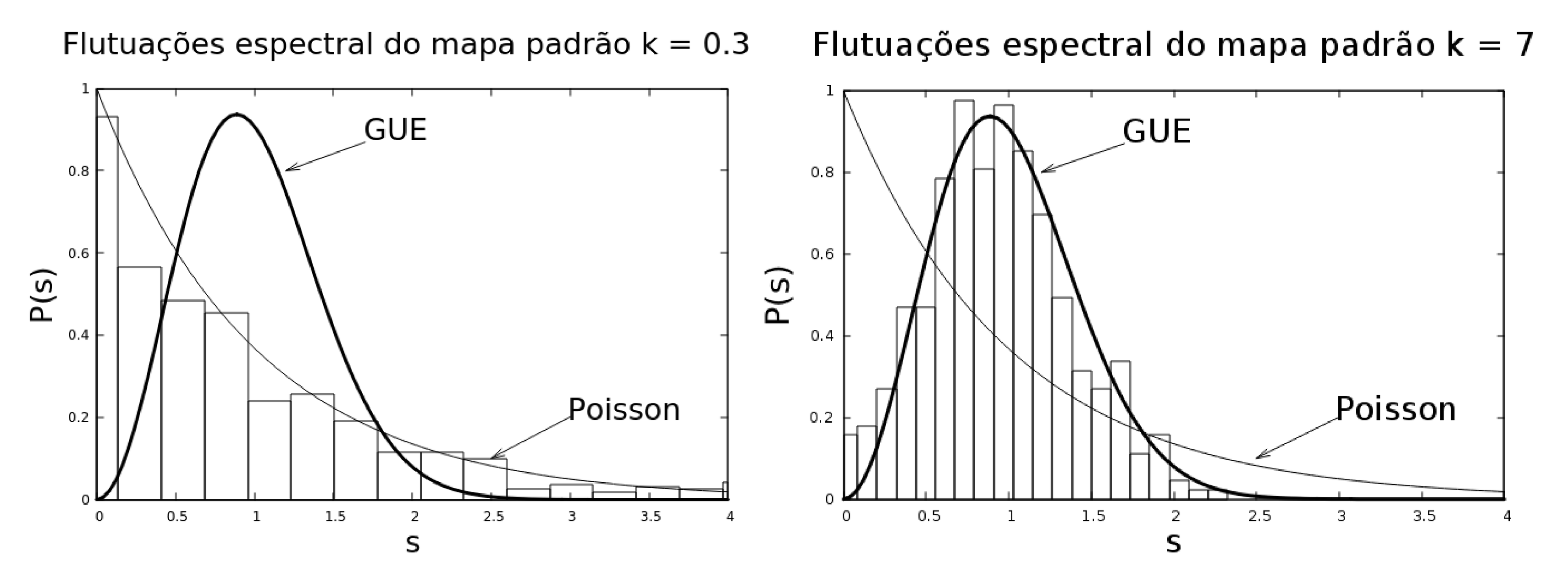
Pode-se notar os teoremas em ação nas imagens acima. Primeiro o teorema de Poincaré-Birkhoff substituindo os toros racionais por pontos fixos estáveis e instáveis, de modo que entre eles existem as chamadas ilhas de ressonância. Tal perturbação modifica a vizinhança deste toro, destruindo os toros irracionais mais próximos. Assim o teorema KAM garante que os toros irracionais mais afastados dos racionais sobrevivem a essa perturbação, porém até um certo valor de $K \simeq 0.97$ onde o último toro invariante é quebrado.

Com o auxílio do mapa ainda podemos observar a questão da universalidade. Quando variamos um parâmetro de um sistema não-linear o teorema de Poincaré-Birkhoff é acionado, sempre duplicando os pontos fixos estáveis (bifurcações forquilha). No entanto, estes acabam dobrando seu período a cada bifurcação. Consequentemente, chegará um instante em que o período é tão grande que podemos considerá-lo como aperiódico, de forma que dizemos, para este regime, que o sistema é caótico. A universalidade nos diz que tal evento ocorre independentemente do sistema.

Diante disso, como podemos transportar o conceito caos para a mecânica quântica sendo que não podemos envolver o conceito de trajetória? A resposta está em redefinir caos quântico, que passa a ser o estudo que investiga as influências do caos clássico, através de uma teoria semiclássica, em propriedades quânticas (níveis de energia, funções de onda, etc.). Dentre os vários assuntos sobre caos quânticos, concentrou-se nas estatísticas espectrais (energias) novamente com assistência do mapa padrão. Primeiramente obteve-se a versão quântica do mapa que depende do propagador de passo único de tamanho NxN, o qual relaciona a função de onda logo antes do enésimo quique com a outra função logo antes do enésimo mais um quique. Com isso, temos que a o propagador quantizado no toro é:

$$\begin{aligned} U_{nn'} = &\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} exp\left[-i\pi\frac{(m+\beta)^2}{N} + 2i\pi\frac{m+\beta}{N}(n-n')\right] \\ &\times exp\left[i\frac{KN}{2\pi}\cos\frac{2\pi(n'+\alpha)}{N}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

α e β são fases onde para certos valores quebrando a simetria de paridade e reversibilidade do tempo respectivamente. Como é uma matriz unitária de tamanho N seus autovalores são $exp(iE_k)$, $k = 1, 2, .., N$. A fases reais E_k (quase-energias) fazem papel similar das autoenergias do hamiltoniano quântico. Assim, criou-se um programa para encontrá-las e observar as flutuações espectrais, que são as diferenças de uma quase-energia com a de maior valor subsequente divido pela média das diferenças. Diante disso, analisou-se a conjectura feita por Bohigas, Giannoni, and Schmit em que um sistema quântico exibe flutuações espectrais de uma matriz aleatória gaussiana, desde que seu análogo clássico for caótico, e também a de Berry e Tabor, dizendo que se o sistema é integrável ele exibirá uma estatística das flutuações espectral de uma distribuição de Poisson. Mostra-se então os resultados obtidos:



Conclusão:

O objetivo deste trabalho foi estudar a teoria clássica do caos, incluindo alguns tópicos importantes, e como essa ideia é transmitida para a mecânica quântica. Ademais, as conjecturas das relações das estatísticas das flutuações espectrais com as estatísticas de Poisson e de matrizes randômicas gaussianas foram verificadas. A próxima etapa é continuar a estudar a teoria e posteriormente aplicar essas ideias ao conceito de estatística de *records*.

Referências:

[1] Ullmo, D.; Tomsovic, S. (2014) *Introduction to quantum chaos*.