



### Método do Espalhamento Inverso e Aplicações Numéricas

**Autor:** Alisson Matheus Fachini Soares  
**Orientador:** Lucas da Silva Oliveira



#### Introdução

Na física e em algumas áreas da matemática existe uma variada classe de equações não lineares, cujas soluções possuem características muito interessantes por serem muito similar do que se espera da solução de uma equação linear. Nosso objetivo foi entender o método de construções dessas soluções, chamado de *Transformada do Espalhamento Inverso - IST*. E também investigamos os problemas numéricos associados a implementação de métodos clássicos para solução da NLS, que está contido nessa classe de equações não lineares. Sendo essa mesma equação uma grande motivadora do uso desse método, pois em ela está relacionada com modelagem de fibras óticas e também em águas profundas essa equação governa as ondas de translação desse meio.

#### O Problema do Espalhamento e Espalhamento Inverso

Dado um problema da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t = N(u) & (1a) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (1b) \end{cases}$$

Vamos assumir que  $u_0(x) \in P_\mu$ , tal que

$$P_\mu := \{f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|^\mu)f(x)dx < \infty\}$$

Para  $\mu = 1$  ou  $\mu = 2$ , essas condições são para garantir a existência da solução. O método aqui proposto consiste em analisar o problema (1) através de dois problemas. Um problema de Sturm-Liouville e o problema de resolver uma equação integral.

Primeiro com a nossa condição inicial resolvemos o seguinte Sturm-Liouville:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0 \quad (2)$$

Classificamos as soluções em dois tipos, as que possuem oscilação no infinito, os

autovalores associados serão chamados de espectro contínuo ( $\lambda > 0$ ). As que possuem decaimento exponencial no infinito, os autovalores dessas soluções chamaremos de espectro discreto ( $\lambda < 0$ ). Resolvendo esse problema encontramos o conjunto  $\mathcal{S}(0, \lambda)$  chamado dados de espalhamento. Com algumas condições associadas ao problema (1) é possível encontrar os dados de espalhamento em qualquer momento, isso é  $\mathcal{S}(t, \lambda)$

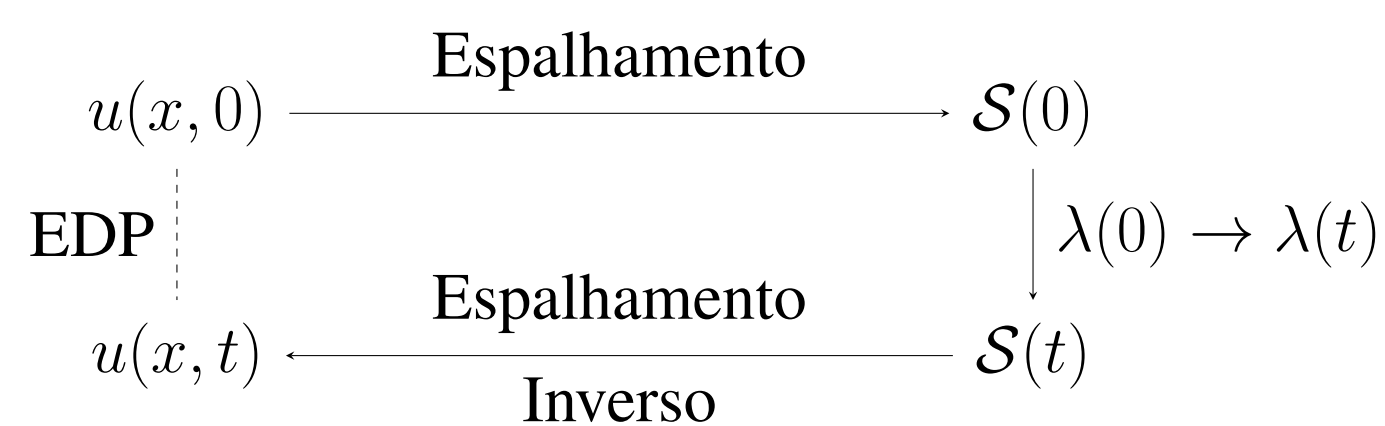
A partir de (2) podemos encontrar a seguinte expressão para  $u(x, t)$  da seguinte forma

$$u(x, t) = \frac{d}{dx}K(x, x; t) \quad (3)$$

Agora uma expressão para  $K(x, z; t)$  pode ser encontrada resolvendo a equação de Gel'fand-Levitan-Marchenko

$$K(x, z; t) + F(x, z; t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y; t)F(y + z; t)dy = 0 \quad (4)$$

Onde  $F(X; t)$  é uma função que depende dos dados de espalhamento. De maneira resumida podemos representar o método pelo diagrama:



#### Resultados Numéricos para NLS

Seguindo pela linha do Ablowitz investigamos alguns problemas relacionadas a NLS. Usamos o RK-Merson para investigarmos dois esquemas para NLS:

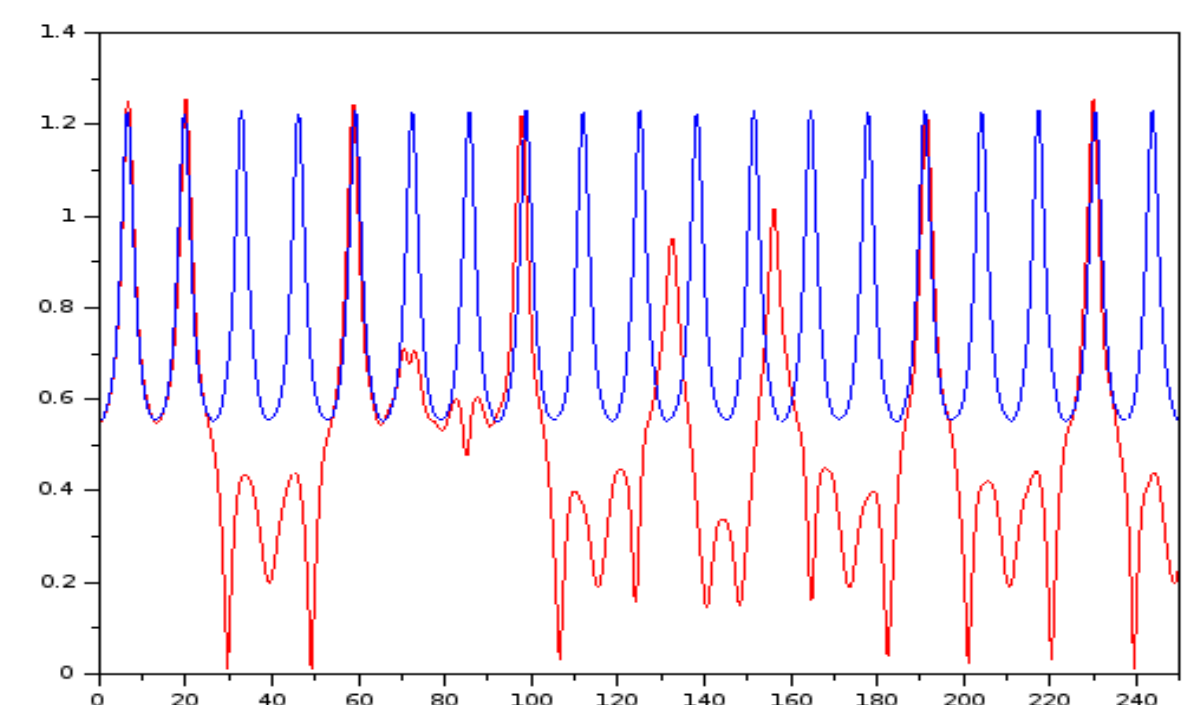
$$\begin{cases} i \frac{du_j}{dt} + Lu_j + 2(u_j)^2 u_j = 0 & (5a) \\ i \frac{du_j}{dt} + Lu_j + (u_j)^2(u_{j+1} + u_{j-1}) = 0 & (5b) \end{cases}$$

Onde  $L$  é o laplaciano agindo sobre  $u_j$ . Utilizamos o seguinte espaçamento para a parte espacial  $h = L/N_e$  e condições de periodicidade  $u_j = u_{j+N_e}$ . Ablowitz mostrou para esses dois esquemas que além hamiltoniano, respectivamente para o esquema (5a) e (5b), as seguintes quantidade são conservadas

$$\begin{cases} I_a = \sum_{j=0}^{N_e-1} |u_j|^2 & (6a) \\ I_b = \sum_{j=0}^{N_e-1} u_j^*(u_{j+1} + u_{j-1}) & (6b) \end{cases}$$

usando espaçamento  $h = 1$ . Podemos deduzir que o segundo esquema possui infinitas quantidades conservadas, enquanto o primeiro integrável apenas duas, porém  $I_a$  se conserva apenas para  $N_e = 2$ . Para ilustrar isso, utilizaremos o método Runge Kutta Merson, um método adaptativo, com uma tolerância de  $10^{-6}$  e usaremos  $N_e = 24$  para qual o segundo esquema é integrável nos esquemas (5) com a seguinte condição inicial:

$$u(x, 0) = 0.5 + 0.05\cos(\mu x) + i10^{-5}\sin(\mu x) \quad (7)$$



A figura acima é evolução do  $|u(0, t)|$ . Em vermelho temos o primeiro esquema e em azul o segundo. Podemos notar que o primeiro esquema no tempo inicial possui uma solução esperada até que abruptamente perde esse comportamento, indicando instabilidades numéricas, trocando a tolerância esse comportamento se mantém.

#### Referências:

[1], P.G Drazin R.S Johnson - Solitons: an introduction

[2], M.J. Ablowitz P.A. Clarkson - Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering