Estimação do Parâmetro de Hurst em Processos Brownianos Fracionários

Alisson Silva Neimaier e Sílvia Regina Costa Lopes

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

alissonneimaier@hotmail.com, silvia.lopes@ufrgs.br

1. Introdução

O objetivo deste projeto é estudar as propriedades do processo Browniano fracionário, e sugerir um método para estimar o parâmetro de Hurst. A relevância desses estudos pode ser medida pelas diversas aplicações possíveis desse processo, tanto em matemática financeira como em telecomunicação.

Neste pôster serão feitas simulações de processos Brownianos fracionários e será sugerido um estimador para o parâmetro de Hurst. Para isso, devemos primeiro apresentar algumas noções que serão importantes para o seguimento do trabalho.

2. Noções Preliminares

2.1 Processos Estocásticos

Definição 2.1. Um *processo estocástico* $X = \{X_t\}_{t \in T}$ é uma família de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e indexadas em um parâmetro $t \in T$.

Existem dois conceitos relacionados a processos estocásticos que serão muito importantes para esse trabalho e portanto serão definidos a seguir. São eles a estacionariedade (neste caso, estamos interessados apenas na estacionariedade forte) e a função de autocovariância.

Definição 2.2. Um processo $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito *fortemente estacionário* se, e somente se

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}), \quad \forall\, k \in \mathbb{N} - \{0\}, h \in T$$

em que $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade em distribuição.

Definição 2.3. Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico tal que $Var(X_t) < \infty$, para todo $t \in T$. A *função de autocovariância* de $\{X_t\}_{t \in T}$ é definida como

$$\gamma_X(r,s) = Cov(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], r, s \in T.$$

Para X estacionário, podemos dizer que $\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r-s, 0)$. Portanto, seria conveniente redefinir a função de autocovariância com apenas uma variável, da seguinte forma

$$Cov(X_{t+h}, X_t) = \gamma_X(t+h, t) = \gamma_X(h, 0) = \gamma_X(h). \tag{1}$$

2.2 Processo Browniano Fracionário (pBf)

Nesta seção, daremos as definições necessárias para entender o processo Browniano fracionário, processos *Gaussiano* e processo *Browniano*.

Definição 2.4. O processo $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito ser *Gaussiano* se, para um conjunto finito de índices $t_1, \ldots, t_k \in T, X_{t_1, \cdots, t_k}$ é uma variável aleatória Gaussiana multivariada.

Teorema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo Gaussiano. Então podemos defini-lo unicamente por suas funções de média e covariância.*

Definição 2.5. Um processo estocástico $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito ser *Browniano* se e somente se

i) $\{B_t\}_{t \geq 0}$ é Gaussiano

ii) $\mathbb{E}(B_t) = 0, \quad \forall\ t \geq 0$

iii) $Cov(B_{t_1}, B_{t_2}) = min(t_1, t_2), \quad \forall\ t_1, t_2 \geq 0$

iv) $\forall\ \omega \in \Omega$, a função t $\to B(t, \omega)$ é contínua $\forall\ t \geq 0$.

Definição 2.6. O processo Gaussiano $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$ é chamado de *processo Browniano fracionário* com parâmetro Hurst $H \in (0,1)$ se

i) $\mathbb{E}(B_t^H) = 0, \forall t \geq 0$

ii) $Var(B_t^H) = \mathbb{E}[(B_t^H)^2] = t^{2H}, \forall \geq 0$ e $H \in (0,1)$

iii) $Cov(B_t^H, B_s^H) = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

Diferente do processo Browniano, o fracionário não possui incrementos independentes. Dependendo do parâmetro H, podemos dizer que é um processo de longa ou curta dependência.

3. Simulações

Para termos uma visão mais concreta do processo Browniano fracionário, geramos séries temporais desse processo com a função *fbm* do pacote *somebm* do *R* mostradas a seguir

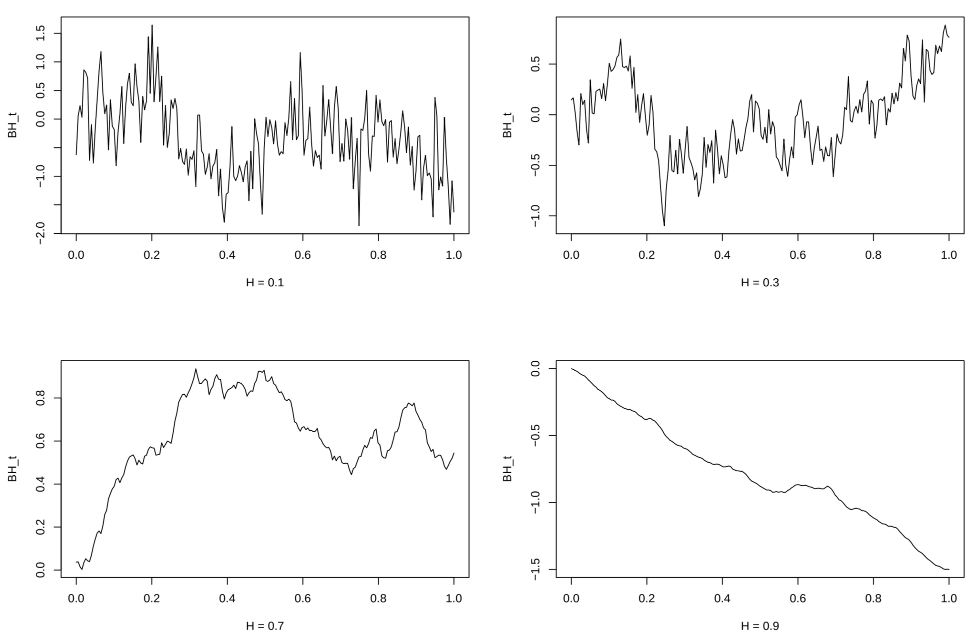

Figura 2: *Séries temporais geradas de processos Brownianos fracionários com parâmetro de Hurst $H \in \{0,1; 0,3; 0,7; 0,9\}$*

Pelo gráfico, é possível notar que quanto maior o valor de H, mais suave é a sua trajetória, dando uma ideia de que a variância deve ser menor quanto maior o valor de H. O processo Browniano fracionário varia com o tempo, o que dificulta sua análise. Porém, seus incrementos são estacionários. Portanto, a ideia é estimar o parâmetro de Hurst H a partir da variância dos incrementos.

4. Resultados e Conclusões

Como os incrementos do processo Browniano fracionário são estacionários, podemos dizer que $B_{t+k}^H - B_t^H \stackrel{d}{=} B_k^H$. Dessa forma, $\mathbb{E}(B_k^H) = 0$ e $Var(B_k^H) = k^{2H}$ para todo $k \geq 0$ e $H \in (0,1)$, e temos o seguinte resultado

Proposição 4.1. *Seja $\{B_t^H\}_{t \geq 0}$ um processo Browniano fracionário dado pela Definição 2.6. Então, um estimador para H é definido por*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{log\left(\hat{S}^2_{B_k^H}\right)}{log(k)}\right) \tag{2}$$

onde $\hat{S}^2_{B_k^H}$ é a variância amostral corrigida do incremento de tamanho k.

Para encontrar as estimativas mostradas na Tabela 1 abaixo, para cada $H \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ foram geradas 100 séries temporais com 1000 incrementos de tamanho $k = 1/1000$. Em seguida foram retiradas amostras compostas pelos primeiros n incrementos e calculadas as estatísticas da média, desvio padrão e erro quadrático médio.

Tabela 1: *Estimador do parâmetro H, definido na Proposição 4.1 para valores de $H \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$. As estimativas de $\hat{H}$ que aparecem acompanhadas dos respectivos desvios padrões (dp) e erros quadráticos médios (eqm) são dadas para $n \in \{20, 50, 100, 200, 500, 1000\}$*

H	n=20			n=50			n=100		
	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)
0,1	0,1057	0,0255	6,76E-04	0,0993	0,0178	3,15E-04	0,0988	0,0121	1,47E-04
0,3	0,3037	0,0252	6,42E-04	0,3022	0,0144	2,10E-04	0,3016	0,0102	1,05E-04
0,5	0,5028	0,0229	5,26E-04	0,5025	0,0160	2,58E-04	0,5016	0,0096	9,44E-05
0,7	0,7114	0,0216	5,92E-04	0,7045	0,0153	2,53E-04	0,7057	0,0107	1,46E-04
0,9	0,9635	0,0297	4,91E-03	0,9496	0,0186	2,80E-03	0,9375	0,0149	1,63E-03
H	n=200			n=500			n=1000		
	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)	$\hat{H}$	sd($\hat{H}$)	eqm($\hat{H}$)
0,1	0,1004	0,0078	6,09E-05	0,1010	0,0056	3,17E-05	0,1000	0,0038	1,42E-05
0,3	0,2998	0,0079	6,24E-05	0,2996	0,0045	2,04E-05	0,3003	0,0034	1,16E-05
0,5	0,4999	0,0078	6,03E-05	0,4995	0,0049	2,38E-05	0,5003	0,0030	9,02E-06
0,7	0,7033	0,0085	8,27E-05	0,7019	0,0060	3,90E-05	0,7015	0,0042	1,94E-05
0,9	0,9339	0,0138	1,34E-03	0,9251	0,0103	7,33E-04	0,9220	0,0082	5,52E-04

Podemos concluir que $\hat{H}$ parece ser um bom estimador no sentido de consistência, apresentando desvio padrão e eqm baixos quanto mais próximos H está do valor 0,5 e estimativas piores quanto mais próximo H está de 1. Para o futuro, pretendemos estudar as propriedades assintóticas desse estimador e compará-lo com outros já propostos na literatura.

5. Referências Bibliográficas

- Brockwell, P.J e Davis, R.A. (1991). Time Series: Theory and Methods. New York: Springer.
- Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (2006). Análise de Séries Temporais. São Paulo: Edgard Blücher.
- Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes. Boca Raton: Chapman & Hall.