Classificação dos Grupos de ordem menor ou igual a 60

Clayton Lauschner dos Santos
Trabalho orientado por Bárbara Seelig Pogorelsky

Universidade: presente!
UFRGS PROPESQ
XXXI SIC
Salão UFRGS 2019
21. 25. OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

Objetivo:

Este trabalho tem o objetivo de mostrar que todo grupo de ordem menor que sessenta possui um subgrupo normal não trivial (é simples), com exceção dos grupos cíclicos de ordem prima.

Resultados básicos da teoria de Grupos:

Seja G um Grupo. Dizemos que H é um subgrupo normal em G se $gHg^{-1} \subseteq H \;\; \forall g \in G$ e denotamos por $H \lhd G$. O centro de um grupo G, $Z(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$ é um exemplo de subgrupo normal para qualquer grupo G.

Um Grupo G é dito simples se seus subgrupos normais são somente os subgrupos triviais: G e $\{e\}$.

Teoremas de Sylow:

Os teoremas de Sylow são importantes resultados da teoria de grupos e são os principais resultados que auxiliam este trabalho.

1º Teorema de Sylow: Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$ com $(p,b)=1$. Então para cada n, $0 \leq n \leq m$, existe um subgrupo H de G tal que $|H|=p^n$.

Definição: Sejam G um grupo finito, p um primo e p^m a maior potência de p que divide $|G|$.Os subgrupos de G que tem ordem p^m são chamados de *p-subgrupos de Sylow de G.*

2º Teorema de Sylow: Sejam G um grupo de ordem finita e p um número primo. Todos o *p-subgrupos de Sylow de G* são conjugados entre si. Em particular, se existe apenas um *p-subgrupos de sylow* em G, então este é normal em G;

3º Teorema de Sylow: Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$, com (p,b)=1. Seja n_p o número de *p-subgrupos de Sylow de G*. Então n_p divide b; e $n_p \equiv_p 1$.

Grupos de ordem prima:

Um famoso e importante resultado da teoria de grupos é o teorema de Lagrange. Entre outras coisas, o teorema afirma que se H é subgrupo de G, então $|H|$ divide $|G|$. Se G é um grupo tal que $|G|=p$ com p primo então seus únicos subgrupos são $H=\{e\}$($|H|$=1) e $H=G$ ($|H|=p$). Então nenhum grupo de ordem prima possui um subgrupo normal além dos triviais, logo, todo grupo de ordem prima é simples.

Com isso conclui-se que se $|G|$= 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ou 59, então G é simples.

Grupos de ordem p^n com p primo e $n \neq 1$:

Se $|G|=p^n$, então G é um *p-grupo.* Qualquer *p-grupo* possui um centro não trivial, e $Z(G) \lhd G$, *logo, para* $|G|$=4, 8, 9, 16, 25, 27, 32 e 49, G não é simples.

Grupos de ordem $p^n b$ com $(p,b)=1$ e $1<b<p$:

Sejam H um *p-subgrupo de Sylow* de G e n_p o número de *p-subgrupos de Sylow* de G. Pelo 3º Teorema de Sylow, tem-se $n_p \equiv_p 1$ e n_p divide b. Mas $b<p$, logo n_p=1 e, pelo 2º Teorema de Sylow, $H \lhd G$. Logo, os grupo com $|G|$=6, 10, 14, 15, 20, 21, 22, 26, 28, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 44, 46, 50, 52, 54, 55, 57 e 58 não são simples.

Grupos de ordem 30:

Dado G com $|G|$=30=2.3.5, então, pelo 3º Teorema de Sylow, $n_3 \equiv_3 1$ e n_3 divide 10, e também $n_5 \equiv_5 1$ e n_5 divide 6. Logo, n_3=1 ou n_3=10 e n_5=1 ou n_5=6. Supõe-se que $n_3 \neq 1$ $n_5 \neq 1$. Então G possui 10 subgrupos dois a dois disjuntos de ordem 3 e 6 subgrupos dois a dois disjuntos de ordem 5, totalizando 10x(3-1)+6x(5-1)=44 elementos de ordem 5 e 3. Mas isso é absurdo, pois $|G|$=30, logo, n_3=1 ou n_5=1, e pelo 2º Teorema de Sylow, ou o 3-*subgrupo de Sylow* ou o 5-*subgrupo de Sylow* é normal em G, portanto não existem grupos de ordem 30 simples.

Grupos de ordem 40 e 45:

Se $|G|$ = 40 = 5x2³, pelo 3º Teorema de Sylow, deve-se ter $n_5 \equiv_5 1$ e n_5 divide 8. Se $|G|$ = 45 = 5x3², deve-se ter $n_5 \equiv_5 1$ e n_5 divide 9. Em ambos os casos, pelo 2º Teorema de Sylow, o 5-*subgrupo de Sylow* de G é normal em G. Portanto não existem grupos simples de ordem 40 e 45.

Grupos de ordem 56:

Se $|G|$=56=7x2³, então, pelo terceiro teorema de Sylow, para o 7-*subgrupo de Sylow* de G tem-se as opções $n_7=1$ ou $n_7=8$. No caso $n_7=1$ *o* 7-*subgrupo de Sylow* de G é normal em G, logo G não seria simples.

Para o caso $n_7=8$, G possui oito 7-*subgrupo de Sylow* e, portanto, 48 elementos de ordem 7. O 1º Teorema de Sylow garante que existe um 2-*subgrupo de Sylow* com exatamente 8 elementos, que são os elementos restantes. Logo se $n_7 \neq 1$ então $n_2=1$. Então não existem grupos simples de ordem 56.

Grupos de ordem 12, 24, 36 e 48:

Para $|G|$=12, 24, 36 ou 48, toma-se $X=\{aHa^{-1};\, a \in G\}$, onde H é um p-subgrupo de Sylow adequado (p=2 para $|G|$=12, 24 ou 48 e p=3 para $|G|$=36), com $n_p \neq 1$:

$$\rho: G \longrightarrow S(X)$$
$$g \mapsto I_g : X \longrightarrow X$$
$$aHa^{-1} \mapsto gaHa^{-1}g^{-1}$$

Onde $S(X)$ é o grupo de permutações de X e I_g é a conjugação por g.

É possível então mostrar que o núcleo dessa representação é um subgrupo normal em G, $\ker\rho \lhd G$, e então concluir que não existem grupos simples dessas ordens.

O grupo A_5:

Um importante resultado da teoria de grupos afirma que os grupos de permutações pares de n elementos, representados por A_n, são todos simples, exceto por A_4. A_5 é um grupo com 60 elementos, e por este resultado, é simples. Dessa forma, existem grupos de ordem 60 que são simples.

Referências:

Garcia, Arnaldo; Lequain, Yves: Elementos de álgebra.