

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# **Fotoprodução de monopolos magnéticos em colisões pp**

Gustavo Copé

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a  
obtenção do grau de Bacharel no Curso de Física  
Orientadora: Profa. Dra. Maria Beatriz Gay Ducati

Porto Alere - RS  
Dezembro de 2019

# Agradecimentos

À minha orientadora, Maria Beatriz, pelas ótimas dicas na elaboração do trabalho, ajuda no esclarecimento de dúvidas e histórias inspiradoras.

À minha mãe, Rochele, pelo apoio com minha escolha de carreira e na vida, paciência e dedicação incrível.

À meu padastro, Bira, pelas risadas e brincadeiras que ajudam a desestressar durante os semestres e inúmeras viagens a Porto Alegre.

À minha namorada, Letícia, por estar sempre por perto, me motivar nas hora de dificuldade e deixar a vida mais leve.

Aos meus colegas de orientação, Bruna e Sony, pelas inúmeras ajudas na elaboração do trabalho e discussões de dúvidas.

Aos meus amigos de graduação, Marcelo e Thomas, pelas boas risadas durante o curso, discussões de questões de disciplinas e companheirismo de jogatina.

## Resumo

Monopolos magnéticos são objetos de interesse da física, uma vez que dariam origem à uma simetria na teoria eletromagnética. Sua existência foi primeiro apresentada nos trabalhos de Dirac, que encontra uma explicação para existência de cargas elétricas através dessas partículas. Todavia, não foram encontradas evidências experimentais que suportem sua realidade até o presente momento. Uma das principais dificuldades nesse aspecto, é a falta de conhecimento da sua massa; trabalhos em processos Drell-Yan estabelecem uma massa mínima de  $360\text{GeV}$ , mas não existe consenso em um limite superior. Nesse trabalho calcula-se a seção de choque, bem como seção de choque diferencial em energia de processos de fotoprodução em colisões pp, analisando as contribuições elásticas, semi-elásticas e inelásticas. Estipula-se que para monopolos produzidos em fotoprodução seja possível detectar, dentro das limitações atuais, monopolos de massa de  $500\text{GeV}$  até cerca de  $1000\text{GeV}$ , valor no qual a seção de choque atinge um valor bastante baixo, tornando a probabilidade de detecção muito baixa.

# Abstract

Magnetic monopoles are objects of interest on physics, once it would give rise to a symmetry on eletromagneic theory. Their existence was first presented by Dirac, finding an associated explanation to the quantization of eletric charge. However, there are no experimental evidences to support their existence up to now. One of the main difficulties in this regard is the lack of knowledge of its mass. Recent publications, which studied Drell-Yan processes, result in a minimal mass of  $360GeV$ , but there is no consensus about the upper limit. In the present work we evaluate, the cross section, as well as the differential cross section on energy, of photoproduction processes in pp collisions, analysing the elastic, semi-elastic and inelastic contributions. The results found for present accelerators capacities, give limits around  $500GeV$  to  $1000GeV$  to monopole mass; after this range of values, the cross section becomes too small, lowering the possibility of discovery in the present time.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>monopolos no eletromagnetismo</b>	<b>2</b>
2.1	Compatibilidade com as equações de Maxwell . . . . .	2
2.2	Interações magnetoelétricas . . . . .	3
2.3	Condição de Quantização de Dirac . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Fotoprodução de Pares</b>	<b>7</b>
3.1	Diagramas de processos . . . . .	7
3.2	Formalismo de seção de choque para processos . . . . .	8
3.3	Seção de choque para fotoprodução de par lépton-antilépton . . . . .	11
3.4	Seção de choque monopolo-antimonopolo . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Método de fótons equivalentes</b>	<b>19</b>
4.1	Weizsäcker-Williams . . . . .	19
4.2	Dress-Zeppenfeld . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Funções de distribuição partônica</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>26</b>
6.1	Processos estudados . . . . .	26
6.2	Resultados . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Conclusão e perspectivas</b>	<b>30</b>
	<b>Referências</b>	<b>31</b>

# 1 Introdução

A existência de monopolos magnéticos é algo teorizado há um bom tempo. Experimentos constatam que a natureza se comporta de forma assimétrica em relação aos campos elétricos e magnéticos, apesar de que a descrição eletromagnética seja não só compatível, mas forneça uma simetria em relação à carga elétrica. Dessa maneira, é cabível a questão da existência de monopolos magnéticos, e torna-se necessária uma teoria que os descrevam.

Os primeiros passos nessa direção foram dados por Dirac [1], que trabalhando com as simetrias observadas entre campos eletromagnéticos, propôs uma extensão da teoria de campos incluindo monopolos. Os resultados dessa teoria são bastante interessantes; entre eles, o que mais se destaca é sua condição de quantização (condição de quantização de Dirac (CQD)) que explica a observação de carga elétrica quantizada e estabelece uma relação entre essa e a carga magnética ( $g$ ), além de fornecer um valor para a constante de acoplamento de monopolos ( $\alpha_g$ ). Apesar desses resultados, essa teoria não é completamente coerente, uma vez que a constante de acoplamento obtida tem um valor alto, e teoria de uma perturbação não seria aplicável. Posteriormente o trabalho de Dirac é estendido por Schwinger [2] e Zwanzinger [3] na chamada QED (*Quantum Electrodynamics*) dual.

Um ponto que ainda é incerto, é em relação a constante de acoplamento da interação de cargas magnéticas. A teoria de Dirac fornece um valor constante, enquanto outras análises [4] envolvendo a interação de elétrons e monopolos resulta em um valor dependente da velocidade do monopolo ( $\beta$ ) em um dado referencial. Sem resultados definitivos sobre  $\alpha_g$ , não se pode afirmar a validade de alguma dessas, então vamos utilizar a segunda, que é a mais aceita em publicações recentes. Outro ponto é o valor da constante, que por ser grande, tornaria uma teoria de perturbação não aplicável. Além disso, não existe razão, a princípio, para empregar a QED usual, uma vez que essa teoria se aplica a cargas elétricas. Todavia, a análise que fornece o valor da constante dependendo da velocidade, também resulta que a interação de um monopolo com um elétron seria equivalente a de um elétron com uma partícula de carga  $\beta g$ . Por essa razão [5] propõe que se aplique os cálculos de QED usual, mas utilizando a constante de acoplamento para carga magnética. Isso não resolve o fato dessa constante não permitir um tratamento perturbativo, então esses resultados devem ser encarados como uma primeira aproximação.

Apesar dessas teorias explicarem a existência de monopolos, estes ainda não foram detectados experimentalmente. Um dos problemas é determinar em que região de energia procurar essas partículas. Resultados de [5], [6] e [4], que trabalhou com processos Drell-Yan, fornece um limite inferior para a massa dos monopolos da ordem de  $360\text{GeV}$ . Porém somente um limite inferior não é suficiente, é interessante ter uma faixa esperada de energia. Dessa forma, o objetivo desse trabalho é estimar um limite superior para a massa dos monopolos, através da análise de processos de fotoprodução em colisões próton-próton (pp).

Nesse trabalho se calcula a seção de choque, bem como a distribuição de seção de choque em energia em função das massas dos monopolos em processos de fotoprodução de pares monopolo-antimonopolo em colisões pp. Para isso baseia-se no formalismo de [7], [8], [9] e [10] que infere que a seção de choque desse processo é dada pela convolução de um fluxo de fótons do próton, com a seção de choque de fotoprodução de um par monopolo-antimonopolo em processos elásticos, semi-elásticos e inelástico.

## 2 monopolos no eletromagnetismo

### 2.1 Compatibilidade com as equações de Maxwell

As equações de Maxwell clássicas para cargas no vácuo são dadas por [11] (na formulação gaussiana e tomando  $c = 1$ ):

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j}_e \quad (2.4)$$

Sendo  $\vec{E}$  o campo elétrico,  $\vec{B}$  o vetor indução magnética,  $\rho_e$  a densidade de carga elétrica, e  $\vec{j}_e$  a densidade de corrente elétrica. Analisando uma região do espaço na qual não existam cargas ( $\rho_e = 0$ ,  $\vec{j}_e = 0$ ), obtemos as seguintes equações:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Percebe-se, analisando a forma dessas últimas equações, que existe uma simetria entre os campos elétricos e magnéticos; caso seja feita uma mudança de  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ , as equações mantêm-se inalteradas. As equações mais gerais não preservam essa simetria. Contudo, seria interessante que esta fosse, uma vez que simetrias estão ligadas à grandezas preservadas, bem como fornecem mais informação sobre o sistema que se está analisando. Por essa razão, foi proposta [1] a existência de cargas magnéticas ( $g$ ). Tais cargas devem satisfazer:

$$e \rightarrow g \quad g \rightarrow -e, \quad (2.9)$$

e assim a transformação vista no vácuo para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  é mantida. Além disso, obtém-se uma boa relação para as constantes de acoplamento:

$$\alpha_e = e^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_g = g^2, \quad (2.10)$$

desse modo, a interação de fótons com cargas elétricas é similar a de fótons com cargas magnéticas. Por fim, se propõe também, em analogia às grandezas elétricas, uma densidade de carga magnética ( $\rho_g$ ), bem como uma densidade de corrente magnética ( $\vec{j}_g$ ), as quais mantêm as equações de Maxwell inalteradas frente a transformações:

$$\rho_e \rightarrow \rho_g \quad \rho_g \rightarrow -\rho_e \quad (2.11)$$

$$\vec{j}_e \rightarrow \vec{j}_g \quad \vec{j}_g \rightarrow -\vec{j}_e \quad (2.12)$$

Com essas definições, as equações de Maxwell com monopolos ficam:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_g \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + 4\pi\vec{j}_g \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j}_e \quad (2.16)$$

Alternativamente, também pode-se reescrever as equações no formalismo covariante; utilizando o tensor eletromagnético ( $F_{\mu\nu}$ ), bem como seu dual ( $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ), as equações de Maxwell ficam:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi j_\mu \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (2.18)$$

Sendo  $j_\mu$  o quadrivetor densidade de corrente elétrica. Nesse formalismo, se introduz a densidade de corrente magnética ( $k_\mu$ ), um quadrivetor equivalente ao  $j_\mu$ . Dessa forma as equações na presença de cargas magnéticas tornam-se:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi j_\mu \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi k_\mu \quad (2.20)$$

## 2.2 Interações magnetoelétricas

Na primeira seção foi analisada a compatibilidade dos monopolos com a teoria eletromagnética clássica. Agora se analisará como os monopolos interagem com partículas com carga elétrica, com base nas demonstrações de [4] e [12]. Para isso, consideremos o arranjo da fig(1). Nesse esquema temos dois referenciais,  $K$  e  $K'$ , cujas variáveis usadas sem e com "linha" referem-se a  $K$  e  $K'$ , respectivamente; no referencial  $K$  se tem um elétron em repouso no ponto  $P$ , e um pósitron se movendo em relação a ele com velocidade  $v$  sobre o eixo  $z$ . No referencial  $K'$ , é o pósitron que está em repouso

Como o pósitron está em repouso em  $K'$ , seu campo elétrico ( $\vec{E}'$ ) é dado por:

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3}, \quad (2.21)$$

sendo  $\vec{r}'$  o vetor que liga o pósitron ao elétron, e  $b$  o parâmetro de impacto da colisão, isto é, a distância mínima de aproximação das partículas. Dessa forma, as componentes desse campo são:

$$E'_x = \frac{eb}{|\vec{r}'|^3} \quad (2.22)$$

$$E'_y = 0 \quad (2.23)$$

$$E'_z = -\frac{evt'}{|\vec{r}'|^3} \quad (2.24)$$



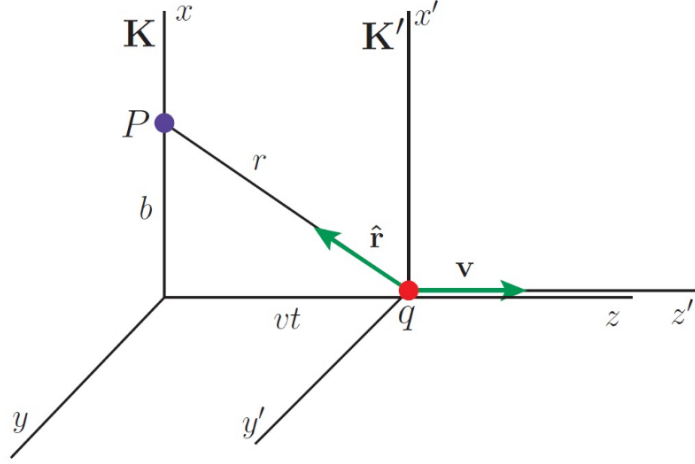


Figura 1: Referenciais de interação magnetoelétrica

Escolhemos os referenciais, de modo que os tempos "t" e "t'" coincidam na origem; dessa forma  $t' = \gamma t$ , sendo  $\gamma$  o fator de Lorentz. Dessa maneira, pode-se expressar  $|\vec{r}|$  somente em termos de variáveis de  $K$ , como:

$$|\vec{r}| = \sqrt{b^2 + (\gamma vt)^2} \quad (2.25)$$

Das transformações de Lorentz para os campos eletromagnéticos, tem-se as relações:

$$E_x = \gamma(E'_x + vB'_y) \quad B_x = \gamma(B'_x + vE'_y) \quad (2.26)$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_x) \quad B_y = \gamma(B'_y + vE'_x) \quad (2.27)$$

$$E_z = E'_z \quad B_z = B'_z \quad (2.28)$$

No referencial  $K'$ , não há campos magnéticos gerados pelo pósitron, bem como  $E'_y = 0$ . Assim, as equações não nulas resultantes são:

$$E_x^e = \gamma \frac{eb}{|\vec{r}|^3} = \frac{\gamma eb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.29)$$

$$E_z^e = -\frac{evt'}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\gamma evt}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.30)$$

$$B_y^e = vE_x = \gamma \frac{evb}{|\vec{r}|^3} = \frac{\gamma evb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.31)$$

Agora, faz-se uma transformação dos campos, similar a discutida anteriormente, trocando as cargas elétricas por cargas magnéticas, de modo a obter os campos gerados por um monopolo. Fazendo as transformações, obtém-se:

$$B_x^g = \frac{\gamma gb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.32)$$

$$B_z^g = -\frac{\gamma gvt}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.33)$$

$$E_y^g = -\frac{\gamma gvb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.34)$$

Como no referencial analisado o elétron está em repouso, esse não sofre ação dos campos magnéticos. Por sua vez, a média temporal da componente  $E_z^e$  é nula. Dessa maneira, resta que o elétron é afetado somente pelas componentes  $E_x^e$ , do pósitron, e  $E_y^g$ , do monopolo. Comparando as equações, nota-se que se obteria a equação do campo elétrico para o monopolo fazendo a substituição:

$$e \rightarrow \beta g, \quad (2.35)$$

sendo  $\beta = v$  (já que toma-se  $c = 1$ ), a velocidade do monopolo. Dessa análise, obtém-se que a interação de um pósitron com carga  $e$ , seria equivalente a de um monopolo com carga elétrica  $\beta g$ . Isso leva a crer que a constante de acoplamento magnética também poderia ser dada por  $\alpha_g = \beta^2 g^2$ , diferentemente da anterior  $\alpha_g = g^2$ .

### 2.3 Condição de Quantização de Dirac

A condição de quantização de Dirac é um dos principais resultados obtidos em [1]. Ela estabelece uma relação entre carga elétrica e magnética, dada por (com  $c = \hbar = 1$ ):

$$eg = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.36)$$

o que explica a quantização da carga elétrica. A demonstração em teoria de campos dessa condição está fora do escopo desse trabalho, mas será feita uma breve discussão sobre o assunto.

Na mecânica quântica, utiliza-se potenciais e não mais campos para descrever um problema. Para o caso eletromagnético, esses potenciais são dados por [11]:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (2.37)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.38)$$

sendo  $\vec{A}$  o potencial vetor magnético, e  $\phi$  o potencial escalar elétrico. Mas somente isso não é suficiente para eles estarem bem definidos, uma vez que aplicando transformações da forma:

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (2.39)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \lambda, \quad (2.40)$$

os campos ficam inalterados, para uma função  $\lambda$  qualquer. Por isso deve-se determinar um calibre específico. Além disso, existe um problema para o potencial  $\vec{A}$ ; calculando o divergente de  $\vec{B}$ , obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (2.41)$$

O divergente é nulo independente do potencial  $A$ , uma vez que essa relação provém de uma relação vetorial, e não seria possível descrever monopolos com o potencial  $\vec{A}$ . Dirac resolveu esse problema imaginando o campo gerado por um monopolo como proveniente de um solenoide semi-infinito muito fino. O campo magnético gerado pelo solenoide deveria ser fechado (como todo campo magnético), mas por ser semi-infinito, as linhas de campo que saem de uma extremidade nunca se fecham, de modo a simular um campo de um monopolo pontual. O campo no

que seria o eixo do solenoide é chamado de string, e tem grande importância dentro do trabalho de Dirac. Com base nesse sistema, Dirac foi capaz de descrever um potencial vetor e eventualmente deduzir a CQD.

Como caso mais simples, já que não outra restrição, será tomado  $n = 1$ , e vale que:

$$eg = \frac{1}{2}. \quad (2.42)$$

### 3 Fotoprodução de Pares

Nessa seção será feita uma breve introdução à eletrodinâmica quântica (QED), teoria fundamental para o cálculo dos processos estudados. Essa teoria perturbativa é a que melhor descreve os processos de natureza eletromagnética, ou seja, todas as interações envolvendo cargas elétricas. A QED parte do pressuposto que esses processos se dão através de partículas virtuais, os mediadores da interação, ao invés de campos, como na eletrodinâmica clássica. No caso da QED, o bóson responsável pelas interações é o fóton.

#### 3.1 Diagramas de processos

Os processos estudados na QED geralmente são representados por diagramas denominados diagramas de Feynman. Essas representações ajudam na compreensão das interações, além de estarem intimamente relacionadas com as próprias equações a serem analisadas. Abaixo tem-se um exemplo de diagrama para o processo de espalhamento elétron-pósitron (ou espalhamento Bhabha):

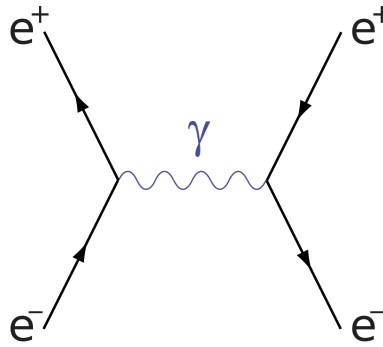


Figura 2: Diagrama de Feynman para aniquilação elétron-pósitron no espalhamento Bhabha

O diagrama é lido da esquerda para a direita (na convenção padrão), sendo essa a direção de evolução temporal do processo. As linhas retilíneas com setas representam férmions. Caso a seta aponte na mesma direção da evolução temporal, tem-se uma partícula; todavia, se está no outro sentido, representa uma anti-partícula. A linha ondulada representa o fóton no processo. Os pontos de encontro das linhas são chamados vértices, e são de grande importância na teoria. Nos processos investigados não haverá a presença de outros bósons; logo basta conhecer as representações dessas partículas. Como exemplos, tem-se as figuras fig.(2) e fig.(4); no caso da primeira figura, tem-se o processo de aniquilação de um par elétron-pósitron no primeiro vértice tornando-se um fóton, e posteriormente produzindo um novo par no segundo vértice. Já no caso da fig.(4), apesar das partículas incidentes e espalhadas serem as mesmas, é outro processo que acontece, o espalhamento simples do par elétron-pósitron através da troca de um fóton. Esses exemplos ilustram bem que apesar dos estados iniciais e finais serem iguais, o processo estudado pode variar.

Dado o fato de a QED ser uma teoria perturbativa, espera-se que exista contribuição de termos de inúmeras ordens nas grandezas calculadas. Isso também se reflete nos diagramas, que representam a ordem do termo considerado. O diagrama mostrado na fig(2) é de primeira ordem, e percebe-se que existem 2 vértices; um dos diagramas de ordem maior é apresentado na fig.(3).

Nesse segundo diagrama, nota-se que existem 4 vértices. Cada vértice contribui com um fator chamado constante de acoplamento, que geralmente varia dependendo

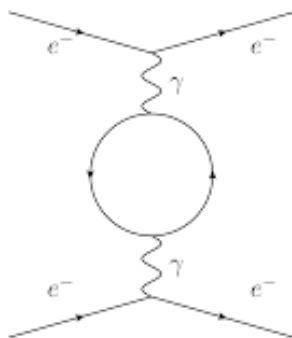


Figura 3: Diagrama de segunda ordem para espalhamento Bhabha com loop interno

da energia da colisão considerada. No caso da QED, a constante de acoplamento eletromagnética é  $\alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$  para altas energias. Dessa maneira, cada nova ordem que é considerada contribui com um fator da ordem de  $\alpha_{em}^2$  para o processo. Por essa razão, os termos de primeira ordem tem uma importância muito maior no cálculo, e na maioria dos casos geram resultados com altíssima precisão. No caso estudado não é diferente, e serão considerados termos até primeira ordem. Outro fato que deve ser notado, é que um mesmo processo pode ter inúmeros diagramas diferentes, e todos devem contribuir para o resultado. Para o espalhamento Bhabha, por exemplo, temos como outro diagrama a fig.(4), que inclusive apresenta uma interpretação diferente para o processo. Na fig.(2) pode-se interpretar o processo como a aniquilação de um par elétron-pósitron, enquanto no segundo, temos o espalhamento das partículas.

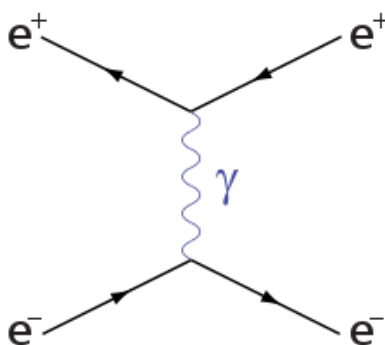


Figura 4: Diagrama de Feynman para espalhamento elétron-pósitron no espalhamento Bhabha

### 3.2 Formalismo de seção de choque para processos

A fim de calcular a seção de choque de um processo será necessário obter os elementos da matriz de espalhamento  $S$ , ou as amplitudes de espalhamento do processo estudado. Para isso, precisa-se conhecer como os campos das partículas do processo se acoplam, e como é dada a interação. Não será deduzida toda a teoria relativa necessária aqui, mas parte-se das *Regras de Ouro de Feynman para a QED* ([13],[14],[15] e [16]) que dão as contribuições de cada parte do diagrama para o processo, e os elementos da matriz  $S$  serão calculados a partir dessas. O formalismo será apresentado com um exemplo, a aniquilação de um par elétron-pósitron indo em múon-antimúon; posteriormente as regras serão utilizadas para calcular a seção de choque de interesse para esse trabalho, de fotoprodução de um par lépton-antilépton.

Por [13], tem-se que a seção de choque de um processo com duas partículas finais,

no referencial de centro de massa, é dado em termos da amplitude de espalhamento por:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{cm}} |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_1, p_2)|^2 \quad (3.1)$$

Nessa expressão,  $\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_1, p_2)$  é a amplitude de espalhamento das partículas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  indo em 1 e 2,  $E_{cm}$  é a energia de centro de massa,  $E_{\mathcal{A}}$  e  $E_{\mathcal{B}}$  as energias de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente,  $\mathbf{p}_1$  é o tri momento da partícula 1, e  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|$  é a diferença de velocidade das partículas, vista do referencial de laboratório.

Para o cálculo da amplitude de espalhamento, temos as regras de Feynman, que dão a contribuição de cada elemento no diagrama:

1. férmion em estado inicial :  $u^s(p)$ ;
2. férmion em estado final :  $\bar{u}^s(p)$ ;
3. anti-férmion em estado inicial :  $\bar{v}^s(p)$ ;
4. anti-férmion em estado final :  $v^s(p)$ ;
5. fóton em estado inicial :  $\epsilon_{\mu}(p)$ ;
6. fóton em estado final :  $\epsilon_{\mu}^*(p)$ ;
7. propagador fermiônico :  $i(\not{p} + m)/(p^2 - m^2)$ ;
8. propagador fotônico :  $-ig_{\mu\nu}/q^2$
9. Cada vértice contribui com um fator  $-iQe\gamma^{\mu}$ ;

nessas expressões,  $Q$  é a carga das partículas no vértice,  $\gamma^{\mu}$  são matrizes de Dirac, itens 1 a 6 são spinores que representam partículas iniciais e finais,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor de métrica (usa-se convenção de coordenada temporal positiva, e demais negativas),  $m$ 's são massas,  $p$ 's momentos, e  $\not{p} = \gamma^{\mu}p$ . O produto dos termos do diagrama resultam em  $-i\mathcal{M}$ . Como exemplo, analisa-se o diagrama da fig.(5), nesse caso:

$$-i\mathcal{M} = [u^s(p_1)(-ie\gamma^{\mu})\bar{v}^{s'}(p_2)] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) [\bar{u}^r(p_3)(-ie\gamma^{\nu})v^{r'}(p_4)] = \quad (3.2)$$

$$= \frac{ie^2}{p_1^2 + p_2^2} [u^s(p_1)(\gamma^{\mu})\bar{v}^{s'}(p_2)][\bar{u}^r(p_3)(\gamma_{\mu})v^{r'}(p_4)]. \quad (3.3)$$

Destaca-se que as leis de conservação de momentum e carga devem ser obedecidas nos vértices. Dessas leis tira-se a relação  $q^2 = p_1^2 + p_2^2$ , o que é esperado. Mais relações entre as variáveis podem ser deduzidas, e estas serão feitas a medida que for necessário. A fim de calcular a seção de choque do exemplo, necessita-se conhecer o complexo conjugado da amplitude  $\mathcal{M}$ , a fim de obter-se  $|\mathcal{M}|^2$ . O complexo conjugado de  $\bar{v}\gamma^{\mu}u$ , resulta em:

$$(\bar{v}\gamma^{\mu}u)^* = u^{\dagger}(\gamma^{\mu})^{\dagger}(\gamma^0)^{\dagger}v = u^{\dagger}(\gamma^{\mu})^{\dagger}(\gamma^0)v = u^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}v = \bar{u}\gamma^{\mu}v, \quad (3.4)$$

na qual se utilizou as relações:

$$\bar{u} = u^{\dagger}\gamma^0, \quad (3.5)$$

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0. \quad (3.6)$$

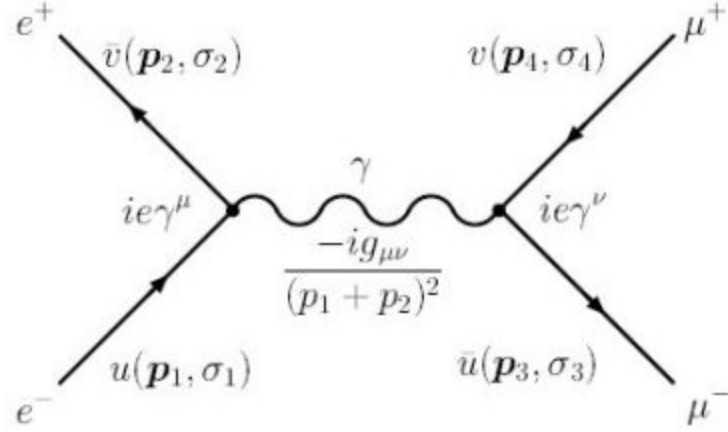


Figura 5: Diagrama de aniquilação de par elétron-pósitron indo em múon-antimúon

Pela relação (3.4), se obtém então a amplitude quadrada como:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [u(p_1)\gamma^\mu \bar{v}(p_2)v(p_2)\gamma^\nu \bar{u}(p_1)][\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\bar{v}(p_4)\gamma_\nu u(p_3)]. \quad (3.7)$$

Todavia a amplitude considerada tem valores específicos para os spins de estados finais e iniciais, o que não é facilmente, se não impossível conseguir em um experimento. Logo precisa-se considerar a média dos spins, não essa forma obtida. Se, por exemplo, ambos os elétrons tivessem spin *up*, haveria 4 possibilidades para os múons, variando os spins nas combinações possíveis de *up* e *down*; por essa razão, a amplitude para esse caso conteria a soma dessas 4 possibilidades. O mesmo vale para as outras combinações de spin inicial. Logo a média deverá conter todas essas possibilidades:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_s \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|. \quad (3.8)$$

O fator 1/4 provém da média entre as 4 possibilidades iniciais. Utilizando a relação de completude dos spinores:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (3.9)$$

$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m, \quad (3.10)$$

bem como utilizando os índices desses spinores, pode-se escrever a primeira metade da eq.(3.7) como:

$$\sum_{s,s'} u_a^s(p_1)\gamma_{ab}^\mu \bar{v}_b^{s'}(p_2)v_c^{s'}(p_2)\gamma_{cd}^\nu \bar{u}_d^s(p_1) = (\not{p}_1 + m_e)_{da}\gamma_{ab}^\mu (\not{p}_2 - m_e)\gamma_{cd}^\nu = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e)\gamma^\nu]. \quad (3.11)$$

Fazendo o mesmo para o outro termo, obtém-se:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}^2| = \frac{e^4}{4q^4} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}_3 - m_\mu)\gamma_\mu (\not{p}_4 + m_\mu)\gamma_\nu]. \quad (3.12)$$

Avaliando esses traços, se obtém:

$$\text{tr}[(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e)\gamma^\nu] = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2 + m_e^2)], \quad (3.13)$$

$$\text{tr}[(\not{p}_3 - m_\mu)\gamma_\mu (\not{p}_4 + m_\mu)\gamma_\nu] = 4[p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{3\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2 + m_\mu^2)]. \quad (3.14)$$

Levando a amplitude média, com a simplificação de  $m_e=0$ :

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{q^4} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + m_\mu^2(p_1 \cdot p_2)]. \quad (3.15)$$

O próximo passo é especificar o referencial, a fim de expressar os momentos em termos de outras variáveis conhecidas. Para gerar um resultado mais simples, uma boa escolha é o referencial de centro de massa; nesse referencial os tri-momentos iniciais  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$  são colineares, com mesmo módulo, mas sentido contrário. Se a energia inicial dos elétrons é  $E$ , então:

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 = m_e^2 \Rightarrow E = |\vec{p}_1|, \quad (3.16)$$

e o mesmo vale para  $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ . Escolhendo esses vetores como estando somente no eixo  $z$ , tem-se:

$$p_1 = (E, E\hat{z}), \quad (3.17)$$

$$p_2 = (E, -E\hat{z}). \quad (3.18)$$

Definimos então os vetores espalhados  $p_3$  e  $p_4$  de modo que formem um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ ; os dois formam o mesmo ângulo por conservação de momento, bem como possuem mesmo módulo. Além disso  $|\vec{p}_3| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$  e  $\vec{p}_3 \cdot \hat{z} = |\vec{p}_3| \cos(\theta)$ . Realizando os produtos escalares da eq.(3.15), obtem-se:

$$q^2 = (p_1^2 + p_2^2) = 4E^2, \quad (3.19)$$

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2, \quad (3.20)$$

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = E^2 - E|\vec{p}_3| \cos(\theta), \quad (3.21)$$

$$p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = E^2 + E|\vec{p}_3| \cos(\theta). \quad (3.22)$$

Substituindo esses resultados na eq.(3.15), a amplitude de espalhamento quadrada fica:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{16E^4} [E^2(E - |\vec{p}_3| \cos(\theta))^2 + E^2(E + |\vec{p}_3| \cos(\theta))^2 + 2m_\mu E^2] = \quad (3.23)$$

$$= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos(\theta) \right]. \quad (3.24)$$

Para calcular a seção de choque, basta substituir essa expressão na eq.(3.1), juntamente com as condições do referencial  $|v_A - v_B| = 2$  e  $E_A = E_B = E_{cm}/2$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_{cm}} \frac{|\vec{p}_3|}{16\pi^2 E_{cm}} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \quad (3.25)$$

$$= \frac{\alpha_{em}^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos(\theta) \right]. \quad (3.26)$$

E integrando sobre todos os ângulos sólidos, obtem-se a seção de choque total:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \quad (3.27)$$

### 3.3 Seção de choque para fotoprodução de par lépton-antilépton

Feita a introdução aos métodos necessários a esse trabalho da QED, será calculada agora a seção de choque para o processo de interesse, a fotoprodução de um par lépton-antilépton. Os diagramas para esse processo são os seguintes:



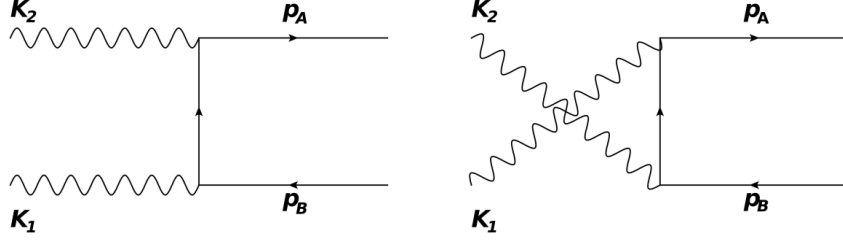


Figura 6: Diagramas de Feynmann para fotoprodução de par de léptons

Nesse caso temos dois diagramas possíveis, cujas contribuições devem ser somadas para obtermos a seção de choque correta. Contudo, a referência [15] afirma que as amplitudes de espalhamento para o processo de criação de um par de léptons é a mesma do processo de aniquilação desses, mediante a troca de sinal para o momentum de todas as partículas. Esse fato decorre da chamada simetria de cruzamento (*crossing symmetry*), decorrente da matriz de espalhamento  $S$ , e que pode ser aplicada para um conjunto de processos. Em particular, se aplica também para o espalhamento Compton; será feita uma dedução similar a [13], obtendo a seção de choque para esse processo, e posteriormente será calculada a partir dessa a seção de choque de aniquilação de par de léptons. Por sua vez essa seção de choque pode ser relacionada facilmente com a de fotoprodução. Começa-se considerando os diagramas para o espalhamento Compton, dois no total:

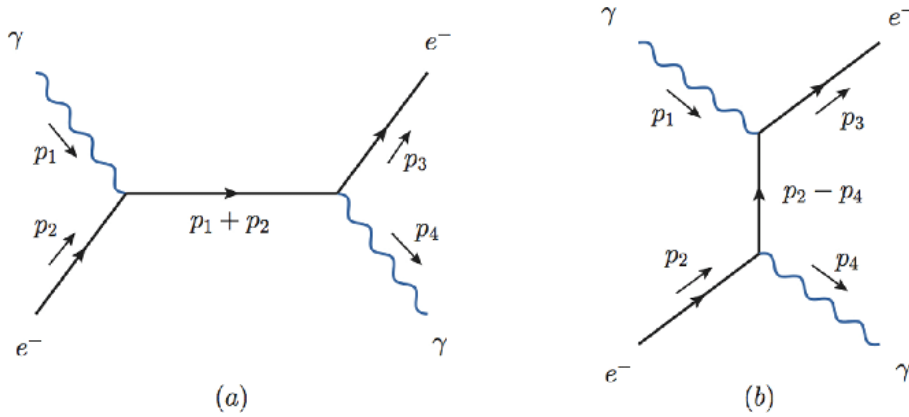


Figura 7: Diagramas de Feynman para espalhamento Compton

Para esse caso, utilizando as regras de *Feynman*, chegamos na amplitude de espalhamento:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p_1)(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(p_3) \left( \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \right) \epsilon_\nu(p_4)(-ie\gamma^\nu)u(p_2) + \quad (3.28)$$

$$+ \bar{u}(p_1)(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(p_4) \left( \frac{i(\not{q}' + m)}{q'^2 - m^2} \right) \epsilon_\mu^*(p_3)(-ie\gamma^\mu)u(p_2) = \quad (3.29)$$

$$= -ie^2\epsilon_\mu^*(p_3)\epsilon_\nu(p_4)\bar{u}(p_1) \left[ \frac{\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{p}_3)\gamma^\nu}{(p_1 + p_3)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{p}_4)\gamma^\mu}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \right] u(p_2). \quad (3.30)$$

Nessa expressão já foram contabilizadas as duas possibilidades de amplitude; destaque também que nesse caso temos como propagador um férmion, não mais um fóton, por isso a diferença relativa a esse termo na amplitude. Também se utilizou que  $q = p_1 + p_3$  e  $q' = p_1 - p_4$ , devido a conservação de momentum nos vértices. Essa

expressão ainda pode ser simplificada, utilizando que  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$  (relação relativística de momentum-massa,  $m$  denotando a massa dos léptons produzidos), bem como  $p_3^2 = p_4^2 = 0$  (no caso dos fótons). Com isso:

$$(p_1 + p_3)^2 - m^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 \cdot p_3 - m^2 = 2p_1 \cdot p_3, \quad (3.31)$$

$$(p_1 - p_4)^2 - m^2 = p_1^2 + p_4^2 + 2p_1 \cdot p_4 - m^2 = 2p_1 \cdot p_4. \quad (3.32)$$

Também vale a relação:

$$(\not{p} + m)\gamma^\mu u(p) = 2p^\mu u(p), \quad (3.33)$$

que permite simplificar a expressão para:

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\mu^*(p_3) \epsilon_\nu(p_4) \bar{u}(p_1) \left[ \frac{\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu}{2p_1 \cdot p_3} + \frac{-\gamma^\nu \not{p}_3 \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p_2^\mu}{-2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_2). \quad (3.34)$$

De modo similar ao que foi feito no exemplo da seção anterior, devemos considerar a amplitude média, devido a falta de controle sobre os spins iniciais. Nesse caso, ainda temos outro fator a considerar, a polarização dos fótons. Da mesma maneira, devemos considerar a soma de todas as polarizações possíveis. Pode-se demonstrar (feito em [13]) que a seguinte relação é válida:

$$\sum_{pol} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

Essa relação não é exatamente uma igualdade, mas será válida a substituição dentro das condições do problema estudado. Utilizando isso, e fazendo o mesmo processo de somas em spins, chega-se que a média de spins é dada por:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} tr \left\{ (\not{p}_1 + m) \left[ \frac{\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu}{2p_1 \cdot p_3} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_3 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_2^\mu}{-2p_1 \cdot p_4} \right] \right. \quad (3.36)$$

$$\left. \cdot (\not{p}_2 + m) \left[ \frac{\gamma^\sigma \not{p}_3 \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p_2^\rho}{2p_1 \cdot p_3} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_3 \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p_2^\sigma}{-2p_1 \cdot p_4} \right] \right\} \quad (3.37)$$

$$\equiv \frac{e^4}{4} \left[ \frac{I}{(2p_2 \cdot p_3)^2} + \frac{II}{(2p_2 \cdot p_3)(2p_2 \cdot p_4)} + \frac{III}{(2p_2 \cdot p_4)(2p_2 \cdot p_3)} + \frac{IV}{(2p_2 \cdot p_4)^2} \right], \quad (3.38)$$

com  $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IV$  traços extensos da igualdade anterior. Todavia, os traços  $I$  e  $IV$  são idênticos frente a troca de  $p_3 \rightarrow -p_4$ , e devido a independência na ordem e operadores no traço,  $II = III$ . Logo, basta calcular  $I$  e  $II$ .

$$I = tr \left[ (\not{p}_1 + m)(\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu)(\not{p}_2 + m)(\gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_\mu - 2\gamma_\nu p_{2\mu}) \right]. \quad (3.39)$$

Utilizando propriedades das matrizes de Dirac, e calculando todos os termos desse produto, chega-se que:

$$I = 16 \left[ 4m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_2) + 4m^2(p_1 \cdot p_3) - 2m^2(p_2 \cdot p_3) + 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3) \right]. \quad (3.40)$$

É possível simplificar ainda mais a expressão utilizando as variáveis de *Mandelstam* [13] (invariantes de Lorentz):

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_3)^2 = 2p_1 \cdot p_3 + m^2 = 2p_2 \cdot p_4 + m^2, \\ t &= (p_2 - p_1)^2 = -2p_1 \cdot p_2 + 2m^2 = -2p_3 \cdot p_4, \\ u &= (p_4 - p_1)^2 = -2p_4 \cdot p_1 + m^2 = -2p_3 \cdot p_2 + m^2 \end{aligned}$$

De modo que  $I$  fica:

$$I = 16 \left[ 2m^4 + m^2(s - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2) \right], \quad (3.41)$$

trocando  $p_3 \rightarrow -p_4$ , obtemos  $IV$ :

$$IV = 16 \left[ 2m^4 + m^2(u - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2) \right]. \quad (3.42)$$

Fazendo o mesmo processo para  $II$  e  $III$  se obtém:

$$II = III = -8 \left[ 4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2) \right]. \quad (3.43)$$

Voltando a expressão (3.36), e reescrevendo em termos dos momentos, se obtém:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2e^4 \left[ \frac{p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_4} + \frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_3} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_1 \cdot p_3} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p_1 \cdot p_4} - \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \right)^2 \right]. \quad (3.44)$$

Agora deve-se fazer a transformação dos momentos a fim de obter a amplitude para o caso de aniquilação. As transformações necessárias são:

$$p_2 \rightarrow -p_2, \quad (3.45)$$

$$p_3 \rightarrow -p_3. \quad (3.46)$$

Substituindo essas mudanças na amplitude quadrada:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = -2e^4 \left[ \frac{p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_4} + \frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_3} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_1 \cdot p_3} + \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) - m^4 \left( \frac{1}{p_1 \cdot p_4} + \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \right)^2 \right]. \quad (3.47)$$

Deve-se especificar o referencial, assim escrevendo os produtos de momentos em termos de variáveis conhecidas. Escolhe-se novamente o referencial de centro de massa, como feito no exemplo da subseção anterior (fig.(8)). Dessa maneira, tem-se:

$$p_1 = (E, p\hat{z}), \quad (3.48)$$

$$p_2 = (E, -p\hat{z}), \quad (3.49)$$

$$p_3 = (E, E\text{sen}(\theta), 0, E\text{cos}(\theta)), \quad (3.50)$$

$$p_4 = (E, -E\text{sen}(\theta), 0, -E\text{cos}(\theta)). \quad (3.51)$$

Os produtos resultam em:

$$p_1 \cdot p_3 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = E^2 - Epcos(\theta), \quad (3.52)$$

$$p_1 \cdot p_4 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = E^2 + Epsen(\theta). \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

Avalia-se também  $\beta$  para esse referencial; pelas relações de tri-momento relativístico, se tem  $p = m\gamma\beta = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Isolando  $m$ , e substituindo isso na relação de quadrimomento-energia  $E^2 - p^2 = m^2$ :

$$E^2 - p^2 = \frac{p^2(1 - \beta^2)}{\beta^2} \rightarrow \beta = \frac{p}{E}, \quad (3.55)$$

No referencial CM, tem-se a relação:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 \Rightarrow E = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad (3.56)$$

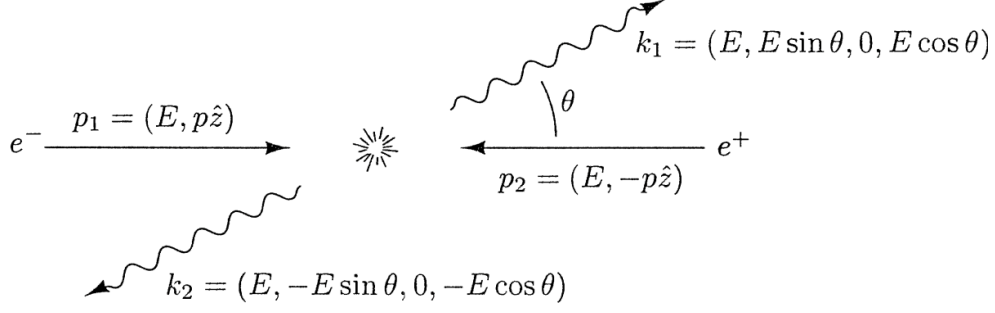


Figura 8: Referencial de centro de massa

Utilizando essa expressão em 3.53:

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{\sqrt{(E^2 - m^2)}}{E} = \sqrt{\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)}, \quad (3.57)$$

um invariante para um dado  $s$  (já que  $s$  é invariante). Feitas essas deduções, calcule-se a amplitude do processo substituindo as condições do referencial na expressão (3.45):

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = -2e^4 \left[ \frac{E^2 - Epcos(\theta)}{E^2 + Epcos(\theta)} + \frac{E^2 + Epcos(\theta)}{E^2 - Epcos(\theta)} + 2m^2 \left( \frac{1}{E^2 + Epcos(\theta)} + \frac{1}{E^2 - Epcos(\theta)} \right) \right] \quad (3.58)$$

$$- m^4 \left( \frac{1}{E^2 + Epcos(\theta)} + \frac{1}{E^2 - Epcos(\theta)} \right)^2 \Big] = \quad (3.59)$$

$$= -2e^4 \left[ 2 \frac{(E^2 + p^2 cos^2(\theta))}{(E^2 - p^2 cos^2(\theta))} + 4m^2 \frac{E^2}{(E^2 - p^2 cos^2(\theta))} - 4m^4 \left( \frac{E^2}{(E^2 - p^2 cos^2(\theta))} \right)^2 \right] = \quad (3.60)$$

$$= -4e^4 \left[ \frac{E^2 + p^2 cos^2(\theta)}{m^2 + p^2 sen^2(\theta)} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 sen^2(\theta)} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 sen^2(\theta))^2} \right] = 4e^4 A. \quad (3.61)$$

Agora basta substituir na equação para a seção de choque (3.1), com  $E_A = E_B = \frac{E_{cm}}{2} = E$ ,  $|v_A - v_B| = 2$  e  $|\vec{p}_1| = E$  (esse é o momentum da partícula produzida), o que resulta em:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{E}{2(4\pi)^2 E_{cm}^3} 4e^4 A = -\frac{\alpha_{em}^2 E}{E_{cm}^2 p} \left[ \frac{E^2 + p^2 cos^2(\theta)}{m^2 + p^2 sen^2(\theta)} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 sen^2(\theta)} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 sen^2(\theta))^2} \right]. \quad (3.62)$$

Na qual foi usado também que  $E_{cm} = 2p$ . integrando em  $\phi$ , uma integral trivial, surge um fator  $2\pi$ :

$$-\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \frac{d\sigma}{dcos(\theta)}. \quad (3.63)$$

Para obter a seção de choque total, deve-se integrar em  $dcos(\theta)$ . Porém, como os fótons gerados são idênticos, basta considerar os ângulos  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , o que leva a

integral:

$$\sigma_{total} = \int_0^1 d(\cos(\theta)) \frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \quad (3.64)$$

$$= \frac{2\pi\alpha_{em}^2 E}{E_{cm}^2 p} \left[ \int_0^1 \left( \frac{E^2 + p^2 \cos^2(\theta)}{m^2 + p^2 \sin^2(\theta)} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2(\theta)} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2(\theta))^2} \right) d(\cos(\theta)) \right]. \quad (3.65)$$

Consultando qualquer tabela de integrais, chega-se em:

$$\sigma_{total} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2 E}{E_{cm}^2 p} \left[ \frac{E^2 + 2m^2}{2p^2} \frac{p}{E} \ln \left| \frac{\frac{E}{p} + x}{\frac{E}{p} - x} \right| \Big|_0^1 - \frac{2m^4}{p^4} \left[ \frac{1}{2} \frac{xp^4}{E^2(E^2 - p^2x^2)} + \frac{1}{2} \frac{p}{E} \frac{p^2}{2E^2} \ln \left| \frac{\frac{E}{p} + x}{\frac{E}{p} - x} \right| \right] \Big|_0^1 + \right. \quad (3.66)$$

$$\left. + \left[ -x + \frac{E^2}{p^2} \frac{1}{2} \frac{p}{E} \ln \left| \frac{\frac{E}{p} + x}{\frac{E}{p} - x} \right| \right] \Big|_0^1 \right] = \quad (3.67)$$

$$= \frac{2\pi\alpha_{em}^2 E}{E_{cm}^2 p} \left[ - \left[ 1 + \frac{2m^4}{p^4} \frac{1}{2} \frac{p^2}{E^2} \frac{p^2}{E^2 - p^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{p}{E} \ln \left| \frac{\frac{E}{p} + 1}{\frac{E}{p} - 1} \right| \left[ \frac{E^2 + 2m^2}{p^2} - \frac{2m^4}{p^4} \frac{1}{2} \frac{p^2}{E^2} + \frac{E^2}{p^2} \right] \right]. \quad (3.68)$$

Após diversas aplicações da identidade  $E^2 - p^2 = m^2$ , utilizando  $\beta = \frac{p}{E} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$ , e bastante manipulação algébrica, se chega em:

$$\sigma_{total} = \frac{\pi\alpha_{em}^2}{s\beta^2} \left[ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right] = \quad (3.69)$$

$$= \frac{\pi\alpha_{em}^2(1 - \beta^2)}{4m^2\beta^2} \left[ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right]. \quad (3.70)$$

Para obter a seção de choque de criação, deve-se trocar o sinal de todos os momentos na eq.(3.45). Todavia, percebe-se que isso leva a exatamente a mesma expressão. Logo a amplitude de espalhamento dos dois processos é a mesma. O que irá diferir são os outros termos da eq.(3.1), que por vezes são escritos na forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{I^2} \frac{1}{2\pi}, \quad (3.71)$$

na qual o termo  $I^2$  é chamado de fator de fluxo. Esse fator de fluxo é dado por:

$$I^2 = \frac{sE_A E_B}{|p_1|}. \quad (3.72)$$

Para o caso de aniquilação se tem:

$$I_{aniq}^2 = \frac{s \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s}}{2}}{\frac{\sqrt{s}}{2}} = \frac{\frac{s^2}{4}}{\frac{\sqrt{s}}{2}}, \quad (3.73)$$

$$I_{cria}^2 = \frac{s \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s}}{2}}{\frac{\sqrt{s-4m^2}}{2}} = \frac{\frac{s^2}{4}}{\frac{\sqrt{s-4m^2}}{2}}, \quad (3.74)$$

e a relação entre as seções de choque fica:

$$d\sigma_{aniq} I_{aniq}^2 = d\sigma_{cria} I_{cria}^2, \quad (3.75)$$

usando as relações das variáveis, obtém-se que:

$$\frac{I_{aniq}^2}{I_{cria}^2} = \frac{\sqrt{s - 4m^2}}{\sqrt{s}} = \beta. \quad (3.76)$$

Deve-se considerar ainda mais um fato sobre a diferença entre as seções de choque. Como no estado final do processo de aniquilação os fótons são idênticos, integrou-se somente na metade do domínio de  $\theta$ ; porém no processo de criação, os estados finais são férmions. A correção necessária é dada simplesmente por um fator 2 (uma vez que a amplitude de espalhamento é função par). Assim a seção de choque de criação de pares fica:

$$\sigma_{cria} = \frac{\pi \alpha_{em}^2 (1 - \beta^2)}{2 m^2 \beta} \left[ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right]. \quad (3.77)$$

Por fim, analisa-se o que aconteceria com  $\beta$  em um referencial arbitrário. Sejam  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as energias de fótons em um referencial, e  $\omega'$  no referencial de centro de massa, bem como  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p'_1$  e  $p'_2$  os momentos nesses referenciais. Pela invariância do quadrimomento, tal qual a invariância do produto  $p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2$ , obtém-se:

$$\omega_1 \omega_2 - p_1 \cdot p_2 = \omega'^2 - p'_1 \cdot p'_2 \Rightarrow \omega_1 \omega_2 = \omega'^2, \quad (3.78)$$

como  $\omega'$  é a energia no CM, vale que  $\omega' = \frac{\sqrt{s}}{2}$ . Logo,  $\beta$  fica:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_1 \omega_2}}. \quad (3.79)$$

### 3.4 Seção de choque monopolo-antimonopolo

Na última subseção foi calculada a seção de choque para criação de um par de lépton-antilépton qualquer; no entanto, os monopolos não são partículas com carga elétrica, mas sim carga magnética, o que faria as descrições da QED não se aplicarem a eles. Contudo existe a teoria desenvolvida por Schwinger [2] e Zwanziger [3], que continua o trabalho de Dirac [1] e estende a QED aos processos de monopolos, a "dual QED". Ainda nessa teoria, existem problemas em relação a interação de monopolos devido a constante de acoplamento, cujo valor é alto, não permitindo tratamento perturbativo, além de singulares, as chamadas strings, que surgem nas teorias. Dessa maneira não existe um consenso em relação ao tratamento em teoria de campos.

Porém, a análise feita na primeira seção de interação clássica entre monopolos e elétrons leva a uma possível solução para o problema; como um monopolo interage de forma similar a uma carga elétrica com valor  $\beta g$ , [5] propõe a troca da constante de acoplamento para o caso magnético, supondo que as demais regras da QED continuem válidas. Os diagramas considerados seriam os da fig.(9). Assim, a seção de choque é a mesma do lépton anti-lépton, somente com a constante de acoplamento trocada, e fica:

$$\sigma_{cria} = \frac{\pi \alpha_g^2 (1 - \beta^2)}{2 m^2 \beta} \left[ (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right]. \quad (3.80)$$

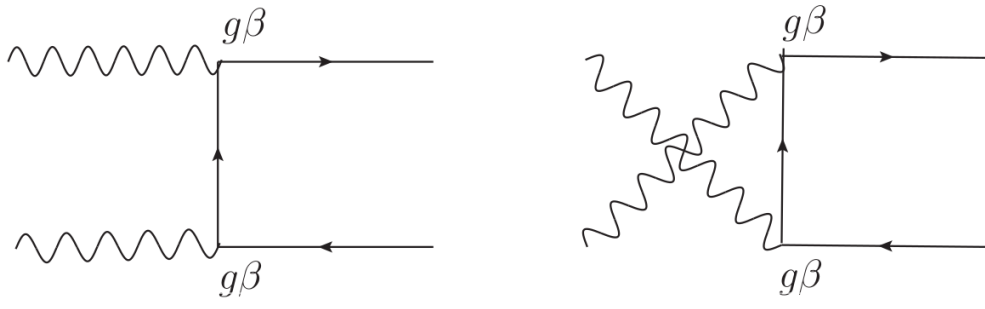


Figura 9: Diagrama de Feynman para a fotoprodução de monopolo-antimonopolo

## 4 Método de fótons equivalentes

O método de fótons virtuais (ou fótons equivalentes) utiliza a similaridade entre os campos de cargas relativísticas com os campos gerados por pulsos de radiação; utilizando essa abordagem, relaciona-se a colisão de um sistema com partículas carregadas, substituindo-as por um pulso de radiação equivalente (fluxo de fótons). Nessa secção serão analisados o método geral, desenvolvido independentemente por *C. F. Weizsäcker* [17] e *E. J. Williams* [18], que não considera estrutura interna de partículas, utilizado para colisões de íons pesados, bem como de *Dress-Zeppenfeld* [19], que considera a estrutura interna dos prótons.

### 4.1 Weizsäcker-Williams

Consideremos novamente a mudança de referencial feita na secção 2.2, no qual analisava-se o campo gerado por um pósitron em movimento. Obteve-se que os campos não nulos no ponto  $P$  do referencial  $K$  eram dados pelas equações:

$$\begin{aligned} E_x^e &= \gamma \frac{eb}{|\vec{r}|^3} = \frac{\gamma eb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ E_z^e &= -\frac{evt'}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\gamma evt}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ B_y^e &= vE_x = \gamma \frac{evb}{|\vec{r}|^3} = \frac{\gamma evb}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Para  $v = \beta \simeq 1$ , obtém-se que a norma dos campos  $E_x^e$  e  $B_y^e$  são praticamente iguais, de modo a formar um pulso eletromagnético  $P_1$  na direção  $z$  (fig.10). Dessa maneira, um observador no ponto  $P$  não consegue distinguir os campos gerados pela partícula em movimento, com o de um pulso eletromagnético. O campo  $E_z^e$  não é acompanhado de um campo magnético, não formando um segundo pulso  $P_2$ ; todavia, como no referencial  $K$  a partícula é estacionária, pode-se incorporar um campo magnético de modo a formar esse segundo pulso, já que a partícula só é afetada por campos elétricos. Além disso, será mostrado que mesmo se estivesse em movimento, a ação desse segundo pulso é pequena frente ao pulso  $P_1$ .

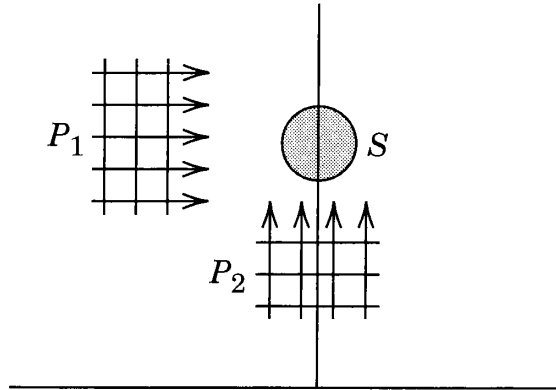


Figura 10: Representação dos pulsos analisados

Por [11], o pulso  $P_1$  tem um espectro de frequências dado por:



$$\frac{dI_1(\omega, b)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} |E_x^e(\omega)|^2, \quad (4.1)$$

sendo  $E_x^e(\omega)$  a transformada de Fourier do campo  $E_x^e(t)$ . De modo equivalente, o pulso  $P_2$  tem espectro da forma:

$$\frac{dI_2(\omega, b)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} |E_z^e(\omega)|^2. \quad (4.2)$$

Calcula-se então as transformadas (como feito em [20]):

$$\begin{aligned} E_x^e(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x^e(t) e^{i\omega t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{\gamma v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{\gamma v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta \exp[i\omega b \zeta / \gamma v]}{(1 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta = \quad \left( \text{com } \zeta = \frac{\gamma v t}{b} \right) \\ &= -2(i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{\gamma v b} \int_0^{\infty} \frac{\zeta \operatorname{sen}\left(\frac{\omega b \zeta}{\gamma v}\right)}{(1 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta - \frac{i q}{\gamma b v} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z^e(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_z^e(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{v b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta \exp[i\omega b \zeta / \gamma v]}{(1 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{\gamma v b} \int_0^{\infty} \frac{\zeta \cos\left(\frac{\omega b \zeta}{\gamma v}\right)}{(1 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta = \\ &= \frac{q}{b v} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]. \end{aligned}$$

Nas quais foi utilizada a definição das funções de *Bessel* modificadas [21]:

$$K_\nu(az) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \left(\frac{2z}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) \int_0^{\infty} (t^2 + z^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} \cos(at) dt. \quad (4.3)$$

Substituindo essas transformadas nas eqs.(5.1) e (5.2), obtém-se:

$$\frac{dI_1(\omega, b)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} |E_x^e(\omega)|^2 = \frac{q^2}{\pi^2 v b^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right), \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_2(\omega, b)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} |E_z^e(\omega)|^2 = \frac{q^2}{\pi^2 v b^2} \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \quad (4.5)$$

O pulso  $P_2$  tem um termo extra  $\frac{1}{\gamma^2}$ , de modo que no limite ultra-relativístico o espectro é muito menor que  $P_1$ , como dito anteriormente; desse modo, ele pode ser desprezado, e o problema simplifica-se ao pulso  $P_1$ . O próximo passo é realizar a integração do espectro no parâmetro de impacto, assim obtendo a distribuição de energia por intervalo de frequência:

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} \left[ \frac{dI_1(\omega, b)}{d\omega} + \frac{dI_2(\omega, b)}{d\omega} \right] b db. \quad (4.6)$$

Temos que o limite inferior para o parâmetro de impacto não deve tender a 0. Pelos resultados da mecânica quântica, sabe-se que uma partícula está associada a um pacote de onda de tamanho  $\Delta x$ . Pelo princípio de *Heisenberg*, esse tamanho deve respeitar a desigualdade  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ , sendo  $\Delta p$  associado à transferência de

momento da colisão; tomando  $\Delta p \rightarrow \Delta p_{max}$ , obtém-se o limite mínimo do pacote  $\Delta x_{min} = \frac{\hbar}{\Delta p_{max}}$ . Logo, só faz sentido considerar  $b_{min} \geq \Delta x_{min}$ .

Para realizar a integração em  $b$ , utilizamos a relação de recorrência das funções de Bessel modificadas  $K_\nu(az) = K_{\nu-2}(az) + \frac{2(\nu-1)}{az}K_{\nu-1}(az)$ , bem como a identidade:

$$\int z K_\nu^2(az) dz = \frac{1}{2} z^2 \left[ K_\nu^2(az) - K_{\nu-1}(az) K_{\nu+1}(az) \right]. \quad (4.7)$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{dI_1(\omega)}{d\omega} = \frac{2q^2}{\pi} \left[ \zeta_{min} K_0(\zeta_{min}) K_1(\zeta_{min}) - \frac{1}{2} \zeta_{min}^2 \left( K_1^2(\zeta_{min}) - K_0^2(\zeta_{min}) \right) \right], \quad (4.8)$$

$$\frac{dI_2(\omega)}{d\omega} = \frac{2q^2}{\pi} \left[ \frac{1}{2\gamma^2} \zeta_{min}^2 \left( K_1^2(\zeta_{min}) - K_0^2(\zeta_{min}) \right) \right]. \quad (4.9)$$

sendo  $\zeta_{min} = \frac{\omega b_{min}}{\gamma}$ . No processo de integração utilizou-se a aproximação  $v = \beta \simeq 1$ . Devido a essa mesma aproximação, pode-se desprezar o termo do pulso 2, de modo que obtém-se:

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{dI_1(\omega)}{d\omega}, \quad (4.10)$$

define-se agora o número de fótons equivalentes ( $N(\omega)$ ) como:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{dI(\omega)}{d\omega}. \quad (4.11)$$

Por fim, chega-se ao fluxo de fótons (número de fótons equivalentes) para uma partícula pontual em movimento relativístico:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{2q^2}{\pi\omega} \left[ \zeta_{min} K_0(\zeta_{min}) K_1(\zeta_{min}) - \frac{1}{2} \zeta_{min}^2 \left( K_1^2(\zeta_{min}) - K_0^2(\zeta_{min}) \right) \right]. \quad (4.12)$$

Essa aproximação é boa para parâmetros de impacto grandes, uma vez que as partículas envolvidas na colisão "percebem-se" mutuamente como partículas pontuais. Porém para colisões com pequeno  $b$ , o fator de forma eletromagnético interfere, e é necessário realizar melhorias desse modelo. Isso será feito na subsecção seguinte, com o modelo de *Dress-Zeppenfeld*.

## 4.2 Dress-Zeppenfeld

Por [22] se tem a expressão para um fluxo de fótons geral:

$$f(x) = \frac{\alpha_e Z^2}{\pi} \frac{1-x+(1/2)x^2}{x} \int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} |F(Q^2)| dQ^2, \quad (4.13)$$

Na equação,  $x$  é a fração de energia dos fótons,  $Z$  o número atômico,  $Q$  a virtualidade do fóton e  $F(Q^2)$  o fator de forma eletromagnético. Pode-se reescrever a distribuição para esse caso em termos da energias dos fótons ( $\omega$ ) notando-se que  $\omega = \frac{x\sqrt{s}}{2}$ , sendo  $\sqrt{s}$  a energia de centro de massa. Obtem-se assim:

$$f(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{\alpha_e Z^2 \sqrt{s}}{\pi 2\omega} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \right)^2 \right] \int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} |F(Q^2)| dQ^2, \quad (4.14)$$

em boa aproximação,  $Q_{min}^2$  pode ser dado por:

$$Q_{min}^2 = \frac{(xM_A)^2}{(1-x)}, \quad (4.15)$$

sendo  $M_A$  a massa do projétil. Na aproximação de *Dress-Zeppenfeld* [19], os autores desprezam esse termo  $Q_{min}^2$ :

$$\frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} \approx \frac{1}{Q^2}, \quad (4.16)$$

e tomam o fator de forma  $F(Q^2)$  como sendo de um dipolo:

$$F(Q^2) = \frac{1}{1 + \frac{Q_{min}^2}{0.71Gev}}. \quad (4.17)$$

Dessa maneira precisa-se calcular a integral:

$$\int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} |F(Q^2)| dQ^2 \approx \int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{1}{Q^2} \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{0.71Gev}} dQ^2. \quad (4.18)$$

Isso foi calculado em [19], que obtiveram:

$$\int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} |F(Q^2)| dQ^2 \approx \ln(A) - \frac{11}{6} + \frac{3}{A} - \frac{3}{2A^2} + \frac{1}{3A^3}, \quad (4.19)$$

sendo  $A = 1 + (0,71Gev/Q_{min}^2)$ . Assim a expressão para o fluxo de fótons fica:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{\alpha_e Z^2 \sqrt{s}}{\pi 2\omega} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \right)^2 \right] \left[ \ln(A) - \frac{11}{6} + \frac{3}{A} - \frac{3}{2A^2} + \frac{1}{3A^3} \right]. \quad (4.20)$$

Também é possível fazer o cálculo sem desprezar o termo  $Q_{min}^2$  na integral, o que foi feito por [22], de modo que obtém-se como fluxo de fótons:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{\alpha_e Z^2 \sqrt{s}}{\pi 2\omega} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \right)^2 \right] \left[ \frac{A+3}{A-1} \ln(A) - \frac{17}{6} + \frac{4}{3A} - \frac{1}{6A^2} \right]. \quad (4.21)$$

Porém essa melhoria não apresenta grande impacto nos resultados para o fluxo, de maneira que prefere-se adotar a expressão por *Dress-Zeppenfeld* (4.20).

As três expressões para o fluxo de fótons foram analisadas por [12], que obteve a figura (11). Como pode-se notar, os resultados para a expressão de *Weizsäcker-Williams* apresenta valores bastante acima dos demais. Isso se deve ao fato desse método considerar as partículas envolvidas na colisão como esferas rígidas, desconsiderando sua estrutura interna. Isso acaba por retornar um número maior de fótons com maior energia, superestimando o fluxo.

# Próton

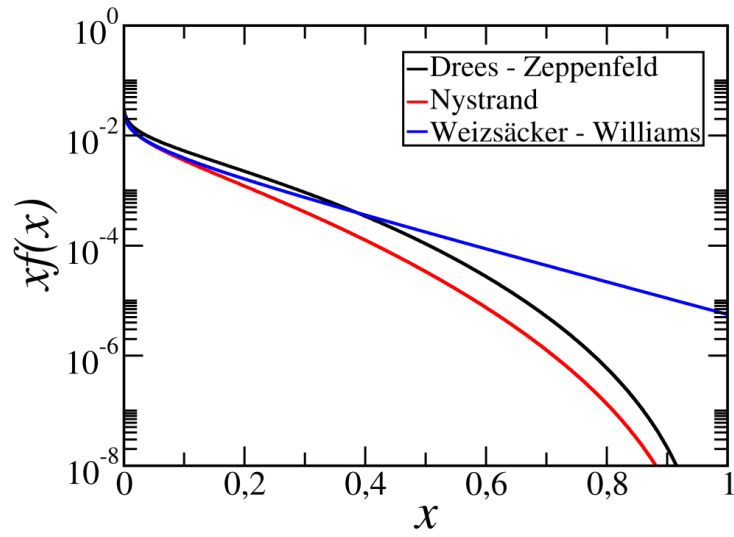


Figura 11: Comparação entre as expressões para fluxo de fótons em termos da fração de momento[12]

## 5 Funções de distribuição partônica

Na física de partículas em altas energias, a interação de hádrons é descrita pelo modelo de pártons. Nele, o hádron é composto de subpartículas pontuais, denominadas pártons, e o espalhamento inelástico do hádron com o outro alvo é tratado como o espalhamento elástico de um desses partões, que carrega uma fração de momento do hádron, com a outra partícula. Esses subcomponentes são os quarks na verdade, mas quando o modelo foi proposto não se sabia de sua existência. Sendo os quarks, faz sentido essa descrição, uma vez que na cromodinâmica quântica (QCD) a constante de acoplamento torna-se pequena em altas energias, dando origem a propriedade conhecida como liberdade assintótica; nesse regime os quarks interagem fracamente. Além disso, o tempo da interação quark-alvo é muito menor que entre os próprios quarks devido a dilatação temporal do regime cinemático, de modo que vale a descrição do modelo.

Essa fração de momento do párton é calculada por [16], com base nos diagramas da fig.(12):

$$\xi = x = \frac{-q^2}{2p_2 \cdot q} = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}, \quad (5.1)$$

com  $x$  sendo o  $x$  de Bjorken,  $q$  a transferência de momento,  $Q^2 = -q^2$  a virtualidade e  $p_2$  o momento inicial do párton.

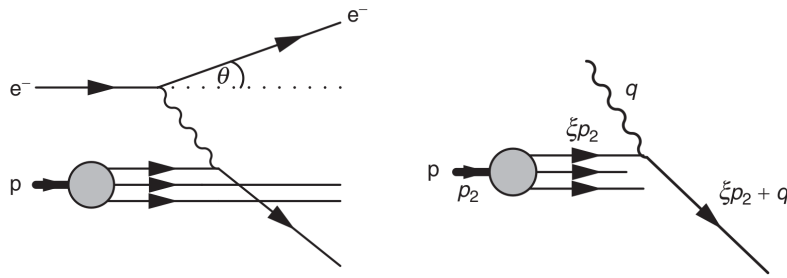


Figura 12: Diagramas de transferência de momentum para o modelo de pártons

Porém os quarks nos hádrons interagem entre si através da troca de glúons, de modo que a distribuição de momento no hádron varia. Essa distribuição é modelada por uma função de distribuição partônica (PDF). É fundamental que se conheça essa função, uma vez que nos estudos de colisões hadrônicas leva-se em conta o modelo de pártons, e o momento do párton interagente na colisão influencia diretamente na energia disponível para a realização dos processos.

Alguns exemplos são mostrados na fig.(13). No exemplo (i), tem-se a descrição de um hádron pontual, sem considerar subestrutura; em (ii), um bárion cujas interações entre quarks não são consideradas, de maneira que cada quark terá  $\frac{1}{3}$  do momento total. Em (iii) e (iv) já são consideradas as interações entre quarks, com a diferença sendo que na última, considera-se a possibilidade da flutuação de um glúon emitido em quarks de mar. Com exceção dos exemplos (i) e (ii), as PDF's não podem ser deduzidas, sendo obtidas através de experimentos. Essas funções serão necessárias dentro dos cálculos apresentados na seção 6, dado que se trabalha com colisões semi e inelásticas, e para esse trabalho, seguiu-se [8] e escolheu-se as PDF's Cteq6L1 [23]. À medida que mais experimentos são realizados, e mais dados coletados, é possível melhorar a descrição das PDF's, o que influencia diretamente nas previsões inúmeros processos hadrônicos.

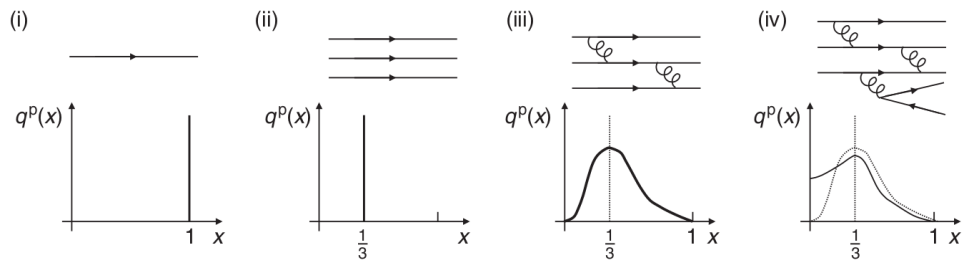


Figura 13: Exemplos de PDF's considerando diferentes possibilidades de dinâmica intra-hadrônica

## 6 Resultados

Nas seções anteriores se discutiu a compatibilidade dos monopolos dentro da teoria eletromagnética, bem como se desenvolveu ferramentas necessárias para obter a seção de choque de produção dessas partículas em processos pp. Nessa seção será explicitado o cálculo elaborado, bem como apresentados os resultados obtidos.

### 6.1 Processos estudados

O cálculo elaborado nesse trabalho é o de fotoprodução de par monopolo-antimonopolo em colisões próton-próton. Dentro dessa categoria, tem-se 3 subprocessos possíveis: elástico, semi-elástico e inelástico. No caso elástico, os fótons intermediários são emitidos pelos prótons, deixando ambos intactos no estado final ; no caso semi-elástico ocorre a emissão de um fóton por um dos prótons, enquanto o outro fóton é emitido por um dos pártons (quark ou antiquark) do outro próton, de modo que somente um dos prótons sai intacto da colisão. No processo inelástico, ambos os fótons intermediários são irradiados por pártons.

- elástico:  $p + p \rightarrow p + p + \gamma + \gamma \rightarrow p + p + m + \bar{m}$ ;
- semi-elástico:  $p + p \rightarrow X + p + \gamma + \gamma \rightarrow X + p + m + \bar{m}$ ;
- inelástico:  $p + p \rightarrow X + X + \gamma + \gamma \rightarrow X + X + m + \bar{m}$

Antes de apresentar os cálculos, é importante estabelecer novamente as notações para as variáveis utilizadas, uma vez que agora o referencial mais simples para se trabalhar é o CM do sistema pp, não mais do sistema fóton-fóton (utilizado na seção 3). Por essa razão, as energias dos fótons não serão mais iguais sempre, e serão denotadas por  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ;  $s$  agora será referente ao sistema pp, e se utilizará  $s_{\gamma\gamma}$  para o caso do referencial de CM dos fótons. Equivalentemente,  $E$  será a energia de centro de massa ( $E = \frac{\sqrt{s}}{2}$ ) no CM de pp, e  $E_\gamma = \frac{\sqrt{s_{\gamma\gamma}}}{2}$  no fóton-fóton.

A seção de choque desses processos é dada pela convolução do fluxo de fótons das partículas do feixe com a seção de choque fóton-alvo é dada por [24]:

$$\sigma_X = \int \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{dN_1(\omega_1)}{d\omega_1} \frac{dN_2(\omega_2)}{d\omega_2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(\omega_1, \omega_2), \quad (6.1)$$

sendo  $\frac{dN(\omega)}{d\omega} = f(\omega)$  o fluxo de fótons discutido na seção 4, e  $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(\omega)$  a seção de choque de fotoprodução calculada na seção 3. Para o caso elástico, tem-se:

$$\sigma_{el}(s, m) = \int_0^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{s}}{2}} d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1) f(\omega_2) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(\omega_1, \omega_2, s, m). \quad (6.2)$$

De forma equivalente, pode-se expressar a seção de choque, bem como o fluxo em termos da fração de energia (denotada por  $z$ ) dos fótons, em vez da própria energia. A mudança de variável é dada por  $z_1 = \frac{2\omega_1}{\sqrt{s}}$ ,  $z_2 = \frac{2\omega_2}{\sqrt{s}}$  de modo que fazendo as mudanças necessárias, se obtém:

$$\sigma_{el}(s, m) = \int_{\frac{4m_2}{s}}^1 dz_1 \int_{\frac{4m_2}{sz_1}}^1 dz_2 f(z_1) f(z_2) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(z_1, z_2, s, m). \quad (6.3)$$

Para os processos semi-elástico, e inelástico, por sua vez, dever-se-à considerar a distribuição de momento dos pártons nos prótons, o que leva a inclusão das funções de distribuição partônica na seção de choque. Para o caso semi-elástico se tem:

$$\sigma_{semi}(s, m) = \int_{\frac{4m_2}{s}}^1 dx_1 \int_{\frac{4m_2}{sx_1}}^1 dz_1 \int_{\frac{4m_2}{sx_1 z_1}}^1 dz_2 P_{semi}(x_1, z_1, z_2, s, m), \quad (6.4)$$

$$P_{semi}(x_1, z_1, z_2, s, m) = \sum_q f_q(x_1, q, Q) f(z_1) f(z_2) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(x_1, z_1, z_2, s, m), \quad (6.5)$$

sendo as  $f_q$ 's as PDF's para o quark  $q$ , fracção de momento  $x_1$  e escalonamento de energia  $Q$ . No caso inelástico se tem algo similar a eq.(6.5), mas com a inclusão das PDF's para o segundo próton dissociado:

$$\sigma_{ine}(s, m) = \int_{\frac{4m_2}{s}}^1 dx_1 \int_{\frac{4m_2}{sx_1}}^1 dx_2 \int_{\frac{4m_2}{sx_1x_2}}^1 dz_1 \int_{\frac{4m_2}{sx_1x_2z_1}}^1 dz_2 P_{ine}(x_1, x_2, z_1, z_2, s, m), \quad (6.6)$$

$$P_{semi}(x_1, x_2, z_1, z_2, s, m) = \sum_{q, q'} f_q(x_1, q, Q) f'_q(x_2, q', Q) f(z_1) f(z_2) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(x_1, x_2, z_1, z_2, s, m). \quad (6.7)$$

Para obter a seção de choque diferencial, aplica-se o procedimento desenvolvido por [7],[8]. O caso exemplificado é para o caso elástico. Considerando a eq.(6.3), aplica-se a mudança de variáveis  $v = z_1 z_2$ ,  $w = z_2$ , de modo que se obtém:

$$\sigma_{el}(s, m) = \int_{\frac{4m_2}{s}}^1 dv \int_v^1 \frac{dw}{w} f\left(\frac{v}{w}\right) f(w) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(vs). \quad (6.8)$$

Para se obter uma energia de centro de massa fixa, basta fixar  $v$  (pela relação 3.78). Para  $v$  fixo, se tem:

$$\frac{d\sigma_{el}(s, m)}{dv} = \int_v^1 \frac{dw}{w} f\left(\frac{v}{w}\right) f(w) \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(vs), \quad (6.9)$$

que pode ser reescrito em termos da energia de centro de massa dos fótons ( $E_{\gamma\gamma}$ ) como:

$$\frac{d\sigma_{el}(E_{\gamma\gamma})}{dE} = \frac{2E_{\gamma\gamma}}{s} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow m\bar{m}}(s_{\gamma\gamma}) \int_{\frac{s_{\gamma\gamma}}{s}}^1 \frac{dw}{w} f\left(\frac{s_{\gamma\gamma}}{w}\right) f(w). \quad (6.10)$$

O mesmo pode ser aplicado para os os casos semi-elástico e inelástico, fazendo as mudanças de variáveis apropriadas:

$$v = x_1 x_2 z_1 \quad w = z_2 x_1 \quad u = x_1 \quad (6.11)$$

$$v = z_1 z_2 x_1 x_2 \quad w = z_2 x - 1 x_2 \quad u = x_1 x_2 \quad t = x_2, \quad (6.12)$$

respectivamente.

## 6.2 Resultados

Realizando os cálculos das equações (6.3), (6.4) e (6.6), com a constante de acoplamento  $\alpha_m = (\beta g)^2$ , PDF's Cteq6L1[23], e energia de centro de massa do sistema próton-próton  $\sqrt{s} = 14TeV$ , se obtém a seção de choque da fig.(14):

A seção de choque total do processo é obtida como a soma das três subseções de choque  $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{semi} + \sigma_{ine}$ . Como pode-se ver na fig.(14) a seção de choque cai rapidamente com o aumento da energia dos monopolos, de modo a tornar uma possível detecção mais difícil quanto maior a massa dessa partícula. Dos resultados de [4], que estudou processos Drell-Yan, tem-se uma massa mínima para o monopolo de 360GeV, determinada no Fermilab com uma amostra de luminosidade integrada de  $35.7pb^{-1}$ , que não detectou nenhum evento de produção.

Os resultados obtidos para o processo de fotoprodução têm seção de choque maior que para processos Drell-Yan, de modo que a princípio seria mais provável detectar essas partículas através desse canal. Todavia, ainda seria necessária uma quantidade alta de dados. A taxa de eventos ( $n$ ) esperados dependente do tempo, é função da seção de choque do processo, bem como da luminosidade ( $L$ ) dos acelerados, e é dada pelo produto dessas grandezas ([4]):

$$N = L \cdot \sigma_{tot} \quad (6.13)$$



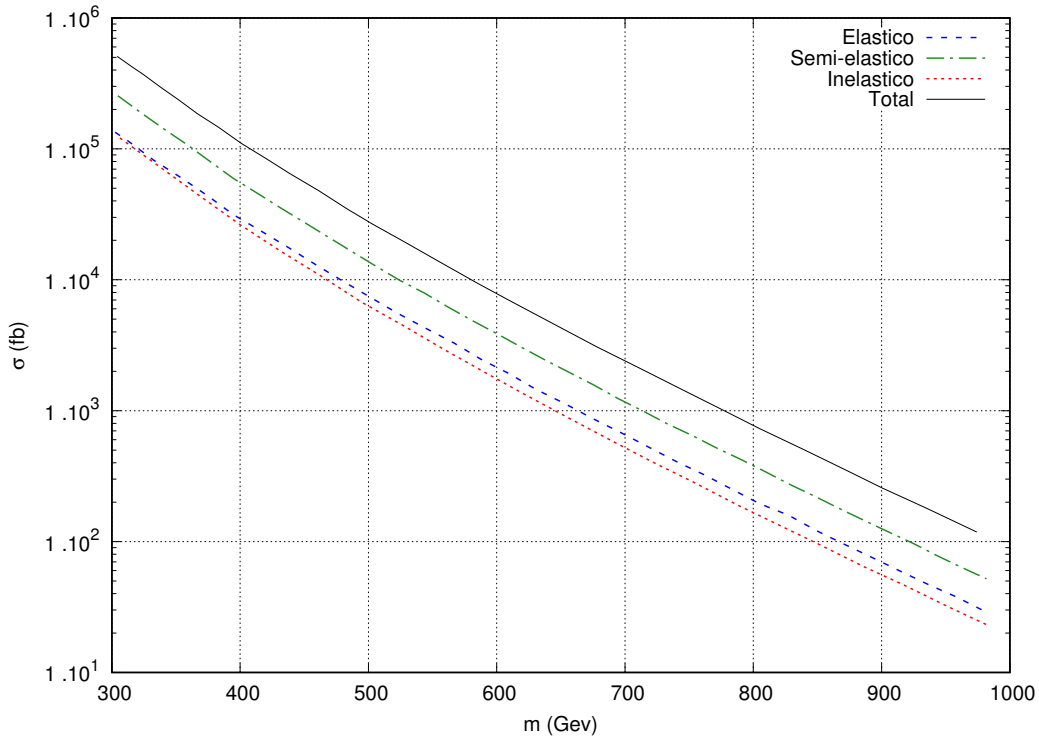


Figura 14: Seção de choque de fotoprodução de monopolo-antimonopolo em colisões elástica, semi-elástica, inelástica e seção de choque total do processo.

Em termos práticos, é mais interessante considerar a luminosidade integrada em um período de tempo, que dá o número de eventos  $N$  esperado naquele período. Tomando por base a luminosidade integrada em um ano do LHC (que seria bem superior ao disponibilizado para o estudo desse processo), do ano de 2018, cujo valor é cerca de  $60 \text{ fb}^{-1}$  ([25]), e considerando uma massa de monopolo de  $750 \text{ GeV}$  (valor intermediário) teria-se cerca de 60.000, aproximadamente (tomando como seção de choque a calculada). Com esse número de eventos, ainda seria possível detectar monopólos. Caso a massa estivesse mais próxima de  $500 \text{ GeV}$ , o número de eventos seria alto, mesmo com uma luminosidade mais baixa, devido a seção de choque elevada, de modo que a detecção seria facilmente realizada nos detectores atuais, já no limite de  $1000 \text{ GeV}$  de massa, seria extremamente difícil realizar a detecção com os aceleradores atuais.

Segundo [8], com um monopolo de massa em torno de  $500 \text{ GeV}$ , e uma luminosidade integrada de  $1 \text{ fb}^{-1}$ , deveria ser possível detectar um monopolo atualmente. Já para uma massa de  $1000 \text{ GeV}$ , isso não seria muito plausível. Possivelmente com os detectores calibrados especificamente para os monopolos, e com as melhorias sendo implementadas aos colisores do LHC, seja possível determinar um limite maior.

A distribuição em energia de centro de massa do sistema fóton-fóton, com os mesmo parâmetros utilizados, e um monopolo de massa  $750 \text{ GeV}$  resulta na fig.(15), cujo valor de  $750 \text{ GeV}$  foi escolhido por estar dentre os limites possíveis de detecção. Como é possível perceber, a função obtida cresce a partir do valor de  $1500 \text{ GeV}$ , que a energia de limiar de produção dos pares para a massa de  $750 \text{ GeV}$  do monopolo, o que é esperado. Seu pico contudo acontece para valores um pouco maiores de energia, uma vez que é muito mais provável que o par produzido possua alguma energia cinética residual. Porém a medida que a energia de centro de massa do sistema de fótons cresce, a distribuição decresce rapidamente, fato que indica a existência de outros canais de produção mais prováveis para energias maiores.

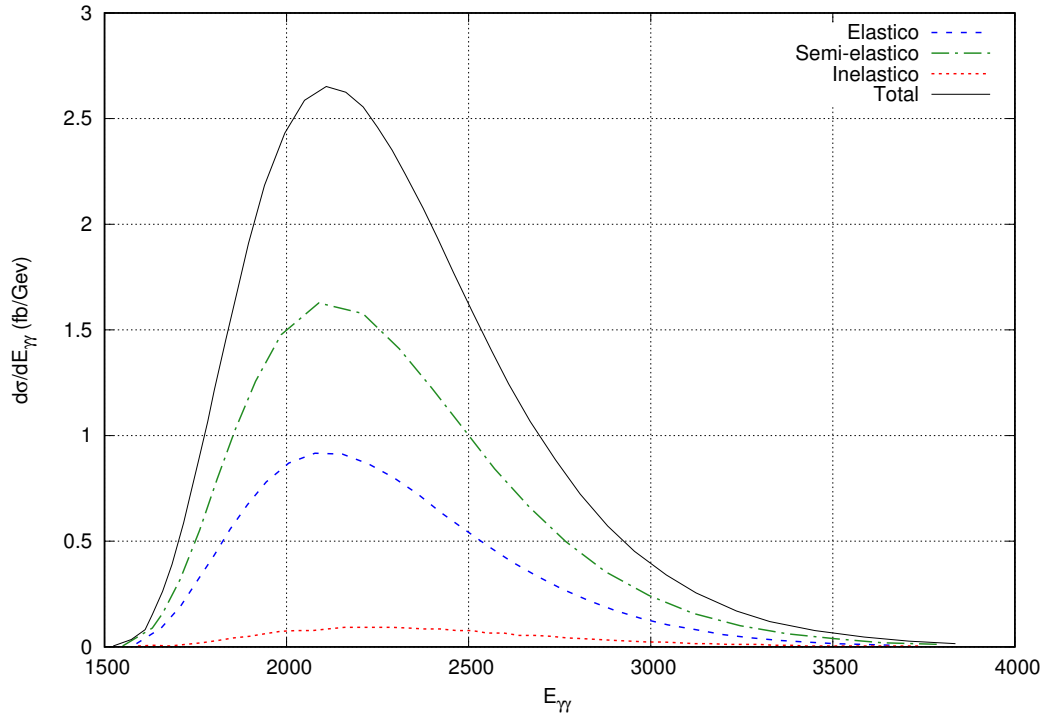


Figura 15: Seção de choque diferencial de fotoprodução de monopolo-antimonopolo em colisões elástica, semi-elástica, inelástica e seção de choque total do processo.

## 7 Conclusão e perspectivas

A existência de monopolos magnéticos significaria uma grande mudança no entendimento do eletromagnetismo, de modo a requerer uma revisão das teorias atuais. Tal partícula geraria uma simetria interessante, além de explicar a quantização da carga elétrica, como mostrou o trabalho de Dirac. No entanto, a natureza da carga magnética dificulta a análise e desenvolvimento de teorias, já que não permite o tratamento perturbativo usual. Desse modo as análises feitas tornam-se uma primeira aproximação.

Os monopolos ainda não foram detectados experimentalmente, e um dos possíveis fatores que leva a isso é a seção de choque pequena do processo, como foi mostrado através do cálculo elaborado nesse trabalho. De demais trabalhos, em processos Drell-Yan, encontra-se uma massa de monopolo mínima em torno de  $360\text{GeV}$ , e nesse trabalho estima-se que o limite atual máximo de detecção em fotoprodução chegue a cerca de  $1000\text{GeV}$ .

O estudo dessa física é recente, e consigo traz uma série de dificuldades e dúvidas, uma vez que ainda não se tem algo bem estabelecido na área. Como exemplo, tem-se a própria constante de acoplamento  $\alpha_g$ , que possui diferentes propostas, e leva ao problema do tratamento perturbativo. Além disso, com pouca literatura na área, tem-se pouco em que se basear, deixando dúvidas em relação a própria acurácia dos trabalhos publicados. Porém essas são as dificuldades de se desbravar as fronteiras da ciência e desenvolver física nova.

Como perspectivas de continuação ao trabalho, pode-se citar a análise dos mesmos processos em colisões núcleo-núcleo, bem como a análise de outro estado proposto para cargas magnéticas, o monopolium. Esse seria um estado ligado de duas partículas, originado da grande constante de acoplamento. Além disso, há a necessidade de dados experimentais para testar a teoria. Espera-se que esses sejam obtidos no LHC, que após receber suas atualizações, deve-se tornar ainda mais capaz de detectar os monopolos, e possivelmente confirmar sua existência.

## Referências

- [1] Dirac, P. A. M. “The Theory of magnetic poles”. Em: *Phys. Rev.* 74 (1948), pp. 817–830. DOI: 10.1103/PhysRev.74.817.
- [2] Schwinger, J. S. “Magnetic charge and quantum field theory”. Em: *Phys. Rev.* 144 (1966). [543(1966)], pp. 1087–1093. DOI: 10.1103/PhysRev.144.1087.
- [3] Zwanziger, D. “Local Lagrangian quantum field theory of electric and magnetic charges”. Em: *Phys. Rev.* D3 (1971), p. 880. DOI: 10.1103/PhysRevD.3.880.
- [4] Mulhearn, M. J. “A Direct Search for Dirac Magnetic Monopoles”. Tese de doutorado. MIT, 2004. DOI: 10.2172/15011746.
- [5] Kalbfleisch, G. R. et al. “Improved experimental limits on the production of magnetic monopoles”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), pp. 5292–5295. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5292. arXiv: hep-ex/0005005 [hep-ex].
- [6] Abulencia, A. et al. “Search for Neutral Higgs Bosons of the Minimal Supersymmetric Standard Model Decaying to  $\tau$  Pairs in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 96 (1 jan. de 2006), p. 011802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.011802.
- [7] Epele, L. N. et al. “Looking for Magnetic Monopoles at LHC”. Em: (2011). arXiv: 1104.0218 [hep-ph].
- [8] Epele, L. N. et al. “Looking for magnetic monopoles at LHC with diphoton events”. Em: *Eur. Phys. J. Plus* 127 (2012), p. 60. DOI: 10.1140/epjp/i2012-12060-8. arXiv: 1205.6120 [hep-ph].
- [9] Dougall, T. e Wick, S. D. “Dirac magnetic monopole production from photon fusion in proton collisions”. Em: *Eur. Phys. J.* A39 (2009), pp. 213–217. DOI: 10.1140/epja/i2008-10701-8. arXiv: 0706.1042 [hep-ph].
- [10] Kurochkin, Yu. et al. “On production of magnetic monopoles via gamma gamma fusion at high energy p p collisions”. Em: *Mod. Phys. Lett.* A21 (2006), pp. 2873–2880. DOI: 10.1142/S0217732306022237.
- [11] Jackson, J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. Wiley, 1999.
- [12] Reis, J. T. “Fotoprodução de monopólos magnéticos e monopolium em colisores de altas energias”. Diss. de mestrado. UFPEL, 2016.
- [13] Michael E. Peskin, D. V. S. *An introduction to quantum field theory*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley Pub. Co, 1995. ISBN: 0201503972,9780201503975.
- [14] Walter Greiner Joachim Reinhardt, D. B. *Field quantization*. 1ª ed. Springer, 1996. ISBN: 3540591796,9783540591795.
- [15] Walter Greiner, J. R. *Quantum electrodynamics*. 3rd. Springer, 2002. ISBN: 3540440291,9783540440291.
- [16] Thomson, M. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6.
- [17] Weizsacker, C. F. von. “Radiation emitted in collisions of very fast electrons”. Em: *Z. Phys.* 88 (1934), pp. 612–625. DOI: 10.1007/BF01333110.
- [18] Williams, E. J. “Nature of the high-energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae”. Em: *Phys. Rev.* 45 (1934), pp. 729–730. DOI: 10.1103/PhysRev.45.729.
- [19] Drees, M. e Zeppenfeld, D. “Production of Supersymmetric Particles in Elastic  $ep$  Collisions”. Em: *Phys. Rev.* D39 (1989), p. 2536. DOI: 10.1103/PhysRevD.39.2536.
- [20] Martins, S. “Fotoprodução de mésons vetoriais pesados em colisões ultraperiferais e periferais”. Tese de doutorado. UFRGS, 2018.

- [21] Magnus W. Oberhettinger, F. e Soni, R. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. third edition. Springer-Verlag, 1966.
- [22] Nystrand, J. “Electromagnetic interactions in nucleus-nucleus and proton-proton collisions”. Em: *Nucl. Phys.* A752 (2005), pp. 470–479. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.02.051. arXiv: hep-ph/0412096 [hep-ph].
- [23] Pumplin, J. et al. “New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis”. Em: *JHEP* 07 (2002), p. 012. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/012. arXiv: hep-ph/0201195 [hep-ph].
- [24] Drees, M. et al. “ $\gamma\gamma$  processes at high energy pp colliders”. Em: *Phys. Rev. D* 50 (3 ago. de 1994), pp. 2335–2338. DOI: 10.1103/PhysRevD.50.2335.
- [25] *Luminosity determination in pp collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV using the ATLAS detector at the LHC*. Rel. téc. ATLAS-CONF-2019-021. Geneva: CERN, jun. de 2019. URL: <http://cds.cern.ch/record/2677054>.
- [26] Acharya, B. et al. “Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forward trapping detector in 2.11 fb<sup>-1</sup> of 13 TeV proton–proton collisions at the LHC”. Em: *Physics Letters B* 782 (2018), pp. 510–516. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.05.069>.