

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO CONSTITUTIVO HIPERELÁSTICO
EM UMA SUB-ROTINA UMAT

por

Rafael Führ Kuhn

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2019

Kuhn, Rafael Führ

Implementação Numérica de um Modelo Constitutivo
Hiperelástico através de uma Sub-rotina UMAT / Rafael
Führ Kuhn. -- 2019.

21 f.

Orientador: Felipe Tempel Stumpf.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2019.

1. Hiperelasticidade. 2. Hoss-Marczak. 3. Elementos
Finitos. 4. Abaqus. I. Stumpf, Felipe Tempel, orient.
II. Título.

Rafael Führ Kuhn

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO CONSTITUTIVO HIPERELÁSTICO
EM UMA SUB-ROTINA UMAT

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Felipe Tempel Stumpf

Comissão de Avaliação:

Prof. Rodrigo Rossi

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Felipe Tempel Stumpf

Porto Alegre, dezembro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2019

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO CONSTITUTIVO
HIPERELÁSTICO EM UMA SUB-ROTINA UMAT

Kuhn, Rafael Führ

rafaelfkuhn@gmail.com

Resumo. Neste trabalho realiza-se a implementação numérica do modelo constitutivo para materiais hiperelásticos isotrópicos de Hoss-Marczak modificado, através de uma sub-rotina UMAT no software comercial de elementos finitos Abaqus. Para tal, os tensores de tensão de Cauchy e tensor tangente são apresentados. Três casos de deformação homogênea são replicados, com base em dados experimentais, para fim de validação da implementação numérica. Os resultados mostram que a implementação representa fielmente o modelo constitutivo e é capaz de realizar previsões numéricas precisas do comportamento mecânico do material modelado.

Palavras-chave: Hiperelasticidade, Hoss-Marczak, Elementos Finitos, Abaqus

Abstract. In this paper the numerical implementation of the modified Hoss-Marczak constitutive model for hyperelastic isotropic materials is performed through a UMAT subroutine in the finite element commercial software Abaqus. The stress tensor and elasticity tensor are presented. Three homogeneous deformations cases are ran in order to validate the numerical implementation. Results show the implementation accurately represents the constitutive model and is able to do precise numerical predictions of the modeled material's mechanical behavior.

Keywords: Hyperelasticity, Hoss-Marczak, Finite Elements, Abaqus

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO

Materiais hiperelásticos são assim denominados por serem capazes de apresentar grandes deformações, muito maiores que as encontradas em materiais convencionais de engenharia. Estes materiais têm como característica a não linearidade da relação constitutiva entre tensão e deformação, independentemente do nível de sollicitação (HOSS, 2009). Um grupo de materiais tipicamente hiperelásticos são os elastômeros.

Devido ao comportamento mecânico não linear, não é possível aplicar a Lei de Hooke para descrever a relação tensão-deformação desses materiais, portanto a forma mais utilizada para representar este tipo de relação constitutiva é por meio da proposição de uma função de densidade de energia de deformação específica, desenvolvida, em geral, apenas para os materiais que se pretende modelar. Estudos buscam encontrar uma função que represente de forma mais adequada o comportamento da maior variedade possível de materiais, cujas propriedades podem variar até mesmo com pequenas mudanças na composição química. Neste contexto de busca por uma função para materiais hiperelásticos, encontra-se o modelo de Hoss-Marczak (HOSS, 2009), posteriormente modificado por Stumpf & Marczak (2018).

Implementar este modelo constitutivo em um *software* comercial de elementos finitos, tal como o Abaqus, através de uma sub-rotina do tipo UMAT, que permite simular o comportamento mecânico destes materiais para qualquer caso de deformação, portanto, é de fundamental importância.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Stein & Sagar (2008) testaram a convergência da implementação numérica em sub-rotina UMAT no *software* Abaqus do modelo neo-Hookeano, em relação à forma de obtenção da matriz jacobiana material (ou tensor tangente). Foram comparados os métodos de obtenção analítico, numérico e através da taxa de Jaumann da tensão de Kirchhoff. Mostrou-se que somente com a obtenção do tensor tangente pela taxa de Jaumann da tensão de Kirchhoff há garantia de convergência quadrática ou quase quadrática.

Steinmann et al. (2012) fizeram uma revisão de 14 modelos para materiais elastoméricos, tanto modelos fenomenológicos quanto micro-mecânicos, entre os quais, modelos muito conhecidos como o neo-Hookeano, Mooney-Rivlin, Yeoh, Ogden e Arruda-Boyce. Foi condensada a informação necessária para a obtenção dos tensores de tensão e tensores tangentes consistentes para implementação numérica dos modelos. Foi feita uma avaliação do desempenho por comparação com os dados experimentais de Treloar (1944).

Suchocki (2017) realizou a implementação em elementos finitos de modelos de materiais ligeiramente compressíveis. Foram utilizados modelos cuja parte isocórica da função de energia de deformação é baseada no primeiro invariante do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita, entre os quais os modelos de Gent, Jemioło e Lopez-Pamies. Foi utilizada uma sub-rotina UMAT no *software* Abaqus. Os resultados foram comparados com soluções analíticas, com excelente concordância.

Baaser et al. (2017) investigaram a possível inconsistência das sub-rotinas UHYPER e UMAT no *software* Abaqus para materiais hiperelásticos compressíveis. As sub-rotinas foram comparadas para materiais quasi-incompressíveis (borrachas) e materiais altamente compressíveis (espumas). Foi observada uma inconsistência no caso de materiais altamente compressíveis, para os quais foi implementada uma correção no cálculo do tensor tangente.

Nedjar et al. (2017) realizaram a implementação em método de elementos finitos do modelo exponencial de Hencky-logarítmico, baseado na decomposição espectral das expressões de tensão e deformação. Foi utilizada a sub-rotina UMAT no *software* Abaqus para realizar as simulações, entre elas a de uma eversão de um tubo elástico incompressível. A formulação proposta mostrou-se eficiente e robusta para casos bi- e tridimensionais.

Franus & Kowalewski (2018) compararam a eficiência computacional de diferentes formas de implementar um modelo hiperelástico no *software* Abaqus, versão 6.14. Foram avaliadas as sub-rotinas UHYPER e UMAT. O modelo constitutivo escolhido foi o neo-Hookeano para materiais isotrópicos compressíveis. Foram realizadas simulações com uma placa plana com um furo, submetida a tração, um disco plano com um furo, submetido a compressão, e um tubo com entalhe, submetido a tração e compressão axial. Para os casos bidimensionais não houve muita diferença entre as sub-rotinas, embora a UHYPER tenha sido ligeiramente mais eficiente. Para o caso tridimensional houve maiores diferenças, a sub-rotina UMAT foi menos eficiente e mostrou-se menos estável.

Gillani (2018) desenvolveu uma sub-rotina UMAT para prever a resposta hiperelástica de elastômeros, baseada em equações constitutivas obtidas da função de energia de Gent. Casos simples foram simulados e comparados com soluções analíticas. Os resultados das simulações foram também comparados com dados experimentais de um elastômetro. Foi realizado um teste de convergência em relação ao refinamento da malha. Foi observado que a sub-rotina reproduz com boa precisão a resposta experimental do material.

Connolly et al. (2019) propõem uma implementação de modelos hiperelásticos baseada nos alongamentos principais, para ser utilizada em uma sub-rotina UMAT no *software* Abaqus. Os resultados são comparados com a implementação convencional baseada nos invariantes do tensor de deformação de Cauchy-Green. A implementação mostrou-se estável e precisa, com esforço computacional similar.

Gazola (2019) realizou uma implementação do modelo modificado de Hoss-Marczak utilizando uma sub-rotina UHYPER, que permite a caracterização de materiais hiperelásticos definindo a função de densidade de energia e as derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem em relação aos termos invariantes. A obtenção dos coeficientes foi realizada através de um ajuste de curvas com base em dados de um ensaio de tração uniaxial e previsões teóricas. Os resultados foram satisfatórios para simulações de ensaios de tração uniaxial, tração biaxial e cisalhamento puro, além de um caso de geometria mais complexa.

1.3. OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é implementar numericamente o modelo constitutivo hiperelástico modificado de Hoss-Marczak (STUMPF & MARCZAK, 2018) através de uma sub-rotina UMAT no *software* comercial de elementos finitos Abaqus, v. 6.14, e validar esta implementação através da comparação de resultados obtidos em simulações com dados experimentais.

2. FUNDAMENTAÇÃO

Considera-se um corpo finito no espaço tridimensional, no qual ocorre uma deformação finita φ , com um gradiente de deformação \mathbf{F} , dado por

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1)$$

onde \mathbf{X} é um ponto material na configuração de referência, e o Jacobiano J é

$$J = |\mathbf{F}|. \quad (2)$$

O gradiente de deformações \mathbf{F} pode ser decomposto, conforme

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}, \quad (3)$$

em que $\hat{\mathbf{F}}$ é a parte volumétrica e $\bar{\mathbf{F}}$ é a parte isocórica, dados por

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} \quad (4)$$

e

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}, \quad (5)$$

respectivamente, onde \mathbf{I} é o tensor identidade de 2ª ordem.

O tensor de deformação de Cauchy-Green à direita, \mathbf{C} é dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (6)$$

cuja porção isocórica é

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (7)$$

Os invariantes de $\bar{\mathbf{C}}$, $I_{\bar{\mathbf{C}}}$, $II_{\bar{\mathbf{C}}}$ e $III_{\bar{\mathbf{C}}}$, são dados por

$$I_{\bar{\mathbf{C}}} = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}), \quad (8)$$

$$II_{\bar{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2} [\text{tr}(\bar{\mathbf{C}})^2 - \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2)], \text{ e} \quad (9)$$

$$III_{\bar{\mathbf{C}}} = |\bar{\mathbf{C}}| = 1, \quad (10)$$

respectivamente, em que $\text{tr}()$ se refere ao operador traço, o qual para um tensor qualquer \mathbf{A} é computado por

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{I}. \quad (11)$$

A função de densidade de energia de deformação W de um modelo hiperelástico compressível pode ser escrita em sua forma desacoplada como uma soma das partes isocórica \bar{W} e volumétrica \hat{W} em função dos invariantes de $\bar{\mathbf{C}}$ e do jacobiano J , conforme

$$W = \bar{W}(I_{\bar{\mathbf{C}}}, II_{\bar{\mathbf{C}}}) + \hat{W}(J). \quad (12)$$

O tensor de tensão de Cauchy pode ser escrito em função do gradiente de deformação e a derivada de W em relação ao tensor de deformação de Cauchy-Green à direita como

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (13)$$

O segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} é escrito em função do tensor de tensão de Cauchy como

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T, \quad (14)$$

que pode ser decomposto, seguindo o mesmo critério da função de energia, conforme

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \bar{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}}, \quad (15)$$

em que $\bar{\mathbf{S}}$ é a parte isocórica, dada por

$$\bar{\mathbf{S}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P} : \check{\mathbf{S}} \quad (16)$$

e $\hat{\mathbf{S}}$ é parte volumétrica, dada por

$$\widehat{\mathbf{S}} = J \frac{\partial \widehat{W}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}, \quad (17)$$

respectivamente, onde \mathbb{P} é um tensor de projeção de 4ª ordem

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (18)$$

e $\check{\mathbf{S}}$ é um tensor de tensão fictício dado por

$$\check{\mathbf{S}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{\gamma}_1 \mathbf{I} + \bar{\gamma}_2 \bar{\mathbf{C}}, \quad (19)$$

onde $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ são dados por

$$\bar{\gamma}_1 = 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{C}}}} + I_{\bar{\mathbf{C}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}} \right), \quad (20)$$

e

$$\bar{\gamma}_2 = -2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial III_{\bar{\mathbf{C}}}}, \quad (21)$$

respectivamente, e \mathbb{I} é o tensor unitário de 4ª ordem diádico, dado por

$$\mathbb{I} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (22)$$

que também pode ser escrito como

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (23)$$

onde δ é o delta de Kronecker.

O tensor tangente, de 4ª ordem, é o Hessiano da função de energia de deformação W , e é proporcional à derivada do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff em relação ao tensor de deformação de Cauchy-Green à direita. Este tensor pode também ser decomposto em suas partes volumétrica e isocórica, conforme

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \widehat{\mathbb{C}} + \bar{\mathbb{C}}, \quad (24)$$

em que a parte volumétrica $\widehat{\mathbb{C}}$ é dada por

$$\widehat{\mathbb{C}} = J \left(\frac{\partial \widehat{W}}{\partial J} + J \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial J^2} \right) (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) - 2J \frac{\partial \widehat{W}}{\partial J} (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) \quad (25)$$

e a parte isocórica é dada por

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbb{P} : \check{\mathbf{C}} : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} \left(\left(J^{-\frac{2}{3}} \check{\mathbf{S}} \right) : \mathbf{C} \right) \tilde{\mathbb{P}} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{C}^{-1}), \quad (26)$$

onde $\tilde{\mathbb{P}}$ e $\check{\mathbf{C}}$ são dados por

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (27)$$

e

$$\check{\mathbf{C}} = J^{-\frac{4}{3}} (\bar{\delta}_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \bar{\delta}_2 (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I}) + \bar{\delta}_3 \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \bar{\delta}_4 \mathbb{I}), \quad (28)$$

respectivamente, e os termos $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$, $\bar{\delta}_3$ e $\bar{\delta}_4$ são calculados por

$$\bar{\delta}_1 = 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{C}}}^2} + 2I_{\bar{\mathbf{C}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{C}}} \partial II_{\bar{\mathbf{C}}}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}} + I_{\bar{\mathbf{C}}}^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}^2} \right), \quad (29)$$

$$\bar{\delta}_2 = -4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{C}}} \partial II_{\bar{\mathbf{C}}}} + I_{\bar{\mathbf{C}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}^2} \right), \quad (30)$$

$$\bar{\delta}_3 = 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}^2}, \quad (31)$$

$$\bar{\delta}_4 = -4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{C}}}}, \quad (32)$$

respectivamente. O operador \odot refere-se ao produto diádico simétrico de 4ª ordem, definido como

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{E})_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ik} E_{jl} + A_{il} E_{jk}), \quad (33)$$

para dois tensores quaisquer de 2ª ordem \mathbf{A} e \mathbf{E} .

A sub-rotina UMAT interage com o *software* Abaqus, recebendo deste, como variáveis de entrada, o gradiente de deformação \mathbf{F} e os parâmetros do material (os parâmetros podem estar, alternativamente, definidos na própria sub-rotina). As variáveis de saída que devem ser providas são a tensão (de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$) e a matriz jacobiana material, $\partial \Delta \boldsymbol{\sigma} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$. (ABAQUS 6.14, 2014)

É preciso, porém, passar a descrição das grandezas do domínio material (Lagrangeano) para o domínio espacial (Euleriano), já que esse é o método requerido pelo Abaqus.

O tensor de deformação unimodular de Cauchy-Green à esquerda, $\bar{\mathbf{B}}$, é dado por

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T. \quad (34)$$

Embora $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ não sejam iguais, os seus invariantes o são, ou seja,

$$I_{\bar{\mathbf{B}}} = tr(\bar{\mathbf{B}}) = tr(\bar{\mathbf{C}}) = I_{\bar{\mathbf{C}}}, \quad (35)$$

$$II_{\bar{\mathbf{B}}} = \frac{1}{2} [tr(\bar{\mathbf{B}})^2 - tr(\bar{\mathbf{B}}^2)] = \frac{1}{2} [tr(\bar{\mathbf{C}})^2 - tr(\bar{\mathbf{C}}^2)] = II_{\bar{\mathbf{C}}}, \text{ e} \quad (36)$$

$$III_{\bar{\mathbf{B}}} = |\bar{\mathbf{B}}| = |\bar{\mathbf{C}}| = III_{\bar{\mathbf{C}}} = 1, \quad (37)$$

o que permite escrever equações, tanto em função das invariantes de $\bar{\mathbf{B}}$ quanto de $\bar{\mathbf{C}}$, com o mesmo formato, inclusive a função de energia de deformação W .

Seguindo os procedimentos apresentados no guia teórico do *software* (ABAQUS, 2014), obtém-se a forma adequada à implementação para a equação do tensor de tensão de Cauchy como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} - p\mathbf{I}, \quad (38)$$

onde s é a parte deviatórica da tensão dada por

$$\mathbf{s} = \frac{1}{J} [\bar{\gamma}_1 \bar{\mathbf{B}} + \bar{\gamma}_2 \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}]^d, \quad (39)$$

e p é a parte volumétrica da tensão, dada por

$$p = -\frac{\partial \hat{W}}{\partial J}, \quad (40)$$

onde $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ são dados pelas Equações 20 e 21, respectivamente.

O superescrito d na Equação 39 denota que deve-se considerar somente a parte deviatórica do tensor. Sabe-se que a parte deviatórica, \mathbf{A}^d , de um tensor qualquer \mathbf{A} , é dada por

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{A} - \frac{1}{3} tr(\mathbf{A})\mathbf{I}. \quad (41)$$

Tem-se, portanto, que a forma final para implementação do tensor de tensão de Cauchy é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \left[(\bar{\gamma}_1 \bar{\mathbf{B}} + \bar{\gamma}_2 \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) - \frac{1}{3} tr(\bar{\gamma}_1 \bar{\mathbf{B}} + \bar{\gamma}_2 \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})\mathbf{I} \right] + \frac{\partial \hat{W}}{\partial J} \mathbf{I}. \quad (42)$$

Seguindo os procedimentos apresentados no guia teórico do *software* (ABAQUS, 2014), obtém-se a forma adequada à implementação para a equação do tensor tangente \mathbf{c} , dado por

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{vol} + \mathbf{c}_{iso}, \quad (43)$$

onde \mathbf{c}_{vol} é a parte volumétrica do tensor, dada por

$$\mathbf{c}_{vol} = K_e \mathbb{I}, \quad (44)$$

onde K_e é o módulo volumétrico efetivo, dado por

$$K_e = -\left(J \frac{\partial p}{\partial J} + p \right) = J \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial J^2} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial J}, \quad (45)$$

e $\bar{\mathbf{c}}_{iso}$ é a parte isocórica do tensor, dada por

$$\bar{\mathbf{c}}_{iso} = (\bar{\mathbf{c}}^S)^d = \bar{\mathbf{c}}^S - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{c}}^S) \mathbf{I}, \quad (46)$$

em que $\bar{\mathbf{c}}^S$ é o módulo tangente deviatórico efetivo do material, dado por

$$\bar{\mathbf{c}}^S = \frac{1}{J} \left[\begin{array}{l} \bar{\gamma}_1 \mathbf{H}_1 + \bar{\gamma}_2 \mathbf{H}_2 + \bar{\delta}_1 \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\delta}_2 (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \\ + \bar{\delta}_3 \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \frac{\bar{\delta}_5}{3} (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}) + \frac{\bar{\delta}_6}{3} (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}) \end{array} \right], \quad (47)$$

onde os termos $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$ e $\bar{\delta}_3$ são dados respectivamente pelas Equações 29, 30 e 31, e \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , $\bar{\delta}_5$ e $\bar{\delta}_6$ são calculados por

$$H_{1ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \bar{B}_{jl} + \bar{B}_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \bar{B}_{jk} + \bar{B}_{il} \delta_{jk}), \quad (48)$$

$$H_{2ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \bar{B}_{jp} \bar{B}_{pl} + \bar{B}_{ip} \bar{B}_{pk} \delta_{jl} + \delta_{il} \bar{B}_{jp} \bar{B}_{pk} + \bar{B}_{ip} \bar{B}_{pl} \delta_{jk} + \bar{B}_{ik} \bar{B}_{jl} + \bar{B}_{il} \bar{B}_{jk}), \quad (49)$$

$$\bar{\delta}_5 = -4 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{B}}}} + 2I_{\bar{\mathbf{B}}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{B}}}} + I_{\bar{\mathbf{B}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{B}}}^2} + (I_{\bar{\mathbf{B}}}^2 + 2II_{\bar{\mathbf{B}}}) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{B}}} \partial II_{\bar{\mathbf{B}}}} + 2I_{\bar{\mathbf{B}}} II_{\bar{\mathbf{B}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{B}}}^2} \right], \text{ e} \quad (50)$$

$$\bar{\delta}_6 = 4 \left(2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{B}}}} + I_{\bar{\mathbf{B}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{\mathbf{B}}} \partial II_{\bar{\mathbf{B}}}} + 2II_{\bar{\mathbf{B}}} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{\mathbf{B}}}^2} \right), \quad (51)$$

respectivamente.

O modelo HMI modificado (STUMPF & MARCZAK, 2018) propõe a Equação 52 para determinar a componente isocórica da função de densidade de energia de deformação \bar{W} , para materiais incompressíveis:

$$\bar{W} = \frac{C_1}{C_2} (1 - e^{-C_2(I_{\bar{\mathbf{B}}}-3)}) + \frac{C_5}{2C_3} \left[\left(1 + \frac{C_3(I_{\bar{\mathbf{B}}}-3)}{C_4} \right)^{C_4} - 1 \right] + C_6 II_{\bar{\mathbf{B}}} \ln \left(\frac{II_{\bar{\mathbf{B}}}}{3} \right), \quad (52)$$

em que C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 e C_6 são parâmetros do material.

Para a implementação numérica, usa-se

$$\hat{W} = \frac{1}{2} K (J - 1)^2 \quad (53)$$

para determinar a componente volumétrica da função de densidade de energia de deformação, \hat{W} , em que K é o módulo volumétrico do material.

3. METODOLOGIA

O modelo hiperelástico foi implementado em uma sub-rotina UMAT escrita em código Fortran 77, na qual as equações presentes na Seção 2, seguindo a abordagem proposta no Guia Teórico do Abaqus, foram transcritas para calcular o tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ e o tensor tangente \boldsymbol{c} , a partir do gradiente de deformação \boldsymbol{F} . Os parâmetros materiais foram escritos diretamente na sub-rotina. A sub-rotina desenvolvida está apresentada no Apêndice I em seu inteiro teor. As derivadas parciais não nulas para o modelo implementado são

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{\bar{B}}} = C_1 e^{-C_2(I_{\bar{B}}-3)} + \frac{C_5}{2} \left(1 + \frac{C_3}{C_4} (I_{\bar{B}} - 3) \right)^{C_4-1}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\bar{B}}} = C_6 + C_6 \ln \left(\frac{II_{\bar{B}}}{3} \right), \quad (55)$$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial J} = K(J - 1), \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial I_{\bar{B}}^2} = -C_1 C_2 e^{-C_2(I_{\bar{B}}-3)} + \frac{C_5 C_3}{2C_4} (C_4 - 1) \left(1 + \frac{C_3}{C_4} (I_{\bar{B}} - 3) \right)^{C_4-2}, \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial II_{\bar{B}}^2} = \frac{C_6}{II_{\bar{B}}}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial J^2} = K. \quad (59)$$

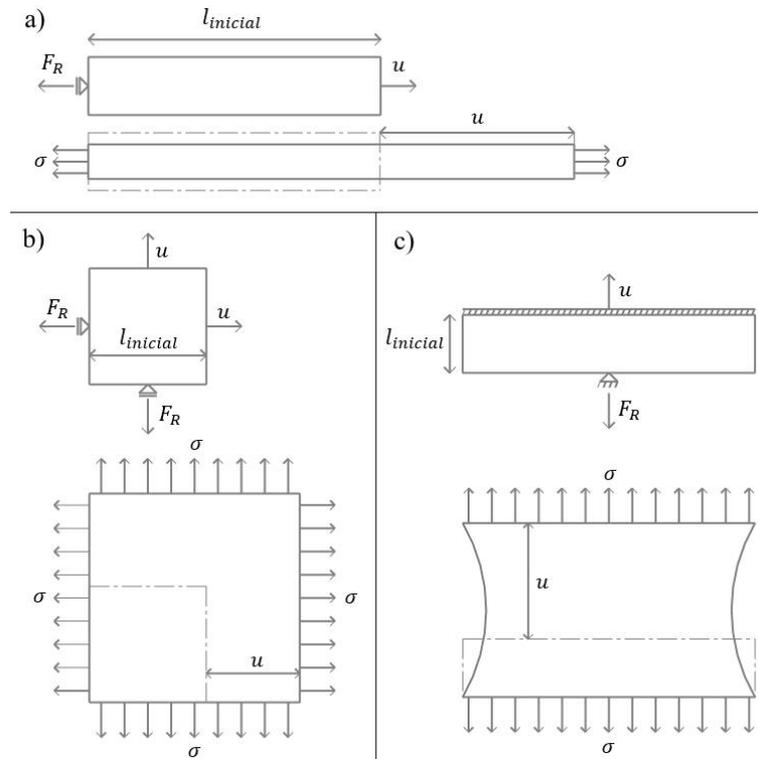
Foi utilizado o conjunto de parâmetro obtidos de Stumpf & Marczak (2019), que fizeram um ajuste com base nos dados experimentais de Treloar (1944). (Tabela 1)

Tabela 1 – Conjunto de parâmetros ajustados por Stumpf & Marczak (2019).

C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆
0,12	-6,8E-6	0,13	3,0	4,5E-2	1,65E-4

Foram realizadas simulações computacionais no *software* de elementos finitos Abaqus, v. 6.14, utilizando-se a sub-rotina UMAT com os parâmetros previamente descritos. As simulações representam os casos de ensaios de tração uniaxial, Figura 1(a), tração biaxial, Figura 1(b) e cisalhamento puro, Figura 1(c). Todas as simulações utilizaram geometrias tridimensionais, com elementos quadráticos do tipo C3D20, com 20 nós e 27 pontos de integração. Foram escolhidos elementos quadráticos para evitar problemas de *shear* e *volumetric locking* e eliminar modos espúrios de deformação.

Figura 1 – (a) Tração uniaxial; (b) Tração biaxial; (c) Cisalhamento puro; $l_{inicial}$ é o comprimento inicial; F_R é a força de reação; u é o deslocamento aplicado; σ é a tensão;



A simulação de tração uniaxial foi realizada com uma tira de 100 mm de comprimento, 10 mm de largura e 1 mm de espessura, submetida a um deslocamento prescrito na direção longitudinal de até 660 mm, atuando sobre uma extremidade, enquanto a outra permaneceu restringida por um apoio.

Para a simulação de tração biaxial foi feita uma placa quadrada com lados de 100 mm e 1 mm de espessura, submetida a deslocamentos prescritos nas duas direções principais, de até 350 mm em cada direção, atuando sobre as faces normais aos deslocamentos aplicados, enquanto as faces opostas permaneceram restringidas por apoios.

O caso de cisalhamento puro foi simulado com uma tira com as mesmas dimensões do caso de tração uniaxial, porém o deslocamento prescrito foi realizado na direção da largura, com magnitude até 40 mm. A face oposta foi restringida com engaste, e a face onde aplicou-se o deslocamento foi restringida nas direções ortogonais ao deslocamento.

Das simulações realizadas obteve-se as forças de reação, F_R , ao longo da aplicação da carga. Estas forças, divididas pela área em que a força é exercida, $A_{inicial}$, referente à geometria inicial, resultam nas tensões de engenharia, σ , conforme Equação 60. Já o deslocamento aplicado, u , dividido pelo comprimento inicial, $l_{inicial}$, resulta na deformação de engenharia, ε , conforme Equação 61:

$$\sigma = \frac{F_R}{A_{inicial}}. \quad (60)$$

$$\varepsilon = \frac{u}{l_{inicial}}. \quad (61)$$

Os dados coletados nas simulações foram utilizados para a construção de curvas de tensão-deformação para os três casos. Essas curvas foram comparadas às curvas geradas a partir dos dados experimentais de Treloar (1944).

4. RESULTADOS

Conforme descrito anteriormente, foram realizadas três simulações numéricas de casos de deformação homogênea. As figuras 2, 3 e 4 apresentam as configurações deformadas dos casos de tração uniaxial, tração biaxial e cisalhamento puro, respectivamente. A geometria inicial é representada por linhas pontilhadas.

Figura 2 – Configuração deformada de tração uniaxial simulada. A deformação é apresentada em escala de 10%. U1 é o deslocamento na direção do eixo X.

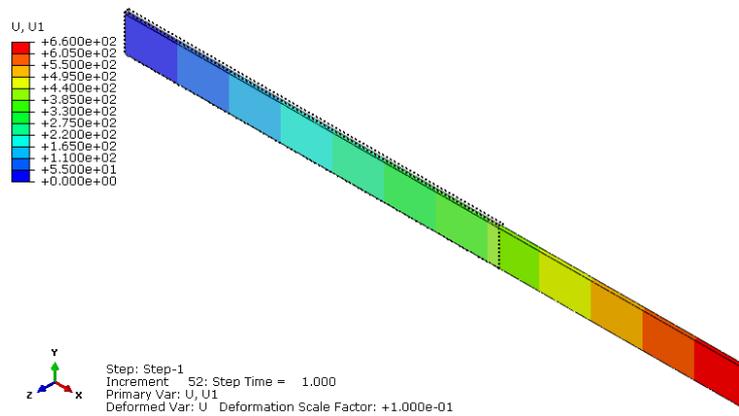


Figura 3 – Configuração deformada de tração biaxial simulada. A deformação é apresentada em escala de 10%. U1 é o deslocamento na direção do eixo X.

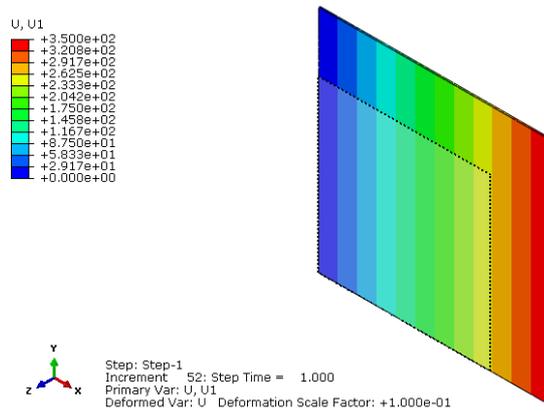
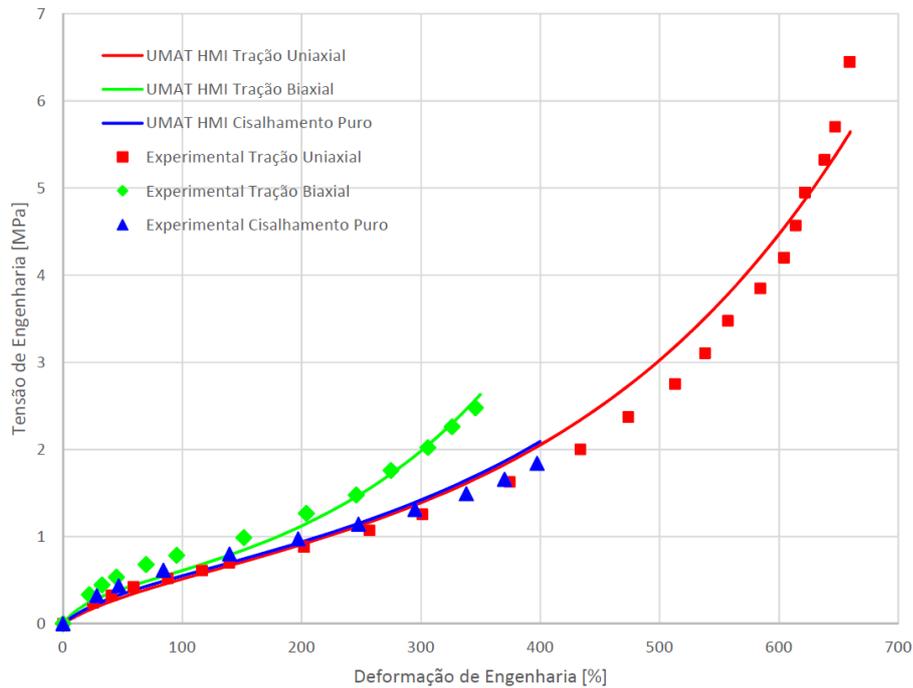


Figura 4 – Configuração deformada de cisalhamento puro simulada. A deformação é apresentada em escala de 100%. U2 é o deslocamento na direção do eixo Y.



As simulações realizadas para validar a implementação, em que fez-se uso dos parâmetros do conjunto da Tabela 1, obtiveram os resultados apresentados no gráfico da Figura 5, no qual são expostos também os dados experimentais, para comparação.

Figura 5 – Comparação das curvas de tensão-deformação dos resultados das simulações com os dados experimentais de Treloar.



Nos três casos simulados foram obtidos valores de tensão próximos aos dados experimentais. Os resultados encontrados apresentam grande similaridade com o ajuste de parâmetros, apresentado na Figura 6, Anexo I.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho fez-se uso de uma sub-rotina do tipo UMAT para implementar o modelo de Hoss-Marczak modificado no *software* comercial de elementos finitos Abaqus. As

simulações realizadas mostraram que a sub-rotina é capaz de prever o comportamento mecânico do material simulado com precisão razoavelmente boa.

Foram realizadas simulações com três casos de deformação homogênea indicados para materiais hiperelásticos, em que percebeu-se uma boa concordância dos resultados das simulações com os dados experimentais.

Há que se levar em conta que os resultados da implementação do modelo dependem dos parâmetros utilizados. De fato, ao comparar-se as curvas dos resultados obtidos frente aos dados experimentais, observa-se o mesmo comportamento das curvas de ajustes de parâmetros. Conclui-se com isso que a implementação reproduz com fidelidade o modelo constitutivo na sub-rotina, mas que os erros na obtenção dos parâmetros, pelo ajuste numérico, impedem a obtenção de resultados mais precisos.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Simulações de casos de deformação não homogênea
- Incorporação de efeito de anisotropia, tanto com o modelo nativo do Abaqus quanto através da própria sub-rotina UMAT
- Expandir o modelo UMAT para VUMAT a fim de simulação via métodos explícitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abaqus 6.14. Abaqus 6.14 User Subroutines Reference Guide, 2014. Disponível em: <<http://130.149.89.49:2080/v6.14/books/sub/default.htm>>
- Abaqus 6.14. Abaqus 6.14 Theory Guide, 2014. Disponível em: <<http://130.149.89.49:2080/v6.14/books/stm/default.htm>>
- Baaser, H.; Martin, R.; Neff, P. Inconsistency of uhyper and umat in Abaqus for compressible hyperelastic materials. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1708.09699v1>>
- Connolly, S.; Mackenzie, D.; Gorash, Y. Isotropic hyperelasticity in principal stretches: explicit elasticity tensors and numerical implementation. *Computational Mechanics*, 64(5), 1273-1288, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00466-019-01707-1>>
- Franus, A.; Kowalewski, Ł. An efficiency comparison of numerical implementation approaches of hyperelastic constitutive model in ABAQUS/Standard. *MATEC Web of Conferences*. 196. 01052, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/mateconf/201819601052>>
- Gazola, P. E. Implementação Numérica de um Modelo Constitutivo Hiperelástico. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/197459>>
- Gillani, A. Development of Material Model Subroutines for Linear and Nonlinear Response of Elastomers. *Electronic Thesis and Dissertation Repository*. 5837. 2018. Disponível em: <<https://ir.lib.uwo.ca/etd/5837>>
- Hoss, L. Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo. 315f. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/16310>>
- Marczak, R.; Gheller Jr, J.; Hoss, L. Caracterização de elastômeros para simulação numérica. Centro tecnológico de polímeros-SENAI, 2006.
- Nedjar, B.; Baaser, H.; Martin, R.; Neff, P. A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of elastic tubes. *Computational Mechanics*, Springer Verlag, pp 1-20, 2017. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01653147>>
- Stein, E.; Sagar, G. Convergence behavior of 3D finite elements for Neo-Hookean material. *Engineering Computations: Int J for Computer-Aided Engineering*. 25. 220-232. 2008. <<http://dx.doi.org/10.1108/02644400810857065>>
- Steinmann, P.; Hossain, M.; Possart, G. Hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and suitability for Treloar's data. *Archive of Applied Mechanics*, 82, 1183-1217. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00419-012-0610-z>>

Stumpf, F.T., Marczak, R.J. Assessment of non-conventional constraints imposed to a hyperelastic model. Proceedings of the XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE2018). Paris/Compiègne, 2018.

Stumpf, F.T., Marczak, R.J. A new hyperelastic model for rubber-like materials: analysis of restrictions and constitutive framework for Finite Element implementation. Mechanics of Materials. Submetido para publicação. 2019.

Suchocki, C. Finite element implementation of slightly compressible and incompressible first invariant-based hyperelasticity: Theory, coding, exemplary problems. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 55. 787. 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.15632%2Fjtam-pl.55.3.787>>

Treloar, L.R.G. Stress-Strain Data for Vulcanised Rubber under Various Types of Deformation. Transactions of the Faraday Society, 40, 59-70, 1944. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/tf9444000059>>

NOMENCLATURA

Letras do alfabeto latino

<i>B</i>	Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda
<i>c</i>	Tensor tangente (domínio espacial)
<i>c^s</i>	Módulo tangente deviatórico efetivo do material
<i>C</i>	Tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
<i>F</i>	Gradiente de deformação
<i>F_R</i>	Força de reação
<i>I</i>	Tensor identidade de 2ª ordem
<i>I_B, II_B, III_B</i>	Invariantes do tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda
<i>I_C, II_C, III_C</i>	Invariantes do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
<i>J</i>	Jacobiano
<i>l_{inicial}</i>	Comprimento inicial
<i>p</i>	Tensão de pressão
<i>s</i>	Tensão deviatórica (domínio espacial)
<i>S</i>	Tensão deviatórica (domínio material)
<i>u</i>	Deslocamento
<i>W</i>	Energia de deformação
<i>X</i>	Ponto material

Símbolos gregos

<i>δ_{ij}</i>	Delta de Kronecker
<i>ε</i>	Deformação de Engenharia
<i>K</i>	Módulo volumétrico
<i>K_e</i>	Módulo volumétrico efetivo
<i>σ</i>	Tensão de Cauchy
<i>φ</i>	Tensor de deformação

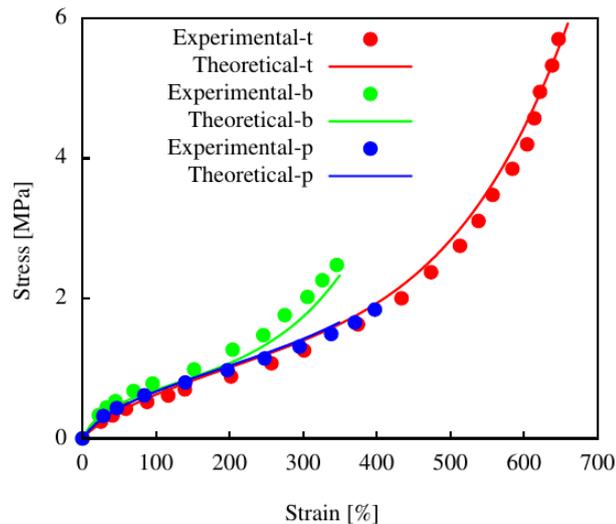
Outros símbolos

<i>C</i>	Tensor tangente (domínio material)
<i>I</i>	Tensor unitário de 4ª ordem diádico
<i>P</i>	Tensor de projeção de 4ª ordem

ANEXOS

ANEXO I – Ajuste numérico de parâmetros do modelo modificado de Hoss-Marczak aos dados experimentais de Treloar (1944), apresentado na Figura 6. (STUMPF & MARCZAK, 2019)

Figura 6 – Ajuste numérico do modelo aos dados experimentais de Treloar (1944) obtido por Stumpf & Marczak (2019) para tração uniaxial (t), tração biaxial (b) e cisalhamento puro (p). Deformação [%] no eixo horizontal e tensão [MPa] no eixo vertical.



APÊNDICES

APÊNDICE I – Código em linguagem Fortran 77 da sub-rotina UMAT para o modelo hiperelástico de Hoss-Marczak modificado

```

SUBROUTINE                                !DEFORMAÇÃO TANGENTE
UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,    !VARIÁVEIS LOCAIS
     RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN,

TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, MATERL, NDI, NSHR
, NTENS,

NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT,

DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, KSLAY, KSPT, KSTEP, KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

CHARACTER*8 MATERL33
DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV),

DDSDE(NTENS, NTENS), DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS),

STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS), DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)
,

TIME(2), PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3)
, DROT(3, 3)

!IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DE
HOSS-MARCZAK MODIFICADO

!NÃO DEVE SER USADO EM ELEMENTOS DE TENSÃO
NO PLANO, DEVIDO A FORMA
!COMO OS COMPONENTES SÃO PASSADOS ÀS
MATRIZES DE TENSÃO E DE

SIG(3, 3), S(3, 3), SA(3, 3), BBARM(3, 3), UNI2(3, 3), SIGV(
NTENS)

, CC(3, 3, 3, 3), CVOL(3, 3, 3, 3), UNI4(3, 3, 3, 3), CS(3, 3, 3,
3), BBBAR(3, 3),

TRCS(3, 3, 3, 3), CISO(3, 3, 3, 3), H1(3, 3, 3, 3), H2(3, 3, 3, 3)
, CC2(6, 6),
DISTGR(3, 3)

!PARÂMETROS MATERIAIS

C1=PROPS(1)
C2=PROPS(2)
C3=PROPS(3)
C4=PROPS(4)
C5=PROPS(5)
C6=PROPS(6)
XKAP=PROPS(7)

!JACOBIANO E TENSOR DE DISTORÇÃO

DET=DFGRD1(1, 1)*DFGRD1(2, 2)*DFGRD1(3, 3)
-DFGRD1(1, 2)*DFGRD1(2, 1)*DFGRD1(3, 3)
IF(NSHR.EQ.3) THEN

```

```

DET=DET+DFGRD1(1, 2)*DFGRD1(2,
3)*DFGRD1(3, 1)
+DFGRD1(1, 3)*DFGRD1(3,
2)*DFGRD1(2, 1)
-DFGRD1(1, 3)*DFGRD1(3,1)*DFGRD1(2,
2)
-DFGRD1(2, 3)*DFGRD1(3,
2)*DFGRD1(1, 1)
END IF
SCALE=DET**(-1.D0/3.D0)
DO K1=1, 3
DO K2=1, 3
DISTGR(K2, K1)=SCALE*DFGRD1(K2, K1)
END DO
END DO

!CÁLCULO DO B BARRA EM MATRIZ

DO I=1,3
DO J=1,3
BBARM(I,J)=0.D0
DO K=1,3
BBARM(I,J)=BBARM(I,J)+DISTGR(I,K)*DISTGR(J,K)
END DO
END DO
END DO

!CÁLCULO DO PRODUTO INTERNO BBAR.BBAR

DO I=1,3
DO J=1,3
BBBAR(I,J)=0.D0
DO K=1,3
BBBAR(I,J)=BBBAR(I,J)+BBARM(I,K)*BBARM(K,J)
END DO
END DO
END DO

!CÁLCULO DOS INVARIANTES

VI1BBAR=BBARM(1,1)+BBARM(2,2)+BBARM(3,3)

VI2BBAR=0.5D0*(VI1BBAR**2.D0-
(BBBAR(1,1)+BBBAR(2,2)+BBBAR(3,3)))

!CÁLCULO DOS GAMA BARRA: GAM1BAR E GAM2BAR

GAM1BAR=2.D0*(C1*DEXP(-C2*(VI1BBAR-3.D0))
+(C5/2.D0)*(1.D0+(C3/C4)*(VI1BBAR-
3.D0))**(C4-1.D0)
+VI1BBAR*(C6+C6*DLOG(VI2BBAR/3.D0)))

GAM2BAR=-2.D0*(C6+C6*DLOG(VI2BBAR/3.D0))

!TENSOR UNITÁRIO DE 2ª ORDEM

DO I=1,3
DO J=1,3
UNI2(I,J)=0.D0
UNI2(I,I)=1.D0
END DO
END DO

!CÁLCULO DO TENSOR DE TENSÃO DEVIATÓRICA S

DO I=1,3
DO J=1,3
SA(I,J)=GAM1BAR*BBARM(I,J)+GAM2BAR*BBBAR(I,J)
END DO
END DO

DO I=1,3
DO J=1,3
S(I,J)=(1.D0/DET)*(SA(I,J)-
(1.D0/3.D0)*(SA(1,1)+SA(2,2)+SA(3,3))*UNI2(I,J))

```

```

END DO
END DO

!CÁLCULO DO TENSOR DE TENSÃO DE CAUCHY SIG

DO I=1,3
DO J=1,3
SIG(I,J)=S(I,J)+XKAP*(DET-
1.D0)*UNI2(I,J)
END DO
END DO

!PASSAGEM DOS VALORES PARA O VETOR DE STRESS

SIGV(1)=SIG(1,1)
SIGV(2)=SIG(2,2)
SIGV(3)=SIG(3,3)
SIGV(4)=SIG(1,2)
SIGV(5)=SIG(1,3)
SIGV(6)=SIG(2,3)

DO I=1,NDI+NSHR
STRESS(I)=SIGV(I)
END DO

!TENSOR UNITÁRIO DE 4ª ORDEM DIÁDICO

DO I=1,3
DO J=1,3
DO K=1,3
DO L=1,3
UNI4(I,J,K,L)=0.D0
UNI4(K,K,L,L)=1.D0
END DO
END DO
END DO
END DO

!CÁLCULO DOS DELTAS BARRA: DEL1BAR, DEL2BAR,
DEL3BAR, DEL5BAR, DEL6BAR

DEL1BAR=4.D0*(-C1*C2*DEXP(-C2*(VI1BBAR-
3.D0))
+(((C5*C3)/(2.D0*C4))*(C4-1.D0))*
(1.D0+(C3/C4)*(VI1BBAR-3.D0))**(C4-2.D0)
+C6+C6*DLOG(VI2BBAR/3.D0)+VI1BBAR**2*C6/VI2BBAR)

DEL2BAR=-4.D0*(VI1BBAR*C6/VI2BBAR)

DEL3BAR=4.D0*C6/VI2BBAR

DEL5BAR=-4.D0*(C1*DEXP(-C2*(VI1BBAR-3.D0))
+(C5/2.D0)*(1+(C3/C4)*(VI1BBAR-
3.D0))**(C4-1)
+2.D0*VI1BBAR*(C6+C6*DLOG(VI2BBAR/3.D0))
+VI1BBAR*(-C1*C2*DEXP(-C2*(VI1BBAR-3.D0))
+((C5*C3*(C4-1.D0))/(2.D0*C4))*(1+(C3/C4)
*(VI1BBAR-3.D0))**(C4-
2.D0))+2.D0*VI1BBAR*C6)

DEL6BAR=4.D0*(2.D0*(2.D0*C6+C6*DLOG(VI2BBAR/3.D0))
)

!CÁLCULO DOS TERMOS H1 E H2

DO I=1,3
DO J=1,3
DO K=1,3
DO L=1,3
H1(I,J,K,L)=0.5D0*(UNI2(I,K)*BBARM(J,L)
+BBARM(I,K)*UNI2(J,L)
+UNI2(I,L)*BBARM(J,K)
+BBARM(I,L)*UNI2(J,K))
END DO
END DO
END DO

```

```

END DO
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
H2(I,J,K,L)=0.5D0*(BBARM(I,K)*BBARM(J,L)
                  +BBARM(I,L)*BBARM(J,K))
      DO M=1,3
H2(I,J,K,L)=H2(I,J,K,L)+0.5D0*(
UNI2(I,K)*BBARM(J,M)*BBARM(M,L)
+BBARM(I,M)*BBARM(M,K)*UNI2(J,L)
+UNI2(I,L)*BBARM(J,M)*BBARM(M,K)
+BBARM(I,M)*BBARM(M,L)*UNI2(J,K))
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
!CÁLCULO DA PARTE ISOMÉTRICA DO TENSOR
TANGENTE
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
CS(I,J,K,L)=(1.D0/DET)*(GAM1BAR*H1(I,J,K,L)
                       +GAM2BAR*H2(I,J,K,L)
+DEL1BAR*BBARM(I,J)*BBARM(K,L)
+DEL2BAR*(BBAR(I,J)*BBARM(K,L)+BBARM(I,J)*BBAR(K,L))
+DEL3BAR*BBAR(I,J)*BBAR(K,L)
+(DELSBAR/3.D0)*(UNI2(I,J)*BBARM(K,L)+BBARM(I,J)*UNI2(K,L))
+(DEL6BAR/3.D0)*(UNI2(I,J)*BBAR(K,L)+BBAR(I,J)*UNI2(K,L)))
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
        TRCS(I,J,K,L)=0.D0
      DO M=1,3
        DO N=1,3
TRCS(I,J,K,L)=TRCS(I,J,K,L)+
CS(I,J,M,N)*UNI4(M,N,K,L)
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
CISO(I,J,K,L)=CS(I,J,K,L)
-(1.D0/3.D0)*TRCS(I,J,K,L)
      END DO
    END DO
  END DO

```

```

END DO
END DO
END DO
!CÁLCULO DA PARTE VOLUMÉTRICA DO TENSOR
TANGENTE
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
CVOL(I,J,K,L)=XKAP*(2.D0*DET-1.D0)*UNI4(I,J,K,L)
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
!CÁLCULO DO TENSOR TANGENTE
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DO K=1,3
      DO L=1,3
CC(I,J,K,L)=CISO(I,J,K,L)+CVOL(I,J,K,L)
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
CC2(1,1)=CC(1,1,1,1)
CC2(1,2)=CC(1,1,2,2)
CC2(1,3)=CC(1,1,3,3)
CC2(1,4)=CC(1,1,1,2)
CC2(1,5)=CC(1,1,1,3)
CC2(1,6)=CC(1,1,2,3)
CC2(2,2)=CC(2,2,2,2)
CC2(2,3)=CC(2,2,3,3)
CC2(2,4)=CC(2,2,1,2)
CC2(2,5)=CC(2,2,1,3)
CC2(2,6)=CC(2,2,2,3)
CC2(3,3)=CC(3,3,3,3)
CC2(3,4)=CC(3,3,1,2)
CC2(3,5)=CC(3,3,1,3)
CC2(3,6)=CC(3,3,2,3)
CC2(4,4)=CC(1,2,1,2)
CC2(4,5)=CC(1,2,1,3)
CC2(4,6)=CC(1,2,2,3)
CC2(5,5)=CC(1,3,1,3)
CC2(5,6)=CC(1,3,2,3)
CC2(6,6)=CC(2,3,2,3)
DO I=2,6
  DO J=1,I-1
    CC2(I,J)=CC2(J,I)
  END DO
END DO
DO I=1,NDI+NSHR
  DO J=1,NDI+NSHR
    DDSDE(I,J)=CC2(I,J)
  END DO
END DO
RETURN
END

```