

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ANÁLISE NUMÉRICA DE TENSÕES RESIDUAIS EM UM MONOCRISTAL METÁLICO  
SUBMETIDO À FLEXÃO

por

Jennifer Pagnussatt Bringhenti

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2019

## DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Bringhenti, Jennifer Pagnussatt  
Análise numérica de tensões residuais em um  
monocristal metálico submetido à flexão / Jennifer  
Pagnussatt Bringhenti. -- 2019.  
24 f.  
Orientador: Rodrigo Rossi.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2019.

1. Plasticidade cristalina. 2. Tensões residuais.  
3. Monocristal. 4. CFC. 5. MEF. I. Rossi, Rodrigo,  
orient. II. Título.

Jennifer Pagnussatt Bringhenti

ANÁLISE NUMÉRICA DE TENSÕES RESIDUAIS EM UM MONOCRISTAL METÁLICO  
SUBMETIDO À FLEXÃO

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mario Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Rodrigo Rossi

Comissão de Avaliação:

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Rodrigo Rossi

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Felipe Tempel Stumpf

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Ignacio Iturrioz

Porto Alegre, dezembro de 2019

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Catarina e Gilberto pelo apoio, incentivo e dedicação ao longo de minha vida. Aos meus irmãos, Roberta e Junior, por relembrem a criança que existem em mim diariamente.

A minha prima Carol, por nunca brigar comigo nesses 7 anos de mesmo teto, sempre me educando, alimentando e apoiando, sem palavras para descrever o quão importante você é para mim.

Ao engenheiro mecânico Fabiano Bertoni, por me incentivar a escolher esse curso, por ser minha inspiração profissional, obrigada pelas oportunidades e apoio durante minha jornada.

Aos meus primos de Porto Alegre que estiveram comigo e me fizeram sentir protegida.

Aos amigos de 2013/1 e os que conheci recentemente, os quais fizeram que esse curso se tornasse mais leve.

Ao professor Rodrigo Rossi por aceitar a indicação do tema, pela preocupação, respeito e apoio durante todo esse trabalho.

A Eva Heripre e Jean-Hubert que depositaram confiança no meu trabalho nesse projeto de inovação desenvolvido no intercâmbio. Tatiane Furlan que me acompanhou nesse projeto e me fez sentir em casa quando estava a mais de 10.000 km de distância.

Aos amigos que fiz no intercâmbio, os quais acreditaram no meu potencial nos meus momentos de maior dúvida.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2019

ANÁLISE NUMÉRICA DE TENSÕES RESIDUAIS EM UM MONOCRISTAL  
METÁLICO SUBMETIDO À FLEXÃO

**Pagnussatt Bringhenti, Jennifer**

jenniferbringhenti@gmail.com

**Resumo.** A adaptação do método do furo para a medição de tensões residuais em microescala pode ser realizada com um microscópio eletrônico de varredura, equipado com uma coluna de feixe de íons focalizado via micro usinagem (MEV-FIB). Contudo tal técnica é inovadora e pouco explorada na literatura. Logo, este trabalho objetiva avaliar, complementarmente, via modelagem numérica, testes experimentais para obtenção das tensões residuais. A análise numérica de monocristal metálico, cúbico de face centrada, por modelagem de plasticidade cristalina foi conduzida com utilização de rotina de usuário em software de elemento finitos. Inicialmente, para calibração do modelo, foi analisado material isotrópico elástico perfeitamente plástico, sendo este submetido à flexão. Após a obtenção de resultados convergentes e satisfatórios, a plasticidade cristalina foi incorporada. Sequencialmente, a análise da influência da rede cristalina no monocristal foi conduzida através de sua rotação em sete diferentes orientações. Os resultados evidenciaram diferentes gradientes de tensão ao longo da altura do monocristal em cada orientação cristalina. Estas evidências demonstram os diferentes níveis de tensão necessários para ativar os sistemas de deslizamentos em cada orientação. Finalmente, o trabalho apresenta a importância de posicionar a rede cristalina para realização dos testes experimentais, visto a sensibilidade da variação das tensões residuais em relação à orientação.

**Palavras-chave:** plasticidade cristalina, tensões residuais, monocristal, CFC, MEF.

**Abstract.** The adaptation of the hole drilling method on the measurement of micro-scale residual stress can be done using a scanning electron microscope equipped with a focused ion beam by micro-machining (SEM-FIB). However, such technique is innovative and not yet explored deeply in the literature. This paper seeks to evaluate, using numerical modelling, experimental tests used due to obtain micro-scale residual stresses. The numerical analysis of the face-centered cubic single crystal metal was conducted using a user-material subroutine in a finite element software, applying a crystalline plasticity model. Initially, for model calibration purpose, a perfectly plastic isotropic material subjected to bending was evaluated. Later, obtaining converging and satisfactory results, the crystalline plasticity was incorporated. Then, it was conducted the analysis of the crystalline structure influence in the single crystal via its rotation in six different orientations. The results show different stress gradients along the single crystal height for each crystalline orientation, which demonstrates the different stress levels necessary to activate the slip systems in each orientation. Finally, the paper displays the importance of the correct positioning of the crystalline structure for experimental tests execution, due to the sensibility of the residual stress in respect to its orientation.

**Keywords:** crystal plasticity, residual stress, single crystal, FCC, FEM.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma cooperação internacional entre uma fabricante de pneu e o laboratório de Mecânica dos Solos Estruturas e Materiais foi formada com o objetivo de investigar os motivos de falhas dos fios metálicos utilizados nos pneus. Esses fios foram introduzidos na armadura estrutural de pneus com o objetivo de trazer resistência e rigidez em sua composição e eles são fabricados pelo processo de trefilagem, o qual induz geração de tensões residuais e, por consequência, influenciam seu desempenho. A fim de medir e analisar tensões residuais, considerando que o diâmetro desses fios é na ordem do micrometro, duas principais dificuldades são apresentadas: a primeira reside no gradiente de tensões entre a superfície do fio e seu centro; a segunda está na pequena escala da amostra.

Experimentalmente, Schajer e Whitehead (2018) apresentaram que existem vários métodos e técnicas para a medição de tensões residuais, os quais podem ser divididos em duas categorias: os métodos de relaxamento e os métodos difrativos. Os métodos de relaxamento envolvem a medição das deformações causadas pelo corte de alguma parte da amostra tensionada. Esse método inclui o método do furo, o qual consiste em usinar um pequeno furo na região a ser estudada, medindo-se a deformação causada pelo alívio de tensões gerado pós usinagem. Os métodos difrativos incluem os métodos de raios X, sincrotron e difração de nêutrons. Tais métodos envolvem a medição dos padrões de difração relacionados à radiação a partir de um material cristalino sob tensão. Essas medidas indicam o espaçamento da rede cristalina, a partir do qual as tensões residuais locais podem ser avaliadas.

Entre 2016 e 2017 no laboratório de Mecânica dos Solos Estruturas e Materiais,<sup>1</sup> foram realizados diferentes testes experimentais com fios para aplicações em reforços metálicos de pneus, sendo utilizado uma técnica inovadora para a medição de tensões residuais em microescala, a qual, simplificada, é uma adaptação em escala do método dos furos. Nesta técnica, utilizou-se um microscópio eletrônico de varredura equipado com uma coluna de feixe de íons focalizado (MEV-FIB), o qual permite a remoção de materiais em nano escala com o mínimo de perturbação. O funcionamento desse microscópio baseia-se na incidência de íons de gálio, Ga<sup>+</sup>, sobre o material a ser analisado, os quais se chocam contra sua superfície e provocam a formação de elétrons secundários, bem como a remoção de material na forma de átomos ou íons. Estes sinais podem ser, então, coletados para gerar uma imagem de superfície. Assim, imagens são registradas antes e após a usinagem do furo, e assim, por correlação de imagem digital, se pode determinar o campo de deformação e, por consequência, as tensões residuais.

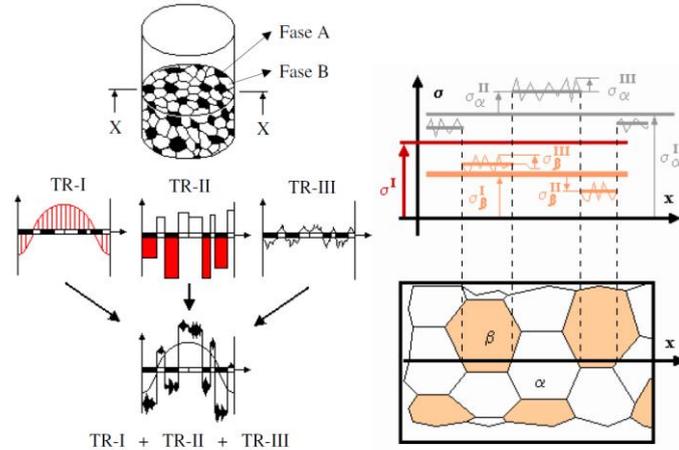
Durante a execução dos testes experimentais, se apresentaram uma série de dificuldades em virtude do tamanho do furo estar na ordem de grandeza do tamanho do grão da estrutura cristalina, adicionalmente as tensões residuais apresentam variações representativas nessa escala de observação.

Segundo Lu (1996), tensões residuais podem ser classificadas em três tipos, conforme a escala em que elas podem ser observadas: tipo I (tensões residuais macroscópicas) se distribuem em larga escala, se equilibrando por todo o componente; tipo II e III (tensões residuais microscópicas) se distribuem em escala reduzida. A tipo II, a qual compreende a distância de um grão, ou parte dele, é originada pela heterogeneidade e a anisotropia de cada cristal ou grão de um material policristalino. A tipo III se apresenta na escala atômica, relativas aos diferentes tipos de defeitos cristalinos. A Fig.1 mostra, esquematicamente, as três escalas de tensões residuais num material policristalino com as fases  $\alpha$  e  $\beta$ .

---

<sup>1</sup> Período de realização do programa de duplo diplomação da autora na École Centrale Paris, França.

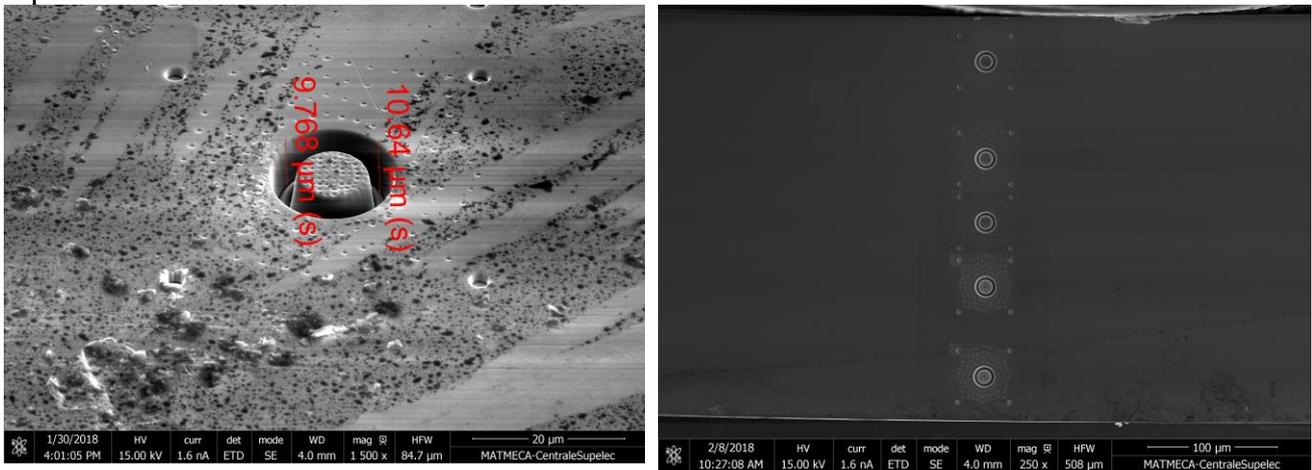
Figura 1 – Classificação das tensões residuais e sua ordem de grandeza.



Fonte: Rosendo (2005).

Para eliminar o problema da variação das medidas de tensões residuais na escala do tamanho do grão, foram realizadas medições de tensões em um material amorfo (vidro metálico), o qual é caracterizado pela ausência de um padrão de cristalização, submetido à flexão. A Fig. 2(a) expõe a amostra após a usinagem de um anel com dimensões aproximadas de 3 $\mu$ m de diâmetro interno, 5 $\mu$ m de diâmetro externo e profundidade de 10 $\mu$ m. Foram realizadas cinco usinagens ao longo da espessura de uma amostra flexionada, conforme Fig. 2(b). Após a realização dos testes experimentais, foram adquiridos resultados satisfatórios quando comparados à solução analítica de viga em flexão e valores obtidos experimentalmente.

Figura 2 – (a) Usinagem do anel pelo método do furo; (b) Usinagem de cinco anéis ao longo de toda espessura da amostra flexionada.



(a)

(b)

Fonte: autora.

Uma primeira análise numérica deste problema é o objetivo principal deste trabalho, onde a variação das orientações da rede cristalina é verificada em um monocristal. Foi proposto uma análise numérica de um monocristal metálico Cúbico de Face Centrada (CFC) via modelagem de plasticidade cristalina usando o Método de Elementos Finitos (MEF). Embora, o tema não esteja compreendido dentro da grade curricular do curso de graduação de Engenharia Mecânica, são apresentados aqui alguns conceitos sobre os movimentos dos planos cristalográficos, especialmente quando submetidos a solicitações homogêneas e não homogêneas (flexão) de tensão e deformação.

Complementarmente, este trabalho também tem como objetivo o estudo e a análise de tensões residuais em um material isotrópico, considerando um comportamento elástico perfeitamente plástico em flexão, bem como uma comparação entre solução analítica e solução numérica para um modelo de viga em estado plano de tensões, utilizando o método dos elementos finitos.

Para realizar esta análise de plasticidade cristalina utilizou-se uma rotina de usuário (UMAT) desenvolvida por Huang (1991) e modificada por Kysar e Hall (1997) incorporando-a no software comercial de Elementos Finitos Abaqus<sup>®</sup>. Esta rotina é baseada nos trabalhos de Asaro e Rice (1977) e Asaro (1983), para monocristais dúcteis a referência é o trabalho de Peirce et al. (1982). Atualmente vários trabalhos têm sido desenvolvidos nesta área, entre os quais pode-se citar aqueles do autor Dierk Raabe (2001, 2010).

## 2. FUNDAMENTAÇÃO

### 2.1. Estruturas cristalinas dos sólidos

Materiais policristalinos são compostos por um conjunto de monocristais (grãos). Esses pequenos cristais se formam em várias direções e, para um corpo com número suficiente de grão, usualmente são tratados com orientações cristalográficas aleatórias. Ademais, na região onde dois grãos se encontram, existem desalinhamentos, chamados de contornos de grão. Cada monocristal é um sólido cristalino, no qual todas as células unitárias (CCC, CFC, etc) se interligam da mesma maneira e possuem a mesma orientação. Possuem perfeito arranjo, periódico e repetido, dos átomos ao longo de toda a amostra, Callister (1940). Devido as propriedades físicas dos monocristais dependerem da direção cristalográfica, eles são considerados materiais anisotrópicos. Em contrapartida, para muitos materiais policristalinos, mesmos sendo formados por vários grãos anisotrópicos, o agregado se comporta como um material isotrópico.

Em virtude da importância de definir os fenômenos dos cristais, Callister (1940) apresenta os índices de Miller. Eles são utilizados para especificar uma determinada posição do arranjo atômico do cristal ou definir uma direção ou plano cristalográfico de átomos. Os índices de Miller de um *plano* cristalográfico ou de uma *direção* cristalográfica podem ser descritos através de uma tripla de índices:  $(uvw)$  e  $[uvw]$ , respectivamente. Todos os planos que possuem o mesmo empacotamento atômico, ou seja, que são cristalograficamente equivalentes são considerados uma família de planos, representados pela notação  $\{uvw\}$ , do mesmo modo que uma família de direções utiliza-se  $\langle uvw \rangle$ .

Dieter (1976) afirma que devido à existência de defeitos, a estrutura de cristais reais destoa-se das redes com periodicidade perfeita. Defeitos de rede são desvios à periodicidade de um arranjo atômico. As discordâncias são um tipo de defeito linear, no qual diversos átomos estão desalinhados e conseqüentemente provocam uma distorção na estrutura cristalina. O fenômeno de deformação plástica e endurecimento dos metais é fundamentado na movimentação e posicionamento das discordâncias. A movimentação das discordâncias se dá, preferencialmente, através de direções e planos específicos, conforme maior densidade atômica. Essa combinação de planos e direção é chamada de sistema de deslizamento.

### 2.2. Escorregamento em monocristais - Lei de Schmid

O fenômeno do escorregamento pode ser explicado através dos monocristais, seguido pela extrapolação para materiais policristalinos. Quando aplicada uma força uniaxial em um monocristal, a qual se traduz em uma tensão de tração ou compressão, por efeito do sistema de deslizamento, haverá componentes de cisalhamento em todas as direções, com exceção das paralelas e perpendiculares à direção de tensão.

Esses componentes são denominados tensões cisalhantes rebatidas ou resolvidas,  $\tau_R$ , sua magnitude não depende somente da tensão aplicada, mas também da orientação do plano de

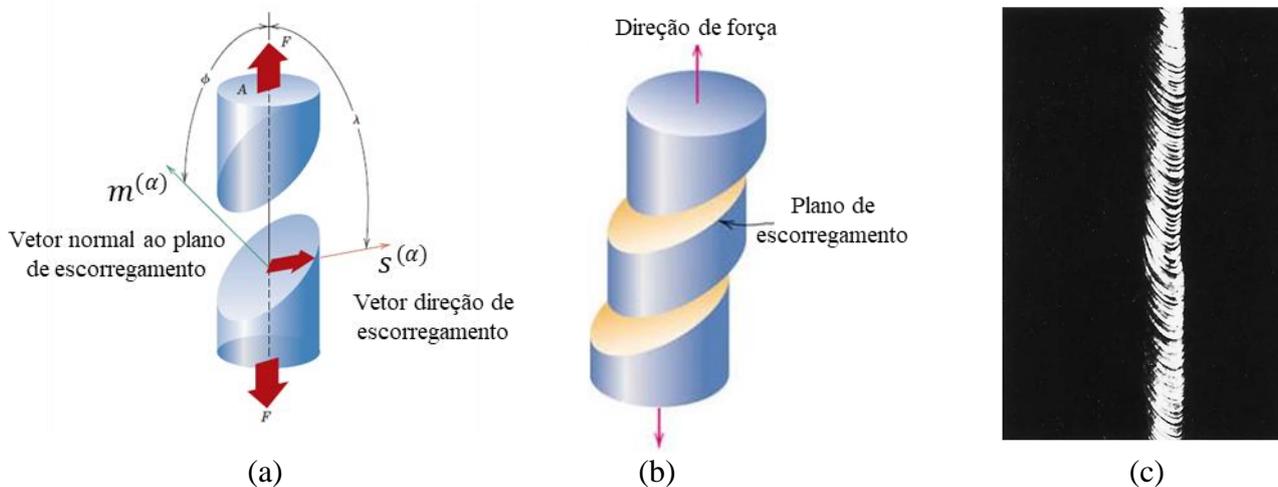
deslizamento, representada pelo vetor unitário  $m^{(\alpha)}$  e a direção de deslizamento, representada pelo vetor unitário  $s^{(\alpha)}$ . A dupla  $m^{(\alpha)}$  e  $s^{(\alpha)}$  compõem, portanto, um sistema de deslizamento  $\alpha$ . Esses parâmetros também podem ser definidos pelos ângulos  $\phi$  e  $\lambda$ , veja Figura 3. O ângulo entre a direção de deslizamento e a tensão aplicada é  $\lambda$ , ao passo que  $\phi$  é o ângulo entre a normal do plano de deslizamento e a tensão aplicada. Posto isso, apresenta-se a Eq. (1), conhecida como lei de Schmid. A Fig. 3(a) mostra essas relações geométricas utilizadas para o cálculo da tensão de cisalhamento rebatida.

$$\tau_R = \sigma \cos \phi \cos \lambda \quad (1)$$

Um monocristal possui diversos sistemas de deslizamento. Aquele exposto à maior tensão de cisalhamento rebatida será o primeiro a escoar, entretanto, podem existir mais de um sistema ativo. A deformação plástica começa a ocorrer quando a tensão cisalhante rebatida atingir um valor crítico, denominada tensão cisalhante rebatida crítica. Com o aumento da tensão, outros sistemas de deslizamento entram em ação.

Um monocristal submetido a tração terá suas deformações como representado na Fig. 3(b), no qual cada degrau resulta do movimento de muitas discordâncias ao longo do mesmo plano de deslizamento. Sobre a superfícies de uma amostra monocristalina polida, esses degraus aparecem como linhas, chamadas de linhas de escorregamento. Essas marcas de escorregamento são mostradas para um monocristal de Zinco, o qual foi deformado plasticamente, como mostrado na Fig. 3(c).

Figura 3 – (a) Relações geométricas utilizadas para o cálculo da tensão de cisalhamento rebatida; (b) Escorregamento macroscópico de um material; (c) Escorregamento em um monocristal de zinco.



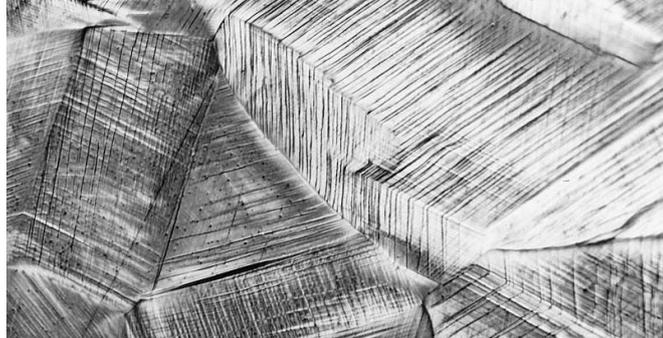
Fonte: adaptado de Callister (1940).

### 2.3. Escorregamento em policristais

Segundo Callister (1940), em virtude das diversas orientações cristalográficas em todos os grãos, a direção do deslizamento varia de um grão para outro. Já quando metais policristalinos são deformados, a deformação plástica em cada grão ocorre em um sistema de deslizamento distinto, o qual possui a orientação mais favorável. A Fig. 4 exemplifica as linhas de escorregamento em uma amostra de cobre polido que foi deformada plasticamente. Conforme evidenciado, pelo menos dois conjuntos de linhas paralelas se interceptam e, por consequência se tem dois sistemas de deslizamento que operam na maior parte dos grãos. A integridade mecânica e a coesão são mantidas

ao longo dos contornos de grão durante a deformação, exigindo assim um nível mais elevado de tensão aplicada para iniciar e propagar o escoamento.

Figura 4 –Linhas de escorregamento de um material policristalino que foi deformado.



Fonte: Callister (1940).

#### 2.4. Aumento de resistência em metais monocristalinos

A habilidade de um metal se deformar plasticamente depende, basicamente, da movimentação de suas discordâncias. Quanto maior for a restrição ao movimento das discordâncias, maior será a resistência mecânica de um material. Segundo Callister (1940), o encruamento é o fenômeno que torna mais duro e resistente um metal quando deformado plasticamente, fenômeno que pode ser explicado pelo aumento da densidade das discordâncias com a deformação ou o trabalho a frio.

Os experimentos de Taylor e Elam, publicados em 1923 e 1925, analisaram dois tipos de endurecimento em um monocristal. O auto-endurecimento, provido do escorregamento nos sistemas de deslizamentos e o endurecimento latente, sendo um sistema que endurece os outros sistemas cristalográficos mesmo que não estejam ativos. Também foi observado que, geralmente, o endurecimento latente é maior que o auto-endurecimento. Essas observações experimentais podem ser descritas através da Eq. 2, a qual admite-se que o endurecimento cristalino dependa dos deslizamentos através do tensor de endurecimento.

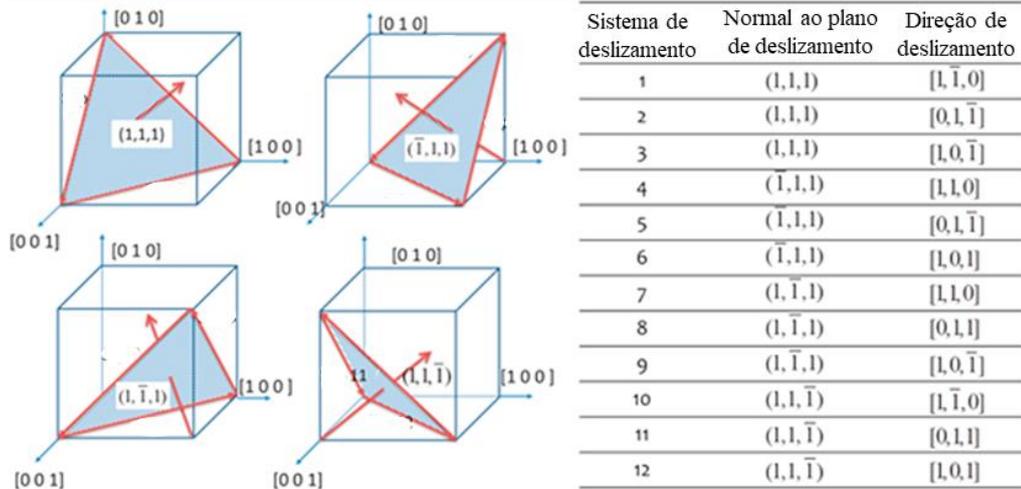
$$d\tau_c^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} d\gamma^{(\beta)} \quad (2)$$

com  $\tau_c^{(\alpha)}$  é a tensão cisalhante rebatida crítica no sistema  $\alpha$ ,  $\gamma^{(\beta)}$  o deslizamento no sistema  $\beta$  e  $h_{\alpha\beta}$  é o tensor de endurecimento. Os termos associados a  $h_{\alpha\alpha}$  representam o auto endurecimento e  $h_{\alpha\beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) representam o endurecimento latente.

#### 2.5. Rede cristalina cúbica de face centrada

Neste trabalho foi considerado o comportamento do cobre, um sólido metálico que se cristaliza em uma estrutura cúbica de face centrada (CFC). Nesse tipo de estrutura, há um átomo em cada vértice da célula cúbica e um átomo na posição intermediária de cada face da célula. Sabe-se que devido a simetria, esta estrutura possui 12 sistemas de deslizamento cristalinos independentes formados pela combinação da família de planos  $\{111\}$  (4 planos independentes) com a família de direções  $\langle 110 \rangle$  (3 direções independentes), conforme mostra a Fig. 5.

Figura 5 - Estrutura cristalina Cúbica de Face Centrada (CFC) e seus sistemas de deslizamentos.



Fonte: adaptado Guan et al. (2017).

## 2.6. Mecânica do contínuo

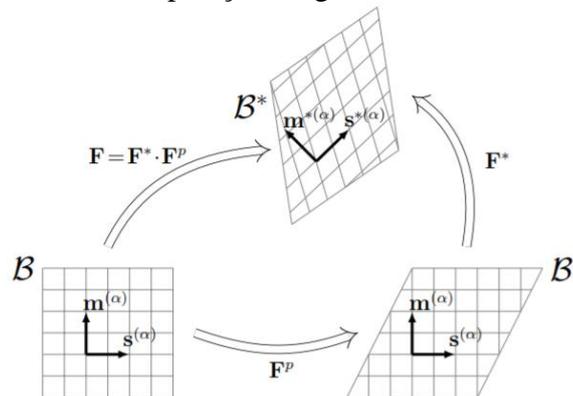
O comportamento mecânico meso-macroscópico de materiais é classicamente descrito através da mecânica dos meios contínuos. Considerando um sólido que está sujeito a um processo de deformações, relaciona-se o vetor infinitesimal ( $d\mathbf{X}$ ) da configuração inicial não deformada com o vetor infinitesimal ( $d\mathbf{x}$ ) da configuração subsequente deformada, através da transformação mostrada na Eq.(3), na qual  $\mathbf{F}$  é o gradiente de deformação.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (3)$$

Considerando que a deformação plástica em monocristais é relacionada aos movimentos de discordâncias em seu interior, Asaro e Rice (1977) propuseram uma formulação para monocristais baseada na decomposição do gradiente de deformações em duas parcelas,  $\mathbf{F}^p$  que descreve deformações plásticas devido ao movimento de discordâncias e  $\mathbf{F}^*$  que descreve deformações elásticas e rotações da rede cristalina devido às distorções na estrutura do cristal, conforme exposto na Eq.(4) e Fig.6.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^p \quad (4)$$

Figura 6 – Decomposição do gradiente de deformações.



Fonte: Fornel (2018).

Em uma abordagem de pequenas deformações, situações em que as distorções de rede podem ser negligenciadas e/ou simplificadas, o fluxo de deformação plástica é relacionado com os deslizamentos nos sistemas cristalográficos  $\alpha$  pela Eq. (5).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{(\alpha)} P_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}, \quad P_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(m_i^{(\alpha)}s_j^{(\alpha)} + m_j^{(\alpha)}s_i^{(\alpha)}) \quad (5)$$

onde  $\gamma^{(\alpha)}$  representa o deslizamento plástico no sistema  $\alpha$  e  $P_{ij}^{(\alpha)}$  o tensor de orientação de Schmid para o sistema  $\alpha$ . O tensor de orientação de Schmid possibilita calcular a tensão  $\tau^{(\alpha)}$  resolvida no sistema cristalino  $\alpha$  através da relação mostrada na Eq. (6).

$$\tau^{(\alpha)} = \sigma_{ij} P_{ij}^{(\alpha)} \quad (6)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões macroscópicas.

Reescrevendo a equação utilizada por Peirce et al. (1983) que calcula a taxa de deslizamento de cada sistema, a qual incorpora os efeitos viscosos, tem-se a Eq. (7) que segue uma lei de potência. Embora essa lei tenha sido apresentada na década de 80, ela ainda tem sido utilizada por muitos autores, como por exemplo Fornel (2018).

$$|\tau^{(\alpha)}| = \tau_c^{(\alpha)} \left[ \frac{|\dot{\gamma}^{(\alpha)}|}{\dot{a}} \right]^m \quad (7)$$

onde  $1/m$  é a taxa de sensibilidade do material e  $\dot{a}$  é uma taxa de referência para cada sistema de deslizamento. Tanto a sensibilidade do material quanto a taxa de referência são parâmetros do material a serem informados como dados de entrada. Para a solução ser próxima ao problema elástico perfeitamente plástico sem efeitos viscosos, duas condições são imediatamente identificadas: Ora  $m = 0$ ,  $|\tau^{(\alpha)}| = \tau_c^{(\alpha)}$ , ora  $\dot{a} = |\dot{\gamma}^{(\alpha)}|$ . Essa última só é aplicável quando um corpo desenvolve deformações homogêneas de mesma magnitude de  $\dot{a}$ , o que é possível de realizar apenas em casos muito específicos. Em casos mais gerais, tal como a análise de flexão de uma viga que está sendo proposta neste trabalho, esta última condição não pode ser aplicada.

## 2.7. Processo de deformação

Em referência ao critério de Schmid, no qual  $\tau^{(\alpha)}$  e  $\tau_c^{(\alpha)}$  representam, respectivamente, a tensão cisalhante rebatida e a tensão cisalhante rebatida crítica para um conjunto de sistemas de deslizamento, é possível descrever o processo de deformação dos sistemas de deslizamento segundo as seguintes condições:  $\tau^{(\alpha)} < \tau_c^{(\alpha)}$ , não há deformação plástica e esses sistemas são chamados de não-críticos. Ao passo que,  $\tau^{(\alpha)} = \tau_c^{(\alpha)}$ , pode haver deformação plástica e são chamados de potencialmente ativos. Nos conjuntos de sistemas potencialmente ativos, tem-se diferentes comportamentos para materiais com e sem endurecimento. Segue a análise com o uso da Eq. (2).

- a) Material sem endurecimento: neste tipo de material  $\tau_c^{(\alpha)}$  não aumenta durante todo o processo de deformação e, portanto, todo sistema potencialmente ativo está ativo:

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0 \text{ e } \tau^{(\alpha)} = \tau_c^{(\alpha)} \quad \textit{todo sistemas estão ativos.}$$

- b) Materiais com endurecimento: neste tipo de material  $\tau_c^{(\alpha)}$  aumenta durante todo o processo de deformação, portanto os parâmetros que vão influenciar o deslizamento contribuindo para a deformação plástica são as taxas:

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0, \text{ se } \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_c^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad \textit{para sistemas ativos.}$$

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0, \text{ se } \dot{\tau}^{(\alpha)} \leq \dot{\tau}_c^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad \text{para sistemas inativos.}$$

Entretanto, deve-se ter em mente que os efeitos viscosos, dados pela Eq. (7), estarão presentes independentemente do endurecimento estar ativo ou não, sendo minimizados para as condições de  $m$  e  $\dot{a}$  descritas anteriormente.

### 2.7.1 O módulo de endurecimento

Diversos autores propuseram formas para o módulo de endurecimento, de maneira que as observações experimentais fossem satisfeitas. A regra estabelecida por Hutchinson (1970) e Asaro (1979) é mostrada na Eq. (8).

$$h_{\alpha\beta} = q H(\gamma) + (1 - q) H(\gamma) \delta_{\alpha\beta} \quad (8)$$

onde  $H(\gamma)$  é a função de auto-endurecimento dependente do deslizamento,  $q$  é o endurecimento latente e  $\delta_{\alpha\beta}$  é o delta de Kroenecker. O deslizamento  $\gamma$  no caso de múltiplos sistemas ativos é determinado como a soma dos deslizamentos nos sistemas  $\alpha$ , conforme mostra a Eq. (9).

$$\gamma = \sum_{(\alpha)} |\gamma^{(\alpha)}| \quad (9)$$

A relação entre a função de auto-endurecimento e o deslizamento foi dada por Peirce et al. (1982), mostrada nas Eq(10) e Eq(11), respectivamente, o endurecimento hiperbólico e o endurecimento de potência.

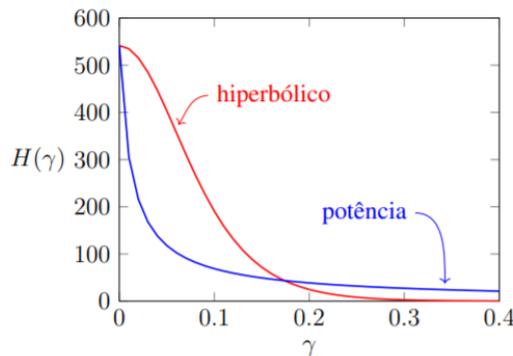
$$H(\gamma) = H_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{H_0 \gamma}{\tau_s} - \tau_0 \right) \quad (10)$$

$$H(\gamma) = H_0 \left( \frac{H_0 \gamma}{n \tau_0} + 1 \right)^{n-1} \quad (11)$$

no qual  $n$  é o expoente de endurecimento,  $\tau_0$  é a tensão rebatida crítica inicial e  $H_0$  é o endurecimento inicial.

O endurecimento hiperbólico é utilizado para materiais pouco endurecíveis visto que é uma função que tende rapidamente a zero, ao passo que, o endurecimento hiperbólico é mais adequado a cristais puros. A Fig. 7 mostra o comportamento entre a função de auto-endurecimento e o deslizamento para os dois tipos de endurecimento apresentados.

Figura 7: Variação de  $H(\gamma)$  com  $\gamma$  para endurecimentos hiperbólico e de potência.



Fonte: Fornel (2018).

### 3. METODOLOGIA

A metodologia do trabalho pode ser dividida em duas principais etapas de análise. Primeiramente, a fim de elaborar uma análise inicial do problema, foi realizado o estudo analítico e numérico de tensões residuais em um material isotrópico, considerando um comportamento elástico perfeitamente plástico em flexão. Após a obtenção desses resultados utilizou-se do mesmo modelo, com exceção comportamento do material, para a análise numérica de um monocristal metálico CFC submetido a flexão via uma modelagem de plasticidades de cristais.

Para a análise numérica das tensões residuais da viga/monocristal submetida a flexão, utilizou-se o método dos elementos finitos, sendo o cobre o material metálico de estudo. Este material foi escolhido devido à disponibilidade de calibração das constantes materiais na literatura.

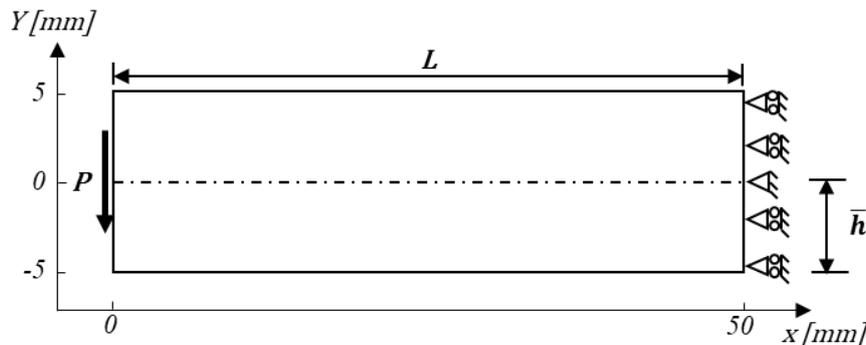
Uma viga/monocristal com altura 10mm e comprimento 50mm foi utilizada nos estudos. As condições de contorno foram baseadas na solução de viga em balanço para o estado plano de tensões. Segundo Timoshenko e Goodier (1951), a solução da elasticidade para o campo de tensões para esse problema é dado pelas Eq. (12).

$$T_{11}(x,y) = -\frac{Pxy}{I} \quad T_{22}(x,y) = 0 \quad T_{12}(x,y) = -\frac{P}{2I}(\bar{h}^2 - y^2) \quad (12)$$

onde  $P$  é a carga aplicada na extremidade da viga,  $\bar{h}$  é a meia altura da seção transversal, e  $I$  é o momento de inercia de área da seção transversal da viga, Fig. 8.

Para calcular o valor do carregamento a ser aplicado na simulação numérica, foi considerado o vetor tração de Cauchy, *Cauchy traction vector*,  $\mathbf{t}$  atuando em uma superfície imaginária perpendicular a  $\mathbf{n} = [-1 \ 0]^T$  dado pela equação  $\mathbf{t}(0,y) = [0 \ -T_{12}]^T$ . Os carregamentos e condições inicial são mostrados na Fig. 8.

Figura 8 – Problema da viga m balanço.



Fonte: adaptado de Timoshenko e Goodier (1951).

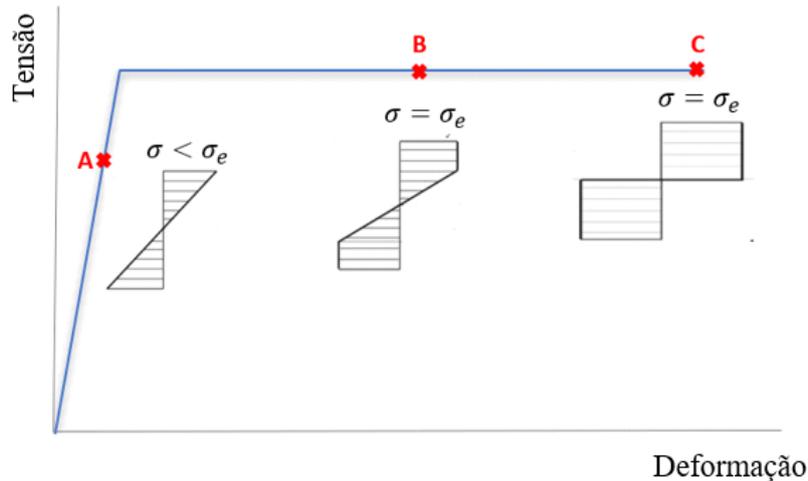
O estudo de convergência de malha foi realizado para o material isotrópico, foram utilizados 6 tamanhos de malhas com elementos bilineares de 4 nós (elemento CPS4I no Abaqus®), foi considerado a hipótese dos elementos serem de modos incompatível, estratégia esta necessária para evitar o efeito de travamento volumétrico. O tamanho de malha foi definido a partir da quantidade de elementos na altura da viga. A malha final escolhida teve 24 nós na altura, quantidade de elementos suficientes para representar devidamente o comportamento. A comparação do resultado experimental e analítico para as diferentes malhas é mostrada no Apêndice A.

#### 3.1 Modelo isotrópico considerando um material elástico perfeitamente plástico em flexão

O presente estudo considerou as seguintes propriedades mecânicas para o cobre: módulo de elasticidade 129,65GPa, coeficiente de Poisson 0,34 e tensão de escoamento 121,60MPa com um

comportamento elástico perfeitamente plástico. De acordo com Popov (1968), uma viga solicitada por um momento puro possui três estágios de carregamento, conforme apresentados na Fig.9. Primeiro, existe a faixa de resposta elástica linear. Em sequência, a faixa de fluxo plástico, onde uma parte da estrutura se plastifica, enquanto o restante continua a se deformar elasticamente. Finalmente, se tem a carga limite, na qual a estrutura continua a escoar sem aumento de carga. Nesse estágio, a deformação plástica da estrutura torna-se ilimitada.

Figura 9 – Estágios de carregamento para uma viga solicitada por um momento puro.



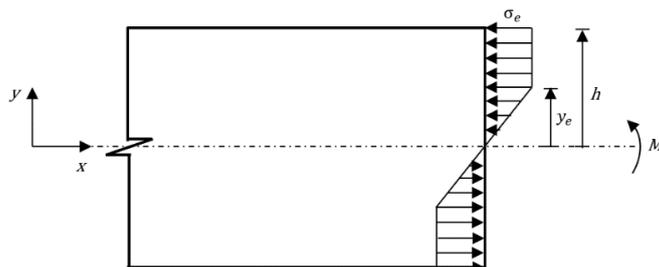
Fonte: adaptado de Popov (1968).

A metodologia utilizada para a solução analítica do problema de uma viga em flexão está sujeita as seguintes hipóteses:

- I. O material é homogêneo e isotrópico;
- II. O material tem um comportamento mecânico do tipo elástico perfeitamente plástico com uma tensão limite de elasticidade igual na tração e compressão;
- III. As seções inicialmente planas permanecem planas durante e após a deformação e convergem para o centro de curvatura;
- IV. Os princípios de Saint-Venant e o processo de superposição no descarregamento, pois é considerado que não há plastificação no processo de descarregamento.

Segundo Rodrigues e Martins (2005) em uma viga de espessura  $b$  e altura  $h$ , solicitada por um momento puro  $M$ , considerando as tensões segundo  $y$  desprezíveis e a linha média coincidente com a linha neutra, conforme mostra a Fig. 10, quando ocorre o aumento do momento fletor para além do valor correspondente ao limite elástico é verificado que as fibras mais exteriores atingem a tensão limite de elasticidade, aumentando progressivamente a zona em deformação plástica em direção ao núcleo, o qual vai permanecendo em domínio elástico. A distribuição de tensões resultantes deste carregamento encontra-se representada na Fig. 10 e Eq. (13).

Figura 10 - Distribuição das tensões para flexão pura de uma viga com um momento elasto-plástico.



$$\sigma^{ep}(y) = \begin{cases} -\sigma_e, & y > y_e \\ -\sigma_e \frac{y}{|y_e|}, & -y_e \leq y \leq y_e \\ \sigma_e, & y < -y_e \end{cases} \quad (13)$$

onde  $y$  é a distância da fibra em análise à linha neutra,  $y_e$  é a distância em que as fibras mais exteriores atingem a tensão limite de elasticidade em relação à linha neutra e  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento.

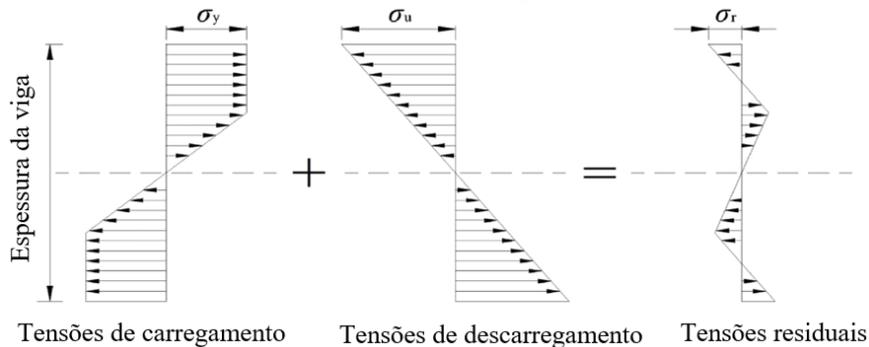
O momento fletor elasto-plástico pode ser calculado através da equação de equilíbrio representado na Eq. (14) para uma viga com secção transversal retangular.

$$M = \sigma_e b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} y_e^2 \right) \quad (14)$$

Ao remover o carregamento externo, surge o aparecimento do fenômeno de recuperação elástica. O estudo dos mecanismos de descarga pode ser efetuado recorrendo ao princípio da sobreposição, aplicando no final do carregamento um momento fletor de igual intensidade ao momento de carga, mas com o sentido contrário para restituir as condições de equilíbrio, conforme mostra a Fig. 11. O material durante a fase de descarga reentra em domínio elástico.

A condição de descarregamento é tal que: produz esforços internos (de força e momento) nulos na seção. As tensões residuais resultantes deste descarregamento encontram-se representada na Eq. (15).

Figura 11 – Tensões residuais devidas ao descarregamento do momento elasto-plástico.



$$\sigma^r(y) = \begin{cases} -\sigma_e + \frac{My}{I}, & y > y_e \\ -\sigma_e \frac{y}{|y_e|} + \frac{My}{I}, & -y_e \leq y \leq y_e \\ \sigma_e + \frac{My}{I}, & y < -y_e \end{cases} \quad (15)$$

### 3.2 Modelo cristalino

O software de elementos finitos utilizado Abaqus<sup>®</sup> permite a especificação de sub-rotinas de material definida por usuário, denominadas UMAT, para reproduzir o comportamento de plasticidade no monocristal através de equações constitutivas. Esta rotina de usuário foi escrita em linguagem Fortran, conforme apresentada por Huang (1991), posteriormente modificada por Kysar et al. (1997).

As duas principais funções da sub-rotina são o cálculo das tensões ao final de cada iteração, utilizando a forma incremental das equações constitutivas do material e definição da matriz Jacobiana para as equações de equilíbrio. A estrutura cinemática da UMAT segue as definições e trabalhos apresentados na Seção 2 e as seguintes considerações: a deformação plástica depende apenas do deslizamento cristalográfico; não são considerados os mecanismos de deformação por difusão e maclagem; a tensão de Schmid, ou tensão de cisalhamento resolvida para um sistema de deslizamento é assumida como a força motriz do deslizamento.

Os dados de entrada da UMAT são 160 parâmetros distribuídos em 7 grupos de dados de entrada distintos:

I. Modulo elástico dos cristais cúbicos;

O tensor de elasticidade para monocristais resulta em somente 3 componentes independentes:  $C_{1111}$ ,  $C_{1122}$  e  $C_{1212}$ . Baseado no trabalho de Ledbetter (1984) onde foi estudado os modelos de constantes elásticas em monocristal, parâmetros para o Cobre foram encontrados, sendo eles: 169,90GPa, 122,40GPa e 75,40GPa, respectivamente;

II. Sistemas de deslizamento;

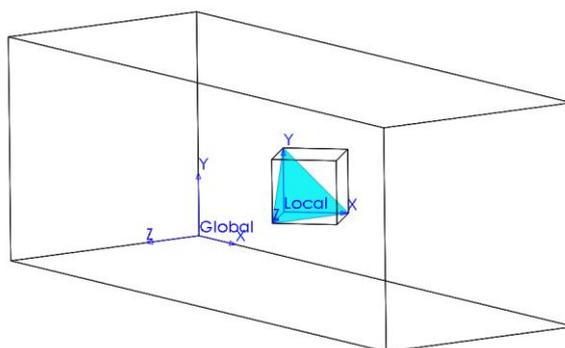
São definidos o número de conjuntos de sistemas de deslizamento potencialmente ativos, o vetor normal ao plano de deslizamento e a direção de deslizamento. Para o sistema cristalino utilizado, CFC, foi definido um conjunto de sistema de deslizamento formados pela combinação da família de planos  $\{111\}$  com a família de direções  $\langle 110 \rangle$ .

III. Orientação inicial da rede cristalina em relação ao sistema global do monocristal;

A orientação da estrutura cristalina no sistema global, ou seja, o posicionamento da rede cristalina no interior do monocristal é determinado por dois vetores do sistema local com suas respectivas coordenadas no sistema global.

A primeira orientação definida foram os vetores  $[-1\ 0\ 1]^T$  e  $[0\ 1\ 0]^T$  do sistema local para os respectivos vetores  $[0\ 0\ 1]^T$  e  $[0\ 1\ 0]^T$  do sistema global. A Fig. 12 mostra o posicionamento desses vetores.

Figura 12 – Orientações das coordenadas locais (rede cristalina) em relação as coordenadas globais (monocristal).



A primeira orientação foi definida como referência e a partir dela o vetor  $[0\ 0\ 1]^T$  do sistema global foi rotacionado de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , em incrementos de  $15^\circ$ .

IV. Dependência da taxa de escorregamento de cada sistema;

São definidos dois parâmetros apresentados na Eq. (7). O parâmetro  $n$  que representa a taxa de sensibilidade ( $n = 1/m$ ) e  $\dot{\alpha}$  taxa de referência para cada sistema de deslizamento. Foram analisados dois casos:  $n = 10$  e  $n = 100$ , sendo que para  $n$  grande temos a aproximação de um comportamento de material elástico perfeitamente plástico. A taxa de referência foi definida como  $\dot{\alpha} = 0.001$ , sendo esse parâmetro indicado para a modelagem do cobre pelo autor Huang (1991).

V. Módulos de auto-endurecimento e endurecimento latente;

São definidos os parâmetros utilizados nas Eq. (10) e Eq. (11). Para facilitar a análise deste problema foram desconsiderados os termos de endurecimento, para isso se faz  $H_0 = 0$  na Eq. (10) e Eq. (11). Fica então, o único parâmetro  $\tau_c^{(\alpha)} = 60,8 \text{ MPa}$ , como sendo a tensão crítica inicial para o cobre.

VI. Parâmetro de não linearidade geométrica (NLgeom);

Parâmetro que considera efeitos de grandes deslocamentos da geometria. Uma vez que este trabalho considera pequenas deformações, tal parâmetro é desabilitado.

VII. Parâmetros para o método de iteração;

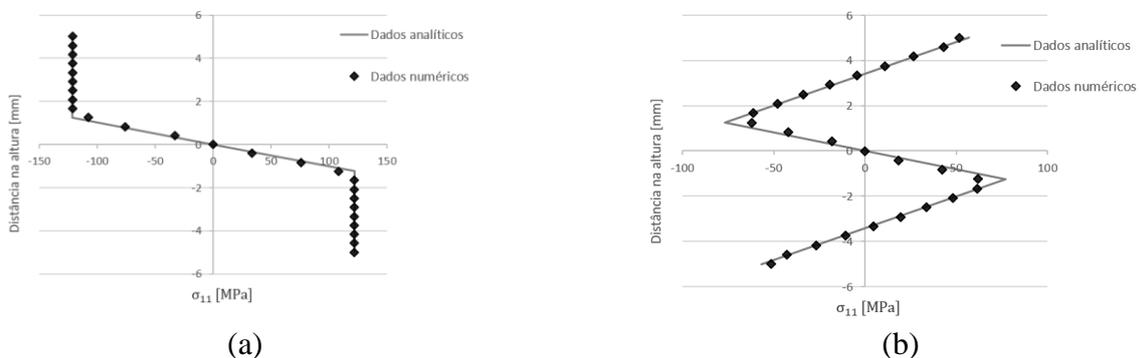
São definidos parâmetros utilizados no método iterativo de Newton-Rapson, como número de interações máximas 10 e erro absoluto do deslizamento  $10^{-5}$ , sendo estas sugestões dadas também por Huang (1991).

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Tensões residuais em um material isotrópico considerando um material elástico perfeitamente plástico em flexão

As comparações das tensões de carregamento das soluções analíticas e numéricas ao longo da altura da viga, mostrada na Fig. 8, para o material isotrópico, são apresentadas na Fig. 13 (a). Já na Fig. 13(b) são apresentadas ao longo da altura da viga, a variação das tensões residuais devido ao alívio de carregamento na viga.

Figura 13 - (a) Comparação numérica e analítica para as tensões de carregamento na seção da viga; (b) Comparação numérica e analítica para as tensões residuais na seção da viga.



Como observados nas Fig. 13 (a) e 13 (b), os resultados numéricos convergiram aos analíticos, justamente por ser tratar de um comportamento de material bem definido e com uma resposta esperada.

### 4.2 Tensões residuais em um monocristal considerando plasticidade cristalina

Os resultados obtidos para o monocristal com as diversas orientações da rede cristalina no carregamento e descarregamento são mostrados respectivamente nas Fig. 14 e Fig. 15, onde são apresentadas as tensões na direção axial ao longo da altura do monocristal. A orientação definida como referência ( $0^\circ$ ) é determinada pela Fig. 12, a partir da qual rotacionou-se o vetor  $[0 \ 0 \ 1]^T$  do sistema global de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , em incrementos de  $15^\circ$ . Duas sensibilidades do material foram testadas:  $n = 10$  e  $n = 100$ .

Figura 14 - Tensões axiais ao longo da altura do monocristal para diferentes orientações cristalográficas durante o carregamento. (a)  $n = 10$ ; (b)  $n = 100$ .

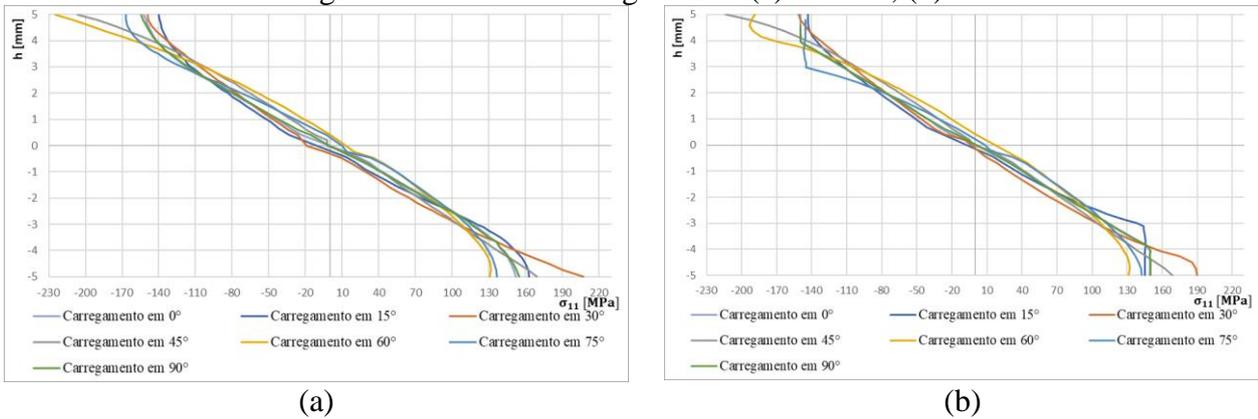
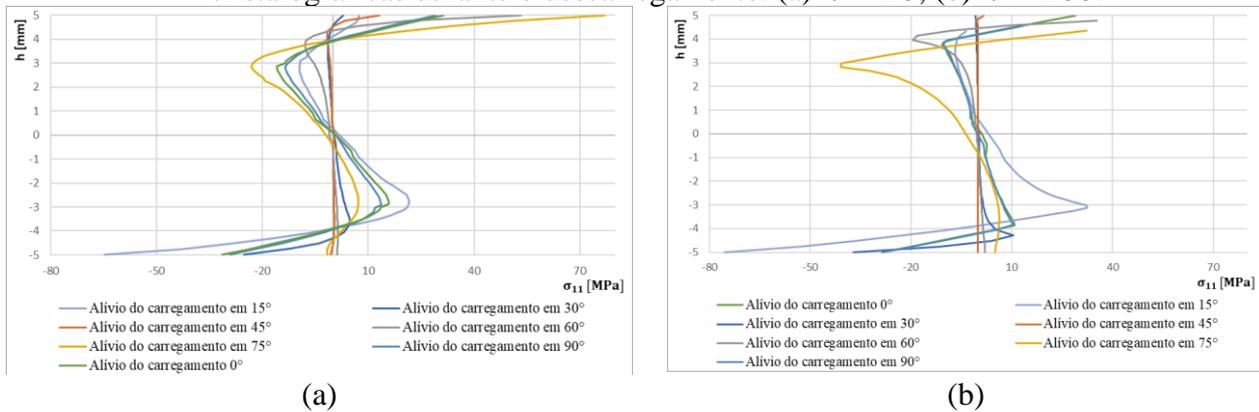


Figura 15 - Tensões axiais ao longo da altura do monocristal para diferentes orientações cristalográficas durante o descarregamento. (a)  $n = 10$ ; (b)  $n = 100$ .



Os dados obtidos evidenciam o comportamento próximo de um material elástico perfeitamente plástico para  $n = 100$ , verificando a Eq. (7). Nota-se também a diferença da distribuição da tensão ao longo da espessura para as diferentes orientações, o que indica a diferença dos sistemas de deslizamentos ativos.

Com o uso da lei de Schmid, Eq. (1), foram calculadas as tensões para os doze diferentes planos de deslizamentos, mostrados na Fig. 5, nas sete diferentes orientações da rede cristalina, utilizou-se tensão cisalhante rebatida criticado cobre:  $\tau_c^{(\alpha)} = 60,8 \text{ MPa}$ . Os resultados são apresentados no Apêndice B.

Como verificação do modelo numérico, o valor do momento oriundo das forças externas e internas foi comparado. Utilizando os dados das Fig 14(a) e Fig. 15(a) foi calculado o momento gerado pelas forças internas com o uso da regra de integração numérica trapezoidal através da Eq. (16).

$$M = \int_A -\sigma_{xx} y dA = \sum_1^{n-1} \frac{\sigma_{11}(h) + \sigma_{11}(h + \Delta h)}{2} \Delta h \quad (16)$$

Complementarmente, o momento gerado pelas forças externas foi calculado pelo produto entre a comprimento do monocristal pela força total aplicada à seção dele. Para o valor da força aplicada, integra-se a Eq. (12) ao longo de toda espessura, conforme mostra a Eq (17).

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} T_{12}(x, y) dy = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{P}{2I} (\bar{h}^2 - y^2) dy \quad (17)$$

Na condição de descarregamento os esforços internos (de força e momento) são nulos na seção. Os resultados de comparação dos cálculos dos momentos fletores são mostrados na Tab. 1.

Tabela 1 – Comparação do momento gerado pelas forças externa e internas.

	Momento das forças externas [N.m]	Momento das forças internas [N/m]						
		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Carregamento	2976.67	2972.4 2	2969.4 7	2965.6 1	2964.8 6	2967.0 9	2970.2 0	2968.0 5
Descarregamento	0.00	3.73	5.60	1.18	0.63	1.93	3.67	4.64

Conforme apresentado na Tab (1), os resultados para o momento devido as forças de carregamento e de descarregamento das forças externas e internas se aproximam, certificando assim, o equilíbrio do corpo.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho pode ser definido como uma primeira etapa na direção do desenvolvimento de um modelo abrangente, que de fato possa prever o estado de tensões residuais em materiais policristalinos. Os primeiros cálculos numéricos, em situação isotrópica e em comportamento elástico perfeitamente plástico, convergiram e apresentaram resultados satisfatórios em comparação aos modelos analíticos. Uma extrapolação para o modelo com plasticidade cristalina foi introduzida. Frente aos resultados, foi possível concluir que:

- As tensões compressivas e trativas não apresentaram simetria, variando sensivelmente conforme a orientação da rede cristalina;
- As tensões residuais podem se acumular em uma região específica do monocristal, O que acarretaria a necessidade do conhecimento da orientação da rede cristalina em relação ao monocristal para a devida medida da tensão residual em testes experimentais.

Foi verificado o diferente comportamento do material devido a mudança da taxa de sensibilidade, a qual, quando assume valores altos, próximos a 100, representa um comportamento similar ao elástico perfeitamente plástico. Tendo neste caso definido uma tensão limite, no qual o sistema de deslizamento começa a escoar. Ao assumir valores de taxa de sensibilidade do material próximas a 10, a tensão não é limitada e sistemas de deslizamento que estavam não ativos, passam a desempenhar papel ativo.

O modelo desenvolvido neste trabalho verificou a condição de equilíbrio através da comparação do momento resultante entre as forças internas e externas

As técnicas apresentadas neste trabalho se restringem aos monocristais, contudo para uma extrapolação para análises em policristais, deve-se considerar as descontinuidades dos grãos e as restrições que elas aportam.

Para trabalhos futuros, recomenda-se:

- Um estudo mais detalhado da plasticidade de cristais é necessária de modo a poder analisar a implementação proposta por Huang (1991);
- Estudos para a exploração de diferentes parâmetros dentro da UMAT utilizada, como por exemplo, a utilização de materiais com endurecimento, os quais são mais próximos ao comportamento de metais;
- Não obstante, próximos trabalhos podem se direcionar à investigação das tensões residuais em um material policristalino, bem como a sua validação experimental.

## REFERÊNCIAS

ASARO, R. J. **Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals**. Acta Metallurgica, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 445–453, 1979.

ASARO, R. J. **Micromechanics of crystals and polycrystals**. Advances in applied mechanics, v. 23, p. 1-115, 1983.

ASARO, R. J.; RICE, J. R. **Strain localization in ductile single crystals**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v. 25, n. 5, p. 309–338, 1977.

CALLISTER, William D. **Materials science and engineering: an introduction**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos: [s. n.], 2008. 589 p.

FORNEL, G. F. **Implantação numérica de um modelo de plasticidade cristalina para o estado plano de deformações e aplicação ao estudo de trinca em monocristal**. 2018. 103p. Dissertação de Mestrado em Engenharia – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2018.

GUAN, Yongjun et al. **Crystal plasticity modelling and HR-DIC measurement of slip activation and strain localization in single and oligo-crystal Ni alloys under fatigue**. International Journal of Plasticity, [S. l.], v. 88, p. 77-88, 2017.

HUANG, Yonggang. **A user-material subroutine incorporating single crystal plasticity in the ABAQUS finite element program**, Mech Report 178 - Division of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1991.

HUTCHINSON, J. **Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites**. In: THE ROYAL SOCIETY. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. [S.l.], 1970. v. 319, n. 1537, p. 247–272.

KYSAR, Jeffrey W.; HALL, Pierce Addendum. **A User-Material Subroutine Incorporating Single Crystal Plasticity in the ABAQUS Finite Element Program**, Harvard University, 1991.

LEDBETTER, H.M. **Monocrystal-polycrystal elastic constants of a stainless steel**, NBSIR-85-3025. Reed, R.P. (Ed.). United States, 1984.

LU, Jian. **Handbook on measurement of residual stresses**. SEM - Society for Experimental Mechanics, The Fairmont Press, Lilburn, GA, USA, 1996.

PEIRCE, D. et al. **An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals**. Acta metallurgica, Elsevier, v. 30, n. 6, p. 1087–1119, 1982.

POPOV, Egor Paul. **Introduction to mechanics of solids**. [S. l.]: Prentice-Hall, 1968. 571 p.

RAABE, Dierk et al. **Micromechanical and macromechanical effects in grain scale polycrystal plasticity experimentation and simulation**. Acta Materialia, v. 49, n. 17, p. 3433-3441, 2001.

RAABE, Dierk et al. **Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications**. Acta Materialia, [S. l.], v. 58, n. 4, p. 1152-1211, 2010.

RODRIGUES, Jorge; MARTINS, Paulo. **Tecnologia da Deformação Plástica**. Instituto Superior Técnico Lisboa: Escolar, 1995. 741 p. v. II.

ROSENDO, Tonilson de Souza. **Análise micromagnética de tensões residuais em anéis de rolamento**. 2005. 95 p. Dissertação (Mestrado em engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SCHAJER, Gary S.; WHITEHEAD, Philip S. **Hole-Drilling Method for Measuring Residual Stresses**. 1. ed. [S. l.]: Morgan and Claypool, 2018. 186 p. ISBN 9781681732664.

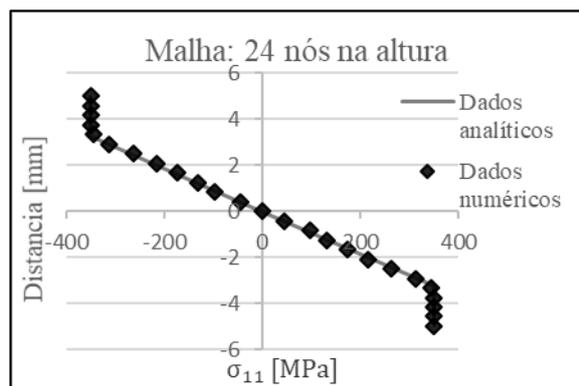
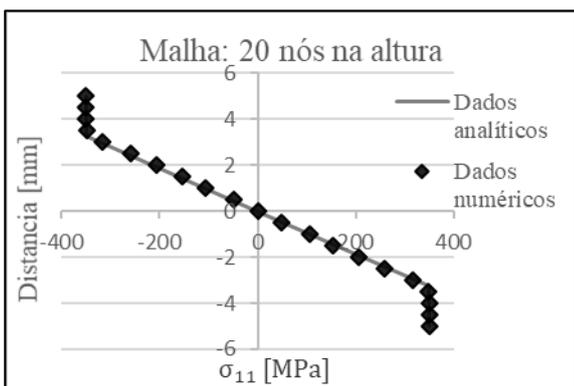
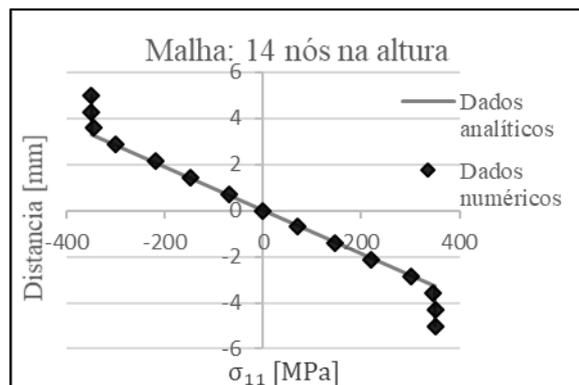
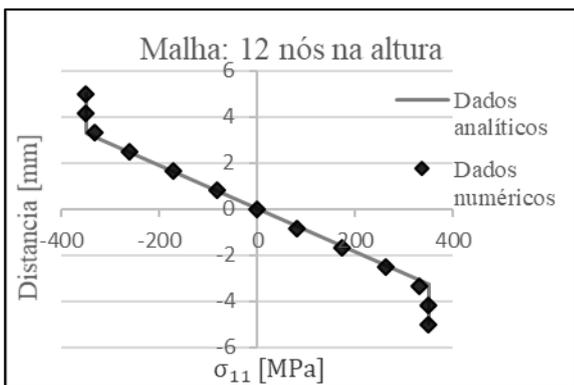
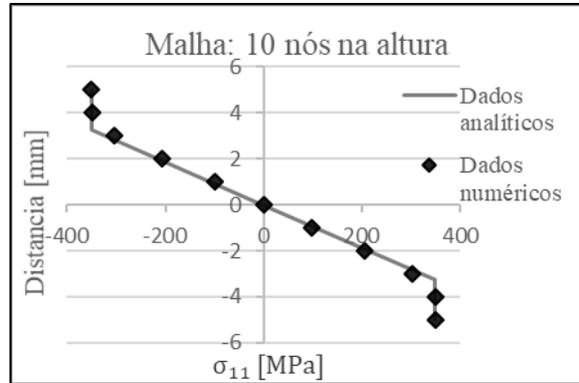
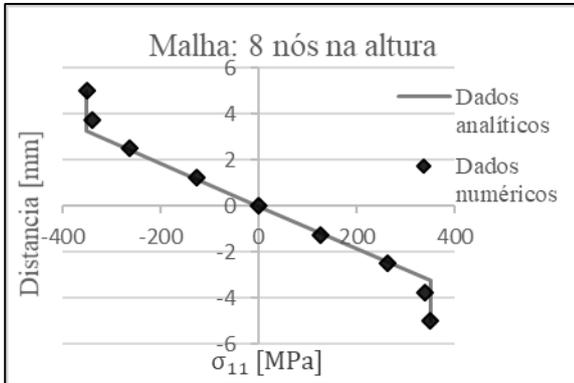
TAYLOR, G. I.; ELAM, C. F. **Bakerian lecture. the distortion of an aluminium crystal during a tensile test**. In: THE ROYAL SOCIETY. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. v. 102, n. 719, p. 643–667, 1923.

TAYLOR, G. I.; ELAM, C. F. **The plastic extension and fracture of aluminium crystals**. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, v. 108, n. 745, p. 28–51, 1925. ISSN 0950-1207.

TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.N. (1951) **Theory of Elasticity**. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, Toronto, London.

## APÊNDICE A

Estudo de convergência de malha para material isotrópico durante o carregamento de um viga submetida à flexão.



## APÊNDICE B

Cálculo da tensão, bem como, os ângulos  $\phi$  e  $\lambda$  através da lei de Schmid, Eq. (1). Foram calculados para os doze diferentes planos de deslizamentos em cada orientação da rede cristalina.

Tabela 1 - Lei de Schmid para as orientações de referências 0° e 15°.

Orientação: 0°			Orientação: 15°		
$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]	$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]
35.26	120.00	-1.49E+02	45.82	50.99	1.39E+02
35.26	120.00	-1.49E+02	45.82	89.03	5.13E+03
35.26	90.00	1.22E+18	45.82	127.76	-1.42E+02
90.00	120.00	-1.99E+18	95.27	50.99	-1.05E+03
90.00	60.00	1.99E+18	95.27	10.59	-6.74E+02
90.00	0.00	9.93E+17	95.27	69.30	-1.87E+03
90.00	60.00	1.99E+18	24.73	68.25	1.81E+02
90.00	120.00	-1.99E+18	24.73	89.03	3.94E+03
90.00	0.00	9.93E+17	24.73	69.30	1.89E+02
35.26	60.00	1.49E+02	96.87	68.25	-1.37E+03
35.26	60.00	1.49E+02	96.87	10.59	-5.17E+02
35.26	90.00	1.22E+18	96.87	127.76	8.30E+02

Tabela 2 - Lei de Schmid para a orientações de referências 30° e 45°.

Orientação: 30°			Orientação: 45°		
$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]	$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]
15.00	75.52	2.52E+02	9.74	81.58	4.21E+02
15.00	86.16	9.39E+02	9.74	81.58	4.21E+02
15.00	100.54	-3.44E+02	9.74	90.00	1.01E+18
75.00	75.52	9.40E+02	65.91	81.58	1.02E+03
75.00	21.09	2.52E+02	65.91	31.40	1.74E+02
75.00	46.92	3.44E+02	65.91	45.00	2.11E+02
56.10	41.41	1.45E+02	65.91	31.40	1.74E+02
56.10	86.16	1.63E+03	65.91	81.58	1.02E+03
56.10	46.92	1.60E+02	65.91	45.00	2.11E+02
81.41	41.41	5.43E+02	80.26	31.40	4.21E+02
81.41	21.09	4.36E+02	80.26	31.40	4.21E+02
81.41	100.54	-2.22E+03	80.26	90.00	5.87E+18

Tabela 3 - Lei de Schmid para as orientações de referências 60° e 75°.

<b>Orientação: 60°</b>			<b>Orientação: 75°</b>		
$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]	$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]
15.00	86.16	9.39E+02	24.74	89.02	3.93E+03
15.00	75.52	2.52E+02	24.74	68.25	1.81E+02
15.00	79.46	3.44E+02	24.74	69.30	1.89E+02
56.10	86.16	1.63E+03	45.82	89.02	5.12E+03
56.10	41.41	1.45E+02	45.82	50.99	1.39E+02
56.10	46.92	1.60E+02	45.82	52.24	1.42E+02
75.00	21.09	2.52E+02	83.13	10.59	5.17E+02
75.00	75.52	9.40E+02	83.13	68.25	1.37E+03
75.00	46.92	3.44E+02	83.13	52.24	8.30E+02
81.41	21.09	4.36E+02	84.74	10.59	6.74E+02
81.41	41.41	5.43E+02	84.74	50.99	1.05E+03
81.41	79.46	2.22E+03	84.74	69.30	1.87E+03

Tabela 4 - Lei de Schmid para a orientação de referência 90°.

<b>Orientação: 90°</b>		
$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	$\sigma$ [MPa]
35.26	90.00	1.22E+18
35.26	60.00	1.49E+02
35.26	60.00	1.49E+02
35.26	90.00	1.22E+18
35.26	60.00	1.49E+02
35.26	60.00	1.49E+02
90.00	0.00	9.93E+17
90.00	60.00	1.99E+18
90.00	60.00	1.99E+18
90.00	0.00	9.93E+17
90.00	60.00	1.99E+18
90.00	60.00	1.99E+18