

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

ANÁLISE DE VARIÂNCIA

JOÃO RIBOLDI

SÉRIE B, N° 27  
PORTO ALEGRE, MARÇO 1995

## PREFÁCIO

As presentes notas destinam-se ao apoio didático da disciplina AGRP01 - Análise Estatística dos Cursos de Pós-Graduação em Agronomia. Surgiram da experiência acumulada ao longo dos anos e tem por objetivo servir como um guia aos conteúdos abordados e não como um limitante dos assuntos, não prescindindo, evidentemente, da consulta de bibliografia especializada para complementação.

Apesar de serem de objetivo específico, podem também servir como texto de apoio didático a outras disciplinas a nível de graduação e pós-graduação.

Agradecemos a todos que colaboraram na organização destas notas e em especial aos bolsistas Stela, Flávio e André pelo trabalho de digitação.

Porto Alegre, 21 de Março de 1995.

Prof. João Riboldi

## Í N D I C E

|  |    |
|--|----|
| 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS .....   | 01 |
| 1.1. Caracterização .....  | 01 |
| 1.2. Distribuição de F .....   | 03 |
| 2 - DELINEAMENTO COMPLETAMENTE CASUALIZADO<br>OU DELINEAMENTO INTEIRAMENTE CASUALIZADO .....   | 05 |
| 2.1. Caracterização .....  | 05 |
| 2.2. Análise de Variância .....  | 06 |
| 2.3. Medidas de Precisão de Experimentos .....   | 08 |
| 2.4. Exemplo .....   | 09 |
| 2.5. Experimentos inteiramente casualizados com<br>diferente número de repetições por tratamento .....   | 11 |
| 2.6. Técnicas de complementação na análise de variância ..   | 11 |
| 2.7. Contrast es ou comparações de médias .....  | 12 |
| 2.8. Testes de comparações múltiplas de médias .....   | 13 |
| 2.9. Alternativas para comparações<br>múltiplas de médias de tratamento .....  | 21 |
| 2.10. Teste Bayesiano ou Teste de<br>Waller-Duncan ou Teste da Razão Bayesiana K .....   | 27 |
| 2.11. Método de Análise de Agrupamento ("Cluster<br>Analysis") ou Método de Scott e Knott para<br>agrupamento de médias .....                          | 30 |
| 2.12. Contrast es ortogonais .....   | 37 |
| 2.13. Modelo linear para a análise de variância de<br>experimentos inteiramente casualizados ou<br>para o delineamento completamente casualizado ..... | 51 |
| 2.14. Amostragem no delineamento<br>completamente casualizado .....  | 55 |
| 2.15. Verificação da adequabilidade do modelo de<br>análise de variância para o delineamento<br>completamente casualizado com um fator .....           | 68 |

|  |     |
|--|-----|
| 2.16. Transformações de dados .....  | 77  |
| 3 - DELINEAMENTO BLOCOS CASUALIZADOS (DBC)   |     |
| 3.1. Caracterização .....  | 85  |
| 3.2. Análise de Variância .....  | 87  |
| 3.3. Exemplo .....   | 91  |
| 3.4. Eficiência Relativa .....   | 94  |
| 3.5. Estimação de Valores Perdidos<br>( $\leftrightarrow$ Parcelas Perdidas) ..... | 94  |
| 3.6. Modelo Linear para Experimentos em Blocos .....                               | 97  |
| BIBLIOGRAFIA .....   | 105 |

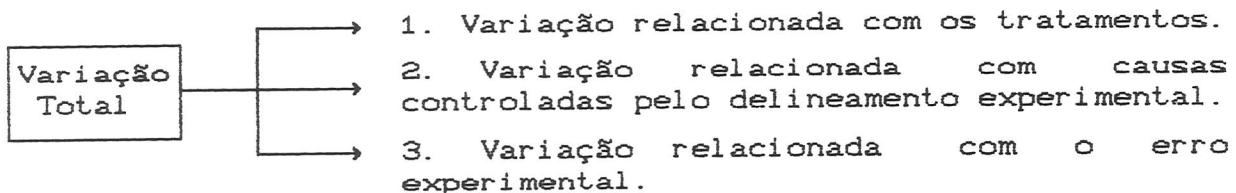
## ANÁLISE DE VARIÂNCIA

### 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.

#### 1.1. Caracterização:

Técnica utilizada para verificar diferenças entre dois ou entre mais do que dois tratamentos.

É uma técnica estatística utilizada para decompor a variabilidade total (variância total ou soma de quadrados de desvios totais) nas diversas causas de variação.



◦ Delineamento Experimental: forma de atribuição dos tratamentos às unidades experimentais.

◦ Erro Experimental: variação das unidades experimentais submetidas ao mesmo tratamento.

◦ Causas do Erro Experimental:

1. Variabilidade intrínseca das unidades experimentais (UE).  
(inerente)

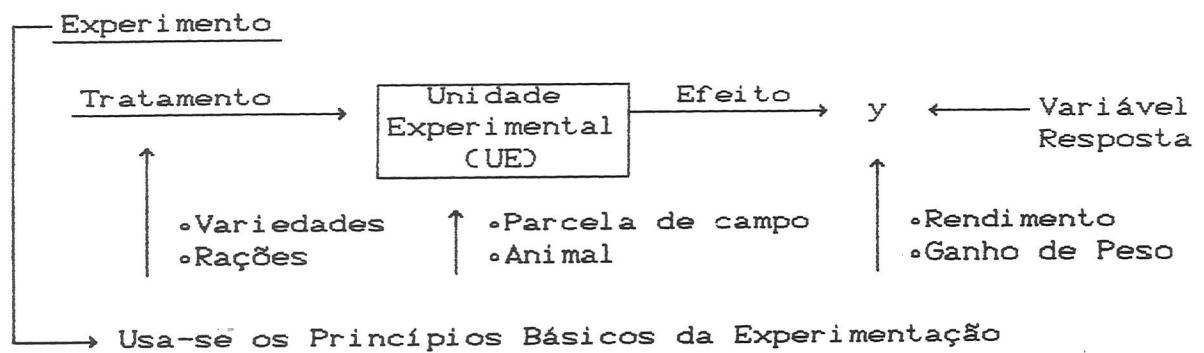
2. Falhas de técnica experimental.

◦ Análise de variância para o delineamento completamente casualizado:

Análise de variância em classificação simples: 1 critério de classificação das UE: Tratamentos; Causas de variação do tipo 1 e 3.

◦ Análise de variância para o delineamento blocos casualizados:

Análise de variância em classificação dupla: 2 critérios de classificação das UE: Tratamentos e Blocos; Causas de variação do tipo 1, 2 e 3.



→ (1) Repetições: mais de 1 UE/tratamento. Para poder verificar diferenças entre tratamentos

Obrigatórios

→ (2) Casualização: atribuição por sorteio dos tratamentos às UE. Estimativa válida do efeito de tratamentos. Estimativa válida do erro experimental. Comparação válida dos tratamentos.

Opcional → (3) Bloqueamento: formação de blocos homogêneos de UE antes da aplicação dos tratamentos. Para controlar a variabilidade intrínseca das UE → maior precisão.

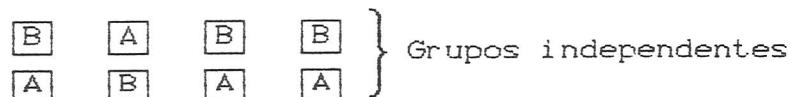
◦ Delineamentos Completamente Casualizados (DCC):

Usa-se repetições e casualização; Escolha casual das UE a serem submetidas aos diferentes tratamentos (extensão de grupos independentes).

◦ Delineamento Blocos Casualizados (DBC):

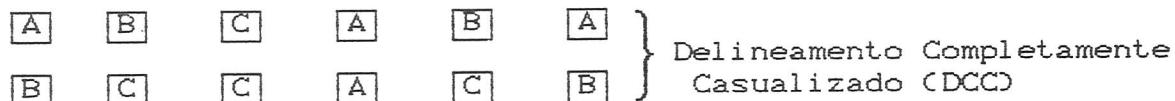
Usa-se repetições, casualização e bloqueamento. Os tratamentos são aplicados de forma casual a blocos homogêneos de UE (extensão de comparação emparelhada).

I. 2 tratamentos: A e B  
 4 repetições / tratamento }  $\rightarrow$  8 UE



↓ Extensão

II. 3 tratamentos: A, B, C  
 4 repetições / tratamento }  $\rightarrow$  12 UE



I. Bloco 1    A    B  
 (Par 1)  
 Bloco 2    B    A  
 (Par 2)  
 Bloco 3    B    A  
 (Par 3)  
 Bloco 4    A    B  
 (Par 4)

Extensão

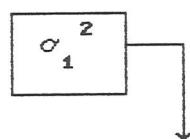
II. Bloco 1    B    C    A  
 Bloco 2    C    A    B  
 Bloco 3    A    B    C  
 Bloco 4    B    A    C

Comparações  
 Emparelhadas

Delineamento Blocos  
 Casualizados (DBC)

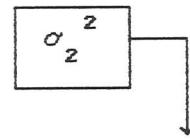
### 1.2. Distribuição de F:

População 1



Retira-se todas as amostras possíveis de tamanho  $n_1$  e calcula-se a variância  $\sigma_1^2$  para cada amostra.

População 2



Retira-se todas as amostras possíveis de tamanho  $n_2$  e para cada amostra calcula-se  $\sigma_2^2$ .

Fazendo-se todas as razões  $\frac{\frac{\sigma_1^2}{n_1}}{\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$  produz-se uma distribuição de F com  $(n_1 - 1)$  e  $(n_2 - 1)$  GL.

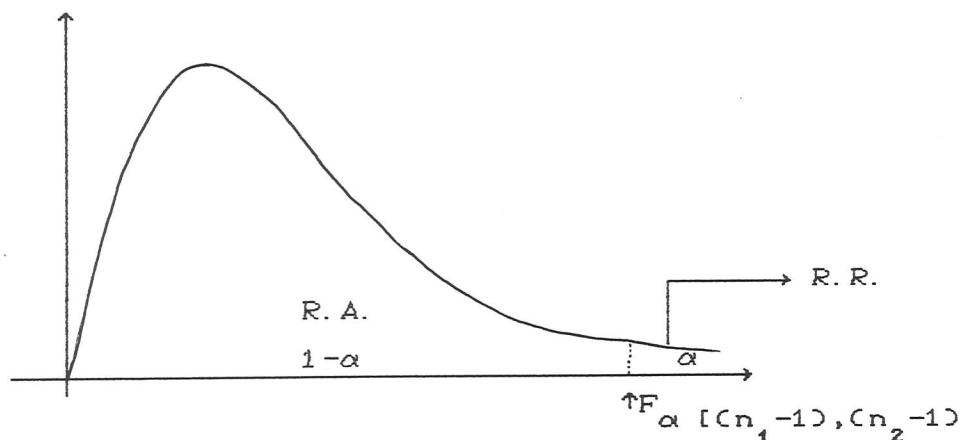
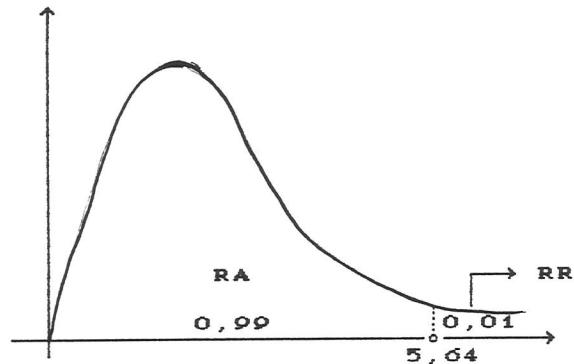
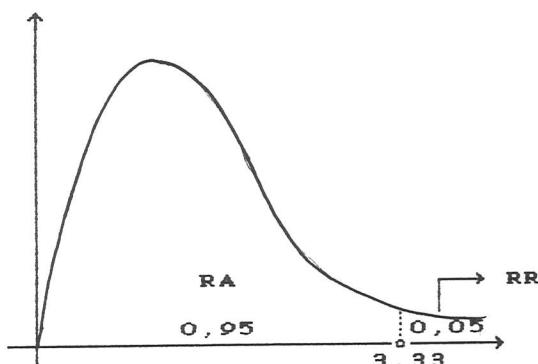


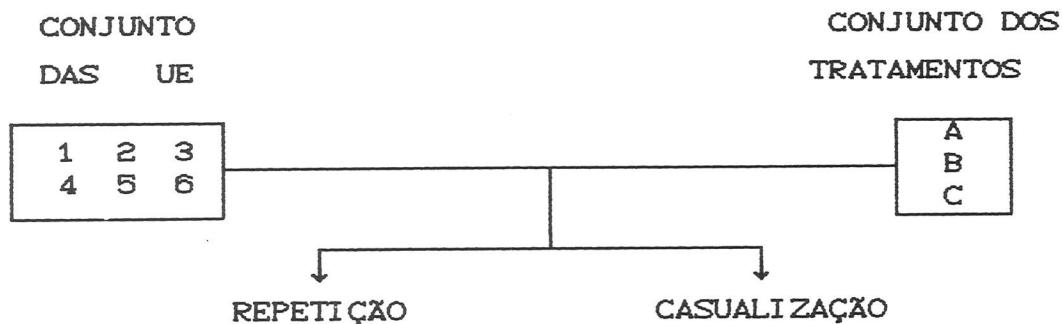
Tabela 3

| GL do Denominador         | $\alpha$ | 1                         | 2     | ...   | 5    | ... |
|---------------------------|----------|---------------------------|-------|-------|------|-----|
| 1                         | 0,10     |                           |       |       |      |     |
| 2                         | 0,05     |                           |       |       |      |     |
| :                         | 0,025    |                           |       |       |      |     |
|                           | 0,01     |                           |       |       |      |     |
|                           | 0,005    |                           |       |       |      |     |
| 10                        | 0,05     | .....                     | ..... | ..... | 3,33 |     |
|                           | 0,01     | .....                     | ..... | ..... | 5,64 |     |
| $F_{0,05} (5, 10) = 3,33$ |          | $F_{0,01} (5, 10) = 5,64$ |       |       |      |     |



## 2. DELINEAMENTO COMPLETAMENTE CASUALIZADO OU DELINAMENTO INTEIRAMENTE CASUALIZADO

### 2.1 CARACTERIZAÇÃO:



Atribuição por sorteio dos tratamentos a serem aplicados para as diferentes UE.

| TRATAMENTOS |   |   |
|-------------|---|---|
| A           | B | C |
| 3           | 1 | 2 |
| 4           | 6 | 5 |

\* Escolha casual das UE (nenhuma restrição quanto a casualização)

\* Extensão de grupos independentes

### USO:

-Uniformidade das UE, pois quanto menos uniformes  $\Rightarrow$  mais variável a informação  $\Rightarrow$  menos precisos os resultados.

- Execução uniforme sobre todas UE (instalação, condução e coleta de informações).

### CARACTERÍSTICA:

-GL erro experimental (resíduo) maior possível  $\Rightarrow$  alta sensibilidade dos testes.

## 2.2 ANÁLISE DE VARIÂNCIA:



$$i = 1, 2, \dots, t$$

## Índice de tratamento

$$j = 1, 2, \dots, n$$

## Índice de repetição

| TRATAMENTOS | REPETIÇÕES |          |          |          |                  |                        |
|-------------|------------|----------|----------|----------|------------------|------------------------|
|             | 1          | 2        | ...      | r        |                  |                        |
| 1           | $y_{11}$   | $y_{12}$ | $\dots$  | $y_{1r}$ | $y_{1..}$        | $\bar{y}_{1..}$        |
| 2           | $y_{21}$   | $y_{22}$ | $\dots$  | $y_{2r}$ | $y_{2..}$        | $\bar{y}_{2..}$        |
| $\vdots$    | $\vdots$   | $\vdots$ | $y_{ij}$ | $\vdots$ | $\vdots y_{i..}$ | $\vdots \bar{y}_{i..}$ |
| t           | $y_{t1}$   | $y_{t2}$ | $\dots$  | $y_{tr}$ | $y_{t..}$        | $\bar{y}_{t..}$        |
|             |            |          |          |          | $y_{...}$        | $\bar{y}_{...}$        |
|             |            |          |          |          | TOTAL GERAL      | MÉDIA GERAL            |

$$\bar{y} = \frac{y_{\cdot \cdot}}{n} ; \quad \bar{y}_i = \frac{y_{i \cdot}}{n}$$



```
graph LR; A[VARIAÇÃO TOTAL (SQTotal)] --> B[Variação entre tratamentos ou devida a tratamentos (SQTratamentos ou SQT)]; A --> C[Variação dentro dos tratamentos ou não devida aos tratamentos ou devida ao erro experimental (SQErro Experimental ou SQE)]
```

VARIAÇÃO TOTAL (SQTotal)

Variação entre tratamentos ou devida a tratamentos (SQTratamentos ou SQT)

Variação dentro dos tratamentos ou não devida aos tratamentos ou devida ao erro experimental (SQErro Experimental ou SQE)

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2 \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + \\
 &\quad \left[ \text{SQTotal} \quad \text{SQE} \quad \text{igual a zero} \right] \\
 &+ \sum_{i=1}^t n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \\
 &\quad \left[ \text{SQT} \right]
 \end{aligned}$$

### TABELA DA ANALISE DE VARIANCIA

| CAUSAS DE VARIAÇÃO                            | GL       | SQ      | QM  | F                 |
|---|----------|---------|-----|-------------------|
| TRATAMENTOS<br>(entre tratamentos)            | t - 1    | SQT     | QMT | <u>QMT</u><br>QME |
| ERRO EXPERIMENTAL<br>(dentro dos tratamentos) | t(r - 1) | SQE     | QME |                   |
| TOTAL   | r t - 1  | SQTotal |     |                   |

GL:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_{..} &\rightarrow GLTotal = r t - 1 \\
 &\rightarrow GLT = t - 1 \\
 \bar{y}_{i.} &\rightarrow (r - 1) GL / Tratamento \Rightarrow GLE = t(r - 1)
 \end{aligned}$$

SQ:

$$SQTotal = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{rt}$$

FORMA USUAL

$$\frac{\bar{y}_{..}^2}{rt} = \text{CORREÇÃO (C) OU FATOR DE CORREÇÃO (FC)}$$

$$\rightarrow \frac{(rt)\bar{y}_{..}^2}{rt} = rt \bar{y}_{..}^2$$

$$SQT = \sum_i r (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \frac{\bar{y}_{i.}}{r} - FC$$

FORMA USUAL

$$SQE = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = SQTotal - SQT$$

FORMA DIRETA

QM:

$$QM = \frac{SQ}{GL} = \text{VARIÂNCIA}$$

$$QMT = \frac{SQT}{GLT} = \frac{SQT}{t-1}$$

$$QME = \frac{SQE}{GLE} = \frac{SQE}{t(r-1)}$$

F:

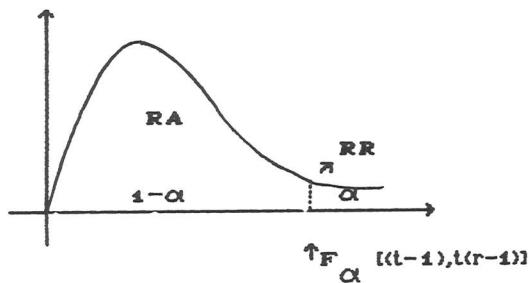
$$F = \frac{QMT}{QME}$$

TESTE DE HIPÓTESES:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t$$

$H_a$ : Pelo menos 2 médias de tratamentos diferem.

Decisão:



$$F \text{ Calculado} = \frac{QMT}{QME}$$

Rejeita-se  $H_0$  se  $F$  calculado >  $F_\alpha [(t - 1), t(r - 1)]$

2.3 MEDIDAS DE PRECISÃO DE EXPERIMENTOS:

(1) Coeficiente de variação (CV):

$$CV = \frac{\sqrt{QME}}{\bar{y}_..} \times 100$$

(2) Erro padrão da média de 1 tratamento:

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{QME}{n}}$$

(3) Erro padrão da diferença entre 2 médias:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2 \text{ QME}}{n}}$$

#### 2.4 EXEMPLO:

Os dados abaixo referem-se a rendimento de cana em t/ha de um experimento inteiramente casualizado de competição de variedades de cana-de-açúcar.

|                           | TRATAMENTOS (VARIÉDADES) |       |       |       |                                       |
|---------------------------|--------------------------|-------|-------|-------|---------------------------------------|
|                           | A                        | B     | C     | D     |                                       |
|                           | 64                       | 78    | 75    | 55    | $t = 4$                               |
|                           | 72                       | 91    | 93    | 66    | $n = 6$                               |
|                           | 68                       | 97    | 78    | 49    | $n t = 24$                            |
|                           | 77                       | 82    | 71    | 64    |                                       |
|                           | 56                       | 85    | 63    | 70    |                                       |
|                           | 95                       | 77    | 76    | 68    |                                       |
| TOTAL ( $y_{i..}$ )       | 432                      | 510   | 456   | 372   | $1770 \rightarrow y_{..}$             |
| MÉDIA ( $\bar{y}_{i..}$ ) | 72                       | 85    | 76    | 62    | $73.75 \rightarrow \bar{y}_{..}$      |
| $\sum y_{ij}^2$           | 31994                    | 43652 | 35144 | 23402 | $134192 \rightarrow \sum y_{ij}^2$    |
| $y_{i..}^2/n$ (FC)        | 31104                    | 43350 | 34656 | 23064 | $132174 \rightarrow \sum y_{i..}^2/n$ |
| SQ/T                      | 890                      | 302   | 488   | 338   | $2018 \rightarrow SQE$                |

$$SQTotal = 134192 - \frac{(1770)^2}{24} = 134192 - 130558 = 3654$$

$$SQT = \frac{432^2 + 510^2 + 456^2 + 372^2}{6} - FC = 132174 - 130559 = 1636$$

186624    260100    207936    138384  
432<sup>2</sup>    510<sup>2</sup>    456<sup>2</sup>    372<sup>2</sup>  
FC

$$SQE = SQTotal - SQT = 3654 - 1636 = 2018$$

ou

$$SQE = SQ/T_A + SQ/T_B + SQ/T_C + SQ/T_D = 890 + 302 + 488 + 338 = 2018$$

ANALISE DE VARIÂNCIA:

| CAUSAS DE VARIAÇÃO                          | GL | SQ   | QM    | F       |
|---|----|------|-------|---------|
| VARIEDADES<br>(Centre variedades)           | 3  | 1636 | 545.3 | 5.40 ** |
| ERRO EXPERIMENTAL<br>(dentro de variedades) | 20 | 2018 | 100.9 |         |
| TOTAL                                       | 23 | 3654 |       |         |

$$CV = \sqrt{QME} / \bar{y} \times 100 = \sqrt{100.9 / 73.75} \times 100 = 13.6\%$$

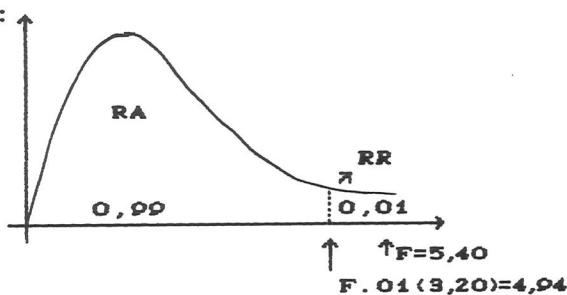
$F_{.01(3,20)} = 4.94$       \*\* SIGNIFICATIVO A 1%

HIPÓTESES:

$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$

$H_a: \text{Pelo menos 2 médias de variedades diferem}$

DECISÃO:



$$F = 5.40 > F_{.01(3,20)} = 4.94$$

A diferença entre médias de tratamentos é significativa

( $P < 0.01$ )

Rejeita-se  $H_0$

CONCLUSÃO:

As variedades de cana-de-açúcar investigadas se diferenciam em termos de rendimento de cana.

2.5 EXPERIMENTOS INTEGRAMENTE CASUALIZADOS COM DIFERENTE NÚMERO DE REPETIÇÕES POR TRATAMENTO:

| TRATAMENTOS | REPETIÇÕES |
|-------------|------------|
| 1           | $n_1$      |
| 2           | $n_2$      |
| .           | .          |
| .           | .          |
| t           | $n_t$      |
| TOTAL       | n          |

| CAUSAS DE VARIAÇÃO | GL    | SQ      | QM  | F   |
|--------------------|-------|---------|-----|-----|
| TRATAMENTOS        | t - 1 | SQT     | QMT | QMT |
| ERRO EXPERIMENTAL  | n - 1 | SQE     | QME | QME |
| TOTAL              | n - 1 | SQTotal |     |     |

$$SQTotal = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - FC ; \quad FC = \frac{\bar{y}_i^2}{n}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^t \frac{\bar{y}_i^2}{n_i} - FC$$

$$SQE = SQTotal - SQT$$

Erro Padrão da Diferença entre 2 Médias de Tratamentos:

$$\sigma_d = \sqrt{QME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Erro Padrão da Média de um Tratamento:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2} QME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

2.6 TÉCNICAS DE COMPLEMENTAÇÃO NA ANÁLISE DE VARIÂNCIA:

- Ajustamento de funções de resposta através de técnicas de análise de regressão: fatores quantitativos.
- Contrastess ortogonais: fatores quantitativos e qualitativos que permitem estruturação.
- Comparações múltiplas de médias: fatores quantitativos, fatores qualitativos que permitem ou que não permitem estruturação.

## 2.7 CONTRASTES OU COMPARAÇÕES DE MÉDIAS:

Uma função linear de médias de tratamentos do tipo

$$C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_t \mu_t$$

é dita contraste ou comparação se  $\sum_{i=1}^t c_i = 0$

### EXEMPLOS:

$$(1) c_1 = \mu_1 - \mu_2$$

$$(2) c_2 = \mu_1 - \mu_3$$

$$(3) c_3 = \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 \\ = (\mu_1 + \mu_2)/2 - \mu_3$$

$$(4) c_4 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3$$

} são contrastes

$$\text{Os contrastes } C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i \text{ e } B = \sum_{i=1}^t b_i \mu_i$$

$$\text{são ortogonais se } \sum_{i=1}^t b_i c_i = 0$$

$$c_1 \text{ e } c_2 \text{ não são ortogonais: } (1)(1) + (-1)(0) + (0)(-1) = 1$$

$$c_1 \text{ e } c_3 \text{ são ortogonais: } (1)(1) + (-1)(1) + (0)(-2) = 0$$

$$c_2 \text{ e } c_3 \text{ não são ortogonais: } (1)(1) + (0)(1) + (-1)(-2) = 3$$

Para diferente nº de repetições a condição de ortogonalidade é dada por:

$$\sum_{i=1}^t \frac{b_i c_i}{n_i} = 0$$

## 2.8 TESTES DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS DE MÉDIAS

### 2.8.1 - DIFERENÇA MÍNIMA SIGNIFICATIVA (DMS)

$$DMS = t \alpha (GLE) \cdot \sigma_d$$

confiabilidade      precisão

→ Erro Padrão da Diferença entre 2 médias  
 de tratamentos  
 → GL do Erro Experimental  
 → Nível de Significância

→ Valor que deve atingir a diferença entre médias de tratamentos para ser considerada significativa

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2 QME}{n}}$$

← QM Erro Experimental

→ nº de repetições

Para  $\neq$  nº de repetições:

$$\sigma_d = \sqrt{QME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

-Qualquer diferença entre médias de tratamentos  $>$  DMS é dita significativa.

-Duas amostras independentes (2 grupos independentes)

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sigma_d} ; \quad \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sigma_d} = t \cdot \sigma_d$$

diferença

#### USO

- 1- Não usar indiscriminadamente pois quando muitos forem os tratamentos em comparação (grande nº de comparações) algumas diferenças são consideradas como significativas por mero acaso.
- 2- Usar em comparações que envolvem 1 tratamento testemunha.
- 3- Usar em contrastes de médias planejados antes de se examinar os dados (ortogonais e de nº igual ao GL de tratamentos).

## 2.8.2 - TESTE DE TUKEY

$$\Delta = q \alpha(t, GLE) \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}$$

Diagrama de componentes:

- $q \alpha(t, GLE)$ : confiabilidade
- $\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}$ : precisão
- $\sigma_y$ : Erro Padrão da Média de um tratamento
- $\sqrt{n}$ : Amplitude Total Studentizada
- $t$ : Diferença Mínima Significativa ou Diferença Significativa Honesta

$t = n \circ$  de tratamentos

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{QME}{n}}$$

Qualquer diferença entre 2 médias  $> \Delta$  é dita significativa.

Para  $\neq n \circ$  de repetições por tratamento:

$$\Delta = q \alpha(t, GLE) \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(CD)}$$

onde  $\hat{V}(CD) = QME \left[ \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right]$  } Variância do contraste de 2 médias

$$C = \mu_i - \mu_j ; \quad \hat{C} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}$$

### DISTRIBUIÇÃO DA AMPLITUDE STUDENTIZADA:

$$y_1, y_2, \dots, y_n \stackrel{IID}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

$$U = \text{MAX}(y_j) - \text{MIN}(y_j)$$

Amplitude do conjunto de observações

$\sigma^2$  com GL é estimador de  $\sigma^2$

Então  $q(n, v) = \frac{U}{\sigma}$  é chamada de amplitude studentizada ou amplitude total studentizada.

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_t \stackrel{IID}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

médias de tratamentos

$$u = \text{MAX } (\bar{y}_{i.}) - \text{MIN } (\bar{y}_{i.})$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{\bar{y}_{i.}}^2}{n} = \frac{QME}{n} \quad \begin{bmatrix} \text{VARIÂNCIA DA MÉDIA} \\ \text{DE UM TRATAMENTO} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\bar{y}_{i.}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{QME}{n}} \quad \begin{bmatrix} \text{ERRO PADRÃO DA MÉDIA} \\ \text{DE UM TRATAMENTO} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\frac{\text{MAX } (\bar{y}_{i.}) - \text{MIN } (\bar{y}_{i.})}{\sqrt{\frac{QME}{n}}} \sim q(t, GLE)$$

### CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE DE TUKEY

- (i) O teste de Tukey é válido para a totalidade dos contrastes entre 2 médias.
- (ii) O teste de Tukey exige, em princípio, balanceamento, isto é igual nº de repetições por tratamento.
- (iii) O teste de Tukey é exato para testar a maior  $\neq$ . Nos demais casos é conservador.

Relação entre  $t$  e  $q$ :

$$\frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sigma_{\bar{y}_{12}}} = t \Rightarrow t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{2 QME}{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{QME}{n}}} \Rightarrow \sqrt{2} t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{QME}{n}}}$$

TUKEY:

$$\frac{\Delta}{\overline{y}_1 - \overline{y}_2} = q \sigma_{\bar{y}} \Rightarrow q = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sigma_{\bar{y}}} \Rightarrow q = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{QME}{n}}} \therefore q = \sqrt{2} t$$

### 2.8.3 - TESTE DE SCHEFFÉ

$$S = \sqrt{(t - 1) F_{\alpha} [GLT, GLE] \hat{V} (\hat{C})}$$

$$C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i \quad \hat{C} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{y}_i.$$

Para igual nº de repetições:

$$\hat{V} (\hat{C}) = \frac{QME}{n} (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_t^2)$$

ou

Para diferente nº de repetições:

$$\hat{V} (\hat{C}) = QME \left[ \frac{c_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2}{n_2} + \dots + \frac{c_t^2}{n_t} \right]$$

$\hat{V} (\hat{C})$  é a variância de um contraste de médias  
Qualquer contraste  $> S$  é dito significativo.

### CONSIDERAÇÕES DOBRE O TESTE DE SCHEFFÉ

$$\text{Para a totalidade dos contrastes } C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i$$

$$P \left[ \hat{C} - F_{\alpha} \sqrt{\hat{V} (\hat{C})} \leq C < \hat{C} + F_{\alpha} \sqrt{\hat{V} (\hat{C})} \right] = 1 - \alpha$$

$$\text{onde: } F_{\alpha} = \sqrt{(t - 1) F_{\alpha} (GLT, GLE)}$$

- O Teste de Scheffé é válido para a totalidade dos contrastes.
- Para um contraste, ou para um nº pequeno deles, o Teste de Scheffé é bastante conservador.

### 2.8.4 - TESTE DE BONFERRONI:

DESIGUALDADE DE BONFERRONI: "Para um conjunto de  $k$  contrastes, se cada um é testado com um coeficiente de confiança  $1 - \alpha$ , o coeficiente de confiança conjunto é, pelo menos,  $1 - k\alpha$ "

Sejam dois intervalos de confiança, obtidos de uma mesma amostra, para os contrastes  $C_1$  e  $C_2$ .

Seja o evento  $A_1$  o evento correspondente ao complemento do intervalo de confiança para  $C_1$  e  $A_2$ , analogamente, para  $C_2$ ; com  $P(A_1) = P(A_2) = \alpha$ .

Sabe-se que:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

e

$$P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2)$$

$$\therefore P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2)$$

→ Evento correspondente à região de confiança conjunta para  $C_1$  e  $C_2$

Como  $P(A_1 \cap A_2) \geq 0$ , serve a desigualdade:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \geq 1 - P(A_1) - P(A_2) = 1 - 2\alpha$$

Para o caso geral, de  $k$  eventos, tem-se a desigualdade:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_k) \geq 1 - k\alpha$$

#### TESTE DE BONFERRONI:

Consiste no teste DMS, fazendo-se correção do nível de significância em função do número de contrastes ( $k$ ).

Considera-se  $\alpha' = \frac{\alpha}{k}$  e obtem-se

$$DMS_B = t\alpha' \text{ (GLE)} \cdot \frac{sd}{\text{confiabilidade}} \cdot \frac{1}{\text{precisão}}$$

- Qualquer diferença entre médias  $> DMS_B$  é dita significativa.
- Válido para um conjunto de  $k$  contrastes e é um tanto conservador. Útil quando  $k$  é pequeno.

### 2.8.5 - TESTE DE DUNNETT

É utilizado para comparar médias de tratamentos com média da testemunha (padrão ou controle)

$$d' = t^* \alpha (t', GLE) \cdot \frac{sd}{\text{confiabilidade}} \cdot \frac{1}{\text{precisão}}$$

→ diferença mínima significativa

- $t^*$  de Dunnett, considerando probabilidade  $\alpha$ ,  $t'$  tratamentos (excluindo a testemunha) e GL do Erro Experimental.
- Qualquer diferença entre médias  $> d'$  é dita significativa.

#### CONSIDERAÇÕES DOBRE O TESTE DE DUNNET

(D) Pode ser usado também para comparações unilaterais.

(U) Estendido para comparações com grupos selecionados de contrastes.

### 2.8.6 - TESTE DE STUDENT - NEWMAN - KEULS (Teste S-N-K) ou

### TESTE DE NEWMAN - KEULS (Teste N-K)

Teste de amplitude múltipla; isto é usa-se vários valores para as comparações, na dependência do nº de médias abrangidas pela comparação.

$$\Delta p = \frac{\text{confiabilidade}}{q \alpha (p, GLE)} \cdot \frac{\text{precisão}}{s_y}$$

→ amplitude total studentizada

→ diferença mínima significativa

$p$  = nº de médias abrangidas pela comparação

$$\rightarrow s_y = \sqrt{\frac{QME}{n}} \text{ para igual nº de repetições}$$

$$\rightarrow s_y = \sqrt{\frac{QME}{2} \left[ \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right]}$$

Qualquer diferença  $> \Delta p$  é dita significativa.

#### CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE S-N-K OU TESTE N-K:

- (D) Procedimento sequencial para a totalidade dos contrastes 2 a 2.

CiD O Teste N-K, exige, em princípio, balanceamento.

CiD O Teste N-K é um teste aproximado, pois as médias ordenadas não são independentes.

### 2.8.7 - TESTE DE DUNCAN (Teste de Amplitude Múltipla de Duncan)

Usa-se vários valores para as comparações, na dependência do nº de médias abrangidas na comparação.

$$AMS = \frac{q^* \alpha_p(p, GLE)}{\bar{s}_y}$$

→Amplitude Studentizada Significativa (ASS)  
→Amplitude mínima significativa

$p$  = nº de médias abrangidas na comparação

$$AMS_p = ASS \alpha(p, GLE) \cdot \bar{s}_y$$

$$\bar{s}_y = \sqrt{\frac{QME}{n}} ; \text{ para igual nº de repetições}$$

$$\bar{s}_y = \sqrt{\frac{QME}{2} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} ; \text{ para } \neq \text{ nº de repetições}$$

#### - TAXA DE ERRO:

$$\alpha_p = 1 - (1 - \alpha)^{p-1}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$p = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 - (1 - 0.05)^{2-1} = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$p = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 1 - (1 - 0.05)^{3-1} = 1 - (0.95)^2 = 0.10$$

$$p = 4 \Rightarrow \alpha_4 = 1 - (1 - 0.05)^{4-1} = 1 - (0.95)^3 = 0.14$$

⋮

Valores de  $q^* \alpha_p(p, GLE)$  correspondem a valores de amplitude studentizada [ $q(p, GLE)$ ] considerando  $\alpha = \alpha_p$

- Qualquer diferença entre médias  $>$  do que AMS é dita significativa.

### CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE DE DUNCAN:

- (i) Procedimento sequencial para a totalidade dos contrastes 2 a 2.
- (ii) O teste de Duncan, exige, em princípio, balanceamento.
- (iii) O teste de Duncan é um teste aproximado, pois as médias ordenadas não são independentes.

### CASOS PARTICULARES DO TESTE DE DUNCAN:

\* DMS:  $\alpha_p = \alpha$

$$p = 2$$

\*TUKEY:  $\alpha_p = \alpha$

$$p = t$$

\* S-N-K:  $\alpha_p = \alpha$

$$p = p$$

### 2.8.8 - TESTE DE AMPLITUDE MÚLTIPLA DE TUKEY:

$$\Delta_p^* = \frac{1}{2} \left[ \Delta + \Delta_p \right]$$

N-K  
TUKEY

## 2.9 ALTERNATIVAS PARA COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS DE MÉDIAS DE TRATAMENTOS

### Análise de Médias de Tratamentos:

(Técnicas de Detalhamento na Análise de Variância)

- 1 - Comparações de médias tomadas 2 a 2 (comparações múltiplas)
  - \* para tratamentos qualitativos não estruturados.
  - \* DMS, Duncan, Tukey.
- 2 - Contrastos planejados (ortogonais) entre médias ou grupos de médias.
  - \* para tratamentos qualitativos que permitam estruturação.
- 3 - Ajustamento de funções de resposta através de técnicas de regressão.
  - \* tratamentos são níveis quantitativos.
  - \* Curva de resposta: 1 variável independente.
  - \* Superfície de resposta: 2 ou mais variáveis independentes.

Hipótese geral sobre efeito de tratamentos na análise de variância.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t \Leftrightarrow H_0: \tau_i = 0$$

### COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS:

Taxas de erro tipo I: Há diferentes formas de avaliar o erro tipo I, criando dificuldades para avaliar o mérito relativo dos procedimentos de comparações múltiplas.

(i) Taxa de erro por comparação ("comparisonwise"):  $\alpha$

$$\frac{\text{nº de inferências erradas}}{\text{nº de inferências}}$$

Usada no teste DMS.

(ii) Taxa de erro por experimento ("experimentwise"): E

$$(ii.1) \frac{\text{nº de experimentos com no mínimo uma inferência errada}}{\text{nº de experimentos}}$$

Usada no teste Tukey, Scheffé, Dunnett.

$$(ii.2) \frac{\text{nº de inferências erradas}}{\text{nº de experimentos}}$$

Usada no teste Bonferroni.

RELAÇÃO ENTRE  $\alpha$  e E:

$$E = 1 - (1 - \alpha)^{t-1} ; \quad \alpha = 1 - (1 - E)^{1/t-1}$$

| Nº de tratamentos no experimento | $\alpha = 0.05$<br>E | $E = 0.05$<br>$\alpha$ |
|----------------------------------|----------------------|------------------------|
| 2                                | 0.05                 | 0.05                   |
| 3                                | 0.0975               | 0.0253                 |
| 4                                | 0.1426               | 0.0169                 |
| 5                                | 0.1835               | 0.0127                 |
| 10                               | 0.3698               | 0.0057                 |
| 15                               | 0.5124               | 0.0037                 |
| 20                               | 0.6227               | 0.0028                 |

#### MÉTODOS DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS:

Testes de amplitude simples:

(1) DMS:

$$DMS = t\alpha (GLE) sd ; \quad sd = \sqrt{\frac{2 QME}{n}}$$

(2) TUKEY:

$$\Delta = q\alpha (t, GLE) \bar{sy} ; \quad \bar{sy} = \sqrt{\frac{QME}{n}}$$

(3) SCHEFFÉ:

$$S = \sqrt{(t-1) F_\alpha [GLT, GLE] \hat{VCCD}}$$

$$C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i ; \quad \hat{C} = \sum_{i=1}^t c_i \bar{y}_i$$

$$\hat{VCCD} = \frac{QME}{n} \left[ \sum_{i=1}^t c_i^2 \right]$$

(4) BONFERRONI:

$$DMS_B = t\alpha' (GLE) sd$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{k}$$

(5) DUNNETT: Comparações tratamentos vs testemunha

$$d' = t\alpha (t', \text{ GLE}) s_d$$

Testes de amplitude múltipla:

(6) S-N-K OU N-K:

$$\Delta p = q\alpha (p, \text{ GLE}) \bar{s_y}$$

↳ n° de médias incluídas na comparação

(7) DUNCAN:

$$\text{AMS}_p = q^* \alpha p (p, \text{ GLE}) \bar{s_y}$$

$$\text{Taxa de erro: } \alpha p = 1 - (1 - \alpha)^{p-1}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$p = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 - (1 - 0.05)^{2-1} = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$p = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 1 - (1 - 0.05)^{3-1} = 1 - (0.95)^2 = 0.10$$

⋮ :

Valores de  $q^* \alpha p$  ( $p$ , GLE) correspondem aos valores de amplitude Studentizada [ $q (p, \text{ GLE})$ ], considerando  $\alpha = \alpha p$ .

Casos particulares do teste de Duncan:

- DMS:  $\alpha p = \alpha$        $p = 2$

- TUKEY:  $\alpha p = \alpha$        $p = t$

- S-N-K:  $\alpha p = \alpha$        $p = p$

(8) AMPLITUDE MULTIPLA DE TUKEY:

$$\frac{1}{2} [\Delta + \Delta p]$$

USO DOS TESTES

1) Todas as comparações de médias 2 a 2:

TUKEY: maior rigor (maior responsabilidade)

S-N-K

DUNCAN: menor rigor (menor responsabilidade)

2) Contrastes não-ortogonais que envolvam mais do que duas médias (pelo menos um):

SCHEFFÉ

BONFERRONI: poucos contrastes

3) Comparações tratamentos vs testemunha:

DUNNETT

BONFERRONI: poucas comparações

DMS

#### RESUMO DO EXEMPLO

| VARIE-DADES              | MÉDIAS t/ha | DMS  | TUKEY | SCHEFFÉ | BONFERRONI | S-N-K                | DUNCAN                  | DUNNETT |
|--------------------------|-------------|------|-------|---------|------------|----------------------|-------------------------|---------|
| B                        | 85          | a    | a     | a       | a          | a                    | a                       | B ≠ D   |
| C                        | 76          | ab   | ab    | ab      | ab         | ab                   | ab                      | C = D   |
| A                        | 72          | bc   | ab    | ab      | ab         | ab                   | bc                      |         |
| D                        | 62          | c    | b     | b       | b          | b                    | c                       | A = D   |
| VALOR P/ O TESTE         | 2<br>3<br>4 | 12.1 | 16.2  | 17.7    | 16.5       | 12.1<br>14.7<br>16.2 | 12.10<br>12.71<br>13.04 | 14.9    |
| Nº DE ≠ SIG-NIFI-CATIVAS | -           | 3    | 1     | 1       | 1          | 1                    | 3                       | 1       |

#### RESUMO DOS TESTES:

DMS:

TAXAS DE ERRO: com base na comparação.

EXATIDÃO: exato para igual e diferente nº de repetições.

UTILIZAÇÃO: para qualquer contraste de médias.

INCOVENIENTE: não controle no acréscimo da ocorrência de erro de conclusão do tipo I.

RECOMENDAÇÃO QUANTO AO USO: -Para testar grupos específicos de contrastes de médias escolhidos a priori.

-Para testar contrastes que envolvam tratamentos x testemunha.

TUKEY:

TAXA DE ERRO: com base no experimento.

EXATIDÃO: exato para igual nº de repetições.

UTILIZAÇÃO: para comparar médias 2 a 2.

INCONVENIENTE: exagerado rigor, controlando excessivamente erro tipo I; reduzindo o poder de discriminação.

RECOMENDAÇÃO QUANTO AO USO: -Para se comparar médias 2 a 2 nos casos onde a decorrência de erro de conclusão do tipo I é extremamente grave.

#### SCHEFFÉ:

TAXA DE ERRO: com base no experimento.

EXATIDÃO: exato para igual e diferente nº de repetições.

UTILIZAÇÃO: para qualquer contraste de médias.

INCONVENIENTE: exagerado rigor, reduzindo o poder de discriminação.

RECOMENDAÇÃO QUANTO AO USO: -Para testar contrastes que envolvam mais do que 2 médias (não-ortogonais).

#### BONFERRONI:

TAXA DE ERRO: com base no experimento.

EXATIDÃO: exato para igual e diferente nº de repetições.

UTILIZAÇÃO: para qualquer contraste de médias.

INCONVENIENTE: exagerado rigor quando o nº de contrastes for grande → resultados pouco discriminativos.

RECOMENDAÇÃO QUANTO AO USO: -Para testar contrastes (médias 2 a 2 ou qualquer contraste) quando forem de nº reduzido.

#### S-N-K:

TAXA DE ERRO: a cada estágio do teste (amplitude de t médias, ( $t-1$ ) médias,...) a probabilidade de se rejeitar a hipótese de igualdade de médias, se verdadeira, é  $\alpha$ .

EXATIDÃO: exato para igual nº de repetições.

UTILIZAÇÃO: para comparar médias 2 a 2.

RECOMENDAÇÃO QUANTO AO USO: -Para se comparar médias 2 a 2 para qualquer situação, decorrência grave ou não para erro de conclusão do tipo I, substituindo razoavelmente com vantagem o teste de Tukey e o teste de Duncan, para os casos específicos.

INCONVENIENTES DOS PROCEDIMENTOS DE COMPARAÇÕES  
MULTIPLAS DE MÉDIAS

- (1) taxa de erro
- (2) a não consideração do valor da estatística F obtida na análise de variância: teste t bayesiano ou teste de Waller-Duncan ou teste da Razão bayesiana k.
- (3) a não formação de grupos mutuamente exclusivos de médias de tratamentos: técnica multivariada de análise de agrupamento "cluster analysis".

2.10 - TESTE BAYESIANO OU TESTE DE WALLER-DUNCAN OU  
TESTE DA RAZÃO BAYESIANA K:

O teste encontra-se descrito em:

Duncan (1965); Waller e Duncan (1969 e 1972); Steel e Torrie (1980); Gomes (1985) e é um dos procedimentos de comparações múltiplas disponíveis no SAS

$$DMS_k = \frac{\text{confiabilidade}}{t(k, F, GLT, GLE)} \cdot \frac{\text{precisão}}{sd}$$

↓  
valor calculado de F  
↓  
razão bayesiana  
↓  
valor tabelado

Razão k: importância relativa do erro tipo I em relação ao erro tipo II.

$$k = \frac{\text{custo do erro tipo I}}{\text{custo do erro tipo II}}$$

$\alpha = 0.01$       0.05      0.01

$k = 50$       100      500

F alto: heterogeneidade entre tratamentos

valor de t é reduzido

alto poder de discriminação

taxa de erro "a nível de comparação" ou por comparação

F baixo: homogeneidade aproximada de tratamentos

valor de t é aumentado

rigoroso

taxa de erro "a nível de experimento" ou por experimento

O teste usa as vantagens dos procedimentos de taxa de erro por experimento e por comparação sem as desvantagens.

TABELA: INTERPOLAÇÃO

| F          | f         | $q \leq 100$ | $q > 100$ | $q \leq 20$ | $q > 20$ |
|------------|-----------|--------------|-----------|-------------|----------|
| $\leq 2.4$ | $\leq 60$ | a            | a         | -           | -        |
|            | $> 60$    | a            | b         | -           | -        |
| $> 2.4$    | $\leq 20$ | -            | -         | a           | b        |
|            | $> 20$    | -            | -         | b           | b        |

$$f = GLE ; q = GLT$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{F}} ; b = \sqrt{F/(F - 1)} \text{ e interpola-se nas tabelas.}$$

Para  $t \geq 15$ , onde  $t$  é o nº de tratamentos e  $GLE \geq 30$

$$t \leq 100, F, \alpha, \omega = 1.72 b$$

$$t \leq 500, F, \alpha, \omega = 2.23 b$$

EXEMPLO: Cultivares de cana-de-açúcar.

| C. Variação | GL | QM    | F   |         |
|-------------|----|-------|-----|---------|
| VARIEDADES  | 3  |       | 5.4 | $t = 4$ |
| ERRO        | 20 | 100.9 |     | $n = 6$ |

$$F = 5.4$$

$$f = GLE = 20$$

$$q = GLT = 3$$

$$a = \sqrt{1/F} = \sqrt{1/5.4} = 0.430$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow k = 100$$

$$f = 20 \quad q = 2 \quad F = 4 \quad a = 0.5 \quad t = 2.18$$

$$f = 20 \quad q = 3 \quad F = 4 \quad a = 0.5 \quad t = ? = 2.18 + 0.027 = 2.207$$

$$f = 20 \quad q = 4 \quad F = 4 \quad a = 0.5 \quad t = 2.22$$

INTERPOLAÇÃO HARMÔNICA:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \longrightarrow 0.04$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \longrightarrow x \Rightarrow x = \frac{0.04 \cdot 1/6}{1/4} = 0.027$$

$$\begin{array}{lllll}
 f = 20 & q = 2 & F = 6 & a = 0.408 & t = 2.08 \\
 f = 20 & q = 3 & F = 6 & a = 0.408 & t = ? = 2.08 + 0.007 = 2.087 \\
 f = 20 & q = 4 & F = 6 & a = 0.408 & t = 2.09
 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \longrightarrow 0.01$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \longrightarrow x \quad \rightarrow x = \frac{(0.01)(4)}{6} = 0.007$$

$$\begin{array}{lllll}
 f = 20 & q = 3 & F = 4 & a = 0.5 & t = 2.207 \\
 f = 20 & q = 3 & F = 5.4 & a = 0.430 & t = ? = 2.087 + 0.029 = 2.116 \\
 f = 20 & q = 3 & F = 6 & a = 0.408 & t = 2.087 \\
 0.5 - 0.408 = 0.092 \longrightarrow 2.207 - 2.087 = 0.12 \\
 0.430 - 0.408 = 0.022 \longrightarrow x
 \end{array}$$

$$x = \frac{(0.12)(0.022)}{0.092} = 0.029$$

$$\begin{aligned}
 DMS_k &= t(k, F, GLT, GLE) \text{sd} = \\
 &= t(100; 5.4; 3; 20) \text{sd} = (2.116)(5.8) = 12.3 \text{ t/ha}
 \end{aligned}$$

$$\text{sd} = \sqrt{\frac{2 \text{ QME}}{n}} = \sqrt{\frac{2(100.9)}{6}} = 5.8 \text{ t/ha}$$

$$DMS = (2.086)(5.8) = 12.1 \text{ t/ha}$$

| VARIÉDADES | MÉDIAS, t/ha |
|------------|--------------|
| B          | 85 a         |
| C          | 76 a b       |
| A          | 72 b c       |
| D          | 62 c         |

Médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo teste de Waller-Duncan a 5%.

2.11. MÉTODO DE ANÁLISE DE AGRUPAMENTO ("CLUSTER ANALYSIS")  
 OU MÉTODO DE SCOTT E KNOTT PARA AGRUPAMENTO DE MÉDIAS  
 SCOTT E KNOTT (1974) [BIOMETRICS]

1 - ANÁLISE DE AGRUPAMENTO "CLUSTER ANALYSIS"

| UNIDADES AMOSTRAIS | VARIÁVEIS |          |   |          |
|--------------------|-----------|----------|---|----------|
|                    | 1         | 2        | . | p        |
| 1                  | $X_{11}$  | $X_{12}$ |   | $X_{1p}$ |
| 2                  | $X_{21}$  | $X_{22}$ |   | $X_{2p}$ |
| :                  | :         | :        |   | :        |
| $n$                | $X_{n1}$  | $X_{n2}$ |   | $X_{np}$ |

\* OBJETIVO: Reunir as unidades amostrais em um número de grupos de tal forma que exista homogeneidade dentro e heterogeneidade entre os grupos.

\* MEDIDA DE PROXIMIDADE

\* MÉTODO DE AGRUPAMENTO

2. MEDIDAS DE PROXIMIDADE

- SIMILARIDADE: semelhança; medida de correlação
- DISSIMILARIDADE: dessemelhança; medida de distância

2.1. MEDIDAS DE DISSIMILARIDADE

(1) DISTÂNCIA EUCLIDIANA

Entre os indivíduos (unidades amostrais)  $i$  e  $i'$  é dada por

$$d_{ii'} = \left[ \sum_{j=1}^p \{ X_{ij} - X_{i'j} \}^2 \right]^{1/2}$$

(2) DISTÂNCIA EUCLIDIANA MÉDIA

$$\Delta_{ii'} = \frac{1}{\sqrt{p}} d_{ii'}$$

(3) DISTÂNCIA GENERALIZADA DE MAHALANOBIS

Entre as unidades amostrais  $i$  e  $i'$  é dada por

$$D_{ii'}^2 = \left[ \begin{array}{c} \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i'} \\ \vdots \\ \bar{x}_{i'} - \bar{\bar{x}}_{i'} \end{array} \right]' S^{-1} \left[ \begin{array}{c} \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_{i'} \\ \vdots \\ \bar{x}_{i'} - \bar{\bar{x}}_{i'} \end{array} \right] ,$$

onde  $S$  é a matriz de dispersão amostral comum a todas as unidades amostrais,  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{x}_{i'}$  são os vetores p dimensionais de médias da unidade  $i$ ,  $i'$ , com  $i, i' = 1, 2, \dots, n$  ( $i \neq i'$ ).

## 2.2 MEDIDAS DE SIMILARIDADE

-Coeficiente de correlação Momento-Produto de Pearson

Para os indivíduos (unidades amostrais)  $i$  e  $i'$  é dado por

$$\sum_j x_{ij} x_{i'j} - \frac{1}{P} \left( \sum_j x_{ij} \right) \left( \sum_j x_{i'j} \right)$$

$$r_{ii'} = \sqrt{\frac{\left[ \sum_j x_{ij}^2 - \frac{1}{P} \left( \sum_j x_{ij} \right)^2 \right] \left[ \sum_j x_{i'j}^2 - \frac{1}{P} \left( \sum_j x_{i'j} \right)^2 \right]}{P}}$$

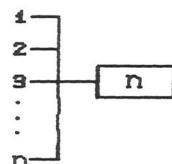
## 3) TÉCNICAS DE AGRUPAMENTO

(1) MÉTODOS HIERÁRQUICOS: Os indivíduos são reunidos em grupos e o processo repete-se em diferentes níveis até formar uma árvore.

(2) MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO: Os grupos são formados pela otimização de um critério de agrupamento. Os grupos são mutuamente exclusivos, formando uma partição do conjunto de entidades.

### 3.1 - TÉCNICAS HIERÁRQUICAS DE AGRUPAMENTO

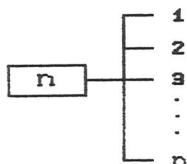
(1) MÉTODOS AGLOMERATIVOS: Produzem uma série de fusões sucessivas das  $n$  entidades, terminando o processo no estágio onde todas as entidades estão num único grupo.



(a) Método do vizinho mais próximo ou método do encadeamento simples;

(b) Método do vizinho mais distante ou método do encadeamento completo.

(2) MÉTODOS DIVISIVOS: Particionam o conjunto de  $n$  entidades sucessivamente até a partição final, formando grupos individuais.  
-Método de Edwards e Cavalli-Sforza (1965).



### 3.2-TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO.

Critérios de agrupamento derivados da identidade:

$$T = H + R$$

- (1) Minimização do traço ( $R$ );
- (2) Minimização do  $|R| \Leftrightarrow$  maximização  $|T| / |R|$ ;
- (3) Minimização do traço ( $H R^{-1}$ ).

Método de Edwards e Cavalli-Sforza: Calculam-se os quadrados das distâncias euclidianas entre os indivíduos e comparam-se todas as possíveis partições dos indivíduos em dois grupos, de maneira a produzir uma partição que é caracterizada pela menor SQ dentro dos grupos  $\Leftrightarrow$  maior SQ entre grupos.

Processo continua dentro de cada subgrupo, chegando no final a grupos individuais.

EXEMPLO: Consideremos os dados a seguir ordenados de forma crescente e a respectiva matriz de distâncias euclidianas ao quadrado.

| Indivíduos | Variável( $x$ ) |
|------------|-----------------|
| 5          | 1               |
| 1          | 2               |
| 2          | 7               |
| 4          | 9               |
| 3          | 12              |

$$d_{ii'}^2 = (x_i - x_{i'})^2$$

$$D=2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 36 & 64 & 121 \\ 1 & 0 & 25 & 49 & 100 \\ 2 & 25 & 0 & 4 & 25 \\ 4 & 49 & 4 & 0 & 9 \\ 3 & 100 & 25 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{(sim.)}$$

Aplicando-se o método obteremos:

| Nº de grupos | Partição  | SQ entre    | SQ dentro                    |
|--------------|-----------|-------------|------------------------------|
| 1            | 1 2 3 4 5 | 0,0 (0%)    | 86,8 (100%) = (1+36+...+9)/5 |
| 2            | 1 5/2 3 4 | 73,6 (85%)  | 13,2 (15%) = 1/2+(4+25+9)/3  |
| 3            | 1 5/2 4/3 | 84,3 (97%)  | 2,5 (3%) = 1/2+4/2           |
| 4            | 1 5/2/4/3 | 86,3 (99%)  | 0,5 (1%)                     |
| 5            | 1/2/3/4/5 | 86,8 (100%) | 0,0 (0%)                     |

|                       |          |           |           |
|-----------------------|----------|-----------|-----------|
| k-1 caminhos :        | k=5      | 5/1 2 4 3 | SQD=53    |
| com valores ordenados | k-1=4    | 5 1/2 4 3 | SQD=13,2  |
|                       | caminhos | 5 1 2/4 3 | SQD=25,2  |
|                       |          | 5 1 2 4/3 | SQD=44,75 |

#### MÉTODO DE SCOTT E KNOTT (1974)

Utilizam o método divisivo de Edwards e Cavalli-Sforza (1965) como técnica de agrupamento das médias de tratamentos e para verificar se os grupos formados em determinada partição são significativamente diferentes definem a estatística

$$\lambda = \frac{\Pi}{2(\Pi - 2)} \cdot \frac{\beta_0}{\hat{\sigma}_0^2}$$

onde  $\beta_0$  = SQ entre grupos máximo = BSS máximo

$$\hat{\sigma}_0^2 = \left[ \sum_1^k \left( \bar{y}_i - \bar{y} \right)^2 + v \cdot \frac{\sigma_y^2}{k} \right] / k + v$$

sendo  $k$  o nº de médias

$\sigma_y^2$  a variância comum às médias de tratamentos  $\left[ \sigma_y^2 = QME/r \right]$

$v$  seu GL associado

$\lambda$  tem distribuição aproximada de  $\chi^2$  com  $v_0$  GL

onde  $v_0 = \frac{k}{\Pi - 2}$

Exemplo: Variedades de cana-de-açúcar

| Variedades | Médias (t/ha) |
|------------|---------------|
| B          | 85            |
| C          | 76            |
| A          | 72            |
| D          | 62            |
| média      | 73,75         |

| C.    | Variação  | GL  | QM    |
|-------|-----------|---|-------|
|       | var       | 3   |       |
|       | erro      | 20  | 100,9 |
|       | t=4       | r=6   |       |
| $s^2$ | $\bar{y}$ | $= \frac{QME}{r} = \frac{100,9}{6} = 16,82$ |       |

matriz de distâncias Euclidianas ao quadrado

$$d_{ii} = (x_i - x_i)^2$$

$$\begin{matrix} & B & C & A & D \\ B & 0 & 81 & 169 & 529 \\ C & & 0 & 16 & 196 \\ A & & & 0 & 100 \\ D & & (\text{sim.}) & & 0 \end{matrix}$$

| Partição | SQDentro | SQEntre |
|----------|----------|---------|
|          | (SQD)    | (SQE)   |
| B C A D  | 272,75   | 0       |
| B C A/D  | 88,7     | 184,05  |
| B/C A/D  | 8        | 264,75  |
| B/C/A/D  | 0        | 272,75  |

$$(81 + 169 + \dots + 100) / 4 = 272,75$$

1ª Partição:

$$B/CAD \quad SQD = (16 + 196 + 100) / 3 = 104$$

$$BC/AD \quad SQD = 81 / 2 + 100 / 2 = 40,5 + 50 = 90,5$$

$$BC/AD \quad SQD = (81 + 169 + 16) / 3 = 88,7 \leq \text{mínimo}$$

$$\therefore SQE \text{ máximo} = BSS \text{ máximo} = 272,75 - 88,7 = 184,05$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \frac{BSS}{\hat{\sigma}^2} = \frac{3,1416}{2(3,1416-2)} \frac{184,05}{25,38} = 9,98$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[ \sum_1^k \left( y_i - \bar{y} \right)^2 + v s^2 \bar{y} \right] / k + v \quad v = 20$$

$$GL = v_o = \frac{k}{\pi - 2} = \frac{4}{3,1416-2} = 3,5 \approx 3$$

$$\chi^2_{0,05(3)} = 7,81$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[ \underbrace{[(85-73,75)^2 + \dots + (62-73,75)^2]}_{272,75} + (20)(16,82) \right] / 4 + 20 = 25,38$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$k = \text{nº de médias na partição} = 4$

## 2ª Partição:

$$\text{B/C A} \quad \text{SQD} = 16 / 2 = 8 \leftarrow \text{mínimo} \Rightarrow \text{SQE máximo} = \text{BSS máximo} = \\ = 88,7 - 8 = 80,7$$

$$B \ C/A \quad SQD = 81 / 2 = 40,5$$

$$\lambda = \frac{3,1416}{2(3,1416-2)} \frac{80,7}{18,48} = 6,01$$

$$GL = v_0 = \frac{k}{\pi - 2} = \frac{3}{3,1416 - 2} = 2,65 \approx 2$$

$$\hat{\sigma}^2 = [88,7 + 20(16,82)] / 3 + 20 = 18,48$$

$$\chi^2_{\cdot05(2)} = 5,99$$

### 3ª Partição:

C/A       $SQD = 0 \Leftarrow$  mínimo  $\Rightarrow$   $SQE$  máximo = BSS máximo = 8

$$\lambda = \frac{3,1416}{2(3,1416-2)} - \frac{8}{15,65} = 0,70$$

$$GL = v_0 = \frac{k}{\pi - 2} = \frac{2}{3,1416 - 2} = 1,75 \approx 1$$

$$\hat{\sigma}^2 = [8 + 20(16,82)] / 2 + 20 = 15,65$$

$$\chi^2_{.05(1)} = 3,84$$

B C A D {  
 B C A { SQD=88,7  
 BSS máximo = 184,05  
 $\lambda = 9,98^*$   
 GL = 3  
 $\chi^2_{.05(3)} = 7,81$   
 }  
 C A {  
 B (SQD=80)  
 $\lambda = 6,01^*$  GL = 2  
 BSS máximo = 80,7  
 $\chi^2_{.05(2)} = 5,99$   
 }  
 A {  
 C (SQD = 0)  
 BSS máximo = 8  
 $\lambda = 0,7$  NS GL = 1  
 $\chi^2_{.05(1)} = 3,84$   
 }  
 D

B     C A     D

| Var | TUKEY N-K | Duncan<br>DMS<br>DMSK |
|-----|-----------|-----------------------|
| B   | a         | a                     |
| C   | a b       | a b                   |
| A   | a b       | b c                   |
| D   | b         | c                     |

## 2.12 CONTRASTES ORTOGONAIS

(Comparações de médias de tratamentos por G.L. individuais na análise de variância)

Uma função linear de médias de tratamentos do tipo

$$C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_t \mu_t \text{ é dita contraste ou}$$

comparação se  $\sum_{i=1}^t c_i = 0$

$$\text{Os contrastes } C = \sum_{i=1}^t c_i \mu_i \text{ e } B = \sum_{i=1}^t b_i \mu_i$$

São ortogonais se  $\sum_{i=1}^t b_i c_i = 0$  [para igual número de repetições por tratamentos]

se  $\sum_{i=1}^t \frac{b_i c_i}{r_i} = 0$  [para diferente número de repetições por tratamento]

Exemplos

$$(1) C_1 = \mu_1 - \mu_2$$

$$(2) C_2 = \mu_1 - \mu_3$$

$$(3) C_3 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} - \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3$$

} são contrastes

$$(4) C_4 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3$$

} não é contraste

$C_1$  e  $C_2$  não são ortogonais:  $(1)(1) + (-1)(0) + (0)(-1) = 1 \neq 0$

$C_1$  e  $C_3$  são ortogonais:  $(1)(1) + (-1)(1) + (0)(-2) = 0$

$C_2$  e  $C_3$  não são ortogonais:  $(1)(1) + (0)(1) + (-1)(-2) = 3 \neq 0$

ANALISE DE VARIANCIA , DCC

| Causas de Variação | GL   |
|--------------------|--|
| tratamentos        | t-1  |
| contrastes         | $\left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{t-1} \end{array} \right.$ |
| ortogonais         | $\left\{ \begin{array}{l} : \\ : \end{array} \right.$                          |
| Erro experimental  | t(r-1)   |
| Total              | rt-1   |

A técnica consiste em decompor a SQ de tratamentos em tantas partes (contrastes) quantos forem os GL de tratamentos , sendo estes contrastes ortogonais entre si e tendo 1 GL .

Para cada contraste calcula-se a SQ dada por

$$SQC_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^t c_{ji} y_{i..} \right)^2}{r \sum_{i=1}^t c_{ji}^2}$$

Onde  $y_{i..}$  = total do tratamento i

r = número de repetições

$\sum_{i=1}^t c_{ji}^2$  = soma dos quadrados dos coeficientes dos contrastes

j = 1 , 2 , ... , t-1 (numero de contrastes)

Testa-se cada contraste pela estatística F obtendo-se

$$F = \frac{QMC_j}{QME} \quad \text{onde } QMC_j = SQC_j$$

Se os contrastes forem ortogonais :

$$SQC_1 + SQC_2 + \dots + SQC_{t-1} = SQT$$

Se os contrastes não forem ortogonais :

$$SQC_1 + SQC_2 + \dots + SQC_{t-1} \neq SQT$$

Como se trabalha com um GL no numerador, está se testando um grupo contra outro levando-nos a uma conclusão específica.

Não apresenta os inconvenientes dos testes de comparações múltiplas de médias.

Exemplo 1 :

| Variedades da cana-de-açúcar     |            |               |               |
|----------------------------------|------------|---------------|---------------|
|                                  | Variedades | médias , t/ha | totais , t/ha |
| origem genética 1                | A          | 72            | 432           |
|                                  | B          | 85            | 510           |
|                                  | C          | 76            | 456           |
| origem genética2                 |            |               |               |
| padrão ou testemunha ou controle | D          | 62            | 372           |

$t=4$        $r=6$

Análise de Variância :

| Causas da variação | GL | SQ   | QM    |
|--------------------|----|--|-------|
| Variedades         | 3  | 1636                                       |       |
| erro experimental  | 20 | 2018                                       | 100,9 |
|                    |    | 3 GL $\Rightarrow$ 3 contrastes ortogonais |       |

Contrastes :

$$C_1 : D \text{ versus } (A+B+C) \Leftrightarrow [\text{testemunha vs resto}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\begin{matrix} \text{novas} & \text{variedade} \\ \text{variedades} & \text{padrão} \end{matrix}]$$

$$C_2 : B \text{ versus } (A+C) \Leftrightarrow [\text{origem genética2 vs origem genética1}]$$

$$C_3 : A \text{ versus } C \Leftrightarrow [\text{entre variedades de origem genética1}]$$

↓

$$C_1 = \mu_A + \mu_B + \mu_C - 3\mu_D$$

$$C_2 = \mu_A + \mu_C - 2\mu_B$$

$$C_3 = \mu_A - \mu_C$$

$C_1, C_2, C_3$  ortogonais

| Variedades | Totais<br>(y <sub>i</sub> ) | coeficientes dos<br>contrastes |                 |                 | c <sub>1i</sub> y <sub>i</sub> | c <sub>2i</sub> y <sub>i</sub> | c <sub>3i</sub> y <sub>i</sub> |
|------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|            |                             | c <sub>1i</sub>                | c <sub>2i</sub> | c <sub>3i</sub> |                                |                                |                                |
| A          | 432                         | 1                              | 1               | 1               | 432                            | 432                            | 432                            |
| B          | 510                         | 1                              | -2              | 0               | 510                            | -1020                          | 0                              |
| C          | 456                         | 1                              | 1               | -1              | 456                            | 456                            | -456                           |
| D          | 372                         | -3                             | 0               | 0               | -1116                          | 0                              | 0                              |
| Total      | 1770                        | 0                              | 0               | 0               | 282                            | -132                           | -24                            |

$$SQC_1 = \frac{(282)^2}{(6)(12)} = 1104$$

$$SQC_3 = \frac{(-24)^2}{(6)(2)} = 48$$

$$SQC_2 = \frac{(-132)^2}{(6)(6)} = 484$$

$$SQC_1 + SQC_2 + SQC_3 = 1104 + 484 + 48 = 1836 = SQT$$

#### Análise de Variância

| Causas de Variação | GL | SQ   | QM    | F       |                                    |
|--------------------|----|------|-------|---------|------------------------------------|
| Variedades         | 3  | 1636 |       |         |                                    |
| C1                 | 1  | 1404 | 1104  | 10,94** | H <sub>0</sub> : C <sub>1</sub> =0 |
| C2                 | 1  | 484  | 484   | 4,80*   | H <sub>0</sub> : C <sub>2</sub> =0 |
| C3                 | 1  | 48   | 48    | 0,48    | H <sub>0</sub> : C <sub>3</sub> =0 |
| Erro experimental  | 20 | 2018 | 100,9 |         |                                    |

$$F_{01}(1,20) = 8,10$$

$$F_{05}(1,20) = 4,35$$

#### Conclusões :

- Novas variedades (em média) superiores à variedade padrão
- A variedade de origem genética 2 (variedade B) é superior às variedades de origem genética 1 (variedades A e C).
- Não se evidenciam diferenças entre as variedades de origem genética 1.

→ Utilizar a variedade B (melhor variedade)

### OUTRA FORMA DE OBTENÇÃO DAS SOMAS DE QUADRADOS DOS CONTRASTES

C<sub>1</sub> :  $\begin{array}{|c|} \hline ABC \\ \hline 18 \\ \hline \end{array}$  vs  $\begin{array}{|c|} \hline D \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$  :

$$\text{SQC}_1 = \frac{\left(y_A + y_B + y_C\right)^2}{18} + \frac{y_D^2}{6} - \frac{\left(y_A + y_B + y_C + y_D\right)^2}{24}$$

$$= \frac{(432+510+456)^2}{18} + \frac{372^2}{6} - \frac{(1770)^2}{24} = 1107$$

$$1954904 + 23064 - 130537,5$$

$$\frac{18}{108578} + 23064 - 130537 = 1105$$

C<sub>2</sub> :  $\begin{array}{|c|} \hline AC \\ \hline 12 \\ \hline \end{array}$  vs  $\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$  :

$$\text{SQC}_2 = \frac{\left(y_A + y_C\right)^2}{12} + \frac{y_B^2}{6} - \frac{\left(y_A + y_B + y_C\right)^2}{18}$$

$$= \frac{(432+456)^2}{12} + \frac{510^2}{6} - \frac{(432+510+456)^2}{18} = 484$$

C<sub>3</sub> :  $\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$  vs  $\begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$  :

$$\text{SQC}_3 = \frac{y_A^2 + y_B^2}{6} - \frac{\left(y_A + y_C\right)^2}{12}$$

$$= \frac{432^2+456^2}{6} - \frac{(432+456)^2}{12} = 48$$

### TESTES DE CONTRASTES UTILIZANDO-SE A ESTATÍSTICA t

H<sub>0</sub> : C<sub>j</sub> = 0 vs H<sub>a</sub> : C<sub>j</sub> ≠ 0

$$\frac{\hat{C}_j - C_j}{\sqrt{\hat{V}\hat{C}\hat{C}_j}} \cap \text{tCGLED} \xrightarrow[\text{H}_0]{\text{sob}} t = \frac{\hat{C}_j}{\sqrt{\hat{V}\hat{C}\hat{C}_j}}$$

$$\hat{V}(C_{j1}) = \frac{QME}{r} (c_{j1}^2 + \dots + c_{jt}^2) = \frac{QME}{r} \left( \sum_{i=1}^t c_{ji}^2 \right)$$

[ para igual número de re-]  
petições por tratamento]

$$\hat{V}(C_{j1}) = QME \left( \frac{c_{j1}^2}{r_1} + \dots + \frac{c_{jt}^2}{r_t} \right) = QME \left( \sum_{i=1}^t \frac{c_{ji}^2}{r_i} \right)$$

[ para diferente número de]  
repetições por tratamento]

$$(1) H_0 : C_1 = 0 \quad vs \quad H_a : C_1 \neq 0$$

$$C_1 = \mu_A + \mu_B + \mu_C - 3\mu_D \quad r = 6$$

$$\hat{C}_1 = \bar{y}_A + \bar{y}_B + \bar{y}_C - 3\bar{y}_D = (72+83+76) - 3(68) = 47$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{C}_1) &= \frac{QME}{6} \left[ 1^2 + 1^2 + 1^2 + (-3)^2 \right] = \frac{QME}{6} (12) = 2QME \\ &= (2)(100,9) = 201,8 \end{aligned}$$

$$t \cdot 01(20) = 2,845$$

$$t = \frac{\hat{C}_1}{\sqrt{\hat{V}(\hat{C}_1)}} = \frac{47}{\sqrt{201,8}} = 3,31 ** \quad GLE=20$$

$\sqsubset$  rejeita-se  $H_0$

$$t^2 = (3,31)^2 = 10,94 = F$$

$$(2) H_0 : C_2 = 0 \quad vs \quad H_a : C_2 \neq 0$$

$$C_2 = \mu_A + \mu_C - 2\mu_B$$

$$\hat{C}_2 = \bar{y}_A + \bar{y}_C - 2\bar{y}_B = (72+76) - 2(85) = -22$$

$$\hat{V}(\hat{C}_2) = \frac{QME}{6} \left[ 1^2 + 1^2 + (-2)^2 \right] = \frac{QME}{6} (6) = QME = 100,9$$

$$t = \frac{\hat{C}_z}{\sqrt{\hat{V}(\hat{C}_z)}} = \frac{-22}{\sqrt{100,9}} = -2,19 *$$

t.05(20)=2,086  
└ rejeita-se H<sub>0</sub>

$$t^2 = (-2,19)^2 = 4,80 = F$$

(3) H<sub>0</sub> : C<sub>A</sub> = 0 vs H<sub>a</sub> : C<sub>A</sub> ≠ 0

$$C_A = \mu_A - \mu_C$$

$$\hat{C}_A = \bar{y}_A - \bar{y}_C = 72 - 76 = -4$$

$$\hat{V}(\hat{C}_A) = \frac{QME}{6} \left[ 1^2 + (-1)^2 \right] = \frac{2QME}{6} = \frac{2(100,9)}{6} = 33,63$$

$$t = \frac{\hat{C}_A}{\sqrt{\hat{V}(\hat{C}_A)}} = \frac{-4}{\sqrt{33,63}} = -0,69 \text{ NS}$$

t.05(20)=2,086  
└ Aceita-se H<sub>0</sub>

$$t^2 = (0,69)^2 = 0,48 = F$$

Exemplo 2:

Num experimento , realizado em DCC com quatro repetições por tratamento , para estudar o efeito de aplicações de enxofre (S) para reduzir a incidência da "Sarna Comum" em batatinha , obtiveram-se os seguintes resultados , expressos em termos de "índice de infecção de sarna" , nos cinco seguintes tratamentos :

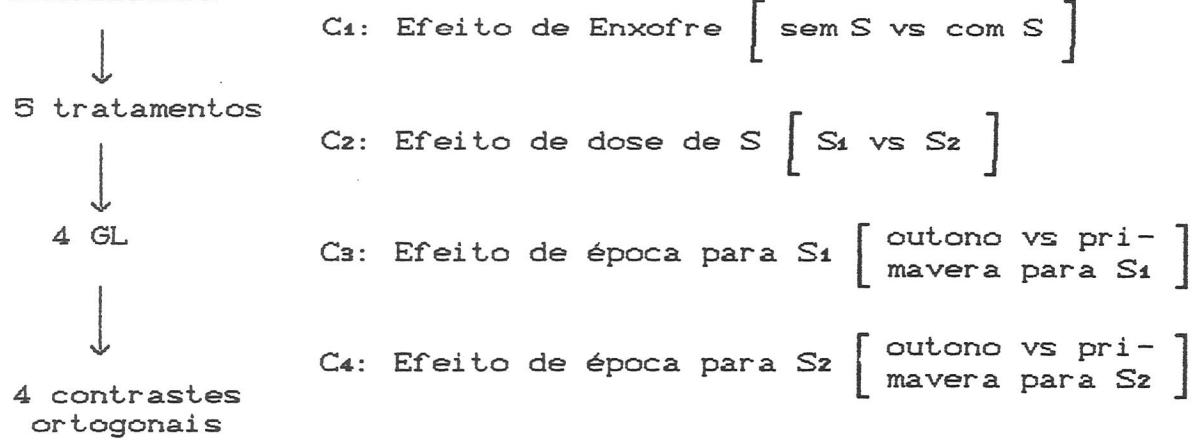
| Enxofre (S)            | Sem | testemunha |        |        |           |
|------------------------|-----|------------|--------|--------|-----------|
|                        |     | Com S1     | Com S2 | outono | primavera |
| Época de aplicações    |     |            |        |        |           |
| Totais dos tratamentos | 100 | 64         | 80     | 40     | 68        |

$S_1$  = dose simples de S

$S_2$  = dose dupla de S

SQE = 158,2

CONTRASTES :



SOMA DOS QUADRADOS DOS CONTRASTES

| Tratamentos        | totais de tratamentos ( $y_{ti}$ ) | coeficiente dos contrastes |                 |                 |                 | $c_{1i}y_{ti}$ | $c_{2i}y_{ti}$ | $c_{3i}y_{ti}$ | $c_{4i}y_{ti}$ |
|--------------------|------------------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    |                                    | C <sub>1i</sub>            | C <sub>2i</sub> | C <sub>3i</sub> | C <sub>4i</sub> |                |                |                |                |
| Testemunha         | 100                                | 4                          | 0               | 0               | 0               | 400            | 0              | 0              | 0              |
| $S_1$ no outono    | 64                                 | -1                         | 1               | 1               | 0               | -64            | 64             | 64             | 0              |
| $S_1$ na primavera | 80                                 | -1                         | 1               | -1              | 0               | -80            | 80             | -80            | 0              |
| $S_2$ no outono    | 40                                 | -1                         | -1              | 0               | 1               | -40            | -40            | 0              | 40             |
| $S_2$ na primavera | 68                                 | -1                         | -1              | 0               | -1              | -68            | -68            | 0              | -68            |
| Total              | 352                                | 0                          | 0               | 0               | 0               | 148            | 36             | -16            | -28            |

$$SQC_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^t c_{ji} y_{i..} \right)^2}{r \sum_{i=1}^t c_{ji}^2}$$

t=5

r=4

$$SQC_1 = \frac{(148)^2}{(4)(20)} = 273,8$$

$$SQC_2 = \frac{(36)^2}{(4)(4)} = 81$$

$$SQC_3 = \frac{(-16)^2}{(4)(2)} = 32$$

$$SQC_4 = \frac{(-28)^2}{(4)(2)} = 98$$

$$\overline{484,8} = SQ_{tratamentos}$$

### Análise de Variância

| C. Variação       | GL | SQ     | QM    | F       |
|-------------------|----|--------|-------|---------|
| Tratamentos       | 4  | 484,8  | 121,2 | 11,49 * |
| C <sub>1</sub>    | 1  | 273,8  | 273,8 | 25,95 * |
| C <sub>2</sub>    | 1  | 81     | 81    | 7,68 *  |
| C <sub>3</sub>    | 1  | 32     | 32    | 3,03 NS |
| C <sub>4</sub>    | 1  | 98     | 98    | 9,29 *  |
| Erro experimental | 15 | 158,92 | 10,55 |         |
| Total             | 19 |        |       |         |

$$F_{0.05(1,15)} = 4,54$$

- Efeito de S / com S  $\Rightarrow$  menor incidência de sarna
- Efeito de dose / S<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  menor incidência de sarna
- Não se evidencia efeito de época / S<sub>4</sub>
- Efeito de época / S<sub>2</sub>; outono menor incidência que na primavera

→ Aplicar dose dupla de S (S<sub>2</sub>) no outono

### Considerações

(1) Sempre que possível usar essa técnica em substituição aos testes de comparações múltiplas, não apresentando a técnica de contrastes ortogonais inconvenientes quanto a taxa de erro, pois consiste simplesmente na decomposição (partição) da SQtratamentos.

(2) Escolher sempre contrastes lógicos que devem ser estabelecidos ao planejar o experimento, ou no mínimo antes de se examinar os dados, evitando com isso a introdução de vício no teste.

(3) Procurar sempre estabelecer contrastes que sejam ortogonais

(4) Em casos de contrastes não-ortogonais, usar preferencialmente, se pelo menos um contraste incluir mais do que duas médias, o teste de Scheffé.

Exemplo 3 : Experimento inteiramente casualizado com diferente número de repetições por tratamento .

Exemplo das variedades de cana-de-açúcar

variedades

| A                   | B     | C     | D    |      |       |
|---------------------|-------|-------|------|------|-------|
| 64                  | 78    | 75    | 55   |      |       |
| 72                  | 91    | 93    | 66   |      |       |
| 68                  | 97    | 78    | 49   |      |       |
| 77                  | 82    | 71    | 64   |      |       |
|                     | 85    | 63    | 70   |      |       |
|                     | 76    | 68    |      |      |       |
| $r_i$               | 4     | 5     | 6    | 6    | 21    |
| $y_{i.}$            | 281   | 433   | 456  | 372  | 1542  |
| $\bar{y}_{i.}$      | 70,25 | 86,60 | 76   | 62   | 73,43 |
| variância<br>dentro |       |       |      |      |       |
|                     | 30,92 | 56,3  | 97,6 | 67,6 | 67,3  |



SQE

$$QME = \frac{(4-1)30,92 + (5-1)56,3 + (6-1)(97,6+67,6)}{3+4+5+5}$$

17 = GLE

| C. Variação | GL | SQ   | QM   | F    |
|-------------|----|------|------|------|
| Variedades  | 3  | 1731 | 577  | 8,58 |
| Erro exp.   | 17 | 1144 | 67,3 |      |
| Total       | 20 | 2875 |      |      |

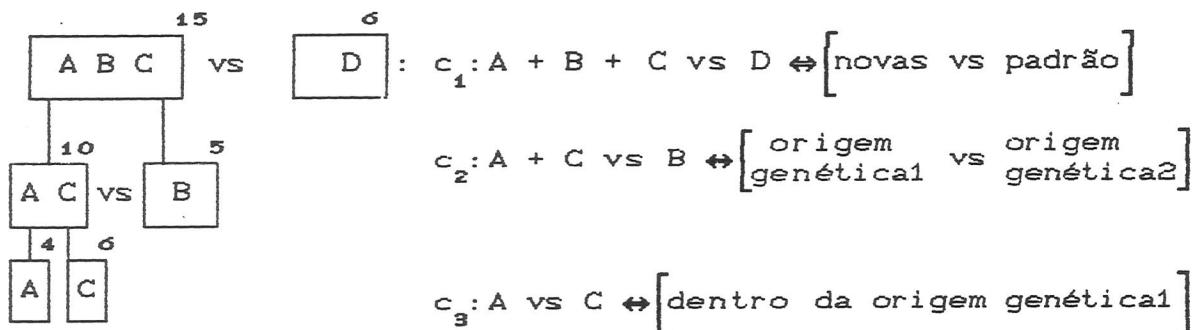
$$n \text{ m s} = P > F = 0,001376$$

$$SQtotal = 64^2 + \dots + 68^2 - (1542)^2 / 21 = 2875$$

$$SQT = \frac{281^2}{4} + \frac{431^2}{5} + \frac{456^2 + 372^2}{6} - \frac{(1542)^2}{21} = 1731$$

$$SQE = SQ_{total} - SQT = 2875 - 1731 = 1144$$

CONTRASTE :



Forma simplificada para cálculo das SQ dos Contrastes

$$\begin{aligned}
 SQc_1 &= \frac{\left(y_{A.} + y_{B.} + y_{C.}\right)^2}{15} + y_{D.}^2 - \frac{\left(y_{A.} + y_{B.} + y_{C.} + y_{D.}\right)^2}{21} \\
 &= \frac{1170^2}{15} + \frac{372^2}{6} - \frac{1542^2}{21} = 1097
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQc_2 &= \frac{\left(y_{A.} + y_{C.}\right)^2}{10} + \frac{y_{B.}^2}{5} - \frac{\left(y_{A.} + y_{B.} + y_{C.}\right)^2}{15} \\
 &= \frac{(737)^2}{10} + \frac{433^2}{5} - \frac{1170^2}{15} = 554,7
 \end{aligned}$$

$$SQc_3 = \frac{y_{A.}^2}{4} + \frac{y_{C.}^2}{6} - \frac{\left(y_{A.} + y_{C.}\right)^2}{10} = \frac{281^2}{4} + \frac{456^2}{6} - \frac{737^2}{10} = 79,3$$

$$SQc_1 + SQc_2 + SQc_3 = 1097 + 554,7 + 79,3 = 1731 = SQT$$

Cálculo das SQ dos contrastes usando os coeficientes

$$c_1 = 6(4\mu_A + 5\mu_B + 6\mu_C - 15\mu_D) \\ = 4\mu_A + 5\mu_B + 6\mu_C - 15\mu_D$$

$$c_2 = 5(4\mu_A + 6\mu_C - 10\mu_B) \\ = 4\mu_A + 6\mu_C - 10\mu_B$$

$$c_3 = 6(4\mu_A - 4\mu_C) = \mu_A - \mu_C$$

Verificação de Ortogonalidade :  $\sum \frac{b_{ji} c_{ji}}{r_i} = 0$

Expressão para calculo da SQ :

$$SQc_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^t c_{ji} \bar{y}_{i.} \right)^2}{\sum_{i=1}^t \frac{c_{ji}^2}{r_i}}$$

| variedades | $r_i$ | $\bar{y}_{i.}$ | $c_{1i}$ | $c_{2i}$ | $c_{3i}$ | $c_{1i}\bar{y}_{i.}$ | $c_{2i}\bar{y}_{i.}$ | $c_{3i}\bar{y}_{i.}$ |
|------------|-------|----------------|----------|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| A          | 4     | 70,25          | 4        | 4        | 1        | 281                  | 281                  | 70,25                |
| B          | 5     | 86,60          | 5        | -10      | 0        | 433                  | -866                 | 0                    |
| C          | 6     | 76             | 6        | 6        | -1       | 456                  | 456                  | -76                  |
| D          | 6     | 62             | -15      | 0        | 0        | -930                 | 0                    | 0                    |
| Total      | 21    | -              | 0        | 0        | 0        | 240                  | -129                 | -5,75                |

$$SQc_1 = \frac{(240)^2}{\frac{4^2}{4} + \frac{5^2}{5} + \frac{6^2}{6} + \frac{(-15)^2}{6}} = 1097$$

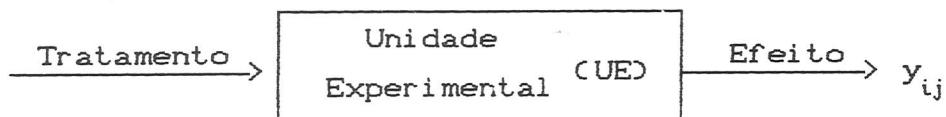
$$SQc_2 = \frac{(-129)^2}{\frac{4^2}{4} + \frac{(-10)^2}{5} + \frac{6^2}{6}} = 554,7$$

$$SQc_3 = \frac{(-5,75)^2}{\frac{1^2}{4} + \frac{(-1)^2}{6}} = 79,3$$

1731 = SQT

| Contraste | GL | SQ    | QM    | F     | $\hat{c}_j$ | erro padrão do<br>contraste  |                       | t | decisão |
|-----------|----|-------|-------|-------|-------------|------------------------------|-----------------------|---|---------|
|           |    |       |       |       |             | $\sqrt{\hat{v}_{\hat{c}_j}}$ | $\hat{v}_{\hat{c}_j}$ |   |         |
| $c_1$     | 1  | 1097  | 1097  | 16,23 | 240         | 59,44                        | 4,038                 | * |         |
| $c_2$     | 1  | 554,7 | 554,7 | 8,24  | -129        | 49,93                        | -2,871                |   | *       |
| $c_3$     | 1  | 79,3  | 79,3  | 1,18  | -5,75       | 5,30                         | -1,086                |   | NS      |

2.13 - MODELO LINEAR PARA A ANALISE DE VARIANCIA DE EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE CASUALIZADOS OU PARA O DELINEAMENTO COMPLETAMENTE CASUALIZADO



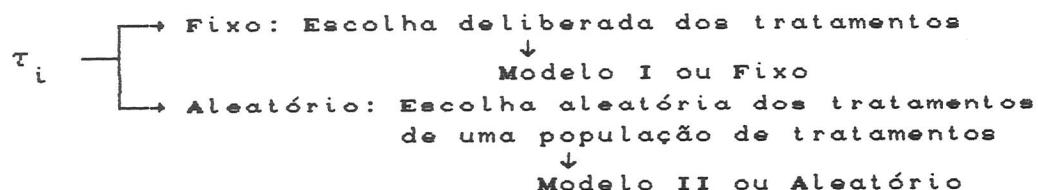
$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Annotations for the components:

- $\mu$ : Média geral
- $\tau_i$ : Efeito do tratamento i
- $\varepsilon_{ij}$ : Erro Experimental; Efeito da UE j com tratamento i
- $\mu_i$ : Média do tratamento i
- Fixo:  $\mu$
- Aleatório:  $\varepsilon_{ij}$
- $i = 1, 2, \dots, t$
- $j = 1, 2, \dots, r$

Legend: → Valor observado na repetição j do tratamento i

Suposição:  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  e independentes



| C. VARIAÇÃO       | GL         | QM  | QM ESPERADOS                           |                              |
|-------------------|------------|-----|--|------------------------------|
|                   |            |     | MODELO I                               | MODELO II                    |
| Tratamentos       | $t - 1$    | QMT | $\sigma^2 + r \sum \tau_i^2 / (t - 1)$ | $\sigma^2 + r \sigma_\tau^2$ |
| Erro Experimental | $t(r - 1)$ | QME | $\sigma^2$                             | $\sigma^2$                   |
| Total             | $rt - 1$   |     |  |                              |

Teste F:  $F = \frac{QMT}{QME}$

MODELO I:  $H_0 : \tau_i = 0 \Leftrightarrow H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t = \mu$

$$F = \frac{\sigma^2 + r \sum_i \tau_i^2 / (t - 1)}{\sigma^2}$$

Se  $H_0$  verdadeira ( $\tau_i = 0$ )  $\Rightarrow F = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \rightarrow H_0$  Aceita

Se a variação entre tratamentos é grande  $\Rightarrow$  numerador maior  $\Rightarrow F$  significativo  $\rightarrow$  rejeita-se  $H_0$

MODELO II:  $H_0 : \sigma_{\tau}^2 = 0$

$$F = \frac{\sigma^2 + r \sigma_{\tau}^2}{\sigma^2}$$

Se  $H_0$  verdadeira ( $\sigma_{\tau}^2 = 0$ )  $\Rightarrow F = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \rightarrow$  aceita-se  $H_0$

Se a contribuição devida a variação de tratamentos for grande  $\Rightarrow F$  significativo  $\rightarrow$  rejeita-se  $H_0$

$y_{ij} \rightarrow$  Valor observado para a repetição j do tratamento i  
 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i \leftarrow$  Estimativa do Efeito de Tratamento i  
 $\hat{\mu} \rightarrow$  Estimativa da Média Geral  
 $\hat{y}_{ij} \rightarrow$  Valor estimado para a repetição j do tratamento i

$\hat{\varepsilon}_{ij} = e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i.$   
 $\hat{e}_{ij} \rightarrow$  Erros, Desvios ou Resíduos; estimativa de  $\varepsilon_{ij}$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) = \bar{y}_{i..}$$

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i..}$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r e_{ij}^2 = \sum_t \sum_j (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 = \sum_t \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i..})^2 = \text{SQE}$$

↓  
Soma de Quadrados  
do Erro Experimental

## MODELOS PARA A ANALISE DE VARIANCIA DO DCC

### MODELO I ou FIXO

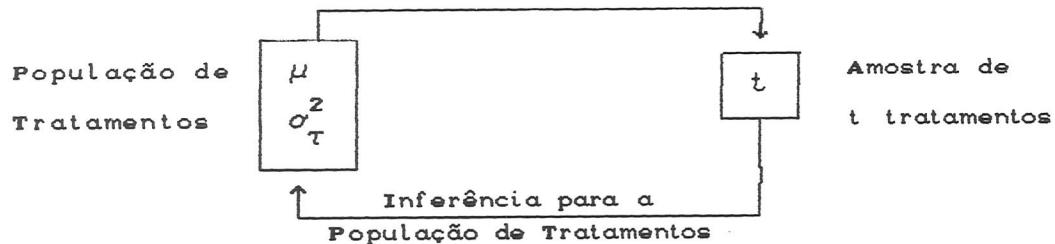
- (1)  $\tau_i$  Fixo; tratamentos escolhidos deliberadamente pelo experimentador
- (2) As conclusões são válidas para o conjunto de tratamentos utilizados no experimento
- (3) É o caso mais comum de experimentação
- (4) Exemplo: ≠s fertilizantes, ≠s rações, ≠s cultivares, ≠s doses de N, ...
- (5) Parâmetros:  $\mu, \tau_i, \sigma^2$
- (6) Componentes de variância :  $\sigma^2$
- (7) Suposição:  $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  e independentes
- (8) Hipótese:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t = \mu \Leftrightarrow H_0: \tau_i = 0$$

### MODELO II ou ALEATÓRIO

- (1)  $\tau_i$  é variável aleatória, ou seja,  $\tau_i \sim N(0, \sigma_\tau^2)$  e independentes
- (2) Tratamentos são uma amostra aleatória de uma população de tratamentos
- (3) As conclusões são válidas para a população de tratamentos
- (4) Exemplos: população de Linhagens, seleciona-se algumas para a experimentação e generaliza-se os resultados para a população
- (5) Parâmetros:  $\mu, \sigma_\tau^2, \sigma^2$
- (6) Componentes de variância  $\sigma^2$  e  $\sigma_\tau^2$
- (7) Suposições:  $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  e independentes,  $\tau_i \sim N(0, \sigma_\tau^2)$  e independentes,  $e_{ij} \sim \tau_i$  independentes
- (8) Hipótese:  $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$

Modelo II ou Aleatório



$$H_0: \sigma^2_{\tau} = 0$$

$$H_a: \sigma^2_{\tau} \neq 0$$

↑  
Variância da população de tratamentos da qual os t tratamentos usados no experimento são uma amostra aleatória

COMPONENTES DE VARIÂNCIA E SUAS ESTIMATIVAS

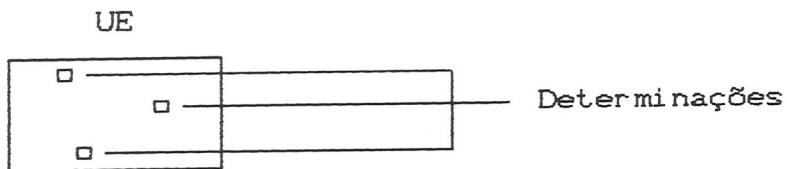
$$(1) E(QME) = \sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = QME$$

$$(2) E(QMT) = \sigma^2 + r\sigma^2_{\tau} \rightarrow \hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}^2_{\tau} = QMT$$

↑ QME

$$\therefore \hat{\sigma}^2_{\tau} = \frac{QMT - QME}{r}$$

## 2.14 AMOSTRAGEM NO DELINEAMENTO COMPLETAMENTE CASUALIZADO



Exemplos:

(1) Vaso com 3 plantas

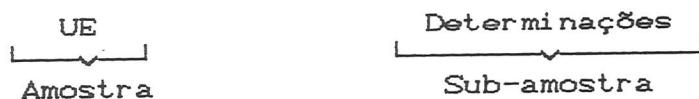
UE                              Determinações

(2) Parcada de campo com 20 plantas

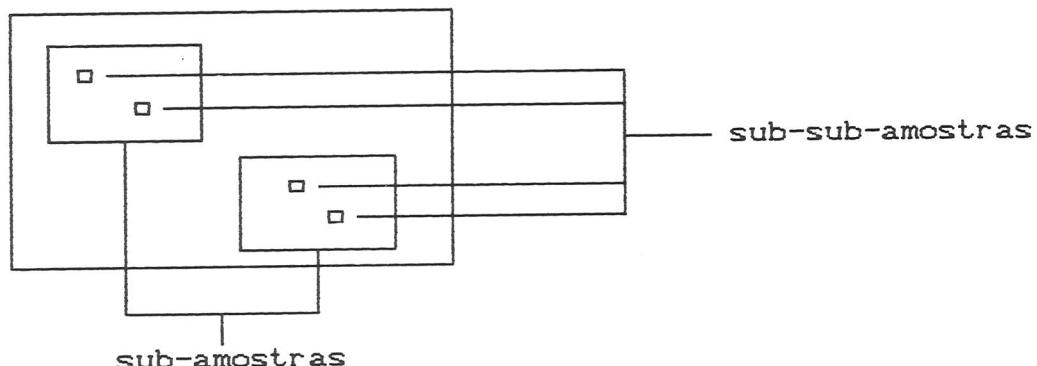
UE                              Determinações

(3) Baia com 5 animais

UE                              Determinações



Amostra (UE)



As amostragens sucessivas dão origem as chamadas classificações hierárquicas.

### Caso geral de amostragem

|  |   |   |
|--|---|---|
| $t$ tratamentos<br>$r$ repetições ou UE por tratamento<br>$n$ determinações por UE | } | $\Rightarrow$<br>$n \ r \ t$<br>observações |
|--|---|---|

### Modelo matemático

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

Valor observado na determinação  $k$  da repetição  $j$  do tratamento  $i$ .      ↑      ↑      ↑      ↑  
 ↑      ↑      ↑      ↑      ↑  
 Efeito da determinação  $ijk$ ; Erro da determinação  $ijk$ .  
 Efeito da UE  $ij$ ; Erro da UE  $ij$ .  
 Efeito do tratamento  $i$ .  
 Média geral.

$$i = 1, 2, \dots, t$$

$$j = 1, 2, \dots, r$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Suposições:  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon)$  e independentes

$\delta_{ijk} \sim N(0, \sigma^2_\delta)$  e independentes

$\varepsilon_{ij}$  e  $\delta_{ijk}$  independentes entre si.

Modelos: Tipo I ou Fixo:  $\tau_i$  fixo

Tipo II ou Aleatório:  $\tau_i$  aleatório ;  $\tau_i \sim N(0, \sigma^2_\tau)$   
independentes

Análise de Variância

Estrutura dos dados

| Tratamentos | UE | Determinações |           |     | Totais                            |
|-------------|----|---------------|-----------|-----|-----------------------------------|
|             |    | 1             | 2         | ... |                                   |
| 1           | 1  | $y_{111}$     | $y_{112}$ | ... | $y_{11n}$                         |
|             | 2  |               |           |     | $y_{11.}$                         |
|             | .  |               |           |     | $y_{12.}$                         |
|             | r  |               |           |     | :                                 |
|             | 1  |               |           |     |                                   |
|             | 2  | $y_{ijk}$     |           |     |                                   |
|             | .  |               |           |     | :                                 |
|             | r  |               |           |     |                                   |
|             | t  |               |           |     |                                   |
|             |    |               |           |     | $y_{...} \rightarrow$ total geral |

| Tratamentos | UE |           |     |   | Total     |
|-------------|----|-----------|-----|---|-----------|
|             | 1  | 2         | ... | r |           |
| 1           | 1  |           |     |   |           |
|             | 2  |           |     |   | $y_{1..}$ |
|             | .  |           |     |   |           |
|             | r  |           |     |   |           |
|             | 1  |           |     |   |           |
|             | 2  | $y_{ij.}$ |     |   |           |
|             | .  |           |     |   |           |
|             | r  |           |     |   |           |
|             | t  |           |     |   |           |
|             |    |           |     |   | $y_{...}$ |

Tabela de Análise de Variância

| Causas de Variação                      | GL      | SQ      | QM   | F                   |
|---|---------|---------|------|---------------------|
| Tratamentos                             | t-1     | SQT     | QMT  | $\frac{QMT}{QMEA}$  |
| UE/Tratamentos<br>(Erro Experimental)   | t(r-1)  | SQEE    | QMEE | $\frac{QMEE}{QMEA}$ |
| Determinações/UE<br>(Erro Experimental) | rt(n-1) | SQEA    | QMEA |                     |
| Total                                   | nrt-1   | SQTotal |      |                     |

t tratamentos

r repetições (UE)/tratamentos

n determinações/UE

Quadrados Médios Esperados

| Causas de Variação | Modelo II  | Modelo I  |
|--------------------|--|---|
| Tratamentos        | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nr\sigma_\tau^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nr \sum_i \tau_i^2 / (t-1)$ |
| Erro Experimental  | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2$                   | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2$                              |
| Erro de Amostragem | $\sigma^2$   | $\sigma^2$  |

SQ

$$SQ_{Total} = \sum_{i, j, k} y_{ijk}^2 - FC \quad ; \quad FC = \frac{\bar{y}_{...}^2}{nrt}$$

$$SQ_T = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{nr} - FC$$

$$SQ_{EE} = \sum_{i, j} \frac{y_{ij.}^2}{n} - FC - SQ_T$$

$$SQ_{EA} = SQ_{Total} - SQ_T - SQ_{EE}$$

### Erro Padrão da média de um tratamento

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{QMEE}{nr}}$$

### Erro Padrão da diferença entre 2 médias de tratamentos

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2QMEE}{nr}}$$

#### Teste F

Ci)  $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$  ou  $H_0: \tau_i = 0$

$$F = \frac{QMT}{QMEE}; \text{ rejeita-se } H_0 \text{ se } F_{\text{calculado}} > F_\alpha^{[t-1]; t(r-1)}$$

Cii)  $H_0: \sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$F = \frac{QMEE}{QMEA}; \text{ rejeita-se } H_0 \text{ se } F_{\text{calculado}} > F_\alpha^{[t(r-1); rt(n-1)]}$$

#### Estimativa dos componentes de variância

$$E(QMEA) = \sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = QMEA$$

$$E(QMEE) = \sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \underbrace{\hat{\sigma}^2}_{QMEA} + \underbrace{n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}_{QMEE} = QMEE \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{QMEE - QMEA}{n}$$

$$E(QMT) = \sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nr\sigma_\tau^2 \Rightarrow \underbrace{\hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}_{QMEE} + nr\hat{\sigma}_\tau^2 = QMT$$

$$\therefore \hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{QMT - QMEE}{nr}$$

Exemplo: Quatro plantas de uma hortaliça foram escolhidas ao acaso. De cada planta colheram-se ao acaso 3 folhas. Sobre cada folha fizeram-se 2 determinações da % de cálcio na matéria seca.

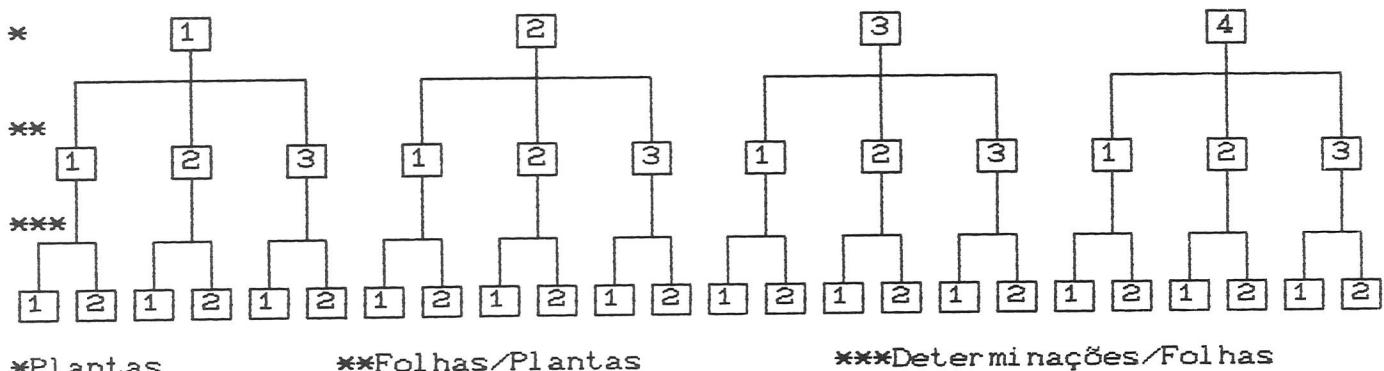
Obtiveram-se os seguintes resultados:

| Planta | Folha | Determinações |     | $y_{ijk}$ | $y_{ij.}$             |
|--------|-------|---------------|-----|-----------|-----------------------|
|        |       | 1             | 2   |           |                       |
| 1      | 1     | 3,3           | 3,1 | 6,4       |                       |
|        | 2     | 3,5           | 3,5 | 7,0       |                       |
|        | 3     | 3,1           | 3,2 | 6,3       |                       |
| 2      | 1     | 3,3           | 3,4 | 6,7       |                       |
|        | 2     | 2,9           | 2,9 | 5,8       |                       |
|        | 3     | 3,2           | 3,2 | 6,4       |                       |
| 3      | 1     | 2,8           | 2,7 | 5,5       |                       |
|        | 2     | 3,0           | 3,1 | 6,2       |                       |
|        | 3     | 2,6           | 2,7 | 5,3       |                       |
| 4      | 1     | 3,5           | 3,6 | 7,1       |                       |
|        | 2     | 3,8           | 3,0 | 7,6       |                       |
|        | 3     | 3,4           | 3,5 | 6,9       |                       |
|        |       |               |     | 77,8      | $\rightarrow y_{...}$ |

| Planta | Folha     |     |      | Total                |
|--------|-----------|-----|------|----------------------|
|        | 1         | 2   | 3    |                      |
| 1      | 6,4       | 7,0 | 6,3  | 19,7                 |
| 2      | 6,7       | 5,8 | 6,4  | 18,9                 |
| 3      | 5,5       | 6,1 | 5,3  | 16,9                 |
| 4      | 7,1       | 7,6 | 6,9  | 21,6                 |
| Total  | $y_{ij.}$ |     | 77,1 | $\leftarrow y_{...}$ |

#### Efeito aleatório de tratamento (plantas)

$$t=4 \quad r=3 \quad n=2$$



\*Plantas

\*\*Folhas/Plantas

\*\*\*Determinações/Folhas

Tabela de Análise de Variância

| Causas de Variação           | GL | SQ   | QM     | F       | QMEsperados   |
|------------------------------|----|------|--------|---------|---|
| Plantas                      | 3  | 1,89 | 0,6300 | 7,68**  | $\sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{6\sigma^2}{\tau}$ |
| Folhas/Plantas               | 8  | 0,66 | 0,0820 | 16,40** | $\sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{\varepsilon}$                          |
| Determinações/<br>Folhas(EA) | 12 | 0,06 | 0,0086 |         | $\sigma^2$  |
| Total                        | 23 | 2,61 |        |         |   |

(i)  $H_0: \sigma_{\tau}^2 = 0$        $H_a: \sigma_{\tau}^2 \neq 0$

$F=7,68 > F_{0,01}(3,8)=7,59 \Rightarrow$  rejeita-se  $H_0$

A % de cálcio varia de planta a planta na hortaliça.

(ii)  $H_0: \sigma_{\varepsilon}^2 = 0$        $H_a: \sigma_{\varepsilon}^2 \neq 0$

$F=16,40 > F_{0,01}(8,12)=4,50 \Rightarrow$  rejeita-se  $H_0$

A % de cálcio varia de folha a folha na mesma planta.

#### Estimativa dos componentes de variância

(i)  $\hat{\sigma}^2 = QMEA = 0,0050$

(ii)  $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{QMEE - QMEA}{n} = \frac{0,0820 - 0,0050}{2} = 0,0385$

(iii)  $\hat{\sigma}_{\tau}^2 = \frac{QMT - QMEE}{nr} = \frac{0,6300 - 0,0820}{6} = 0,0913$

(iv)  $\frac{\hat{\sigma}_{\tau}^2}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}$   $\longrightarrow$  medida da relação da variabilidade (variação) entre tratamentos e da variabilidade (variação) dentro dos tratamentos.

$$\frac{\hat{\sigma}_{\tau}^2}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} = \frac{0,0913}{0,0385} = 2,37$$

A variação da % média de cálcio entre plantas é grande em relação a variação da % média de cálcio da folha.

$$(v) \hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_{\tau}^2}{\hat{\sigma}_{\tau}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} \rightarrow \text{Proporção da variância atribuída aos tratamentos.}$$

↑  
Coeficiente de correção intraclass.

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_{\tau}^2}{\hat{\sigma}_{\tau}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} = \frac{0,0913}{0,0913 + 0,0385} = 0,70$$

↓  
A variação entre plantas explica 70% da variação da % de cálcio.

### Eficiência Relativa de Planejamentos Experimentais

Um plano ou planejamento experimental é mais eficiente que outro quando proporciona uma variância menor para a média de um tratamento.

#### Planejamento antigo

- Variância da média de 1 tratamento

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{\sigma^2 + n\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{nr} = \frac{\sigma^2}{nr} + \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{r}$$

- Estimativa da variância da média de 1 tratamento

$$\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\tau}^2}{nr} + \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{r}$$

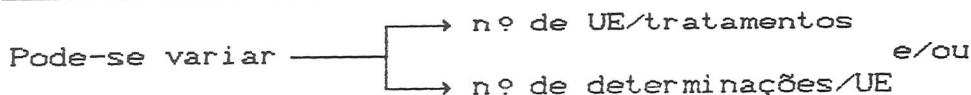
$$\hat{\sigma}_y^2 \text{ ou } \hat{\sigma}_y^2 = \frac{QMEA}{nr} + \frac{(QMEE-QMEA)/n}{r}$$

pois  $\hat{\sigma}_{\tau}^2 = QMEA$  e  $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{QMEE-QMEA}{n}$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{QMEA}{nr} + \frac{QMEE}{nr} - \frac{QMEA}{nr}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{QMEE}{nr}$$

#### Planejamento novo



Admita-se  $r'$  UE/tratamento e  $n'$  determinações/UE a variância da média de 1 tratamento será

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{n'r'} + \frac{\sigma_e^2}{r'}$$

e sua estimativa

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{QMEA}{n'r'} + \frac{(QMEE-QMEA)/n}{r'}$$

### Eficiência Relativa

A eficiência relativa é definida pelo inverso da razão das variâncias.

A eficiência relativa do novo planejamento em relação ao antigo é dado por

$$E.R. = \frac{1}{\hat{\sigma}_y^2 / \sigma_y^2} \times 100 = \frac{\sigma_y^2}{\hat{\sigma}_y^2} \times 100$$

se  $\hat{\sigma}_y^2 < \sigma_y^2$  o novo planejamento é mais eficiente que o antigo, desde que mantidas as condições de execução.

Deve-se levar em consideração custo e trabalho.

### Exemplo

#### Planejamento Antigo

4 plantas ;  $t=4$

3 folhas/planta ;  $r=3$

2 determinações/folha;  $n=2$

$QMEE = 0,0820$

$QMEA = 0,0050$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{QMEE}{nr} = \frac{0,0820}{(2)(3)} = 0,0137$$

Qual a eficiência relativa de um novo planejamento, usando-se 1 determinação/folha e 4 folhas/plantas?

### Planejamento novo

$$r' = 4 ; n' = 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{y}}^2 &= \frac{QMEA}{n'r'} + \frac{(QMEE - QMEA)/n}{r'} \\ &= \frac{0,0050}{1 \times 4} + \frac{(0,0820 - 0,0050)/2}{4} \\ &= 0,00185 + 0,009625 \\ &= 0,0109 \end{aligned}$$

### Eficiência Relativa

$$ER = \frac{\frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{y}}{\frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{y}} \times 100 = \frac{0,0137}{0,0109} \times 100 = 126\%$$

O novo planejamento (c/ 4 determinações por planta) é 26% mais eficiente que o antigo planejamento (c/ 6 determinações por planta).

Ganho em eficiência = 26%

100% — 6 determinações/planta

26% — X

X = 1,56 det/planta

O planejamento antigo precisa de 1,56 det/planta a mais que o novo para ter a mesma eficiência.

(1) DCC com Diferente nº de Repetições por tratamento

tratamentos: 1 2 t

repetições : r<sub>1</sub> r<sub>2</sub> r<sub>t</sub>

nº de observações: n = r<sub>1</sub> + r<sub>2</sub> + ... + r<sub>t</sub>

| Causas de Variação | GL  | QM  | QM Esperados                                |                              |
|--------------------|-----|-----|---|------------------------------|
|                    |     |     | Modelo I                                    | Modelo II                    |
| Tratamentos        | t-1 | QMT | $\sigma^2 + \sum_i r_{i1} \tau_i^2 / (t-1)$ | $\sigma^2 + c \sigma^2 \tau$ |
| Erro Experimental  | n-t | QME | $\sigma^2$                                  | $\sigma^2$                   |
| Total              | n-1 |     |   |                              |

$$c = \frac{1}{t-1} \left( n - \frac{\sum r_i^2}{n} \right)$$

Teste F:  $H_0: \tau_i = 0$  ou  $H_0: \frac{\sigma^2}{\tau} = 0$

Testadas por F =  $\frac{QMT}{QME}$

(2) DCC com Diferente nº de Repetições por Tratamento e Diferente nº de Determinações por Repetição

t tratamentos

r<sub>i</sub> repetições/tratamento

r<sub>ij</sub> determinações/repetição

| Causas de Variação | QM   | QM Esperados   |   |
|--------------------|------|--|---|
|                    |      | Modelo I   | Modelo II   |
| Tratamentos        | QMT  | $\sigma^2 + c_2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \sum_i \frac{r_{i1}^2 \cdot \tau_i^2}{(t-1)}$ | $\sigma^2 + c_2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon} + c_3 \frac{\sigma^2}{\tau}$ |
| Erro Experimental  | QME  | $\sigma^2 + c_1 \frac{\sigma^2}{\varepsilon}$  | $\sigma^2 + c_1 \frac{\sigma^2}{\varepsilon}$                             |
| Erro Amostragem    | QMEA | $\sigma^2$   | $\sigma^2$  |

$$c_1 = \frac{r_{..} - \sum_i (\sum_j r_{ij}^2 / r_{i..})}{\sum_i (r_{i..} - 1)}; \quad c_2 = \frac{\sum_i (\sum_j r_{ij}^2 / r_{i..}) - \sum_{i,j} r_{ij}^2 / r_{..}}{t-1}$$

$$c_3 = \frac{r_{..} - \sum_i r_{i..}^2 / r_{..}}{t-1}$$

Teste F                       $H_0 : \tau_i = 0$  ou             $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$

$$F = \frac{QMT}{QMe}$$

$$QMT = a_1 QMEE + a_2 QMEA$$

$$a_1 = \frac{c_2}{c_1}; \quad a_2 = 1 - \frac{c_2}{c_1}$$

$n' = GL$  de  $QMT$

$$n' = \frac{(QMT)^2}{\frac{(a_1 QMEE)^2}{GLEE} + \frac{(a_2 QMEA)^2}{GLEA}}$$

Rejeita-se  $H_0$  se  $F$  calculado >  $F_{\alpha}(t-1, n')$

$$H_0 : \sigma_\epsilon^2 = 0$$

Testa-se por  $F = \frac{QMEE}{QMEA}$

### (3) Subdivisão Repetida no DCC

t tratamentos

r repetições ou U.E./tratamento

n amostras/U.E.

s determinações/amostra

#### Modelo

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} + \delta_{ijk} + \gamma_{ijkl}$$

$\tau_i$  → fixo ou aleatório

$\epsilon_{ij}, \delta_{ijk}, \gamma_{ijkl}$  → aleatórios

$\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$  e independentes

$\delta_{ijk} \sim N(0, \sigma_\delta^2)$  e independentes

$\gamma_{ijkl} \sim N(0, \sigma_\gamma^2)$  e independentes

$\epsilon_{ij}, \delta_{ijk} \in \gamma_{ijkl}$  independentes entre si

| C.. Variação           | GL       | QM   | QM Esperados   |
|------------------------|----------|------|--|
|                        |          |      | Modelo II  |
| Tratamentos            | t-1      | QMT  | $\sigma^2 + s\sigma_\delta^2 + ns\sigma_\epsilon^2 + nrs\sigma_\gamma^2$ |
| U.E./tratamento        | t(r-1)   | QMEE | $\sigma^2 + s\sigma_\delta^2 + ns\sigma_\epsilon^2$                      |
| Amostras/UE            | rt(n-1)  | QMEA | $\sigma^2 + s\sigma_\delta^2$  |
| Determinações/amostras | nrt(s-1) | QMED | $\sigma^2$   |
| Total                  |          |      |  |
|                        | nrt(s-1) |      |  |

Para o modelo I simplesmente substituir na 1ª linha da tabela nrs  $\sigma_{\tau}^2$  por nrs  $\sum \tau_i^2 / (t-1)$

Teste F :

(i)  $H_0: \tau_i = 0$  ou  $H_0: \sigma_{\tau}^2 = 0$   
 $F = \frac{QMT}{QME}$

(ii)  $H_0: \sigma_{\varepsilon}^2 = 0$   
 $F = \frac{QME}{QMEA}$

(iii)  $H_0: \sigma_{\delta}^2 = 0$   
 $F = \frac{QMEA}{QMED}$

2.15. VERIFICAÇÃO DA ADEQUABILIDADE DO MODELO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA O DELINEAMENTO COMPLETAMENTE CASUALIZADO COM UM FATOR.

1. SUPosiÇÃO DA ANALISE DE VARIÂNCIA.

1.1. Aditividade:

O modelo é linear e aditivo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

↑      ↑      ↑  
 Efeito do tratamento  $\tau_i$   
 Média Geral  
 Observação da repetição  $j$  do tratamento  $\tau_i$   
 $i = 1, 2, \dots, t$                    $j = 1, 2, \dots, r$  (ou  $r_i$ )

1.2. Normalidade, homogeneidade e independência:

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  e independentes

Para o modelo de efeito aleatório acrescenta-se as suposições que  $\tau_i \sim N(0, \sigma_\tau^2)$  e independentes e que  $\tau_i$  e  $\varepsilon_{ij}$  são independentes entre si.

2. VERIFICAÇÃO DAS SUPosiÇÕES DA ANALISE DE VARIÂNCIA.

2.1. Análise de resíduos:

Para o modelo  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$ , tem-se que

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) = \bar{y}_{i..}$$

Os desvios ou resíduos  $e_{ij}$  são dados por:

$$e_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i..} \quad \text{pois} \quad e_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$$

Através da análise dos resíduos  $e_{ij}$  pode-se verificar se as suposições do modelo estão satisfeitas, pois pode-se verificar normalidade, homogeneidade, independência, bem como permite detectar a presença de valores aberrantes ("outliers"), que é uma das causas, a mais comum, de não-aditividade.

## 2.2. Verificação estatística de aditividade:

### Teste de aditividade de Tukey.

### 2.3. Verificação estatística de normalidade:

### Testes de normalidade (testes de aderência)

- Teste  $\chi^2$
  - Teste de Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov)

#### 2.4. Verificação estatística de independência:

### **Teste de independência**

- #### • Teste do sinal (teste Cox-Stuart)

## 2.5. Verificação estatística de homocedasticidade:

## Testes de homogeneidade de variâncias

- Teste de Bartlett
  - Teste de Cochran
  - Teste de Hartley ou F máximo

## 2.1. Análise de resíduos

Exemplo: DCC       $y = \text{ganho de peso} = \text{peso final} - \text{peso inicial}$   
4 rações; 5 repetições/racão      suíços

| Ração  | Repetições |    |    |    |       | Médias | Variâncias |
|--------|------------|----|----|----|-------|--------|------------|
|        | 1          | 2  | 3  | 4  | 5     |        |            |
| A      | 35         | 19 | 31 | 15 | 30    | 26     | 73         |
| B      | 40         | 35 | 46 | 41 | 33    | 39     | 26,5       |
| C      | 39         | 27 | 20 | 29 | 45    | 32     | 99         |
| D      | 27         | 12 | 13 | 28 | 30    | 22     | 76,5       |
| Médias | <hr/>      |    |    |    | 29,75 | 68,75  |            |

Resíduos:  $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{ij}$

| Ração | Repetições |     |     |     |    |
|-------|------------|-----|-----|-----|----|
|       | 1          | 2   | 3   | 4   | 5  |
| A     | 9          | -7  | 5   | -11 | 4  |
| B     | 1          | -4  | 7   | 2   | -6 |
| C     | 7          | -5  | -12 | -12 | 13 |
| D     | 5          | -10 | -9  | -9  | 8  |

Resíduos Padronizados:

$$e_{ij} = e_{ij} / \sqrt{QME} = e_{ij} / \sqrt{68,75} = e_{ij} / 8,2916$$

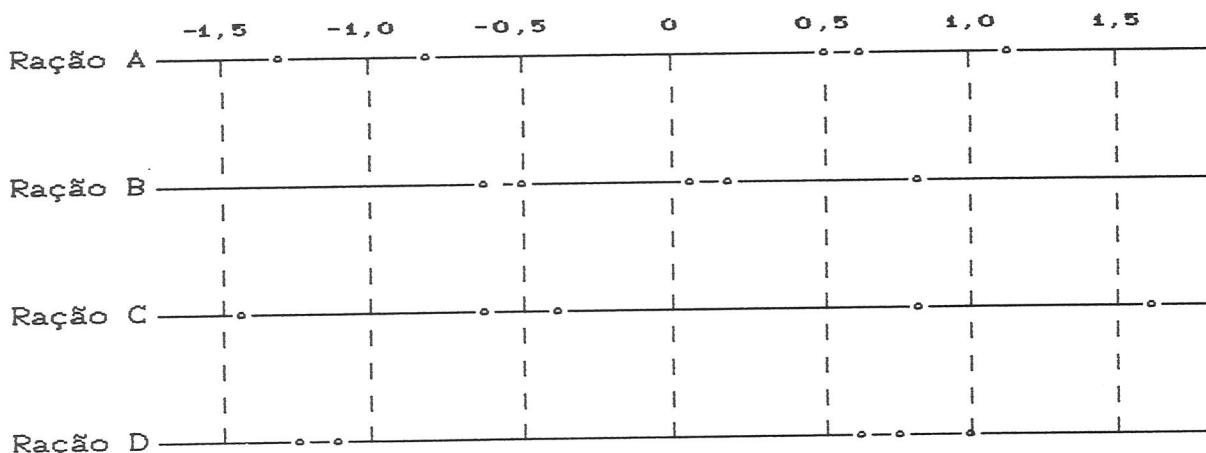
| Ração | Respetições |      |      |      |      |
|-------|-------------|------|------|------|------|
|       | 1           | 2    | 3    | 4    | 5    |
| A     | 1,1         | -0,8 | 0,6  | -1,3 | 0,5  |
| B     | 0,1         | -0,5 | 0,8  | 0,2  | -0,7 |
| C     | 0,8         | -0,6 | -1,4 | -0,4 | 1,6  |
| D     | 0,6         | -1,2 | -1,1 | 0,7  | 1,0  |

#### ANOVA

| C. Variação | GL | SQ      | QM     | F    |
|-------------|----|---------|--------|------|
| Rações      | 3  | 823,75  | 274,57 | 3,99 |
| Erro        | 16 | 1100    | 68,75  |      |
| Total       | 19 | 1923,75 |        |      |

$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{e_{ij}}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

VERIFICAÇÃO DE HOMOCEDASTICIDADE E PRESENÇA DE VALORES ABERRANTES.



(ci) A variabilidade dos resíduos é aproximadamente igual nos 4 tratamentos (rações) o que comprova a suposição de igualdade das variâncias dentro de cada tratamento (homocedasticidade dos erros).

Cii) Nenhum resíduo é muito maior ou menor que os demais, garantindo a não-existência de valores aberrantes ("outliers").

Como todos  $|e_{ij}^*| < 1,96$ , onde  $e_{ij}^* = \frac{e_{ij}}{\sqrt{QME}}$ ,

considera-se a não-existência de "outliers" com confiabilidade de 95% .

#### VERIFICAÇÃO DE INDEPENDÊNCIA.

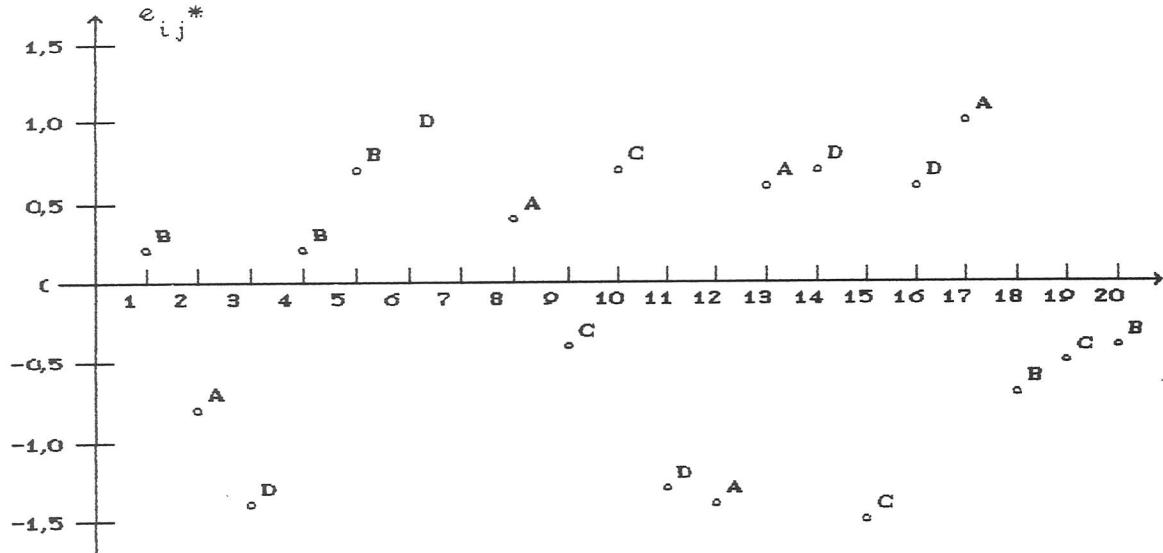
Conjunto das UE

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 |    |    |
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 |    |    |    |
| 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 |    |    |    |

Conjunto dos Tratamentos

|   |
|---|
| A |
| B |
| C |
| D |

| Ração | Repetição |    |    |    |    |
|-------|-----------|----|----|----|----|
|       | 1         | 2  | 3  | 4  | 5  |
| A     | 17        | 2  | 13 | 12 | 8  |
| B     | 1         | 20 | 5  | 4  | 18 |
| C     | 10        | 19 | 15 | 9  | 7  |
| D     | 16        | 3  | 11 | 14 | 6  |



Os resíduos se distribuem erraticamente (sem nenhuma ordem) em relação ao eixo das abscissas, o que indica a validade da suposição de independência.

## 2.2. Verificação Estatística de Aditividade

## 2.3. Verificação Estatística de Normalidade

## 2.4. Verificação Estatística de Independência

## 2.5. Verificação estatística de homocedasticidade

|                  |              |              |     |              |
|------------------|--------------|--------------|-----|--------------|
| Tratamentos      | 1            | 2            | ... | t            |
| Variâncias       | $\sigma_1^2$ | $\sigma_2^2$ | ... | $\sigma_t^2$ |
| Nº de repetições | $r_1$        | $r_2$        | ... | $r_t$        |
| GL               | $r_1 - 1$    | $r_2 - 1$    | ... | $r_t - 1$    |

H0:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_t^2$  [HOMOGENEIDADE DAS VARIÂNCIAS DE TRATAMENTOS]

Ha: Pelo menos 2 variâncias diferem [HETEROGENEIDADE DAS VARIÂNCIAS DE TRATAMENTOS]

### 2.5.1. Relação Empírica:

Se  $\frac{\text{maior variância}}{\text{menor variância}} \leq 4$  (6 ou 7)  $\Rightarrow$  homogeneidade de variâncias

## 2.5.2. Testes de homogeneidade de variâncias:

### (1) Teste de Bartlett

Para o teste de Bartlett calcula-se a estatística

$$\chi^2 = \frac{M}{C} \quad \text{onde}$$

$$M = 2,3026 \left[ \sum_{i=1}^t (r_i - 1) \log \bar{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^t (r_i - 1) \log \sigma_i^2 \right]$$

Fator que converte logaritmo na base decimal para logaritmo na base e.

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^t (r_i - 1) \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^t (r_i - 1)} = \text{QME}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(t-1)} \left[ \sum_{i=1}^t \frac{1}{(r_i - 1)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^t (r_i - 1)} \right]$$

Se  $r_1 = r_2 = \dots = r_t = r$  então

$$M = 2,3026 (r-1) \left[ t \log \bar{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^t \log \sigma_i^2 \right]$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^t \sigma_i^2}{t} = \text{QME}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(t-1)} \left[ \frac{t}{r-1} - \frac{1}{t(r-1)} \right] = 1 + \frac{1}{3(t-1)(r-1)} \left[ \frac{t}{r-1} - \frac{1}{t} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3(t-1)(r-1)} \left[ \frac{(t+1)(t-1)}{t} \right] = 1 + \frac{t+1}{3t(r-1)}$$

$$\text{Sob } H_0 \quad \frac{M}{C} \cap \chi^2(t-1)$$

Logo rejeita-se  $H_0$  ao nível  $\alpha$  de significância se  $\chi^2$  calculado  $> \chi^2_{\alpha}(t-1)$

(2) Teste de Cochran

Calcula-se a estatística C, onde

$$C = \frac{\text{maior variância}}{\sum_{i=1}^t s_i^2}$$

Rejeita-se  $H_0$  ao nível  $\alpha$  de significância se

$$C_{\text{calculado}} > \underbrace{C_{\alpha} [t, (r-1)]}_{\text{Valor tabelado}}$$

(3) Teste de Hartley ou Teste F Máximo

Calcula-se a estatística H, onde  $H = \frac{\text{maior variância}}{\text{menor variância}}$

Rejeita-se  $H_0$  ao nível  $\alpha$  de significância se

$$H_{\text{calculado}} > \underbrace{H_{\alpha} (t, r)}_{\text{Valor tabelado}}$$

Exemplo:

|         | Ração | $s_i^2$ | $\log s_i^2$ |
|---------|-------|---------|--------------|
| $t = 4$ | A     | 73      | 1,8633       |
| $r = 5$ | B     | 26,5    | 1,4232       |
|         | C     | 99      | 1,9956       |
|         | D     | 76,5    | 1,8837       |
|         | Total | 275     | 7,1658       |

Relação Empírica:

$$\frac{\text{maior var}}{\text{menor var}} = \frac{99}{26,5} \\ = 3,7424$$

**HOMOCEDASTICIDADE**

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2$$

$H_a$ : Pelo menos 2 variâncias diferem.

(1) Teste de Bartlett

$$\bar{s}^2 = \text{QME} = 68,75$$

$$\rightarrow \log (68,75)$$

$$\begin{aligned} M &= 2,3026 (4) [(4)(1,8373) - 7,1658] \\ &= 9,2104 [7,3491 - 7,1658] \\ &= 9,2104 [0,1833] = 1,6883 \end{aligned}$$

$$C = 1 + \frac{4 + 1}{3(4)(4)} = 1 + \frac{5}{48} = 1,104$$

$$\chi^2 = \frac{M}{C} = \frac{1,6883}{1,104} = 1,53$$

$$\chi^2 = 1,53 < \chi^2_{0,05}(3) = 7,81$$

Aceita-se  $H_0$ . As evidências amostrais não são suficientes para comprovar que as variâncias sejam diferentes. Logo é razoável admitir a hipótese de homogeneidade de variâncias (homocedasticidade).

### (2) Teste de Cochran

$$C = \frac{98}{275} = 0,36$$

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow C_{0,05}(4,4) = 0,6287$$
$$C = 0,36 < C_{0,05}(4,4) = 0,6287 \Rightarrow \text{aceita-se } H_0.$$

### (3) Teste de Hartley ou Teste F Máximo

$$H = \frac{99}{26,5} = 3,74$$

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow H_{0,05}(4,5) = 20,6$$
$$H = 3,74 < H_{0,05}(4,5) = 20,6 \Rightarrow \text{aceita-se } H_0.$$

## 3. CONSEQUÊNCIAS DE FALHAS NAS SUPOSIÇÕES DA ANÁLISE DE VARIÂNCIA.

### 3.1. Não-Normalidade:

#### (i) Modelo de efeito fixo

- nível de significância levemente superior do especificado
- poder levemente menor
- estimativas por ponto continuam imparciais

#### (ii) Modelo de efeito aleatório

- estimativas pontuais imparciais dos componentes de variância
- influência acentuada nas estimativas por intervalo para componentes de variância

### 3.2. Heterogeneidade de variâncias (= heterocedasticidade):

- (i) Teste F para dados balanceados (= nº de repetições por tratamento) é robusto, no caso de modelo de efeito fixo, à heterogeneidade de variâncias.
- (ii) Teste de contrastes ficam sensivelmente afetados pela heterogeneidade de variâncias.
- (iii) Para modelo de feito aleatório, heterogeneidade de variâncias tem acentuado efeito na inferência de componentes de variância, no caso de dados balanceados ou não.

### 3.3. Não-independência dos erros:

- Não-independência tem sérios efeitos na análise de variância, tanto no caso de modelo de efeito fixo como aleatório.
- Influência sobre nível de significância e poder.
- Casualização adequada é a principal recomendação para evitar ocorrência de não-independência.
- Mudança do modelo com inclusão de termos não considerados, podem eliminar dependência dos erros.

### 3.4. Não-aditividade:

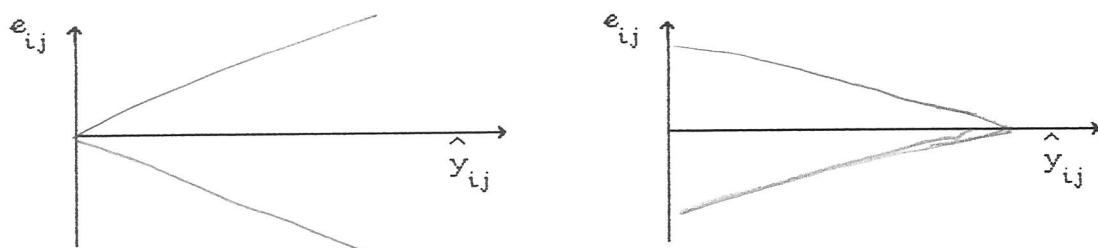
- Influência sobre as inferências da análise de variância (estimação e teste de hipótese).
- Perda de informação.
- Menor precisão.

## 2.16. TRANSFORMAÇÕES DE DADOS

### 4. TRANSFORMAÇÃO DE DADOS.

#### 4.1. Gráfico dos resíduos versus valores ajustados $\hat{y}_{ij}$ :

Se o modelo é correto e se as suposições são satisfeitas, os resíduos não deveriam apresentar estrutura nenhuma, em particular eles deveriam ser não-relacionados com qualquer outra variável incluindo a resposta  $y_{ij}$ . Uma verificação simples é o gráfico de resíduos com os valores ajustados  $\hat{y}_{ij}$ . Este tipo de gráfico detecta especialmente problemas de variância não-constante (heterocedasticidade), como por exemplo quando os resíduos crescem ou decrescem com a magnitude dos dados, apresentando o gráfico uma estrutura tipo megafone ou funil.



Variância não-constante decorre de não-normalidade, (heterogeneidade regular) principalmente por problemas de assimetria, onde para distribuições assimétricas a variância tende a ser função da média. Resposta errática de tratamentos também podem provocar variância não-constante (heterogeneidade do tipo irregular).

O procedimento usual para resolver problemas de variância não-constante é a aplicação de uma transformação para estabilizar a variância e então realizar a análise de variância com os dados transformados.

#### Exemplo

Realizou-se um experimento com o objetivo de verificar o efeito de cinco inseticidas no controle do curculio da ameixa. Observou-se o número de larvas de curculio da ameixa que surgem em gaiolas sobre solo tratado, obtendo-se os seguintes resultados:

Tratamentos (inseticida)

| A              | B   | C  | D   | E   | Testemunha |
|----------------|-----|----|-----|-----|------------|
| 14             | 7   | 6  | 95  | 37  | 212        |
| 6              | 1   | 1  | 133 | 31  | 172        |
| 8              | 0   | 1  | 86  | 13  | 202        |
| 36             | 15  | 4  | 115 | 69  | 217        |
| $\bar{y}_{i.}$ | 16  | 6  | 3   | 107 | 38         |
| A              | 30  | 15 | 5   | 47  | 56         |
| $s_i^2$        | 190 | 48 | 6   | 442 | 545        |
| $s_i$          | 14  | 7  | 2   | 21  | 23         |
|                |     |    |     |     | 20         |

Hartley

$$H = \frac{\text{maior var}}{\text{menor var}} = \frac{545}{6} = 90,8 > H_{0.05}(6,4) = 62,3$$

↓ Variâncias heterogêneas

ANOVA p/ dados originais

| C. Variação | GL | SQ     | QM    | F     |
|-------------|----|--------|-------|-------|
| Trat        | 5  | 122639 | 24528 | 89,97 |
| Erro        | 18 | 4907   | 273   |       |
| Total       | 23 | 127546 |       |       |

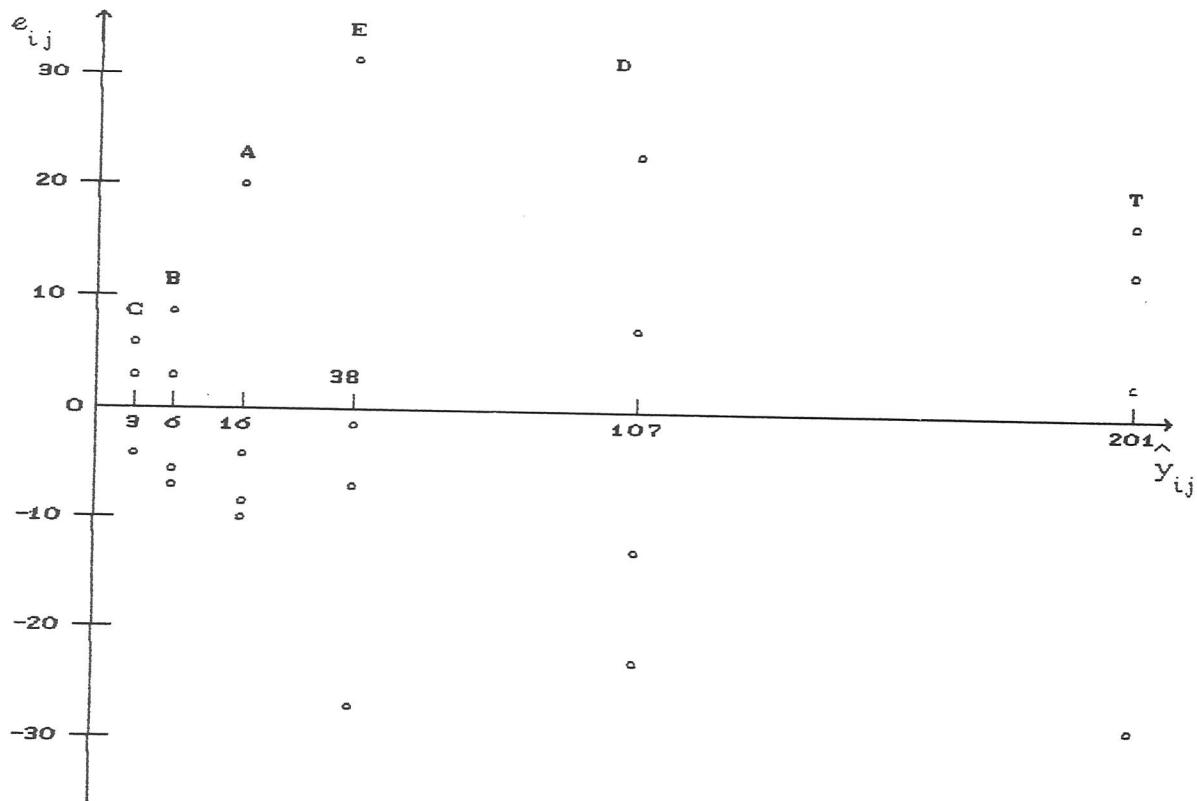
Não  
Válido

Resíduos:  $e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

Tratamentos (inseticidas)

| A              | B  | C  | D   | E   | Test. |
|----------------|----|----|-----|-----|-------|
| -2             | 1  | 3  | -12 | -1  | 11    |
| -10            | -5 | -2 | 23  | -7  | -29   |
| -8             | -6 | -2 | -21 | -25 | 1     |
| 20             | 9  | 1  | 8   | 31  | 16    |
| $\bar{y}_{i.}$ | 16 | 6  | 3   | 107 | 38    |
|                |    |    |     |     | 201   |

Gráfico  $e_{ij}$  versus  $\hat{y}_{ij}$



#### 4.2. Seleção de uma transformação para estabilizar a variância:

Se o pesquisador conhece a distribuição teórica das observações, ele pode utilizar esta informação na escolha da transformação. Por exemplo se as observações seguem a distribuição de Poisson, então a transformação raiz quadrada

$y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij}}$  ou  $y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij} + 1}$  seria usada. Se os dados seguem uma distribuição log-normal, então uma transformação logarítmico é adequada ( $y_{ij}^* = \log y_{ij}$ ). Para dados com distribuição binomial expressos em proporção a transformação arco seno é apropriada,  $y_{ij}^* = \arcsin y_{ij}$ .

Quando o pesquisador não conhece a distribuição das observações (não conhece a relação entre variância e média) pode-se empiricamente estimar a forma da transformação requerida pelos dados.

#### 4.3. Principais transformações:

$$(1) \text{ Transformação raiz quadrada } (y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij}})$$

Adequada principalmente para dados de contagem, quando os valores são pequenos relacionados com o universo de medida, tal como contagens por unidade de área; variáveis que tem distribuição de Poisson (nº de insetos/m<sup>2</sup>, nº de plantas/m<sup>2</sup>, nº de grãos/espiga, ...) na qual existe relação e proporcionalidade entre variâncias e médias, isto é,  $\hat{\sigma}_i^2/\bar{y}_i$  tende a ser constante.

A transformação raiz quadrada também é usada para dados de contagem, expressos em %, quando os valores estiverem no intervalo 0 - 20% ou 80 - 100%.

Quando existir valores inferiores a 10 e/ou existir valores zeros é comum utilizar-se

$$y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij} + 1/2} \quad \text{ou} \quad y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij} + 1} \quad \text{ou}$$

$$y_{ij}^* = \sqrt{y_{ij}} + \sqrt{y_{ij} + 1}$$

que são mais eficientes para estabilizar a variâncias dentro dos tratamentos.

$$(2) \text{ Transformação logaritmo } [y_{ij}^* = \log(y_{ij})]$$

Transformação adequada para valores que cobrem grande amplitude de variação.

Quando existir valores menores do que 10 e/ou ocorrer valores nulos utiliza-se

$$\log(y + 1/2) \quad \text{ou} \quad \log(y + 1) \quad \text{ou} \quad \log(y + 10)$$

Transformação utilizada para dados de contagem ou de medição, quando o desvio padrão (amplitude) é proporcional a média, isto é, quando  $\hat{\sigma}_i / \bar{y}_i$  tende a ser constante.

$$(3) \text{ Tranformação angular ou arco-seno}$$

$$(y_{ij}^* = \text{arco-seno } \sqrt{y_{ij}} \quad , \text{ onde } y_{ij} \text{ expresso em \%})$$

Transformação para dados de contagem, expressos em %, que representam a ocorrência de certa característica, produzindo uma classificação em 2 categorias ou classes, ou seja, dados que

se distribuem conforme a distribuição binomial.

Exemplo: % de sementes germinadas, % de frutas atacadas, % de plantas infectadas, % de animais doentes, % de peças defeituosas, etc...

Transformação:

$$\begin{array}{ccc} \% & \longrightarrow & \text{ângulos (graus)} \\ 100 & \longrightarrow & 90^\circ \end{array}$$

Quando existir valor zero é preferível substituí-lo por  $\frac{1}{4n}\%$  e o valor 100% por  $(100 - \frac{1}{4n})\%$

Para se proceder a transformação pode-se utilizar a tabela de Bliss, que é uma tabela especial para este fim.

#### (4) Transformação recíproca

Quando o desvio padrão é proporcional ao quadrado da média, isto é, quando  $\hat{\sigma}_i / (\bar{y}_i)^2$  tende a ser constante, utiliza-se a transformação recíproca, dada por

$$y_{ij}^* = \frac{1}{y_{ij}}$$

Resumo:

| <u>Distúrbio</u>                | <u>Solução</u>   |
|---------------------------------|--|
| (1) Não-Normalidade             | (i) Transformação de dados   |
| (2) Heterocedasticidade         | (ii) ANOVA não-paramétrica<br>(iii) Modelos lineares generalizados (MLG)                 |
| (3) Não-independência           | (i) Casualização adequada<br>(ii) ANOVA não-paramétrica<br>(iii) MLG                     |
| (4) Não-aditividade: "outliers" | (i) Eliminar os "outliers"<br>(ii) Transformação de dados<br>(iii) ANOVA não-paramétrica |

Exemplo: Larvas de curcúlio da ameixa.

|                 | Tratamentos |     |     |     |      | Testemunha                                |
|-----------------|-------------|-----|-----|-----|------|---|
|                 | A           | B   | C   | D   | E    |   |
| $A / \bar{y}$   | 1,9         | 2,5 | 1,7 | 0,4 | 1,5  | 0,2                                       |
| $s / \bar{y}$   | 0,9         | 1,2 | 0,7 | 0,2 | 0,6  | 0,1 $\rightarrow$ certa proporcionalidade |
| $s^2 / \bar{y}$ | 11,9        | 8   | 2   | 4,1 | 14,3 | 2,0                                       |

Transformação: Logaritmo

$$\text{Valor zero} \Rightarrow \log(y_{ij} + 10) = y_{ij}^*$$

Tratamentos

|                | A      | B      | C      | D      | E      | Testemunha |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|
| $y_{ij}$       | 1,38   | 1,23   | 1,20   | 2,02   | 1,67   | 2,35       |
|                | 1,20   | 1,04   | 1,04   | 2,16   | 1,61   | 2,26       |
|                | 1,26   | 1,00   | 1,04   | 1,98   | 1,36   | 2,33       |
|                | 1,66   | 1,40   | 1,15   | 2,10   | 1,90   | 2,36       |
| $\bar{y}_{ij}$ | 5,50   | 4,67   | 4,43   | 8,26   | 6,54   | 9,30       |
| $\bar{y}_{ij}$ | 1,375  | 1,1675 | 1,1075 | 2,065  | 1,635  | 2,325      |
| $s_i^2$        | 0,0417 | 0,0341 | 0,0065 | 0,0065 | 0,0492 | 0,0020     |

Teste de Homogeneidade de Variâncias: Teste de Hartley

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2 = \sigma_E^2 = \sigma_{\text{Test}}^2$$

H<sub>a</sub>: Pelo menos duas variâncias diferem.

$$H = \frac{\text{maior variância}}{\text{menor variância}} = \frac{0,0492}{0,0020} = 24,6$$

$$\alpha = 0,05 \quad t = 6 \quad r = 4 \quad H_{0.05}(6,4) = 62,0$$

$$H = 24,6 < H_{0.05}(6,4) = 62,0$$

As evidências amostrais não são suficientes para comprovar que as variâncias são heterogêneas  $\Rightarrow$  homocedasticidade.

Análise de variância para os dados transformados por log (y+100)

| Causas de variação | GL | SQ                              | QM     | F        |
|--------------------|----|---------------------------------|--------|----------|
| Tratamentos        | 5  | 4,8895                          | 0,9779 | 41,97 ** |
| Erro Experimental  | 18 | 0,4202                          | 0,0233 |          |
| Total              | 23 | 5,3097                          |        |          |
| CV = 9,47%         |    | F <sub>0,01</sub> (5,18) = 4,25 |        |          |

Os tratamentos se diferenciam quanto a sua eficiência no controle de larvas de curculio de ameixa.

Teste de Tukey

$$\Delta = q_{0,05}(6,18) s_y = (4,49)(0,0763) = 0,3427$$

$$s_y = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{0,0233}{4}} = 0,0763$$

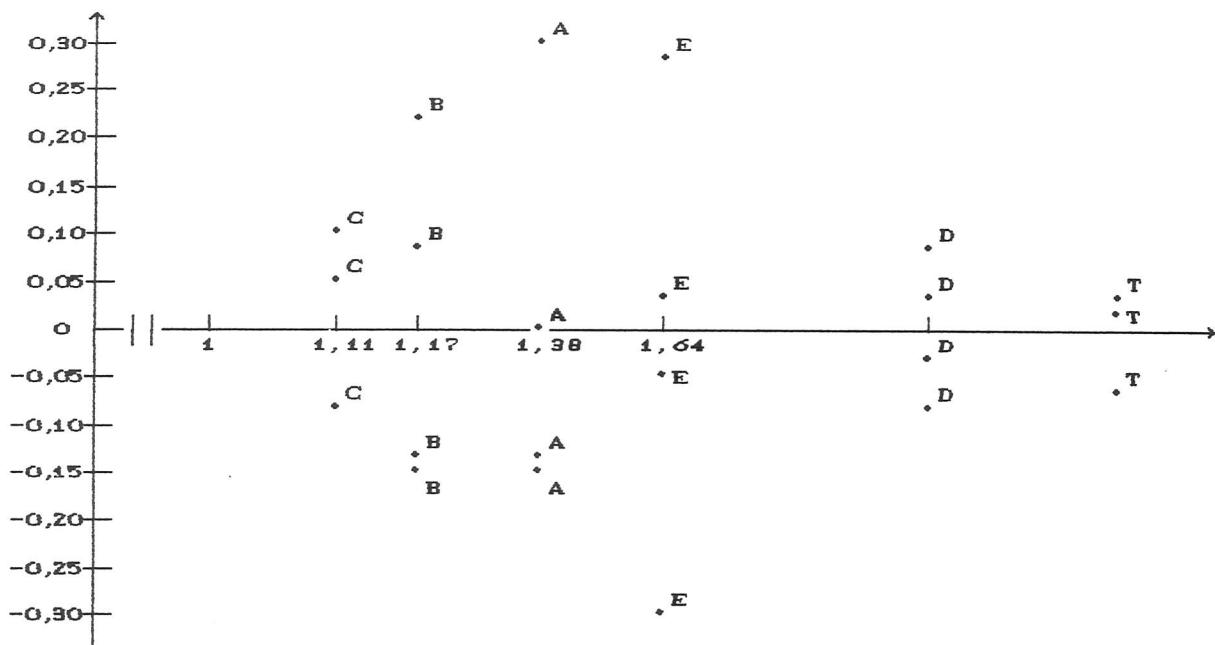
| Tratamentos | Médias        |           |
|-------------|---------------|-----------|
|             | Transformadas | Originais |
| Testemunha  | 2,375         | 201       |
| D           | 2,065         | 107       |
| E           | 1,635         | 38        |
| A           | 1,375         | 16        |
| B           | 1,1675        | 6         |
| C           | 1,1075        | 3         |

Médias seguidas de mesma letra não diferem significativamente pelo teste de Tukey a 5%. B e C mais eficientes.

$$\text{Resíduos: } e_{ij}^* = y_{ij}^* - \hat{y}_{ij}^* = y_{ij}^* - \bar{y}_{i\cdot}^*$$

Tratamentos

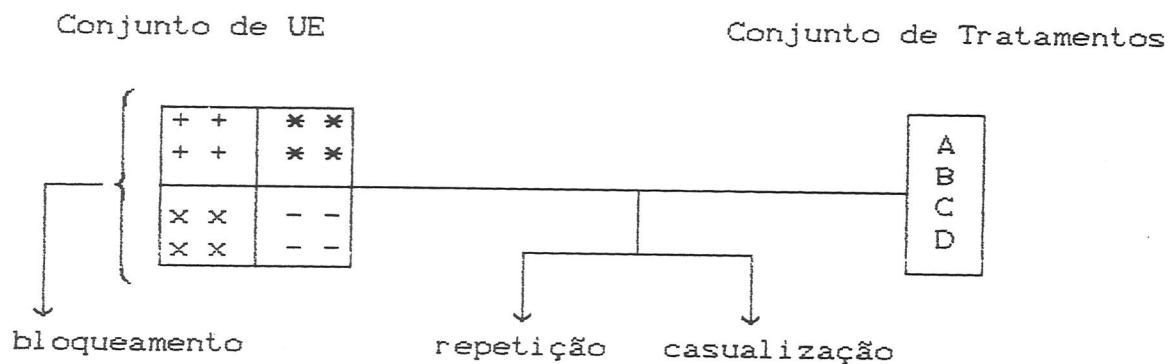
| A                  | B     | C     | D     | E     | Test  |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0                  | 0,06  | 0,04  | -0,04 | 0,03  | 0,03  |
| -0,18              | -0,13 | -0,07 | 0,10  | -0,03 | -0,06 |
| -0,12              | -0,17 | -0,07 | -0,08 | -0,28 | 0,01  |
| 0,28               | 0,23  | 0,04  | 0,04  | 0,26  | 0,04  |
| $\bar{y}_{i\cdot}$ | 1,38  | 1,17  | 1,11  | 2,06  | 1,64  |
|                    |       |       |       |       | 2,32  |





### 3. DELINEAMENTO BLOCOS CASUALIZADOS (DBC)

#### 3.1 CARACTERIZAÇÃO



- Forma-se grupos (blocos) de UE semelhantes
- Uma restrição na casualização
- Casualização dos tratamentos dentro de cada bloco

| Blocos | Tratamentos |   |   |   |
|--------|-------------|---|---|---|
| +      | D           | B | C | A |
| *      | A           | C | D | B |
| x      | A           | B | D | C |
| -      | C           | D | B | A |

n° UE/bloco = n° de tratamentos  
 n° de repetições = n° de blocos

#### OBJETIVO DA FORMAÇÃO DE BLOCOS

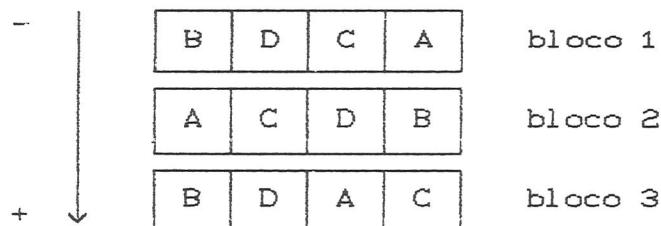
- Controle de uma causa de variação maior entre as UE decorrente da variação intrínseca das UE ou de fatores que atuam sobre as UE → agrupamento de UE semelhantes no mesmo bloco → homogeneidade dentro do bloco ⇒ maior precisão.
- Dar maior flexibilidade ao experimento, permitindo subdivisão do trabalho experimental dado que a execução deve ser uniforme dentro de cada bloco ⇒ técnica experimental mais uniforme ⇒ maior precisão.

Nº de Blocos : mínimo de dois ; associado ao nº de repetições.

Nº de Tratamentos : Dependência do material a investigar (tamanho da parcela) ; experimentação a campo : não mais de 12 a 10 tratamentos.

fertilidade

do solo



As comparações entre tratamentos são feitas dentro de cada bloco e portanto são mais eficientes e tanto mais eficientes é o delineamento blocos casualizados em relação do DCC , quanto mais semelhantes forem as UE dentro de cada bloco não importando as diferenças de bloco a bloco.

CRITÉRIOS DE BLOQUEAMENTO :

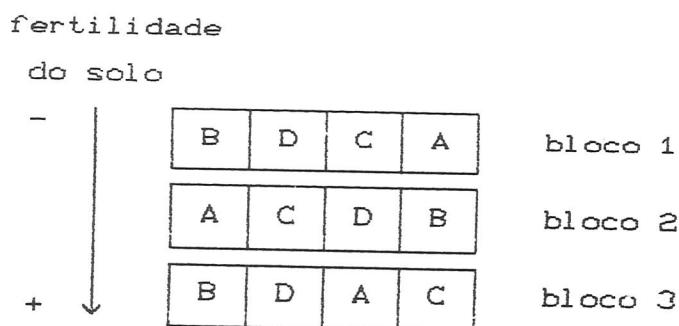
- Características associadas com a unidade :

Para pessoas : sexo , idade , renda , inteligência , educação , experiência de trabalho , atitudes , etc.

Para áreas geográficas : tamanho da população , renda média , etc.

Para animais : raça , idade , peso , ...

Em experimentação a campo : fertilidade do solo



- Características associadas com a situação experimental

Operadores

Tempo de processamento

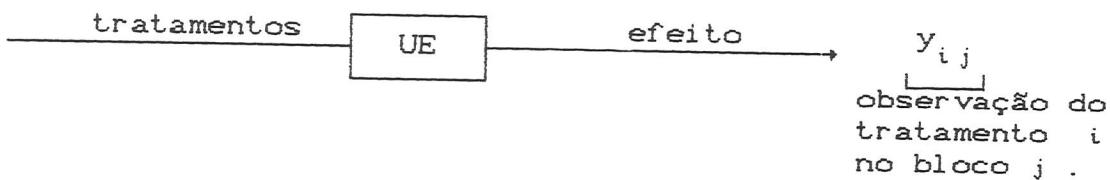
Máquinas

Partidas ou procedência do material

Instrumentos de medida

Etc...

### 3.2 ANALISE DE VARIANCIA



$i \Rightarrow$  índice de tratamento

$i = 1, 2, \dots, t$

$j \Rightarrow$  índice de bloco ou repetição

$j = 1, 2, \dots, r$

rt    UE    ou observações

$$\underline{GL} : \bar{y}_{..} \Rightarrow GLTotal = r-1 ; GLB = r-1 ; GLT = t-1$$

$$\bar{y}_{ij} \in \bar{y}_{..j} \Rightarrow GLE = (t-1)(r-1)$$

$$\underline{SQ} : y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{..} + \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{..j} - \bar{y}_{..j} + \bar{y}_{..} - \bar{y}_{..}$$

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = [ (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{..j} - \bar{y}_{..}) ] + [ (y_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..j} + \bar{y}_{..}) ]$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}_{SQ Total} = \underbrace{\sum_{i=1}^t r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..})^2}_{SQT} + \underbrace{\sum_{j=1}^r t (\bar{y}_{..j} - \bar{y}_{..})^2}_{SQB}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..j} + \bar{y}_{..})^2}_{SQE}$$

$$SQTotal = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - FC ; \quad FC = \frac{y_{..}^2}{rt}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^t \frac{y_{i..}^2}{r} - FC$$

$$SQB = \sum_{j=1}^r \frac{y_{..j}^2}{t} - FC$$

$$SQE = SQTotal - SQB - SQT$$

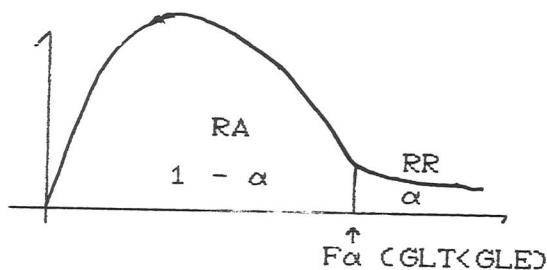
## TESTE F PARA TRATAMENTOS

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t \Leftrightarrow H_0 : \tau_i = 0 \quad \forall i$$

$H_a$  : Pelo menos duas médias de tratamentos diferem  
 $\Leftrightarrow (\tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um } i)$

Rejita-se  $H_0$  se

$$F = \frac{QMT}{QME} > F_\alpha (GLT, GLE)$$



## TESTE F PARA BLOCOS

$$F = \frac{QMB}{QME} > F_\alpha (GLB, GLE) \rightarrow \text{blocos se diferenciam}$$

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_B^2 = 0 \\ H_a : \sigma_B^2 \neq 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{efeito de} \\ \text{blocos} \\ \text{aleatórios} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{efeito de blocos fixos} \\ H_0 : \beta_j = 0 ; \forall j \end{array}$$

$$\begin{aligned} H_a : \beta_j \neq 0 \text{ para pelo menos um } j \\ \text{modelo : } y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

## TESTE F PARA BLOCOS

- Em condições normais de experimentação, blocos é controle  $\Rightarrow$  teste F irrelevante.
- Em algumas situações teste F para blocos pode ter algum interesse.
- Se bloco \*  $\Rightarrow$  bloqueamento eficiente pois maior precisão.
- Se bloco \*  $\Rightarrow$  maior generalidade do experimento.

- Se bloco ns  $\Rightarrow$  bloqueamento não eficiente no acréscimo em precisão , muito embora os ganhos de execução , pois encara-se cada bloco como se fosse um experimento.
- Quando diferença entre blocos muito grande , pode provocar heterogeneidade do erro (cuidado).

### 3.3 EXEMPLO

Num experimento comparativo de cinco cultivares (variedades) de trigo foi usado o delineamento blocos casualizados com quatro repetições. O bloqueamento teve por finalidade controlar diferenças de fertilidade do solo na área experimental .

Os rendimentos de grãos por parcela , em t/ha foram os seguintes :

| cultivares                              | blocos      |             |             |            | totais( $y_{i.}$ ) | médias( $\bar{y}_{i.}$ ) |
|---|-------------|-------------|-------------|------------|--------------------|--------------------------|
|   | 1           | 2           | 3           | 4          |                    |                          |
| A                                       | 1,9         | 1,7         | 1,7         | 1,3        | 6,6                | 1,65                     |
| B                                       | 2,4         | 2,8         | 2,7         | 2,2        | 10,1               | 2,52                     |
| C                                       | 2,4         | 1,9         | 2,3         | 1,7        | 8,3                | 2,08                     |
| D                                       | 3,6         | 2,8         | 2,5         | 2,7        | 11,6               | 2,90                     |
| E                                       | 2,7         | 2,3         | 2,2         | 1,9        | 9,1                | 2,28                     |
| <b>totais<br/>(<math>y_{.j}</math>)</b> | <b>13,0</b> | <b>11,5</b> | <b>11,4</b> | <b>9,8</b> | <b>45,7</b>        | <b>2,28</b>              |

$$r = 4$$

$$t = 5$$

### ANOVA

| causas de variação          | GL | SQ     | QM     | F       |
|-----------------------------|----|--------|--------|---------|
| blocos                      | 3  | 1,0255 | 0,3418 | 5,49*   |
| tratamentos<br>(cultivares) | 4  | 3,5330 | 0,8832 | 14,19** |
| Erro experimental           | 12 | 0,7470 | 0,0622 |         |
| Total                       | 19 | 5,3055 |        |         |

$$F.05(3,12) = 3,49$$

$$F.01(4,12) = 5,41$$

$$CV = \frac{\sqrt{\frac{QME}{\bar{y}}}}{2,28} \times 100 = \frac{\sqrt{0,0622}}{2,28} \times 100 = 10,9 \%$$

#### TESTE F PARA BLOCOS

$F = 5,49 > F_{0,05}(3,12) = 3,49 \Rightarrow$  Os blocos se diferenciam.  
O bloqueamento foi eficiente para controlar diferenças de fertilidade do solo.

#### TESTE F PARA TRATAMENTOS

$$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$$

$H_a$  : pelo menos duas médias diferem

$$F = 14,19 > F_{0,01}(4,12) = 5,41 \rightarrow$$
 rejeita-se  $H_0$

As cultivares de trigo investigadas se diferenciam em termos de rendimento.

COMPLEMENTAÇÃO DA ANALISE : Fator qualitativo não estruturável

Trabalho de alta responsabilidade : teste de Tukey

$$\Delta = q_{0,05}(5,12) \quad s\bar{y} = 4,51(0,1247) = 0,56 \\ q_{0,05}(5,12) = 4,51$$

$$s\bar{y} = \sqrt{\frac{QME}{r}} = \sqrt{\frac{0,00622}{4}} = 0,1247$$

| cultivares | médias , t/ha |                |
|------------|---------------|----------------|
| D          | 2,90 a        | → superior     |
| B          | 2,52 a b      |                |
| E          | 2,28 b        |                |
| C          | 2,08 b c      | intermediárias |
| A          | 1,65 c        | → inferior     |

médias seguidas de mesma letra não diferem  
significativamente pelo teste de Tukey a 5%

| Cultivares        | Médias | Totais | $c_{1i}$ | $c_{2i}$ | $c_{3i}$ | $c_{4i}$        |
|-------------------|--------|--------|----------|----------|----------|-----------------|
| origem genética 1 | D 2,90 | 11,6   | 1        | 1        | 1        | 0               |
|                   | B 2,52 | 10,1   | 1        | 1        | -1       | 0               |
| origem genética 2 | E 2,28 | 9,1    | 1        | -1       | 0        | 1               |
|                   | C 2,08 | 8,3    | 1        | -1       | 0        | -1              |
| Testemunha        | A 1,15 | 6,6    | -4       | 0        | 0        | 0               |
| SQ contraste      |        |        | 2,0161   | 1,1556   | 0,2813   | 0,0800 = 3,5130 |
| F contraste       |        |        | 32,41**  | 18,58**  | 4,52     | 1,24 = SQT      |

$$F.05(1,18) = 4,75 \quad F.01(1,12) = 9,33$$

$c_1$  : Teste vs resto  $\Leftrightarrow$  A vs (B + C + D + E)

$c_2$  : Origem genética um vs origem genética dois  $\Leftrightarrow$  (D + B) vs (E + C)

$c_3$  : Dentro da origem genética um  $\Leftrightarrow$  D vs B

$c_4$  : Dentro da origem genética dois  $\Leftrightarrow$  E vs C

### 3.4 - EFICIENCIA RELATIVA

A Eficiência Relativa do Delineamento Blocos Casualizados (DBC) em relação ao Delineamento Completamente Casualizado (DCC) é dada por

$$ER = \frac{\frac{\hat{\sigma}_c^2}{\hat{\sigma}_B^2}}{\frac{(GLB + 1)(GLC + 3)}{(GLB + 3)(GLC + 1)}} \times 100$$

onde  $\hat{\sigma}_G^2 = \text{QME}$  p/ DCC

$$\hat{\sigma}_{\text{B}}^2 = \text{QME} \quad \text{p/} \quad \text{DBC}$$

GLC = GL Erro p/ DCC = t(r-1)

GLB = GL Erro p/ DBC = (t-1)(r-1)

e  $\hat{\sigma}^2_c$  é estimado por

→ Quadrado Médio de Blocos.

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{(r-1) QMB + r(t-1) QME}{rt - 1} \rightarrow \text{Quadrado Médio do Erro no DBC.}$$

3.5 - ESTIMAÇÃO DE VALORES PERDIDOS ( $\leftrightarrow$  PARCELAS PERDIDAS)

(i) Um valor perdido (uma parcela perdida)

A estimativa de um valor perdido não acrescenta informação ao experimento, mas simplesmente facilita a análise dos dados restantes.

Considerando:

| Tratamentos | Blocos |   |     |   |
|-------------|--------|---|-----|---|
|             | 1      | 2 | ... | r |
| 1           | X      | T |     |   |
| 2           |        |   |     |   |
| :           | B      |   |     |   |
| t           |        |   |     |   |

A estimativa da parcela perdida é dada por:

$$X = \frac{rB + tT - G}{(r-1)(t-1)}$$

O valor  $X$  é colocado no lugar da parcela perdida e faz-se a análise da maneira usual. A única diferença é que se perde 1 GL para o erro.

| Causas de Variação | GL             |
|--------------------|----------------|
| Blocos             | $r-1$          |
| Tratamentos        | $t-1$          |
| Erro               | $(t-1)(r-1)-1$ |

A parcela perdida nada contribui para o erro experimental, ou seja, a SQE é corretamente estimada, enquanto que a SQT está ligeiramente exagerada.

A correção para a SQT é dada por:

$$SQT_{aj} = SQT - U, \text{ onde } U = \frac{t-1}{t} \left[ X - \frac{B}{t-1} \right]^2$$

Justifica-se o uso da correção da SQT, quando o F calculado para tratamentos sem correção for superior e estiver próximo do valor tabelado.

#### Testes de comparações múltiplas de médias

Para se obter o erro padrão da média de um tratamento ( $s_y$ ) ou o erro padrão da diferença entre duas médias de tratamentos ( $s_d$ ), usa-se o método do nº efetivo de repetições, ou seja

| Tratamentos |            | Nº de repetições |               |
|-------------|------------|------------------|---------------|
| A           | B          | $r_A$            | $r_B$         |
| ocorre      | ocorre     | 1                | 1             |
| ocorre      | não ocorre | $(t-2)/(t-1)$    | 0             |
| não ocorre  | ocorre     | 0                | $(t-2)/(t-1)$ |
| não ocorre  | não ocorre | 0                | 0             |

$$\sigma_y^- = \sqrt{\frac{QME}{2} \left( \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right)}$$

$$\sigma_d = \sqrt{QME \left( \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right)}$$

Dois valores perdidos ( $\Leftrightarrow$  duas parcelas perdidas)

- Estimativas por ciclos
- 2 GL a menos para o erro
- Correção da SQT pelo método do resíduo condicional
- N° efetivo de repetições para obtenção de  $\sigma_y^-$  e  $\sigma_d$

### 3.6 - MODELO LINEAR PARA EXPERIMENTOS EM BLOCOS

#### (a) Modelo Linear

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

↑      ↑      ↑      ↑      ↑  
 Efeito da Média Geral    Efeito do tratamento i    Efeito do bloco j    Efeito não observável associado à observação j  
 Observação do tratamento i no bloco j

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, t \\ j = 1, 2, \dots, r \end{array} \right\} \Rightarrow rt \text{ UE ou observações}$$

#### (b) Suposições

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ e independentes}$$

#### (c) Estimação dos parâmetros do modelo

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ij} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \\ &= \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \end{aligned}$$

Resíduos:

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}$$

$$SQE = \sum_{ij} e_{ij}^2 = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$$

SQE tem  $(t-1)(r-1)$  GL

A redução na SQ Total devido ao ajuste do modelo linear considerado é:

$$\begin{aligned} RC(\mu, \tau, \beta) &= \hat{\mu} y_{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^t \hat{\tau}_i y_{i\cdot} + \sum_{j=1}^r \hat{\beta}_j y_{\cdot j} \\ &\quad \left[ \sum_{i=1}^t \frac{y_{i\cdot}^2}{r} + \sum_{j=1}^r \frac{y_{\cdot j}^2}{t} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} \right] = SQ \text{ Parâmetros} \\ &\quad \left[ \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} + \left( \sum_{i=1}^t \frac{y_{i\cdot}^2}{r} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} \right) + \left( \sum_{j=1}^r \frac{y_{\cdot j}^2}{t} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} \right) \right] \end{aligned}$$

com  $r+t-1$  GL.

Para testar a hipótese  $H_0: \tau_i = 0$  considera-se o modelo reduzido  $y_{ij} = \mu + \beta_j + \epsilon_{ij}$  (modelo de classificação simples) e se obtém a redução da SQ dada por

$$RC(\mu, \beta) = \sum_{j=1}^r \frac{y_{\cdot j}^2}{t} \quad \text{com } r \text{ GL}$$

Então a SQ devido a  $\tau$  após ajustar para  $\mu$  e  $\beta$  é

$$\begin{aligned} RC(\tau/\mu, \beta) &= RC(\mu, \tau, \beta) - RC(\mu, \beta) \\ &= \sum_{i=1}^t \frac{y_{i\cdot}^2}{r} + \sum_{j=1}^r \frac{y_{\cdot j}^2}{t} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} - \sum_{j=1}^r \frac{y_{\cdot j}^2}{t} \\ &= \sum_{i=1}^t \frac{y_{i\cdot}^2}{r} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{rt} \quad \text{com } t-1 \text{ GL} \end{aligned}$$

Para se testar  $H_0: \beta_j = 0$  considera-se o modelo reduzido  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$  (classificação simples), obtendo-se

$$RC(\mu, \tau) = \sum_{i=1}^t \frac{y_{i\cdot}^2}{r} \quad \text{com } t \text{ GL}$$

é a SQ devido a  $\beta$  após ajustar para  $\mu$  e  $\tau$  é

$$RC(\beta/\mu, \tau) = RC(\mu, \tau, \beta) - RC(\mu, \tau)$$

$$= \sum_{i=1}^t \frac{y_{i.}^2}{r} + \sum_{j=1}^r \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} - \sum_{i=1}^t \frac{y_{i.}^2}{r}$$

$$= \sum_{j=1}^r \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{rt} \quad \text{com } r-1 \text{ GL}$$

(d) Exemplo: Exemplo das cultivares de trigo.

| $y_{ij} \rightarrow$ | Cultivares | Blocos |       |       |       | Médias |
|----------------------|------------|--------|-------|-------|-------|--------|
|                      |            | 1      | 2     | 3     | 4     |        |
|                      | A          | 1,9    | 1,7   | 1,7   | 1,3   | 1,650  |
|                      | B          | 2,4    | 2,8   | 2,7   | 2,2   | 2,525  |
|                      | C          | 2,4    | 1,9   | 2,3   | 1,7   | 2,075  |
|                      | D          | 3,6    | 2,8   | 2,5   | 2,7   | 2,900  |
|                      | E          | 2,7    | 2,3   | 2,2   | 1,9   | 2,275  |
|                      | Médias     | 2,600  | 2,300 | 2,280 | 1,960 | 2,285  |

| $\hat{y}_{ij} \rightarrow$ | Cultivares | Blocos |       |       |       |
|----------------------------|------------|--------|-------|-------|-------|
|                            |            | 1      | 2     | 3     | 4     |
|                            | A          | 1,965  | 1,665 | 1,645 | 1,325 |
|                            | B          | 2,840  | 2,540 | 2,520 | 2,200 |
|                            | C          | 2,340  | 2,090 | 2,070 | 1,750 |
|                            | D          | 3,215  | 2,915 | 2,895 | 2,575 |
|                            | E          | 2,590  | 2,290 | 2,270 | 1,950 |

| $e_{ij} \rightarrow$ | Cultivares | Blocos |        |        |        |
|----------------------|------------|--------|--------|--------|--------|
|                      |            | 1      | 2      | 3      | 4      |
|                      | A          | -0,065 | 0,035  | 0,055  | -0,025 |
|                      | B          | -0,440 | 0,260  | 0,180  | 0,000  |
|                      | C          | 0,010  | -0,190 | 0,230  | -0,050 |
|                      | D          | 0,385  | -0,115 | -0,395 | 0,125  |
|                      | E          | 0,110  | 0,010  | -0,070 | -0,050 |

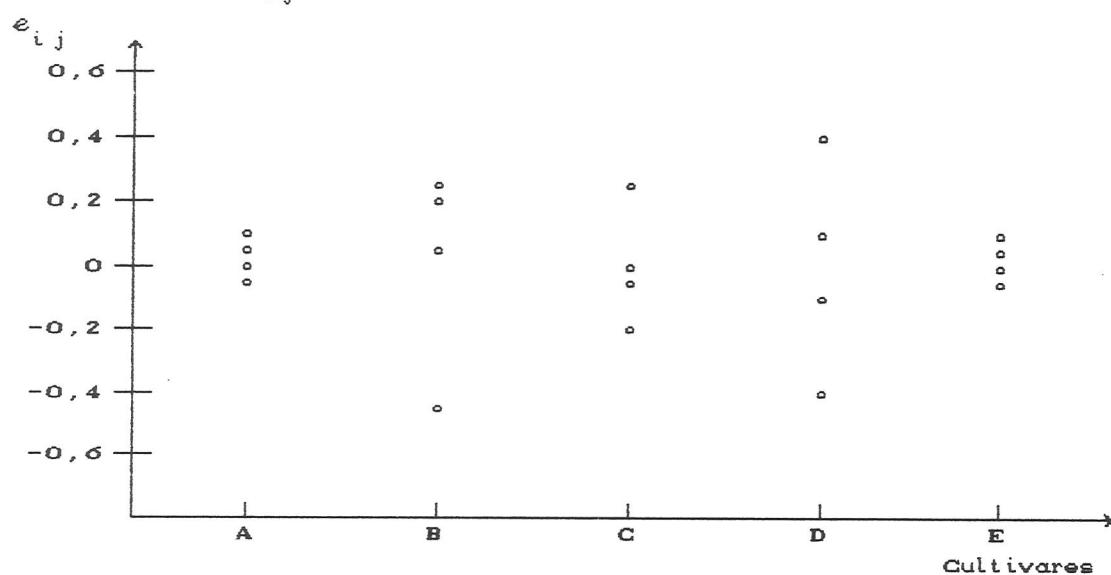
$$\bar{Y}_i + \bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}$$

↑      ↑      ↗  
media    medida blocos    medida total

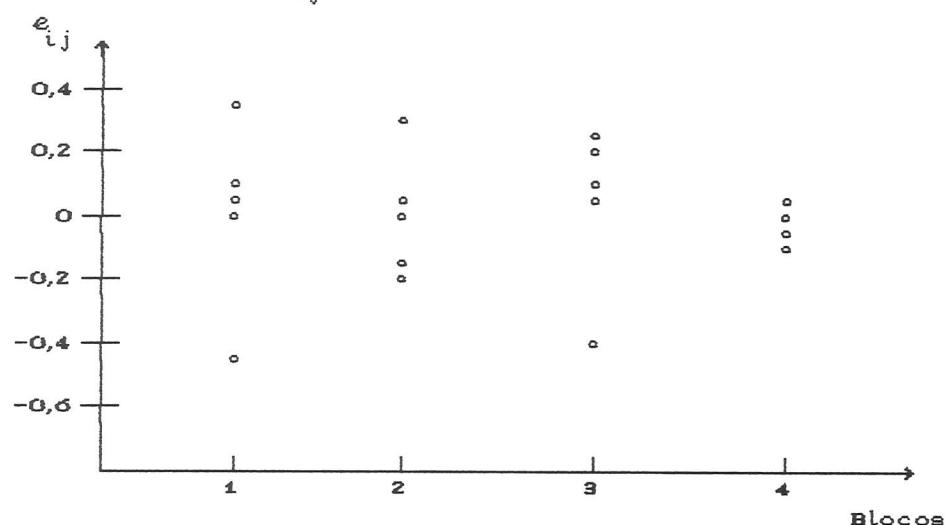
de tratamentos

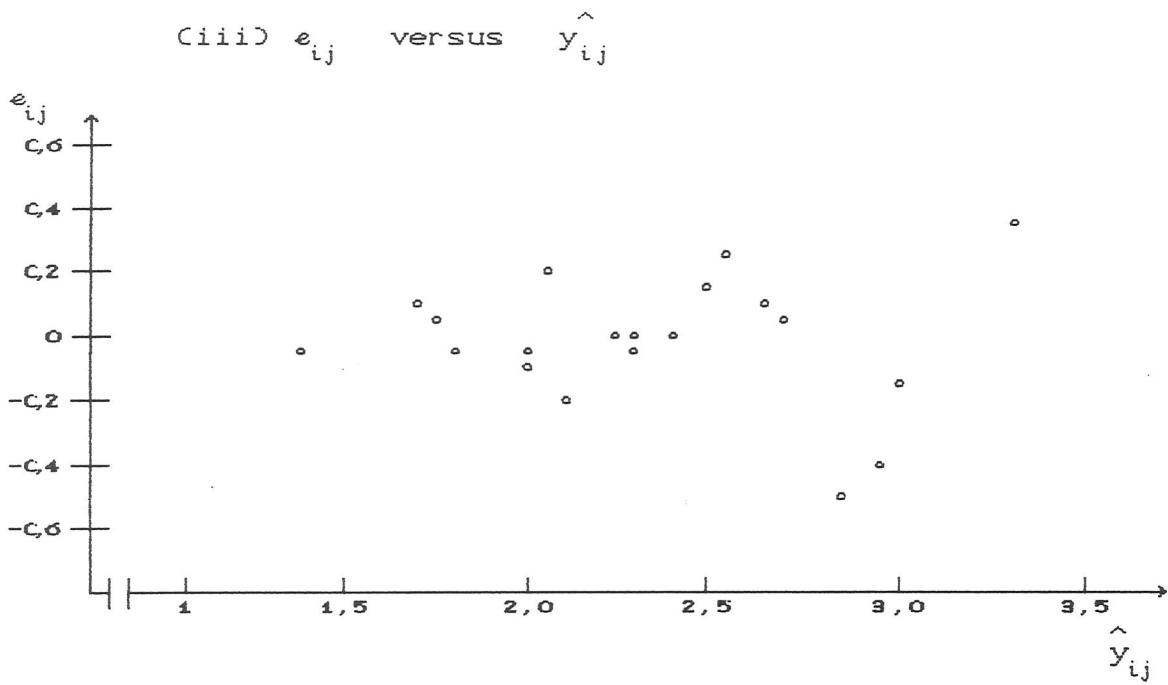
(e) Análise de Resíduos

(ii)  $e_{ij}$  versus cultívares



(iii)  $e_{ij}$  versus blocos





Se o gráfico dos Resíduos  $e_{ij}$  com valores  $\hat{y}_{ij}$  apresentar uma tendência curvilinear é um indicador de presença de interação tratamento x bloco o que implica em não aditividade. Uma transformação pode resolver o problema.

(Teste de não-aditividade de Tukey)

#### Aditivo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j$$

#### Multiplicativo

$$y_{ij} = \mu \tau_i \beta_j$$

↓  
log

$$\log(y_{ij}) = \log \mu + \log \tau_i + \log \beta_j$$

$$\stackrel{\uparrow}{y_{ij}^*} = \mu^* + \tau_i^* + \beta_j^*$$

(aditivo)

(f) Modelos para a análise de variância em blocos casualizados

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

↓      ↓  
Fixos ou Aleatórios      IID  
Constante       $\cap N(0, \sigma^2)$

$i = 1, 2, \dots, t$   
 $j = 1, 2, \dots, r$

$\left. \begin{matrix} \tau_i \\ \beta_j \end{matrix} \right\}$  Fixos  $\Rightarrow$  Modelo Fixo ou Modelo I

$\left. \begin{matrix} \tau_i \\ \beta_j \end{matrix} \right\}$  Aleatórios  $\Rightarrow$  Modelo Aleatório ou Modelo II

$$\tau_i \stackrel{\text{IID}}{\cap} N(0, \sigma_\tau^2) = \beta_j \stackrel{\text{IID}}{\cap} N(0, \sigma_\beta^2)$$

$\tau_i, \beta_j$  e  $\varepsilon_{ij}$  são independentes

$\left. \begin{matrix} \tau_i \text{ fixo} \\ \beta_j \text{ aleatório} \end{matrix} \right.$  ou  $\left. \begin{matrix} \tau_i \text{ aleatório} \\ \beta_j \text{ fixo} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  Modelo Misto

| Causas de Variação | GL         | QM  | E(CQMD) $\leftrightarrow$ QM Esperado         |                               |  |   |
|--------------------|------------|-----|---|-------------------------------|--|---|
|                    |            |     | Modelo Fixo                                   | Modelo Aleatório              | $\beta_j$ aleatório<br>$\tau_i$ fixo         | $\beta_j$ fixo<br>$\tau_i$ aleatório          |
| Blocos             | r-1        | QMB | $\sigma^2 + \frac{1}{r-1} t \sum_j \beta_j^2$ | $\sigma^2 + t \sigma_\beta^2$ | $\sigma^2 + t \sigma_\beta^2$                | $\sigma^2 + \frac{1}{r-1} t \sum_j \beta_j^2$ |
| Tratamento         | t-1        | QMT | $\sigma^2 + \frac{1}{t-1} r \sum_i \tau_i^2$  | $\sigma^2 + r \sigma_\tau^2$  | $\sigma^2 + \frac{1}{t-1} r \sum_i \tau_i^2$ | $\sigma^2 + r \sigma_\tau^2$                  |
| Erro               | (r-1)(t-1) | QME | $\sigma^2$                                    | $\sigma^2$                    | $\sigma^2$                                   | $\sigma^2$                                    |

Em qualquer modelo:

(i) Teste F para Tratamentos ( $H_0: \tau_i = 0$ ) ou ( $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$ )

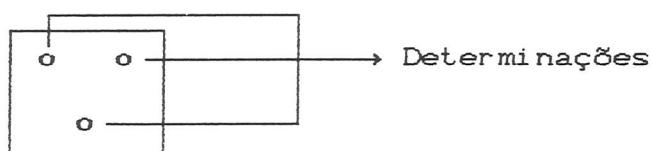
$$F = \frac{QMT}{QME}$$

(ii) Teste F para Blocos  $H_0: \beta_j = 0$  ou  $H_0: \sigma_{\beta}^2 = 0$

$$F = \frac{QMB}{QME}$$

(g) Amostragem no Delineamento Blocos Casualizados

UE



t tratamentos

r repetições (Blocos) / tratamento

n determinações / repetição

↓                          ↓

Erro Experimental  
Erro de Amostragem

Modelo:  $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$

↓      ↓      ↓  
 Fixo   Fixos   Aleatórios  
 ou  
 Aleatórios

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$  e independentes

$i = 1, 2, \dots, t$

$\delta_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$  e independentes

$j = 1, 2, \dots, r$

$\varepsilon_{ij} \in \delta_{ijk}$  independentes entre si

$k = 1, 2, \dots, n$

| Causas de Variação | GL         | QM   | QM Esperados   |   |
|--------------------|------------|------|--|---|
|                    |            |      | Modelo I   | Modelo II   |
| Blocos             | r-1        | QMB  | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nt \sum_j \beta_j^2 / (r-1)$ | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nt\sigma_\beta^2$ |
| Tratamentos        | t-1        | QMT  | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nr \sum_i \tau_i^2 / (t-1)$  | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + nr\sigma_\tau^2$  |
| Erro Experimental  | (r-1)(t-1) | QMEE | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2$                               | $\sigma^2 + n\sigma_\varepsilon^2$                    |
| Erro Amostragem    | rt(n-1)    | QMEA | $\sigma^2$   | $\sigma^2$  |

Teste F

(i)  $H_0: \tau = 0$  ou  $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$

$$F = \frac{QMT}{QMEE}$$

(ii)  $H_0: \beta_j = 0$  ou  $H_0: \sigma_\beta^2 = 0$

$$F = \frac{QMB}{QMEE}$$

(iii)  $H_0: \sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$F = \frac{QMEE}{QMEA}$$

## B I B L I O G R A F I A

- CAMPOS, H., 1984. Estatística Aplicada à Experimentação com Cana-de-açúcar. FEALQ.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs. John Wiley.
- GOMEZ, K.A. e A.A. GOMEZ, 1984. Statistical Procedures for Agricultural Research. John Wiley.
- MARKUS, R., 1977. Elementos de Estatística Aplicada, Partes I e II. Faculdade de Agronomia/UFRGS.
- MONTGOMERY, D.C., 1984. Design and Analysis of Experiments. John Wiley.
- OSTLE, B. e R.W. MENSING, 1975. Statistics in Research. Iowa State University.
- PERECIN, D. e E.B. MALHEIROS, 1989. Procedimentos de Comparações Múltiplas. 3º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica. ESAL/Lavras.
- PERES, C.A. e C.D. SALDIVA, 1982. Planejamento de Experimentos. 5º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. IME/USP.
- PIMENTEL GOMES, F., 1985. Curso de Estatística Experimental. Liv. Nobel.
- SCOTT, A.J. e M. KNOTT, 1974. A cluster analysis method for grouping means in the analysis of variance. Biometrics: 30: 507-512.
- SNEDECOR, G.M. e W.G. COCHRAN, 1980. Statistical Methods. Iowa State University.
- STEEL, R.G. e J.H. TORRIE, 1980. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS  
Cadernos de Matemática e Estatística  
Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89
2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89
3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90
4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90
5. Sandra R. C. Pizzatto - Cálculo Numérico - AGO/91
6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91
7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91
8. Elisa Hagg, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Carneiro - Notas da 1ª Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92
9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92
10. Silvio Possoli - Análise Multivariada - JUL/92
11. Dinara Westphalen Fernandez - Números Índices - OUT/92
12. Maria Teresinha Albanese - Coeficiente de Fidedignidade de um Instrumento de Medida - OUT/92
13. Vera Clotilde Carneiro e Sérgio Cláudio Ramos - Gráficos na Escola - DEZ/92

14. João Riboldi - Elementos Básicos de Estatística - JAN/93
15. Paulo W. de Oliveira e M. Alice Gravina - Logo: Manual do Usuário - MAR/93
16. Ruben Markus, Elsa C. de Mundstock, Dinara W. X. Fernandez e João Riboldi - Exercícios de Métodos Estatísticos - AGO/93
17. Loiva C. de Zeni e M. Alice Gravina - Sugestões de Atividades no Ambiente Logo para a Exploração de Conteúdos Matemáticos dos Curriculos Escolares de 1º e 2º Grau - SET/93
18. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 1 - SET/93
19. Marlusa Benedetti, Patrícia P. Gil, Shirley I. Techera, Angela Andreotti, Milene Milan, Marlise Moraes, Luciana Santos, Augustinho Zimmermann, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - Atividades em Geometria Usando Recortes - OUT/93
20. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 2 - OUT/93
21. Anne C. Rutsatz, Édina R. de C. Alexandre, Gorete Losada, M. Alice Gravina, Rosamary P. Disconzi, Shirley Techera e Vera C. G. Carneiro - O Pensamento e a Linguagem da Álgebra: Tabelas, Gráficos e Equações - DEZ/93
22. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritiva I - JAN/94
23. João Riboldi - Planejamento e Análise de Experimentos, Parte 1 - FEV/94
24. Dinara W. X. Fernandez - Estatística Descritiva II - AGO/94

25. João Riboldi e Lídia do C. S. C. do Nascimento - Metodologia  
de Superfície de Resposta: Uma Abordagem Introdutória - NOV/94
26. Júlio Cesar Ruiz Claeysen - Métodos Operacionais e  
Computacionais em Álgebra Matricial - MAR/95
27. João Riboldi - Análise de Variância - MAR/95

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS  
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111  
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS  
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33  
RAMAL 6197  
FAX: 336 15 12