UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

SUR LA DENSITÉ DES SYSTÈMES DE PFAFF SANS SOLUTION ALGÉBRIQUE

LUIS GUSTAVO MENDES
MARCOS ANTONIO ARTURO SEBASTIANI ARTECONA

SÉRIE A, Nº 37
PORTO ALEGRE, JANEIRO DE 1994

Sur la Densité des Systèmes de Pfaff sans Solution Algébrique

L.G. Mendes et M. Sebastiani

Résumé: On démontre que dans toute surface rationnelle, non-isomorphe au plan projectif, il existe une feuilletage analytique rigide, possédant des feuilles algébriques et n'ayant que des singularités isolées.

Abstract: It is proved that in every rational surface, non - isomorphic to the projective plane, there exists an holomorphic foliation which is rigid and has algebraic leaves, having only isolated singularities.

Dans ce qui suit "surface" voudra dire "variété analytique complexe ,connexe,de dimension 2" et "surface algébrique" voudra dire "surface algébrique projective, complexe, lisse, connexe".

Si M est une surface,on notera $\Pi(M)$ l'ensemble des systèmes de Pfaff analytiques (de dimension 1) sur M n'ayant que des singularités isolées. $\Pi(M)$ est muni d'une topologie naturelle, voir [L-N].

Définition 1: Si M est une surface algébrique et $\Omega \in \Pi(M)$, une solution algébrique de Ω est une courbe algébrique $X \subset M$ telle que X-Sing(Ω) est une feuille du feuilletage défini par Ω dans M-Sing(Ω).

Définition 2: Si M est une surface et $\Omega \in \Pi(M)$, Ω est rigide si Ω est un point isolé de $\Pi(M)$ (c'est à dire, tout $\Gamma \in \Pi(M)$ assez proche de Ω est identique à Ω).

Rappelons la suivante :

Définition 3: Une surface algébrique M est géométriquement reglée si il existe une courbe projective lisse C et un morphisme lisse $p : M \longrightarrow C$ dont les fibres sont isomorphes à la droite projective $\mathbb{P}_1$.

L'objet de cet article est de prouver le :

THÉORÈME : *Soit M une surface algébrique qui domine une surface géométriquement reglée. Alors il existe un $\Omega \in \Pi(M)$ qui est rigide et qui possède des solutions algébriques.*

COROLLAIRE : *Soit M une surface algébrique rationnelle non isomorphe à $\mathbb{P}_2$. Alors il existe un $\Omega \in \Pi(M)$ qui est rigide et qui possède des solutions algébriques.*

En particulier, l'ensemble des $\Omega \in \Pi(M)$ sans solution algébrique n'est pas dense dans $\Pi(M)$.

Preuve du corollaire : Si M est rationnelle et non isomorphe à $\mathbb{P}_2$, alors M domine une surface géométriquement reglée et on peut appliquer le théorème. En effet, d'aprés **[B] th. 5.10,** M domine une surface F_n ([B] **4.1**) avec $n \neq 1$ ou bien M domine $\mathbb{P}_2$. Mais, dans ce dernier cas, M domine F_1 ([B] prop **4.1**) puisque M n'est pas isomorphe a $\mathbb{P}_2$. ∎

Par contre, aucun $\Omega \in \Pi(\mathbb{P}_2)$ n'est rigide (voir [J]).

Ce travail a été motivé par la lecture de l'article [L-N] (où l'on trouve des exemples des surfaces dans lesquelles l'ensemble des systèmes de Pfaff sans solution algébrique n'est pas dense) et par des entretiens avec C. Camacho qui nous ont suggéré d'utiliser la classe de Chern. Des entretiens avec E. Ghys nous ont amené à améliorer une première version de cet article.

1. Préliminaires :

Dans ce § 1, M denotera une surface et S une surface de Riemann compacte plongée dans M .

Définition 4 : Soit $\Omega \in \Pi(M)$. On dit que S est une <u>solution persistante</u> de Ω si

a) $S \subset M\text{-}\mathrm{Sing}(\Omega)$

b) S est une feuille de $\Omega \,|(M\text{-}\mathrm{Sing}(\Omega))$

c) il existe un voisinage W de Ω dans $\Pi(M)$ tel que si $\Gamma \in W$ alors S est feuille de $\Gamma \,|(M\text{-}\mathrm{Sing}(\Gamma))$

Notons $T(M)$ (resp. $T(S)$) le fibré tangent de M (resp. S).

Lemme 1 : Supposons que :

i) S est isomorphe à $\mathbb{P}_1$ et

ii) $T(M) \,|S$ se decompose <u>analytiquement</u> :

$$T(M) \,|S = T(S) \oplus N$$

où N est fibré vectoriel holomorphe de dimension 1 de base S.

Soit $\Omega \in \Pi(M)$ tel que $S \subset M\text{-}\mathrm{Sing}(\Omega)$ et S est une feuille de $\Omega \,|(M\text{-}\mathrm{Sing}(\Omega))$.

Alors S est solution persistante de $\Omega \,|U$ pour tout voisinage ouvert U de S dans M.

Exemple 1: Soit K une surface de Riemann compacte non-isomorphe à $\mathbb{P}_1$. Alors, il existe $\omega \neq o$ 1-forme holomorphe sur K. Soit D un disque de centre $o \in \mathbb{C}$. Soient: $M = K \times D$, $S = K \times \{o\}$, $p_1 : M \longrightarrow K$ et $p_2 : M \longrightarrow D$ les projections, $\Omega \in \Pi(M)$ défini par $p_2^*(dz)=o$ où z est la coordonnée dans D. Ω n'a pas de point singulier et ses feuilles sont $K \times \{z\}$, $z \in D$. Soit $\Omega_\lambda \in \Pi(M)$ défini par

$$p_2^*(dz)+\lambda\, p_1^*(\omega)=o \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq o$$

(Cette équation définit bien un système de Pfaff à singularités isolés puisque $p_2^*(dz)+\lambda\, p_1^*(\omega)$ n'est pas la forme nulle.)

Alors, $S \subset M\text{-}\mathrm{Sing}(\Omega_\lambda)$ n'est pas feuille de Ω_λ et $\Omega_\lambda \longrightarrow \Omega$ quand $\lambda \longrightarrow o$. Ainsi S n'est pas persistante pour Ω .

Par contre, d'après le lemme 1, S est persistante si K est isomorphe à $\mathbb{P}_1$.

Exemple 2: Si L est une droite dans $\mathbb{P}_2$, alors la condition ii) du lemme 1 est satisfaite, puisque L est transverse aux droites passant par un point $Q \notin L$. Si on éclate dans $\mathbb{P}_2$ un point $P \in L$, la transformée stricte $\hat{L}$ de L conserve cette propriété (on relève les droites passant par Q différentes de la droite PQ et on complète par la droite exceptionnelle).

Soit $\Omega \in \Pi(\mathbb{P}_2)$ tel que L est une solution algébrique de Ω, Ω n'a qu'un point singulier P sur L et ce point est dicritique (au sens que si on éclate P dans $\mathbb{P}_2$, le transformé strict $\hat{\Omega}$ de Ω n'a aucun point singulier sur la droite exceptionnelle). Alors $\hat{L}$ est une solution persistante de $\hat{\Omega}$, d'après le lemme 1.

Le lemme 1 est conséquence immédiate du suivant

Lemme 2: Dans les hypothèses du lemme 1, soit $U \supset S$ un ouvert et soit $\Lambda \in \Pi(U)$ tel que $S \subset U\text{-Sing}(\Lambda)$ e $\Lambda_x \neq N_x$ pour tout $x \in S$ (où $x \longrightarrow \Lambda_x$ est le champ de droites définit par Λ dans $U\text{-Sing}(\Lambda)$) Alors S est solution algébrique de Λ.

La démonstration du lemme 2 s'appuie dans le

Lemme 3 : Dans les hypothèses du lemme 1, soit $PT(M)$ le fibré en droites projectives associé à $T(M)$. Soit $E = PT(M)|S - \{N_x; x \in S\}$

Alors E est un fibré analytique à fibre type $\mathbb{C}$ sur S, analytiquement isomorphe à $N \otimes T(S)^*$.

Preuve du lemme 3:

Soient $\mu \in N_x$, $\phi \in T_x(S)^*$, $x \in S$. L'isomorphisme est défini par

$$\mu \otimes \phi \longrightarrow \{ \phi(v)\mu + v \,; v \in T_x(S) \} \in E_x$$

■

Preuve du lemme 2:

La correspondance $x \longrightarrow \Lambda_x$ définit une section analytique de E. Pour prouver que S est encore feuille de $\Lambda|U-Sing(\Lambda)$ il suffit de prouver que cette section est identique à la section $x \longrightarrow T_x(S)$.

Supposons que ces sections ne soient pas identiques. Alors, d'après le lemme 3, $N \otimes T(S)^*$ admettrait une section analytique différente de la section nulle. Donc, l'indice de autointersection de la section nulle serait ≥ 0. Alors,

$$\langle c_1(N \otimes T(S)^*), [S] \rangle \geq 0$$

où $[S]$ est la classe fondamentale de S et c_1 est la première classe de Chern.

D'autre part, comme S est isomorphe à $\mathbb{P}_1$, on a :

$$\langle c_1(N \otimes T(S)^*), [S] \rangle = \langle c_1(N), [S] \rangle - \langle c_1(S), [S] \rangle = \langle c_1(N), [S] \rangle - 2$$

Mais, d'après la formule de Camacho-Sad [C-S],

$$\langle c_1(N), [S] \rangle = 0$$

et on arrive à une contradiction. ■

2. Preuve du Théoreme :

Soit N une surface géométriquement reglée telle qu'il existe un morphisme birrationnel $f: M \longrightarrow N$. Alors, il existe un ensemble fini $F \subset N$ tel que $f: U \longrightarrow V$ est un isomorphisme, où $V = N-F$ et $U = f^{-1}(V)$.

Soit $p: N \longrightarrow C$ un morphisme lisse, où C est une courbe projective lisse, dont les fibres sont isomorphes a $\mathbb{P}_1$. Alors, p est une fibration analytiquement localement triviale ([B]th.3.4)

Soit $\Omega \in \Pi(N)$ dont les feuilles sont les fibres de p.

Soit $A \subset C$ un ouvert connexe non-vide tel que $W = p^{-1}(A) \subset V$ et que $p_{|W}: W \longrightarrow A$ soit analytiquement trivial. Au moyen d'une trivialisation on obtient un champ analytique de droites tangentes $x \longrightarrow N_x$ sur W transverse aux fibres.

Soit $B \subset C$ un ouvert non-vide tel que $\overline{B} \subset A$. Soit $W' = p^{-1}(B)$. Comme $\overline{W'} \subset W$ est compact, pour tout $\Lambda \in \Pi(W)$ assez proche de $\Omega \,|W$ on aura : a) Λ n'a pas de point singulier dans W' et b) $\Lambda_x \neq N_x$ pour tout $x \in W'$.

D'après le lemme 2 appliqué à $p^{-1}(y)$ pour chaque $y \in B$, on a que $p^{-1}(y)$ est aussi feuille de Λ. Alors $\Omega \,|W' = \Lambda \,|W'$. Donc $\Omega = \Lambda$. Ceci montre que $\Omega \,|W$ est rigide. Donc, $f^*(\Omega) \,|f^{-1}(W)$ est rigide, puisque $f: U \longrightarrow V$ est un isomorphisme et $W \subset V$. Donc, $f^*(\Omega)$ est rigide. En plus, $f^{-1}(p^{-1}(y))$ est une feuille de $f^*(\Omega)$ pour chaque $y \in A$. Donc, $f^*(\Omega)$ possède des solutions algébriques. ■

3 References:

[L-N] Lins Neto A., Contruction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, J. Differential Geometry 26 (1987) 1-31

[J] Jouanolou J.P., Équations de Pfaff algébriques, Lecture notes in Math.,Springer Verlag,vol.708,1979

[B] Beauville A., Surfaces Algébriques Complexes ,Astérisque vol.54 1978

[C-S] Camacho C.& Sad P., Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields , Ann. of Math. 115 (1982) 579-595

Marcos Sebastiani
Rua Cristiano Fischer 120/207
Porto Alegre, RS 91410-000
Brésil

Luís Gustavo Mendes
R. Vicente da Fontoura 1087/4
Porto Alegre, RS 90630-000
Brésil

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série A: Trabalho de Pesquisa

1. Marcos Sebastiani Artecona - Transformation des Singularités - MAR/89

2. Jaime Bruck Ripoll - On a Theorem of R. Langevin about Curvature and Complex Singularities - MAR/89

3. Eduardo Cisneros, Miguel Ferrero e Maria Inés Gonzales - Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings - ABR/89

4. Oclide José Dotto - ε-Dilations - JUN/89

5. Jaime Bruck Ripoll - A Characterization of Helicoids - JUN/89

6. Mark Thompson e V. B. Moscatelli - Asymptotic Distribution of Liusternik-Schnirelman Eigenvalues for Elliptic Nonlinear Operators - JUL/89

7. Mark Thompson - The Formula of Weyl for Regions with a Self-Similar Fractal Boundary - JUL/89

8. Jaime Bruck Ripoll - A Note on Compact Surfaces with Non Zero Constant Mean Curvature - OUT/89

9. Jaime Bruck Ripoll - Compact ε-Convex Hypersurfaces - NOV/89

10. Jandyra Maria G. Fachel - Coeficientes de Correlação Tipo-Contigência - JAN/90

11. Jandyra Maria G. Fachel - The Probality of Ocurrence of Heywood Cases - JAN/90

12. Jandyra Maria G. Fachel - Heywood Cases in Unrestricted Factor Analysis - JAN/90

13. Julio Cesar R. Claeyssen e Tereza Tsukazan de Ruiz - Dynamical Solutions of Linear Matrix Diferential Equations - JAN/90

14. Maria T. Albanese - Behaviour of de Likelihood in Latent Analysis of Binary Data - ABR/91

15. Maria T. Albanese - Measuremente of the Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91

16. Maria Teresinha Albanese - Adequacy of the Asymptotic Variance-Covariance Matrix Using Bootstrap Jackknife Techniques in Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91

17. Maria Teresinha Albanese - Latent Variable Models for Binary Response - ABR/91

18. Mark Thompson - Kinematic Dynamo in Random Flows - DEZ/90

19. Jaime Bruck Ripoll e Marcos Sebastiani Artecona- The Generalized Map and Applications - AGO/91

20. Jaime Bruck Ripoll, Suzana Fornari e Katia Frensel - Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the Complex Hyperbolic Space - AGO/91

21. Suzana Fornari e Jaime Bruck Ripoll - Stability of Compact Hypersurfaces with Constant Mean Curvature - JAN/92

22. Marcos Sebastiani Artecona - Une Généralisation de L'Inveriant de Malgrange - FEV/92

23. Cornelis Kraaikamp e Artur Lopes - The Theta Group and the Continued Fraction with Even Partial Quotients - MAR/92

24. Silvia Lopes - Amplitude Estimation in Multiple Frequency Spectrum - MAR/92

25. Silvia Lopes e Benjamin Kedem - Sinusoidal Frequency Modulated Spectrum Analysis - MAR/92

26. Silvia Lopes e Benjamin Kedem - Iteration of Mappings and Fixed Spectrum Analysis - MAR/92

27. Miguel Ferrero, Eduardo Cisneros e Maria Ines Gonzales - Ore Extensions and Jacobson Rings - MAI/92

28. Sara C. Carmona - An Asymptotic Problem for a Reaction-Diffusion Component - JUL/92

29. Luiz Fernando Carvalho da Rocha - Unique Ergodicity of Interval Exchange Maps - JUL/92

30. Sara C. Carmona - Wave Front Propagation for a Cauchy Problem With a Fast Component - OUT/92

31. Marcos Sebastiani Artecona e Iván Pan Pérez - Intersections Transverses dans l'Espace Projectif - OUT/92

32. Miguel Ferrero - Closed Bimodules over Prime Rings: Closed Submodules and Applications to Rings Extensions - DEZ/92

33. Dinara W. X. Fernandez - Método da Máxima Verossimilhança Restrita para Estimação de Componentes de Variância - SET/93

34. Martin Knott e M. Teresa Albanese - Polymiss: A Computer Program for Fitting a One- or Two-Factor Logit-Probit Latent Variable Model to Polynomous Data when Observations may be Missing - OUT/93

35. Peter Struss e Waldir L. Roque - Foundations and Applications of Qualitative Reasoning and Model-Based-Diagnosis - OUT/93

36. Edmund R. Puczylowski - On Koethe's Problem - OUT/93

37. Luis G. Mendes e Marcos A. A. Sebastiani Artecona - Sur la Densité des Systèmes de Pfaff sans Solution Algébrique - JAN/94

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES

INSTITUTO DE MATEMATICA - UFRGS

AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111

CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS

FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33

RAMAL 6197

FAX: 336 15 12