

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE REYNOLDS NA FORMAÇÃO DE INSTABILIDADES EM CAMADAS DE MISTURA ESTRATIFICADAS

Leonardo Antônio de Araujo

Orientadora: Profa. Dra. Edith Beatriz Camaño Schettini

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Teixeira Mendonça - IAE

Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini - FENG/PUCRS

Prof. Dr. Rafael Manica - IPH/UFRGS

Março, 2019.

Dedico aos meus pais.

"O cientista não estuda a natureza porque é útil fazê-lo. Ele estuda porque ele sente prazer nisso, e ele sente prazer porque é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, e a vida não valeria a pena ser vivida. Não estou falando, claro, da beleza que atinge os sentidos, da beleza das qualidades e das aparências. Estou longe de desprezar isso, mas não tem nada a ver com a ciência. O que quero dizer é aquela beleza mais íntima que vem da ordem harmoniosa de suas partes, e que uma inteligência pura pode compreender".

Henri Poincaré

Resumo

Plumas hipopícnais são um fenômeno comum na natureza e em contextos industriais. Estes escoamentos ocorrem quando um fluido mais leve se propaga sob outro mais pesado, provocando processos de mistura. Exemplos incluem: descarga de sedimentos na foz de rios, quedas de cinzas vulcânicas (piroclasto) no fundo do oceano, transporte vertical de plâncton, processos de flutuação e solidificação, entre outros. No presente trabalho, é realizado um estudo de análise de estabilidade hidrodinâmica linear com a finalidade de estudar a influência das espessuras das camadas de mistura e do número de Reynolds na formação de instabilidades em plumas fluviais. As equações governantes foram discretizadas utilizando o método de colocação de Chebyshev e o problema de autovalores e autovetores generalizado foi resolvido através do algoritmo QZ. O código foi validado para o caso da camada de mistura homogênea e estratificada invíscida, obtendo resultados satisfatórios. Para o caso homogêneo, identificou-se um número de Reynolds crítico para início das instabilidades, sendo igual a 20. Quando a estratificação é levada em conta, o Re crítico tendeu a aumentar com o aumento do número de Richardson. Quando há espessura relativa entre a camada cisalhante e de sedimentos, a condição clássica de Richardson maior que $1/4$ para formação de instabilidades não foi observada, sendo dependente da razão entre as espessuras, sendo demonstrado analiticamente. Em todos os casos, a variação de Re foi inversamente proporcional ao número de onda mais instável, apresentando comportamento assintótico e consistindo em modos de Kelvin-Helmholtz.

Abstract

Hypopycnal plumes are a common phenomenon in nature and in industry. These flows occur when a lighter fluid flows above a heavier fluid, causing mixing processes. Examples include discharge of sediments at the mouths of rivers, volcanic ash (pyroclast) falls on the ocean floor, vertical transport of plankton, flotation and solidification processes, among others. In the present work, hydrodynamic stability analysis is carried out with the purpose of studying the influence of the mixing layer thicknesses, besides the Reynolds number, in the formation of instabilities in fluvial plumes. The governing equations were discretized using the Chebyshev collocation method and the generalized eigenvalue and eigenvector problem was solved through the QZ algorithm. The code was validated for the case of homogeneous and stratified mixing layer, obtaining satisfactory results. For the homogeneous case, a critical Reynolds number was identified for the development of instabilities, being equal to 20. Considering an stratified medium, the critical Re tended to increase along with the Richardson number. When there is a relative thickness between the shear and concentration base flows, the classical condition for stability of Richardson greater than $1/4$ was not observed, being dependant on the ratio of thicknesses. In all cases, the Re variation was inversely proportional to the most unstable wavenumber, showing asymptotic behavior and consisting in Kelvin-Helmholtz modes.

Agradecimentos

À minha orientadora, profa. Edith Beatriz Camaño Schettini, pelos valiosos ensinamentos e sobretudo pela amizade. Ao prof. Jorge Hugo Silvestrini, pelas sugestões e auxílio prestado.

Aos integrantes da banca de dissertação, pelas observações úteis dadas para este trabalho.

A todos colegas do NETT, pelas conversas descontraídas, troca de ideias e amizade.

À UFRGS, ao IPH e ao CNPq, por prover as condições necessárias e apoio financeiro para esta pesquisa.

Aos demais amigos e parceiros que me auxiliaram a manter-me motivado.

Aos meus amados pais, aos quais sou eternamente grato, Eduardo Antônio Behs de Araujo (*in memoriam*) e Heloisa Rhoden de Araujo, que me forneceram toda a base sólida para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Ao meu amado irmão, Eduardo Antônio Rhoden de Araujo, que, juntamente com meus pais, me orientou e aconselhou.

À minha amada namorada, Carolina Brocker Dornelles, cujos apoio e compreensão foram imprescindíveis. Por me motivar e ser uma ótima companheira.

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	x
1 Introdução	1
1.1 Relevância	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estrutura do Trabalho	4
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Contextualização física	5
2.1.1 Correntes de gravidade	5
2.1.2 Classificação das correntes de densidade	11
2.1.3 Plumas fluviais	12
2.2 Análise de estabilidade	13
2.2.1 Estabilidade hidrodinâmica	13
2.2.2 Método dos modos normais	15
2.2.3 Equações de Navier-Stokes linearizadas (LNSE)	17
2.2.4 Análise de estabilidade local	18
2.2.5 Estabilidade de escoamentos paralelos	20
2.3 Instabilidades em plumas hipopícnais	28
2.3.1 Instabilidades de Kelvin-Helmholtz (KH)	29
2.3.2 Instabilidades de Holmboe (H)	33
2.3.3 Instabilidades de Rayleigh-Taylor (RT)	36
2.3.4 Instabilidades de dupla-difusividade (SF)	36
2.3.5 Instabilidades promovidas pela sedimentação (SD)	39
3 Metodologia	44
3.1 Modelo matemático	44
3.1.1 Escoamento de base	45
3.1.2 Adimensionalização	46

3.1.3	Decomposição em modos normais	47
3.2	Método numérico	51
3.2.1	Método de colocação de Chebyshev	51
3.2.2	Transformação da malha	54
3.2.3	Solução do problema de autovalores e autovetores	54
3.2.4	Filtragem de autovalores espúrios	55
4	Resultados	57
4.1	Verificação	57
4.2	Validação	59
4.2.1	Camada de mistura homogênea ($Ri = 0$)	59
4.2.2	Camada de mistura estratificada ($Ri > 0$ e $R_\rho = 1$)	60
4.3	Influência do número de Reynolds (Re)	62
4.3.1	Camada de mistura homogênea ($Ri = 0$)	63
4.3.2	Camada de mistura estratificada ($Ri > 0$ e $R_\rho = 1$)	66
4.3.3	Camada de mistura com espessura variável ($Ri > 0$ e $0 < R_\rho$)	68
5	Conclusões e recomendações	76
5.1	Conclusões	76
5.2	Recomendações	78
	Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

1.1	Concentrações de clorofila nas águas superficiais, obtidas a partir dados coletados pelo espectroradiômetro de imagem de resolução moderada (MODIS) no satélite Aqua da NASA em 30 de setembro de 2006. As áreas onde as concentrações são mais elevadas são amarelas e correspondem à pluma que escoou desde a foz do rio Amazonas (fonte: https://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=7021 [44].	2
2.1	Frente de uma corrente de gravidade de ar frio na atmosfera, visível pela areia e poeira suspensa (Simpson, 1997)[53].	6
2.2	Comparação entre as expressões 2.10 e 2.12 para cálculo da difusividade para água com sedimentos a 20 °C. Gráfico em escala logarítmica.	10
2.3	Classificação de correntes de densidade. Adaptado de Mulder e Alexander (2001)[43].	11
2.4	(a) Representação esquemática do descolamento da pluma. (b) Estruturas de mistura de grande escala na região de aceleração do escoamento. (c) Instabilidades cisalhantes. (Adaptado de Horner-Devine <i>et al.</i> , 2015)[29]	12
2.5	Ilustração do conceito de estabilidade (White, 1991) [58].	13
2.6	Transição para a turbulência na camada limite de uma placa plana. Adaptado de Schlichting [48]. 1) Escoamento laminar estável. 2) Ondas de Tollmien-Schlichting. 3) Ondas tridimensionais. 4) Instabilização dos vórtices. 5) Formação de <i>spots</i> turbulentos. 6) Escoamento turbulento plenamente desenvolvido.	15
2.7	Cenários possíveis a partir de uma análise espaço-temporal (Bagheri <i>et al.</i> , 2009)[4].	21
2.8	Representação do teorema do semi-círculo de Howard no plano complexo de autovalores. Adaptado de Kundu (2008)[35].	26
2.9	Exemplos de escoamentos paralelos, com pontos de inflexão indicados com I . Os casos (a), (b) e (c) não satisfazem nem o critério de Rayleigh nem o de Fjørtoft para instabilidade. O caso (d) satisfaz a condição de Rayleigh mas não a de Fjørtoft, enquanto que os casos (e) e (f) satisfazem ambas as condições. Figura extraída de Kundu (2008)[35].	28
2.10	Desenvolvimento temporal de uma instabilidade de \mathcal{KH} . Adaptado de Martinez (2006)[39].	29

2.11	Imagens de instabilidades de \mathcal{KH} em uma pluma fluvial obtidas por ecobatimetria. A alta retrodifusão acústica está associada com regiões de elevados gradientes de densidade na pycnoclina. O fundo do mar é visível em parte de cada imagem. Estão indicadas velocidades e salinidades médias superficiais e de fundo. A profundidade dos sensores de bordo está indicado por linhas pretas. a) Transecto interno b) Transecto externo. Adaptado de Geyer <i>et al.</i> , (2010)[24].	30
2.12	Imagens de instabilidades de \mathcal{KH} em experimento físico para uma camada de mistura homogênea. Extraído de Browand e Winant (1973)[10].	31
2.13	Curva de estabilidade neutra para uma camada de mistura estratificada e taxas máximas de amplificação. Adaptado de Hazel (1972)[26].	33
2.14	Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{H} . Adaptado de Lawrence <i>et al.</i> (1991)[36].	33
2.15	Imagens de instabilidades de \mathcal{H} em experimento físico para uma camada de mistura estratificada. Extraído de Browand e Winant (1973)[10].	34
2.16	Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{RT} . Adaptado de Burns e Meiburg <i>et al.</i> (2015)[12].	37
2.17	Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{SF} . Adaptado de Burns e Meiburg <i>et al.</i> (2015)[12].	37
2.18	Fotografia de <i>salt-fingers</i> , extraído de Kundu (2008)[35].	38
2.19	Fotografia de folha de luz laser CCD das instabilidades movidas pela sedimentação. Extraído de Hoyal <i>et al.</i> (1999)[31].	40
2.20	Variação da velocidade de queda crítica em função do número de Richardson salino (Ri_2) para desenvolvimento do modo \mathcal{SD} . Extraído de Farenzena e Silvestrini (2016)[19].	41
2.21	Campos instantâneos da perturbação de sedimentos para DNS bidimensional, onde se observa o desenvolvimento temporal da instabilidade de \mathcal{SD} . Extraído de Alsinan <i>et al.</i> (2017)[2].	42
2.22	Curvas de estabilidade e modos dominantes em função do número de Richardson total e velocidade de queda para a configuração fracamente misturada (a) e fortemente misturada (b). Adaptado de Farenzena e Silvestrini (2017)[20].	43
3.1	Escoamento de base utilizado no presente trabalho.	48
3.2	Convergência do autovalor σ (taxa de amplificação temporal) com o aumento do número de pontos (N) (Burns e Meiburg, 2012)[11].	52
3.3	Curva de estabilidade para o Richardson global em função do número de onda transversal (α), com e sem o algoritmo para filtragem de autovalores espúrios.	56
4.1	Plano complexo dos autovalores σ obtidos para a camada de mistura homogênea com $\alpha = 0,4449$.	58
4.2	Convergência da solução para σ_i , variando o parâmetro de malha L_{max}/θ .	58

4.3	Variação da taxa de amplificação σ_i em função do número da onda α , para os casos de escoamento não-viscoso e viscoso ($Re = 10^4$)	60
4.4	Detalhe da variação da taxa de amplificação σ_i para $0,92 \leq \alpha \leq 1$. A partir de $\alpha = 0,94$ observa-se a divergência da solução invíscida e a viscosa ($Re = 10^4$).	60
4.5	Isolinhas de vorticidade para a camada mistura homogênea (modo mais instável).	60
4.6	Curva de estabilidade para Richardson global (Ri) em função do número de onda transversal (α).	61
4.7	Variação da máxima taxa de amplificação σ_i e número de onda mais instável α em função de Ri	61
4.8	Variação do campo de vorticidade da perturbação para o escoamento cisalhante estratificado com o aumento do Ri para o respectivo número de onda mais instável.	62
4.9	Variação da maior taxa de amplificação em função do número de Reynolds para a camada de mistura homogênea.	63
4.10	Variação do número de onda mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura homogênea.	63
4.11	Detalhe mostrando a taxa de amplificação do primeiro modo instável.	64
4.12	Detalhe mostrando o número de onda do primeiro modo instável.	64
4.13	Variação do campo de vorticidade da perturbação para o escoamento cisalhante homogêneo com o aumento do Re para o número de onda mais instável.	65
4.14	Variação do número de onda mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura estratificada.	66
4.15	Variação da maior taxa de amplificação mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura estratificada.	66
4.16	Variação da curva de estabilidade neutra de Ri em função de α para $Re = 10^2, 10^3$ e 10^4	67
4.17	Curva de estabilidade neutra do número de Richardson em função do número de Reynolds.	67
4.18	Variação do campo de vorticidade para o escoamento cisalhante estratificado para o primeiro modo instável com o aumento do Ri	69
4.19	Variação da curva de estabilidade neutra para o Ri para diferentes R_ρ	73
4.20	Variação da curva de estabilidade neutra para o Ri e $R_\rho = 2$ para diferentes Re	73
4.21	Variação da maior taxa de amplificação em função de Ri para diferentes R_ρ	74
4.22	Variação do número de onda mais instável em função de Ri para diferentes R_ρ	74
4.23	Variação da curva de estabilidade neutra de Ri em função R_ρ para $Re = 10^2, 10^3$ e 10^6	75
4.24	Variação da curva de estabilidade neutra de Re em função de Ri para diferentes R_ρ	75

Lista de Tabelas

2.1	Classificação dos sedimentos. Adaptado de Julien (2010)[32]	9
2.2	Classificação das teorias de análise de estabilidade modal (Juniper <i>et al.</i> , 2014)[33]	17
2.3	Condições para surgimento das instabilidades de \mathcal{KH} e \mathcal{H} . Tabela adaptada de Martinez (2006) e Ferreira (2014)	36
3.1	Parâmetros adimensionais utilizados no presente trabalho	47
5.1	Resumo das condições para surgimento de instabilidades primárias	78

Lista de Símbolos

Grandezas dimensionais

\tilde{d}_s	diâmetro das partículas de sedimentos	[m]
\tilde{g}	aceleração da gravidade	[m/s ²]
\tilde{g}'	gravidade reduzida	[m/s ²]
\tilde{h}	altura de liberação da corrente	[m]
\tilde{L}	escala de comprimento	[m]
N_{BV}	frequência de Brunt-Väisälä	[Hz]
\tilde{p}	pressão	[Pa]
\tilde{t}	tempo	[s]
$\tilde{\mathbf{u}}$	vetor velocidade	[m/s]
\tilde{U}	escala de velocidade	[m/s]
\tilde{u}_s	velocidade de queda dos sedimentos	[m/s]
\tilde{x}	coordenada cartesiana	[m]
\tilde{y}	coordenada cartesiana	[m]
\tilde{z}	coordenada cartesiana	[m]
$\Delta\tilde{u}$	diferença de velocidade	[m/s]
$\tilde{\delta}_u$	espessura da camada cisalhante	[m]
$\tilde{\delta}_1$	espessura da camada de mistura de sedimentos	[m]
$\tilde{\delta}_2$	espessura da camada de mistura de sal	[m]
$\tilde{\gamma}_1$	coeficiente de expansão volumétrica do sedimento	[-]
$\tilde{\gamma}_2$	coeficiente de expansão volumétrica do sal	[-]
$\tilde{\varepsilon}$	deslocamento entre as camadas de sedimentos e sal	[m]
$\tilde{\rho}$	massa específica	[kg/m ³]
$\tilde{\rho}_1$	massa específica da água com sedimentos	[kg/m ³]
$\tilde{\rho}_2$	massa específica da água com sal	[kg/m ³]
$\tilde{\rho}_f$	massa específica da corrente de densidade	[kg/m ³]
$\tilde{\rho}_w$	massa específica do fluido ambiente	[kg/m ³]
$\Delta\tilde{\rho}$	Variação de massa específica	[kg/m ³]
$\tilde{\nu}$	viscosidade cinemática	[m ² /s]
$\tilde{\kappa}$	constante de difusão molecular	[m ² /s]
$\tilde{\kappa}_1$	constante de difusão dos sedimentos	[m ² /s]
$\tilde{\kappa}_2$	constante de difusão sal	[m ² /s]
$\tilde{\mu}$	viscosidade dinâmica	[N.s]
$\tilde{\varphi}_1$	concentração de sedimento	[-]
$\tilde{\varphi}_2$	concentração de sal	[-]
$\tilde{\varphi}_1^{max}$	concentração máxima de sedimentos	[-]
$\tilde{\varphi}_2^{max}$	concentração máxima de sal	[-]
\tilde{k}_B	Constante de Boltzmann	[m ² .kg.s ⁻² .K ⁻¹]
\tilde{T}	Temperatura	[K]

Parâmetros adimensionais

Fr	número de froude densimétrico	[-]
R_ρ	Razão das espessuras das camadas de mistura	[-]
R_1	Razão das camadas de mistura de cisalhamento e sedimentos	[-]
R_2	Razão das camadas de mistura de cisalhamento e sal	[-]
Re	número de Reynolds	[-]
Re_p	número de Reynolds da partícula	[-]
Ri_1	Número de Richardson para água com sedimentos	[-]
Ri_2	Número de Richardson para água salina	[-]
$Ri_L(y)$	número de Richardson gradiente	[-]
Ri	número de Richardson global	[-]
Sc	número de Schmidt	[-]

Grandezas adimensionais

q	variável genérica do escoamento	[-]
\bar{q}	parte permanente de variável genérica	[-]
q'	parte não-permanente de variável genérica	[-]
x	vetor de coordenadas espaciais	[-]
t	tempo adimensional	[-]
ϵ	amplitude infinitesimal	[-]
\hat{q}	função de amplitude	[-]
Θ	função de fase	[-]
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária	[-]
u	vetor velocidade (adimensional)	[-]
p	pressão	[-]
σ_r	frequência angular	[-]
σ_i	taxa de amplificação ou amortecimento temporal	[-]
$\bar{\alpha}$	número de onda da transformação de Squire	[-]
α_r	número de onda na direção longitudinal	[-]
β_r	número de onda na direção transversal	[-]
α_i	taxa de amplificação/amortecimento espacial na direção x	[-]
β_i	taxa de amplificação/amortecimento espacial na direção z	[-]
ϕ	função corrente	[-]
x	coordenada cartesiana	[-]
y	coordenada cartesiana	[-]
z	coordenada cartesiana	[-]
u	velocidade em x	[-]
v	velocidade em y	[-]
w	velocidade em z	[-]
\bar{u}	velocidade do escoamento de base em x	[-]
\bar{v}	velocidade do escoamento de base em y	[-]
\bar{w}	velocidade do escoamento de base em z	[-]
u'	velocidade da perturbação em x	[-]
v'	velocidade da perturbação de base em y	[-]
w'	velocidade da perturbação de base em z	[-]
\hat{u}	velocidade da amplitude da perturbação em x	[-]
\hat{v}	velocidade da amplitude da perturbação de base em y	[-]
\hat{w}	velocidade da amplitude da perturbação de base em z	[-]
k	o número de onda total	[-]
ω	vorticidade	[-]

Símbolos matemáticos

y^-	limite inferior do domínio	[-]
y^+	limite superior do domínio	[-]
L_{max}	tamanho do domínio computacional	[-]
f	função matemática genérica	[-]
$\hat{f}_k(t)$	coeficientes de interpolação	[-]
$\phi_k(\hat{y})$	função de interpolação	[-]
T_k	k-ésimo polinômio de Chebyshev	[-]
$\psi_k(\hat{y})$	função tentativa	[-]
y	coordenada do domínio físico	[-]
\hat{y}	pontos de colocação	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	matriz do problema de autovalores generalizado	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{B}}}$	matriz do problema de autovalores generalizado	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$	matriz unitária	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$	matriz unitária	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	matriz triangular superior	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{T}}}$	matriz triangular superior	[-]
λ_S	autovalor da matriz $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	[-]
λ_T	autovalor da matriz $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$	[-]
θ	densidade de pontos da malha	[-]
m	número de escalas características de comprimento	[-]

Operadores matemáticos

\mathcal{M}	operador laplaciano	[-]
$\underline{\underline{\mathcal{M}}}$	operador laplaciano na forma matricial	[-]
$\underline{\underline{\mathcal{M}}}$	operador contendo derivadas espaciais de uma dada função	[-]
$\underline{\underline{\mathcal{D}}}$	operador diferencial	[-]
$\underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}_N$	matriz diferenciação de Chebyshev	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	matriz identidade	[-]
$\underline{\underline{\mathbf{0}}}$	matriz nula	[-]

Abreviações

<i>DNS</i>	Direct Numerical Simulation (Simulação numerica direta)
<i>LNSE</i>	Linearized Navier-Stokes Equations (Equações de Navier-Stokes Linearizadas)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Relevância

Os rios carregam mais de um terço de toda a precipitação continental para o oceano, concentrando intensos fluxos de água doce com sedimentos através de saídas estreitas na costa. Nas encostas da Cordilheira dos Andes, pequenos riachos escoam dos picos glaciais, convergindo em uma série de pequenos rios. Estes rios atravessam 6516 quilômetros de floresta densa para formar o maior rio do mundo, o Amazonas. Nele, aproximadamente 219000 metros cúbicos de água fluem do rio para o Oceano Atlântico a cada segundo. À medida que ele escoam, são carregadas folhas, sementes, fungos, animais e vários outros fragmentos de matéria orgânica, bem como solo e minerais para o oceano, formando uma pluma em sua foz. O enorme fluxo de nutrientes gerado tem um enorme impacto sobre a vida no Oceano Atlântico: eles alimentam plantas microscópicas e fitoplâncton, que por sua vez alimentam uma população diversificada de peixes e outros animais marinhos (Figura 1.1).

Correntes hipopícnais, plumas hipopícnais ou simplesmente plumas, como a gerada na foz do Rio Amazonas, ocorrem tanto em contextos naturais como artificiais. Exemplos incluem: descarga de sedimentos na foz de rios, quedas de cinzas vulcânicas (piroclasto) no fundo do oceano, transporte vertical de plâncton, processos de flutuação e solidificação, entre outros (Yu *et al.*, 2013)[60].

Interações entre os sedimentos finos e o ambiente estratificado induzido pela salinidade e temperatura do oceano são de crucial importância na determinação da taxa de descarga de sedi-

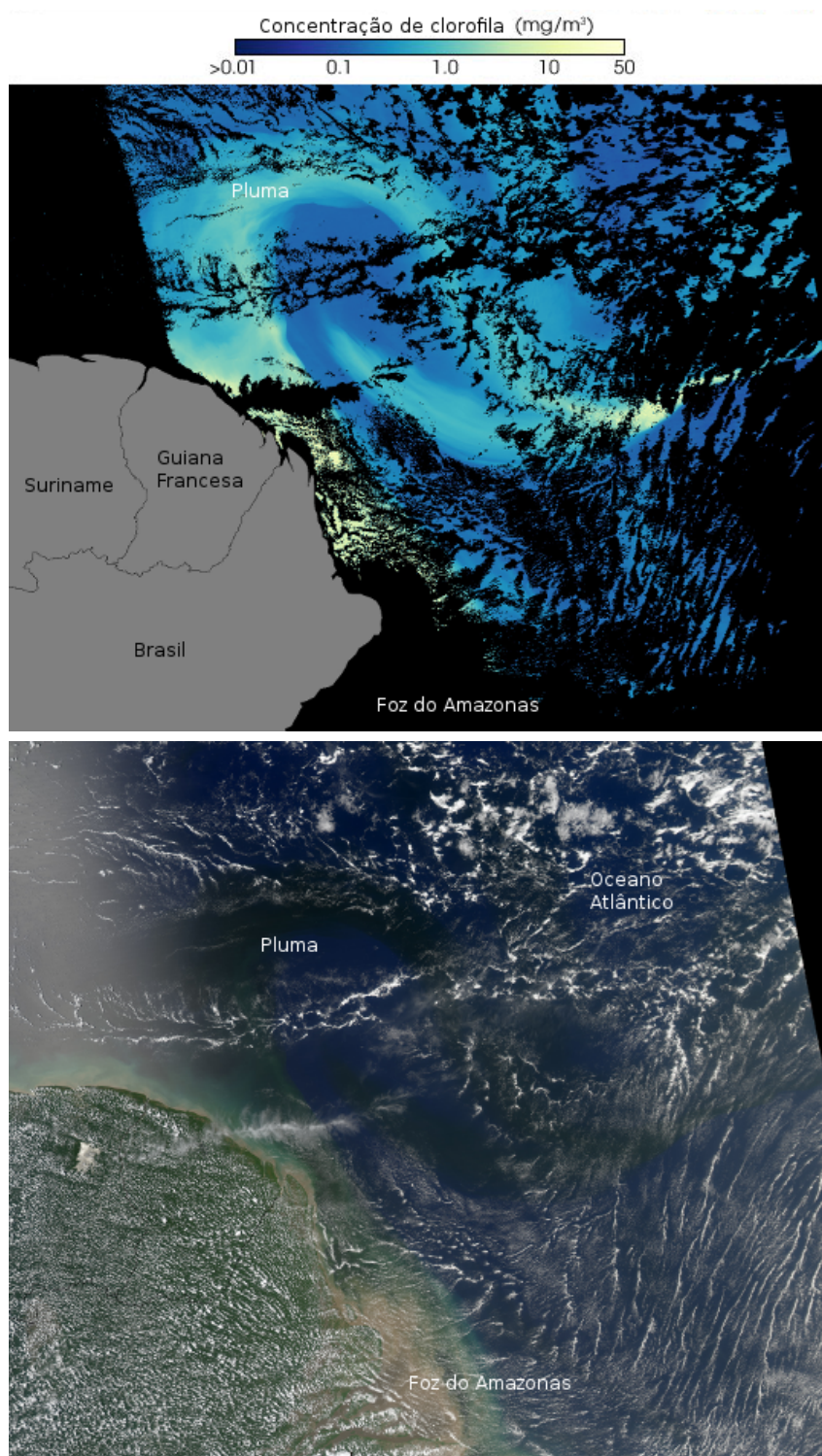


Figura 1.1: Concentrações de clorofila nas águas superficiais, obtidas a partir dados coletados pelo espectrorradiômetro de imagem de resolução moderada (MODIS) no satélite Aqua da NASA em 30 de setembro de 2006. As áreas onde as concentrações são mais elevadas são amarelas e correspondem à pluma que escoá desde a foz do rio Amazonas (fonte: <https://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=7021>[44]).

mentos da pluma do rio e a localização da deposição inicial. Na interface entre as águas doces e salgadas, ocorrem intensos processos de mistura e formação de instabilidades que interferirão na sedimentação e vice-versa. Estes processos dependem de uma ampla gama de propriedades e parâmetros, que incluem: densidades e difusividades das águas doces e salinas, velocidade de queda de sedimentos e velocidade do escoamento do rio, entre outros.

Através da análise de estabilidade linear aplicada à hidrodinâmica, é possível prever sob quais condições estas instabilidades se formam. Este método fornece informações sobre as escalas espaciais e temporais destas estruturas, identificando o tipo de instabilidade que ocorre para cada caso. A partir deste conhecimento é possível desenvolver um entendimento maior da sedimentação de plumas, fornecendo meios de controle de processos nocivos ao meio ambiente, assim como acelerar os que lhe trazem benefícios (Martinez, 2006) [39].

1.2 Objetivos

O presente trabalho irá tratar da formação de instabilidades nas camadas de mistura que ocorrem em plumas hipopícnais. A ferramenta para a análise será a teoria da estabilidade hidrodinâmica linear, utilizando métodos numéricos. Tendo em vista que o fenômeno a ser estudado possui uma ampla gama de parâmetros, estes serão limitados. Sendo assim, a questão de pesquisa é:

- Qual a influência do número de Reynolds na formação de instabilidades em camadas de mistura que ocorrem em plumas hipopícnais?

Para responder a esta questão, será necessário:

- Verificar e validar o código numérico utilizado com resultados consagrados da literatura especializada;
- Estudar a influência do número de Reynolds em camadas de mistura homogêneas;
- Estudar a influência do número de Reynolds em camadas de mistura estratificadas;
- Analisar a influência conjunta do número de Reynolds e das espessuras das camadas de sedimentos;

- Determinar o tipo de instabilidade predominante para cada caso.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro expõe as motivações e a relevância do presente trabalho para a ciência, sua aplicação no âmbito dos recursos hídricos e como o fenômeno de interesse se apresenta na natureza. Ainda, é formulada a questão de pesquisa assim como os objetivos do trabalho.

O segundo capítulo trata da revisão bibliográfica. Primeiramente, são revistos os aspectos físicos de plumas hipopícnais, seus parâmetros relevantes e sua contextualização no ambiente natural. A segunda parte do capítulo trata da teoria da estabilidade hidrodinâmica, demonstrando seus principais teoremas e resultados. Por fim, a terceira parte relaciona as duas primeiras, tratando das principais instabilidades encontradas em plumas hipopícnais e os resultados mais recentes da literatura acerca do tema.

No terceiro capítulo está exposta a metodologia utilizada. Inicialmente o modelo matemático é desenvolvido. Este é constituído pelas equações governantes do fenômeno estudado, sendo nelas aplicado o método dos modos normais proveniente da teoria da estabilidade linear, obtendo-se o problema de autovalores e autovetores a ser resolvido. Em seguida é apresentado o método numérico a ser utilizado para discretização das equações e o algoritmo para resolução do problema.

O quarto capítulo apresenta testes de validação e verificação, incluindo estudos de convergência da malha e comparações com resultados consagrados da literatura especializada. Os casos escolhidos para validação foram a camada de mistura homogênea e a camada de mistura estratificada. Em seguida são apresentados os resultados obtidos considerando a variação do número de Reynolds.

Finalmente, o quinto e último capítulo apresenta uma síntese do trabalho, apresentando conclusões e sugestões para estudos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresentará os subsídios físico-teóricos de fenômenos que ocorrem em meios em que há escoamentos estratificados. Primeiramente serão revistos os principais mecanismos físicos que intervêm no contexto de plumas fluviais, ressaltando os conceitos e equações de interesse para o presente trabalho. Em seguida, serão expostos os princípios básicos da teoria da estabilidade hidrodinâmica, enunciando seus principais teoremas. Finalmente, será feita a conexão entre os dois assuntos, abordando as principais instabilidades encontradas em escoamentos estratificados assim como o estado da arte do seu estudo.

2.1 Contextualização física

2.1.1 Correntes de gravidade

Uma corrente de gravidade (podendo ser denominada corrente de densidade) se forma quando um fluido de certa massa específica ($\tilde{\rho}_f$) propaga em outro fluido com diferente massa específica ($\tilde{\rho}_w$). Uma corrente de densidade típica possui seu comprimento muito maior que sua altura, de forma que seu movimento é predominantemente horizontal. Podendo ser geradas por diferenças de densidade da ordem de 1%, ocorrem em diversos contextos, tanto industriais como naturais: na atmosfera em frentes frias (Figura 2.1) e quentes, corpos hídricos e descargas de poluentes, entre outros (Simpson, 1997)[53].

A corrente de gravidade é movida pelas forças gravitacionais de campo, cujo efeito é refe-



Figura 2.1: Frente de uma corrente de gravidade de ar frio na atmosfera, visível pela areia e poeira suspensa (Simpson, 1997)[53].

rido através de grandeza conhecida como gravidade reduzida (Ungarish, 2009)[57]. A gravidade reduzida é definida da seguinte forma:

$$\tilde{g}' = \frac{\Delta\tilde{\rho}}{\max(\tilde{\rho}_w, \tilde{\rho}_f)}\tilde{g} \quad (2.1)$$

onde \tilde{g} é a aceleração da gravidade e $\Delta\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_f - \tilde{\rho}_w$, sendo $\tilde{\rho}_f > \tilde{\rho}_w$.

Análise dimensional

Em correntes de densidade, é usual a utilização do número de Froude densimétrico como adimensional que relaciona as forças de empuxo e as inerciais. Supondo que a corrente é liberada a partir do repouso em uma certa altura \tilde{h} e possui velocidade média \tilde{U} , este adimensional é definido como:

$$Fr = \frac{\tilde{U}}{\sqrt{\tilde{g}'\tilde{L}}}, \quad (2.2)$$

onde \tilde{U} é uma escala de velocidade (geralmente a velocidade média da corrente de densidade) e \tilde{L} uma escala de comprimento, tomada usualmente como a altura \tilde{h} em que a corrente é liberada.

Em escoamentos cisalhantes estratificados, o número de Richardson Gradiente ou Local é

utilizado para a quantificação das variações de densidade e o efeito de empuxo. Segundo Turner (1979)[56], este adimensional é dado por:

$$Ri_L(\tilde{y}) = \frac{N_{BV}^2}{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)^2} = \frac{-\tilde{g} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{y}}}{\tilde{\rho}_w \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)^2}, \quad (2.3)$$

onde $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ é o gradiente de velocidades, $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{y}}$ o gradiente de massa específica. O termo $N_{BV}^2 = -\frac{\tilde{g}}{\tilde{\rho}_w} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{y}}$ representa a frequência de empuxo ou de flutuabilidade, conhecida como frequência de Brunt-Väisälä, relacionada ao deslocamento vertical de um elemento de fluido em relação a sua posição de equilíbrio. Se $N_{BV}^2 < 0$, a estratificação é instável; se $N_{BV}^2 > 0$ a estratificação é estável, e se $N_{BV}^2 = 0$ o elemento de fluido está em equilíbrio e o escoamento é homogêneo (não estratificado) (Ferreira, 2014)[21].

Alternativamente ao número de Froude densimétrico, o número de Richardson Global pode ser utilizado como adimensional que relaciona as forças de empuxo e inerciais, dado por:

$$Ri_H = \frac{\tilde{g}' \tilde{L}}{\tilde{U}^2} = \frac{1}{Fr^2}. \quad (2.4)$$

O número adimensional que relaciona as forças inerciais e as viscosas em uma corrente de densidade, e caracterizando portanto seu regime de escoamento (laminar ou turbulento), é o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}}, \quad (2.5)$$

onde $\tilde{\nu}$ é a viscosidade cinemática.

No caso em que o fenômeno de difusão molecular seja relevante, o número de Schmidt deve ser levado em consideração:

$$Sc = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\kappa}}, \quad (2.6)$$

onde $\tilde{\kappa}$ é a difusividade molecular.

Sedimentação

Dependendo do contexto físico, o fenômeno da sedimentação e/ou erosão das partículas suspensas em uma corrente de gravidade pode ser ou não relevante. Para partículas com diâmetro $\tilde{d}_s < 0,1$ mm (argilas, siltes e areias muito finas) e regime laminar de escoamento com $Re_p < 0,1$ (número de Reynolds da partícula, baseado no diâmetro), a velocidade de queda dos sedimentos pode ser calculada pela lei de Stokes. Esta lei não considera interação entre as partículas na sedimentação, tratando a partícula isoladamente. Através do equilíbrio entre as forças viscosas e a força peso, se obtém a relação (Julien, 2010)[32]:

$$\tilde{u}_s = \frac{1}{18} \frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{g}}{\tilde{\nu}} \tilde{d}_s^2. \quad (2.7)$$

No caso de partículas com $\tilde{d}_s > 0,1$ mm pode ser usada a seguinte equação, que é válida para ampla faixa de números de Reynolds:

$$\tilde{u}_s = \frac{8\tilde{\nu}}{\tilde{d}_s} \left[(1 + 0,0139\tilde{d}_s^3)^{0,5} - 1 \right], \quad (2.8)$$

onde d_s é o diâmetro dimensional do sedimento, dado por:

$$d_s = \tilde{d}_s \left(\frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{g}}{\tilde{\nu}^2} \right)^{1/3}. \quad (2.9)$$

A tabela 2.1 mostra a velocidade de queda segundo a equação 2.9 para cada classe de sedimento e seu diâmetro associado, além da influência da temperatura que altera a viscosidade.

Difusividade molecular

Um dos modelos mais consagrados, para cálculo da difusividade ($\tilde{\kappa}$) de sedimentos suspensos na água, é o de Einstein-Stokes. Este modelo supõe que o movimento Browniano é dominante quando os sedimentos dispersos na água possuem diâmetro inferior a $1 \mu\text{m}$, sendo compostos por argilas. Para partículas esféricas, esta equação é dada por (Dill e Bromberg, 2010)[16]:

Tabela 2.1: Classificação dos sedimentos. Adaptado de Julien (2010)[32]

Classe	Tamanho	\tilde{d}_s [mm]	\tilde{u}_s (20 C°) [mm/s]	$\tilde{\kappa}$ (20 C°) [m ² /s]
Matacão	Muito grande	>2048	5430	-
	Grande	>1024	3839	-
	Médio	>512	2715	-
	Pequeno	>256	1919	-
Pedra	Grande	>128	1357	-
	Pequena	>64	959	-
Pedregulho	Muito grosso	>32	678	-
	Grosso	>16	479	-
	Médio	>8	338	-
	Fino	>4	238	-
	Muito fino	>2	167	-
Areia	Muito grossa	>1	112	-
	Grossa	>0,5	70,3	-
	Média	>0,25	36	-
	Fina	>0,125	12,8	-
	Muito fina	>0,062	3,47	-
Silte	Grosso	>0,031	0,88	-
	Médio	>0,016	0,22	-
	Fino	>0,008	0,055	$3,21 \cdot 10^{-9}$
	Muito fino	>0,004	0,014	$4,09 \cdot 10^{-10}$
Argila	Grossa	>0,0020	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$4,96 \cdot 10^{-11}$
	Média	>0,0010	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$6,28 \cdot 10^{-12}$
	Fina	>0,0005	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$8,55 \cdot 10^{-10}$
	Muito fina	>0,00024	$5,3 \cdot 10^{-5}$	$1,78 \cdot 10^{-9}$

$$\tilde{\kappa} = \frac{2\tilde{k}_B\tilde{T}}{6\pi\tilde{\nu}\tilde{d}_s}, \quad (2.10)$$

onde $\tilde{k}_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ é a constante de Boltzmann e \tilde{T} a temperatura absoluta do meio fluido.

Outra abordagem possível é o modelo semi-empírico de Segre *et al.* (2001)[51], utilizado no trabalho de Yu *et al.* (2013)[60] e Yu *et al.* (2014)[61], válido para partículas com diâmetro da ordem de $1 \mu\text{m}$ a $10 \mu\text{m}$. Neste caso, a difusividade das partículas é principalmente induzida pela flutuação de velocidade do escoamento, devido à presença de partículas próximas ao invés do movimento Browniano. Sendo assim, no limite diluído, o coeficiente de difusão dos sedimentos depende da velocidade de queda, da concentração e do diâmetro das partículas:

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\varphi_k) \approx \frac{1}{5} \sqrt{11^3} \tilde{u}_s \tilde{d}_s \frac{(1 - \varphi_k)^2 (1 - \varphi_k/0,71)^2}{\sqrt{1 + 4\varphi_k + 4\varphi_k^2 - 4\varphi_k^3 + \varphi_k^4}}, \quad (2.11)$$

onde φ_k é a concentração relativa à k-ésima fase dispersa. Para meios muito diluídos em que $\varphi_k = O(1)$, pode ser demonstrado que a difusividade dos sedimentos depende pouco da concentração, de maneira que a equação 2.11 se reduz a:

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{5} \sqrt{11^3} \tilde{u}_s \tilde{d}_s. \quad (2.12)$$

A figura compara as duas formulações para cálculo da difusividade molecular. Enquanto que no modelo de Einstein-Stokes a difusividade decresce com o aumento do diâmetro das partículas, a difusividade devido à sedimentação cresce com o seu diâmetro. Este comportamento sugere que quando o diâmetro das partículas é da ordem de $1 \mu\text{m}$ a difusividade devido à sedimentação passa a preponderar sobre a difusividade devido ao movimento browniano.

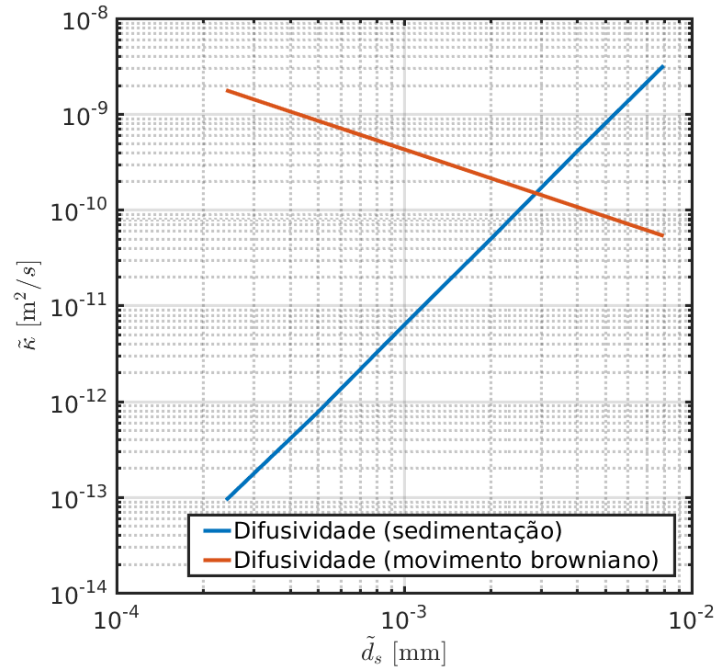


Figura 2.2: Comparação entre as expressões 2.10 e 2.12 para cálculo da difusividade para água com sedimentos a 20 C° . Gráfico em escala logarítmica.

2.1.2 Classificação das correntes de densidade

Nos meios naturais, as correntes de densidade são classificadas em subaéreas (escoamento sob o ar) ou subaquáticas (escoamento sob a água). Estas últimas podem ser subdivididas de acordo com a diferença entre as massas específicas da corrente ($\tilde{\rho}_f$) e do fluido ambiente ($\tilde{\rho}_w$) (Mulder e Alexander, 2001)[43]. Isto leva à definição de quatro tipos de fluxos (Figura 2.3):

- $\tilde{\rho}_f < \tilde{\rho}_w$: fluxo hipopical (corrente imersa)
- $\tilde{\rho}_f = \tilde{\rho}_w$: fluxo homopical
- $\tilde{\rho}_f > \tilde{\rho}_w$: fluxo hiperpical (corrente submersa)
- $\tilde{\rho}_{w1} < \tilde{\rho}_f < \tilde{\rho}_{w2}$: fluxo mesopical (corrente intrusiva)

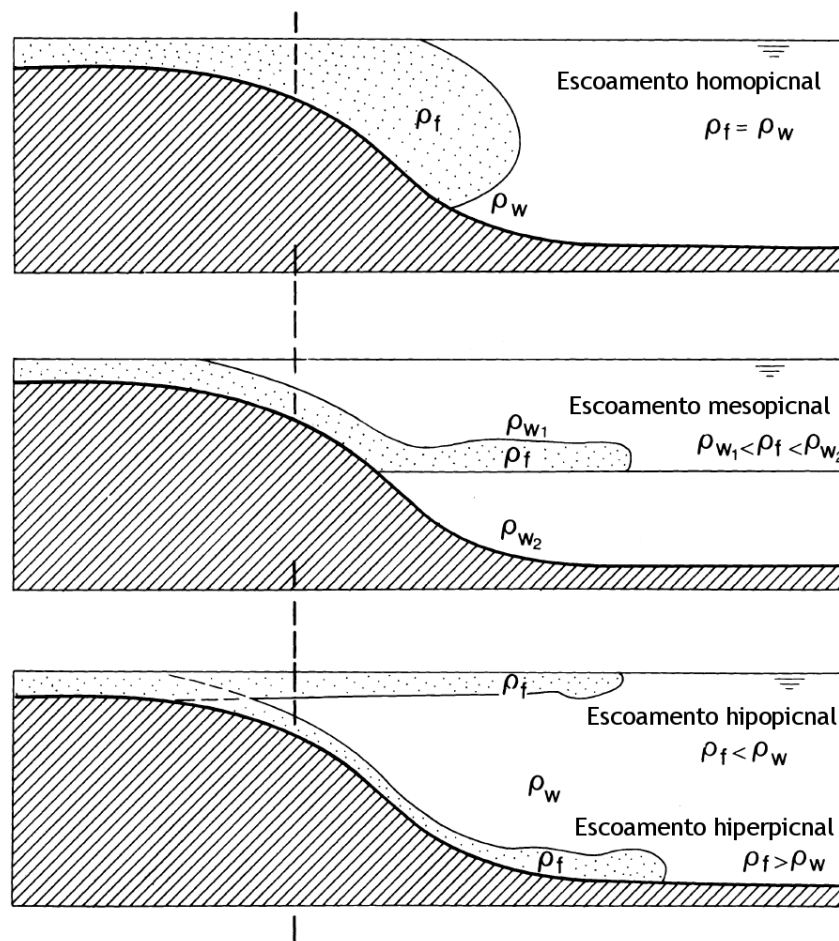


Figura 2.3: Classificação de correntes de densidade. Adaptado de Mulder e Alexander (2001)[43].

2.1.3 Plumas fluviais

Correntes hipopícnais ocorrem tipicamente próximas à foz de rios, onde os sedimentos são dispersos em plumas flutuantes, formando estuários (áreas de interação entre água doce e salgada). A dispersão de sedimentos suspensos em plumas envolve o transporte de argila, silte e areia fina, que se sedimentam nas águas salgadas do mar (Nemec, 1995)[45]. Elas são mais densas que as do rio devido, principalmente, à sua massa específica e diferenças de temperatura.

A descarga estuarina separa-se do fundo perto da foz do rio e forma a camada flutuante (Figura 2.4). O ponto de descolagem é a localização da frente de sal ligada ao fundo onde a camada superior perde contato com o fundo e o número de Froude densimétrico da camada superior (Fr_1) é igual 1. O balanço de momento é dominado pelos gradientes de pressões barotrópicas e baroclínicas, tensões turbulentas interfaciais entre a pluma e a água marinha e a aceleração do escoamento (Horner-Devine *et al.*, 2015)[29].

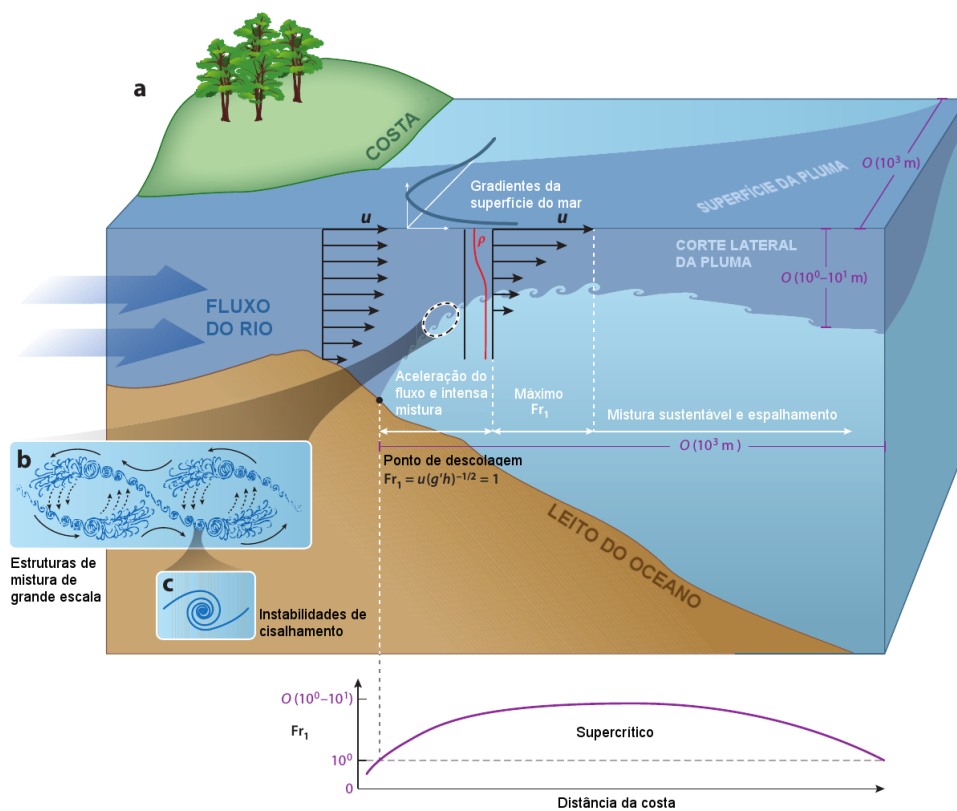


Figura 2.4: (a) Representação esquemática do descolamento da pluma. (b) Estruturas de mistura de grande escala na região de aceleração do escoamento. (c) Instabilidades cisalhantes. (Adaptado de Horner-Devine *et al.*, 2015)[29]

2.2 Análise de estabilidade

Estabilidade pode ser definida como sendo a qualidade de um sistema, físico ou matemático, de permanecer inalterado para perturbações (Betchov e Criminale, 1967)[6]. Este conceito pode ser entendido a partir do seguinte exemplo (Figura 2.5), onde uma esfera encontra-se em repouso sob diversas condições: na Figura 2.5a sua posição é incondicionalmente estável, pois ela retornará para sua posição inicial mesmo se perturbada por um grande deslocamento; na Figura 2.5b é mostrado um estado instável, pois qualquer perturbação pequena irá mudar a posição da esfera permanentemente; na Figura 2.5c é mostrado um exemplo de estabilidade neutra, pois a esfera permanecerá em qualquer posição que ela for deslocada; finalmente, na Figura 2.5d é ilustrado o caso em que a esfera é estável para pequenos deslocamentos mas instável para grandes perturbações, sendo condicionalmente estável (White, 1991)[58].

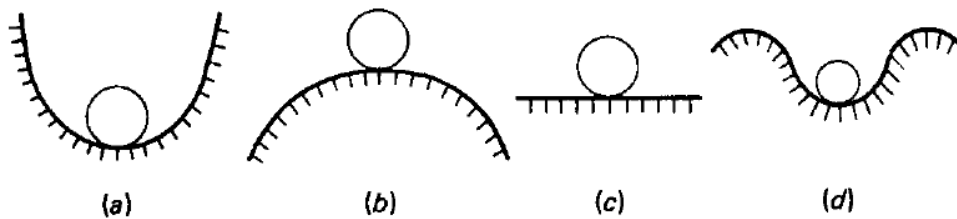


Figura 2.5: Ilustração do conceito de estabilidade (White, 1991) [58].

2.2.1 Estabilidade hidrodinâmica

No campo da mecânica dos fluidos, a análise de estabilidade irá tratar de escoamento de fluidos. Escoamentos ditos "instáveis" alteram seu estado rapidamente, podendo evoluir para um estado de movimento denominado "turbulência". Um escoamento turbulento possui um campo de vorticidade tridimensional caótico, com um largo espectro temporal e espacial de escalas. Sendo assim, a análise de estabilidade se relaciona diretamente com a transição para a turbulência, fornecendo informações sobre quais condições tornam um escoamento instável e propício a se tornar turbulento.

As questões fundamentais da disciplina de estabilidade hidrodinâmica foram reconhecidas e formuladas na segunda metade do século XIX, notavelmente por Helmholtz, Kelvin, Rayleigh,

Reynolds, Heisenberg, entre outros. No século XX, destacam-se Tollmien e Schlichting (Drazin e Reid (2004)[17]). O método dos modos normais, que já era bastante desenvolvido para sistemas dinâmicos de partículas e corpos rígidos, foi adaptado por Stokes, Kelvin e Rayleigh para a dinâmica dos fluidos. Basicamente, neste método as equações governantes do fenômeno estudado são linearizadas, desprezando-se produtos das perturbações. Além disso, era assumido que a perturbação de uma dada quantidade podia ser resolvida em componentes independentes ou modos que variassem ao longo do tempo.

Drazin e Reid (2004)[17] citam os seguintes métodos de estudo de estabilidade:

1. Experimentos físicos: observações da natureza e experimentos são meios primários de estudo, uma vez que a disciplina de estabilidade hidrodinâmica trata do meio físico. Todas as investigações teóricas necessitam ser relacionadas, direta ou indiretamente, à estas observações. Inversamente, conceitos teóricos são necessários para a descrição e interpretação destas observações.
2. Experimentos numéricos: a dinâmica dos fluidos computacional tem se tornando cada vez mais importante no estudo de estabilidade hidrodinâmica com o avanço das capacidades computacionais, de forma que as equações de Navier-Stokes e Continuidade podem ser resolvidas com alto grau de precisão através de simulações numéricas diretas.
3. Análise linear: consiste na análise de pequenas perturbações por meio da linearização das equações governantes. Foi o primeiro método a ser usado na teoria da estabilidade hidrodinâmica, consistindo na base da teoria.
4. Análise de bifurcação e caos: a sucessão de bifurcações entre um regime de escoamento e outro pode ser estudada através da teoria de sistemas dinâmicos.
5. Análise não-linear: escoamentos com perturbações arbitrariamente grandes podem ser estudados através do teorema de Serrin e do método direto de Liapounov.

2.2.2 Método dos modos normais

O método dos modos normais irá examinar a estabilidade de um dado escoamento com respeito a perturbações infinitesimais. Com a introdução de perturbações, será determinado, a partir das equações governantes, se estas crescem ou decaem com o tempo. Neste tipo de análise o problema é linearizado, desprezando-se os termos de alta ordem: este método, portanto, considera somente o comportamento inicial das perturbações. A perda de estabilidade não constitui por si mesma a transição para a turbulência, sendo que a teoria linear descreve apenas o início do processo de transição, conforme figura 2.6. Além disso, um escoamento pode ser estável para perturbações infinitesimais (estabilidade linear) mas instável para perturbações suficientemente grandes (estabilidade não-linear)(Kundu e Cohen, 2008)[35].

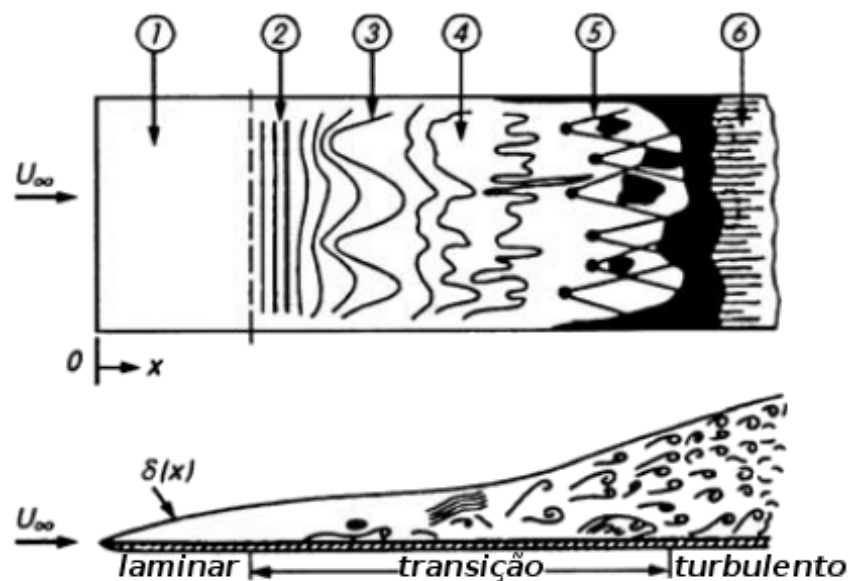


Figura 2.6: Transição para a turbulência na camada limite de uma placa plana. Adaptado de Schlichting [48]. 1) Escoamento laminar estável. 2) Ondas de Tollmien-Schlichting. 3) Ondas tridimensionais. 4) Instabilização dos vórtices. 5) Formação de *spots* turbulentos. 6) Escoamento turbulento plenamente desenvolvido.

Dado um operador que descreve a evolução de pequenas perturbações, esta abordagem considera o desenvolvimento espacial ou temporal de autovalores individuais deste operador. A teoria de estabilidade linear (LST - *Linear Stability Theory*) se baseia na decomposição de uma variável qualquer do escoamento (\mathbf{q}) em uma parte permanente $\bar{\mathbf{q}}$, que usualmente é referida como estado básico ou escoamento de base, e uma parte não-permanente \mathbf{q}' (Juniper *et al.*,

2014)[33], da forma:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t), \quad (2.13)$$

onde \mathbf{x} é o vetor posição de coordenadas espaciais, t é o tempo e ϵ é uma amplitude infinitesimal ($\epsilon \ll 1$).

O método dos modos normais consiste no seguinte procedimento (White, 1991)[58]

1. Pretende-se examinar a estabilidade de uma solução básica de um problema físico ($\bar{\mathbf{q}}$), que pode ser uma função escalar ou vetorial.
2. Adiciona-se uma perturbação $\epsilon \mathbf{q}'$ e substitui-se $\bar{\mathbf{q}} + \epsilon \mathbf{q}'$ nas equações básicas que governam o problema.
3. A partir das equações resultantes da etapa anterior, substraem-se os termos que $\bar{\mathbf{q}}$ satisfaz identicamente. O que resta é chamado de equação de perturbação.
4. Lineariza-se a equação de perturbação assumindo pequenas perturbações, isto é, $\epsilon \ll 1$ e se desprezam os termos de alta ordem tais como $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^n$.
5. Se a equação de perturbação é multidimensional, ela pode ser simplificada assumindo-se uma forma para as perturbações, como uma onda ou perturbação em apenas uma direção.
6. A equação de perturbação linearizada deve ser homogênea e ter condições de contorno homogêneas, podendo ser resolvida apenas para valores específicos dos parâmetros da equação. Sendo assim, trata-se de um problema de autovalores.
7. Os autovalores encontrados na etapa 6 são examinados para determinar-se quando eles crescem (são instáveis), decrescem (são estáveis) ou permanecem constantes (neutralmente estáveis).

O termo "modal" se origina do fato de que a estabilidade é determinada separadamente para cada modo. Explicitamente, o vetor de perturbação \mathbf{q}' assume a forma:

$$\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}} e^{i\Theta}, \quad (2.14)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}$ e Θ são as funções de amplitude e de fase das perturbações lineares, respectivamente, e $i = \sqrt{-1}$.

Ao se realizar uma análise linear de estabilidade de um escoamento, a primeira consideração a ser feita é sobre o número de direções homogêneas no estado básico (escoamento de base). A tabela 2.2 mostra as hipóteses realizadas sobre a homogeneidade do estado básico $\bar{\mathbf{q}}$, a dimensionalidade das perturbações \mathbf{q}' e a nomenclatura associada.

Tabela 2.2: Classificação das teorias de análise de estabilidade modal (Juniper *et al.*, 2014)[33]

	Denominação	Estado básico	Amplitude	Fase (Θ)
Global	TriGlobal	-	$\bar{\mathbf{q}}(x, y, z)$	$\hat{\mathbf{q}}(x, y, z)$
	PSE-3D	$\partial_x \bar{\mathbf{q}} \ll \partial_y \bar{\mathbf{q}}, \partial_z \bar{\mathbf{q}}$	$\bar{\mathbf{q}}(x^*, y, z)$	$\hat{\mathbf{q}}(x^*, y, z)$
	BiGlobal	$\partial_x \bar{\mathbf{q}} = 0$	$\bar{\mathbf{q}}(y, z)$	$\hat{\mathbf{q}}(y, z)$
Não-local	PSE	$\partial_x \bar{\mathbf{q}} \ll \partial_y \bar{\mathbf{q}}, \partial_z \bar{\mathbf{q}} = 0$	$\bar{\mathbf{q}}(x^*, y)$	$\hat{\mathbf{q}}(x^*, y)$
Local	OSE	$\partial_x \bar{\mathbf{q}} = \partial_z \bar{\mathbf{q}} = 0$	$\bar{\mathbf{q}}(y)$	$\hat{\mathbf{q}}(y)$

2.2.3 Equações de Navier-Stokes linearizadas (LNSE)

As equações de Navier-Stokes (conservação da quantidade do movimento) e Continuidade (conservação da massa), considerando um escoamento incompressível com massa específica constante, na forma adimensional são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade e p a pressão.

Aplicando os passos descritos anteriormente para análise a partir dos modos normais, se obtém a equação de Navier-Stokes linearizada (*Linearized Navier-Stokes Equations* - LNSE):

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (2.17)$$

Analogamente, obtém-se para a equação da Continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (2.18)$$

A partir de um estado básico $\bar{\mathbf{q}}$, as LNSE podem ser resolvidas como um problema de valor inicial e de contorno e são válidas para perturbações de pequena amplitude, tanto modais quanto não-modais.

2.2.4 Análise de estabilidade local

No maior nível de aproximação, o estado básico é considerado homogêneo ao longo de duas dimensões espaciais (x e z) e então é feita a aproximação de escoamento paralelo (ao longo de y), de forma que $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(y)$. Nesta aproximação, as componentes normais de cada variável do escoamento e suas derivadas são desprezadas:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

Sendo assim, a perturbação \mathbf{q}' assume a seguinte forma:

$$\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (2.20)$$

onde α , β e σ são os parâmetros modais sendo, em geral, complexos, de forma que:

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i, \quad (2.21)$$

$$\beta = \beta_r + i\beta_i, \quad (2.22)$$

$$\sigma = \sigma_r + i\sigma_i. \quad (2.23)$$

As partes reais e imaginárias de cada um destes parâmetros possuem o seguinte significado:

- α_r e β_r são números de onda nas direções x e z , respectivamente;

- α_i e β_i são as taxas de amplificação ou de amortecimento espacial nas direções x e z , respectivamente;
- σ_r é a frequência angular;
- σ_i é a taxa de amplificação ou amortecimento temporal da perturbação.

Com base nestes parâmetros, três tipos de análises podem ser realizadas: análise temporal local, análise espacial local e análise espaço-temporal local.

Análise temporal local

Na análise de estabilidade temporal, os parâmetros α e β são números de onda reais, relacionados a comprimentos de onda periódicos, L_x e L_z , ao longo das direções x e z , respectivamente, através das seguintes relações:

$$\alpha = \frac{2\pi}{L_x}, \quad (2.24)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{L_z}. \quad (2.25)$$

Neste caso, σ é um autovalor a ser determinado, sendo geralmente complexo, e $\hat{\mathbf{q}}(y)$ a autofunção associada. Dessa forma, a estabilidade do escoamento é determinada da seguinte forma:

- $\sigma_i < 0$: o escoamento é estável (a perturbação irá decrescer);
- $\sigma_i = 0$: o escoamento é neutralmente estável;
- $\sigma_i > 0$: o escoamento é instável (a perturbação se amplifica).

Cabe salientar que é comum o estudo do autovalor σ através de sua razão com o número de onda α , caracterizando a velocidade de fase da perturbação, dada por:

$$c = \frac{\sigma}{\alpha}. \quad (2.26)$$

Análise espacial local

No caso da análise espacial local, σ e α ou σ e β passam a ser parâmetros e números reais, de maneira que o autovalor a ser determinado é β ou α , respectivamente, sendo um número complexo. Dessa maneira:

- $\alpha_i > 0$ ou $\beta_i > 0$: o escoamento é estável;
- $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$: o escoamento é neutralmente estável;
- $\alpha_i < 0$ ou $\beta_i < 0$: o escoamento é instável.

Análise espaço-temporal local

No caso da análise de estabilidade espaço-temporal, ambos α e σ ou β e σ são autovalores, sendo β e α os parâmetros, respectivamente. É necessário diferenciar entre os três tipos de escoamento considerando a resposta do escoamento a um impulso. Três cenários são possíveis, conforme figura 2.7:

- Escoamento estável (figura 2.7a): a resposta ao impulso decai ao longo de todas as direções;
- Escoamento convectivamente instável (figura 2.7b): a resposta ao impulso decai ao longo de algumas direções, propagando-se além do ponto de impulso mas decaindo nele próprio;
- Escoamento absolutamente instável (figura 2.7c): a resposta ao impulso cresce no ponto de impulso.

2.2.5 Estabilidade de escoamentos paralelos

Equação de Orr-Sommerfeld

Expandindo as equações linearizadas de Navier-Stokes (equações 2.17 e 2.18), considerando que $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$, $\mathbf{u}' = [u', v', w']$, obtém-se:

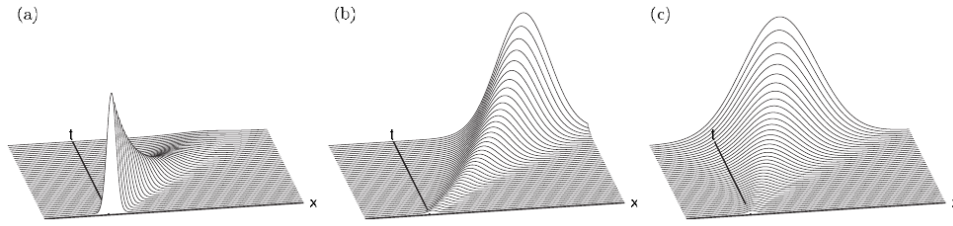


Figura 2.7: Cenários possíveis a partir da uma análise espaço-temporal (Bagheri *et al.*, 2009)[4].

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \quad (2.27)$$

$$u'_t + u'\bar{u}_x + v'\bar{u}_y + w'\bar{u}_z + \bar{u}u'_x + \bar{v}v'_y + \bar{w}w'_z = -p'_x + \frac{1}{Re}(u'_{xx} + u'_{yy} + u'_{zz}), \quad (2.28)$$

$$v'_t + u'\bar{v}_x + v'\bar{v}_y + w'\bar{v}_z + \bar{u}v'_x + \bar{v}v'_y + \bar{w}w'_z = -p'_y + \frac{1}{Re}(v'_{xx} + v'_{yy} + v'_{zz}), \quad (2.29)$$

$$w'_t + u'\bar{w}_x + v'\bar{w}_y + w'\bar{w}_z + \bar{u}w'_x + \bar{v}w'_y + \bar{w}w'_z = -p'_z + \frac{1}{Re}(w'_{xx} + w'_{yy} + w'_{zz}), \quad (2.30)$$

No caso de duas direções homogêneas (escoamento paralelo), ao longo de x e z , tem-se que $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}(y), 0, 0]$. Dessa forma, as equações 2.27 a 2.30 se simplificam para:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \quad (2.31)$$

$$u'_t + v'\bar{u}_y + \bar{u}u'_x = -p'_x + \frac{1}{Re}(u'_{xx} + u'_{yy} + u'_{zz}), \quad (2.32)$$

$$v'_t + \bar{u}v'_x = -p'_y + \frac{1}{Re}(v'_{xx} + v'_{yy} + v'_{zz}), \quad (2.33)$$

$$w'_t + \bar{u}w'_x = -p'_z + \frac{1}{Re}(w'_{xx} + w'_{yy} + w'_{zz}). \quad (2.34)$$

Considerando as perturbações dadas pela equação 2.20, tem-se:

$$u'(x, y, z, t) = \hat{u}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (2.35)$$

$$v'(x, y, z, t) = \hat{v}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (2.36)$$

$$w'(x, y, z, t) = \hat{w}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (2.37)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)]. \quad (2.38)$$

Substituindo as equações 2.35 a 2.38 nas equações 2.31 a 2.34 e dividindo-se por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)]$ se obtém o seguinte sistema de equações:

$$i\alpha\hat{u} + \hat{v}_y + i\beta\hat{w} = 0, \quad (2.39)$$

$$-i\sigma\hat{u} + \hat{v}\bar{u}_y + \bar{u}i\alpha\hat{u} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re}(-\alpha^2\hat{u} + \hat{u}_{yy} - \beta^2\hat{u}), \quad (2.40)$$

$$-i\sigma\hat{v} + \bar{u}i\alpha\hat{v} = -\hat{p}_y + \frac{1}{Re}(-\alpha^2\hat{v} + \hat{v}_{yy} - \beta^2\hat{v}), \quad (2.41)$$

$$-i\sigma\hat{w} + \bar{u}i\alpha\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re}(-\alpha^2\hat{w} + \hat{w}_{yy} - \beta^2\hat{w}). \quad (2.42)$$

As equações 2.39 a 2.42 formam um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares. Conhecido o perfil do escoamento de base dado por \bar{u} , é possível resolver este sistema com condições de contorno apropriadas. Em paredes sólidas ou quando $y \rightarrow \infty$, a perturbação torna-se nula ($\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$) além de que $\hat{v}_y = 0$ a partir da equação da continuidade.

Estas equações podem ser rearranjadas e combinadas para eliminar \hat{p} , \hat{u} e \hat{w} , resultando em uma única equação diferencial ordinária na qual o termo de pressão é eliminado. O resultado é a equação de Orr-Sommerfeld para a componente \hat{v} :

$$\frac{i}{Re}[\hat{v}_{yyyy} - 2(\alpha^2 + \beta^2)\hat{v}_{yy} + \alpha^4\hat{v}] + (\alpha\bar{u} - \sigma)[\hat{v}_{yy} - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{v}] - \alpha\bar{u}_{yy}\hat{v} = 0, \quad (2.43)$$

incluindo condições de contorno $\hat{v} = \hat{v}_y = 0$ nos limites do domínio de integração. Para escoamentos abertos, as condições de contorno podem ser consideradas limitadas para $y \rightarrow \infty$. Esta equação permite a obtenção das taxas de amplificação temporais e respectivos modos normais para escoamentos paralelos, constituindo em um problema de autovalores e autovetores generalizado.

A equação de Orr-Sommerfeld (equação 2.43) é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem com coeficientes variáveis. Soluções exatas são conhecidas apenas para casos muito específicos, notavelmente quando $\bar{u}_{yy} = 0$ (isto é, funções lineares definidas por partes): a vorticidade então satisfaz uma equação de Airy, de forma que a velocidade é expressa em termos de funções de Airy. O problema se torna de difícil solução para altos números de Reynolds, uma vez que o termo viscoso, apesar de ser diminuto, pode ser tornar da mesma ordem de grandeza que os termos inerciais em regiões onde a autofunção (\hat{v}) e suas derivadas possuem elevados gradientes. Conforme Charru (2011)[14], algumas técnicas matemáticas foram desenvolvidas para contornar este problema, aproximando soluções através de séries assintóticas. Atualmente, a equação de Orr-Sommerfeld pode ser resolvida numericamente sem grandes dificuldades, sendo os métodos espectrais frequentemente empregados. Ainda assim, métodos assintóticos podem ainda ser necessários para analisar o comportamento da solução próximo a uma singularidade. Estes métodos também podem ser úteis no entendimento da função empregada pelos diversos parâmetros envolvidos, assim como prover uma compreensão mais profunda do fenômeno estudado.

Teorema de Squire

Squire (1933)[54] obteve um procedimento para as *LNSE* que permitiu simplificar o problema de encontrar os modos normais. O teorema de Squire estabelece que para cada perturbação tridimensional instável há uma perturbação bidimensional correspondente mais instável. Portanto, é possível considerar apenas uma perturbação bidimensional para determinar o nú-

mero de Reynolds mínimo para o início da instabilidade. Como a perturbação tridimensional é uma onda se propagando de forma oblíqua ao escoamento de base, pode-se orientar o sistema de coordenadas nesta direção, de maneira que as equações do movimento são tais que apenas a componente da velocidade do escoamento de base nesta direção afeta a perturbação, de sorte que o número de Reynolds efetivo é reduzido. Isto é realizado através da seguinte mudança de variáveis:

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (2.44)$$

$$\bar{\alpha}\bar{Re} = \alpha Re, \quad (2.45)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma, \quad (2.46)$$

reduzindo a equação de Orr-Sommerfeld para:

$$\frac{i}{\bar{Re}}[\hat{v}_{yyyy} - 2\bar{\alpha}^2\hat{v}_{yy} + \bar{\alpha}^4\hat{v}] + (\bar{\alpha}\bar{u} - \bar{\sigma})[\hat{v}_{yy} - \bar{\alpha}^2\hat{v}] - \bar{\alpha}\bar{u}_{yy}\hat{v} = 0, \quad (2.47)$$

onde $\bar{\alpha}$, \bar{Re} e $\bar{\sigma}$ são, respectivamente, o número de onda, número de Reynolds e autovalor obtidos pela transformação de Squire. Este teorema foi estendido por Hesla *et al.* (1986)[27] para escoamentos paralelos de dois fluidos estratificados, homogêneos, imiscíveis e com tensão superficial constante em um domínio limitado, podendo ser generalizado para escoamentos com domínios abertos e com mais de dois fluidos. Dando continuidade aos trabalhos anteriores, Schaffinger (1994)[47] mostrou que o teorema de Squire permanece válido para fluidos com propriedades variáveis, incluindo concentração e viscosidade. Limitações para o teorema de Squire foram demonstrados por Georgievskii (2009)[23] para fluidos não-newtonianos.

Nas seções seguintes e ao longo do presente trabalho será considerado válido o teorema de Squire, de maneira que $\alpha = \bar{\alpha}$ e $\beta = 0$, assim como as demais variáveis estarão de acordo com a transformação.

Equação de Rayleigh

A instabilidade de escoamentos de base com pontos de inflexão em seus perfis de velocidade, tais como camadas cisalhantes, podem ser analisados em uma aproximação não-viscosa. Tomando a equação de Orr-Sommerfeld (equação 2.43) para modos bidimensionais e fazendo $Re \rightarrow \infty$, obtém-se a equação de Rayleigh:

$$(\bar{u} - c)[\hat{v}_{yy} - \alpha^2 \hat{v}] - \bar{u}_{yy} \hat{v} = 0, \quad (2.48)$$

com condição de contorno $\hat{v} = 0$ nos limites do domínio que completa a descrição do problema.

Como as equações não envolvem i , tomando o conjugado complexo mostra que se \hat{v} é uma autofunção com autovalor c para um dado α , então $\bar{\hat{v}}$ é também uma autofunção com autovalor \bar{c} para o mesmo α . Portanto, para cada autovalor com $c_i > 0$ existe um autovalor correspondente com $c_i < 0$. Isso significa que para cada modo amplificado existe um modo decaído correspondente. Soluções estáveis podem ter, portanto, apenas um autovalor c real.

Teorema do semicírculo de Howard

A partir da equação de Rayleigh, Howard (1961)[30] obteve um resultado a respeito da velocidade de fase complexa c para escoamentos invíscidos paralelos, com ou sem estratificação. Para o caso de instabilidade $c_i \neq 0$, ele estabeleceu que os autovalores se encontram em um semi-círculo no plano complexo (figura 2.8), satisfazendo a seguinte equação:

$$\left[c_r - \frac{1}{2} (\min(\bar{u}) + \max(\bar{u})) \right]^2 + c_i^2 \leq \frac{1}{4} [\max(\bar{u}) - \min(\bar{u})]^2, \quad (2.49)$$

de sorte que as partes real e imaginária do autovalor a ser encontrado satisfazem as relações

$$\min(\bar{u}) < c_r < \max(\bar{u}) \quad (2.50)$$

e

$$c_i < \frac{1}{2} [\max(\bar{u}) - \min(\bar{u})]. \quad (2.51)$$

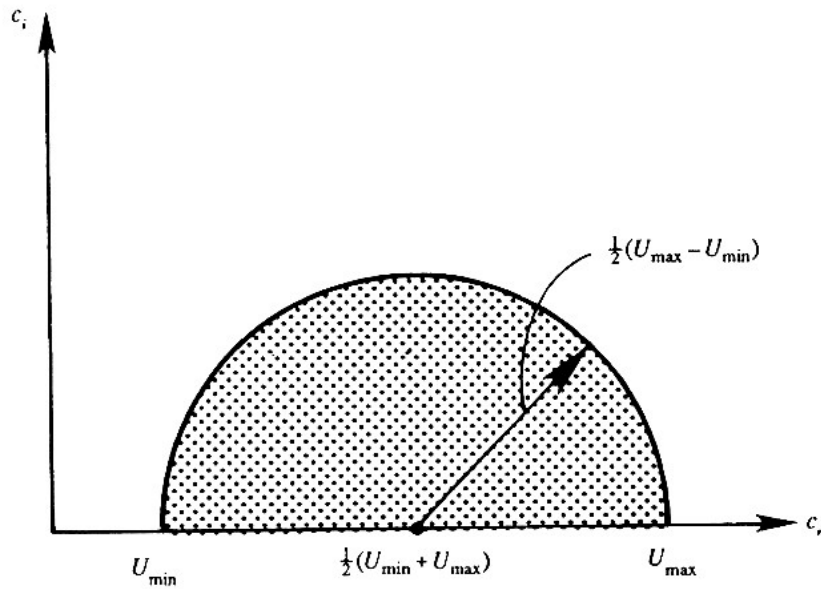


Figura 2.8: Representação do teorema do semi-círculo de Howard no plano complexo de autovalores. Adaptado de Kundu (2008)[35].

Este teorema é útil para encontrar autovalores na solução numérica de problemas de instabilidade.

Kochar e Jain (1979)[34] estenderam este teorema de forma a incluir o efeito da estratificação através da incorporação do número de Richardson global na equação 2.49, tornando-a uma semi-elipse:

$$\left[c_r - \frac{1}{2} (\min(\bar{u}) + \max(\bar{u})) \right]^2 + \frac{2c_i^2}{1 + \sqrt{1 - 4Ri}} \leq \frac{1}{4} [\max(\bar{u}) - \min(\bar{u})]^2, \quad (2.52)$$

de maneira que esta equação se reduz à 2.49 quando $Ri = 0$.

Continuando o trabalho de Kochar e Jain (1979)[34], Makov e Stepanyants (1984)[38] obtiveram uma condição ainda mais precisa para a localização dos autovalores para escoamentos estratificados através da consideração do número de onda α e da escala característica de velocidades U . Foi demonstrado que as partes real e imaginária satisfazem a equação dada por:

$$c_r^2 + (c_i + \alpha\bar{u})^2 + \frac{2Ri(1 + \alpha)c_i^2}{1 - 2Ri + \sqrt{1 - 4Ri - 4\alpha^2c_i^2/\bar{u}^2}} \leq (1 + \alpha^2)\bar{u}^2. \quad (2.53)$$

Teoremas de Rayleigh e Fjörtotf

Rayleigh provou que uma condição necessária para a ocorrência de instabilidade de um escoamento paralelo invíscido é que o perfil de velocidades do escoamento de base (\bar{u}) possua um ponto de inflexão, onde, por definição, $\bar{u}_{yy} = 0$. Cabe observar que a existência de um ponto de inflexão não garante que $c_i \neq 0$.

Fjörtotf obteve uma condição necessária mais consistente do que a de Rayleigh para determinação de quais escoamentos são instáveis. Este teorema enuncia que uma condição necessária para instabilidade é que $\bar{u}_{yy}(\bar{u} - \bar{u}_S) < 0$ em algum local do campo de escoamento, onde \bar{u}_S é o valor de \bar{u} no ponto de inflexão. Outra forma de enunciar o teorema de Fjörtotf é que a magnitude da vorticidade do escoamento de base deve possuir um máximo que não seja nas bordas do domínio.

Alguns escoamentos de base estão dispostos na figura 2.9, extraída de Kundu (2008)[35]. Apenas os casos (e) e (f) satisfazem o critério de Fjörtotf. Os escoamentos (a), (b) e (c) não possuem ponto de inflexão, enquanto que o escoamento (d) satisfaz a condição de Rayleigh mas não a de Fjörtotf.

É importante destacar que nenhuma das duas condições é suficiente para instabilidade. Um exemplo é o escoamento de base dado por $\bar{u}(y) = \sin y$, de domínio finito. Foi demonstrado que este escoamento é estável se a largura for limitada em $\pi/2$, apesar da existência do ponto de inflexão em $y = 0$.

Camadas críticas

Quando $\bar{u} \approx c$ na equação de Orr-Sommerfeld, o primeiro termo da equação pode ser da mesma ordem de grandeza que os termos viscosos, não sendo possível desprezá-los. Isto implica que, se existir uma coordenada y_c onde $\bar{u} = c$, irá existir uma singularidade na equação de Rayleigh. É possível demonstrar que a coordenada y_c existe, sendo denominada camada crítica (Mendonça, 2003)[40].

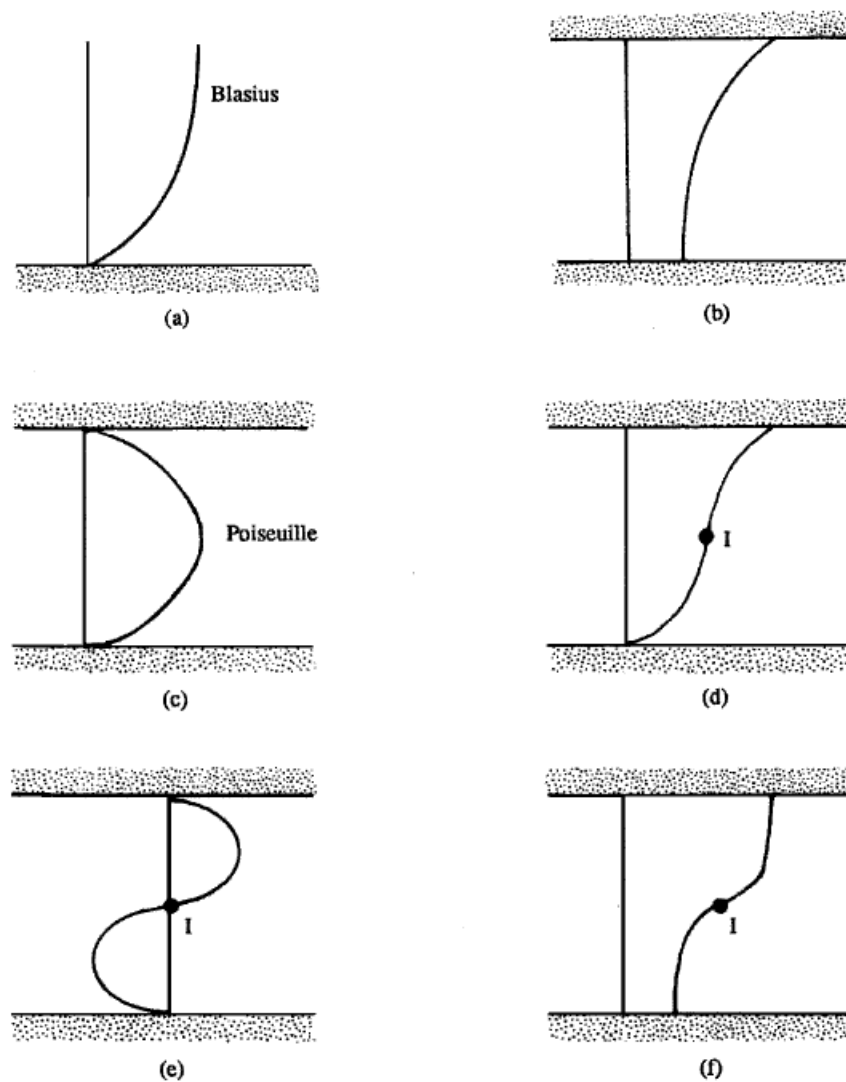


Figura 2.9: Exemplos de escoamentos paralelos, com pontos de inflexão indicados com I . Os casos (a), (b) e (c) não satisfazem nem o critério de Rayleigh nem o de Fjørtoft para instabilidade. O caso (d) satisfaz a condição de Rayleigh mas não a de Fjørtoft, enquanto que os casos (e) e (f) satisfazem ambas as condições. Figura extraída de Kundu (2008)[35].

2.3 Instabilidades em plumas hipopícnais

Na solução de um problema de instabilidade linear local temporal, para o caso instável, se obtém uma dada taxa de amplificação. No problema matemático, esta taxa constitui o autovalor da solução, estando associado a um autovetor, que constitui a amplitude da perturbação. Reconstituindo o escoamento total a partir do autovetor calculado, é possível determinar qual o tipo de instabilidade associada à taxa de amplificação. Estas instabilidades podem ser classificadas em vários tipos, ocorrendo conforme os processos físicos predominantes para determinada classe de escoamentos. A seguir serão abordadas as principais instabilidades primárias que

usualmente são observadas em plumas hipopícnais, constituindo na instabilidade de Kelvin-Helmholtz, Holmboe, Rayleigh-Taylor, *salt-fingers* (dupla-difusividade) e *settling-driven* (promovidas pela sedimentação). Não serão abordadas, no presente trabalho, instabilidades que ocorrem em outras condições, tais como a instabilidade Taylor-Couette, Rayleigh-Bénard, entre outras.

2.3.1 Instabilidades de Kelvin-Helmholtz (\mathcal{KH})

A instabilidade Kelvin-Helmholtz (\mathcal{KH}) ocorre quando é perturbada a interface entre dois fluidos, com ou sem estratificação, ou duas camadas de velocidades diferentes. Ela irá se desenvolver temporalmente e espacialmente, dando origem a turbilhões que provocarão a transição para a turbulência (Figura 2.10). Amplamente documentada na bibliografia, seu estudo remonta ao século XIX e ocorre em diversos contextos naturais e artificiais (Martinez, 2006)[39].

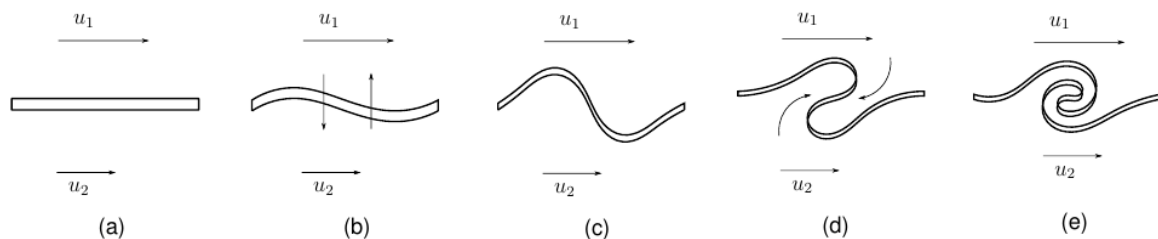


Figura 2.10: Desenvolvimento temporal de uma instabilidade de \mathcal{KH} . Adaptado de Martinez (2006)[39].

A figura 2.11 mostra instabilidades de \mathcal{KH} na picnoclina de uma pluma fluvial, obtidas através de ecobatimetria por Geyer *et al.* (2010), constituindo um exemplo de ocorrência na natureza da instabilidade de \mathcal{KH} . Na figura 2.12 pode-se observar, de forma mais nítida e didática, o desenvolvimento espacial da instabilidade de \mathcal{KH} em um experimento realizado por Browand e Winant (1973)[10].

Caso homogêneo

Betchov e Szewczyk (1963)[7] resolveram numericamente a equação de Orr-Sommerfeld (Equação 2.39) e de Rayleigh (Equação 2.48), desenvolvendo um dos primeiros estudos de dependência do Re nas instabilidades. Para um intervalo de Re entre 0 e 40, não encontraram

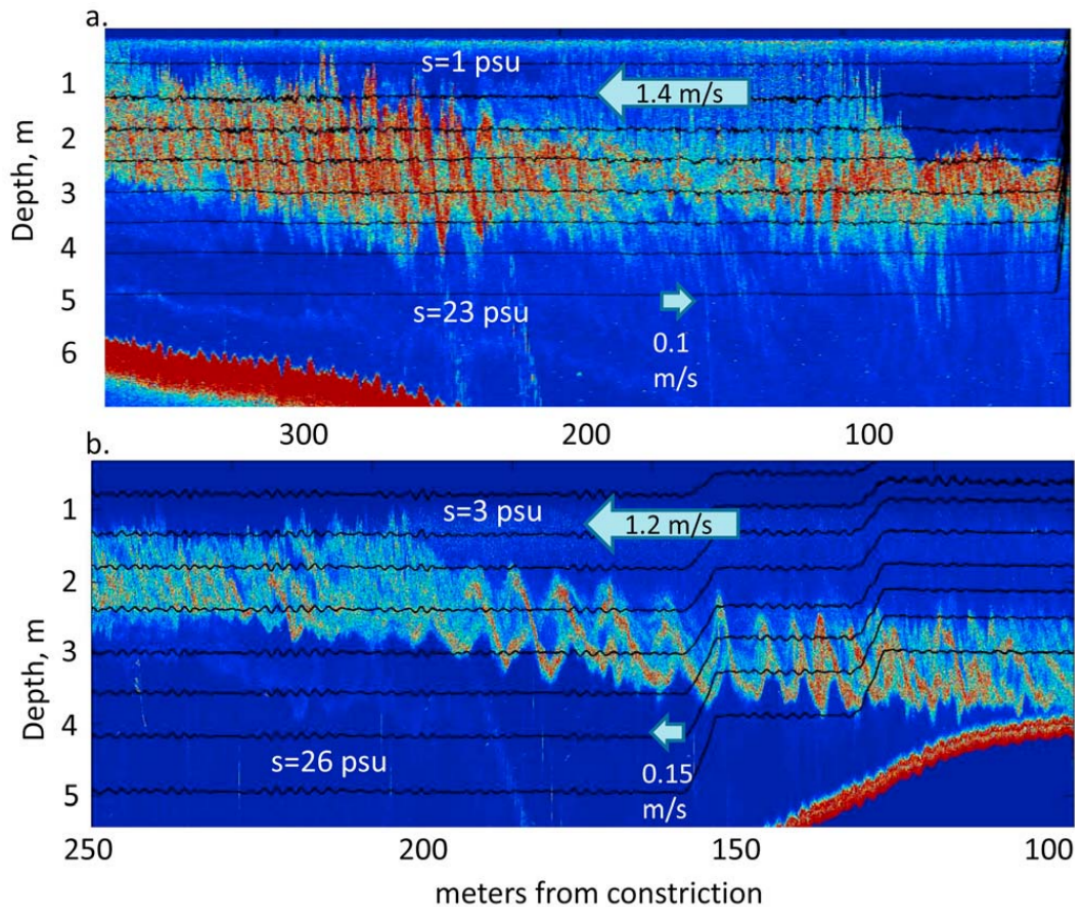


Figura 2.11: Imagens de instabilidades de KH em uma pluma fluvial obtidas por ecobatimetria. A alta retrodifusão acústica está associada com regiões de elevados gradientes de densidade na pícnoclina. O fundo do mar é visível em parte de cada imagem. Estão indicadas velocidades e salinidades médias superficiais e de fundo. A profundidade dos sensores de bordo está indicado por linhas pretas. a) Transecto interno b) Transecto externo. Adaptado de Geyer *et al.*, (2010)[24].

nenhum Re crítico, de maneira que o escoamento manteve-se instável para qualquer Re . A curva $c_i(\alpha)$ tendeu assintoticamente ao caso invíscido conforme o Re foi aumentado, mostrando que para o caso de camadas de mistura é válida a equação de Rayleigh. A taxa máxima de amplificação observada foi $c_i = 0,2133$ para um número de onda $\alpha = 0,4446$.

Michalke (1964)[41] realizou uma análise de estabilidade linear de escoamentos cisalhantes homogêneos, onde a equação de Rayleigh foi resolvida de forma numérica, utilizando perfis do tipo tangente hiperbólico ($\bar{u}(y) = \tanh(y)$) para o escoamento de base. Foram estudadas as taxas de amplificação (c_i) em função do número de onda (α), além das autofunções (amplificações do escoamento de base) em termos da vorticidade. A taxa máxima de amplificação observada foi a

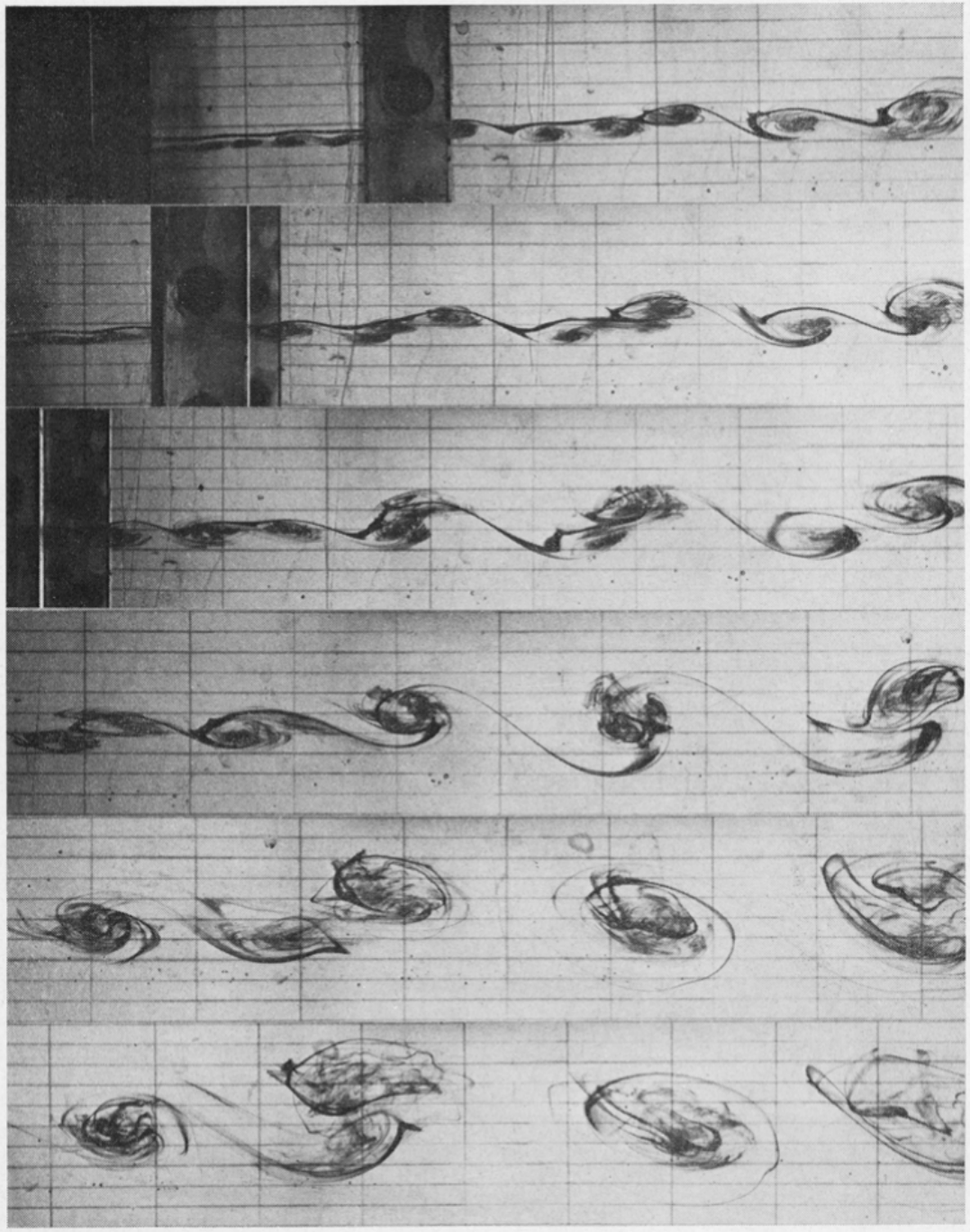


Figura 2.12: Imagens de instabilidades de \mathcal{KH} em experimento físico para uma camada de mistura homogênea. Extraído de Browand e Winant (1973)[10].

mesma obtida pelo trabalho de Betchov e Szewczyk (1963)[7] e a reconstituição do escoamento total (soma do escoamento de base mais a perturbação) permitiu a identificação dos vórtices de \mathcal{KH} .

Acerca da existência de um número de Reynolds crítico para a camada de mistura homogênea, Bhattacharya *et al.* (2006)[8] realizaram um estudo de forma a incluir efeitos de não-paralelismo ao escoamento. Os autores citam Drazin e Reid (2004)[17], que por sua vez enfatizam que, para pequenos números de Reynolds, a hipótese do escoamento paralelo é de validade questionável. O Reynolds crítico encontrado pelos autores foi de aproximadamente $Re_c = 30$.

Caso estratificado

O efeito da estratificação em camadas de mistura pode ser incorporado à equação de Rayleigh, resultando na equação de Taylor-Goldstein (Kundu, 2008)[35]:

$$(\hat{v}_{yy} - \alpha^2 \hat{v}) - \frac{\bar{u}_{yy}}{\bar{u} - c} \hat{v} + Ri \frac{\bar{\rho}_y}{(\bar{u} - c)^2} \hat{v} = 0. \quad (2.54)$$

Hazel (1972)[26], utilizando a equação de Taylor-Goldstein, estudou a estabilidade de diversas formas de escoamentos de base para camadas de mistura estratificadas. Para o perfil tangente hiperbólico para a concentração e velocidade, foi estabelecida a curva de estabilidade neutra $Ri = \alpha(1 - \alpha)$. A Figura 2.13 mostra a variação das taxas máximas de amplificação (σ_i) em função do número de Richardson global (Ri). Hazel (1972)[26] observou o decréscimo da taxa de amplificação temporal σ_i com o aumento do número de Richardson, atingindo o valor crítico de $Ri = \frac{1}{4}$.

Em estudos experimentais, esta condição para estabilidade dependente do número de Richardson ($Ri > \frac{1}{4}$), conhecido como teorema de Howard-Miles, não é sempre observada. Conforme comentado por Galperin *et al.* (2007), é possível que um escoamento se mantenha turbulento para $Ri \gg 1$. No trabalho destes autores, estas observações são sustentadas por uma abordagem teórica espectral da turbulência, levando em conta a intensa anisotropia. Os autores vão adiante e sustentam, baseados em outros estudos experimentais, que um número de Richardson crítico não existe e que o critério de estabilidade dado por $Ri > \frac{1}{4}$ deve ser evitado no estudo de escoamentos.

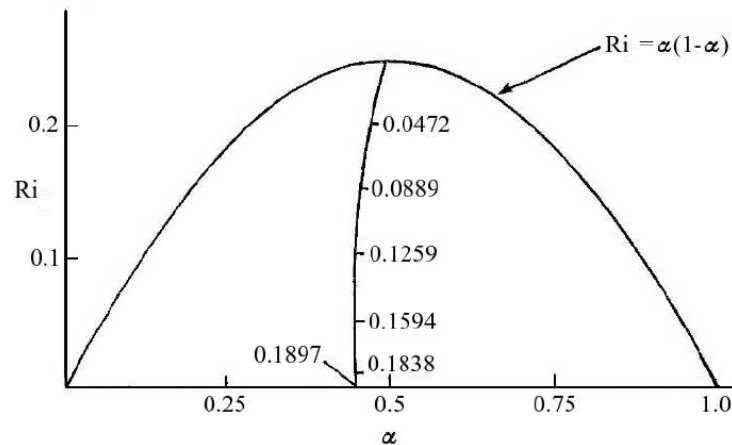


Figura 2.13: Curva de estabilidade neutra para uma camada de mistura estratificada e taxas máximas de amplificação. Adaptado de Hazel (1972)[26].

2.3.2 Instabilidades de Holmboe (\mathcal{H})

Em um trabalho pioneiro, Holmboe (1962)[28] concebeu um estudo sobre instabilidades que consistem em duas sequências de ondas paralelas que viajam em direções opostas em relação ao escoamento base, conforme Figura 2.14. Enquanto a instabilidade de \mathcal{KH} possui velocidade de fase nula $c_r = 0$, a instabilidade de Holmboe (\mathcal{H}) possui $c_r \neq 0$. Esta instabilidade pode ser simétrica, no caso de não haver direção preferencial para a propagação das ondas, ou ser assimétrica, gerando ondas unilaterais. Tipicamente ocorrem em escoamentos de intensa estratificação, já tendo sido observados para $Ri = 20$ no trabalho de Alexakis (2009)[1].

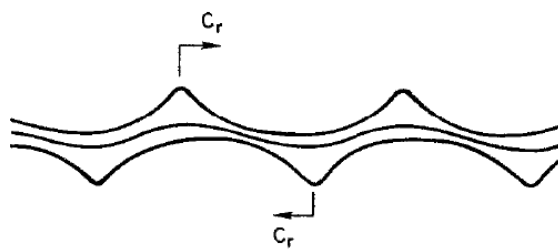


Figura 2.14: Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{H} . Adaptado de Lawrence *et al.* (1991)[36].

A instabilidade de \mathcal{H} ocorre quando há diferença entre as espessuras das camadas de mistura do perfil de velocidades e do perfil de concentrações onde, geralmente, a interface de densidade é muito mais fina que a espessura da camada cisalhante. Estes escoamentos costumam ocorrer,

por exemplo, em cunhas salinas e vales subaquáticos, assim como em rios conforme observado por Yoshida *et al.* (1998)[59] no rio Ishikari no Japão. A figura 2.15 mostra fotografias de instabilidades de \mathcal{H} observadas em laboratório.

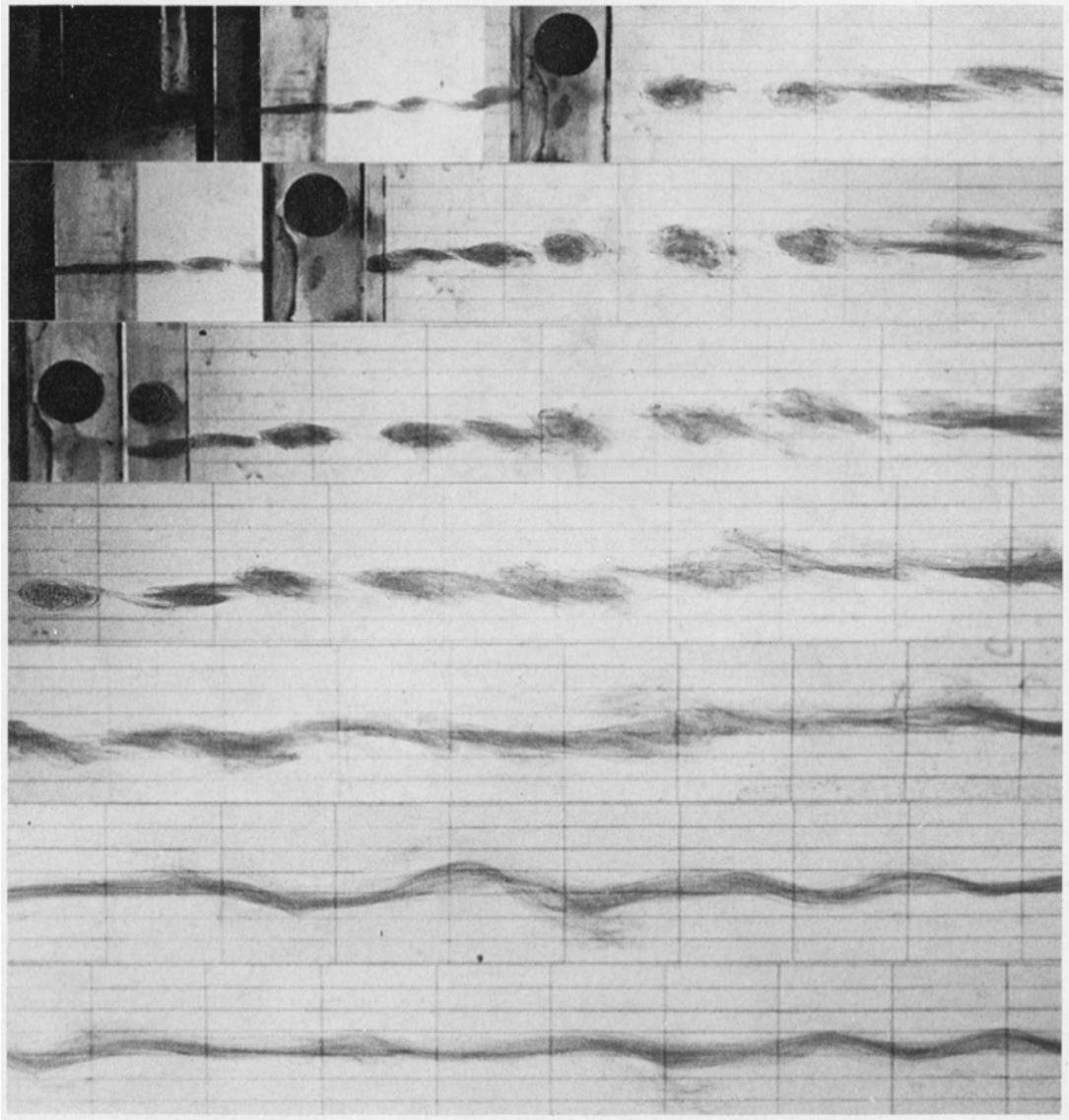


Figura 2.15: Imagens de instabilidades de \mathcal{H} em experimento físico para uma camada de mistura estratificada. Extraído de Browand e Winant (1973)[10].

No trabalho de Holmboe (1962)[28] foi estudado um escoamento de base dado pelas seguintes expressões, para a velocidade e concentração, respectivamente:

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} 1 & y > 1, \\ y & -1 < y < 1, \\ -1 & y < -1, \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\bar{\rho}(y) = \begin{cases} -1 & y > 0, \\ 1 & y < 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Para o escoamento dado pelas equações 2.55 e 2.56 surgem as instabilidades de \mathcal{KH} e \mathcal{H} para determinadas condições. Para $Ri < 0,071$, conforme demonstrado analiticamente a partir da equação de Rayleigh, ocorrem predominantemente instabilidades de \mathcal{KH} . Para $Ri > 0,071$, as instabilidades de \mathcal{H} são as únicas possíveis de ocorrerem, não estando sujeitas à condição de estabilidade de $Ri > \frac{1}{4}$. Dessa forma, estas instabilidades são particular interesse em meios de intensa estratificação pois elas são o único mecanismo pelo qual estes escoamentos podem se tornar instáveis (Haigh e Lawrence, 1999)[25].

No caso do escoamento de base ser assimétrico, as ondas provocadas pelas instabilidades de \mathcal{H} possuirão uma direção preferencial de propagação, ocorrendo tipicamente em escoamentos com altos números de Richardson. Estas ondas unilaterais geradas são consideradas como resultado do escoamento de base perdendo sua simetria. Basicamente, há duas formas pela qual estes escoamentos podem perder sua simetria: ou por possuir limites horizontais a distâncias diferentes do centro da camada de mistura, ou pelo deslocamento da interface de densidade em relação ao centro da camada cisalhante. Quando a simetria é quebrada, um dos modos da instabilidade de \mathcal{H} terá maior taxa de crescimento que o outro.

Hazel (1972)[26] utilizou escoamentos de base da forma $\bar{u}(y) = \tanh(y)$ para a velocidade e $\bar{\rho}(y) = (1/R_\rho) \tanh(R_\rho y)$ para concentração, onde $R_\rho = \tilde{\delta}_u/\tilde{\delta}_\rho$ é a razão entre as espessuras das camadas. Ele observou que quando a relação R_ρ cresce, o número de onda mais instável desloca-se para a esquerda no diagrama de estabilidade. Este deslocamento implica em um maior comprimento de onda da perturbação (menor número de onda). Por outro lado, se $R_\rho \approx 1$, a diferença do número de onda mais instável em relação ao caso não estratificado é desprezível, de maneira que o comprimento de onda fundamental longitudinal não varia com o aumento da estratificação.

No trabalho de Lawrence *et al.* (1991)[36], resultados teóricos obtidos através da equação de Taylor-Goldstein (equação 2.54) foram comparados com experimentos físicos, obtendo condições para a formação das instabilidades de \mathcal{H} . A tabela 2.3 resume os principais resultados

Tabela 2.3: Condições para surgimento das instabilidades de \mathcal{KH} e \mathcal{H} . Tabela adaptada de Martinez (2006) e Ferreira (2014)

Relação entre R_ρ	Ri	Instabilidades	Referência
$R_\rho \gg 1$	$Ri \leq 0,07$	\mathcal{KH}	[25],[36],
$R_\rho \gg 1$	$Ri > 0,07$	\mathcal{H}	[25],[36]
$R_\rho \gg 1$	$Ri = 0,046$	Transição \mathcal{KH} à \mathcal{H}	[25],[36]
$R_\rho \gg 1$	$Ri < 0$	\mathcal{KH}	[25],[36]
$R_\rho \leq 2$	$Ri < 0,25$	\mathcal{KH}	[26]
$R_\rho > 2$	$Ri < 0,25$	\mathcal{KH} e \mathcal{H}	[26]

dos trabalhos de Hazel (1972)[26], Haigh e Lawrence (1999)[25] e Lawrence *et al.* (1991)[36].

2.3.3 Instabilidades de Rayleigh-Taylor (\mathcal{RT})

As instabilidades de Rayleigh-Taylor (\mathcal{RT}) surgem em meios estratificados quando o escoamento de base possui velocidade nula ($\bar{u} = 0$). Sendo assim, a equação 2.54 assume a forma:

$$(\hat{v}_{yy} - \alpha^2 \hat{v}) - Ri \frac{\bar{\rho}_y}{c^2} \hat{v} = 0, \quad (2.57)$$

conhecida como equação de Rayleigh-Taylor.

A instabilidade de \mathcal{RT} se forma na interface entre dois fluidos de massa específica diferentes, de maneira que o fluido mais leve desloca o fluido mais pesado devido às forças de empuxo (Sharp, 1984)[52], consistindo em um caso de estratificação instável. A figura 2.16 mostra uma representação com as principais características da instabilidade \mathcal{RT} , que tipicamente se assemelha a cogumelos. Alguns exemplos incluem: o comportamento da água suspensa acima do petróleo, nuvens em forma de cogumelos como as de erupções vulcânicas e explosões nucleares, explosões de supernova em que o gás do núcleo em expansão é acelerado, entre outros.

2.3.4 Instabilidades de dupla-difusividade (\mathcal{SF})

De forma semelhante à instabilidade de \mathcal{RT} , a instabilidade de dupla-difusividade, também conhecida como *fingering* ou *salt-fingers* (\mathcal{SF}), também se forma em meios estratificados, com a diferença de que os fluidos em contato possuem difusividades diferentes. A figura 2.17 mostra a assinatura das instabilidades de dupla-difusividade, que se assemelham às instabilidades de \mathcal{RT} e possuem estruturas em formas de dedos, o que dá origem ao nome. Elas são capazes de

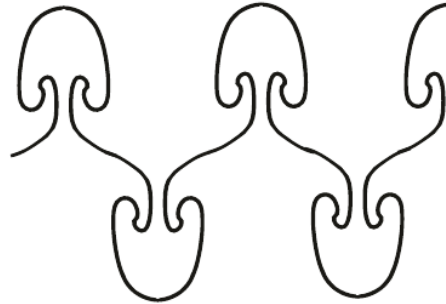


Figura 2.16: Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{RT} . Adaptado de Burns e Meiburg *et al.* (2015)[12].

desestabilizar um meio em que o fluido mais leve se situe acima do mais pesado e estabilizar um escoamento em que o mais pesado se situe acima do mais leve. Tipicamente ocorrem em ambientes marinhos onde as diferenças de temperatura e salinidade causam diferenças nas constantes de difusão (figura 2.18).



Figura 2.17: Representação esquemática da instabilidade de \mathcal{ST} . Adaptado de Burns e Meiburg *et al.* (2015)[12].

Burns e Meiburg (2012)[11], através de análise de estabilidade linear, estudaram a dupla-difusividade e a sedimentação em um sistema constituído por um fluido com sedimentos acima de outro com concentração salina. Verificaram que, na ausência de salinidade e para um perfil de concentração escalonado, o parâmetro dominante é a razão entre a velocidade de sedimen-

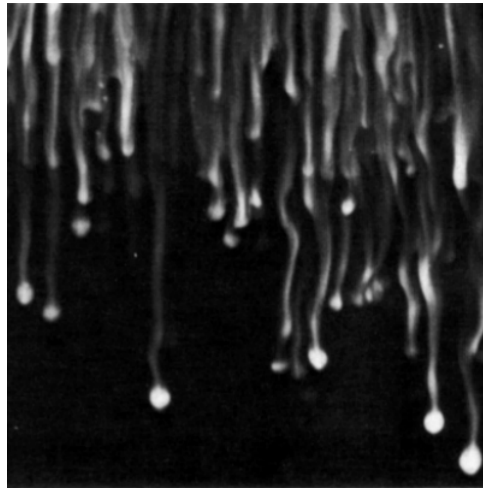


Figura 2.18: Fotografia de *salt-fingers*, extraído de Kundu (2008)[35].

tação das partículas e a escala de velocidade viscosa. Enquanto esta proporção é pequena, a sedimentação de partículas tem uma influência desprezível no crescimento da instabilidade. No entanto, quando as partículas se assentam mais rapidamente do que a instabilidade cresce, a taxa de crescimento diminui inversamente proporcional à velocidade de sedimentação. Na presença de um campo de salinidade estratificado, a sedimentação de partículas pode ter um efeito de-estabilizador e aumentar significativamente a taxa de crescimento. Para espessuras de camada de mistura muito maiores que a espessura da interface de salinidade, as interfaces de partículas e salinidade tornam-se cada vez mais desacopladas e o modo de instabilidade dominante passa a ser de Rayleigh-Taylor.

Os autores Yu *et al.* (2013)[60] realizaram estudo semelhante ao de Burns e Meiburg (2012)[11], através de análise de estabilidade linear. Neste trabalho, considerou-se que a difusividade dos sedimentos era função da sua concentração, fornecendo um modelo físico mais robusto. Foi mostrado que o sedimento pode atuar de forma a retardar ou acelerar o processo de difusão em um meio com dupla-difusividade. Os resultados mostraram que para sedimentos finos, com grãos menores que 10 μm (velocidade de queda de 0,09 mm/s), a instabilidade de dupla-difusividade é dominante e os *fingers* resultantes são da ordem do milímetro. Para sedimentos maiores que 10 μm , o mecanismo de \mathcal{SF} passa a ser dominante e instabilidades ocorrem para baixas concentrações de sedimentos da ordem de 0,1 g/l com *fingers* da ordem do centímetro.

Os mesmos autores dão continuidade ao estudo anterior no trabalho de Yu *et al.* (2014)[61] através de simulação numérica direta. Reforçando os resultados obtidos por Yu *et al.* (2013)[60], também foi observado que, para sedimentos muito finos com velocidade de queda de 0,0036 mm/s, a instabilidade dominante é a de dupla-difusão. Com o aumento da velocidade de queda para 0,0144 mm/s, as instabilidades de Rayleigh-Taylor tornam-se dominantes antes que os modos duplo-difusivos cresçam. *Fingers* de sedimentos da ordem do centímetro altamente assimétricos foram observados devido à interação não-linear dos diferentes modos.

Dando continuidade ao trabalho de Burns e Meiburg (2012), os mesmos autores em 2015[12] realizaram análise de estabilidade não-linear utilizando *DNS*, obtendo resultados consistentes com o trabalho anterior. O crescimento dos *fingers* dá origem a uma instabilidade secundária e, eventualmente, à formação de plumas que se destacam na região interfacial. As simulações mostram que a presença de partículas com uma velocidade de sedimentação modifica a instabilidade de dupla-difusividade, criando uma "região do nariz" instável nos perfis médios, localizados entre a salinidade ascendente e a interface de sedimento descendente.

Schulte *et al.* (2016)[50] estudaram, através de simulação numérica direta (*DNS*), as instabilidades formadas em um tanque com fluido estratificado e em repouso. Foi observado que os efeitos desestabilizantes da dupla-difusividade e a sedimentação das partículas amplificam uma à outra acima da interface de difusão, de maneira que elas tendem a se cancelar abaixo. Para velocidades de queda moderadas, plumas se formaram tanto abaixo como acima da interface, enquanto que para velocidades mais elevadas a formação de plumas abaixo da interface é suprimida.

2.3.5 Instabilidades promovidas pela sedimentação (*SD*)

As instabilidades promovidas pela sedimentação (*SD* - *settling-driven instability*, ou ainda *settling-driven fingering*) ocorrem em sistemas estratificados em que, além da dupla-difusividade, atua também a velocidade de queda das partículas do fluido mais denso, geralmente água com sedimentos. Ocorrem tipicamente em plumas fluviais, quando a água com sedimentos é mais leve que a água salgada, desenvolvendo instabilidades características. Os mecanismos que movem esta instabilidade não são completamente conhecidos, dado que há pouca bibliogra-

fia acerca deste fenômeno.

Hoyal *et al.* (1999)[31], em estudos experimentais, descreveram que a convecção conduzida por sedimentos pode desempenhar um papel importante na sedimentação a partir da base de plumas flutuantes (hipopícnais), por exemplo: estuários e lagos estratificados, nuvens vulcânicas e correntes costeiras. Além do mecanismo de convecção duplo-difusivo, outro modo de desenvolvimento de instabilidade convectiva consiste na sedimentação através da interface de densidade. A figura 2.19 mostra uma fotografia deste tipo de instabilidade obtida pelo autor, em que se observa que a estrutura formada se assemelha a uma sobreposição da instabilidade de \mathcal{RT} e \mathcal{SF} .

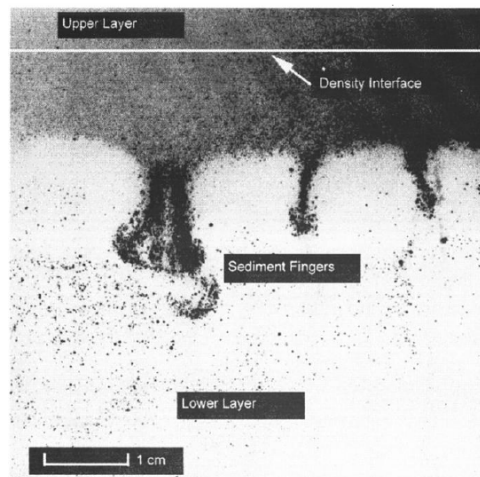


Figura 2.19: Fotografia de folha de luz laser CCD das instabilidades movidas pela sedimentação. Extraído de Hoyal *et al.* (1999)[31].

Farenzena e Silvestrini (2016)[19] obtiveram mais dados sobre as condições em que a instabilidade \mathcal{SD} se desenvolve utilizando análise de estabilidade linear. Observou-se que o modo instável devido à sedimentação necessita de velocidades de queda suficientemente elevadas para se desenvolver, sendo função do número de Richardson da salinidade. A figura 2.20 mostra um dos resultados obtidos pelos autores, mostrando a dependência da velocidade de queda crítica (u_s^{crit}) em função do Richardson salino (Ri_2). Este modo possui a tendência de geração de um vórtice contra-rotativo que deforma a instabilidade de \mathcal{KH} , gerando estruturas semelhantes a instabilidades de \mathcal{RT} .

Alsinan *et al.* (2017)[2] realizaram análise de estabilidade linear biglobal de fluidos estratificados cuja densidade depende da temperatura e concentração, além de ser levada em conta

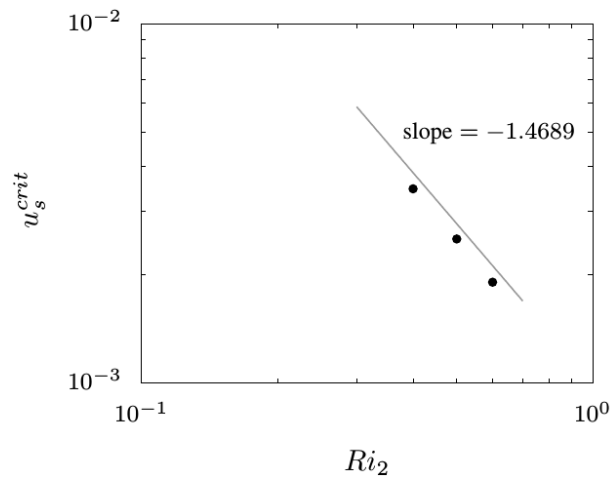


Figura 2.20: Variação da velocidade de queda crítica em função do número de Richardson salino (Ri_2) para desenvolvimento do modo \mathcal{SD} . Extraído de Farenzena e Silvestrini (2016)[19].

a sedimentação através da velocidade de queda. Os resultados demonstraram que a velocidade de queda gera uma mudança de fase entre os campos de perturbação de temperatura e concentração, gerando instabilidades de \mathcal{SD} . Este modo se mostrou relevante para todas as razões de densidade e difusividade estudados. Para o caso em que há diferença de difusividade entre os campos de temperatura e concentração, este modo compete com o modo gerado pela dupla-difusividade (\mathcal{SF}). Como complemento à análise de estabilidade, foram apresentados resultados de simulação numérica direta (DNS) onde se observam a relação não-linear da sobreposição das diferentes instabilidades (\mathcal{SD} e \mathcal{SF}) para as diversas combinações de parâmetros.

Dando continuidade ao trabalho de Farenzena e Silvestrini (2016)[19], os mesmos autores em 2017[20] publicaram novos resultados de análise de estabilidade, incluindo dados relativos ao deslocamento da camada de mistura de sedimentos e a cisalhante. As diferentes combinações de parâmetros estudadas foram classificadas em três cenários, relativos ao deslocamento das camadas: a configuração fracamente misturada, fortemente misturada e o caso intermediário. Para o primeiro caso, as instabilidades de \mathcal{KH} e \mathcal{SD} foram identificados como possuindo os modos mais amplificados temporalmente, dependendo da velocidade de queda das partículas e o número de Richardson total do escoamento, conforme ilustrado na figura 2.22a através das curvas de estabilidade. No segundo caso, em que há deslocamento entre as camadas, o modo de \mathcal{KH} não é mais predominante, de modo que a instabilidade de \mathcal{RT} modificada se torna a predominante sobre as demais (figura 2.22b). Na terceira configuração foram observadas

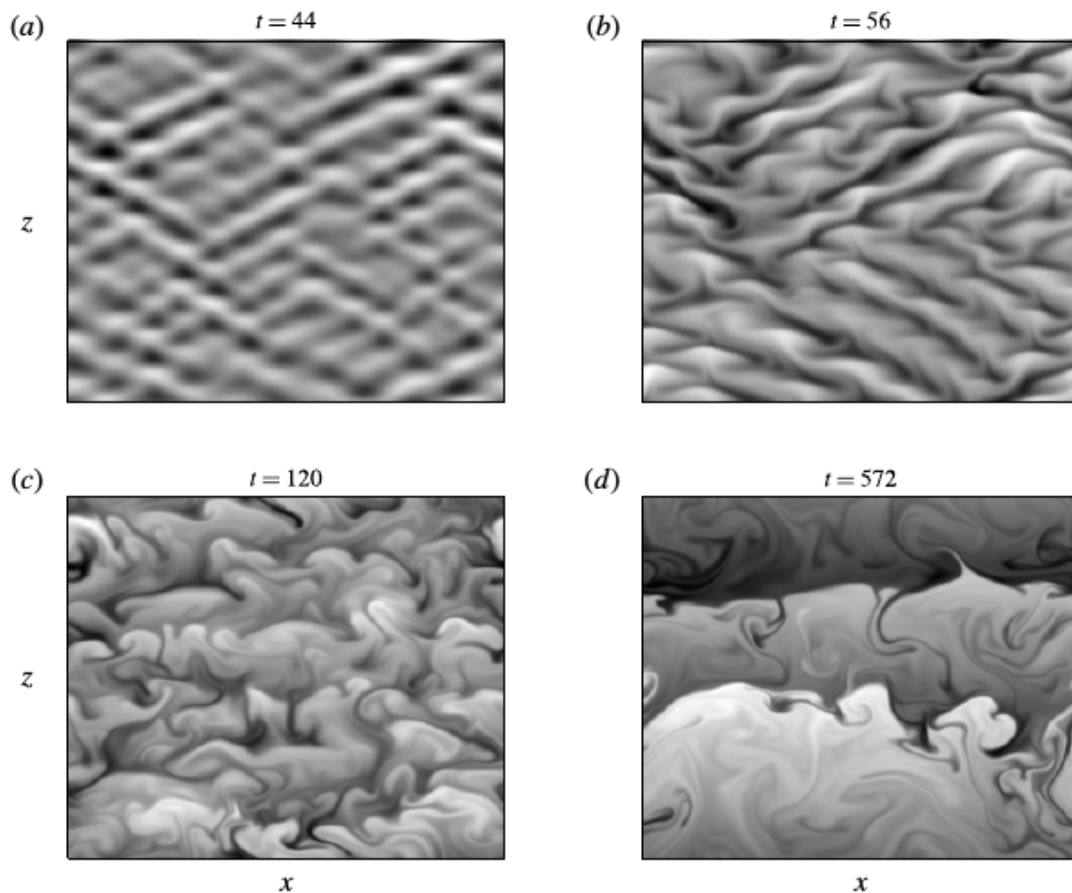


Figura 2.21: Campos instantâneos da perturbação de sedimentos para DNS bidimensional, onde se observa o desenvolvimento temporal da instabilidade de \mathcal{SD} . Extraído de Alsina *et al.* (2017)[2].

a ocorrência das três instabilidades \mathcal{KH} , \mathcal{SD} e \mathcal{RT} modificada, conforme a combinação de parâmetros.

O presente trabalho irá tratar sobre a formação de instabilidades nas camadas de mistura que ocorrem em plumas hipopícnais. A ferramenta para a análise será a teoria da estabilidade hidrodinâmica linear, utilizando método de colocação de Chebyshev e o algoritmo QZ para solução do problema de autovalores. Levando em conta que a maioria dos trabalhos anteriores não conduziu um estudo aprofundado sobre a influência do número de Reynolds na formação de instabilidades primárias, este trabalho procurará contribuir para preencher esta lacuna. Serão estudadas camadas de mistura homogêneas e estratificadas, com e sem espessura variável da camada de sedimentos.

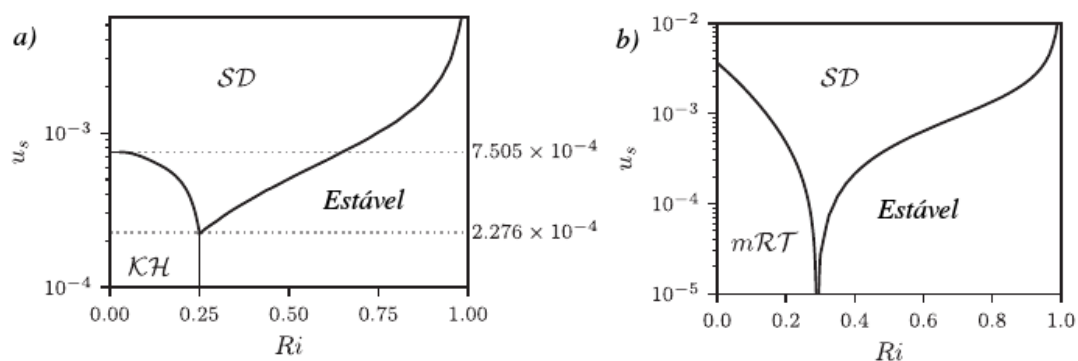


Figura 2.22: Curvas de estabilidade e modos dominantes em função do número de Richardson total e velocidade de queda para a configuração fracamente misturada (a) e fortemente misturada (b). Adaptado de Farenzena e Silvestrini (2017)[20].

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo será abordada a metodologia utilizada para estudo da estabilidade linear local temporal de plumas hipopícnais. Primeiramente, o modelo matemático é exposto, onde serão apresentadas as equações governantes do fenômeno, assim como aspectos físicos levados em consideração e limitações do modelo. Em seguida, é aplicado o método dos modos normais a estas equações, realizando sua linearização, além de discussão a respeito do escoamento de base considerado. No presente trabalho, o escoamento de base é considerado homogêneo em duas direções, de maneira que será realizada somente análise temporal local da estabilidade. Finalmente, é abordada a solução numérica do problema de autovalores e autovetores, onde será apresentado o método de colocação de Chebyshev e o algoritmo QZ.

3.1 Modelo matemático

Equações governantes

As equações que governam o escoamento de plumas hipopícnais são dadas pela equação da Continuidade e de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq, que considera pequenas variações de massa específica. Esta aproximação é bastante razoável já que a densidade da água com sedimentos é de 3% a 4% maior que a água sem sedimentos (Burns e Meiburg, 2012)[11]. Estas equações são dadas, respectivamente, por:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{g}}, \quad (3.2)$$

onde $\tilde{\mu}$ é a viscosidade dinâmica (considerada a mesma para água com sedimentos e água salina), $\tilde{\mathbf{g}} = (0, 0, -\tilde{g})$ o vetor aceleração da gravidade, \tilde{p} a pressão, $\tilde{\mathbf{u}}$ o vetor velocidade e $\tilde{\rho}$ a massa específica, considerando a presença de sedimentos e sal:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 (1 + \tilde{\gamma} \tilde{\varphi}), \quad (3.3)$$

onde $\tilde{\rho}_0$ é a massa específica da água doce, $\tilde{\varphi}$ a concentração de sedimento e $\tilde{\gamma}$ o coeficiente de expansão volumétrica do sedimento, dada por:

$$\tilde{\gamma} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\varphi}} \right). \quad (3.4)$$

Em ambientes naturais são comuns meios polidispersos, contendo sedimentos de diversos tamanhos. No entanto, neste trabalho, como simplificação, a pluma fluvial será considerada um meio monodisperso. Sendo assim, a variação da concentração de sedimentos ($\tilde{\varphi}$) no espaço e no tempo é governada pelas equações de transporte destas quantidades escalares:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\varphi} = \nabla \cdot (\tilde{\kappa} \nabla \tilde{\varphi}), \quad (3.5)$$

onde $\tilde{\kappa}$ é a difusividade molecular dos sedimentos.

3.1.1 escoamento de base

Para realizar a análise de estabilidade é necessário conhecer *a priori* o escoamento de base que será perturbado. Geralmente é adotado um perfil de velocidades na forma de uma função matemática conhecida. Tomando como base trabalhos anteriores (Burns e Meiburg, 2012[11] e Yu *et al.*, 2013[60]), no caso de plumas e camadas de mistura, é comum a utilização de funções do tipo tangente hiperbólico ou função erro. Dessa forma, no presente trabalho, os perfis de

velocidade e concentração de sedimentos são dados, respectivamente, por:

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = \frac{\Delta\tilde{u}}{2} \left[\tanh\left(\frac{2\tilde{y}}{\tilde{\delta}_u}\right) \right], \quad (3.6)$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}) = \frac{\tilde{\varphi}^{max}}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{2\tilde{y}}{\tilde{\delta}_\varphi}\right) \right], \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\delta}_u$ e $\tilde{\delta}_\varphi$ são as espessuras das camadas de mistura, $\Delta\tilde{u} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$ a diferença de velocidade, $\tilde{\varphi}^{max}$ a concentração máxima de sedimentos.

3.1.2 Adimensionalização

As equações 3.1, 3.5 a 3.7 foram adimensionalizadas utilizando como escalas características $U = \Delta\tilde{u}/2$ (escala de velocidades), $L = \tilde{\delta}_u/2$ (escala de comprimento), $P = 4\tilde{p}/(\tilde{\rho}_0\Delta\tilde{u}^2)$ (escala de pressões) e $\Phi = \tilde{\varphi}^{max}/2$ (escala de concentrações), conforme proposto por Farenzena (2016)[18]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri\varphi \mathbf{e}_g, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \varphi, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{e}_g = (0, -1, 0)$ é o vetor unitário que dá a direção da gravidade.

Os parâmetros adimensionais resultantes encontram-se na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros adimensionais utilizados no presente trabalho

Nome	Símbolo	Equação
Número de Reynolds	Re	$Re = \frac{\rho_0 \Delta \tilde{u} \tilde{\delta}_u}{4\tilde{\mu}}$
Número de Richardson	Ri	$Ri = 2 \frac{\tilde{g}' \tilde{\delta}_u}{\Delta \tilde{u}^2}$
Número de Schmidt	Sc	$Sc = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\kappa}}$
Razão das espessuras camadas de mistura	R_ρ	$R_\rho = \frac{\tilde{\delta}_u}{\tilde{\delta}_\varphi}$

Para o número de Richardson, foi utilizada a seguinte expressão para a gravidade reduzida (\tilde{g}'):

$$\tilde{g}' = \tilde{g} \tilde{\gamma} \Phi, \quad (3.11)$$

onde $\Phi = \tilde{\varphi}^{max}/2$.

Para o escoamento de base, composto pelos perfis de velocidade, concentração de sedimentos e salinidade, um processo similar de adimensionalização resulta nas expressões abaixo, plotadas na figura 3.1:

$$\bar{u}(y) = \tanh(y), \quad (3.12)$$

$$\bar{\varphi}(y) = 1 + \tanh[R_\rho y], \quad (3.13)$$

3.1.3 Decomposição em modos normais

O processo de decomposição em modos normais, descrito no capítulo anterior, foi aplicado às equações adimensionalizadas 3.8 a 3.10 de forma a obter o problema de autovalores e au-

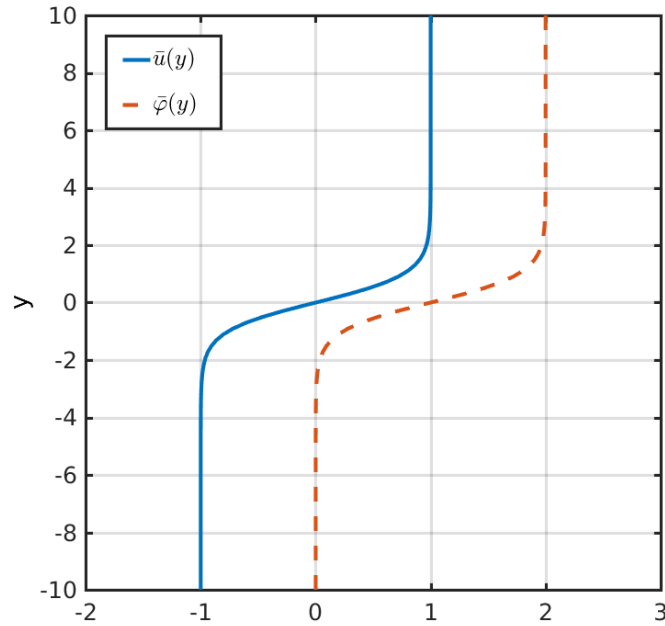


Figura 3.1: Escoamento de base utilizado no presente trabalho.

tovetores a ser resolvido. O escoamento foi primeiramente decomposto em um escoamento de base mais uma perturbação para cada uma das variáveis \mathbf{u} , p e φ :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(y) + \mathbf{u}'(x, y, z, t), \quad (3.14)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \bar{\varphi}(y) + \varphi'(x, y, z, t), \quad (3.15)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(y) + p'(x, y, z, t), \quad (3.16)$$

sendo o escoamento de base homogêneo em duas direções (x e z), o que corresponde à hipótese de escoamento paralelo.

A forma da perturbação utilizada correspondeu à análise temporal local, gerando o seguinte conjunto de perturbações:

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (3.17)$$

$$\varphi'(x, y, z, t) = \hat{\varphi}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (3.18)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \sigma t)], \quad (3.19)$$

de forma que α e β são parâmetros reais e σ é o autovalor a ser obtido.

Aplicando as decomposições 3.14 a 3.16 nas equações 3.8 a 3.10 e subtraindo o escoamento de base, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} + i\beta\hat{w} = 0, \quad (3.20)$$

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\hat{u} + \frac{d\bar{u}}{dy}\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re}\mathcal{M}\hat{u}, \quad (3.21)$$

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\hat{v} = -\frac{d\hat{p}}{dy} - Ri\hat{\varphi} + \frac{1}{Re}\mathcal{M}\hat{v}, \quad (3.22)$$

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re}\mathcal{M}\hat{w}, \quad (3.23)$$

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\hat{\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}}{dy}\hat{v} = \frac{1}{ReSc}\mathcal{M}\hat{\varphi}, \quad (3.24)$$

onde $\mathcal{M} = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - \beta^2$ é um operador linear.

Este sistema de equações pode ser reduzido em apenas duas equações, através do seguinte procedimento:

- Isolando \hat{w} na equação 3.20 e substituindo na equação 3.23;
- Isolando \hat{p} e substituindo-se na equação 3.22 e 3.23;
- Isolando-se \hat{u} na equação 3.22 e substituído-se na equação 3.23.

O resultado desse processo resulta em um novo sistema de equações, consistindo na equação de Orr-Sommerfeld (equação 2.43) com um termo a mais devido à estratificação e mais uma

equação para a concentração de sedimentos, conforme segue, respectivamente:

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\mathcal{M}\hat{v} = -i\alpha\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\hat{v} + \frac{1}{Re}\mathcal{M}^2\hat{v} - Rik^2\hat{\varphi}, \quad (3.25)$$

$$i(\alpha\bar{u} - \sigma)\hat{\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}}{dy}\hat{v} = \frac{1}{ReSc}\mathcal{M}\hat{\varphi}, \quad (3.26)$$

onde $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ é o número de onda total. As condições de contorno que dão fechamento ao problema são condições de Dirichlet para as amplitudes das perturbações:

$$\hat{v}(y^-) = \hat{v}(y^+) = 0, \quad (3.27)$$

$$\hat{\varphi}(y^-) = \hat{\varphi}(y^+) = 0, \quad (3.28)$$

onde y^- é o limite inferior do domínio e y^+ o limite superior. Neste trabalho, o domínio é simétrico com relação a y , de forma que $y^- = -L_{max}$ e $y^+ = L_{max}$.

O sistema de equações composto pelas equações 3.25 e 3.26 constitui um problema de autovalores e autovetores generalizado, cuja forma geral é:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{q}} = \sigma\underline{\underline{\mathbf{B}}}\hat{\mathbf{q}}, \quad (3.29)$$

com a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ definida por:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{u}\underline{\underline{\mathcal{M}}} - \alpha\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{i}{Re}\underline{\underline{\mathcal{M}}}^2 & k^2Ri\underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ -i\frac{d\bar{\varphi}}{dy}\underline{\underline{\mathbf{I}}} & \alpha\bar{u}\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{i}{ReSc}\underline{\underline{\mathcal{M}}} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e a matriz $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ dada por:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathcal{M}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

em que o vetor $\hat{\mathbf{q}}$ dado por $\hat{\mathbf{q}}^T = [\hat{v}, \hat{\varphi}]$. Nestas equações, $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ é a matriz identidade, $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$ a matriz nula, $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$ o operador diferencial e $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ o operador \mathcal{M} na forma matricial dado por $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \underline{\underline{\mathcal{D}}}^2 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\alpha^2 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\beta^2$.

3.2 Método numérico

No presente trabalho, o problema de autovalores e autovetores dado pela equação 3.29 é resolvido de forma numérica utilizando o método de colocação espectral de Chebyshev. Este faz parte de uma classe mais geral de métodos, denominados métodos espectrais. Estes métodos possuem a característica particular de convergência espectral, podendo ser interpretados como métodos de ordem infinita (Canuto *et al.*, 1988[13], Peyret, 2013) [46].

Burns e Meiburg (2012)[11] comentam que métodos de diferenças finitas que são formulados em nós equidistantes ou tornam a solução numérica muito imprecisa nas regiões interfaciais, diminuindo a qualidade da solução, ou resolvem com precisão desnecessária regiões distantes das interfaces, aumentando o custo computacional. Métodos de diferenças finitas com refinamento (*stretching*) podem contornar o problema da resolução na interface, mas não possuem a mesma eficiência dos métodos espectrais.

Na figura 3.2, os autores compararam a convergência de cinco métodos distintos: diferenças finitas de segunda ordem uniforme (FD2), diferenças finitas compactas de sexta ordem uniforme (CFD6), diferenças finitas de segunda ordem com refinamento (Str-FD2), diferenças finitas compactas de sexta ordem com refinamento (Str-FD6) e o método de colocação espectral racional (R-S). O método espectral produziu uma precisão significativamente maior para um dado número de pontos do que qualquer um dos métodos de diferenças finitas, atingindo 15 dígitos de precisão em menos tempo computacional.

3.2.1 Método de colocação de Chebyshev

Os métodos espectrais fazem parte de uma família de métodos, denominados Método dos Resíduos Ponderados (*MWR - Method of Weighted Residuals*). Estes métodos aproximam a solução de uma dada equação diferencial parcial da forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M(f), \quad (3.32)$$

onde $M(f)$ é um operador contendo todas as derivadas espaciais de f e os termos-fonte.

A solução $f(\hat{y}, t)$ é aproximada por:

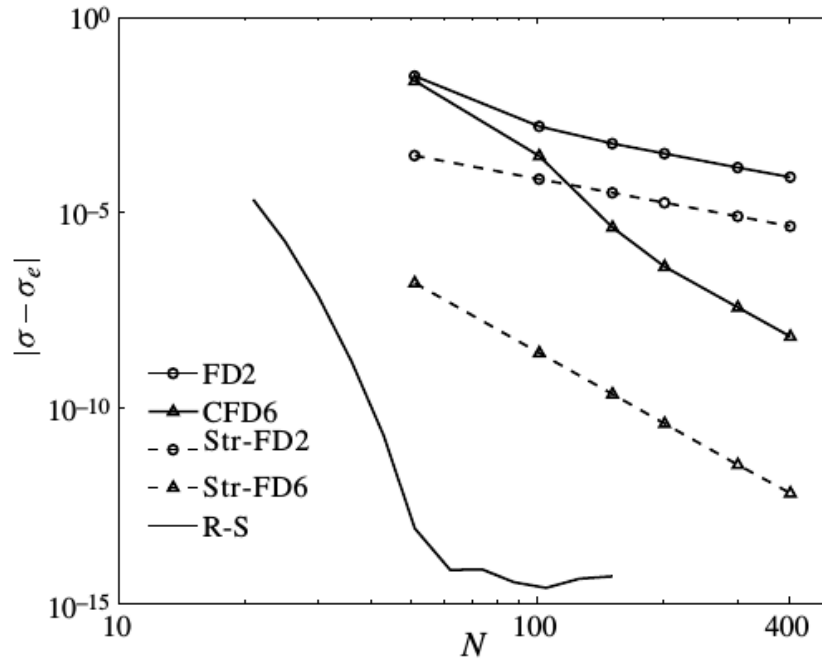


Figura 3.2: Convergência do autovalor σ (taxa de amplificação temporal) com o aumento do número de pontos (N) (Burns e Meiburg, 2012)[11].

$$f^N(\hat{y}, t) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k(t) \phi_k(\hat{y}), \quad (3.33)$$

onde $\hat{f}_k(t)$ são coeficientes de interpolação a serem determinados e $\phi_k(\hat{y})$ é a função de interpolação, denominada função tentativa. No caso do método de colocação de Chebyshev, esta função é um polinômio de Chebyshev, definido no intervalo $-1 \leq \hat{y} \leq 1$, dado por:

$$T_k(\hat{y}) = \cos[k \cos^{-1}(\hat{y})], k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

O Método dos Resíduos Ponderados demanda que:

$$\int \left[\frac{\partial f^N}{\partial t} - M(f^N) \right] \psi_k(\hat{y}) d\hat{y} = 0, \quad (3.35)$$

onde $\psi_k(\hat{y})$ é a função tentativa, que no caso do método de colocação de Chebyshev é dada pela função Delta de Dirac deslocada:

$$\psi_j(\hat{y}) = \delta(\hat{y} - \hat{y}_j), j = 1, \dots, N - 1. \quad (3.36)$$

No método de colocação, é utilizado uma grade não-uniforme que são os pontos de colocação de Gauss-Lobatto. Eles possuem a característica de se acumularem nas bordas do domínio, sendo dados por:

$$\hat{y}_j = \cos \frac{\pi j}{N}. \quad (3.37)$$

O processo de diferenciação de uma dada função f é aproximado através da matriz de Chebyshev. Tem-se para a n -ésima derivada (Trefethen, 2000)[55]:

$$f^{(n)} = \underline{\underline{\hat{D}_N}}^n f, \quad (3.38)$$

onde $\underline{\underline{\hat{D}_N}}$ é a matriz de Chebyshev, de tamanho $(N + 1) \times (N + 1)$, cujos coeficientes são dados por:

$$(\hat{D}_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (3.39)$$

$$(\hat{D}_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (3.40)$$

$$(\hat{D}_N)_{nn} = \frac{-x_n}{2(1 - x_n^2)}, \quad n = 1, \dots, N - 1, \quad (3.41)$$

$$(\hat{D}_N)_{mn} = \frac{c_m (-1)^{m+n}}{c_n x_m - x_n}, \quad m \neq n, m, n = 0, \dots, N, \quad (3.42)$$

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \text{ ou } N, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.43)$$

As condições de contorno de Dirichlet podem ser impostas eliminando-se as primeiras e últimas linhas e colunas da matriz de diferenciação de Chebyshev.

3.2.2 Transformação da malha

O fenômeno a ser estudado possui gradientes mais elevados na região central em torno de $y = 0$, sendo necessário uma malha mais refinada nesta região a fim de representar sua física de forma mais precisa. Além disso, como os polinômios de Chebyshev são definidos no intervalo $[-1, 1]$, faz-se necessário a utilização de uma transformação da malha para o domínio físico $[y^-, y^+]$. Isto é realizado através de uma função proposta por Berrut e Mittelman (2004)[5], dada por:

$$y = \frac{m}{\theta} \tan[\tan^{-1} \hat{y}], \quad (3.44)$$

onde y é a coordenada do domínio físico, \hat{y} os pontos de colocação, θ a densidade de pontos da malha e m o número de escalas características de comprimento na direção normal, sendo $m = L_{max}$.

Pela regra da cadeia, a matriz de diferenciação de Chebyshev também necessita ser transformada para as coordenadas físicas, conforme as expressões abaixo:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}} \frac{d\hat{y}}{dy}, \quad (3.45)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 = \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}^2 \left(\frac{d\hat{y}}{dy} \right)^2 + \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}} \frac{d^2\hat{y}}{dy^2}, \quad (3.46)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^4 = \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}^4 \left(\frac{d\hat{y}}{dy} \right)^4 + \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}^3 \left(6 \frac{d^2\hat{y}}{dy^2} \frac{d\hat{y}}{dy} \right) + \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}^2 \left[3 \left(\frac{d^2\hat{y}}{dy^2} \right)^2 + 4 \frac{d^3\hat{y}}{dy^3} \frac{d\hat{y}}{dy} \right] + \underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}} \frac{d^4\hat{y}}{dy^4}, \quad (3.47)$$

onde $\underline{\underline{\hat{\mathbf{D}}}}$ é a matriz de diferenciação de Chebyshev no domínio de colocação e $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ a matriz no domínio físico.

3.2.3 Solução do problema de autovalores e autovetores

Estando discretizado o sistema de equações (3.25 e 3.26), o problema de autovalores e autovetores generalizado pode ser resolvido pelo algoritmo QZ (Anderson *et al.*, 1999)[3]. Este método se baseia na seguinte decomposição das matrizes $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\underline{\mathbf{S}}}\underline{\underline{\mathbf{Z}}}, \quad (3.48)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\underline{\mathbf{Z}}}, \quad (3.49)$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$ são matrizes unitárias e $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ são matrizes triangulares superiores. As matrizes $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ possuem, respectivamente, autovalores λ_S e λ_T que estão relacionados com os autovalores de 3.29 pela expressão:

$$\sigma = \frac{\lambda_S}{\lambda_T}, \quad (3.50)$$

onde, por convenção, $\sigma \rightarrow \infty$ quando $\lambda_T = 0$.

O problema de autovalores e autovetores foi resolvido no software MATLAB®, que possui o algoritmo QZ implementado através da biblioteca LAPACK.

3.2.4 Filtragem de autovalores espúrios

Conforme Bourne (2003)[9], o método de colocação de Chebyshev, apesar de eficiente, leva à ocorrência de autovalores espúrios (não-físicos), que não são geralmente simples de serem identificados. Isto pode levar à classificação de um sistema como instável quando na realidade ele é estável. Estes autovalores se fazem mais presentes nos casos em que há estratificação no escoamento, não ocorrendo com tanta frequência em escoamentos homogêneos.

No presente trabalho, foi desenvolvido um algoritmo que atua de forma a filtrar estes autovalores, atuando de forma a selecionar o autovalor correspondente ao modo mais instável ($\max(\sigma_i)$), filtrando os demais. O método proposto requer como parâmetros um valor máximo para a parte real (σ_{rmax}) e valor mínimo para a parte imaginária (σ_{imin}).

A partir destes parâmetros, este algoritmo fará uma varredura na matriz que contém os autovalores, cujas dimensões são N linhas e N colunas e compara as partes imaginária e real do autovalor σ com certas tolerâncias, além de assegurar que ambos estejam na mesma posição ($j = k$). O seu pseudo-código pode ser expresso pela seguinte forma:

Algorithm 1 Algoritmo para eliminação de autovalores espúrios - pseudo-código

```

1: procedure
2:   for  $k = 1 : N$  do
3:     for  $j = 1 : N$  do
4:       if  $\sigma_i(j) \geq \sigma_{imin}$  and  $(|\sigma_r(k)| \leq \sigma_{rmax})$  and  $j = k$  then
5:          $\sigma_{imax} = \sigma_i(j)$ 

```

Outros critérios podem ser adotados para filtragem, como por exemplo Deloncle *et al.* (2007)[15] resolvem o problema de autovalores duas vezes variando-se o número de termos do polinômio de Chebyshev.

A figura mostra, de forma comparada, a aplicação do algoritmo na geração do gráfico do Richardson crítico, baseado na equação de Taylor-Goldstein (equação 2.54) conforme Hazel (1972)[26]. Para o caso em que ele não foi aplicado se observa que, além ser completamente insatisfatória a geração da curva neutra para o número de Richardson, as simulações falharam em prever a taxa de amplificação máxima para números de onda próximos de 1.

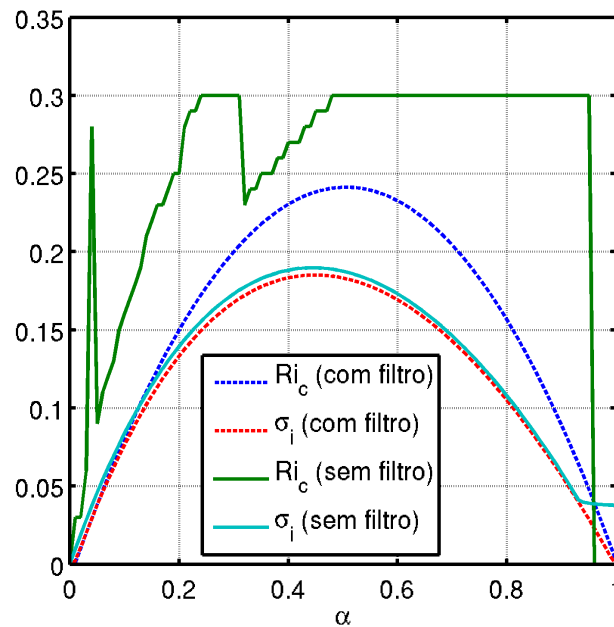


Figura 3.3: Curva de estabilidade para o Richardson global em função do número de onda transversal (α), com e sem o algoritmo para filtragem de autovalores espúrios.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo, primeiramente serão expostos os resultados concernentes à verificação e validação do método utilizado pelo presente trabalho. O modelo numérico e matemático será comparado com trabalhos de outros autores citados na revisão bibliográfica, buscando comprovar sua eficácia através de testes de convergência de malha para os casos da camada de mistura homogênea e estratificada. Validado e verificado o método, prosseguiu-se ao estudo da influência do número de Reynolds na formação de instabilidades para a camada de mistura homogênea e estratificada. Em seguida, estudou-se a influência da espessura do perfil de concentração. Por fim, investigou-se o efeito conjunto do número de Reynolds e espessura da camada de concentração na estabilidade linear.

4.1 Verificação

Primeiramente, a fim de verificar a propriedade de convergência espectral do método de colocação de Chebyshev e a correta solução das equações, realizaram-se testes de malha para o caso da camada de mistura homogênea. Os resultados obtidos foram verificados com o trabalho de Betchov e Szewczyk (1963)[7] para o caso invíscido em que $Re \rightarrow \infty$. Como não há estratificação, o escoamento de base para os sedimentos e salinidade é nulo, sendo $\bar{\varphi} = 0$ e $\bar{u}(y) = \tanh(y)$.

Para cada conjunto de parâmetros, o algoritmo utilizado resolve o problema de autovalores e autovetores (autofunções discretas) generalizado. Dessa forma, é obtida uma nuvem de auto-

valores σ , como por exemplo a figura 4.1, dispostos no plano complexo para $\alpha = 0,4449$. Para cada conjunto é necessário identificar qual é o autovalor mais instável, isto é, com a máxima taxa de amplificação σ_i . Se ocorrer pelo menos um autovalor com a parte imaginária $\sigma_i > 0$, o escoamento torna-se instável. Conforme previsto pela teoria, o modo instável encontrado possui parte real igual a zero ($\sigma_r = O(10^{-14})$, o que corresponde ao menor número de ponto flutuante passível de representação no computador utilizado para os cálculos) e há um modo estável correspondente com $\sigma_i < 0$. Os demais modos encontrados são neutros, possuindo parte imaginária com $\sigma_i = O(10^{-14})$.

A figura 4.2 mostra testes de convergência de malha variando o parâmetro θ (conforme equação 3.44), que regula a concentração dos pontos no centro do domínio de cálculo, conjuntamente com o tamanho do domínio (L_{max}) e o número de pontos (N). A variável estudada foi a parte imaginária do autovalor σ , que é a taxa de amplificação temporal da perturbação, com número de onda $\alpha = 0,4449$. No eixo das abscissas está plotado o número de pontos N enquanto que no eixo das ordenadas se encontra L_{max}/θ . As cores correspondem ao erro relativo dado por $(\sigma_{i_N} - \sigma_{i_{N-1}})/\sigma_{i_{N-1}}$, em escala logarítmica. A convergência se dá para $N \approx 70$ e $L_{max}/\theta \approx 1,1$.

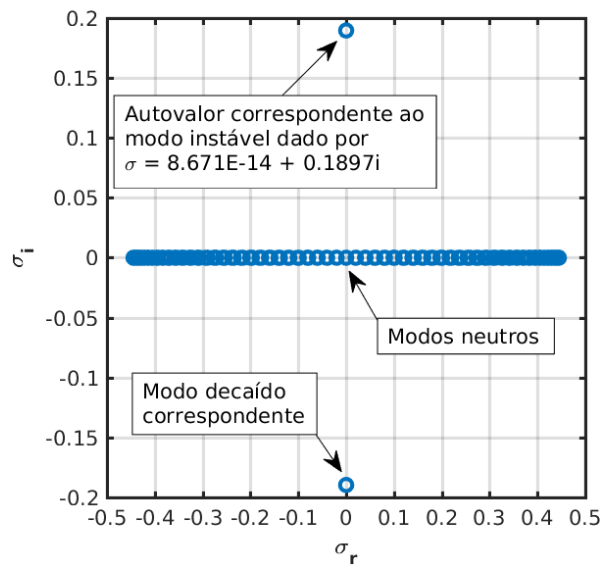


Figura 4.1: Plano complexo dos autovalores σ obtidos para a camada de mistura homogênea com $\alpha = 0,4449$.

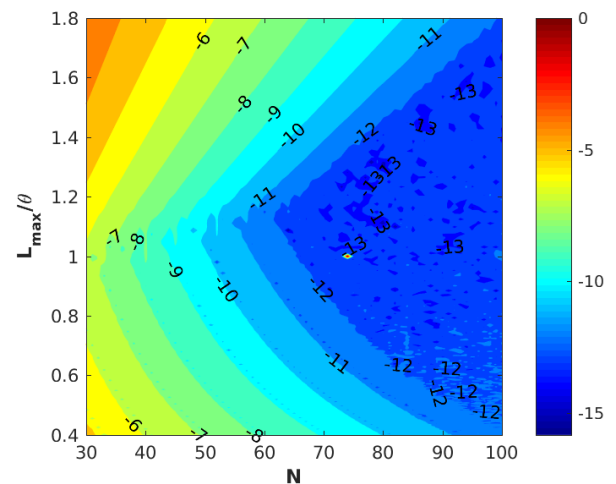


Figura 4.2: Convergência da solução para σ_i , variando o parâmetro de malha L_{max}/θ .

Para $N \approx 70$ e $L_{max}/\theta \approx 1,1$, o erro relativo se aproxima do menor número de ponto flutuante passível de ser representado pelo computador ($O(10^{-12})$) mais rapidamente do que para outros

valores. Conforme esperado, em todos os casos se observa a propriedade de convergência exponencial do método. A partir destes resultados, para os próximos testes e simulações, fixou-se $\theta = 110$, $L_{max} = 100$ e $N = 100$. O valor obtido, após a convergência, foi $\sigma_{i_{max}} = 0,1897$ e número de onda mais instável $\alpha = 0,4449$, os mesmos encontrados por Betchov e Szewczyk (1963)[7].

4.2 Validação

A partir da verificação de que o método numérico está sendo empregado de forma satisfatória, é necessário validar o modelo matemático através de sua aplicação em problemas consagrados amplamente documentados na bibliografia. O teste de validação assegura que o modelo utilizado representa corretamente a física relativa ao fenômeno investigado. Partindo da seção anterior, buscou-se validar a metodologia para a camada de mistura homogênea e posteriormente para a camada de mistura estratificada.

4.2.1 Camada de mistura homogênea ($Ri = 0$)

Fixados os parâmetros de malha, estudou-se a máxima taxa de amplificação σ_i variando-se o número de onda α . Para este estudo considerou-se, além do caso invíscido, o caso viscoso com $Re = 10^4$. Para o caso invíscido, o número de onda mais instável obtido foi $\alpha = 0,4449$ e $\sigma_{i_{max}} = 0,1897$, enquanto que no caso viscoso obteve-se $\alpha = 0,4453$ e $\sigma_{i_{max}} = 0,1892$.

A figura 4.3 mostra a variação de $\sigma_{i_{max}}$ em função de α para o caso invíscido e para o caso viscoso. Na escala da figura, se observa que o caso invíscido aproxima de forma satisfatória o caso viscoso para $Re = 10^4$ e $\alpha < 0,94$. A partir deste valor as soluções divergem uma da outra, conforme se observa na figura 4.4 que aproxima a figura 4.3 nesta região. Este comportamento pode ser atribuído à existência de singularidade no problema não-viscoso (camada crítica), o que não ocorre quando há a presença da viscosidade.

A figura 4.5 mostra, respectivamente, a vorticidade do escoamento de base ($\bar{\omega}_z$), perturbação (ω'_z) e o escoamento total reconstituído para o modo mais amplificado, dado por $\omega_z = \bar{\omega}_z + \omega'_z$ e a perturbação dada por $\omega'_z = \hat{\omega}_z \exp[i(\alpha x - \sigma t)]$, com $t = 1$. A perturbação ω'_z foi obtida a

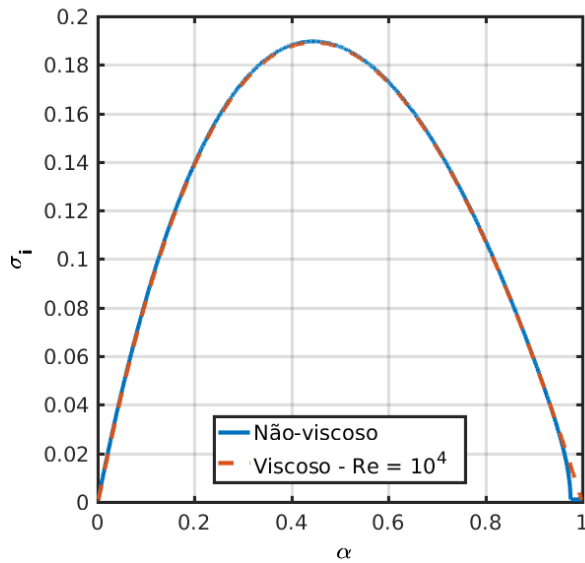


Figura 4.3: Variação da taxa de amplificação σ_i em função do número da onda α , para os casos de escoamento não-viscoso e viscoso ($Re = 10^4$)

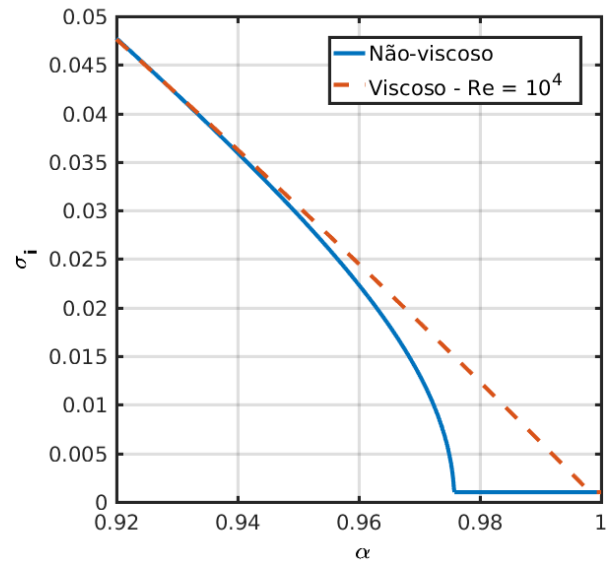


Figura 4.4: Detalhe da variação da taxa de amplificação σ_i para $0,92 \leq \alpha \leq 1$. A partir de $\alpha = 0,94$ observa-se a divergência da solução invíscida e a viscosa ($Re = 10^4$).

partir dos autovetores. Conforme esperado, a perturbação fez surgir dois vórtices de mesmo sentido que tendem a parrear-se, o que corresponde à instabilidade de Kelvin-Helmholtz (\mathcal{KH}). O domínio representado no eixo das abcissas representa um comprimento de onda ($L_x = 2\pi/\alpha$).

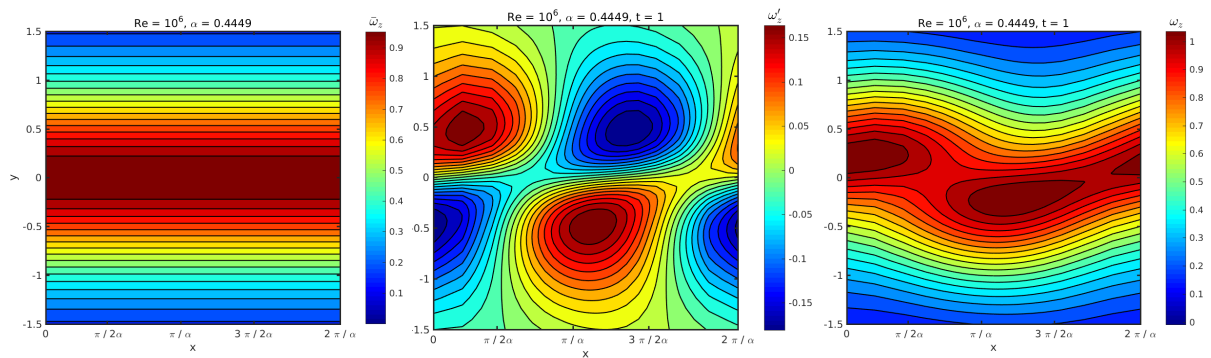


Figura 4.5: Isolinhas de vorticidade para a camada mistura homogênea (modo mais instável).

4.2.2 Camada de mistura estratificada ($Ri > 0$ e $R_\rho = 1$)

O caso da camada de mistura estratificada é regido pela equação de Taylor-Goldstein (equação 2.54), tratando-se de um problema de autovalores quadrático. No entanto, neste trabalho, esta equação é utilizada em outra formulação, de maneira que se obtém um problema de auto-

valores generalizado, conforme descrito no capítulo 3. Para geração dos resultados a seguir foi considerado um meio não difusivo ($Sc = 1$), sem espessura variável ($R_\rho = 1$) e que o Teorema de Squire é válido, de forma que o número de onda transversal é nulo ($\beta = 0$) e $\alpha = \bar{\alpha}$. Além disso, o escoamento foi considerado invíscido, com $Re \rightarrow \infty$.

A figura 4.6 ilustra a curva de estabilidade neutra do número de Richardson global (Ri) em função do número de onda (α) obtida pelo presente trabalho, incluindo o resultado analítico obtido por Hazel (1972)[26]. Conforme esperado, obteve-se a condição de estabilidade de $Ri > \frac{1}{4}$ para $\alpha \approx 0,5$, com a taxa de amplificação do modo mais instável se igualando a zero para $Ri = \frac{1}{4}$ conforme se observa no gráfico 4.7.

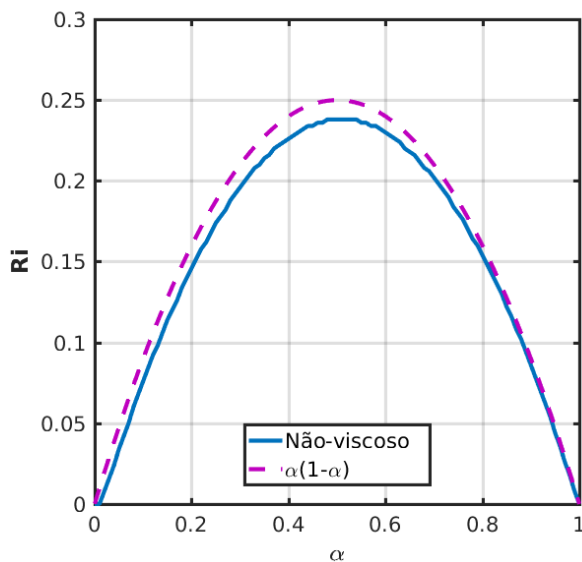


Figura 4.6: Curva de estabilidade para Richardson global (Ri) em função do número de onda transversal (α).

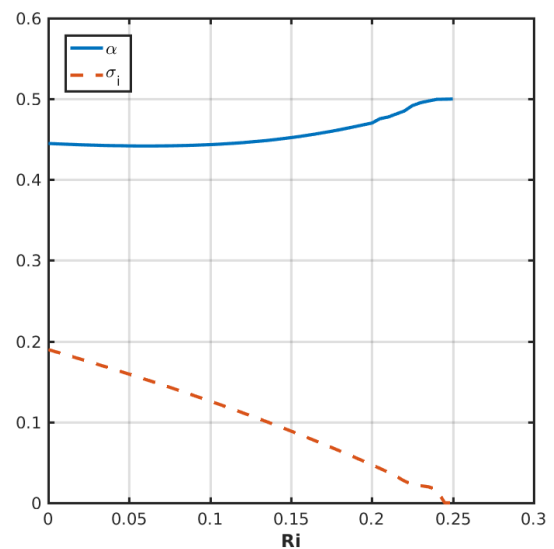


Figura 4.7: Variação da máxima taxa de amplificação σ_i e número de onda mais instável α em função de Ri .

Efeito da estratificação nas instabilidades de \mathcal{KH}

As imagens na figura 4.8 mostram uma sequência de campos de vorticidade da perturbação reconstituídos (ω'_z), em que se varia o número de Richardson e o respectivo número de onda mais instável, assumindo os valores fixos $Ri = 0,05$, $Ri = 0,10$, $Ri = 0,15$ e $Ri = 0,20$. Se observa que a camada de vorticidade existente entre os dois fluidos cisalhantes se torna mais intensa conforme o Richardson cresce. Este comportamento mostra a tendência do escoamento de se laminarizar com o aumento da estratificação, o que ocorre para $Ri > \frac{1}{4}$.

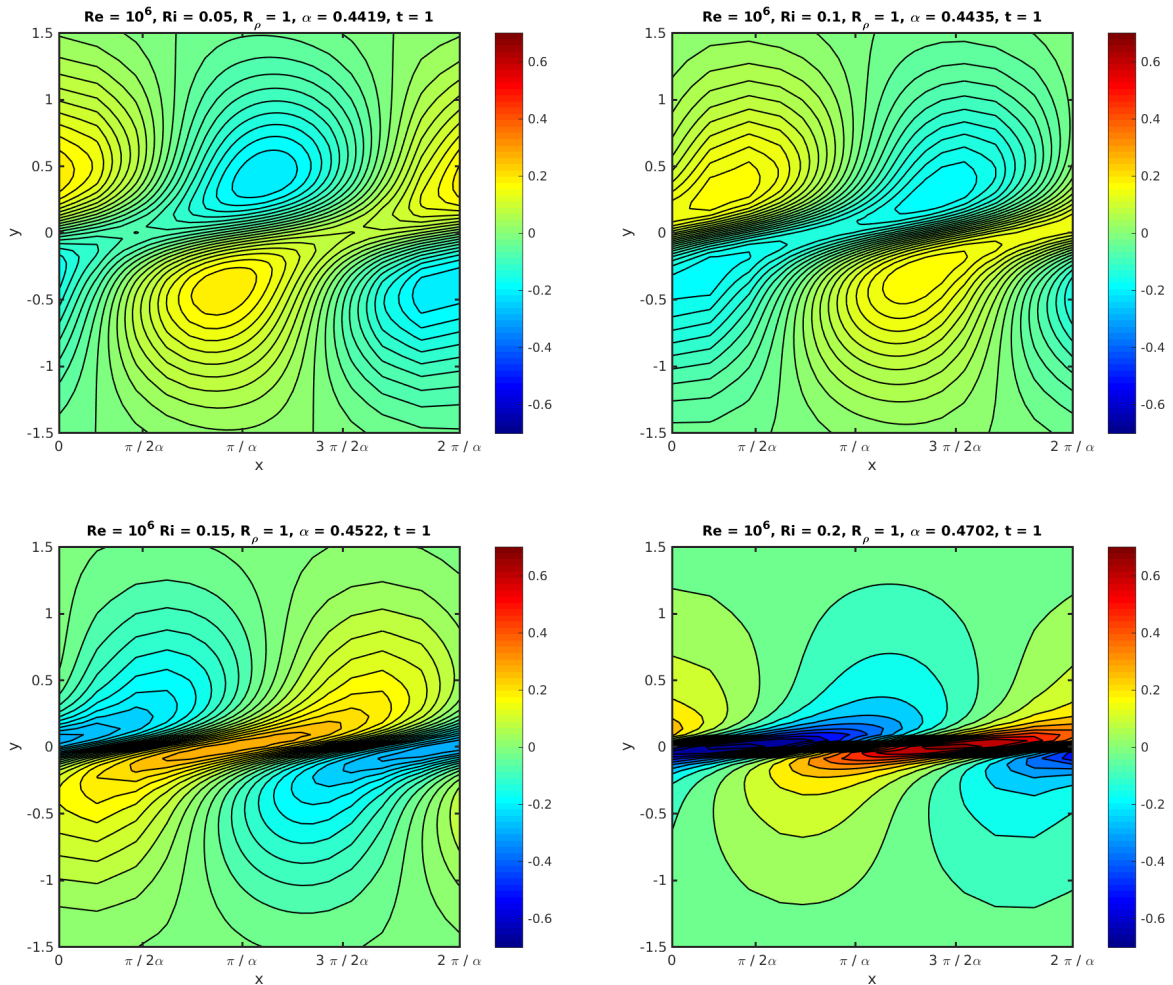


Figura 4.8: Variação do campo de vorticidade da perturbação para o escoamento cisalhante estratificado com o aumento do Ri para o respectivo número de onda mais instável.

4.3 Influência do número de Reynolds (Re)

A partir da verificação e posterior validação da metodologia do presente trabalho para as camadas de mistura homogênea e estratificada, procedeu-se à investigação das questões da pesquisa. Seguindo a mesma ordem do capítulo anterior, estudou-se a influência do número de Reynolds na estabilidade para a camada de mistura homogênea e estratificada. Em seguida, procedeu-se ao estudo de camadas de mistura intensamente ($Ri \gg 1$) e fracamente estratificadas ($Ri \ll 1$), com espessura relativa $R_\rho \neq 1$.

4.3.1 Camada de mistura homogênea ($Ri = 0$)

A influência do número de Reynolds na estabilidade de uma camada de mistura homogênea foi estudada por Betchov e Szewczyk (1963)[7] através de análise linear local, conforme discutido no capítulo 2, não obtendo nenhum número de Reynolds crítico para a ocorrência de modos instáveis. No presente trabalho realizou-se estudo semelhante, de forma a obter a maior taxa de amplificação para números de Reynolds no intervalo de 1 a 10^5 , assim como o número de onda mais instável respectivo.

Existência de um número de Reynolds crítico

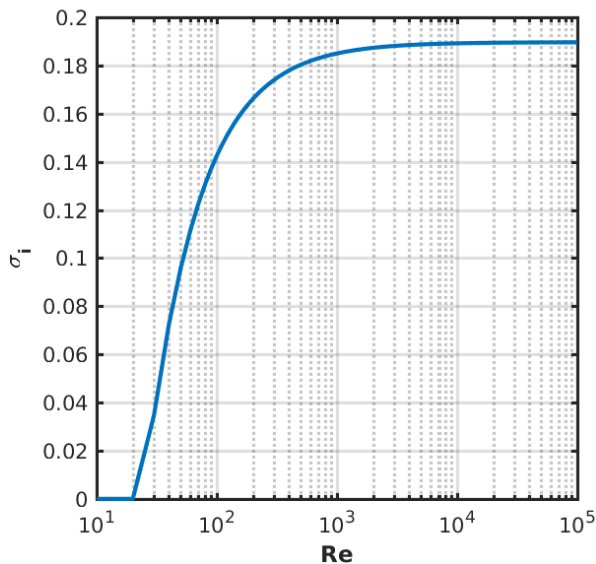


Figura 4.9: Variação da maior taxa de amplificação em função do número de Reynolds para a camada de mistura homogênea.

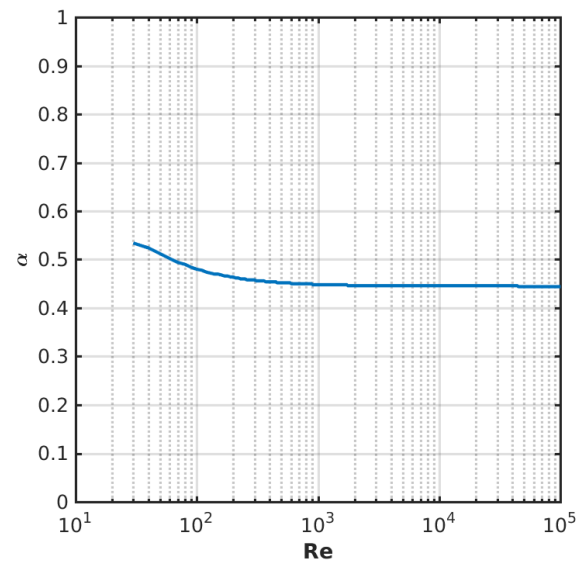


Figura 4.10: Variação do número de onda mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura homogênea.

Na figura 4.9 está plotada a maior taxa de amplificação σ_i em função do número de Reynolds no intervalo para $10 \leq Re \leq 10^5$ e na figura 4.10 o respectivo número de onda mais instável. Se observa, em ambos os gráficos, a existência de um número de Reynolds crítico para o qual irão ocorrer instabilidades, ocorrendo no intervalo entre $10 \leq Re \leq 20$. Tanto σ_i como α tenderam assintoticamente para os valores obtidos através da solução invíscida conforme Re foi aumentado, obtendo-se $\sigma_i = 0,1897$ e $\alpha = 0,4449$.

De forma a identificar o valor do número de Reynolds crítico, aumentou-se a resolução de

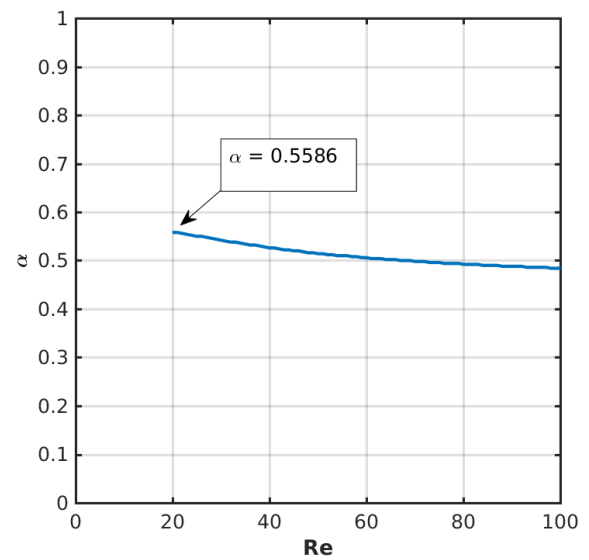
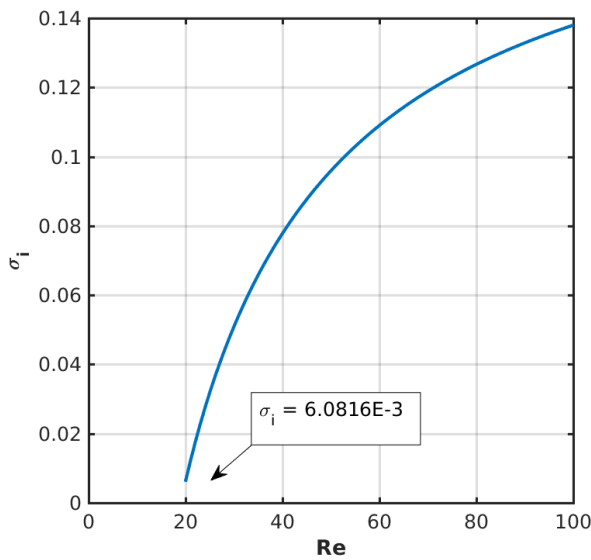


Figura 4.11: Detalhe mostrando a taxa de amplificação do primeiro modo instável.

Figura 4.12: Detalhe mostrando o número de onda do primeiro modo instável.

cálculo, com $10 < Re < 100$. Obteve-se os gráficos plotados nas figuras 4.16 e 4.17. Nelas se observa o Reynolds crítico como sendo $Re_c = 20$, cuja taxa de amplificação é $\sigma_i = 6,0816E - 3$ e número de onda $\alpha = 0,5586$. Este resultado está em desacordo com o obtido por Betchov e Szewczyk (1963)[7], porém está em concordância com o trabalho mais recente de Bhattacharya *et al.* (2006)[8], que obteram um valor de Reynolds crítico próximo a $Re_c = 20$ através de análise de estabilidade linear porém utilizando metodologia diferente deste trabalho.

A identificação de um Re crítico no presente trabalho, não tendo ocorrido nos anteriores, pode ser atribuído ao fato de que foi utilizado um *stretching* da malha, o que faz com o que os pontos do domínio se acumulem no ponto de inflexão do escoamento de base e permitindo desta forma uma melhor detecção das instabilidades. O mesmo caso foi calculado novamente sem o *stretching*, observando-se que o método numérico empregado não foi capaz de calcular os autovalores e autofunções corretamente, obtendo resultados sem sentido físico para Re muito baixos. Portanto, conclui-se que somente devido ao *stretching* é que foi possível identificar um Re crítico.

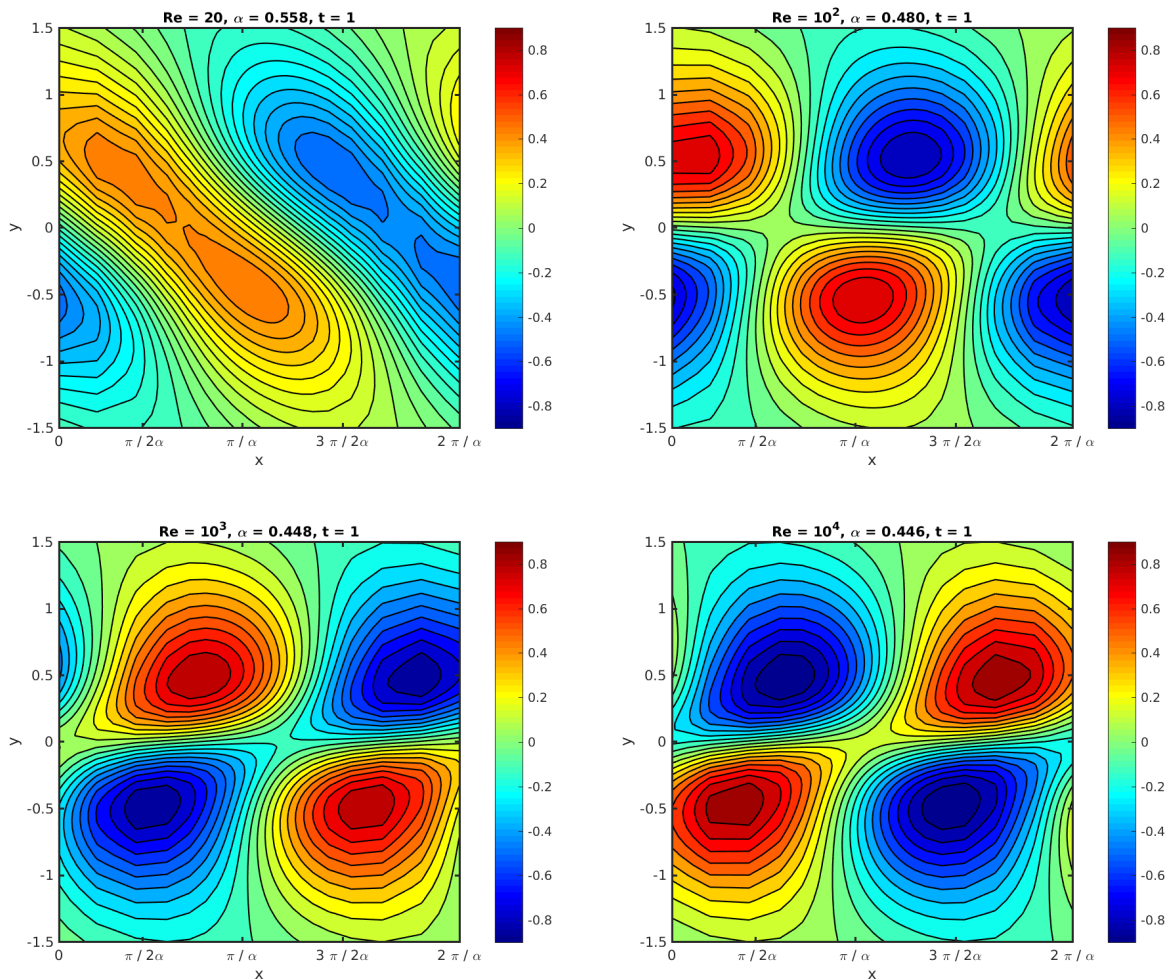


Figura 4.13: Variação do campo de vorticidade da perturbação para o escoamento cisalhante homogêneo com o aumento do Re para o número de onda mais instável.

Efeito do Re nas instabilidades de \mathcal{KH}

Na figura 4.13 estão plotados os campos de vorticidade da perturbação para diferentes Re e seus respectivos modos mais instáveis, incluindo o primeiro modo instável para $Re = 20$. Conforme se observa, este modo consiste em \mathcal{KH} , porém o vórtice formado possui cerca de duas vezes o comprimento em y que para os demais números de Reynolds mostrados na figura. O diâmetro deste vórtice tende rapidamente para aproximadamente 1,5, assim como o número de onda mais instável. O mesmo comportamento assintótico se repete para o módulo da vorticidade, que para $Re = 20$ possui cerca de metade do valor que os demais Re .

4.3.2 Camada de mistura estratificada ($Ri > 0$ e $R_\rho = 1$)

Os resultados a seguir consideraram valor finito para o número de Reynolds, levando em conta, dessa forma, a viscosidade no problema de autovalores e autovetores para a camada de mistura estratificada. Assim como no caso invíscido, foi variado o número de onda e o número de Richardson (Ri) a fim de obter o caso com o número de onda mais instável e a máxima taxa de amplificação da perturbação. Finalmente, a partir dos resultados obtidos, foi possível obter uma curva de estabilidade neutra do Richardson em função do número de Reynolds.

Efeito de Ri no Re crítico

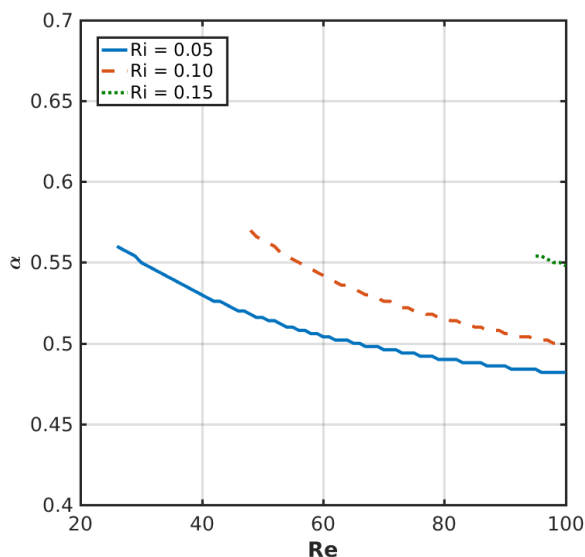


Figura 4.14: Variação do número de onda mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura estratificada.

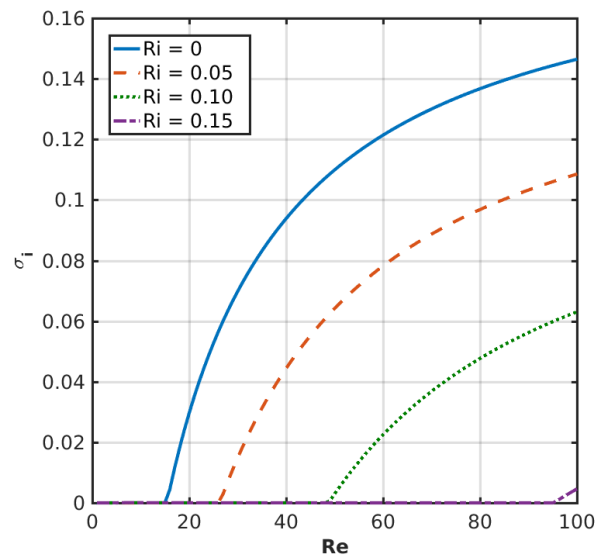


Figura 4.15: Variação da maior taxa de amplificação mais instável em função do número de Reynolds para a camada de mistura estratificada.

A partir dos resultados gerados pelo caso homogêneo, buscou-se investigar como a estratificação afetava o número de Reynolds crítico, assim como o crescimento da taxa de amplificação e número de onda mais instável. Neste caso, conforme mais intensa a estratificação, maior se tornava o número de Reynolds crítico, conforme se observa nas figuras 4.14 e 4.15. O aumento no número de Richardson acarretou um aumento conjunto do número de onda crítico para início da instabilidade assim como a taxa de amplificação. Observa-se que as curvas geradas de α e σ_i possuem a mesma taxa de variação.

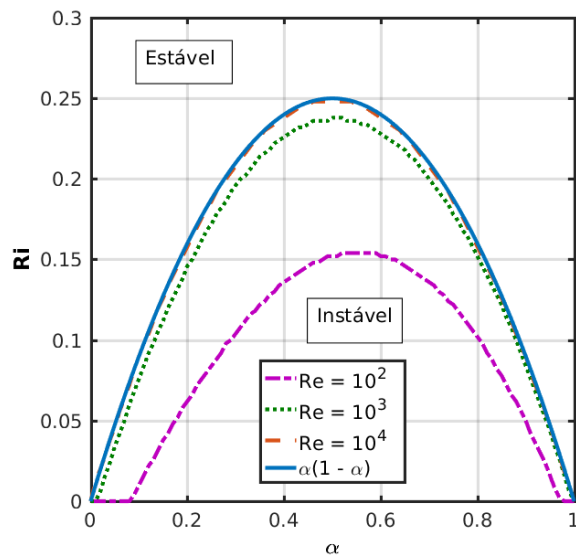


Figura 4.16: Variação da curva de estabilidade neutra de Ri em função de α para $Re = 10^2$, 10^3 e 10^4 .

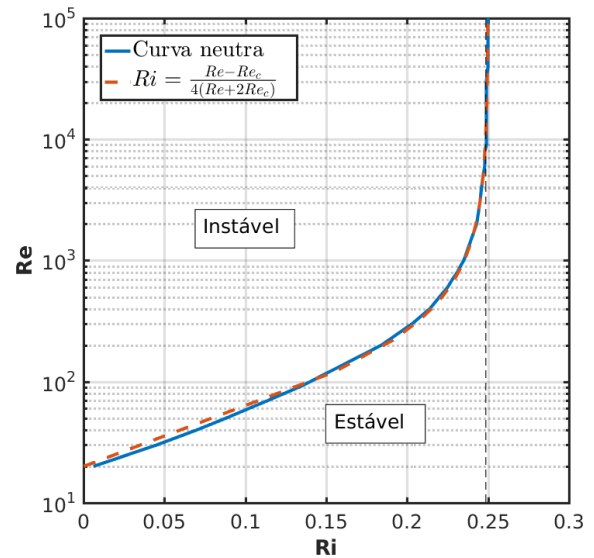


Figura 4.17: Curva de estabilidade neutra do número de Richardson em função do número de Reynolds.

O gráfico da figura 4.16 mostra o mesmo estudo feito na figura 4.6 para o caso invíscido, dessa vez variando o número de Reynolds para $Re = 10^2$, $Re = 10^3$ e $Re = 10^4$. Neles, se observa como a região de instabilidade diminui conforme o Re é diminuído. Este comportamento é fisicamente coerente uma vez que a viscosidade, neste caso, atua de forma a dissipar as perturbações para determinadas condições de estratificação. Quando $Re = 10^4$, os resultados mostram convergência com o resultado analítico ($Ri = \alpha(1 - \alpha)$), obtendo resultados mais precisos que o invíscido. Conforme discutido anteriormente, isto se deve ao fato de a viscosidade eliminar a ocorrência de singularidades.

Os valores de Re_c foram plotados em um gráfico em função de Ri , conforme figura 4.17, onde se observa que a variação de Re_c sugere uma variação inversamente proporcional a Ri . Como na equação de Orr-Sommerfeld o número de Re atua de forma a produzir um comportamento assintótico, pode-se propor um modelo semi-empírico para a condição de estabilidade da forma $Ri > (Re - Re_c)/(4Re + C)$, onde C é uma constante e $Re_c = 20$, conforme caso homogêneo. Esta equação deverá possuir assíntota em $Ri = \frac{1}{4}$ quando $Re \rightarrow \infty$ e atender à condição $Re < 20$ quando $Ri = 0$. Dessa forma, obteve-se a seguinte condição para estabilidade após a regressão, realizada com intervalo de confiança de 95% e coeficiente de correlação $R^2 = 1.0000$:

$$Ri > \frac{Re - Re_c}{4(Re + 2Re_c)}, \quad (4.1)$$

que corresponde à linha tracejada na figura 4.17. Verifica-se que, quando $Ri = 0$, obtém-se que $Re < 20$, conforme seção anterior.

Efeito do Re nas instabilidades de \mathcal{KH}

Nos campos de vorticidade (figura 4.18), se observam os primeiros modos instáveis para $Ri = 0$ (caso homogêneo), $Ri = 0.05$, $Ri = 0.10$ e $Ri = 0.15$. Nota-se que o primeiro modo instável perde intensidade na vorticidade conforme a estratificação se torna mais intensa. No que é concernente à topologia do vórtice formado, este tende a se tornar mais alongado e vertical com a diminuição do Ri . Há um aumento da vorticidade do primeiro modo instável conforme Ri se aproxima do valor crítico de $1/4$.

4.3.3 Camada de mistura com espessura variável ($Ri > 0$ e $0 < R_\rho$)

A seguir serão feitas considerações sobre o caso da camada cisalhante estratificada de espessura variável ($0 < R_\rho < \infty$). Primeiramente serão desenvolvidos estudos analíticos a partir da equação de Taylor-Goldstein que darão embasamento para os experimentos numéricos. Em seguida, foram gerados resultados numéricos invíscidos de forma a verificar os resultados analíticos, tomando novamente $Re = 10^6$. Finalmente, serão expostos estudos sobre a influência do número de Reynolds e sua relação com a estratificação e espessura variável.

Resultados analíticos

A condição de estabilidade de $Ri > \frac{1}{4}$, vista no capítulo 2, pode ser demonstrada a partir da equação de Taylor-Goldstein, assumindo as devidas hipóteses sobre o escoamento de base. Para um meio monodisperso, esta equação assume a seguinte forma:

$$(\hat{v}_{yy} - \alpha^2 \hat{v}) - \frac{\bar{u}_{yy}}{\bar{u} - c} \hat{v} + Ri \frac{\bar{\varphi}_y}{(\bar{u} - c)^2} \hat{v} = 0. \quad (4.2)$$

Realizando a mudança de variáveis dada por:

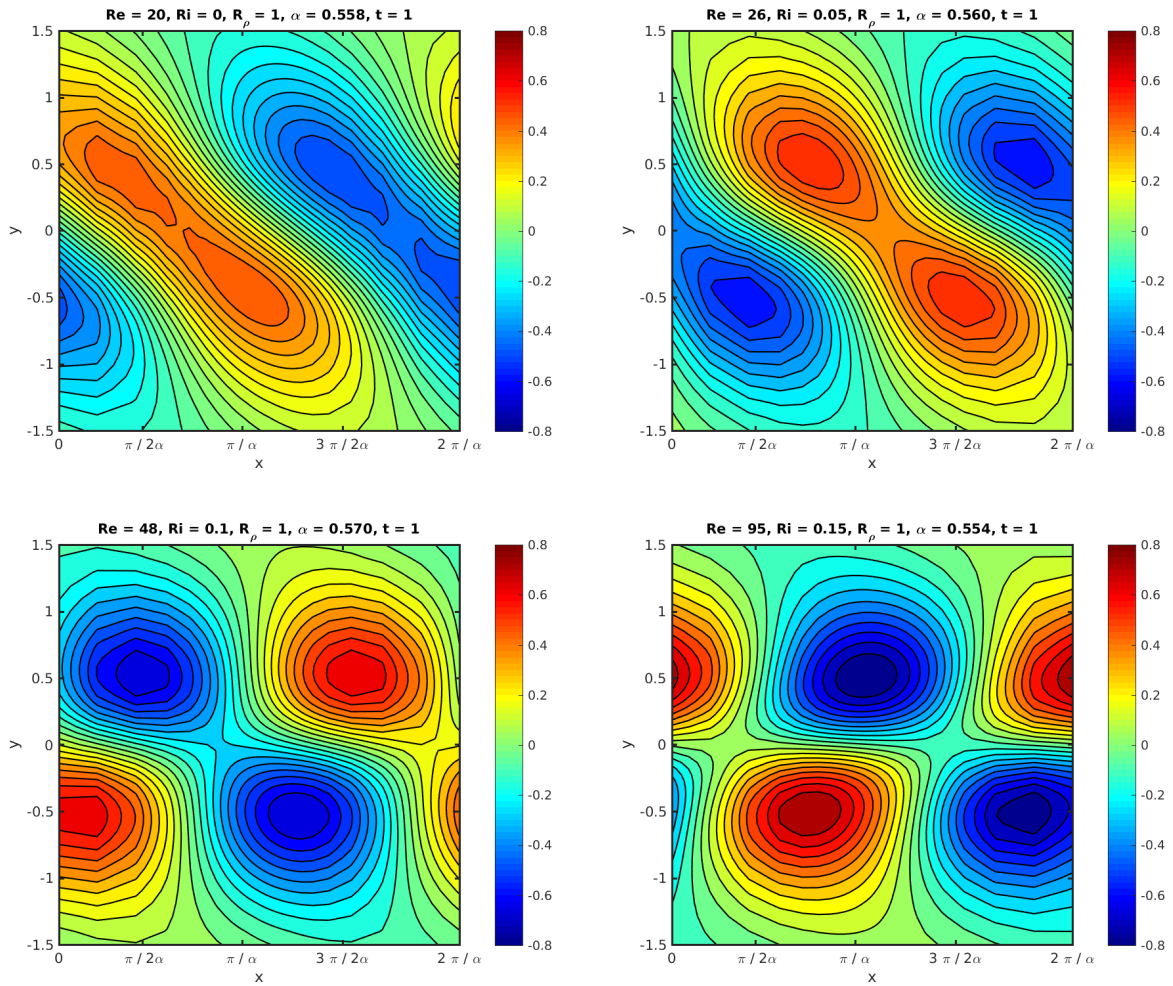


Figura 4.18: Variação do campo de vorticidade para o escoamento cisalhante estratificado para o primeiro modo instável com o aumento do Ri .

$$\hat{v} = (\bar{u} - c)^{1/2} \xi \quad (4.3)$$

e derivando em relação a y , obtém-se:

$$\hat{v}_{yy} = (\bar{u} - c)^{1/2} \xi_{yy} + \frac{\bar{u}_y \xi_y + \xi \bar{u}_{yy}}{(\bar{u} - c)^{1/2}} - \frac{1}{4} \frac{\xi \bar{u}_y^2}{(\bar{u} - c)^{3/2}}. \quad (4.4)$$

Substituindo na equação de Taylor-Goldstein chega-se a:

$$\frac{d}{dy} \left\{ (\bar{u} - c) \xi_y \right\} - \left\{ \alpha^2 (\bar{u} - c) + \frac{\bar{u}_{yy}}{2} + \frac{\bar{u}_y^2 / 4 - Ri \bar{\varphi}_y}{\bar{u} - c} \right\} \xi = 0. \quad (4.5)$$

Integrando esta equação entre $y = -L_{max}$ e $y = L_{max}$ e multiplicando-se pelo conjugado com-

plexo ξ^* , obtém-se, para o primeiro termo da equação 4.5:

$$\int_{-L_{max}}^{+L_{max}} \frac{d}{dy} \{(\bar{u} - c)\xi_y\} \xi^* dy = \int_{-L_{max}}^{+L_{max}} \left[\frac{d}{dy} \{(\bar{u} - c)\xi_y \xi^*\} - (\bar{u} - c)\xi_y \xi_y^* \right] dy = - \int_{-L_{max}}^{+L_{max}} (\bar{u} - c)|\xi_y|^2 dy. \quad (4.6)$$

Substituindo este termo e resolvendo para o restante da equação 4.5, obtém-se:

$$\int_{-L_{max}}^{L_{max}} \frac{Ri\bar{\varphi}_y - \bar{u}_y^2/4}{\bar{u} - c} |\xi|^2 dy = \int_{-L_{max}}^{L_{max}} (\bar{u} - c) \{|\xi_y|^2 + \alpha^2 |\xi|^2\} dy + \frac{1}{2} \int_{-L_{max}}^{L_{max}} \bar{u}_{yy} |\xi|^2 dy. \quad (4.7)$$

Para os passos seguintes, utiliza-se a identidade dada por:

$$\frac{1}{\bar{u} - c} = \frac{\bar{u} - c^*}{|\bar{u} - c|^2} = \frac{\bar{u} - c_r + ic_i}{|\bar{u} - c|^2}. \quad (4.8)$$

Tomando-se a parte imaginária da equação 4.7, obtém-se:

$$c_i \int_{-L_{max}}^{+L_{max}} \frac{Ri\bar{\varphi}_y - \bar{u}_y^2/4}{|\bar{u} - c|^2} |\xi|^2 dy = -c_i \int_{-L_{max}}^{+L_{max}} \{|\xi_y|^2 + \alpha^2 |\xi|^2\} dy. \quad (4.9)$$

Para haver estabilidade, é necessário que $c_i < 0$. Como o termo da direita é sempre positivo, a condição de estabilidade requererá que o termo da esquerda seja positivo. Para tanto, a seguinte condição deverá ser satisfeita:

$$Ri\bar{\varphi}_y - \bar{u}_y^2/4 > 0, \quad (4.10)$$

conhecida como condição Howard-Miles. Substituindo as derivadas dos escoamentos de base, dadas, respectivamente, por $\bar{\varphi}_y = R_\rho \operatorname{sech}^2(R_\rho y)$ e $\bar{u}_y = \operatorname{sech}^2 y$ e isolando-se Ri , obtém-se:

$$Ri > \frac{1}{4R_\rho} \frac{\operatorname{sech}^4(y)}{\operatorname{sech}^2(R_\rho y)}. \quad (4.11)$$

A função dada pelo lado direito da equação 4.11 possui um mínimo em $y = 0$ (correspondendo às coordenadas dos pontos de inflexão dos escoamentos de base estudados), assumindo o valor da unidade. Isto indica que o escoamento se tornará instável na região do ponto de inflexão do

perfil de base antes de afetar o restante do domínio $-L_{max} < y < L_{max}$. Dessa forma, a condição para estabilidade será dada por:

$$Ri > \frac{1}{4R_\rho}, \quad (4.12)$$

conforme queria-se demonstrar. Esta equação se reduz à condição clássica de que $Ri > 1/4$ se $R_\rho = 1$. Para camadas de mistura intensamente estratificadas ($R_\rho \ll 1$), a condição 4.12 tenderá ao infinito, mostrando que um escoamento turbulento estratificado pode persistir para $Ri \gg 1$. No caso de camadas de mistura fracamente estratificadas ($R_\rho \gg 1$), um escoamento com $Ri \ll 1$ poderá facilmente se laminarizar. Cabe salientar que a condição 4.12 é invariante para translações do escoamento de base do perfil de concentrações, como é o caso de escoamentos com sedimentação. Tipicamente estes perfis assumem uma equação da forma $\bar{\varphi}(y) = A + \tanh[R_\rho(y + \varepsilon)]$, onde A é uma constante e ε o deslocamento entre os perfis.

Esta dedução mostra que é possível, em um meio intensamente estratificado com $Ri > \frac{1}{4}$, haver instabilidades para determinadas condições de escoamento. Conforme a equação 4.12, dado que $R_\rho = \tilde{\delta}_u/\tilde{\delta}_\varphi$, o Richardson necessário para estabilidade será tanto maior quanto maior for a espessura da camada de sedimentos $\tilde{\delta}_\varphi$ em relação à espessura da camada de cisalhamento $\tilde{\delta}_u$. Conforme mencionado por Galperin *et al.* (2007)[22], na natureza é possível encontrar números de Richardson próximos a 1 antes do escoamento se laminarizar. Outros autores, tais como Monin e Yaglom (1971)[42], Yamamoto (1975)[37] e Lettau (1979)[37], sugerem que um número de Richardson crítico não existe. Analisando a expressão 4.12 se observa que de fato isto pode ocorrer: caso R_ρ se aproxime de zero, o número de Richardson necessário para estabilidade tenderá ao infinito, o que concorda com a proposição destes autores, reservadas as condições necessárias.

Para meios polidispersos, é possível mostrar que a equação de Taylor-Goldstein assume a seguinte forma:

$$(\hat{v}_{yy} - \alpha^2 \hat{v}) - \frac{\bar{u}_{yy}}{\bar{u} - c} \hat{v} + \sum_{k=1}^N Ri_k \frac{\bar{\varphi}_{k_y}}{(\bar{u} - c)^2} \hat{v} = 0. \quad (4.13)$$

Sendo assim, a condição de Howard-Miles (equação 4.10) pode ser generalizada de maneira

análoga para N fases dispersas:

$$\sum_{k=1}^N Ri_k \bar{\varphi}_{k_y} - \bar{u}_y^2/4 > 0, \quad (4.14)$$

onde $\bar{\varphi}_k = A_k + \tanh(R_k y)$, sendo A_k constantes. Substituindo as derivadas na equação 4.14, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^N Ri_k > \frac{\text{sech}^4 y}{4 \sum_{k=1}^N R_k \text{sech}^2(R_k y)}. \quad (4.15)$$

Novamente, a equação 4.15 possui um mínimo em $y = 0$, assumindo o valor da unidade. Dessa forma, obtém-se a desejada condição suficiente para estabilidade:

$$\sum_{k=1}^N Ri_k > \frac{1}{4 \sum_{k=1}^N R_k}. \quad (4.16)$$

A condição 4.16 pode ser reduzida à condição 4.12 através de parâmetros representativos dos sedimentos dispersos. Pode-se assumir um número de Richardson e uma espessura relativa das camadas de sedimentos de tal forma que $Ri = \sum_{k=1}^N Ri_k$ e $R_\rho = \sum_{k=1}^N R_k$. Dessa forma, no estudo da estabilidade hidrodinâmica de escoamentos estratificados, apenas o número de Richardson equivalente dos sedimentos dispersos é relevante, podendo-se simplificar a sua análise. Esta hipótese deixa de ser válida em ambientes com forte difusão e em que a sedimentação passa a ter papel relevante na formação de instabilidades.

Caso invíscido

A área da região de instabilidade para o número de Richardson apresentou comportamento inversamente proporcional a R_ρ , conforme figura 4.19, onde está plotada a curva neutra de Ri em função do número de onda α para $1/2 \leq R_\rho \leq 2$. Nota-se que a parábola tende a se deslocar para a esquerda conforme R_ρ aumenta, o que mostra a tendência do número de onda mais instável tender a zero. Analogamente, conforme R_ρ diminui, o ponto de máximo da parábola desloca-se para a direita, fazendo α tender a 1. Dessa forma, observa-se que a coordenada em α correspondente ao máximo da parábola obedece a relação dada por:

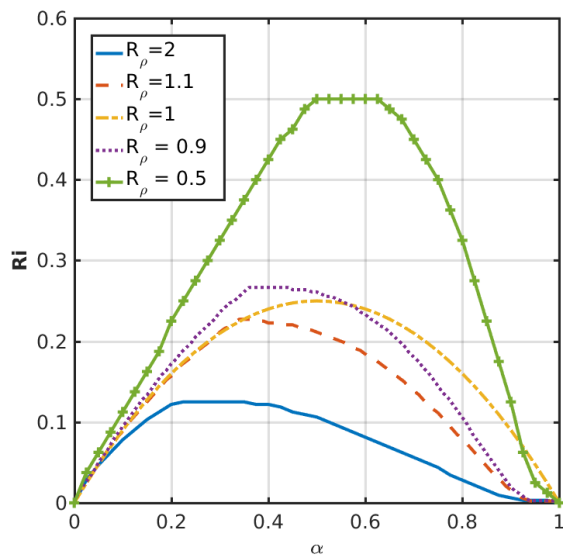


Figura 4.19: Variação da curva de estabilidade neutra para o Ri para diferentes R_ρ .

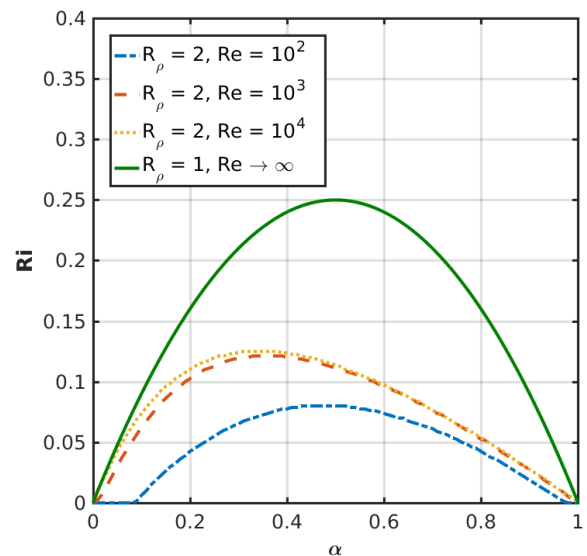


Figura 4.20: Variação da curva de estabilidade neutra para o Ri e $R_\rho = 2$ para diferentes Re .

$$\alpha_c = \alpha_c(R_\rho) = \frac{1}{1 + R_\rho}. \quad (4.17)$$

Este comportamento pode ser sintetizado da seguinte forma;

- $\lim_{R_\rho \rightarrow 0} \alpha_c(R_\rho) = 1$: quando R_ρ atinge magnitudes diminutas, por exemplo em uma situação que a camada dispersa de concentrações é muito espessa, o comprimento de onda dos modos instáveis se torna pequeno;
- $\lim_{R_\rho \rightarrow \infty} \alpha_c(R_\rho) = 0$: quando R_ρ assume valores muito elevados, o comprimento de onda das perturbações cresce indefinidamente, uma vez que este é inversamente proporcional ao número de onda α .

Na figura 4.21 se observa como a variação de R_ρ afeta o decréscimo da taxa de amplificação em função do número de Richardson. Conforme já visto na figura 4.19, R_ρ se mostrou inversamente proporcional ao Ri crítico, decrescendo proporcionalmente conforme foi variado e mantendo a máxima taxa de amplificação para $Ri = 0$ (caso sem estratificação). Paralelamente, para o número de onda do modo mais instável respectivo (figura 4.22), para $R_\rho < 1$ a concavidade da curva gerada tornou-se positiva, aumentando o número de onda com a variação de Ri . Para $R_\rho > 1$, a concavidade tornou-se negativa. Em ambos casos a lei de variação do

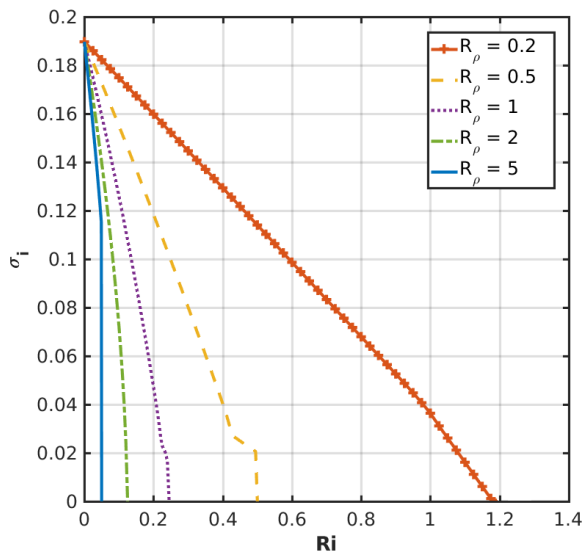


Figura 4.21: Variação da maior taxa de amplificação em função de Ri para diferentes R_ρ .

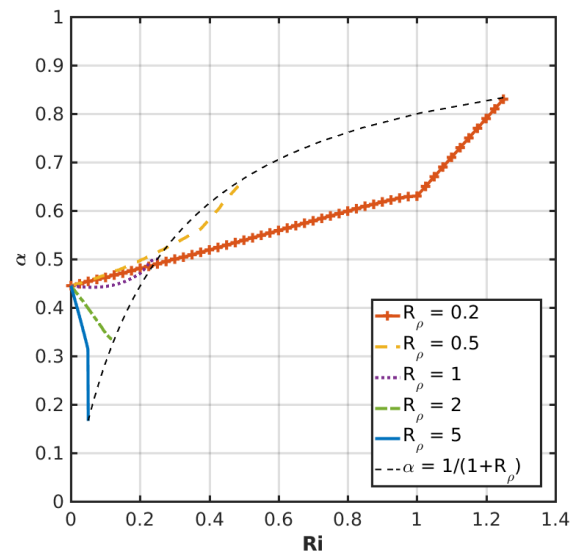


Figura 4.22: Variação do número de onda mais instável em função de Ri para diferentes R_ρ .

modo mais instável para o Ri crítico obedeceu à equação 4.17, representada através da linha tracejada. Todos os modos mais instáveis observados consistiram em \mathcal{KH} , apesar de haverem modos menos instáveis de \mathcal{H} para números de onda maiores.

Influência do número de Reynolds

Quando os efeitos viscosos são levados em conta através do número de Reynolds, a curva de estabilidade neutra do número de Richardson apresenta o mesmo comportamento assintótico já observado para o caso em que $R_\rho = 1$. Quando $R_\rho = 2$, a área da região de instabilidade diminui conforme o Re diminui, conforme a figura 4.20. Nota-se que a curva possui seu máximo deslocado para a direita, correspondendo portanto a um aumento do número de onda mais instável, também já observado no caso homogêneo e estratificado.

Através da seleção do número de onda mais instável, gerou-se a curva de estabilidade neutra de Ri em função de R_ρ para diferentes Re (figura 4.23). Observa-se que conforme $Re \rightarrow \infty$, a curva de estabilidade apresentou comportamento assintótico como esperado, diminuindo a região de instabilidade com a diminuição de Re . Para $Re = 10^6$, a curva gerada correspondeu à condição 4.12, estando os resultados numéricos coerentes com os analíticos.

Na figura 4.24 encontram-se as curvas de estabilidade neutra de Re em função de Ri para

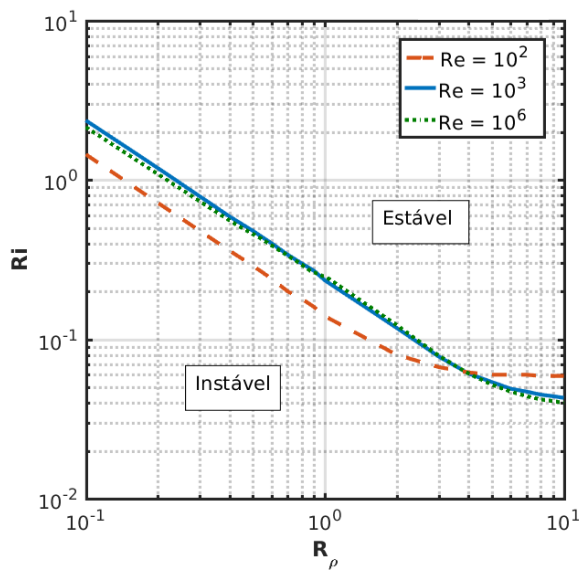


Figura 4.23: Variação da curva de estabilidade neutra de Ri em função R_ρ para $Re = 10^2, 10^3$ e 10^6 .

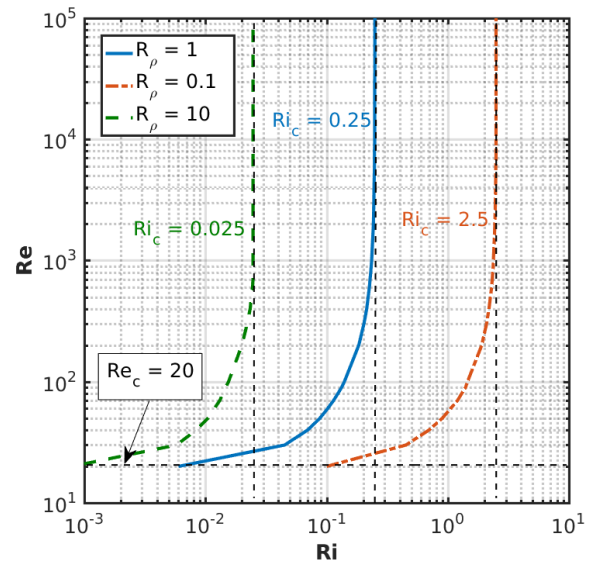


Figura 4.24: Variação da curva de estabilidade neutra de Re em função de Ri para diferentes R_ρ .

diferentes R_ρ , incluindo o estudo realizado para a camada de mistura estratificada com $R_\rho = 1$. A variação de R_ρ deslocou as assíntotas verticais das curvas de estabilidade e manteve a assíntota horizontal em $Re = 20$, mostrando consistência com o resultado do caso homogêneo. Combinando as condições 4.18 e 4.12, verificou-se que condição de estabilidade obedece à seguinte equação semi-empírica:

$$Ri > \frac{Re - Re_c}{4(R_\rho Re + 2Re_c)}. \tag{4.18}$$

Esta equação tende a equação 4.12 no limite quando $Re \rightarrow \infty$, conforme é verificado através da regra de L'Hôpital.

Capítulo 5

Conclusões e recomendações

5.1 Conclusões

No presente trabalho, foi realizada análise de estabilidade linear temporal empregando método de colocação de Chebyshev para solução numérica com o objetivo de estudar a influência do número de Reynolds em escoamentos cisalhantes estratificados. Inicialmente, validou-se o código utilizado para o caso homogêneo e estratificado para $R_\rho = 1$, com $Re \rightarrow \infty$, obtendo bons resultados com a bibliografia existente. Em seguida, procedeu-se ao estudo da influência do número de Reynolds nas instabilidades para o caso homogêneo, estratificado e com espessura variável ($0 < R_\rho < \infty$). Neste estudo, foram considerados as máximas taxas de amplificação, números de onda mais instáveis, curvas de estabilidade neutras e os modos mais instáveis através da análise dos campos de vorticidade.

O fenômeno estudado possui um amplo espectro de parâmetros a serem estudados, de forma que se restringiu o estudo a um ambiente não-difusivo com $Sc = 1$, sem sedimentação e monodisperso. Outra dificuldade desta pesquisa consistiu no aparecimento frequente de autovalores espúrios no problema analisado, sendo necessário o emprego de critérios de seleção dos modos mais instáveis. Tendo em vista que a análise de estabilidade linear apenas prevê o surgimento de instabilidades primárias e que estas constituem apenas em condições necessárias para o início da transição para a turbulência, os resultados encontrados podem ser classificados em três comportamentos distintos:

- **Caso homogêneo ($Ri = 0$):** No caso homogêneo, em que não há estratificação no escoamento de maneira que o perfil de concentrações é nulo, o número de Reynolds modificou o modo mais instável e o respectivo número de onda mais instável. Observou-se um Re crítico para início das instabilidades, sendo igual a 20. O número de onda mais instável tendeu a decrescer conforme Re foi aumentado, tendendo a um valor de saturação para $Re \sim 10^4$. Todos modos observados consistiram em \mathcal{KH} ;
- **Caso estratificado ($Ri > 0$ e $R_\rho = 1$):** O número de Reynolds novamente atuou de forma a aumentar o número de onda mais instável, mantendo todas as características do caso homogêneo. O número de Reynolds crítico foi aumentado proporcionalmente ao número de Richardson, sendo estabelecida equação semi-empírica para o seu comportamento. Os primeiros modos instáveis observados consistiram em \mathcal{KH} que perderam intensidade com o aumento de Ri , ocorrendo sua laminarização para $Ri > 1/4$;
- **Caso com espessura variável ($Ri > 0$ e $0 < R_\rho < \infty$):** Inicialmente, para o caso em que se é permitido variar R_ρ (razão entre as espessuras das camadas) no escoamento de base, foi demonstrado a partir da condição de Howard-Miles que é possível haver escoamentos instáveis para $Ri > 1/4$, obedecendo à condição $Ri > 1/4R_\rho$. Os resultados numéricos seguintes confirmaram este comportamento, mostrando também que o número de onda do modo mais instável é inversamente proporcional a R_ρ . Em todos os casos, o modo de \mathcal{KH} permaneceu como o mais instável, apesar de surgirem modos de \mathcal{H} com velocidade de fase diferente de zero mas com menor taxa de amplificação. A condição semi-empírica obtida para o caso estratificado com $R_\rho = 1$ foi generalizada de forma a incluir R_ρ . Finalmente, verificou-se que os resultados gerados podem ser generalizados para o caso de N fases dispersas, incluindo sal e sedimento e escoamentos polidispersos.

As condições para instabilidade, para cada um dos três casos relatados, estão resumidas na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Resumo das condições para surgimento de instabilidades primárias

Caso	Intervalo de Ri e R_ρ	Condição para instabilidade
Homogêneo	$Ri = 0$	$Re > 20$
Estratificado	$Ri > 0$ e $R_\rho = 1$	$Ri < (Re - 20)/[4(Re + 40)]$
Espessura variável	$Ri > 0$ e $0 < R_\rho < \infty$	$Ri < (Re - 20)/[4(R_\rho Re + 40)]$

5.2 Recomendações

Observadas as limitações deste estudo e os resultados alcançados, recomenda-se as seguintes propostas que darão continuidade à esta pesquisa:

- Análise de estabilidade não-linear temporal das perturbações, de maneira a estudar as instabilidades primárias e secundárias, comparando os resultados com a análise linear realizada no presente trabalho;
- Análise de estabilidade linear temporal considerando um ambiente difusivo e duplamente difusivo, com e sem sedimentação de maneira a estudar o efeito do número de Reynolds nas instabilidades observadas;
- Simulação numérica direta dos casos estudados, comparando os modos instáveis observados com os previstos pela teoria linear;
- Experimentos físicos que evidenciem a ocorrência de escoamentos instáveis para $Ri > 1/4$, além de validar os resultados desta dissertação;
- Desenvolvimento de algoritmo eficiente e eficaz que atue na filtragem de autovalores espúrios, possivelmente envolvendo a aplicação de redes neurais e *machine-learning*;
- Estudos analíticos a partir das equações governantes que validem as equações semi-empíricas propostas neste trabalho acerca do comportamento do número de Richardson crítico em função do número de Reynolds;
- Análise de de estabilidade linear espacial das perturbações em escoamentos cisalhantes estratificados, de forma a estudar como os modos instáveis evoluem no espaço;

Referências Bibliográficas

- [1] ALEXAKIS, A. Stratified shear flow instabilities at large richardson numbers. *Physics of Fluids* 21, 5 (2009), 054108.
- [2] ALSINAN, A., MEIBURG, E., AND GARAUD, P. A settling-driven instability in two-component, stably stratified fluids. *Journal of Fluid Mechanics* 816 (2017), 243–267.
- [3] ANDERSON, E., BAI, Z., BISCHOF, C., BLACKFORD, L. S., DEMMEL, J., DONGARRA, J., DU CROZ, J., GREENBAUM, A., HAMMARLING, S., MCKENNEY, A., ET AL. *LAPACK Users' guide*. SIAM, 1999.
- [4] BAGHERI, S., HENNINGSON, D. S., HEPFFNER, J., AND SCHMID, P. J. Input-output analysis and control design applied to a linear model of spatially developing flows. *Applied Mechanics Reviews* 62, 2 (2009).
- [5] BERRUT, J.-P., AND MITTELMANN, H. D. Adaptive point shifts in rational approximation with optimized denominator. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 164 (2004), 81–92.
- [6] BETCHOV, R., AND CRIMINALE, W. O. *Stability of Parallel Flows*, 1 ed. Applied Mathematics and Mechanics 10. Academic Press, 1967.
- [7] BETCHOV, R., AND SZEWCZYK, A. Stability of a shear layer between parallel streams. *Physics of Fluids (1958-1988)* 6, 10 (1963), 1391–1396.
- [8] BHATTACHARYA, P., MANOHARAN, M., GOVINDARAJAN, R., AND NARASIMHA, R. The critical reynolds number of a laminar incompressible mixing layer from minimal composite theory. *Journal of Fluid Mechanics* 565 (2006), 105–114.

- [9] BOURNE, D. Hydrodynamic stability, the chebyshev tau method and spurious eigenvalues. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 15, 6 (2003), 571–579.
- [10] BROWAND, F., AND WINANT, C. Laboratory observations of shear-layer instability in a stratified fluid. *Boundary-Layer Meteorology* 5, 1-2 (1973), 67–77.
- [11] BURNS, P., AND MEIBURG, E. Sediment-laden fresh water above salt water: linear stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics* 691 (2012), 279–314.
- [12] BURNS, P., AND MEIBURG, E. Sediment-laden fresh water above salt water: nonlinear simulations. *Journal of Fluid Mechanics* 762 (2015), 156–195.
- [13] CANUTO, C., QUARTERONI, A., HUSSAINI, M. Y., AND ZANG, T. A. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 1988.
- [14] CHARRU, F. *Hydrodynamic instabilities*, vol. 37. Cambridge University Press, 2011.
- [15] DELONCLE, A., CHOMAZ, J.-M., AND BILLANT, P. Three-dimensional stability of a horizontally sheared flow in a stably stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 570 (2007), 297–305.
- [16] DILL, K., AND BROMBERG, S. *Molecular driving forces: statistical thermodynamics in biology, chemistry, physics, and nanoscience*. Garland Science, 2010.
- [17] DRAZIN, P. G., AND REID, W. H. *Hydrodynamic stability*, 2 ed. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics, Cambridge mathematical library. Cambridge University Press, 2004.
- [18] FARENZENA, B. Análise de estabilidade linear em plumas hipopícnais. Master’s thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, 2016.
- [19] FARENZENA, B. A., AND SILVESTRINI, J. H. Particle-laden hypopycnal stratified shear layer: Linear stability analysis. In *10th ABCM Spring School on Transition and Turbulence* (São José dos Campos - SP, Brazil, 2016).

- [20] FARENZENA, B. A., AND SILVESTRINI, J. H. Linear stability analysis of particle-laden hypopycnal plumes. *Physics of Fluids* 29, 12 (2017), 124102.
- [21] FERREIRA, D. E. T. I. *Análise numérica de uma camada de mistura estavelmente estratificada com efeitos de declividade*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2014.
- [22] GALPERIN, B., SUKORIANSKY, S., AND ANDERSON, P. S. On the critical richardson number in stably stratified turbulence. *Atmospheric Science Letters* 8, 3 (2007), 65–69.
- [23] GEORGIEVSKII, D. Applicability of the squire transformation in linearized problems on shear stability. *Russian Journal of Mathematical Physics* 16, 4 (2009), 478.
- [24] GEYER, W. R., LAVERY, A. C., SCULLY, M. E., AND TROWBRIDGE, J. H. Mixing by shear instability at high reynolds number. *Geophysical Research Letters* 37, 22 (2010).
- [25] HAIGH, S., AND LAWRENCE, G. Symmetric and nonsymmetric holmboe instabilities in an inviscid flow. *Physics of Fluids* 11, 6 (1999), 1459–1468.
- [26] HAZEL, P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 51, 01 (1972), 39–61.
- [27] HESLA, T. I., PRANCKH, F. R., AND PREZIOSI, L. Squire’s theorem for two stratified fluids. *The Physics of fluids* 29, 9 (1986), 2808–2811.
- [28] HOLMBOE, J. On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. *Geophys. Publ.* 24, 67 (1962).
- [29] HORNER-DEVINE, A. R., HETLAND, R. D., AND MACDONALD, D. G. Mixing and transport in coastal river plumes. *Annual Review of Fluid Mechanics* 47 (2015), 569–594.
- [30] HOWARD, L. N. Note on a paper of john w. miles. *Journal of Fluid Mechanics* 10, 4 (1961), 509–512.

- [31] HOYAL, D. C., BURSIK, M. I., AND ATKINSON, J. F. Settling-driven convection: A mechanism of sedimentation from stratified fluids. *Journal of Geophysical Research: Oceans* 104, C4 (1999), 7953–7966.
- [32] JULIEN, P. Y. *Erosion and sedimentation*. Cambridge University Press, 2010.
- [33] JUNIPER, P. M., HANIFI, A., AND THEOFILIS, V. Modal stability theory lecture notes from the flow-nordita summer school on advanced instability methods for complex flows, stockholm, sweden, 2013. *Applied Mechanics Reviews* 66, 2 (2014).
- [34] KOCHAR, G., AND JAIN, R. Note on howard’s semicircle theorem. *Journal of Fluid Mechanics* 91, 3 (1979), 489–491.
- [35] KUNDU, P. K., AND COHEN, I. M. *Fluid Mechanics*, 4 ed. Elsevier, 2008.
- [36] LAWRENCE, G., BROWAND, F. K., AND REDEKOPP, L. The stability of a sheared density interface. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 3, 10 (1991), 2360–2370.
- [37] LETTAU, H. H. Wind and temperature profile prediction for diabatic surface layers including strong inversion cases. *Boundary-Layer Meteorology* 17, 4 (1979), 443–464.
- [38] MAKOV, Y. N., AND STEPANYANTS, Y. A. Note on the paper of kochar & jain on howard’s semicircle theorem. *Journal of Fluid Mechanics* 140 (1984), 1–10.
- [39] MARTINEZ, D. M. V. *Transição à Turbulência na Camada de Mistura Estavelmente Estratificada utilizando Simulação Numérica Direta e Simulação de Grandes Escalas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2006.
- [40] MENDONÇA, M. T. Estabilidade de escoamentos laminares: Teoria linear. *Turbulência* 2 (2003), 245–304.
- [41] MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *Journal of Fluid Mechanics* 19, 04 (1964), 543–556.

- [42] MONIN, A. S., LUMLEY, J. L., AND IAGLOM, A. M. *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence. Vol. 1.* MIT press, 1971.
- [43] MULDER, T., AND ALEXANDER, J. The physical character of subaqueous sedimentary density flows and their deposits. *Sedimentology* 48, 2 (2001), 269–299.
- [44] NASA. Amazon river in the atlantic ocean : Image of the day, 2006.
- [45] NEMEC, W. The dynamics of deltaic suspension plumes. *Geology of deltas* (1995), 31–93.
- [46] PEYRET, R. *Spectral methods for incompressible viscous flow*, vol. 148. Springer Science & Business Media, 2013.
- [47] SCHAFLINGER, U. A short note on squire’s theorem for interfacial instabilities in a stratified flow of two superposed fluids. *Fluid Dynamics Research* 14, 5 (1994), 223–227.
- [48] SCHLICHTING, H., L., G., KRAUSE, E., AND OERTEL, H. J. *Grenzschicht-Theorie*, 10 ed. Springer, 2006.
- [49] SCHMID, P. J., AND BRANDT, L. Analysis of fluid systems: Stability, receptivity, sensitivity lecture notes from the flow-nordita summer school on advanced instability methods for complex flows, stockholm, sweden, 2013. *Applied Mechanics Reviews* 66, 2 (2014), 024803.
- [50] SCHULTE, B., KONOPLIV, N., AND MEIBURG, E. Clear salt water above sediment-laden fresh water: Interfacial instabilities. *Physical Review Fluids* 1, 1 (2016), 012301.
- [51] SEGRE, P. N., LIU, F., UMBANHOWAR, P., AND WEITZ, D. A. An effective gravitational temperature for sedimentation. *Nature* 409, 6820 (2001), 594–597.
- [52] SHARP, D. H. An overview of rayleigh-taylor instability. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12, 1-3 (1984), 3IN111–10IN1018.
- [53] SIMPSON, J. E. *Gravity currents: In the environment and the laboratory.* Cambridge university press, 1997.

- [54] SQUIRE, H. B. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 142, 847 (1933), 621–628.
- [55] TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in MATLAB*, vol. 10. Siam, 2000.
- [56] TURNER, J. S. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, 1979.
- [57] UNGARISH, M. *An introduction to gravity currents and intrusions*. CRC Press, 2009.
- [58] WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*, 2 ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991.
- [59] YOSHIDA, S., OHTANI, M., NISHIDA, S., AND LINDEN, P. Mixing processes in a highly stratified river. *Physical Processes in Lakes and Oceans* (1998), 389–400.
- [60] YU, X., HSU, T.-J., AND BALACHANDAR, S. Convective instability in sedimentation: Linear stability analysis. *Journal of Geophysical Research: Oceans* 118, 1 (2013), 256–272.
- [61] YU, X., HSU, T.-J., AND BALACHANDAR, S. Convective instability in sedimentation: 3-d numerical study. *Journal of Geophysical Research: Oceans* 119, 11 (2014), 8141–8161.