

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
COMISSÃO DE GRADUAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

Raul Viacelli Pontello

**DESENVOLVIMENTO DE UMA ROTINA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE MODAL DE TORRES DE TRANSMISSÃO E
COMPARAÇÃO COM *SOFTWARE* COMERCIAL**

Porto Alegre
Julho de 2019

Raul Viacelli Pontello

**DESENVOLVIMENTO DE UMA ROTINA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE MODAL DE TORRES DE TRANSMISSÃO E
COMPARAÇÃO COM *SOFTWARE* COMERCIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão de
Graduação do Curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos
requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientadora: Letícia Fleck Fadel Miguel

Porto Alegre
Julho de 2019

RAUL VIACELLI PONTELLO

**DESENVOLVIMENTO DE UMA ROTINA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE MODAL DE TORRES DE TRANSMISSÃO E
COMPARAÇÃO COM SOFTWARE COMERCIAL**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pela Banca Examinadora, pela Professora Orientadora e pela Comissão de Graduação do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 16 de Julho de 2019

BANCA EXAMINADORA

Professora Leticia Fleck Fadel Miguel (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Professor Ruy Carlos Ramos de Menezes (UFRGS)
Dr. pela Universitaet Innsbruck Institut Fuer Mechanik

Professor Paulo Sérgio Baumach Lemos (UNISINOS)
MSc. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho aos meus pais, Paulo e Rosângela, e
ao meu irmão, Bruno, pelo eterno incentivo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à professora Letícia Fleck Fadel Miguel pelo apoio, orientação, e disponibilidade prestada em todas as etapas deste trabalho. É com entusiasmo que encerro mais uma etapa da minha vida profissional sob sua orientação.

Agradeço ao professor Ruy Carlos Ramos de Menezes pelas orientações e disponibilidade que sempre mostrou durante a realização desse trabalho.

Agradeço à minha família, a quem também dedico esse trabalho, pelo constante apoio, incentivo, compreensão e orgulho que demonstram pelas minhas conquistas.

Agradeço aos inesquecíveis colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Paulo Lemos, Augusto Borges e Mateus Forcelini pela amizade e pelos ensinamentos.

*“It ain’t about how hard you hit.
It’s about how hard you can get hit and keep moving forward,
how much you can take and keep moving forward.
That’s how winning is done.”*

Rocky Balboa

RESUMO

PONTELLO, R. V. **Desenvolvimento de uma rotina computacional para Análise Modal de Torres de Transmissão e Comparação com *Software* Comercial**. 2019. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Tradicionalmente, têm-se empregado análises estáticas no projeto de estruturas da Engenharia Civil. Embora essa preferência tenha resultados adequados na maioria dos casos, sabe-se que a análise dinâmica ganhará importância com o aumento da esbeltez das estruturas. Torres de transmissão são exemplos típicos de estruturas que demandam métodos que abordem o comportamento dinâmico. Neste contexto, as modelagens computacionais, especialmente através do Método dos Elementos Finitos, têm adquirido cada vez mais importância na abordagem dinâmica dos sólidos. Como primeiro passo para uma análise dinâmica completa, é necessária a realização de uma análise modal. Neste contexto, este trabalho tem como objetivo principal a elaboração de um programa computacional, que utiliza o Método dos Elementos Finitos, para a execução da análise modal de estruturas treliçadas. A linguagem de programação adotada foi Matlab. A rotina computacional desenvolvida é utilizada para a criação das matrizes de massa e de rigidez de estruturas treliçadas com múltiplos graus de liberdade. Os resultados obtidos são as frequências naturais de vibração, os modos de vibração, o desenho da geometria da estrutura e o desenho dos modos de vibração. Os resultados obtidos através do programa desenvolvido em Matlab foram comparados com valores obtidos pelo *software* comercial Ansys, mostrando que a rotina elaborada apresenta valores idênticos ao *software* Ansys, verificando, portanto, o programa desenvolvido.

Palavras-chave: Análise modal, Método dos Elementos Finitos, Estruturas treliçadas, Torre de transmissão de energia.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplo de torres autoportantes.....	13
Figura 1.2 – Exemplo de torres estaiadas.....	14
Figura 3.1 – Graus de liberdade: (a) treliça, (b) sistema massa-mola.....	18
Figura 3.2 – Sistema massa-mola de um grau de liberdade.....	20
Figura 3.3 – Sistema massa-mola de vários graus de liberdade.....	22
Figura 4.1 – Elemento finito de treliça.....	31
Figura 4.2 – Elemento finito de viga.....	31
Figura 4.3 – Ângulos diretores.....	36
Figura 4.4 – Coordenadas globais (XY) e locais (xy).....	37
Figura 4.5 – Esquematização dos graus de liberdade nas matrizes.....	39
Figura 6.1 – Geometria do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.....	42
Figura 6.2 – Primeiro modo de vibração do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab....	44
Figura 6.3 – Segundo modo de vibração do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab....	44
Figura 6.4 – Geometria do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.....	45
Figura 6.5 – Primeiro modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab....	48
Figura 6.6 – Segundo modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab....	49
Figura 6.7 – Terceiro modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.....	49
Figura 6.8 – Geometria do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.....	50
Figura 6.9 – Primeiro modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.....	58
Figura 6.10 – Segundo modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab...	59
Figura 6.11 – Terceiro modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab....	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Propriedade geométricas e mecânicas do primeiro exemplo.....	43
Tabela 6.2 – Comparação dos resultados do primeiro exemplo.....	43
Tabela 6.3 – Propriedade geométricas do segundo exemplo.....	46
Tabela 6.4 – Áreas do segundo exemplo.....	46
Tabela 6.5 – Comparação dos resultados do segundo exemplo.....	47
Tabela 6.6 – Frequências naturais de vibração do segundo exemplo.....	48
Tabela 6.7 – Propriedade geométricas do terceiro exemplo.....	51
Tabela 6.8 – Comparação dos resultados do terceiro exemplo.....	53

LISTA DE SÍMBOLOS

$[\]$	Matriz
$[\]^T$	Matriz transposta
$\{ \}$	Vetor coluna
$\det(A)$	Determinante da matriz A
A	Área
E	Módulo de elasticidade
ρ	Massa específica
t	Tempo
X, Y, Z	Eixos do sistema de coordenadas
X	Amplitudes de movimento no eixo X (modos de vibração)
$x(t)$	Deslocamento no eixo X no instante t
$x'(t)$	Velocidade no eixo X no instante t
$x''(t)$	Aceleração no eixo X no instante t
m	Massa
k	Rigidez
c	Coefficiente de amortecimento
$F(t)$	Força externa aplicada no instante t
ω_n	Frequência natural de vibração
φ	Ângulo de fase

i, j	Índices
n	Número de graus de liberdade
p	Número de elementos finitos
$[a, b]$	Intervalo fechado entre a e b
\in	Pertinência

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA.....	13
2 METODOLOGIA DE PESQUISA	15
2.1 PROBLEMA DE PESQUISA.....	15
2.2 OBJETIVOS.....	15
2.2.1 Objetivo principal.....	15
2.2.2 Objetivos secundários.....	15
2.3 PRESSUPOSTOS.....	16
2.4 DELIMITAÇÕES.....	16
2.5 LIMITAÇÕES.....	16
3 REVISÃO DOS MECANISMOS DE VIBRAÇÃO MECÂNICA	17
3.1 CONCEITOS GERAIS.....	17
3.1.1 Graus de liberdade.....	17
3.1.1.1 Graus de liberdade livres e restringidos.....	18
3.1.2 Classificação das vibrações.....	19
3.1.3 Análise modal.....	19
3.2 SISTEMA UNIDIMENSIONAL DE UM GRAU DE LIBERDADE.....	20
3.2.1 Equação de movimento.....	20
3.2.2 Análise modal.....	21
3.3 SISTEMA UNIDIMENSIONAL DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	22
3.3.1 Equação de movimento.....	22
3.3.2 Matrizes de massa e de rigidez.....	23
3.3.3 Análise modal.....	23
3.4 SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	26
3.4.1 Equação de movimento.....	26
3.4.2 Matrizes de massa e de rigidez.....	27
3.4.3 Análise modal.....	27
4 REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	29
4.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	29
4.2 CONCEITO GERAIS.....	29
4.2.1 Objetivo do método.....	29
4.2.2 Modelos estruturais.....	29
4.2.2.1 Modelo unidimensional.....	30

4.2.2.1.1 Elemento finito de treliça.....	30
4.2.2.1.2 Elemento finito de viga.....	31
4.3 MATRIZES DE MASSA E DE RIGIDEZ.....	32
4.3.1 Numeração dos graus de liberdade.....	32
4.3.1.1 Definição dos graus de liberdade de cada elemento finito.....	33
4.3.2 Matrizes em coordenadas locais.....	34
4.3.3 Matriz de rotação.....	35
4.3.4 Matrizes em coordenadas globais.....	36
4.3.5 Matrizes totais.....	37
4.3.6 Condições de contorno.....	39
5 ROTINA COMPUTACIONAL.....	40
5.1 LINGUAGEM ADOTADA.....	40
5.2 FUNCIONALIDADES DA ROTINA.....	40
5.3 O ALGORÍTIMO DA ROTINA DESENVOLVIDA.....	41
5.3.1 Entrada de dados.....	41
5.3.2 Saída de dados.....	41
6 ESTUDO DE CASOS.....	42
6.1 PRIMEIRO EXEMPLO.....	42
6.2 SEGUNDO EXEMPLO.....	45
6.3 TERCEIRO EXEMPLO.....	50
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	61
7.1 CONCLUSÕES.....	61
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	61
REFERÊNCIAS.....	62
APÊNDICE A.....	63

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

Dada a crescente importância que as questões energéticas têm ganho nos últimos anos, percebe-se também um aumento na preocupação de como transportar a energia necessária. Entre os métodos adotados no transporte, destacam-se as linhas de transmissão (LT), compostas por torres, cabos e isoladores. As torres de transmissão de energia podem ser classificadas em dois tipos: torres autoportantes e torres estaiadas.

Como o próprio nome diz, as torres autoportantes se sustentam sozinhas através de suas “pernas”. São estruturas mais rígidas e, portanto, apresentam uma análise estrutural menos sofisticada (TROIAN, 2018). A Figura 1.1 mostra dois exemplos de torres autoportantes.



Figura 1.1 – Exemplos de torres autoportantes.

As torres estaiadas, diferentemente das torres autoportantes, não apresentam estabilidade apenas com seu corpo principal. Elas necessitam de estruturas complementares, chamadas de estais, para obter sustentação. Uma comparação entre os dois tipos de torres mostra que as estaiadas são mais flexíveis e, assim, sua análise estrutural é mais complexa (TROIAN, 2018).

A Figura 1.2 mostra dois exemplos de torres estaiadas.

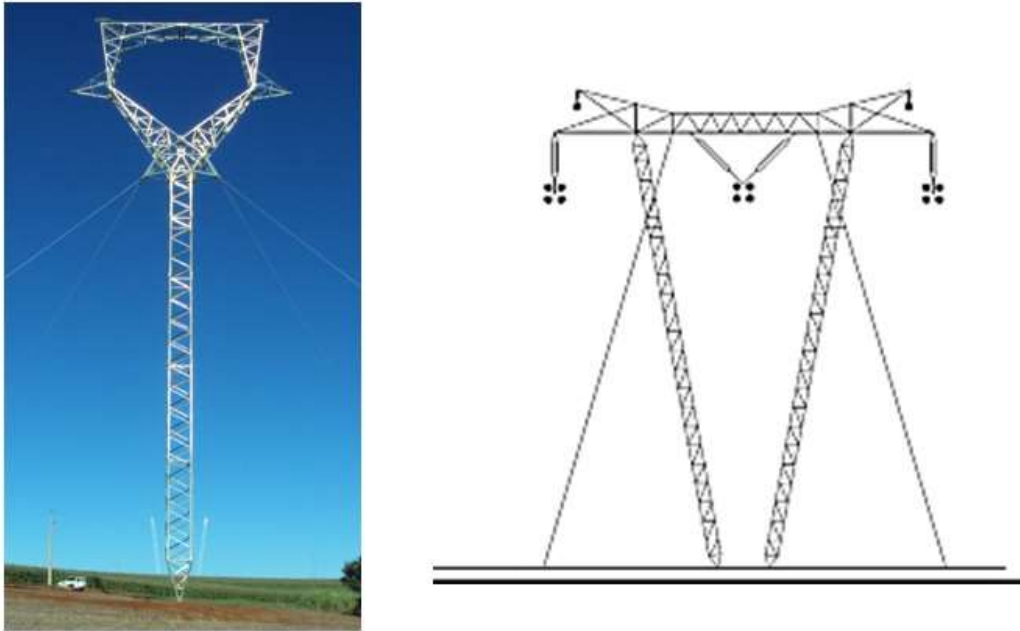


Figura 1.2 – Exemplos de torres estaiadas.

Neste trabalho, apenas as torres autoportantes serão estudadas. Dois tipos de análises podem ser aplicados no estudo de torres autoportantes: análise estática e análise dinâmica. Embora a primeira abordagem seja suficiente para vários casos, sabe-se que a segunda será mais eficiente com o aumento da altura das torres pois movimentos oscilatórios estarão presentes. Ou seja, efeitos dinâmicos irão predominar sobre os estáticos com o aumento da esbeltez das torres.

Neste trabalho, será realizada uma análise modal, a qual representa a primeira etapa de uma análise dinâmica completa. Para esta finalidade, uma rotina computacional será elaborada no *software* Matlab. Para fins de verificação da rotina desenvolvida, os resultados serão comparados com os obtidos através do *software* comercial Ansys para alguns estudos de caso.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA

2.1 PROBLEMA DE PESQUISA

A questão da pesquisa é a seguinte: para o estudo da vibração de uma torre de transmissão autoportante, quais os resultados obtidos com a execução de uma análise modal através de uma rotina computacional?

2.2 OBJETIVOS

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e estão descritos a seguir.

2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho é o desenvolvimento de uma rotina computacional em Matlab para a realização de uma análise modal de uma torre de transmissão autoportante através do Método dos Elementos Finitos.

2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários do trabalho são a determinação dos modos de vibração e das frequências naturais de vibração de uma torre de transmissão autoportante. Outro objetivo secundário é o uso do *software* comercial Ansys para realização da análise modal e comparação de resultados, a fim de verificar a rotina elaborada.

2.3 PRESSUPOSTOS

Como pressupostos da pesquisa, admitiram-se os seguintes:

- a) Efeitos não lineares serão desprezados. Ou seja, efeitos de não linearidade geométrica e do material serão desconsiderados;
- b) O solo será considerado um corpo rígido, de modo a não haver deformações na base da torre;
- c) As barras da torre serão modeladas como elementos de treliça com rótulas perfeitas. Os apoios da torre no solo serão modelados como rótulas perfeitas. As fundações da torre não serão estudadas;
- d) Apenas as barras que constituem a torre serão consideradas na análise. Cabos condutores, isoladores, cabos para-raios, chapas de ligação e parafusos serão desconsiderados no modelo.

2.4 DELIMITAÇÕES

A pesquisa ficou delimitada ao desenvolvimento de uma ferramenta computacional em Matlab para a análise modal de uma torre de transmissão autoportante modelada com elementos finitos de treliça.

2.5 LIMITAÇÕES

As limitações da pesquisa se referem aos próprios pressupostos adotados. Ou seja, a matriz de massa e a matriz de rigidez da torre obtidas com a rotina computacional são apenas aproximações das matrizes reais.

3 REVISÃO DOS MECANISMOS DE VIBRAÇÃO MECÂNICA

O primeiro passo para a execução de uma análise modal em uma torre de transmissão autoportante é exatamente o conhecimento das propriedades que influenciam o comportamento modal da torre. Para tal, os processos de vibração mecânica devem ser completamente compreendidos. Com esse objetivo, apresenta-se neste capítulo uma breve revisão sobre os mecanismos de vibração mecânica.

3.1 CONCEITOS GERAIS

De acordo com RAO (2010), qualquer movimento que se repete em um certo intervalo de tempo é classificado como vibração ou oscilação. A Teoria de Vibrações estuda os movimentos oscilatórios e as forças que os influenciam.

Existem três componentes que formam o sistema vibratório: massa, mola e amortecedor. O movimento ocorre através de transferências de energias entre os mesmos. Enquanto os elementos de massa e mola armazenam energia cinética e potencial, respectivamente, o amortecedor é o componente responsável pela dissipação de energia do sistema.

3.1.1 Graus de liberdade

O número de graus de liberdade de um sistema é definido como a menor quantidade de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente o movimento de um sistema em vibração em qualquer tempo (RAO, 2010)

Em um sistema de coordenadas tridimensional, cada nó que constitui o sistema estrutural pode ter no máximo 6 graus de liberdade, 3 de translação e 3 de rotação. Em um sistema bidimensional, cada nó que constitui o sistema estrutural pode ter no máximo 3 graus de liberdade, 2 de translação e 1 de rotação. Deve-se levar em conta a vinculação do sistema, a qual determinará as restrições que poderão ocorrer aos movimentos. Ou seja, os graus de

liberdade são determinados pela análise da vinculação existente. Esses conceitos serão abordados novamente no Capítulo 4, o qual detalhará a quantidade exata de graus de liberdade por nó.

3.1.1.1 Graus de liberdade livres e restringidos

A vinculação existente criará os graus de liberdade livres e restringidos. Esses conceitos serão explicados através da Figura 3.1, em que os graus de liberdade estão representados nas setas vermelhas.

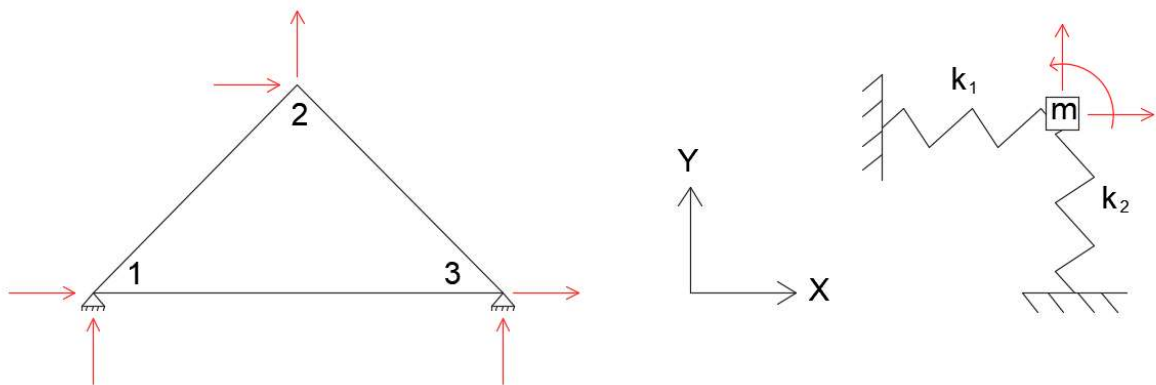


Figura 3.1 – Graus de liberdade: (a) treliça, (b) sistema massa-mola.

Na Figura 3.1(a), há uma treliça bidimensional formada por 3 barras e 3 nós. Como será visto no Capítulo 4, estruturas bidimensionais treliçadas têm 2 graus de liberdade de translação por nó sem haver graus de liberdade de rotação. Portanto, há 6 graus de liberdade possíveis para toda a estrutura pois há 3 nós. Devido à vinculação existente nos nós 1 e 3, os mesmos estão impedidos de ter translação nas direções X e Y. O nó 2, contudo, não possui vinculação e está livre para se deslocar. Ou seja, existem 4 graus de liberdade restringidos (nó 1 e 3) e 2 graus de liberdade livres (nó 2).

Na Figura 3.1(b), tem-se um sistema massa-mola bidimensional com duas molas e uma massa. A massa não possui restrições de movimento e, portanto, ela pode ter translação nas direções X e Y e rotação em torno do eixo Z. Assim, têm-se 3 graus de liberdade livres e nenhum restringido.

3.1.2 Classificação das vibrações

As vibrações podem ser classificadas do seguinte modo:

- a) Vibração Livre: Vibração em que nenhuma força externa é aplicada ao sistema;
- b) Vibração forçada: Vibração em que forças externas são aplicadas ao sistema;
- c) Vibração não amortecida: Vibração em que a dissipação de energia pelos amortecedores é desprezada;
- d) Vibração amortecida: Vibração em que a dissipação de energia pelos amortecedores não é desprezada.

Nesta pesquisa, somente o amortecimento viscoso será considerado. Ou seja, a perda de energia ocorre devido à vibração do sistema estrutural em um meio fluido de modo que a força aplicada no sistema estrutural devido ao amortecimento é proporcional à velocidade dele.

3.1.3 Análise modal

Uma análise modal possui dois objetivos principais:

- a) Obter as frequências naturais de vibração;
- b) Obter os modos de vibração.

A determinação desses elementos depende exclusivamente da massa e da rigidez do sistema estrutural, de modo que o amortecimento e as forças externas aplicadas não terão influência na análise modal. Ou seja, as frequências naturais de vibração e os modos de vibração são propriedades intrínsecas do sistema estrutural. As frequências naturais de vibração correspondem as frequências de vibração de um sistema sujeito a uma vibração livre. De acordo com RAO (2010), um sistema estrutural com n graus de liberdade livres terá n frequências naturais de vibração e n modos de vibração. Os modos de vibração representam a forma como o sistema vibra em suas frequências naturais de vibração.

3.2 SISTEMA UNIDIMENSIONAL DE UM GRAU DE LIBERDADE

3.2.1 Equação de movimento

A Figura 3.2 mostra um sistema massa-mola unidimensional com amortecimento viscoso, de um grau de liberdade livre descrito pelo eixo X.

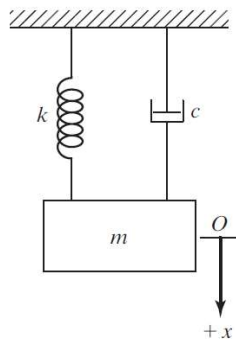


Figura 3.2 – Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade livre.

Fonte: Extraído de RAO (2010)

De acordo com RAO (2010), a vibração forçada amortecida é descrita pela Equação (3.1):

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Em que:

- $x(t)$, $x'(t)$ e $x''(t)$ são, respectivamente, a posição, velocidade e aceleração da massa no tempo t [m, m/s, m/s²];
- m é a massa do sistema [kg];
- k é a rigidez do sistema [N/m];
- c é o coeficiente de amortecimento do sistema [Ns/m];
- $F(t)$ é a força externa aplicada no tempo t [N];
- t é o tempo [s].

A resolução da Equação (3.1) fornecerá as posições da massa ao longo do tempo e, assim, o movimento estará completamente descrito. Como se deseja realizar uma análise modal, as forças externas aplicadas e o amortecimento podem ser desprezados. Assim, deve-se estudar a Equação (3.2), cuja solução é dada pela Equação (3.3):

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \quad (3.2)$$

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (3.3)$$

Em que:

- $x(t)$ é a posição da massa no tempo t [m];
- X é a amplitude do movimento da massa [m];
- ω_n é a frequência natural de vibração da massa [rad/s];
- φ é a ângulo de fase [rad];
- t é o tempo [s].

Na Equação (3.3), X e φ são constantes a serem determinadas com as condições iniciais.

3.2.2 Análise modal

A frequência natural de vibração ω_n de um sistema estrutural unidimensional de um grau de liberdade depende da massa m e da rigidez k dele, sendo dada pela Equação (3.4):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.4)$$

O modo de vibração corresponde à forma como o sistema vibra livremente. Como este sistema possui apenas 1 grau de liberdade livre, só há um modo de vibração; ou seja, uma única forma do sistema vibrar livremente na sua frequência natural.

3.3 SISTEMA UNIDIMENSIONAL DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

3.3.1 Equação de movimento

A Figura 3.3 mostra um sistema massa-mola unidimensional amortecido de n graus de liberdade livres (x_1, x_2, \dots, x_n) descrito pelo eixo X.

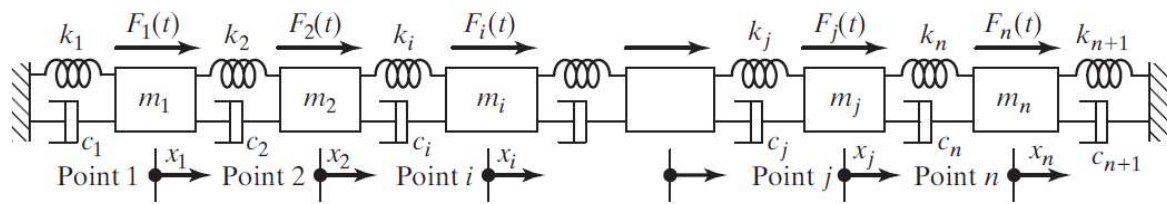


Figura 3.3 – Sistema massa-mola amortecido de "n" graus de liberdade livres.

Fonte: Extraído de RAO (2010)

Conforme RAO (2010), a vibração forçada amortecida é descrita pela Equação (3.5):

$$[m]\{x''(t)\} + [c]\{x'(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.5)$$

Em que:

- $\{x(t)\}$, $\{x'(t)\}$ e $\{x''(t)\}$ são, respectivamente, os vetores posição, velocidade e aceleração de todos os n graus de liberdade livres no tempo t [m, m/s, m/s²];
- $[m]$ é a matriz de massa de todos os n graus de liberdade livres [kg];
- $[k]$ é a matriz de rigidez de todos os n graus de liberdade livres [N/m];
- $[c]$ é a matriz de amortecimento de todos os n graus de liberdade livres [Ns/m];
- $\{F(t)\}$ é o vetor coluna das forças externas aplicadas em todos os n graus de liberdade livres no tempo t [N];
- t é o tempo [s].

Nesta pesquisa, será realizada uma análise modal. Portanto, apenas a matriz de massa $[m]$ e a matriz de rigidez $[k]$ serão necessárias. Esses dois elementos apresentam particularidades e devem ser detalhados. As particularidades da matriz de amortecimento $[c]$ não serão detalhadas e, portanto, será estudada a vibração livre não amortecida representada pela Equação (3.6):

$$[m]\{x''(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{0\} \quad (3.6)$$

3.3.2 Matrizes de massa e de rigidez

Nesta pesquisa, o Método dos Elementos Finitos será utilizado para a criação das matrizes de massa e rigidez. Os detalhes de como essas matrizes são criadas serão discutidos no Capítulo 4, mas ambas têm a forma da Equação (3.7):

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.3.3 Análise modal

As frequências naturais de vibração e os modos de vibração são determinadas através da Equação (3.8). A Equação (3.8) é obtida através de manipulação algébrica da Equação (3.6) ao se supor uma resposta harmônica do tipo $\{x(t)\} = \{X\} \cos(\omega_n t + \varphi)$:

$$[[k] - \omega_n^2 [m]]\{X\} = \{0\} \quad (3.8)$$

Em que:

- $[m]$ é a matriz de massa de todos os n graus de liberdade livres [kg];
- $[k]$ é a matriz de rigidez de todos os n graus de liberdade livres [N/m];

- ω_n^2 é o quadrado das frequências naturais de vibração [rad²/s²]
- $\{X\}$ é o vetor coluna dos modos de vibração de todos os n graus de liberdade livres;
- $\{0\}$ é o vetor coluna nulo.

A Equação (3.8) representa um conjunto de n equações lineares com ω^2 e $\{X\}$ como incógnitas. Para se ter solução não trivial, a Equação (3.9) deve ser satisfeita:

$$\det([k] - \omega_n^2 [m]) = 0 \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) representa um problema de autovalores e autovetores com incógnita ω_n^2 . Como há n graus de liberdade livres, a Equação (3.9) representa um polinômio de grau n e, assim, sua solução fornecerá n valores para ω_n^2 . Os autovalores são o quadrado das frequências naturais de vibração $(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ e os autovetores são os modos de vibração associados às correspondentes frequências naturais de vibração. Ou seja, o i -ésimo modo de vibração $\{X^i\}$ é determinado com a i -ésima frequência natural de vibração ω_i através de $[[k] - \omega_i^2 [m]]\{X^i\} = \{0\}$ para todo $i \in [1, n]$. Como há n valores para ω_i , tem-se que $\{X^i\}$ é um vetor coluna com n linhas. Cada linha se refere a um específico grau de liberdade livre do sistema de modo que $\{X^i\} = \{X_1^i, X_2^i, \dots, X_n^i\}^T$.

Como $[[k] - \omega_i^2 [m]]\{X^i\} = \{0\}$ representa um sistema de equações lineares homogêneo, a determinação dos valores exatos dos elementos de $\{X^i\}$ não é possível. Apenas a proporção entre seus elementos será determinada. Ou seja, $\{X^i\}$ representa a razão entre as amplitudes de oscilação dos n graus de liberdade livres no i -ésimo modo de vibração.

De acordo com RAO (2010), as frequências naturais de vibração $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ obtidas na resolução da Equação (3.9) possuem a propriedade de ser números reais positivos tais que

$\omega_i \leq \omega_{i+1}$ para todo $i \in [1, n]$. Essa propriedade é válida se as matrizes $[m]$ e $[k]$ forem simétricas e forem positivas definidas.

Através dos modos de vibração e das frequências naturais, pode-se obter a solução da Equação (3.6) através da Equação (3.10), a qual representa o Princípio da Superposição Modal (RAO, 2010):

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{X^i\} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (3.10)$$

Em que:

- $\{x(t)\}$ é o vetor coluna com a equação de movimento dos n graus de liberdade livres no tempo t tal que $\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T$;
- $\{X^i\}$ é o i -ésimo vetor coluna do modo de vibração associado à ω_i ;
- ω_i é a i -ésima frequência natural de vibração [rad/s];
- A_i e φ_i são constantes a serem determinadas com as condições iniciais;
- n é o número de graus de liberdade livres;
- i é o índice do grau de liberdade livre de modo que $i \in [1, n]$;
- t é o tempo [s].

Segundo RAO (2010), pode-se compreender os modos de vibração da seguinte maneira: o sistema estrutural vibrará livremente na sua i -ésima frequência natural de vibração ω_i se for dada a seguinte condição inicial $\{x(0)\} = \{X^i\}$.

3.4 SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

3.4.1 Equação de movimento

Sistemas tridimensionais de n graus de liberdades livres são usados para descrever, por exemplo, prédios e torres de transmissão. Sendo XYZ o sistema de referência adotado, a vibração forçada amortecida é descrita pela Equação (3.11):

$$[m]\{d''(t)\} + [c]\{d'(t)\} + [k]\{d(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.11)$$

Em que:

- $\{d(t)\}$, $\{d'(t)\}$ e $\{d''(t)\}$ são, respectivamente, os vetores posição, velocidade e aceleração de todos os n graus de liberdade livres no tempo t [m, m/s, m/s²];
- $[m]$ é a matriz de massa de todos os n graus de liberdade livres [kg];
- $[k]$ é a matriz de rigidez de todos os n graus de liberdade livres [N/m];
- $[c]$ é a matriz de amortecimento de todos os n graus de liberdade livres [Ns/m];
- $\{F(t)\}$ é o vetor força externa variável aplicado aos n graus de liberdade livres projetado nos respectivos eixos dos graus de liberdade livres no tempo t [N];
- t é o tempo [s].

Como será descrito no Capítulo 4, deve-se numerar os nós e os graus de liberdade. Assim, os graus de liberdade restringidos e livres estarão descritos e uma lista com os graus de liberdade livres será criada para que a Equação (3.11) possa ser utilizada.

Como será realizada uma análise modal, a matriz $[c]$ e o vetor $\{F(t)\}$ não serão necessárias. Apenas as matrizes de massa $[m]$ e de rigidez $[k]$ serão estudadas. Esses dois elementos apresentam particularidades e devem ser detalhados. As particularidades da matriz de amortecimento $[c]$ não serão detalhadas e, portanto, será estudada a vibração livre não amortecida representada pela Equação (3.12):

$$[m]\{d''(t)\} + [k]\{d(t)\} = \{0\} \quad (3.12)$$

3.4.2 Matrizes de massa e de rigidez

As matrizes de massa e de rigidez para um sistema tridimensional de n graus de liberdades livres é criada do mesmo modo que para um sistema unidimensional de n graus de liberdades livres. Ambas têm a forma da Equação (3.7) e serão discutidas no Capítulo 4.

3.4.3 Análise modal

As frequências naturais de vibração e os modos de vibração são determinadas através da Equação (3.13):

$$[[k] - \omega_n^2 [m]]\{\phi\} = \{0\} \quad (3.13)$$

Em que:

- $[m]$ é a matriz de massa de todos os n graus de liberdade livres [kg];
- $[k]$ é a matriz de rigidez de todos os n graus de liberdade livres [N/m];
- ω_n^2 é o quadrado da frequência natural de vibração [rad²/s²];
- $\{\phi\}$ é o vetor coluna dos modos de vibração;
- $\{0\}$ é o vetor coluna nulo.

Diferentemente de sistemas unidimensionais em que cada nó pode ter no máximo translação em uma única direção, haverá graus de liberdade livres em outras direções em sistemas tridimensionais. Essa complexidade adicional deve ser resolvida através de uma numeração dos graus de liberdade, a qual será explicada no Capítulo 4.

As frequências naturais de vibração e os modos de vibração são determinados através do mesmo procedimento adotado para sistemas unidimensionais com n graus de liberdade livres. Ou seja, deve-se revolver a equação polinomial gerada em $\det([k] - \omega_n^2 [m]) = 0$, a qual fornecerá n valores para as frequências naturais de vibração. O i -ésimo modo de vibração $\{\phi^i\}$ está associado à sua respectiva i -ésima frequência natural de vibração ω_i . A solução da Equação (3.12) será dada pela Equação (3.14), a qual representa o Princípio da Superposição Modal (RAO, 2010):

$$\{d(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi^i\} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (3.14)$$

Em que:

- $\{d(t)\}$ é o vetor coluna com a equação de movimento dos n graus de liberdade livres no tempo t tal que $\{d(t)\} = \{d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)\}^T$;
- $\{\phi^i\}$ é o i -ésimo vetor coluna do modo de vibração associado à ω_i ;
- ω_i é a i -ésima frequência natural de vibração [rad/s];
- A_i e φ_i são constantes a serem determinadas com as condições iniciais;
- n é o número de graus de liberdade livres;
- i é o índice do grau de liberdade livre de modo que $i \in [1, n]$;
- t é o tempo [s].

4 REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com BATHE (2016), o Método dos Elementos Finitos é um dos métodos existentes utilizados para a criação das matrizes de massa $[m]$ e matriz de rigidez $[k]$ do sistema estrutural. Esse é o método escolhido nesta pesquisa, e, portanto, seus conceitos preliminares serão esclarecidos neste capítulo.

4.2 CONCEITOS GERAIS

4.2.1 Objetivo do método

Os sólidos do mundo real possuem geometrias complexas, resultando em equações diferenciais parciais que podem não possuir solução analítica. O Método dos Elementos Finitos tem por objetivo transformar a equação diferencial parcial que modela um fenômeno físico em uma equação algébrica.

O Método dos Elementos Finitos faz uso de modelagem matemática dos sólidos, a qual será descrita na sequência.

4.2.2 Modelos estruturais

De acordo com BATHE (2016), três modelos matemáticos são utilizados em Engenharia de Estruturas para a análise estrutural:

- a) Modelo unidimensional: utilizado em estruturas que possuem uma dimensão preponderante em relação às outras duas. Neste modelo, encontram-se os elementos finitos classificados como treliças e vigas;

- b) Modelo bidimensional: utilizado em estruturas que possuem duas dimensões preponderantes em relação à terceira. Neste modelo, encontram-se os elementos finitos classificados como cascas e placas;
- c) Modelo tridimensional: utilizado em estruturas que as três dimensões da estrutura são predominantes.

Nesta pesquisa, a torre autoportante será modelada através de um modelo unidimensional de treliça, o qual será detalhado na sequência. Os outros dois modelos, bidimensional e tridimensional, fogem do escopo desta pesquisa e não serão detalhados.

4.2.2.1 Modelos unidimensional

Os dois elementos finitos que compõem o modelo unidimensional têm suas próprias particularidades e serão detalhados na sequência.

4.2.2.1.1 Elemento finito de treliça

Este elemento finito é utilizado na modelagem de estruturas que são utilizadas para suportar esforços de tração e compressão.

Cada elemento possui dois nós, sendo que cada um deles pode possuir até 3 graus de liberdade como mostrado na Figura 4.1. Ou seja, tem-se até 6 graus de liberdade, $(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2)$, por elemento. Como esforços de tração e compressão podem ocorrer, os nós do elemento podem somente se afastar ou se aproximar um do outro, de modo a não haver flexão e torção do elemento finito. Ou seja, apenas translação dos nós é permitida, sem rotação.

Em um sistema bidimensional, cada nó terá 2 graus de liberdade e o elemento finito terá 4 graus de liberdade. Em um sistema tridimensional, cada nó terá 3 graus de liberdade e o elemento finito terá 6 graus de liberdade.

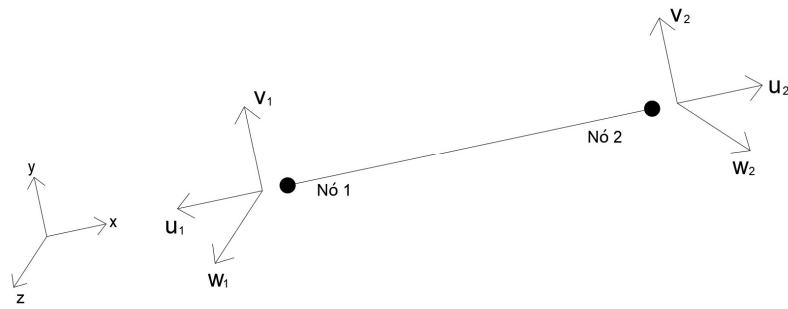


Figura 4.1 – Elemento finito de treliça.

4.2.2.1.2 Elemento finito de viga

Este elemento finito é utilizado na modelagem de estruturas que são utilizadas para suportar esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor.

Cada elemento possui dois nós, sendo que cada um deles pode possuir até 6 graus de liberdade como mostrado na Figura 4.2. Ou seja, tem-se até 12 graus de liberdade por elemento. Nestes elementos, além da compressão e tração as quais a estrutura está submetida, ela pode ser fletida e torcida. Nesse elemento finito, os nós podem sofrer translação e rotação.

Em um sistema bidimensional, cada nó terá 3 graus de liberdade e o elemento finito terá 6 graus de liberdade. Em um sistema tridimensional, cada nó terá 6 graus de liberdade e o elemento finito terá 12 graus de liberdade.

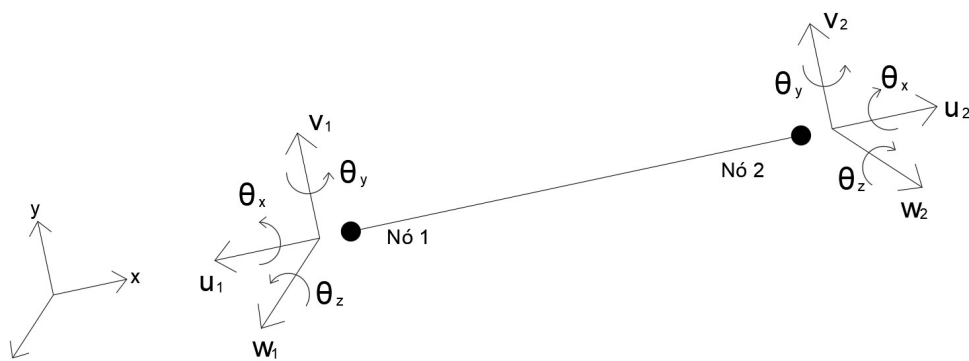


Figura 4.2 – Elemento finito de viga.

4.3 MATRIZES DE MASSA E DE RIGIDEZ

Nesta pesquisa, somente os elementos finitos de treliça serão utilizados. Assim, as matrizes $[m]$ e $[k]$ de elementos finitos de viga não serão detalhadas.

De acordo com RAO (2010) e HIBBELLER (2013), o procedimento a ser adotado em uma análise com elementos finitos é o seguinte:

- 1) Numerar os nós de modo adequado;
- 2) Numerar os graus de liberdade através da Equação (4.1);
- 3) Determinar os graus de liberdade livres e restringidos;
- 4) Criar as matrizes de massa $[m_L]$ e rigidez $[k_L]$ em coordenadas locais para cada elemento finito;
- 5) Criar a matriz de rotação $[R]$ de cada elemento finito. Essa matriz será utilizada para converter as matrizes $[m_L]$ e $[k_L]$ para coordenadas globais;
- 6) Criar as matrizes globais de massa $[m_G]$ e de rigidez $[k_G]$ de cada elemento finito;
- 7) Criar as matrizes de massa total $[m_T]$ e de rigidez total $[k_T]$ de toda a estrutura através da superposição (“soma”) das matrizes de massa globais e de rigidez globais, respectivamente;
- 8) Aplicar as condições de contorno nas matrizes $[m_T]$ e $[k_T]$ para obter as matrizes de massa $[m]$ e de rigidez $[k]$ da estrutura.

4.3.1 Numeração dos graus de liberdade

Como descrito na Figura 4.1, cada elemento finito de treliça terá até 6 graus de liberdade. Um sistema estrutural formado por n elementos de treliças não terá, contudo, $6n$ graus de liberdade. Isso ocorre devido à junção das barras em seus nós, a qual criará graus de liberdade

repetidos. Deve-se, portanto, saber quais graus de liberdade estão associados a cada elemento finito. Isso é feito, de acordo com HIBBELER (2013), através de uma numeração de todos os nós e de todos os graus de liberdade da estrutura. Após a numeração dos nós da estrutura, usa-se a Equação (4.1) para numerar os graus de liberdade de cada nó:

$$N_x(j) = 3(j-1) + 1 \tag{4.1}$$

$$N_y(j) = 3(j-1) + 2$$

$$N_z(j) = 3(j-1) + 3$$

Em que:

- $N_x(j)$, $N_y(j)$ e $N_z(j)$ são, respectivamente, a numeração dos graus de liberdade do nó j nos eixos X, Y e Z;
- j é o índice do nó.

Para um sistema de coordenadas bidimensional, deve-se utilizar $N_x(j)$ e $N_y(j)$. Para um sistema de coordenadas tridimensional, $N_x(j)$, $N_y(j)$ e $N_z(j)$ devem ser utilizados. A Equação (4.1) é de extrema importância pois a mesma criará a lista de graus de liberdade livres de modo a podemos utilizar as equações de vibração mecânica do Capítulo 3.

4.3.1.1 Definição dos graus de liberdade de cada elemento finito

Após a numeração de todos os graus de liberdade de todos os nós que formam a estrutura, deve-se estabelecer a alocação dos graus de liberdades numerados nos respectivos elementos finitos. De acordo com RAO (2010), isso é feito com a criação de um vetor coluna $\{U_i\}$ que representa os graus de liberdade existentes no i -ésimo elemento finito e do vetor coluna $\{\tilde{U}\}$, o qual representa os graus de liberdade existentes em toda a estrutura. Esses dois vetores estão relacionados através da relação $\{U_i\} = [A_i]\{\tilde{U}\}$. A matriz $[A_i]$ representam a matriz de conversão dos graus de liberdade de toda a estrutura para os graus de liberdade no i -ésimo elemento finito.

4.3.2 Matrizes em coordenadas locais

De acordo com AWRUCH e DI RADO (1997), a matriz de massa e a matriz de rigidez de um sistema bidimensional são dadas pela Equação (4.2):

$$[m_L] = \frac{\rho AL}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [k_L] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Para um sistema tridimensional, tem-se que a matriz de massa e de rigidez são dadas pela Equação (4.3):

$$[m_L] = \frac{\rho AL}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad [k_L] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Em que:

- $[m_L]$ e $[k_L]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez em coordenadas locais;
- ρ é a massa específica do material de cada barra [kg/m^3];
- A é a área da seção transversal de cada barra [m^2];
- L é o comprimento de cada barra [m];
- E é o módulo de elasticidade do material de cada barra [Pa].

4.3.3 Matriz de rotação

De acordo com AWRUCH e DI RADO (1997), a matriz de rotação de um sistema bidimensional representado pelos eixos XY é dada pela Equação (4.4):

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & 0 & 0 \\ -\cos \theta_y & \cos \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y \\ 0 & 0 & -\cos \theta_y & \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Para um sistema tridimensional representado pelos eixos XYZ, tem-se que a matriz de rotação é dada pela Equação (4.5):

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{L_z} & L_z & -\frac{\cos \theta_y \cos \theta_z}{L_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\cos \theta_z}{L_z} & 0 & \frac{\cos \theta_x}{L_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{L_z} & L_z & -\frac{\cos \theta_y \cos \theta_z}{L_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\cos \theta_z}{L_z} & 0 & \frac{\cos \theta_x}{L_z} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

A Figura 4.3 ilustra os detalhes sobre os ângulos diretores θ_x , θ_y e θ_z e sobre L_z . Na Figura 4.3, θ_x representa o ângulo entre o elemento finito AB e o eixo X, θ_y representa o ângulo entre o elemento finito AB e o eixo Y e θ_z representa o ângulo entre o elemento finito AB e o eixo Z. A reta AC representa a projeção do elemento finito AB no plano XY, sendo L_z o comprimento da reta AC.

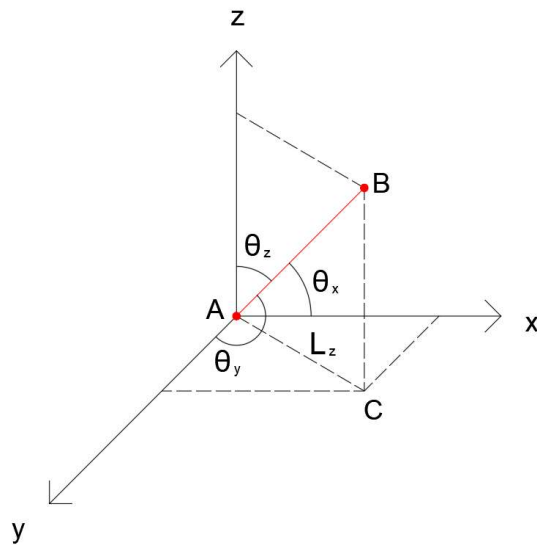


Figura 4.3 – Ângulos diretores.

Atenção especial deve ser dada no caso de o elemento finito AB ser perpendicular ao plano XY. Nesse caso, a matriz de rotação será dada pela Equação (4.6):

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

4.3.4 Matrizes em coordenadas globais

As Equações (4.2) e (4.3) devem ser usadas nas coordenadas locais dos elementos finitos de treliça. Contudo, existe um outro sistema de coordenadas, chamado de sistema de coordenadas globais, que referencia todos os elementos finitos de uma estrutura. A Figura 4.4 ilustra a diferença entre os dois sistemas de coordenadas para um sistema bidimensional. Pode-se ver os graus de liberdade no sistema de coordenadas locais (u_1, v_1, u_2, v_2) e no sistema de coordenadas globais (U_1, V_1, U_2, V_2) .

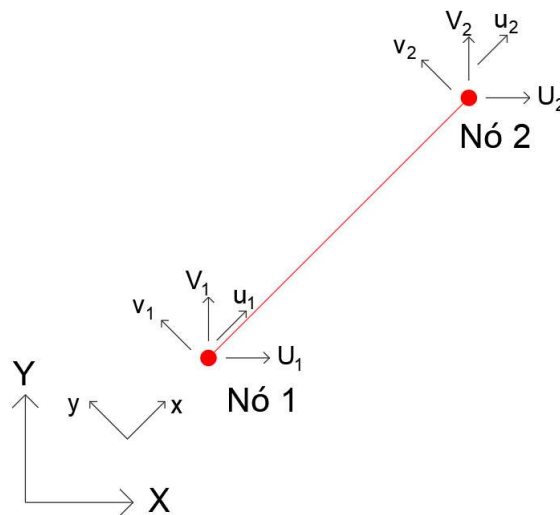


Figura 4.4 – Coordenadas globais (XY) e locais (xy).

Ou seja, as matrizes locais são válidas apenas para um sistema de coordenada locais. Deve-se, portanto, convertê-las para matrizes em coordenadas globais através da Equação (4.7):

$$[m_G] = [R]^T [m_L] [R] \quad (4.7)$$

$$[k_G] = [R]^T [k_L] [R]$$

4.3.5 Matrizes totais

Para uma estrutura formada por p barras modeladas com elementos finitos de treliça, existirão p matrizes de rigidez em coordenadas globais e p matrizes de massa em coordenadas globais. As matrizes de massa e de rigidez que descrevem toda a estrutura, chamadas respectivamente de matriz de massa total $[m_T]$ e matriz de rigidez total $[k_T]$, são criadas através da superposição (“soma”) das matrizes globais. Essa “soma” é feita através da numeração dos graus de liberdade descrita em 4.3.1.

As matrizes de massa total $[m_T]$ e de rigidez total $[k_T]$ são criadas, de acordo com RAO (2010), através da Equação (4.8):

$$[m_T] = \sum_{i=1}^p \left([A_i]^T [m_G^i] [A_i] \right)$$

$$[k_T] = \sum_{i=1}^p \left([A_i]^T [k_G^i] [A_i] \right)$$
(4.8)

Em que:

- $[m_T]$ e $[k_T]$ são as matrizes de massa e de rigidez totais de toda a estrutura;
- $[m_G^i]$ e $[k_G^i]$ são as matrizes de massa e de rigidez globais associados ao i -ésimo elemento finito;
- $[A_i]$ é a matriz de conversão dos graus de liberdade da estrutura para os graus de liberdade do i -ésimo elemento finito, sendo obtida através da relação $\{U_i\} = [A_i] \{\tilde{U}\}$ (ver 4.3.1.1);
- p é o número de elementos finitos existentes;
- i é o índice do elemento finito de modo que $i \in [1, p]$

O procedimento adotado na criação das matrizes $[m_T]$ e $[k_T]$ fornecerá matrizes em que os graus de liberdade estarão esquematizados em vermelho conforme a Figura 4.5.

$$\mathbf{k}_T = \begin{array}{cccc|c}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \mathbf{n} & \\
 \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \cdots & \mathbf{k}_{1n} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \cdots & \mathbf{k}_{2n} & \mathbf{2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mathbf{k}_{n1} & \mathbf{k}_{n2} & \cdots & \mathbf{k}_{nn} & \mathbf{n}
 \end{array}
 \quad
 \mathbf{m}_T = \begin{array}{cccc|c}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \mathbf{n} & \\
 \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & \cdots & \mathbf{m}_{1n} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & \cdots & \mathbf{m}_{2n} & \mathbf{2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mathbf{m}_{n1} & \mathbf{m}_{n2} & \cdots & \mathbf{m}_{nn} & \mathbf{n}
 \end{array}$$

Figura 4.5 – Esquematização dos graus de liberdade.

Fonte: Adaptado de LEMOS (2008)

4.3.6 Condições de contorno

A Equação (4.8) fornecerá as matrizes de massa e de rigidez de toda a estrutura. Contudo, nada foi dito sobre as restrições de seus nós. Ou seja, todos os nós da estrutura estão livres e a estrutura sofrerá um movimento de corpo rígido ao ser submetido a um sistema de forças. Deve-se, portanto, modificar as matrizes totais $[m_T]$ e $[k_T]$ para que a restrição dos nós seja representada.

De acordo com RAO (2010), deve-se utilizar a Equação (4.1) aplicada nos nós restringidos de modo a obter os graus de liberdade restringidos. Após, as condições de contorno impostas pelos nós restringidos podem ser aplicadas nas matrizes $[m_T]$ e $[k_T]$ eliminando as linhas e as colunas dos graus de liberdade restringidos conforme a Figura 4.6. Esse procedimento fornecerá as matrizes de massa $[m]$ e de rigidez $[k]$, as quais poderão ser utilizadas na obtenção das frequências naturais de vibração e os modos de vibração através de $\det([k] - \{\omega^2\}[m]) = 0$.

5 ROTINA COMPUTACIONAL

Neste capítulo, expõem-se todas as informações relativas ao desenvolvimento da rotina computacional.

5.1 LINGUAGEM ADOTADA

Nesta pesquisa, a linguagem de programação adotada foi Matlab devido à familiaridade do autor.

5.2 FUNCIONALIDADES DA ROTINA

A rotina computacional desenvolvida em Matlab tem as seguintes funções:

- a) Criação das matrizes locais de massa e de rigidez de elementos finitos de treliça;
- b) Criação das matrizes rotação;
- c) Criação das matrizes globais de massa e de rigidez de elementos finitos de treliça;
- d) Criação das matrizes totais de massa e de rigidez de uma estrutura treliçada;
- e) Aplicação das condições de contorno;
- f) Determinação das frequências naturais de vibração da estrutura;
- g) Determinação dos modos de vibração;
- h) Desenho da estrutura;
- i) Desenhos dos modos de vibração.

Adaptou-se a rotina para a determinação dos esforços normais em cada barra quando se aplica um conjunto de forças externas constante com o tempo. Ou seja, trata-se da resolução de um problema da Estática. Além disso, a rotina determina também os deslocamentos sofridos por cada nó quando esse sistema de forças é aplicado.

5.3 O ALGORÍTIMO DA ROTINA DESENVOLVIDA

O algoritmo da rotina computacional desenvolvida em Matlab foi criado com base no procedimento sugerido por RAO (2010), o qual foi descrito no Capítulo 4. A entrada e a saída de dados serão explicadas na sequência.

5.3.1 Entrada de dados

Na rotina desenvolvida, deve-se seguir o seguinte procedimento para a entrada de dados:

- a) Número de barras e de nós da estrutura;
- b) Descrição da conectividade dos elementos finitos. Ou seja, deve-se descrever quais os nós que pertencem a cada elemento finito;
- c) Descrição das coordenadas X, Y e Z de cada nó;
- d) Descrição das propriedades mecânicas de cada elemento finito (módulo de elasticidade, peso específico e área);
- e) Descrição das condições de contorno, de modo a restringir os nós com vinculação.

Caso seja necessário determinar os esforços normais nas barras, deve-se aplicar as forças externas nos nós desejados.

5.3.2 Saída de dados

Após a entrada de todos os dados necessários, a rotina computacional determinará todas as matrizes de massa e de rigidez descritas no Capítulo 4. Por fim, a rotina fornecerá as frequências naturais de vibração e os modos de vibração. Caso se deseje estudar os esforços normais quando forças estáticas são aplicadas, a rotina fornecerá as forças em todas as barras da estrutura e os deslocamentos dos nós.

6 ESTUDO DE CASOS

A seguir, serão apresentados alguns exemplos para ilustrar o funcionamento do programa desenvolvido.

Serão apresentados três exemplos para verificar a rotina computacional desenvolvida em Matlab, comparando os resultados obtidos através da rotina desenvolvida com os resultados fornecidos pelo *software* comercial Ansys.

6.1 PRIMEIRO EXEMPLO

Neste exemplo, procura-se verificar a rotina desenvolvida para uma estrutura treliçada tridimensional. A estrutura em estudo é a representada nas Figura 6.1. A numeração dos elementos e dos nós está indicada nas Figura 6.1.

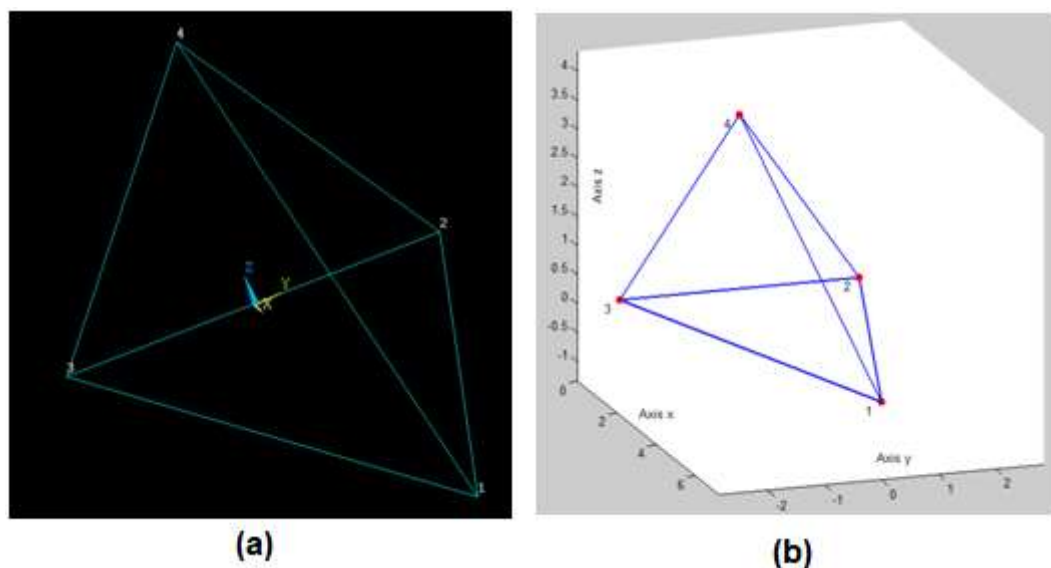


Figura 6.1 – Geometria do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

Fonte: Adaptado de BEER *et al.* (2012).

Na Figura 6.1(a), tem-se o desenho da geometria fornecido pelo *software* Ansys, enquanto a Figura 6.1(b) representa o desenho da geometria fornecido pela rotina desenvolvida.

As propriedades geométricas e mecânicas estão representadas na Tabela 6.1:

Tabela 6.1 – Propriedade geométricas e mecânicas do primeiro exemplo.

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	7,20	0,00	0,00
2	0,00	2,10	0,00
3	0,00	-2,10	0,00
4	0,00	0,00	3,00

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (Pa)
1	0,001	7860	2,00E+11
2	0,001	7860	2,00E+11
3	0,001	7860	2,00E+11
4	0,001	7860	2,00E+11
5	0,001	7860	2,00E+11
6	0,001	7860	2,00E+11

Os nós 2, 3 e 4 têm todos os graus de liberdade restringidos e o nó 1 está livre. Além disso, deseja-se comparar as forças obtidas pela rotina. Assim, aplicou-se uma força no nó 1 com a seguinte magnitude: $F_x = 1000N$, $F_y = -730,35N$ e $F_z = -320N$. Como há apenas um nó livre, têm-se 3 graus de liberdade livres. Assim, há 3 frequências naturais de vibração e 3 modos de vibração. Os resultados obtidos com a rotina desenvolvida para as frequências naturais de vibração e forças nos elementos foram comparados com os obtidos pelo Ansys e estão representados na Tabela 6.2:

Tabela 6.2 – Comparação dos resultados do primeiro exemplo.

Elemento	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Força (N)	Força (N)	
1	1425,0	1425,1	0,006%
2	-1183,4	-1183,3	0,008%
3	832,0	832,06	0,007%
4	0,0	0,0	0,00%
5	0,0	0,0	0,00%
6	0,0	0,0	0,00%

Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	33,088	33,088	0,000%
2	42,108	42,108	0,000%
3	174,99	174,99	0,000%

O primeiro modo de vibração representa um deslocamento do nó 1 na direção Z. A Figura 6.2 ilustra a comparação do desenho do primeiro modo no *software* Ansys, Figura 6.2(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.2(b), no plano XZ. Pode-se perceber que o resultado é idêntico. Na Figura 6.2(a), a linha azul representa a animação do modo de vibração enquanto que a linha cinza representa a geometria inicial.

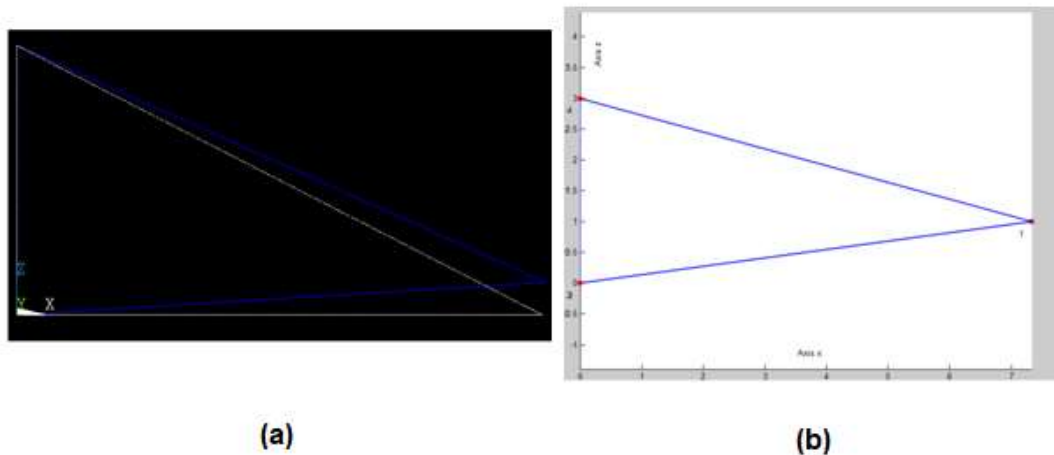


Figura 6.2 – Primeiro modo de vibração do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

O segundo modo de vibração representa um deslocamento do nó 1 na direção Y. A Figura 6.3 ilustra a comparação do desenho do segundo modo no *software* Ansys, Figura 6.3(a) e na rotina desenvolvida, Figura 6.3(b), no plano XY. Pode-se perceber que o resultado é idêntico novamente. Na Figura 6.3(a), a linha azul representa a animação do modo de vibração enquanto que a linha cinza representa a geometria inicial.

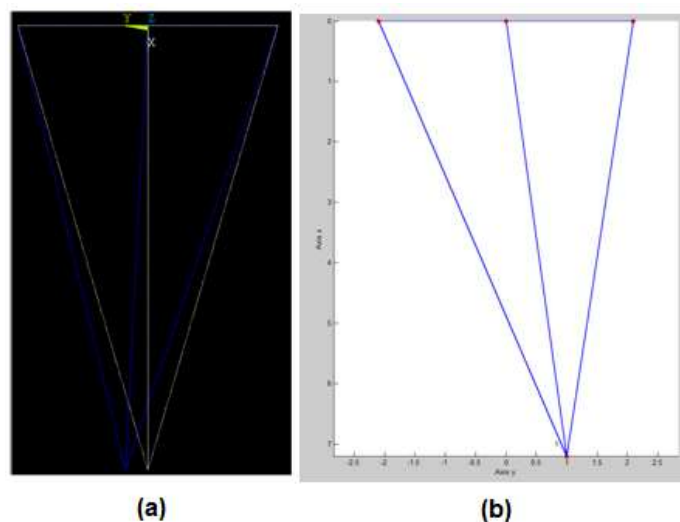


Figure 6.3 – Segundo modo de vibração do primeiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

6.2 SEGUNDO EXEMPLO

O segundo exemplo se refere a um modelo de prédio, o qual foi obtido em MIGUEL e FADEL MIGUEL (2012). A estrutura em estudo é representada na Figura 6.4, as quais foram obtidas através do *software* Ansys, Figura 6.4(a), e da rotina desenvolvida, Figura 6.4(b). O edifício foi modelado com 72 barras e 20 nós, sendo que o prédio tem 6 m de altura.

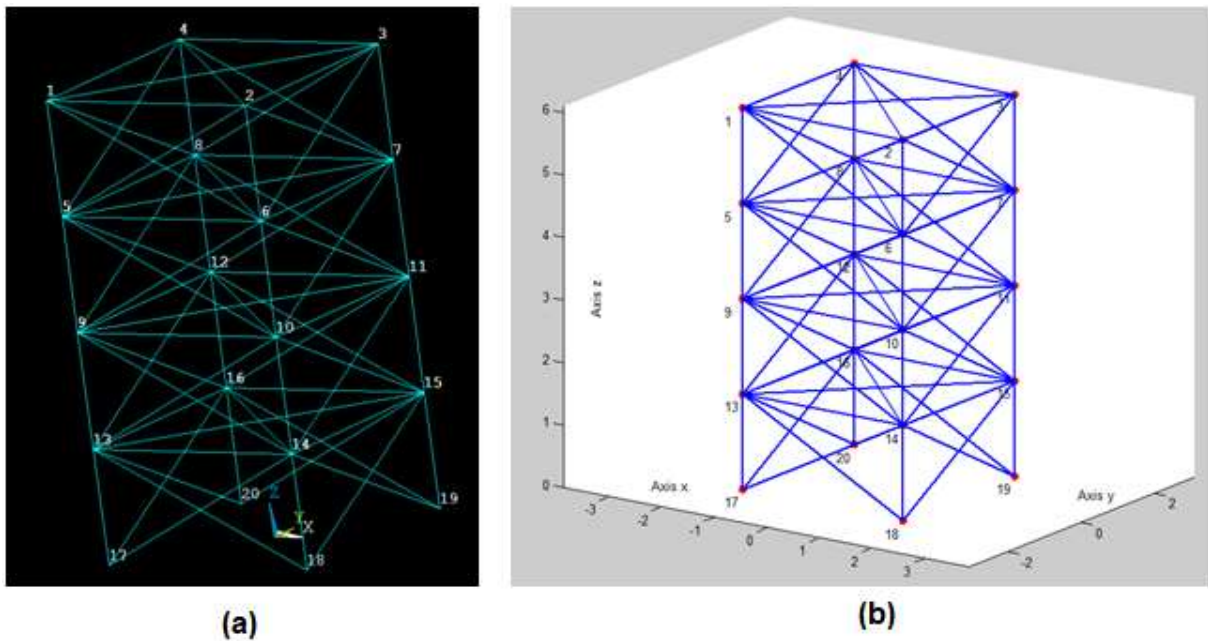


Figure 6.4 – Geometria do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

Fonte: Adaptado de MIGUEL e FADEL MIGUEL (2012).

A pesquisa realizada por MIGUEL e FADEL MIGUEL (2012) considerou também massas concentradas de 2268 kg nos 4 nós do topo do prédio.

As propriedades geométricas estão representadas na Tabela 6.3:

Tabela 6.3 – Propriedade geométricas do segundo exemplo.

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)	Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	-1,524	-1,524	6,096	11	1,524	1,524	3,048
2	1,524	-1,524	6,096	12	-1,524	1,524	3,048
3	1,524	1,524	6,096	13	-1,524	-1,524	1,524
4	-1,524	1,524	6,096	14	1,524	-1,524	1,524
5	-1,524	-1,524	4,572	15	1,524	1,524	1,524
6	1,524	-1,524	4,572	16	-1,524	1,524	1,524
7	1,524	1,524	4,572	17	-1,524	-1,524	0,000
8	-1,524	1,524	4,572	18	1,524	-1,524	0,000
9	-1,524	-1,524	3,048	19	1,524	1,524	0,000
10	1,524	-1,524	3,048	20	-1,524	1,524	0,000

O Módulo de Young é 68,95 GPa e a massa específica é 2.767,99 kg/m³ para todas as barras.

As áreas de seção transversal são as apresentadas na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Áreas do segundo exemplo.

Elemento	A (m ²)	Elemento	A (m ²)	Elemento	A (m ²)	Elemento	A (m ²)
1	3,680E-04	19	9,496E-04	37	1,145E-03	55	1,741E-03
2	3,680E-04	20	9,496E-04	38	1,145E-03	56	1,741E-03
3	3,680E-04	21	9,496E-04	39	1,145E-03	57	1,741E-03
4	3,680E-04	22	9,496E-04	40	1,145E-03	58	1,741E-03
5	7,681E-04	23	8,287E-04	41	7,899E-04	59	8,274E-04
6	7,681E-04	24	8,287E-04	42	7,899E-04	60	8,274E-04
7	7,681E-04	25	8,287E-04	43	7,899E-04	61	8,274E-04
8	7,681E-04	26	8,287E-04	44	7,899E-04	62	8,274E-04
9	7,681E-04	27	8,287E-04	45	7,899E-04	63	8,274E-04
10	7,681E-04	28	8,287E-04	46	7,899E-04	64	8,274E-04
11	7,681E-04	29	8,287E-04	47	7,899E-04	65	8,274E-04
12	7,681E-04	30	8,287E-04	48	7,899E-04	66	8,274E-04
13	6,450E-05	31	0,6450-4	49	6,473E-05	67	6,400E-05
14	6,450E-05	32	0,6450-4	50	6,473E-05	68	6,400E-05
15	6,450E-05	33	0,6450-4	51	6,473E-05	69	6,400E-05
16	6,450E-05	34	0,6450-4	52	6,473E-05	70	6,400E-05
17	6,450E-05	35	6,461E-05	53	6,450E-05	71	6,400E-05
18	6,450E-05	36	6,461E-05	54	6,450E-05	72	6,400E-05

Como a estrutura tem 20 nós, logo há 60 graus de liberdade. Têm-se apenas 4 nós restringidos, os quais são os nós da base. Logo, há 12 graus de liberdade restringidos e, assim, há 48 graus de liberdade livres. Assim, a estrutura tem 48 frequências naturais de vibração e 48 modos de vibração. Os resultados obtidos com a rotina desenvolvida para as frequências naturais de vibração foram comparados com os obtidos pelo Ansys e estão representados na Tabela 6.5:

Tabela 6.5 – Comparação dos resultados do segundo exemplo.

Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	3,999	3,999	0,000%	25	220,360	220,360	0,000%
2	3,999	3,999	0,000%	26	225,120	225,120	0,000%
3	5,999	5,999	0,000%	27	225,120	225,120	0,000%
4	6,272	6,272	0,000%	28	231,870	231,870	0,000%
5	9,075	9,075	0,000%	29	253,140	253,140	0,000%
6	9,075	9,075	0,000%	30	268,520	268,520	0,000%
7	9,443	9,443	0,000%	31	268,520	268,520	0,000%
8	9,446	9,446	0,000%	32	288,920	288,920	0,000%
9	11,263	11,263	0,000%	33	290,550	290,550	0,000%
10	12,697	12,697	0,000%	34	295,430	295,430	0,000%
11	12,697	12,697	0,000%	35	301,520	301,520	0,000%
12	14,161	14,161	0,000%	36	328,010	328,010	0,000%
13	98,072	98,072	0,000%	37	328,010	328,010	0,000%
14	98,072	98,072	0,000%	38	334,430	334,430	0,000%
15	114,830	114,830	0,000%	39	347,040	347,040	0,000%
16	122,580	122,580	0,000%	40	347,040	347,040	0,000%
17	125,480	125,480	0,000%	41	437,150	437,150	0,000%
18	125,480	125,480	0,000%	42	441,970	441,970	0,000%
19	145,760	145,760	0,000%	43	446,840	446,840	0,000%
20	150,230	150,230	0,000%	44	446,840	446,840	0,000%
21	174,200	174,200	0,000%	45	528,540	528,540	0,000%
22	195,920	195,920	0,000%	46	602,340	602,340	0,000%
23	195,920	195,920	0,000%	47	602,340	602,340	0,000%
24	213,740	213,740	0,000%	48	708,040	708,040	0,000%

A pesquisa realizada por MIGUEL e FADEL MIGUEL (2012) também estudou as frequências naturais de vibração do prédio, sendo que as 5 primeiras frequências estão representadas na Tabela 6.6. Percebe-se, portanto, a proximidade entre os resultados.

Tabela 6.6 – Frequências naturais de vibração do segundo exemplo.

	MIGUEL e FADEL MIGUEL (2012)	Ansys	Matlab
Número da frequência	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)
1	4,000	3,999	3,999
2	4,000	3,999	3,999
3	6,000	5,999	5,999
4	6,272	6,272	6,272
5	9,075	9,075	9,075

O primeiro modo de vibração representa um deslocamento do prédio na direção da reta que forma um ângulo de 45° com o eixo X. A Figura 6.5 ilustra a comparação do desenho do primeiro modo no *software* Ansys, Figura 6.5(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.5(b), no plano XY. Pode-se perceber que o resultado é idêntico. Na Figura 6.5(a), a linha azul representa a animação do modo de vibração enquanto que a linha cinza representa a geometria inicial.

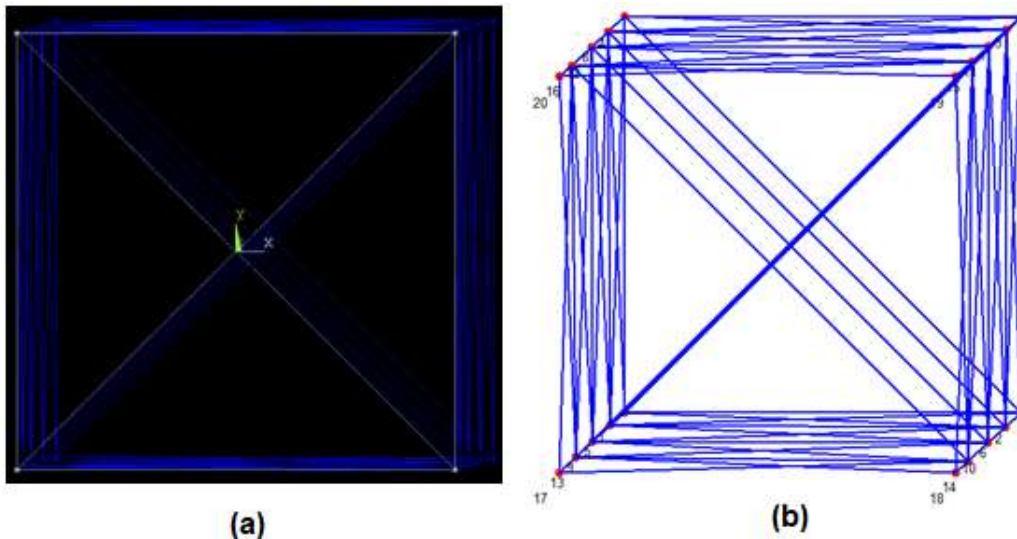


Figure 6.5 – Primeiro modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

O segundo modo de vibração representa um deslocamento do prédio na direção da reta que forma um ângulo de 135° com o eixo X. A Figura 6.6 ilustra a comparação do desenho do segundo modo no *software* Ansys, Figura 6.6(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.6(b), no plano XY. Pode-se perceber que o resultado é idêntico novamente. Na Figura 6.6(a), a linha azul representa a animação do modo de vibração enquanto que a linha cinza representa a geometria inicial.

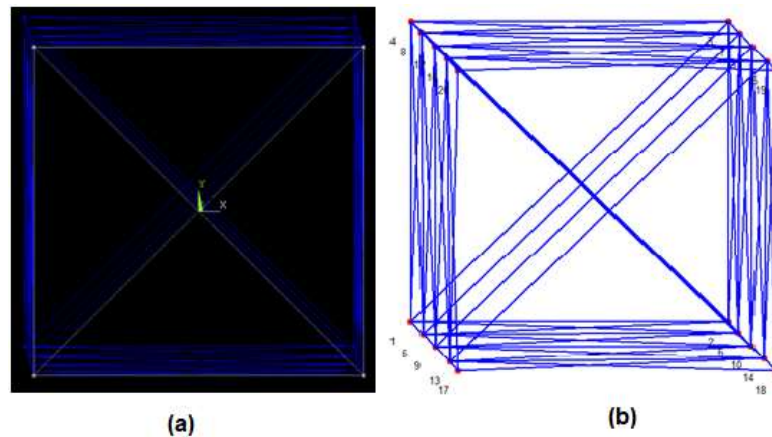


Figure 6.6 – Segundo modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

O terceiro modo de vibração representa um deslocamento de torção do prédio na direção do eixo Z. A Figura 6.7 ilustra a comparação do desenho do terceiro modo no *software* Ansys, Figura 6.7(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.7(b), no plano XY. Pode-se perceber que o resultado é idêntico novamente. Na Figura 6.7(a), a linha azul representa a animação do modo de vibração enquanto que a linha cinza representa a geometria inicial.

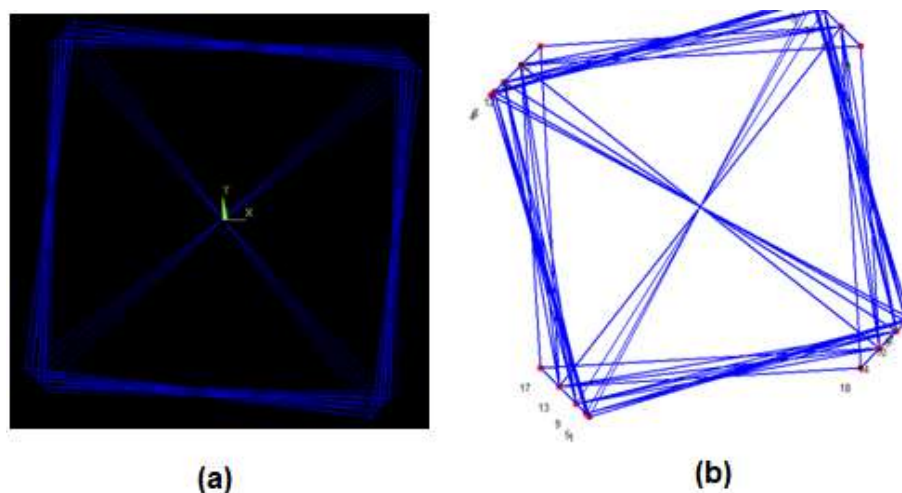


Figure 6.7 – Terceiro modo de vibração do segundo exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

6.3 TERCEIRO EXEMPLO

O terceiro e último exemplo se refere à torre de transmissão que é o objetivo do estudo desta pesquisa. Ela foi obtida com o professor Ruy Carlos Ramos de Menezes.

A estrutura em estudo é a representada na Figura 6.8, a qual foi obtida através do *software* Ansys, Figura 6.8(a), e pela rotina desenvolvida, Figura 6.8(b).

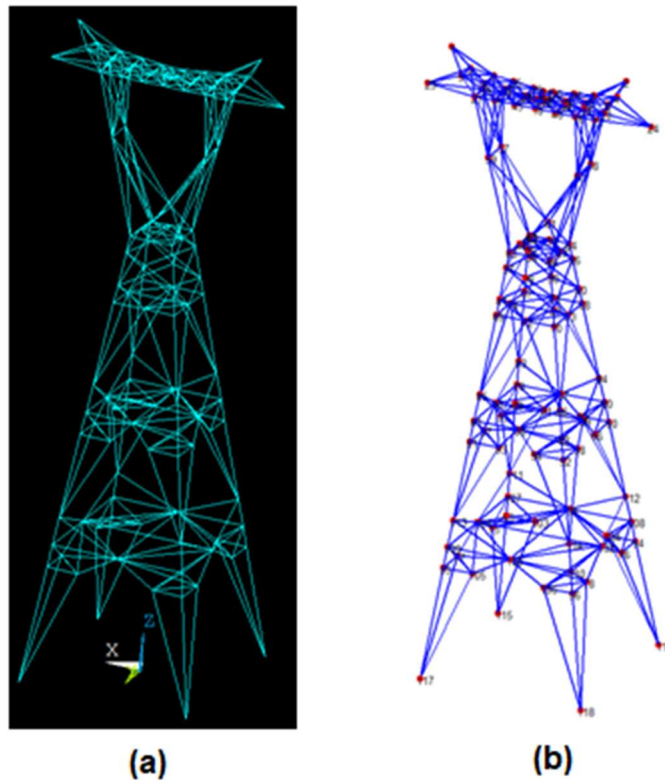


Figure 6.8 – Geometria do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

A numeração dos nós e dos elementos finitos não foi representada na Figura 6.8 para facilitar a visualização da estrutura. Tem-se 118 nós e 418 barras. Existem barras “fictícias” no modelo, as são utilizadas para resolver as instabilidades nodais geradas por elementos finitos de treliça. O Apêndice A fornecerá mais detalhes sobre essas barras “fictícias”.

As propriedades geométricas estão representadas na Tabela 6.7:

Tabela 6.7 – Propriedades geométricas do terceiro exemplo.

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)	Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	-8,7	0	58,5	60	4,4285714	-1,3321429	49
2	8,7	0	58,5	61	0	1,8585714	42,3
3	-7,3	0,9	56,3	62	0	-1,8585714	42,3
4	7,3	0,9	56,3	63	-2	2	40,5
5	-7,3	-0,9	56,3	64	2	2	40,5
6	7,3	-0,9	56,3	65	-2	-2	40,5
7	-5	0,9	56,05172	66	2	-2	40,5
8	5	0,9	56,05172	67	-2,88889	2,88889	34,5
9	-5	-0,9	56,05172	68	2,88889	2,88889	34,5
10	5	-0,9	56,05172	69	-2,88889	-2,88889	34,5
11	0	0,9	55,5	70	2,88889	-2,88889	34,5
12	0	-0,9	55,5	71	0	2,88889	34,5
13	-4	0,9	54,5	72	0	-2,88889	34,5
14	4	0,9	54,5	73	2,88889	0	34,5
15	-4	-0,9	54,5	74	-2,88889	0	34,5
16	4	-0,9	54,5	75	-6,4444444	3,555555	10,5
17	0	0,9	54,5	76	6,4444444	3,555555	10,5
18	0	-0,9	54,5	77	-6,4444444	-3,555555	10,5
19	-6	0,9	54,5	78	6,4444444	-3,555555	10,5
20	6	0,9	54,5	79	-4,3703704	4,3703704	24,5
21	-6	-0,9	54,5	80	4,3703704	4,3703704	24,5
22	6	-0,9	54,5	81	-4,3703704	-4,3703704	24,5
23	-11,1	0	54,5	82	4,3703704	-4,3703704	24,5
24	11,1	0	54,5	83	-4	4	27
25	-3	0,9	55,83104	84	4	4	27
26	3	0,9	55,83104	85	-4	-4	27
27	-3	-0,9	55,83	86	4	-4	27
28	3	-0,9	55,83	87	0	4,3703704	24,5
29	-1	0,9	55,61034	88	0	-4,3703704	24,5
30	1	0,9	55,61034	89	4,3703704	0	24,5
31	-1	-0,9	55,61	90	-4,3703704	0	24,5
32	1	-0,9	55,61034	91	-1,77778	4,6666667	22,5
33	0	2	40,5	92	1,77778	4,6666667	22,5
34	0	-2	40,5	93	-1,77778	-4,6666667	22,5
35	-2,2222222	2,2222222	39	94	1,77778	-4,6666667	22,5
36	2,2222222	2,2222222	39	95	-4,6666667	1,77778	22,5
37	-2,2222222	-2,2222222	39	96	4,6666667	1,77778	22,5
38	2,2222222	-2,2222222	39	97	-4,6666667	-1,77778	22,5
39	-2,6666667	2,6666667	36	98	4,6666667	-1,77778	22,5
40	2,6666667	2,6666667	36	99	0	6,1481481	12,5

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)	Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
41	-2,6666667	-2,6666667	36	100	0	-6,1481481	12,5
42	2,6666667	-2,6666667	36	101	-6,1481481	0	12,5
43	-2	0,9	54,5	102	6,1481481	0	12,5
44	2	0,9	54,5	103	-3,5555555	6,4444444	10,5
45	-2	-0,9	54,5	104	3,5555555	6,4444444	10,5
46	2	-0,9	54,5	105	-3,5555555	-6,4444444	10,5
47	2	0	40,5	106	3,5555555	-6,4444444	10,5
48	-2	0	40,5	107	-6,1481481	6,1481481	12,5
49	-4,6666666	4,6666666	22,5	108	6,1481481	6,1481481	12,5
50	4,6666666	4,6666666	22,5	109	-6,1481481	-6,1481481	12,5
51	-4,6666666	-4,6666666	22,5	110	6,1481481	-6,1481481	12,5
52	4,6666666	-4,6666666	22,5	111	-5,7777778	5,7777778	15
53	-6,44445	6,44445	10,5	112	5,7777778	5,7777778	15
54	6,44445	6,44445	10,5	113	-5,7777778	-5,7777778	15
55	-6,44445	-6,44445	10,5	114	5,7777778	-5,7777778	15
56	6,44445	-6,44445	10,5	115	-8	8	0
57	-4,4285714	1,3321429	49	116	8	8	0
58	4,4285714	1,3321429	49	117	-8	-8	0
59	-4,4285714	-1,3321429	49	118	8	-8	0

As propriedades mecânicas de todas as 418 barras estão representadas no Apêndice A.

Os resultados obtidos com a rotina desenvolvida para as frequências naturais de vibração foram comparados com os obtidos pelo Ansys e estão representados na Tabela 6.8. A torre possui 118 nós, sendo que 4 nós estão restringidos. Portanto, têm-se 342 frequências naturais de vibração possíveis para a torre. A diferença percentual existente entre os resultados obtidos pelo Ansys e pela rotina desenvolvida em Matlab é de 0% para todas as 342 frequências naturais de vibração. Para facilitar a visualização, optou-se pela ilustração dos 3 primeiros modos de vibração.

Tabela 6.8 – Comparação dos resultados do terceiro exemplo.

Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	2,1139	2,1139	0,000%	28	15,129	15,129	0,000%
2	2,2256	2,2256	0,000%	29	15,181	15,181	0,000%
3	2,7708	2,7708	0,000%	30	15,445	15,445	0,000%
4	3,1126	3,1126	0,000%	31	15,875	15,875	0,000%
5	3,1542	3,1542	0,000%	32	15,91	15,91	0,000%
6	5,0629	5,0629	0,000%	33	16,389	16,389	0,000%
7	5,5596	5,5596	0,000%	34	16,421	16,421	0,000%
8	5,7559	5,7559	0,000%	35	18,186	18,186	0,000%
9	6,0911	6,0911	0,000%	36	19,617	19,617	0,000%
10	7,8994	7,8994	0,000%	37	19,65	19,65	0,000%
11	8,3863	8,3863	0,000%	38	19,831	19,831	0,000%
12	8,7321	8,7321	0,000%	39	19,855	19,855	0,000%
13	9,5642	9,5642	0,000%	40	19,986	19,986	0,000%
14	9,8497	9,8497	0,000%	41	20,761	20,761	0,000%
15	9,8834	9,8834	0,000%	42	22,115	22,115	0,000%
16	10,379	10,379	0,000%	43	22,463	22,463	0,000%
17	10,578	10,578	0,000%	44	22,622	22,622	0,000%
18	10,647	10,647	0,000%	45	22,754	22,754	0,000%
19	12,176	12,176	0,000%	46	22,822	22,822	0,000%
20	12,255	12,255	0,000%	47	22,838	22,838	0,000%
21	12,575	12,575	0,000%	48	24,029	24,029	0,000%
22	13,722	13,722	0,000%	49	24,291	24,291	0,000%
23	13,797	13,797	0,000%	50	25,273	25,273	0,000%
24	14,358	14,358	0,000%	51	25,602	25,602	0,000%
25	14,361	14,361	0,000%	52	26,127	26,127	0,000%
26	14,616	14,616	0,000%	53	26,129	26,129	0,000%
27	14,722	14,722	0,000%	54	26,546	26,546	0,000%

Número da frequência	Anslys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Anslys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
55	26,692	26,692	0,000%	95	59,322	59,322	0,000%
56	27,945	27,945	0,000%	96	60,027	60,027	0,000%
57	28,009	28,009	0,000%	97	63,111	63,111	0,000%
58	28,102	28,102	0,000%	98	63,181	63,181	0,000%
59	29,642	29,642	0,000%	99	63,376	63,376	0,000%
60	29,93	29,93	0,000%	100	66,897	66,897	0,000%
61	31,586	31,586	0,000%	101	67,062	67,062	0,000%
62	32,81	32,81	0,000%	102	68,532	68,532	0,000%
63	32,832	32,832	0,000%	103	69,248	69,248	0,000%
64	33,623	33,623	0,000%	104	69,538	69,538	0,000%
65	34,343	34,343	0,000%	105	69,723	69,723	0,000%
66	35,838	35,838	0,000%	106	70,45	70,45	0,000%
67	36,912	36,912	0,000%	107	70,928	70,928	0,000%
68	38,169	38,169	0,000%	108	73,291	73,291	0,000%
69	38,471	38,471	0,000%	109	76,531	76,531	0,000%
70	38,523	38,523	0,000%	110	77,537	77,537	0,000%
71	38,66	38,66	0,000%	111	79,605	79,605	0,000%
72	38,747	38,747	0,000%	112	79,741	79,741	0,000%
73	38,827	38,827	0,000%	113	80,681	80,681	0,000%
74	39,444	39,444	0,000%	114	81,761	81,761	0,000%
75	41,073	41,073	0,000%	115	82,32	82,32	0,000%
76	45,726	45,726	0,000%	116	82,899	82,899	0,000%
77	46,013	46,013	0,000%	117	82,93	82,93	0,000%
78	46,761	46,761	0,000%	118	83,682	83,682	0,000%
79	47,462	47,462	0,000%	119	84,065	84,065	0,000%
80	48,327	48,327	0,000%	120	84,485	84,485	0,000%
81	48,4	48,4	0,000%	121	84,525	84,525	0,000%
82	49,286	49,286	0,000%	122	84,597	84,597	0,000%
83	49,768	49,768	0,000%	123	84,961	84,961	0,000%
84	49,869	49,869	0,000%	124	85,228	85,228	0,000%
85	50,767	50,767	0,000%	125	85,398	85,398	0,000%
86	51,13	51,13	0,000%	126	85,442	85,442	0,000%
87	51,313	51,313	0,000%	127	85,89	85,89	0,000%
88	51,587	51,587	0,000%	128	86,477	86,477	0,000%
89	52,369	52,369	0,000%	129	88,88	88,88	0,000%
90	53,775	53,775	0,000%	130	89,256	89,256	0,000%
91	55,977	55,977	0,000%	131	89,695	89,695	0,000%
92	57,519	57,519	0,000%	132	89,739	89,739	0,000%
93	57,755	57,755	0,000%	133	89,967	89,967	0,000%
94	58,643	58,643	0,000%	134	90,541	90,541	0,000%

Número da frequência	Anslys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Anslys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
135	90,931	90,931	0,000%	175	152,69	152,69	0,000%
136	92,723	92,723	0,000%	176	153,99	153,99	0,000%
137	93,71	93,71	0,000%	177	154,3	154,3	0,000%
138	94,497	94,497	0,000%	178	155,02	155,02	0,000%
139	96,167	96,167	0,000%	179	155,06	155,06	0,000%
140	98,43	98,43	0,000%	180	156	156	0,000%
141	98,769	98,769	0,000%	181	156,43	156,43	0,000%
142	98,916	98,916	0,000%	182	156,54	156,54	0,000%
143	100,97	100,967	0,003%	183	156,68	156,68	0,000%
144	101,35	101,35	0,000%	184	157,39	157,39	0,000%
145	102,3	102,3	0,000%	185	157,89	157,89	0,000%
146	106,7	106,7	0,000%	186	159,83	159,83	0,000%
147	110,69	110,69	0,000%	187	164,09	164,09	0,000%
148	111,45	111,45	0,000%	188	164,96	164,96	0,000%
149	112,02	112,02	0,000%	189	165,92	165,92	0,000%
150	113,7	113,7	0,000%	190	166,75	166,75	0,000%
151	116,72	116,72	0,000%	191	166,98	166,98	0,000%
152	116,89	116,89	0,000%	192	167,04	167,04	0,000%
153	121,33	121,33	0,000%	193	167,04	167,04	0,000%
154	121,48	121,48	0,000%	194	167,5	167,5	0,000%
155	123,77	123,77	0,000%	195	167,57	167,57	0,000%
156	124,58	124,58	0,000%	196	168,75	168,75	0,000%
157	124,88	124,88	0,000%	197	169,76	169,76	0,000%
158	125,36	125,36	0,000%	198	171,15	171,15	0,000%
159	126,04	126,04	0,000%	199	172,72	172,72	0,000%
160	127,44	127,44	0,000%	200	172,76	172,76	0,000%
161	127,59	127,59	0,000%	201	174,3	174,3	0,000%
162	128,01	128,01	0,000%	202	174,55	174,55	0,000%
163	130,16	130,16	0,000%	203	176,01	176,01	0,000%
164	130,64	130,64	0,000%	204	177,42	177,42	0,000%
165	131,78	131,78	0,000%	205	177,48	177,48	0,000%
166	139,01	139,01	0,000%	206	177,89	177,89	0,000%
167	141,42	141,42	0,000%	207	178,83	178,83	0,000%
168	144,58	144,58	0,000%	208	179,69	179,69	0,000%
169	144,75	144,75	0,000%	209	180,04	180,04	0,000%
170	145,15	145,15	0,000%	210	183,34	183,34	0,000%
171	146,16	146,16	0,000%	211	185,82	185,82	0,000%
172	148,37	148,37	0,000%	212	188,87	188,87	0,000%
173	148,59	148,59	0,000%	213	189,24	189,24	0,000%
174	151,34	151,34	0,000%	214	189,64	189,64	0,000%

Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
215	190,05	190,05	0,000%	255	235,81	235,81	0,000%
216	191,31	191,31	0,000%	256	238,35	238,35	0,000%
217	192,6	192,6	0,000%	257	240,69	240,69	0,000%
218	194,26	194,26	0,000%	258	243,49	243,49	0,000%
219	198,21	198,21	0,000%	259	245,6	245,6	0,000%
220	198,83	198,83	0,000%	260	245,97	245,97	0,000%
221	204,99	204,99	0,000%	261	248,27	248,27	0,000%
222	205,4	205,4	0,000%	262	253,12	253,12	0,000%
223	206,23	206,23	0,000%	263	253,54	253,54	0,000%
224	207,66	207,66	0,000%	264	255,2	255,2	0,000%
225	207,67	207,67	0,000%	265	259,29	259,29	0,000%
226	208,09	208,09	0,000%	266	263,5	263,5	0,000%
227	208,26	208,26	0,000%	267	265,25	265,25	0,000%
228	209,07	209,07	0,000%	268	266,32	266,32	0,000%
229	209,17	209,17	0,000%	269	267,51	267,51	0,000%
230	210,41	210,41	0,000%	270	269,11	269,11	0,000%
231	210,41	210,41	0,000%	271	272,57	272,57	0,000%
232	211,68	211,68	0,000%	272	274,12	274,12	0,000%
233	212,6	212,6	0,000%	273	285,84	285,84	0,000%
234	214,33	214,33	0,000%	274	289,17	289,17	0,000%
235	214,6	214,6	0,000%	275	293,32	293,32	0,000%
236	214,99	214,99	0,000%	276	301,32	301,32	0,000%
237	215,99	215,99	0,000%	277	306,67	306,67	0,000%
238	216,68	216,68	0,000%	278	306,82	306,82	0,000%
239	217,54	217,54	0,000%	279	307,33	307,33	0,000%
240	217,83	217,83	0,000%	280	307,7	307,7	0,000%
241	218,44	218,44	0,000%	281	313,29	313,29	0,000%
242	223,24	223,24	0,000%	282	315,23	315,23	0,000%
243	223,95	223,95	0,000%	283	318,72	318,72	0,000%
244	226,27	226,27	0,000%	284	324,25	324,25	0,000%
245	226,98	226,98	0,000%	285	337,77	337,77	0,000%
246	227,73	227,73	0,000%	286	339,36	339,36	0,000%
247	228,43	228,43	0,000%	287	342,89	342,89	0,000%
248	229,17	229,17	0,000%	288	350,15	350,15	0,000%
249	231,73	231,73	0,000%	289	352,39	352,39	0,000%
250	231,73	231,73	0,000%	290	353,15	353,15	0,000%
251	231,79	231,79	0,000%	291	364,45	364,45	0,000%
252	231,81	231,81	0,000%	292	370,2	370,2	0,000%
253	233,79	233,79	0,000%	293	373,95	373,95	0,000%
254	234,21	234,21	0,000%	294	376,49	376,49	0,000%

Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual	Número da frequência	Ansys	Matlab	Diferença percentual
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)			Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
295	376,98	376,98	0,000%	319	508,37	508,37	0,000%
296	376,99	376,99	0,000%	320	508,75	508,75	0,000%
297	377,51	377,51	0,000%	321	535,84	535,84	0,000%
298	380,14	380,14	0,000%	322	536,99	536,99	0,000%
299	381,73	381,73	0,000%	323	545,83	545,83	0,000%
300	388,81	388,81	0,000%	324	560,81	560,81	0,000%
301	391,36	391,36	0,000%	325	584,08	584,08	0,000%
302	391,82	391,82	0,000%	326	598,74	598,74	0,000%
303	391,92	391,92	0,000%	327	602,05	602,05	0,000%
304	391,97	391,97	0,000%	328	602,06	602,06	0,000%
305	392,2	392,2	0,000%	329	610,34	610,34	0,000%
306	405,09	405,09	0,000%	330	617,96	617,96	0,000%
307	430,73	430,73	0,000%	331	630,89	630,89	0,000%
308	436,88	436,88	0,000%	332	634,55	634,55	0,000%
309	439	439	0,000%	333	649,02	649,02	0,000%
310	445,45	445,45	0,000%	334	661,66	661,66	0,000%
311	449,27	449,27	0,000%	335	687,34	687,34	0,000%
312	455,91	455,91	0,000%	336	707,86	707,86	0,000%
313	460,72	460,72	0,000%	337	721,84	721,84	0,000%
314	465,48	465,48	0,000%	338	790,92	790,92	0,000%
315	466,65	466,65	0,000%	339	814,74	814,74	0,000%
316	469,22	469,22	0,000%	340	871,16	871,16	0,000%
317	484,93	484,93	0,000%	341	1156,5	1156,5	0,000%
318	505,94	505,94	0,000%	342	1251,4	1251,4	0,000%

O primeiro modo de vibração representa um deslocamento da torre na direção X. A Figura 6.9 ilustra a comparação do desenho do primeiro modo no *software* Ansys, Figura 6.9(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.9(b), no plano XZ. Pode-se perceber que o resultado é idêntico.

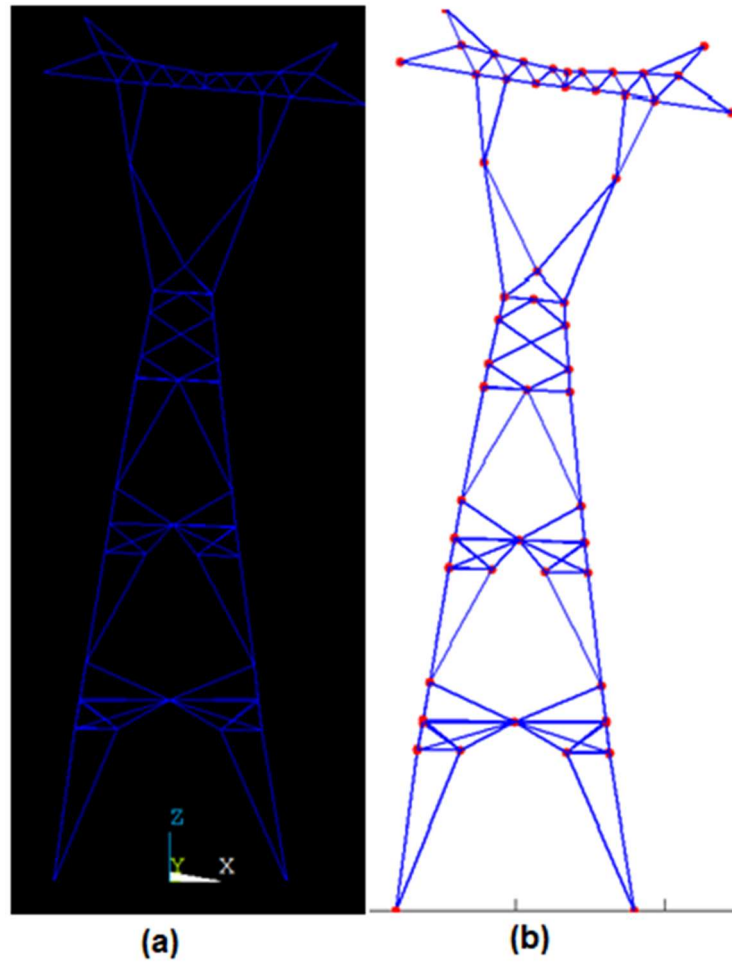


Figure 6.9 – Primeiro modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

O segundo modo de vibração representa um deslocamento longitudinal da torre na direção Y. A Figura 6.10 ilustra a comparação do desenho do segundo modo no *software* Ansys, Figura 6.10(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.10(b), no plano YZ. Pode-se perceber que o resultado é novamente idêntico.

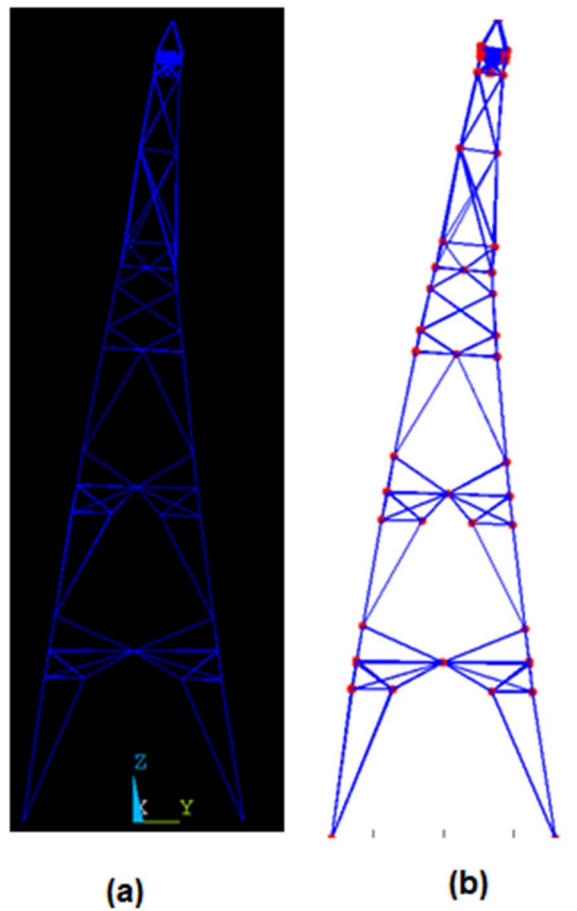


Figure 6.10 – Segundo modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

O terceiro modo de vibração representa um deslocamento torcional da torre na direção Z. A Figura 6.11 ilustra a comparação do desenho do terceiro modo no *software* Ansys, Figura 6.11(a), e na rotina desenvolvida, Figura 6.11(b), no plano XY. Pode-se perceber que o resultado é idêntico novamente.

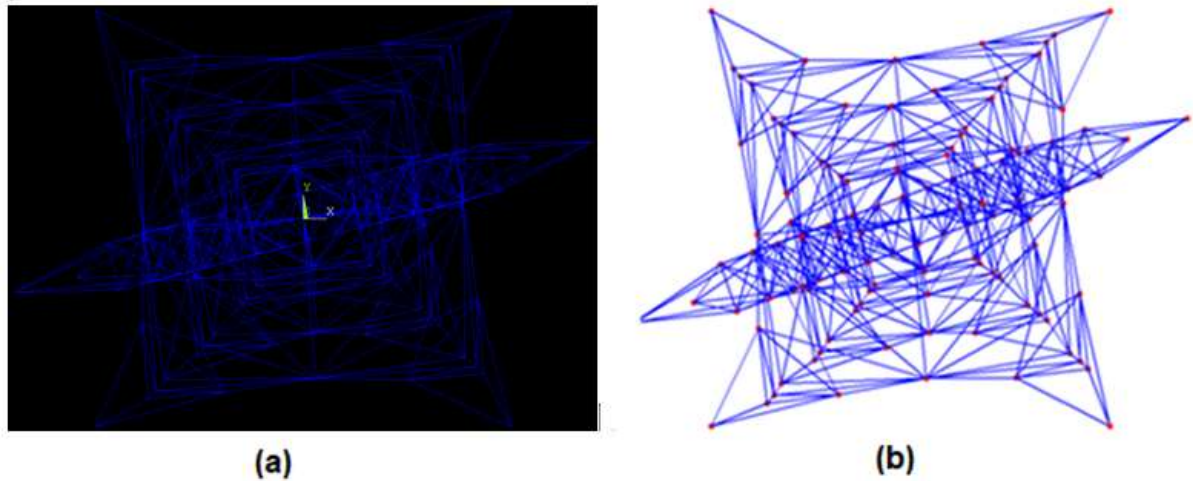


Figure 6.11 – Terceiro modo de vibração do terceiro exemplo: (a) Ansys, (b) Matlab.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho é proposta a criação de uma rotina computacional para análise modal de uma torre de transmissão através da linguagem de programação Matlab e comparação com os resultados obtidos através do *software* comercial Ansys. Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos na análise modal, em que apenas o elemento finito de treliça foi considerado na rotina computacional. O programa computacional determina, para cada elemento finito, as matrizes de massa e de rigidez em coordenadas locais e globais através da matriz de rotação de cada elemento finito. O programa determina, também, as matrizes de massa e de rigidez após a aplicação das condições de contorno. As frequências naturais de vibração são calculadas e os modos de vibração são determinados. Tanto a geometria da estrutura em estudo quanto as configurações dos modos de vibração são determinadas.

7.1 CONCLUSÕES

A rotina computacional desenvolvida em Matlab apresentou resultados idênticos aos obtidos com o *software* comercial Ansys, tanto em termos de frequências naturais quanto em relação aos modos de vibração. Pode-se, portanto, concluir que a rotina proposta neste trabalho teve êxito.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros têm-se:

- a) Aprimoração da rotina desenvolvida para a realização de uma análise dinâmica completa;
- b) Extensão dos modelos utilizados para englobar outros elementos finitos, como o elemento de viga;
- c) Extensão dos modelos utilizados para englobar efeitos de não linearidade geométrica e física;
- d) Extensão dos modelos utilizados para englobar os efeitos da presença de cabos condutores, isoladores, cabos para-raios, chapas de ligação e parafusos.

REFERÊNCIAS

AWRUCH, A. M.; DIRADO, H. A. **Introducción al Método de los Elementos Finitos**

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2nd edition. Pearson Education, 2016. 1065 pages.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. JR.; MAZUREK, D. F.; EISENBERG, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. Nona edição. Mc Graw Hill, 2012. 626 paginas.

HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. Oitava edição. Pearson Education, 2013.522 páginas

LEMO, P. S. B. **Programa para o Projeto de Blocos Rígidos de Coroamento de Estacas**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2008)

MIGUEL, L. F. F.; FADEL MIGUEL, L. F. **Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms**. Expert Sytem with Applications, v. 39, p. 9458-9467, 2012

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5th edition. Pearson Education, 2010. 1084 pages.

TROIAN, S. P. **A resposta estrutural dinâmica de uma torre estaiada de linha de transmissão submetida a ventos do tipo EPS**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018

APÊNDICE A – Propriedades mecânicas do terceiro exemplo

Todas as 423 barras têm módulo de elasticidade de $2,05E11$ Pa, exceto as barras “fictícias”. Essas barras “fictícias” não existem na realidade, elas são utilizadas para evitar problemas em alguns nós que, devido à sua vinculação, estão instáveis e podem sofrer movimento de corpo rígido. Utilizou-se $2,05E10$ Pa para o módulo de elasticidade das barras “fictícias”, elas estão marcadas em vermelho. A única exceção é a barra 299, a qual tem $2,05E11$ Pa como módulo de elasticidade mas tem 785 kg/m^3 como massa específica.

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
1	0,000389	23379,3	2,05E+11	31	0,000942	11343,99	2,05E+11
2	0,000389	23379,3	2,05E+11	32	0,000942	11343,99	2,05E+11
3	0,000389	23379,3	2,05E+11	33	0,00101	7850	2,05E+11
4	0,000389	23379,3	2,05E+11	34	0,00101	7850	2,05E+11
5	0,000389	23379,3	2,05E+11	35	0,00101	7850	2,05E+11
6	0,000389	23379,3	2,05E+11	36	0,00101	7850	2,05E+11
7	0,000389	23379,3	2,05E+11	37	0,000471	11343,99	2,05E+11
8	0,000389	23379,3	2,05E+11	38	0,000471	11343,99	2,05E+11
9	0,000486	7850	2,05E+11	39	0,000471	11343,99	2,05E+11
10	0,000486	7850	2,05E+11	40	0,000471	11343,99	2,05E+11
11	0,000486	7850	2,05E+11	41	0,00101	7850	2,05E+11
12	0,000486	7850	2,05E+11	42	0,00101	7850	2,05E+11
13	0,000394	15538,98	2,05E+11	43	0,00101	7850	2,05E+11
14	0,000394	15538,98	2,05E+11	44	0,00101	7850	2,05E+11
15	0,000394	15538,98	2,05E+11	45	0,000582	11343,99	2,05E+11
16	0,000394	15538,98	2,05E+11	46	0,000582	11343,99	2,05E+11
17	0,00137	15538,98	2,05E+11	47	0,000582	11343,99	2,05E+11
18	0,00137	15538,98	2,05E+11	48	0,000582	11343,99	2,05E+11
19	0,00137	15538,98	2,05E+11	49	0,000736	7850	2,05E+11
20	0,00137	15538,98	2,05E+11	50	0,000736	7850	2,05E+11
21	0,000471	7850	2,05E+11	51	0,000736	7850	2,05E+11
22	0,000471	7850	2,05E+11	52	0,000736	7850	2,05E+11
23	0,000471	7850	2,05E+11	53	0,00101	7850	2,05E+11
24	0,000471	7850	2,05E+11	54	0,00101	7850	2,05E+11
25	0,000942	11343,99	2,05E+11	55	0,00101	7850	2,05E+11
26	0,000942	11343,99	2,05E+11	56	0,00101	7850	2,05E+11
27	0,000942	11343,99	2,05E+11	57	0,000875	7850	2,05E+11
28	0,000942	11343,99	2,05E+11	58	0,000875	7850	2,05E+11
29	0,000942	11343,99	2,05E+11	59	0,000875	7850	2,05E+11
30	0,000942	11343,99	2,05E+11	60	0,000875	7850	2,05E+11

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
61	0,000471	7850	2,05E+11	101	0,000389	7850	2,05E+11
62	0,000471	7850	2,05E+11	102	0,000389	7850	2,05E+11
63	0,00155	8553	2,05E+11	103	0,000631	7850	2,05E+11
64	0,00155	8553	2,05E+11	104	0,000631	7850	2,05E+11
65	0,00155	8553	2,05E+11	105	0,000631	7850	2,05E+11
66	0,00155	8553	2,05E+11	106	0,000631	7850	2,05E+11
67	0,00106	8553	2,05E+11	107	0,000736	7850	2,05E+11
68	0,00106	8553	2,05E+11	108	0,000736	7850	2,05E+11
69	0,00106	8553	2,05E+11	109	0,000736	7850	2,05E+11
70	0,00106	8553	2,05E+11	110	0,000736	7850	2,05E+11
71	0,00192	9162,3	2,05E+11	111	0,000631	7850	2,05E+11
72	0,00192	9162,3	2,05E+11	112	0,000631	7850	2,05E+11
73	0,00192	9162,3	2,05E+11	113	0,000631	7850	2,05E+11
74	0,00192	9162,3	2,05E+11	114	0,000631	7850	2,05E+11
75	0,00137	9162,3	2,05E+11	115	0,000631	7850	2,05E+11
76	0,00137	9162,3	2,05E+11	116	0,000631	7850	2,05E+11
77	0,00137	9162,3	2,05E+11	117	0,000631	7850	2,05E+11
78	0,00137	9162,3	2,05E+11	118	0,000631	7850	2,05E+11
79	0,001472	7850	2,05E+11	119	0,000631	7850	2,05E+11
80	0,001472	7850	2,05E+11	120	0,000631	7850	2,05E+11
81	0,001472	7850	2,05E+11	121	0,000631	7850	2,05E+11
82	0,001472	7850	2,05E+11	122	0,000631	7850	2,05E+11
83	0,00101	7850	2,05E+11	123	0,000736	7850	2,05E+11
84	0,00101	7850	2,05E+11	124	0,000736	7850	2,05E+11
85	0,00101	7850	2,05E+11	125	0,000736	7850	2,05E+11
86	0,00101	7850	2,05E+11	126	0,000736	7850	2,05E+11
87	0,002329	7850	2,05E+11	127	0,000631	7850	2,05E+11
88	0,002329	7850	2,05E+11	128	0,000631	7850	2,05E+11
89	0,002329	7850	2,05E+11	129	0,000631	7850	2,05E+11
90	0,002329	7850	2,05E+11	130	0,000631	7850	2,05E+11
91	0,002329	7850	2,05E+11	131	0,000389	18470,2	2,05E+11
92	0,002329	7850	2,05E+11	132	0,000389	18470,2	2,05E+11
93	0,002329	7850	2,05E+11	133	0,000389	18470,2	2,05E+11
94	0,002329	7850	2,05E+11	134	0,000389	18470,2	2,05E+11
95	0,002329	7850	2,05E+11	135	0,000389	18470,2	2,05E+11
96	0,002329	7850	2,05E+11	136	0,000389	18470,2	2,05E+11
97	0,002329	7850	2,05E+11	137	0,000389	18470,2	2,05E+11
98	0,002329	7850	2,05E+11	138	0,000389	18470,2	2,05E+11
99	0,000389	7850	2,05E+11	139	0,002329	21235,5	2,05E+11
100	0,000389	7850	2,05E+11	140	0,002329	21235,5	2,05E+11

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
141	0,002329	21235,5	2,05E+11	181	0,002329	21235,5	2,05E+11
142	0,002329	21235,5	2,05E+11	182	0,002329	21235,5	2,05E+11
143	0,000736	21235,5	2,05E+11	183	0,000389	7850	2,05E+11
144	0,000736	21235,5	2,05E+11	184	0,000389	7850	2,05E+11
145	0,000736	21235,5	2,05E+11	185	0,000389	7850	2,05E+11
146	0,000736	21235,5	2,05E+11	186	0,000389	7850	2,05E+11
147	0,002329	21235,5	2,05E+11	187	0,002329	21235,5	2,05E+11
148	0,002329	21235,5	2,05E+11	188	0,002329	21235,5	2,05E+11
149	0,002329	21235,5	2,05E+11	189	0,002329	21235,5	2,05E+11
150	0,002329	21235,5	2,05E+11	190	0,002329	21235,5	2,05E+11
151	0,000942	21235,5	2,05E+11	191	0,000631	21235,5	2,05E+11
152	0,000942	21235,5	2,05E+11	192	0,000631	21235,5	2,05E+11
153	0,000942	21235,5	2,05E+11	193	0,000631	21235,5	2,05E+11
154	0,000942	21235,5	2,05E+11	194	0,000631	21235,5	2,05E+11
155	0,000513	15886,5	2,05E+11	195	0,002329	21235,5	2,05E+11
156	0,000513	15886,5	2,05E+11	196	0,002329	21235,5	2,05E+11
157	0,000513	15886,5	2,05E+11	197	0,002329	21235,5	2,05E+11
158	0,000513	15886,5	2,05E+11	198	0,002329	21235,5	2,05E+11
159	0,000736	21235,5	2,05E+11	199	0,00212	21235,5	2,05E+11
160	0,000736	21235,5	2,05E+11	200	0,00212	21235,5	2,05E+11
161	0,000736	21235,5	2,05E+11	201	0,00212	21235,5	2,05E+11
162	0,000736	21235,5	2,05E+11	202	0,00212	21235,5	2,05E+11
163	0,000942	21235,5	2,05E+11	203	0,000736	15119	2,05E+11
164	0,000942	21235,5	2,05E+11	204	0,000736	15119	2,05E+11
165	0,000942	21235,5	2,05E+11	205	0,000736	15119	2,05E+11
166	0,000942	21235,5	2,05E+11	206	0,000736	15119	2,05E+11
167	0,000513	15886,5	2,05E+11	207	0,000471	21235,5	2,05E+11
168	0,000513	15886,5	2,05E+11	208	0,000471	21235,5	2,05E+11
169	0,000513	15886,5	2,05E+11	209	0,000471	21235,5	2,05E+11
170	0,000513	15886,5	2,05E+11	210	0,000471	21235,5	2,05E+11
171	0,000471	21235,5	2,05E+11	211	0,000592	21235,5	2,05E+11
172	0,000471	21235,5	2,05E+11	212	0,000592	21235,5	2,05E+11
173	0,000471	21235,5	2,05E+11	213	0,000592	21235,5	2,05E+11
174	0,000471	21235,5	2,05E+11	214	0,000592	21235,5	2,05E+11
175	0,000592	21235,5	2,05E+11	215	0,000631	21235,5	2,05E+11
176	0,000592	21235,5	2,05E+11	216	0,000631	21235,5	2,05E+11
177	0,000592	21235,5	2,05E+11	217	0,000631	21235,5	2,05E+11
178	0,000592	21235,5	2,05E+11	218	0,000631	21235,5	2,05E+11
179	0,002329	21235,5	2,05E+11	219	0,00212	21235,5	2,05E+11
180	0,002329	21235,5	2,05E+11	220	0,00212	21235,5	2,05E+11

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
221	0,00212	21235,5	2,05E+11	261	0,000389	7850	2,05E+11
222	0,00212	21235,5	2,05E+11	262	0,000389	7850	2,05E+11
223	0,000736	15119	2,05E+11	263	0,00101	10815,7	2,05E+11
224	0,000736	15119	2,05E+11	264	0,00101	10815,7	2,05E+11
225	0,000736	15119	2,05E+11	265	0,00101	10815,7	2,05E+11
226	0,000736	15119	2,05E+11	266	0,00101	10815,7	2,05E+11
227	0,002329	10815,7	2,05E+11	267	0,000296	7850	2,05E+11
228	0,002329	10815,7	2,05E+11	268	0,000296	7850	2,05E+11
229	0,002329	10815,7	2,05E+11	269	0,000266	7850	2,05E+11
230	0,002329	10815,7	2,05E+11	270	0,000266	7850	2,05E+11
231	0,000736	10815,7	2,05E+11	271	0,000266	7850	2,05E+11
232	0,000736	10815,7	2,05E+11	272	0,000266	7850	2,05E+11
233	0,000736	10815,7	2,05E+11	273	0,000296	7850	2,05E+11
234	0,000736	10815,7	2,05E+11	274	0,000296	7850	2,05E+11
235	0,001262	10815,7	2,05E+11	275	0,000778	7850	2,05E+11
236	0,001262	10815,7	2,05E+11	276	0,000389	7850	2,05E+11
237	0,001262	10815,7	2,05E+11	277	0,000389	7850	2,05E+11
238	0,001262	10815,7	2,05E+11	278	0,000778	7850	2,05E+11
239	0,000389	7850	2,05E+11	279	0,000778	7850	2,05E+11
240	0,000389	7850	2,05E+11	280	0,000778	7850	2,05E+11
241	0,000389	7850	2,05E+11	281	0,000389	7850	2,05E+11
242	0,000389	7850	2,05E+11	282	0,000389	7850	2,05E+11
243	0,002329	10815,7	2,05E+11	283	0,00101	7850	2,05E+11
244	0,002329	10815,7	2,05E+11	284	0,00101	7850	2,05E+11
245	0,002329	10815,7	2,05E+11	285	0,00101	7850	2,05E+11
246	0,002329	10815,7	2,05E+11	286	0,00101	7850	2,05E+11
247	0,00101	10815,7	2,05E+11	287	0,00101	7850	2,05E+11
248	0,00101	10815,7	2,05E+11	288	0,00101	7850	2,05E+11
249	0,00101	10815,7	2,05E+11	289	0,00101	7850	2,05E+11
250	0,00101	10815,7	2,05E+11	290	0,00101	7850	2,05E+11
251	0,000736	10815,7	2,05E+11	291	0,00101	7850	2,05E+11
252	0,000736	10815,7	2,05E+11	292	0,00101	7850	2,05E+11
253	0,000736	10815,7	2,05E+11	293	0,00101	7850	2,05E+11
254	0,000736	10815,7	2,05E+11	294	0,00101	7850	2,05E+11
255	0,001262	10815,7	2,05E+11	295	0,000513	7850	2,05E+11
256	0,001262	10815,7	2,05E+11	296	0,000513	7850	2,05E+11
257	0,001262	10815,7	2,05E+11	297	0,000513	7850	2,05E+11
258	0,001262	10815,7	2,05E+11	298	0,000513	7850	2,05E+11
259	0,000389	7850	2,05E+11	299	0,000266	785	2,05E+11
260	0,000389	7850	2,05E+11	300	0,000266	785	2,05E+10

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
301	0,000266	785	2,05E+10	341	0,000582	13849	2,05E+11
302	0,000266	785	2,05E+10	342	0,000582	13849	2,05E+11
303	0,000266	785	2,05E+10	343	0,000582	13849	2,05E+11
304	0,000266	785	2,05E+10	344	0,000582	13849	2,05E+11
305	0,000266	785	2,05E+10	345	0,000582	13849	2,05E+11
306	0,000266	785	2,05E+10	346	0,000582	13849	2,05E+11
307	0,000266	785	2,05E+10	347	0,000582	13849	2,05E+11
308	0,000266	785	2,05E+10	348	0,000471	7850	2,05E+11
309	0,000266	785	2,05E+10	349	0,000471	7850	2,05E+11
310	0,000266	785	2,05E+10	350	0,000471	7850	2,05E+11
311	0,000266	785	2,05E+10	351	0,000471	7850	2,05E+11
312	0,000266	785	2,05E+10	352	0,000471	7850	2,05E+11
313	0,000266	785	2,05E+10	353	0,000471	7850	2,05E+11
314	0,000266	785	2,05E+10	354	0,000471	7850	2,05E+11
315	0,000266	785	2,05E+10	355	0,000471	7850	2,05E+11
316	0,000266	785	2,05E+10	356	0,000471	7850	2,05E+11
317	0,000266	785	2,05E+10	357	0,000471	7850	2,05E+11
318	0,000266	785	2,05E+10	358	0,000471	7850	2,05E+11
319	0,000266	785	2,05E+10	359	0,000471	7850	2,05E+11
320	0,000266	785	2,05E+10	360	0,000266	785	2,05E+10
321	0,000266	785	2,05E+10	361	0,000266	785	2,05E+10
322	0,000266	785	2,05E+10	362	0,000266	7850	2,05E+11
323	0,000266	785	2,05E+10	363	0,000266	7850	2,05E+11
324	0,000266	785	2,05E+10	364	0,000266	7850	2,05E+11
325	0,000266	785	2,05E+10	365	0,000266	7850	2,05E+11
326	0,000266	785	2,05E+10	366	0,000778	7850	2,05E+11
327	0,000266	7850	2,05E+11	367	0,000778	7850	2,05E+11
328	0,000266	785	2,05E+10	368	0,000266	7850	2,05E+11
329	0,000266	785	2,05E+10	369	0,000266	7850	2,05E+11
330	0,000266	785	2,05E+10	370	0,000266	7850	2,05E+11
331	0,000266	785	2,05E+10	371	0,000266	7850	2,05E+11
332	0,000582	14481,52	2,05E+11	372	0,000266	7850	2,05E+11
333	0,000582	14481,52	2,05E+11	373	0,000266	7850	2,05E+11
334	0,000582	14481,52	2,05E+11	374	0,000266	7850	2,05E+11
335	0,000582	14481,52	2,05E+11	375	0,000266	7850	2,05E+11
336	0,000582	14481,52	2,05E+11	376	0,000266	7850	2,05E+11
337	0,000582	14481,52	2,05E+11	377	0,000266	7850	2,05E+11
338	0,000582	14481,52	2,05E+11	378	0,000266	7850	2,05E+11
339	0,000582	14481,52	2,05E+11	379	0,000266	7850	2,05E+11
340	0,000582	13849	2,05E+11	380	0,000266	7850	2,05E+11

Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)	Elemento	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	E (PA)
381	0,000266	7850	2,05E+11	403	0,000266	785	2,05E+10
382	0,000266	7850	2,05E+11	404	0,000266	7850	2,05E+11
383	0,000266	7850	2,05E+11	405	0,000266	7850	2,05E+11
384	0,000266	7850	2,05E+11	406	0,000266	7850	2,05E+11
385	0,000266	7850	2,05E+11	407	0,000266	7850	2,05E+11
386	0,000778	7850	2,05E+11	408	0,000266	785	2,05E+10
387	0,000778	7850	2,05E+11	409	0,000266	785	2,05E+10
388	0,000778	7850	2,05E+11	410	0,000266	785	2,05E+10
389	0,000778	7850	2,05E+11	411	0,000266	785	2,05E+10
390	0,000778	7850	2,05E+11	412	0,000266	785	2,05E+10
391	0,000778	7850	2,05E+11	413	0,000266	785	2,05E+10
392	0,000266	785	2,05E+10	414	0,000266	785	2,05E+10
393	0,000266	785	2,05E+10	415	0,000266	785	2,05E+10
394	0,000266	785	2,05E+10	416	0,000266	785	2,05E+10
395	0,000266	785	2,05E+10	417	0,000266	785	2,05E+10
396	0,000266	7850	2,05E+11	418	0,000266	785	2,05E+10
397	0,000266	7850	2,05E+11	419	0,000266	785	2,05E+10
398	0,000266	7850	2,05E+11	420	0,000266	785	2,05E+10
399	0,000266	7850	2,05E+11	421	0,000266	785	2,05E+10
400	0,000266	785	2,05E+10	422	0,000266	785	2,05E+10
401	0,000266	785	2,05E+10	423	0,000266	785	2,05E+10
402	0,000266	785	2,05E+10				