

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise numérica de vigas mistas aço-concreto com protensão aderente e não aderente pelo método dos elementos finitos**

**Marina Iara Espina de Franco**

Porto Alegre  
2018

MARINA IARA ESPINA DE FRANCO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
COM PROTENSÃO ADERENTE E NÃO ADERENTE PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia, na área de Estruturas.

Porto Alegre  
2018

**MARINA IARA ESPINA DE FRANCO**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
COM PROTENSÃO ADERENTE E NÃO ADERENTE PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 7 de dezembro de 2018

Prof. Inácio Benvegno Morsch  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul  
orientador

Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul  
coorientador

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Ph.D. pela Concordia University  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Profa. Denise Bernaud Maghous (UFRGS)**  
Dra. pela École Nationale des Ponts et Chaussées

**Prof. Jean Marie Désir (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

A Deus, aos meus amados pais, Elnio e Marta, e,  
especialmente, à minha querida avó Iara. Por  
proporcionarem a força para a realização dos meus  
sonhos.

## AGRADECIMENTOS

Ao longo desta curta, porém intensa jornada do mestrado, não foram poucos os momentos difíceis. Muitas vezes duvidei de mim mesma, tive medo de não ser capaz de realizar este sonho. No entanto, como dizem, são nos momentos mais complicados que conhecemos os verdadeiros amigos, aqueles que não só te apoiam como também te impulsionam para frente, que acreditam em ti, nos teus sonhos e na tua capacidade em realizá-los. Então, gostaria de expressar aqui minha eterna e sincera gratidão a todas estas pessoas, cujas palavras de carinho, incentivo e tranquilidade me fizeram prosseguir na concretização desta vitória.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me abençoar, me proteger e me guiar ao longo de toda minha vida. Por me dar força e persistência para vencer cada um dos desafios em busca da realização dos meus sonhos. Por iluminar os meus dias e encher meu coração de amor e esperança, mesmo nos momentos mais tristes e difíceis vividos nos últimos meses desta caminhada.

À minha querida família, a maior bênção da minha vida, especialmente aos meus pais, Marta Iara Espina de Franco e Elnio David Dansa de Franco, que me mostram todos os dias o significado do amor incondicional. A gratidão que sinto pela dedicação, confiança, apoio e incentivo que sempre me deram é imensurável. O orgulho que sentem por mim só não é maior que o que eu sinto por eles. Às minhas irmãs, Marcela Andrea e Luiza Helena, pela amizade, carinho e cumplicidade que sempre tivemos umas com as outras. Apesar de nossas tantas divergências, o nosso amor de irmã sempre prevaleceu.

Ao meu avô Manoel (*in memoriam*), pelo amor e orgulho que sempre sentiu de mim. Eu sei o quanto ele ficaria feliz em me ver Mestre. À minha incrível e amada avó Iara, por ser bem mais que uma avó para mim, ser a pessoa que eu mais confio, minha primeira e melhor amiga, minha cúmplice, meu refúgio. Por nunca deixar de se fazer presente na minha vida, ainda que vivêssemos fisicamente distantes. Por sempre me transmitir confiança, me ouvir e me aconselhar desde os meus primeiros desafios. O seu amor e a felicidade que ela sentiria ao me ver concluir o mestrado não permitiu que eu desistisse.

Ao professor Inácio Morsch, pela amizade, por acreditar e confiar na minha capacidade, pelos ensinamentos oferecidos e pela compreensão a todas as dificuldades enfrentadas nesta caminhada.

Ao meu coorientador Jorge Tamayo, pela dedicação, pela paciência, por não medir esforços para que este trabalho fosse realizado, por estar sempre disponível a me ajudar, por me passar tantos conhecimentos e por me guiar na elaboração desta dissertação.

A todos os mestres que tive ao longo da minha vida acadêmica, desde os primeiros professores que tive na infância até os do mestrado, por me lapidarem e me proporcionarem a base de conhecimento necessária para que eu chegasse até aqui.

A todas as pessoas especiais que caminharam ao meu lado nestes dois anos: minha amiga-irmã Thaís Macêdo, pelo nosso companheirismo de longa data ser uma das mais importantes conquistas da minha vida; aos meus colegas de mestrado, por todos os momentos que compartilhamos juntos, dentro e fora das salas de aula, especialmente ao Wallace Ferrão, por todas as vezes que estudou comigo, me ensinou, por todas as risadas, as festas e por toda amizade e carinho que teve comigo desde o início; à minha amiga Bianca Weimer, pela parceria, afeto, cumplicidade e pelas inúmeras experiências que vivemos nestes anos; aos amigos do CEMACOM, por muitas vezes ouvirem minhas queixas e pela ajuda no que quer que eu precisasse, especialmente ao Felipe Quevedo e ao Lucas Reginato, que me auxiliou no início da dissertação. Agradeço de forma geral a todos os meus amigos, os que conheci durante o mestrado e os de antes, por me incentivarem a seguir nesta jornada.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela formação profissional de qualidade que tive tanto na graduação quanto no mestrado e pela oportunidade de contribuir para o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil desta. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo suporte financeiro que permitiu a realização desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que se interessaram por este meu trabalho, que me questionaram ao longo do seu desenvolvimento e que, por isso, entenderam que uma laje de concreto com armadura de protensão conectada a uma viga de aço através de conectores de cisalhamento chama-se viga mista protendida. E, é claro, a todos que valorizam a pesquisa, o ensino e a educação no nosso país.

Quando não há nada mais a ser dito, silencia. Quando não há mais nada a ser feito, permite apenas ser, apenas estar e fica na companhia do teu coração e este indicará o momento apropriado para agires.

Quando a lentidão dos dias acomodar tua vontade, enlaçando-te com os nós da intranquilidade, descansa e refaz tua energia.

Não há pressa, a prioridade é que tu encontres novamente a tua essência para que tenhas presente em ti a alegria de ser e estar.

Quando o vazio se instalar em teu peito, dando-te a sensação de angústia e esgotamento, repara tua atenção e encontra em ti mesmo a compreensão para este estado.

É necessário descobrirmo-nos em tais estados, para que estes não se transformem no desconhecido, no incontrolável. Tudo pode ser mudado, existe sempre uma nova escolha para qualquer opção errada que tenhas feito.

Quando ouvires do teu coração que não há nenhuma necessidade em te preocupares com a vida, saibas que ele apenas quer que compreendas que nada é tão sério a ponto de te perderes para sempre da tua divindade, ficando condenado a não ver mais a luz que é tua por natureza. Não te preocupes, se estiveres atento a ti mesmo verás que a sabedoria milenar está contigo, conduzindo-te momento a momento àquilo que realmente necessitas viver.

Confia e vai em teu caminho de paz.

Nada é mais gratificante que ver alguém submergindo da escuridão apenas por haver acreditado na existência da luz. Ela sempre esteve presente... Era só abrir os olhos....

*São Francisco de Assis*

## RESUMO

FRANCO, M. I. E. de. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto com protensão aderente e não aderente pelo método dos elementos finitos**. 2018. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Nos projetos de edifícios e pontes, são comumente utilizadas vigas mistas de aço e concreto contínuas. Porém, a exposição do concreto a tensões de tração e do aço a tensões de compressão nas regiões de flexão negativa provoca deficiências em vista da durabilidade, resistência e vida útil dessas estruturas. O uso da protensão dentro da laje de concreto é uma técnica comprovadamente eficaz para aumentar a capacidade máxima desse tipo de estrutura ao induzir tensões e esforços iniciais na viga que se opõem às causadas por cargas externas. O alto grau de complexidade nos projetos de vigas mistas protendidas requer uma modelagem numérica eficiente da contribuição dos cabos de protensão para as equações de equilíbrio da estrutura global. O presente trabalho trata-se de uma contribuição ao código computacional em Fortran 90 desenvolvido por Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016) e Wayar (2016) que tem capacidade de representar vigas mistas em análises de curta e longa duração. Este trabalho almeja incluir um procedimento para considerar a protensão interna na laje dessas estruturas. A formulação implementada no código foi inicialmente proposta por Póvoas (1991) para cabos curvos de protensão a serem incluídos em modelos baseados em elementos finitos para a análise não linear de estruturas protendidas. Tal formulação é incorporada em elementos de casca grossa isoparamétrica utilizados para a modelagem do concreto. Para a devida consideração dos aspectos envolvidos na contribuição da armadura de protensão para o equilíbrio da estrutura, os cabos são discretizados automaticamente em elementos finitos unidimensionais de acordo com a malha escolhida para o elemento de concreto. De forma a minimizar o tempo necessário para a análise das estruturas, incluiu-se no código o *solver PARDISO* que reduz o uso de memória para o armazenamento da matriz de rigidez global da estrutura e soluciona os sistemas de equações lineares via memória distribuída entre multiprocessadores. A implementação da formulação proposta foi feita através da criação de sub-rotinas ao código computacional. Para a validação destas, comparações dos resultados obtidos foram feitas com valores experimentais, analíticos e numéricos disponíveis na literatura técnica. Tais comparações comprovam a eficiência do programa em analisar vigas mistas aço-concreto com protensão interna.

**Palavras-chave:** *viga mista aço-concreto; protensão interna; método dos elementos finitos.*



## ABSTRACT

FRANCO, M. I. E. de. **Numerical analysis of steel-concrete composite beams with bonded and unbonded prestress by using finite element method**. 2018. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

In design of buildings and bridges, continuous steel and concrete composite beams are generally used. However, the exposure of concrete to tensile stresses and steel to compressive stresses in hogging moment regions causes deficiencies in view of the durability, strength and lifespan of these structures. The use of internal prestressing in concrete slab is a proven technique to increase the ultimate flexural strength of this type of structure by inducing initial stresses in the beam that oppose those caused by external loads. The high degree of complexity in the design of prestressed composite beams requires an efficient numerical modeling of the contribution of prestressing tendons to the structural equilibrium equations. The present work is a contribution to the Fortran 90 language code developed by Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016) e Wayar (2016) which has the ability to represent composite beams in short and long-term analysis. This work aims to include a procedure to consider the internal prestressing in the slab of these structures, as well as the losses caused by the introduction of the prestress. The formulation implemented in the code was initially proposed by Póvoas (1991) for curved prestressing steel tendons to be included in finite element based models for the non-linear analysis of prestressed concrete structures. Such formulation is incorporated into curved isoparametric thick shell elements used for concrete modeling. In order to consider the aspects involved in the contribution of prestress to the structure equilibrium, prestressing tendons are automatically discretized in 1-D curved finite elements in accordance with the finite element mesh chosen for the concrete structure. For minimize the time required for the analysis of the structures, the PARDISO solver was included in the code which reduces the memory usage for the storage of the global stiffness matrix of the structure and solves linear systems of equations on distributed memory multiprocessors. The implementation of the proposed formulation was made through the creation of subroutines to the computational code. For its validation, comparisons of the obtained results were made with experimental, analytical and numerical values available in the technical literature. Such comparisons confirm the program's efficiency in analyzing steel-concrete composite beams with internal prestressing.

**Key-words:** *steel-concrete composite beams; internal prestress; finite element method.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Seções transversais típicas de vigas mistas.....	12
Figura 2.2 – Interação aço-concreto no comportamento estrutural de vigas mistas .....	15
Figura 2.3 – Diagrama força x deslocamento relativo aço-concreto .....	16
Figura 2.4 – Tipos de conectores de cisalhamento .....	16
Figura 2.5 – Efeito da protensão em estruturas de concreto .....	17
Figura 2.6 – Diferenças entre estruturas total e parcialmente protendidas e estruturas de concreto armado convencionais .....	19
Figura 2.7 – Variação da força de protensão ao longo do comprimento de uma viga ....	20
Figura 2.8 – Característica da fissuração em vigas protendidas na região situada entre as cargas aplicadas após atingir-se a carga limite .....	21
Figura 2.9 – Viga mista contínua com cabos de protensão a) retos e b) trapezoidais ....	23
Figura 2.10 – Protensão da laje de concreto de vigas mistas nas regiões adjacentes aos apoios internos .....	24
Figura 2.11 – Protensão da viga por tensionamento de placa de aço soldada a) à seção T e b) ao perfil I .....	27
Figura 2.12 – Sistema <i>Preflex</i> .....	28
Figura 2.13 – Protensão da viga de aço através de cabos externos b) retos e c) trapezoidais .....	28
Figura 3.1 – Montagem do modelo numérico para a viga mista .....	31
Figura 3.2 – Representação do a) elemento tridimensional sólido quadrático b) elemento de casca degenerado correspondente .....	32
Figura 3.3 – Representação da viga de aço a) elemento quadrilátero com grau de liberdade rotacional b) elemento quadrilátero de placa .....	33
Figura 3.4 – Elemento tridimensional de barra viga-coluna .....	35
Figura 3.5 – Representação unidimensional do diagrama tensão-deformação dos diferentes modelos usados para o concreto .....	37
Figura 3.6 – Diagrama de retenção de tensões de tração para o concreto fissurado .....	40
Figura 3.7 – Diagrama tensão-deformação bilinear para o aço de reforço .....	41

Figura 3.8 – Critério de plastificação em tração e compressão para o aço estrutural .....	44
Figura 3.9 – Representação das rigidezes tangente e secante dos conectores de cisalhamento .....	45
Figura 4.1 – Diagrama tensão-deformação bilinear para o aço de protensão .....	49
Figura 4.2 – Representação do cabo de protensão incorporado dentro do elemento de casca degenerada .....	50
Figura 4.3 – Geometria da armadura de protensão .....	50
Figura 4.4 – Forças atuantes em um segmento infinitesimal de cabo .....	60
Figura 4.5 – Correção da relaxação intrínseca .....	67
Figura 5.1 – Geometria de uma viga de aço de perfil I .....	70
Figura 5.2 – Malha de elementos finitos para viga de aço .....	70
Figura 5.3 – Geometria de laje de concreto .....	70
Figura 5.4 – Malha de elementos finitos para laje de concreto .....	70
Figura 5.5 – Malha de elementos finitos para conectores de cisalhamento .....	71
Figura 5.6 – Malha final de elementos finitos para uma viga mista após a união das malhas de cada um dos elementos constituintes .....	72
Figura 5.7 – Direção das normais dos elementos finitos .....	73
Figura 5.8 – Aba GENERAL para viga mista protendida .....	74
Figura 5.9 – Aba do material 9 para o aço das cordoalhas (igual para o material 10) ....	77
Figura 5.10 – Janela para deslocamento da malha da laje para borda inferior da mesma .....	79
Figura 5.11 – Geometria do cabo e malha da malha de concreto na borda inferior da laje .....	80
Figura 5.12 – Janela para cópia do cabo e da malha de concreto na cota igual à espessura da laje .....	80
Figura 5.13 – Cópia do cabo e da malha de concreto na cota igual à espessura da laje .	81
Figura 5.14 – Traçado do cabo dividido pelos elementos de concreto que atravessa .....	81
Figura 5.15 – Exemplo de arquivo com quatro cabos protendidos .....	82
Figura 5.16 – Janela para atribuição de dados para cabos protendidos .....	82

Figura 5.17 – Janela para atribuição das condições dos cabos .....	83
Figura 5.18 – Fluxograma do programa Vimis .....	85
Figura 5.19 – Exemplos de armazenamentos de matrizes tipo banda .....	88
Figura 5.20 – Ilustração de formatos CSR de entrada de dados para o <i>solver</i> <i>PARDISO</i> (a) de uma matriz esparsa não simétrica de ordem 8 e (b) da parte triangular superior de uma matriz esparsa simétrica .....	88
Figura 5.21 – Sub-rotina “loads” para análise de viga mista com protensão interna .....	90
Figura 5.22 – Diagrama de fluxo da nova versão da sub-rotina “stiff” .....	91
Figura 5.23 – Diagrama de fluxo da nova versão da sub-rotina “finter” .....	92
Figura 5.24 – Interface do GiD para pós-processamento de uma viga mista .....	93
Figura 5.25 – Exemplo de arquivo <i>rescabl.dat</i> com as coordenadas naturais de um cabo .....	94
Figura 5.26 – Exemplo de arquivo <i>rescabl.dat</i> para armadura de protensão não aderente .....	94
Figura 6.1 – Representação das vigas a) A1 e A2, b) B1 e B2, c) C1 e C2 e d) D1 e D2 .....	97
Figura 6.2 – Malha de elementos finitos para as vigas a) com quatro elementos e b) com dezesseis elementos de concreto .....	98
Figura 6.3 – Malha de elementos finitos para o cabo das vigas a) A1 e D1, b) B1 e c) C1 para a malha de concreto 4x1 .....	98
Figura 6.4 – Malha de elementos finitos para o cabo das vigas a) A1 e D1, b) B1 e c) C1 para a malha de concreto 8x2 .....	99
Figura 6.5 – Configuração geométrica das vigas protendidas de Tao e Du (1985) .....	101
Figura 6.6 – Malha de elementos finitos para os protótipos de Tao e Du (1985) .....	102
Figura 6.7 – Comparação das flechas no centro do vão da viga A1 .....	103
Figura 6.8 – Comparação das flechas no centro do vão da viga A2 .....	103
Figura 6.9 – Comparação das flechas no centro do vão da viga D3 .....	104
Figura 6.10 – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A1 ao longo do carregamento .....	105
Figura 6.11 – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A2 ao longo do carregamento .....	106

Figura 6.12 – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A1 ao longo das flechas .....	107
Figura 6.13 – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A2 ao longo das flechas .....	107
Figura 6.14 – Comparação da evolução da componente de tensão $\sigma_x$ nas fibras superiores das vigas A1, A2 e D3 sob carga última (unidades em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	108
Figura 6.15 – Padrão de fissuração sob carga de ruptura para a) as fibras inferiores e b) fibras superiores da viga A1 (unidades em centímetros) .....	109
Figura 6.16 – Configuração geométrica da viga mista contínua de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) .....	110
Figura 6.17 – Curva de rigidez dos conectores da viga de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) .....	111
Figura 6.18 – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) .....	113
Figura 6.19 – Deflexões na viga mista de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) considerando as ações da a) fluência, b) retração e c) protensão aderente na laje no tempo final de análise .....	114
Figura 6.20 – Variação da força de protensão ao longo do tempo de análise .....	115
Figura 6.21 – Elevação e seções transversais da viga mista de El-Zohairy et al. (2017) (unidades em milímetros) .....	116
Figura 6.22 – Curva de rigidez dos conectores da viga de El-Zohairy et al. (2017) .....	117
Figura 6.23 – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga de El-Zohairy et al. (2017) .....	119
Figura 6.24 – Vistas da malha de elementos finitos empregada para modelar a viga BH1: a) em planta e b) longitudinal .....	119
Figura 6.25 – Comparação das deflexões para a viga BH1 obtidas por El-Zohairy et al. (2017) e pelo programa Vimis .....	1210
Figura 6.26 – Comparação das forças de protensão ao longo da aplicação do carregamento para os casos de armadura aderente e não aderente .....	121
Figura 6.27 – Comparação das deflexões da viga BH1 sem protensão e com protensão interna .....	122
Figura 6.28 – Deformada da viga com protensão aderente sob carregamento último ....	123
Figura 6.29 – Deformada da viga com protensão não aderente sob carregamento último (ampliada 15 vezes) .....	123

Figura 6.30 – Componente da tensão $\sigma_{xx}$ do concreto na camada intermediária da laje da viga mista com cabos não aderentes. ....	123
Figura 6.31 – Configuração geométrica da viga mista E .....	124
Figura 6.32 – Curva de rigidez dos conectores da viga de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992) .....	125
Figura 6.33 – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga mista E .....	127
Figura 6.34 – Vistas da malha de elementos finitos empregada para modelar a viga E: a) em planta e b) longitudinal .....	127
Figura 6.35 – Comparação das deflexões para a viga E .....	128
Figura 6.36 – Distribuição do deslizamento dos conectores ao longo da viga E sob carga máxima .....	129
Figura 6.37 – Distribuição do deslizamento dos conectores ao longo da viga E apenas com a aplicação da força de protensão .....	130
Figura 6.38 – Deformada da viga E sob carga última .....	130
Figura 6.39 – Distribuição de tensões no aço do perfil I da viga E .....	131

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação dos tempos de análise dos dois <i>solvers</i> adotados pelo programa Vimis .....	90
Tabela 2 – Comparação de resultados para as vigas de Póvoas (1991) .....	100
Tabela 3 – Dados dos materiais das vigas de Tao e Du (1985) .....	102
Tabela 4 – Comparação dos momentos últimos obtidos experimentalmente com resultados analíticos e obtidos pelo Vimis para as vigas com protensão não aderente .....	105
Tabela 5 – Comparação da tensão última na armadura de protensão não aderente obtidos experimentalmente com resultados analíticos e obtidos pelo Vimis .....	106
Tabela 6 – Propriedades dos materiais para a viga mista contínua de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) .....	112
Tabela 7 – Parâmetros da cadeia de Kelvin para a viga mista contínua .....	112
Tabela 8 – Propriedades dos materiais para a viga mista de El-Zohairy et al. (2017) ....	118
Tabela 9 – Comparação dos resultados numéricos obtidos por El-Zohairy et al. (2017) e pelo Vimis .....	122
Tabela 10 – Propriedades dos materiais para a viga mista de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992) .....	126
Tabela 11 – Cargas de escoamento e ruptura da viga mista E .....	128

## **LISTA DE SIGLAS**

*ACI – American Concrete Institute*

*AASHTO – American Association of State Highway and Transportation Official*

*MEF – Método dos Elementos Finitos*

*NBR – Norma Brasileira*

*PARDISO – Parallel Sparse Direct and Multi-Recursive Iterative Linear Solvers*



## LISTA DE SÍMBOLOS

### I – LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_p$  – área da seção transversal de aço da armadura de protensão

$A_s$  – área da seção transversal de aço da armadura de reforço

$(B_i)_p, (B_j)_p$  – sub-matrizes de deformação associadas aos nós  $i$  e  $j$  do elemento de casca

$B_p(\tau)$  – matriz de deformação da armadura de protensão

$C$  – magnitude do incremento de deformação atual do cabo de protensão

$E_c$  – módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$E_c(t_0)$  – módulo de elasticidade do concreto no tempo de aplicação do carregamento ( $t_0$ )

$E_c(28)$  – módulo de elasticidade aos 28 dias de idade do concreto

$E_p$  – módulo de elasticidade longitudinal do aço de protensão

$E_s$  – módulo de elasticidade longitudinal do aço

$E'_s$  – módulo de elasticidade do aço referente ao segundo tramo da curva tensão-deformação

$E_T$  – módulo de elasticidade tangencial do aço de protensão

$E_\mu$  – módulo de elasticidade do concreto da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

$F_\alpha$  – força cortante no conector de cisalhamento na direção  $\alpha$

$G_f$  – energia de fratura

$H'$  – módulo de endurecimento do material

$[J]$  – matriz Jacobiana

$J(t, t_0)$  – função de fluência para o concreto com envelhecimento

$(K_{ij})_p$  – contribuição da armadura de protensão para a formação da sub-matriz de rigidez que relaciona os nós  $i$  e  $j$  do elemento de casca

$K_p$  – matriz de rigidez de um elemento de cabo de protensão

$N$  – número total de elementos da cadeia de Kelvin

$N_j^i(\tau)$  – funções de forma para um elemento unidimensional parabólico

$N_j(\xi, \eta, \zeta)$  – funções de forma para o nó  $j$  avaliado em  $(\xi, \eta, \zeta)$  do cabo de protensão

$P_0$  – força de protensão inicial aplicada

$P_p$  – vetor que compreende a contribuição do cabo de protensão para a determinação das forças nodais equivalentes da estrutura global

$\{P_i\}_p$  – vetor que compreende a contribuição do cabo de protensão para a determinação das forças nodais equivalentes referentes ao nó  $i$  do elemento de concreto por ele atravessado

$P(s)$  – força de protensão conduzida no cabo de protensão

$V(t)$  – volume de concreto solidificado (função do envelhecimento)

## II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a, b$  – constantes que definem a forma e o tamanho da curva força cortante-deslocamento relativo para os conectores de cisalhamento

$\{d\}$  – vetor de deslocamentos nodais da armadura de protensão no referencial global

$d^p \varepsilon_{ij}$  – incremento de deformação plástica do concreto

$d\varepsilon_{el}$  – incremento de deformação elástica do aço de protensão

$d\varepsilon_{pl}$  – incremento de deformação plástica do aço de protensão

$d\varepsilon$  – incremento de deformação do aço de protensão

$d\lambda$  – constante de proporcionalidade que determina a magnitude do incremento de deformação plástica do concreto

$d\sigma_p$  – incremento de tensão do aço de protensão

$\{i\}, \{j\}, \{k\}$  – vetores de base unitários do sistema de coordenadas global

$\{i'\}, \{j'\}, \{k'\}$  – vetores de base unitários do sistema de coordenadas local

$f(\sigma)$  – função de plastificação do concreto

$f_c$  – resistência máxima à compressão do concreto

$f_{py}$  – tensão de escoamento do aço de protensão

$f_{pu}$  – tensão de ruptura do aço de protensão

$f_t$  – resistência máxima à tração do concreto

$g(s)$  – função que determina a variação do incremento de deformação do cabo de protensão ao longo do seu perfil

$h$  – espessura da peça

$k$  – parâmetro de endurecimento

$l_p$  – comprimento do segmento de cabo de protensão incorporado dentro do elemento de casca

$m$  – número de passos por década

$n$  – quantidade de nós que definem o elemento de cabo de protensão

$s_\alpha$  – deslocamento relativo do conector de cisalhamento associado à direção  $\alpha$

$t$  – tempo total de análise

$t_0$  – tempo de aplicação do primeiro carregamento aplicado à estrutura ou a primeira deformação imposta

$t_r$  – passo de tempo de aplicação de carregamento à estrutura

$t(\tau)$  – vetor tangente unitário de um elemento de cabo de protensão

$u, v, w$  – componentes do deslocamento no referencial global

$u', v', w'$  – componentes do deslocamento no referencial local

$u_{c,p}(s)$  – deslocamento do concreto circundante da armadura de protensão

$u_p(s)$  – deslocamento da armadura de protensão

$u_r(s)$  – deslizamento relativo entre a estrutura e o cabo de protensão

$v$  – norma do vetor unitário de um elemento de cabo de protensão

$v(\tau)$  – vetor unitário de um elemento de cabo de protensão

$(x,y,z)$  – sistema de coordenadas global

$(x',y',z')$  – sistema de coordenadas local

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  – sistema de coordenadas nodal

$x_p$  – vetor posição do segmento de cabo de protensão embutido em um elemento de casca

$w_k$  – pesos associados aos pontos de integração considerados para o cabo de protensão

### III– LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$[\Theta]$  – matriz de rotação que relaciona os sistemas coordenados local e global

### IV– LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$  – coeficiente de contribuição da armadura de protensão na rigidez global da estrutura

$\{\Delta d\}$  – incremento de deslocamentos nodais no referencial global

$\Delta l_p$  – variação do comprimento do cabo de protensão

$\Delta \varepsilon_{c,p}$  – incremento de deformação do concreto circundante da armadura de protensão

$\Delta \varepsilon_p^k$  – incremento de deformação plástica no incremento genérico  $k$

$\Delta \varepsilon_p$  – incremento de deformação axial na armadura de protensão

$\Delta\varepsilon_{p,m}$  – incremento de deformação médio induzido no cabo protendido

$\Delta\varepsilon_{p,T}$  – incremento de deformação de origem térmica no cabo de protensão

$\Delta P$  – incremento de força de protensão

$\Delta\sigma_p$  – incremento de tensão no cabo de protensão

$\Delta\sigma_{p,T}$  – incremento de tensão de origem térmica no cabo de protensão

$\Delta\sigma_{pt,r}$  – diminuição de tensão na armadura de protensão devido à relaxação intrínseca do aço verificada ao final do tempo  $t$  (em horas)

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  – incrementos de posição nas direções  $x$  e  $y$  do sistema coordenado global, respectivamente

$\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  – incrementos de posição nas direções  $\xi$  e  $\eta$  do sistema coordenado natural, respectivamente

$\partial f(\sigma)/\partial\sigma_{ij}$  – gradiente que define a direção perpendicular à superfície de escoamento atual do incremento de deformação plástica

$(\xi, \eta, \zeta)$  – sistema de coordenadas natural

$\varepsilon_{ct}$  – deformação correspondente à máxima tração

$\varepsilon_{tm}$  – deformação máxima em função do grau do mecanismo de aderência considerado entre a armadura e o concreto

$\varepsilon_u$  – deformação total última do concreto

$\varepsilon'_x$  – deformação axial da armadura de protensão em relação ao sistema de coordenadas local

$\gamma(t, t_0)$ ,  $\varphi(t, t_0)$  – função de fluência para um material sem envelhecimento

$\eta_\mu$  – viscosidade da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

$\mu$  – coeficiente de atrito da armadura de protensão

$\sigma_0$  – tensão efetiva equivalente (tensão de compressão de um ensaio uniaxial)

$\sigma_p$  – tensão no cabo de protensão

$\sigma_{p0}$  – tensão inicial no cabo de protensão

$\sigma_{p,k}$  – tensão instalada nos pontos de integração do elemento unidimensional de armadura de protensão

$\sigma_{py}$  – tensão de escoamento do aço de protensão

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x\sigma_y$  – tensões normais atuantes no plano estrutural

$\sigma_y^k$  – tensão de escoamento correspondente ao incremento de carga  $k$

$\sigma_y(k)$  – tensão de escoamento relacionada ao parâmetro de endurecimento

$\sigma_z$  – tensão normal à superfície média do elemento de concreto

$\chi$  – curvatura do segmento de cabo de protensão

$\tau$  – coordenada curvilínea de um segmento de cabo de protensão

$\tau_\mu$  – tempo de retardamento à fluência da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – tensões cisalhantes atuantes no plano estrutural

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>2</b>
1.1 OBJETIVOS .....	3
1.2 JUSTIFICATIVA .....	4
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	6
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	9
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>11</b>
2.1 VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO .....	11
2.2 CONECTORES DE CISALHAMENTO .....	15
2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROTENSÃO .....	17
2.3.1 Classificação da protensão .....	17
2.3.2 Caracterização do comportamento de peças protendidas .....	19
2.3.3 Perdas de protensão .....	21
2.4 PROTENSÃO EM VIGAS MISTAS .....	22
2.4.1 Protensão interna .....	24
2.4.2 Protensão externa .....	26
<b>3 MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO- CONCRETO .....</b>	<b>30</b>
3.1 REPRESENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS .....	30
3.1.1 Elemento finito para a laje de concreto .....	31
3.1.2 Elemento finito para o perfil de aço .....	33
3.1.3 Elemento finito para os conectores .....	34
3.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS .....	35
3.2.1 Modelo elasto-plástico para o concreto .....	36
3.2.1.1 Modelo para o concreto comprimido .....	36

3.2.1.2 Modelo para o concreto tracionado .....	38
3.2.1.3 Modelo para a armadura de reforço .....	40
3.2.2 Modelo visco-elástico para o concreto .....	41
3.2.3 Modelo para o aço estrutural .....	43
3.2.4 Modelo para os conectores .....	45
3.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO INCREMENTAL ITERATIVA .....	45
<b>4 MODELAGEM NUMÉRICA DA PROTENSÃO INTERNA .....</b>	<b>47</b>
4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO DE PROTENSÃO .....	48
4.2 FORMULAÇÃO DA ARMADURA DE PROTENSÃO .....	50
4.2.1 Obtenção do sistema de coordenadas naturais .....	51
4.2.2 Definição da matriz de deformação .....	53
4.2.3 Matriz de rigidez para armadura aderente .....	56
4.2.4 Matriz de rigidez para armadura não aderente .....	57
4.3 FORÇAS CONDUZIDAS PELA ARMADURA DE PROTENSÃO ...	58
4.3.1 Armadura aderente .....	59
4.3.2 Armadura não aderente .....	59
4.4 APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO .....	64
4.5 MODELO DE RELAXAÇÃO DO AÇO DE PROTENSÃO .....	65
<b>5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL NO PROGRAMA</b>	<b>68</b>
<b>VIMIS .....</b>	
5.1 PRÉ-PROCESSAMENTO ATRAVÉS DO <i>SOFTWARE</i> GID .....	68
5.1.1 Geração e união de cada malha da viga mista .....	69
5.1.2 Atribuição do <i>Problem Type</i> e definição dos dados para a viga mista	73
5.1.2.1 Dados gerais .....	74
5.1.2.2 Materiais .....	75
5.1.2.3 Condições da estrutura .....	77
5.1.3 Geração da malha da armadura de protensão .....	78
5.1.4 Atribuição do <i>Problem Type</i> e definição dos dados para os cabos .....	82



5.2 MODIFICAÇÃO E CRIAÇÃO DE ROTINAS NO PROGRAMA VIMIS .....	84
5.2.1 Implementação do <i>solver PARDISO</i> .....	86
5.2.2 Rotinas referentes à protensão da estrutura .....	90
5.3 PÓS-PROCESSAMENTO ATRAVÉS DO <i>SOFTWARE GID</i> .....	93
<b>6 ANÁLISES NUMÉRICAS .....</b>	<b>95</b>
6.1 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DA PROTENSÃO .....	95
6.1.1 Características estruturais .....	95
6.1.2 Resultados dos testes numéricos .....	99
6.2 VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDAS .....	101
6.2.1 Características estruturais .....	101
6.2.2 Análise dos resultados obtidos pelo programa Vimis .....	103
6.3 VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO PROTENDIDAS .....	109
6.3.1 Dezi, Leoni e Tarantino (1996) .....	109
6.3.1.1 Características estruturais .....	110
6.3.1.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis .....	113
6.3.2 El-Zohairy et al. (2017) .....	115
6.3.2.1 Características estruturais .....	115
6.3.2.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis .....	119
6.3.3 Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992) .....	124
6.3.3.1 Características estruturais .....	124
6.3.3.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis .....	128
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>132</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>134</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>139</b>
<b>ANEXO A .....</b>	<b>142</b>
<b>ANEXO B .....</b>	<b>146</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Há mais de cem anos, a construção civil em todo mundo utilizou-se de estruturas de concreto e aço, mas foi a partir da década de 1960 que, como forma de se aliar as competências de cada um desses materiais, tanto em termos estruturais como construtivos, se desenvolveram sistemas estruturais compostos por elementos mistos de aço e concreto.

O sistema misto aço-concreto é caracterizado por um perfil de aço (laminado, soldado ou formado a frio) trabalhando em conjunto com o concreto (geralmente armado), o que pode vir a formar um pilar misto, uma laje mista, uma viga mista ou até mesmo uma ligação mista. A viabilização da ação mista entre esses elementos pode ser realizada de forma mecânica (conectores, mossas, ressaltos etc.), por atrito ou por simples aderência e repartição de cargas, como em pilares sujeitos apenas à força normal de compressão.

A combinação do excelente desempenho do aço quando submetido a esforços de tração e do concreto quando solicitado em compressão acaba por gerar inúmeras vantagens na utilização desses tipos de estruturas frente às soluções estruturais convencionais. Dentre estas vantagens podem ser citadas, por exemplo, a redução do peso próprio e volume da estrutura, o menor tempo de execução da obra, a possibilidade da dispensa de formas e escoramentos e a capacidade de vencer grandes vãos.

Na construção de edifícios e, principalmente, pontes, tem-se utilizado em larga escala o sistema misto aço-concreto do tipo viga mista. Neste tipo de sistema, uma laje de concreto é apoiada sobre um perfil de aço de seção I formando um conjunto de seção T. A interação entre eles é feita de forma mecânica, usualmente através dos chamados *stud*, que são os conectores de cisalhamento mais comuns e que consistem em uma cabeça e uma haste lisa conectada ao componente de aço por um colar de solda (OEHLERS; BRADFORD, 1999). Esses conectores têm a função de resistir ao deslizamento longitudinal e impedirem a separação vertical entre os componentes, além de permitirem a transferência do esforço cortante entre os elementos viga de aço e laje de concreto. Geralmente os conectores de cisalhamento não são completamente rígidos.

As vigas mistas podem ser apoiadas de forma simples ou podem ser contínuas. Nesse último caso, a continuidade das vigas representa um método estrutural eficiente em diversos sistemas estruturais devido a vantagens adicionais associadas à redistribuição favorável das forças

internas em todo o membro e à facilitada satisfação das verificações de serviço (VASDRAVELLIS et al., 2012).

Segundo Nie et al. (2009), em relação às vigas simplesmente apoiadas, o uso das vigas mistas contínuas é mais proveitoso, pois estende o alcance elástico do comportamento estrutural, aumenta a capacidade última do carregamento, diminui a deformação sob carregamento de serviço, ajuda a controlar o tamanho das fissuras na laje de concreto e melhora o comportamento à fadiga e fratura.

No entanto, o dimensionamento e a análise das vigas mistas contínuas são bem mais complicados devido ao seu distinto comportamento nas regiões de momento positivo (*sagging*) e negativo (*hogging*). Além disso, estas regiões de momento fletor negativo, ou seja, as regiões dos apoios internos das vigas contínuas, não só submetem a laje de concreto a esforços de tração, como também sujeitam a mesa inferior da viga de aço a tensões de compressão, gerando, assim, deficiências em vista da durabilidade, resistência e vida útil das vigas mistas.

Uma possibilidade de mitigar estes problemas é utilizar a protensão nestas regiões de momento fletor negativo, já que a introdução de esforços de tração na laje pelos cabos protendidos acarreta num aumento da capacidade das vigas mistas contínuas, numa redução da fissuração do concreto da laje, bem como reduz significativamente a deflexão da mesma. Como se vê, a protensão gera benefícios em termos de servicibilidade e rigidez global da estrutura.

## 1.1 OBJETIVOS

O estudo de viga mista aço-concreto é alvo de pesquisa no Centro de Mecânica Aplicada e Computacional da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CEMACOM/UFRGS) desde 2011, quando Tamayo (2011) desenvolveu um código computacional em linguagem Fortran 90 visando a análise desse tipo de estrutura para cargas de curta duração no regime elástico, de serviço e colapso, considerando a não linearidade física dos materiais que a compõe. Dois anos mais tarde, Dias (2013) introduziu nesse código a possibilidade de se analisar os efeitos de longa duração, fluência e retração do concreto, considerando cargas de serviço. Essa análise foi complementada por Moreno (2016) ao inserir novos modelos de predição dos efeitos diferidos. A capacidade de se protender a viga mista com cabos externos foi inserida graças ao trabalho de Wayar (2016).

Neste contexto, o objetivo principal deste estudo é a implementação, no código computacional existente, de um procedimento para considerar a protensão interna na laje de concreto de vigas mistas. Para alcançar este objetivo, faz-se necessário atingir alguns outros objetivos específicos como:

- a) revisão e modificação da análise de vigas mistas aço-concreto com protensão interna iniciada no trabalho de Moreno (2016);
- b) desenvolvimento de rotinas em Fortran 90 para a implementação de protensão interna aderente e não aderente na laje de concreto de vigas mistas no código computacional;
- c) implementação da biblioteca *PARDISO* no código computacional para a resolução dos sistemas lineares esparsos gerados devido à análise pelo método dos elementos finitos;
- d) análise das tensões nos cabos considerando a aderência ou não aderência ao concreto da laje;
- e) desenvolvimento de rotina em linguagem Fortran 90 para a consideração da perda de tensão na armadura de protensão devido à relaxação do aço;
- f) comparação do comportamento estrutural de vigas mistas protendidas com cabos internos aderentes e não aderentes e cabos externos;
- g) avaliação do desempenho do modelo numérico para representar o comportamento da viga mista com protensão interna instantaneamente e ao longo do tempo.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Ao longo dos últimos anos, o significativo aumento da produção de aço no Brasil incentivou a crescente utilização de vigas mistas de aço e concreto tradicionais para edifícios residenciais, industriais, comerciais, bem como para obras de arte como as pontes. O emprego de perfis metálicos solidarizados com lajes em concreto armado certamente é uma alternativa duradoura e mais atrativa se comparada às soluções estruturais convencionais, pois apresentam baixo peso total, possibilitam rapidez e facilidade de execução sem grandes acréscimos no custo final da obra e aumentam a capacidade de suportar elevados carregamentos.

Em vigas mistas contínuas, no entanto, a ação composta na região de momento fletor negativo é comprometida devido à laje de concreto estar submetida a esforços de tração, o que a torna virtualmente ineficiente, uma vez que a laje, ao se fissurar, deixa de contribuir na resistência e rigidez da seção mista. Estudos realizados nesse tipo de viga por Siess e Viest (1952), Barnard (1964), Barnard e Johnson (1965) e Basu, Sharif e Ahmed (1987b) concluíram que para recuperar a ação mista, ao menos parcialmente, alguns procedimentos devem ser empregados, como: colocar, na região de flexão negativa, um reforço longitudinal na laje; posicionar conectores de cisalhamento adequados em toda a extensão da viga, de modo que o aço longitudinal da laje na região do momento negativo possa ser incluído no cálculo do momento resistente da seção e providenciar uma armadura transversal conveniente na laje de forma a prevenir fissuras longitudinais alinhadas com os conectores. Porém, mesmo com a utilização de reforço na laje, a fissuração do concreto na região de flexão negativa causa a redução na capacidade da seção e a perda parcial da ação mista (BASU, SHARIF e AHMED, 1987a). No caso do uso de vigas mistas contínuas em pontes, essa fissuração e a subsequente deterioração do concreto e corrosão das armaduras devido aos efeitos do intemperismo afetam progressivamente as condições de serviço dessas estruturas.

A aplicação de uma força de protensão nas regiões de momento negativo próximas aos apoios intermediários das vigas não só pode superar os problemas apresentados como, ao mesmo tempo, pode oferecer várias vantagens importantes à estrutura, tais como comportamento elástico em cargas mais elevadas, capacidade máxima aumentada e comportamento de fadiga e fratura melhorado.

O comportamento das vigas mistas protendidas depende, então, da interação entre quatro componentes principais: a laje de concreto, o perfil de aço da viga, os conectores de cisalhamento e os cabos protendidos, o que torna essas estruturas bem mais complicadas que as vigas mistas convencionais. Além disso, a resposta desse tipo de estrutura ao longo do tempo é uma das complexidades de maior imprecisão, pois não só os fenômenos reológicos de fluência e retração do concreto devem ser levados em conta, como também as perdas ocasionadas pela protensão.

A crescente utilização desses sistemas e elementos estruturais mais complexos, aliada a uma imposição de garantia da qualidade frente às condições de serviço, acaba exigindo um desenvolvimento de soluções numéricas eficientes e confiáveis para a modelagem do

comportamento das estruturas durante as diferentes fases da vida de sua construção, permitindo, assim, uma avaliação mais rigorosa do seu respectivo grau de segurança (PÓVOAS, 1991).

Uma das técnicas numéricas mais utilizadas e comprovadamente adequadas para servir de suporte ao desenvolvimento de modelos de análise do comportamento dos sistemas mistos de aço e concreto é o método dos elementos finitos. Por este método é possível considerar a deformabilidade da conexão entre os elementos da seção mista; a não linearidade dos materiais utilizados; a ação da protensão, bem como as perdas associadas a ela e os efeitos diferidos de fluência e retração do concreto.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O conceito de vigas mistas aço-concreto protendidas foi introduzido pelo engenheiro Franz Dischinger em 1949, através da publicação de uma série de artigos, onde ele propunha a protensão de pontes inteiras utilizando-se cabos de alta resistência. A técnica por ele proposta visava considerar vigas de aço solidarizadas com uma laje de concreto através de sua mesa superior, sendo a totalidade dessa estrutura mista protendida de diversas formas.

Dez anos mais tarde, Szilard (1959) publicou um artigo a respeito do projeto de estruturas mistas protendidas. O pesquisador analisou vigas mistas simplesmente apoiadas e pré-tensionadas com cabos de alta resistência parabólicos baseado na suposição de uma conexão de cisalhamento perfeita entre a laje e a viga de aço. Ele também discutiu os importantes fatores de projeto de fluência no concreto da laje e relaxação do cabo de protensão, bem como propôs métodos para contabilizar esses efeitos na prática de dimensionamento.

Stras (1964) publicou um estudo experimental e analítico de vigas mistas protendidas. O objetivo do autor era estudar o comportamento desse tipo de estrutura dentro das faixas elástica e inelástica de carregamento, bem como o comportamento sob carga última. Ele pode concluir, entre outras coisas, que o método da seção transformada conseguia prever adequadamente o comportamento das vigas testadas na faixa elástica das tensões tanto na viga de aço como no cabo e que o deslizamento que ocorreu entre a laje e a viga de aço teve um efeito insignificante sobre qualquer resposta medida da viga no intervalo elástico, exceto a deflexão, que foi afetada apenas um pouco.

Sarnes e Daniels (1971) testaram duas vigas mistas simplesmente apoiadas sob momento negativo para com isso simular a protensão na região de momento negativo em vigas mistas contínuas de dois vãos. Os objetivos dos pesquisadores eram o estudo do efeito da protensão no comportamento de vigas sob momento negativo e a comparação da efetividade de conectores de cisalhamento concentrados em determinadas regiões com conectores igualmente espaçados.

Basu, Sharif e Ahmed (1987a; 1987b) publicaram dois artigos pesquisando o comportamento de vigas mistas contínuas parcialmente pré-tensionadas. A protensão foi introduzida apenas nas regiões do momento negativo. No primeiro artigo, estudaram analiticamente o efeito da força de protensão na prevenção de fissuras na região do momento negativo e na economia de material devido à ação estrutural melhorada. Eles puderam concluir que a protensão parcial aumentou a capacidade de carga da viga em cerca de 20%, eliminou o problema de fissuração na laje de concreto na região do momento negativo e que a deflexão da viga protendida é cerca de 30% menor que a da viga simples. Já no segundo trabalho, os resultados dos testes em uma viga contínua foram apresentados e comparados com as previsões analíticas presentes no primeiro artigo. Os resultados mostraram concordância razoável com os resultados analíticos.

Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989a; 1989b) também publicaram dois artigos analisando o comportamento de vigas mistas protendidas. No primeiro trabalho, realizaram testes experimentais em duas vigas mistas protendidas: uma protendida na mesa inferior e foi submetida a momento fletor positivo e a outra protendida na mesa superior e foi submetida a momento negativo. Eles descobriram que, ao adicionar barras protendidas na viga mista, aumentaram-se significativamente a carga de escoamento e a carga máxima e descobriram que a força de protensão suficiente na região de momento negativo pode evitar que o concreto fissure sob cargas de serviço, o que aumenta a rigidez e reduz a deflexão da estrutura. No segundo estudo, os autores realizaram um estudo analítico das deflexões e deformações na viga de aço, na laje de concreto e nos cabos nas regiões de momento positivo e negativo até a falha estrutural.

Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992a; 1992b) testaram cinco vigas mistas protendidas expostas a momentos fletores negativos e desenvolveram um modelo analítico baseado no método de deformação incremental para prever o escoamento e a carga última deste tipo de estrutura. Os testes mostraram, por exemplo, que a adição de protensão às lajes de concreto em regiões de momento negativo aumentou a rigidez devido à prevenção da fissuração do concreto sob cargas

de serviço. No entanto, a adição da protensão em uma viga mista aumenta a força de compressão axial na viga, o que leva a uma grande extensão de compressão na alma, tornando a viga vulnerável à flambagem.

Dall'Asta e Dezi (1998) estudaram o comportamento de vigas mistas protendidas com cabos externos até a falha, a fim de investigar a influência de parâmetros de projeto típicos na capacidade última. A análise foi feita assumindo um modelo de Kirchhoff para a deformação da viga e que os diferentes materiais que compõe a viga e o cabo podem exibir um comportamento não linear. A solução numérica foi realizada por métodos de aproximação variacionais e as equações não-lineares foram resolvidas pelo método de Newton-Raphson.

Dall'Asta e Zona (2005) propuseram um modelo de elementos finitos para a análise não linear de vigas mistas pré-tensionadas por cabos externos com conexão de cisalhamento deformável. É introduzido um número geral de cabos, cada um com sua própria trajetória. Os autores utilizaram leis constitutivas não lineares gerais para o concreto, aço da armadura e da viga, conectores de cisalhamento e cabos. A eficácia do procedimento numérico na descrição do comportamento estrutural até a falha foi validada por meio de comparações com testes experimentais.

Nie et al. (2009) analisaram o cálculo da deformação de vigas mistas contínuas protendidas de dois vãos, levando em conta o efeito do deslizamento entre a interface da laje de concreto e viga de aço sob cargas de serviço. Um modelo analítico simplificado foi apresentado e, através deste modelo, os autores propuseram fórmulas para a predição da região de fissuração na laje de concreto próxima aos apoios internos e para o aumento da força de protensão no cabo. Verificou-se que ao se ignorar o aumento da força do cabo, a deflexão calculada foi superestimada e quando se considerou este aumento, a precisão das previsões analíticas melhorou significativamente.

A partir de 2011, foi dado início ao estudo de vigas mistas no CEMACOM/UFRGS. Tamayo (2011) apresentou a formulação de um modelo matemático, bem como sua implementação numérica através de um código computacional capaz de representar vigas mistas aço-concreto para cargas de curta duração. O autor utilizou a teoria de plasticidade associada a um algoritmo de retorno explícito para o concreto e o aço estrutural, sendo inserido estes procedimentos dentro de um processo incremental iterativo baseado num critério de convergência de forças ou deslocamentos.



Maiga (2013) implementou, no código computacional de Tamayo (2011), a análise de serviço, ou seja, a consideração dos efeitos de longa duração na análise de vigas mistas, os quais interferem na distribuição de tensões e deformações da estrutura. Além da fluência e retração do concreto, a autora adicionou o amolecimento do concreto e uma nova formulação para os conectores de cisalhamento empregando uma rigidez secante. O *software* GiD foi utilizado para as tarefas de pré e pós processamento.

No trabalho de Moreno (2016) a análise de longa duração foi ampliada devido à inserção de outros modelos para predição dos fenômenos de longa duração e de uma ferramenta estatística que permitia a comparação entre eles. Foi também neste estudo que se iniciou o estudo da protensão na laje de concreto. Já a protensão realizada externamente à estrutura no perfil I de aço foi inserida por Wayar (2016).

#### 1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação foi dividida em sete capítulos. No capítulo 2 tem-se toda a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento da pesquisa. Há nele uma introdução sobre o que são e como se comportam as estruturas de vigas mistas de aço e concreto; sobre os tipos e como se classificam os conectores de cisalhamento; sobre os conceitos básicos de protensão em estruturas de concreto e, por fim, aborda a técnica da protensão em vigas mistas diferenciando-a quanto ao posicionamento dos cabos, se feito dentro da laje ou externamente no perfil de aço.

No capítulo 3 são apresentados todos os aspectos necessários para a modelagem numérica da viga mista de forma resumida tendo em vista que uma abordagem mais detalhada pode ser vista nas pesquisas anteriores feitas por Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016) e Wayar (2016).

No capítulo 4 é apresentada toda a formulação do modelo de elementos finitos para os cabos de protensão internos, fazendo as devidas considerações quanto à aderência ou não destes à estrutura de concreto. O modelo constitutivo para o aço de protensão também é mostrado neste capítulo.

O capítulo 5 apresenta toda a customização feita no programa Vimis para que se pudesse analisar estruturas de concreto e estruturas mistas com protensão interna, desde o pré-

processamento feito no *software* GiD, passando pelas rotinas criadas e modificadas em linguagem Fortran 90 até o pós-processamento realizado também no GiD.

No capítulo 6, o modelo de elementos finitos desenvolvido para a análise numérica de vigas mistas com protensão interna aderente e não aderente é avaliado através de comparações com resultados analíticos, numéricos e experimentais de exemplos disponíveis na literatura, os quais levam em consideração a não linearidade dos materiais empregados nas estruturas.

Finalmente, a presente dissertação encerra com o capítulo 7, onde as conclusões e considerações finais mais importantes do trabalho desenvolvido são sintetizadas.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta as considerações iniciais acerca da definição e comportamento de vigas mistas de aço e concreto, dos conectores de cisalhamento existentes e os tipos de interação que proporcionam às estruturas por eles conectadas. Mostra o conceito de protensão em estruturas de concreto, diferenciando a protensão realizada com e sem aderência e as implicações que acarretam no comportamento das mesmas. E, por fim, apresenta como a protensão é utilizada em vigas mistas de aço e concreto, fazendo a devida distinção entre a protensão empregada na laje de concreto e a protensão realizada externamente à estrutura na viga de aço.

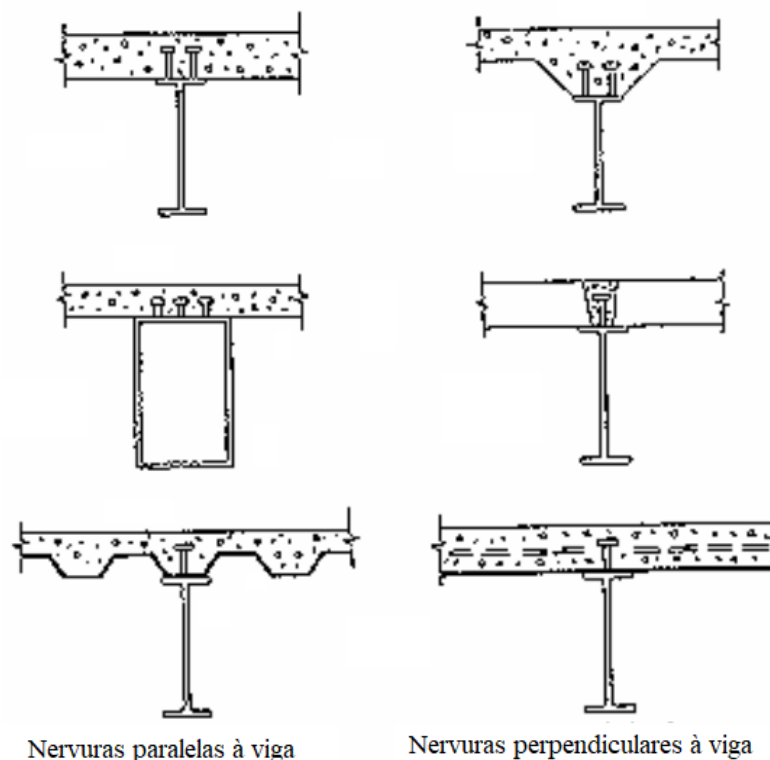
### 2.1 VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO

Viga mista aço-concreto pode ser definida como um componente de aço simétrico em relação ao plano de flexão solidarizado a uma laje de concreto em sua mesa superior, fundida *in loco* no seu todo ou em parte, de tal forma que eles funcionem como um conjunto para resistir à flexão. Segundo a NBR 8.800/2008 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2008), o componente de aço pode ser um perfil caixão, um perfil tubular retangular, uma treliça ou então um perfil I. Se for uma treliça, a viga recebe a denominação de treliça mista de aço e concreto e caso for um perfil I, a viga é chamada de viga mista de aço e concreto de alma cheia. A conexão entre o componente de aço e a laje de concreto é garantida por meio da utilização de componentes mecânicos chamados conectores de cisalhamento que têm por objetivo principal fazer com que os dois elementos envolvidos trabalhem como um só. Em qualquer situação, a flexão ocorrerá no plano que passa pelos centros geométricos das mesas ou dos banzos superior e inferior do componente de aço.

O uso das vigas mistas aço-concreto tornou-se popular no último século graças à habilidade de combinar as excelentes vantagens dos dois materiais envolvidos. Comparando-se o concreto com o aço, pode-se dizer que este primeiro apresenta vantagens na composição de seções mais rígidas e de ser mais resistente ao fogo e à corrosão. Em contrapartida, o aço é um material muito resistente à tração, é mais vantajoso em relação à montagem, pode ser mais econômico nas fundações devido ao peso próprio relativamente baixo da estrutura, possibilita um canteiro de obras mais limpo, no entanto, para elementos esbeltos pode apresentar problemas de instabilidade.

Os elementos mistos, então, quando comparados com a contribuição de seus componentes atuando separadamente representam uma solução estrutural competitiva em muitas aplicações de engenharia civil, tais como pontes e edifícios. A seção de aço, por exemplo, pode ser reduzida em relação a uma peça equivalente de aço apenas devido ao concreto resistir a uma parcela das cargas atuantes. Isso se reflete em uma redução das dimensões da seção, conseqüentemente reduzindo também a altura total da viga mista e o consumo de aço demandado pela estrutura, o que implica na redução do custo final da construção. Além disso, as estruturas mistas são, em geral, mais rígidas que as estruturas convencionais (não mistas) de mesmas dimensões e, com isso, além de sofrerem menos deformações e vibrações, são menos susceptíveis a instabilidades locais e globais.

Existem diferentes tipos de seções e formas para as vigas mistas, conforme pode ser visto na figura 2.1, sendo que as mais usuais são aquelas onde um perfil de aço, simples ou composto, é associado através da sua mesa superior a uma laje de concreto.



**Figura 2.1** – Seções transversais típicas de vigas mistas (fonte: adaptada de YUEN, 2004).

As vigas mistas podem ser simplesmente biapoiadas ou podem ser contínuas. As primeiras são as mais utilizadas e colaboram para um sistema misto mais eficaz, uma vez que apresentam

exclusivamente momentos fletores positivos, desta forma a viga de aço trabalha predominantemente à tração e a laje de concreto à compressão. As vigas mistas contínuas apesar de apresentarem regiões de momento fletor negativo são mais vantajosas que as vigas mistas simplesmente apoiadas devido à extensão do alcance elástico do comportamento estrutural, ao aumento da capacidade última de carregamento, à possibilidade do emprego de maiores relações de vão/altura, à diminuição da deformação sob carregamento de serviço, à ajuda no controle da abertura de fissuras na laje de concreto e à significativa melhora do comportamento à fadiga.

O processo construtivo das estruturas mistas tem uma importância fundamental na quantificação das tensões instaladas nos componentes de aço e concreto, tendo em vista que as cargas permanentes atuantes representam uma parcela significativa da totalidade do carregamento a ser suportado pela estrutura. Dessa forma, a economia máxima na construção desse tipo de estrutura é condicionada pelo processo em que esta será instalada na obra.

Como foi dito anteriormente, uma vez que o uso dos elementos mistos de aço e concreto é mais eficaz que o dos elementos estruturais convencionais, é interessante que os dois materiais comecem a funcionar conjuntamente o mais rápido possível. A situação ideal corresponde àquela em que a viga mista resista à totalidade das ações, incluindo as cargas permanentes.

Basicamente existem dois métodos construtivos utilizados que influenciam diretamente no comportamento estrutural das estruturas mistas. O primeiro consiste na ausência de escoramento da laje de concreto no momento da construção, por exemplo, em lajes com forma de aço incorporada, o que sujeita a viga de aço a todo o carregamento da fase construtiva, inclusive o peso da laje. Dessa forma, como o concreto ainda não apresenta resistência, o sistema misto não está constituído e, portanto, a viga de aço responde isoladamente. Esse processo é recomendado para estruturas que vencem pequenos vãos. Quando as lajes são escoradas, as vigas de aço acabam não recebendo o carregamento da laje durante a fase construtiva, caso comum em lajes maciças moldadas *in loco*. Esse escoramento da laje pode ser feito na totalidade da estrutura ou através da utilização de apoios provisórios ao longo do vão da viga metálica.

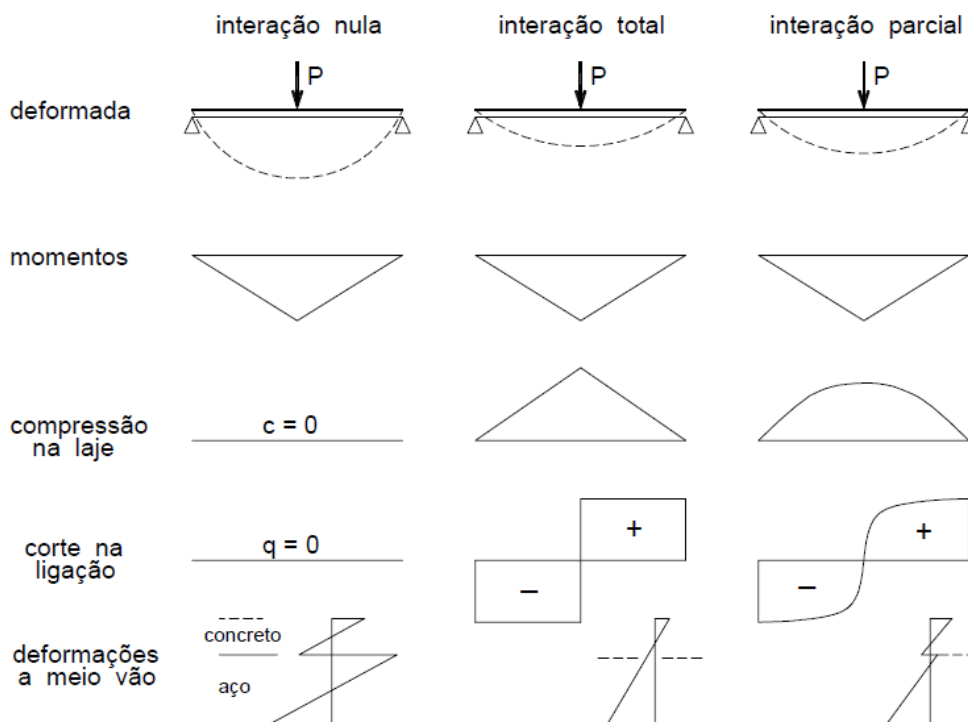
Outros fatores que influenciam significativamente o comportamento das vigas mistas são a fluência e a retração do concreto, sendo que o estudo destas ações depende do instante em que são aplicadas as cargas e do método de construção das vigas. A fluência é, na maioria dos casos,

assimilada a uma diminuição do módulo de elasticidade do concreto com o tempo, o que provoca um aumento progressivo da relação entre esse módulo e o módulo de elasticidade do aço, conhecida como coeficiente de homogeneização. Ambos os fenômenos conduzem a deformações das vigas por carregamentos de longa duração maiores que a deformação inicial, correspondendo a um aumento de tensões no aço e diminuição de tensões no concreto da laje.

Quando uma viga mista se encontra sujeita a ações de flexão, seja na região de momento positivo ou de momento negativo, admite-se a hipótese das seções planas permanecerem planas na sua análise desde que seja considerada uma ligação perfeita entre o aço e o concreto, ou seja, desde que haja uma interação completa entre ambos (ação mista total). Essa situação corresponde à consideração de que não há deslocamento longitudinal nem afastamento vertical relativo entre o componente de aço e a laje de concreto. Desse modo, a distribuição das deformações é contínua e há somente uma única linha neutra (figura 2.2).

Caso não ocorra uma ligação perfeita ao nível da ligação aço-concreto, pode-se aferir que existe um deslocamento relativo entre os componentes da viga mista, o que caracteriza uma interação parcial entre ambos, ou seja, dois elementos se deformam de modo independente. Há, nesse caso, uma violação da hipótese das seções planas que se reflete em uma descontinuidade no diagrama das deformações e na presença de duas linhas neutras (figura 2.2). Caso os conectores de cisalhamento que interligam os elementos tenham resistência suficiente para resistir ao fluxo de cisalhamento gerado na interface, os dois elementos tenderão a se deformar conjuntamente.

O fenômeno do escorregamento afeta a distribuição de tensões na seção mista, a distribuição longitudinal do fluxo de cisalhamento na conexão aço-concreto e, conseqüentemente, a deformabilidade das vigas. Embora geralmente os seus efeitos não sejam levados em conta, é necessário o reforço da conexão na região das extremidades de cada vão. Isso é feito de modo a garantir, nesses trechos, a dimensão dos conectores e os espaçamentos necessários para a absorção do esforço de cisalhamento correspondente à solicitação mais crítica.

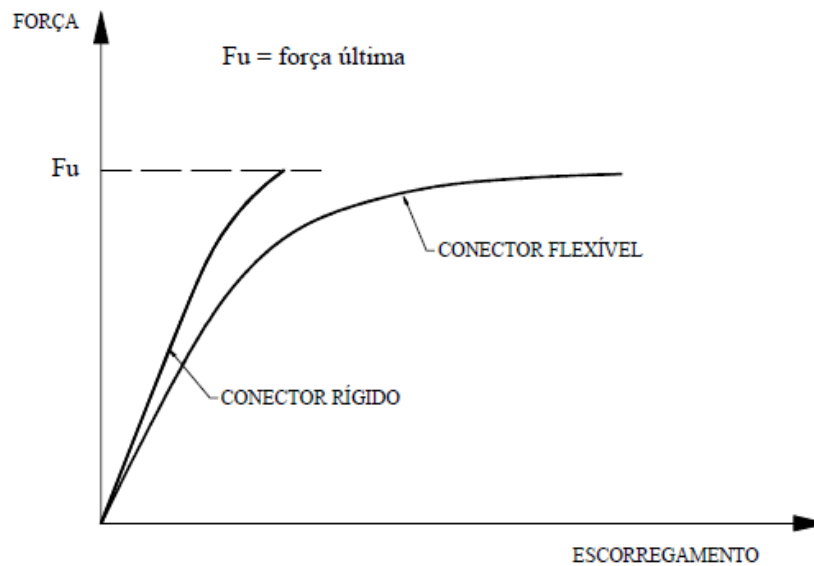


**Figura 2.2** – Interação aço-concreto no comportamento estrutural de vigas mistas (fonte: ALVA, 2000).

## 2.2 CONECTORES DE CISALHAMENTO

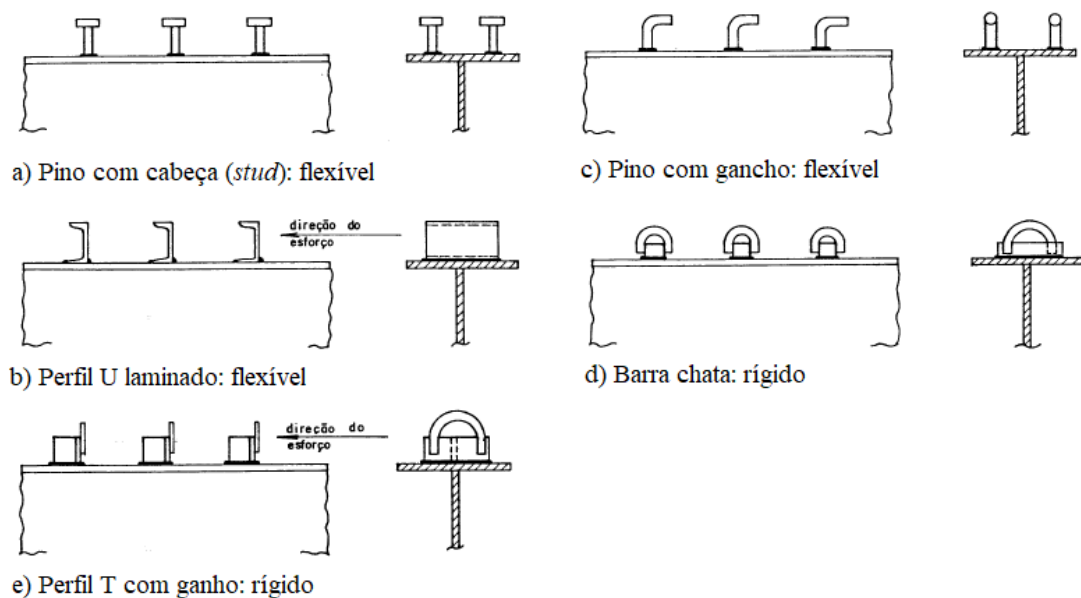
A apropriada conexão da viga de aço com a laje de concreto é de fundamental importância para a resistência à separação vertical e para a transmissão dos esforços de cisalhamento longitudinais entre estes elementos. Esta conexão, alcançada geralmente graças aos conectores de cisalhamento, pode ser rígida ou flexível dependendo da capacidade de restrição ao escorregamento imposta pela ligação da viga à laje. Os conectores são instalados no perfil de aço, usualmente através de solda, assegurando que os materiais constituintes da seção mista trabalhem como se fossem uma peça única.

De uma maneira geral, a flexibilidade dos conectores encontra-se associada às características da sua resposta à ação do fluxo de corte longitudinal gerado entre o componente de aço e a laje de concreto quando estes funcionam como uma viga composta. Isto pode ser traduzido em uma relação entre a força transmitida pelo conector e o deslocamento relativo na interface aço-concreto (figura 2.3), sendo ambos obtidos mediante ensaios de cisalhamento direto. Independente da flexibilidade dos conectores de cisalhamento, se flexíveis ou rígidos, estes podem ser considerados dúcteis, uma vez que se conceitue ductilidade como a capacidade de deslizamento do conector após ter atingido sua resistência máxima.



**Figura 2.3** – Diagrama força x deslocamento relativo aço-concreto (fonte: ALVA, 2000).

A figura 2.4 ilustra diferentes tipos de conectores de cisalhamento, conforme sua flexibilidade. Os conectores do tipo pino com cabeça, *stud* (figura 2.4a), são flexíveis e são também os tipos mais comumente utilizados no contexto mundial devido à facilidade e rapidez do seu uso na construção da viga mista. Estes conectores, juntamente com os perfis U laminados ou formados a frio, também flexíveis, são os únicos previstos na norma brasileira NBR 8.800/2008.



**Figura 2.4** – Tipos de conectores de cisalhamento (fonte: MALITE, 1990).



Embora a flexibilidade dos conectores quase não influencie o comportamento da viga em regime de utilização, ela condiciona fortemente o comportamento em regime último, uma vez que possibilita a redistribuição do fluxo de corte longitudinal entre os conectores. Desta maneira, um conector flexível após atingir sua resistência máxima sob carregamento constante pode continuar a se deformar sem ruptura, o que permite que conectores vizinhos absorvam, por sua vez, maior força de cisalhamento e que atinjam também a sua capacidade máxima. Esta característica uniformiza a resistência da conexão e permite o espaçamento igual destes tipos de conectores sem que haja diminuição da capacidade máxima da conexão.

## 2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROTENSÃO

Define-se protensão como o artifício de aplicar em uma estrutura tensões internas permanentes capazes de fornecer uma ação contrária ao estado de tensões produzido por cargas externas, o que pode acarretar em um aumento de sua resistência e uma melhora em seu desempenho sob diversas condições de carregamento. O efeito da protensão reduz significativamente ou até anula as tensões de tração provocadas pelas solicitações de utilização da estrutura protendida, o que leva à limitação total ou parcial da fissuração da peça, conforme ilustra a figura 2.5.

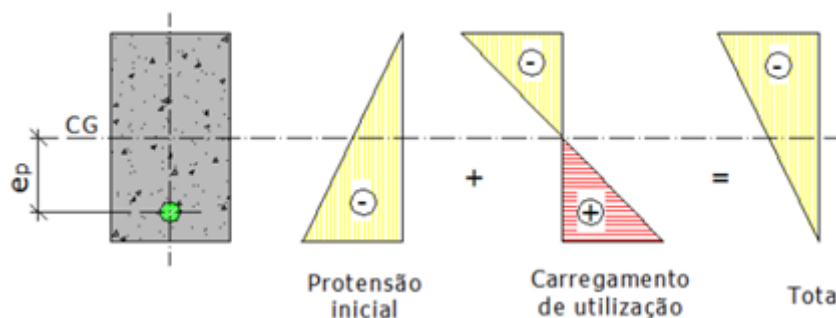


Figura 2.5 – Efeito da protensão em estruturas de concreto (fonte: NELSEN, 2013).

### 2.3.1 Classificação da protensão

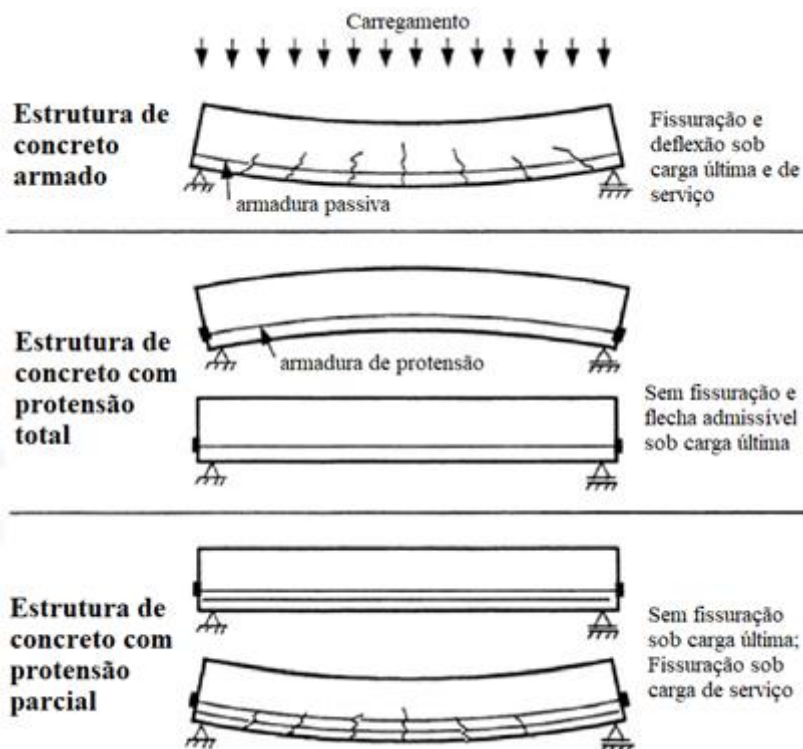
As estruturas de concreto protendido podem ser classificadas de diversas maneiras, de acordo com a característica dos projetos e construções. Uma dessas formas distingue as armaduras ativas em pré ou pós-tracionadas dependendo do momento de aplicação da força de protensão.

Na armadura pré-tracionada, o seu pré-alongamento é realizado antes do lançamento do concreto utilizando-se, para tanto, apoios independentes da peça estrutural, sendo a sua ligação

com os referidos apoios desfeita após o endurecimento do mesmo. A ancoragem dessa armadura no concreto é realizada somente mediante aderência. Essa técnica é também conhecida como protensão com aderência inicial. Já a armadura pré-alongada depois do endurecimento do concreto utilizando-se como apoios, partes do próprio elemento estrutural, é denominada armadura pós-tracionada, sendo que essa ainda pode ser aderente ou não aderente.

A armadura pós-tracionada aderente é aquela onde, através de injeção de nata de cimento no interior das bainhas, cria-se uma aderência de modo permanente ao concreto (protensão com aderência posterior) e a não aderente (protensão sem aderência) é aquela onde não se cria nenhuma aderência, ficando a armadura ligada ao concreto apenas em pontos localizados, chamados de seções de ancoragem.

Outra maneira de se diferenciar as estruturas protendidas diz respeito ao uso da armadura ativa combinado com armadura passiva, assim, têm-se as chamadas estruturas de concreto total ou parcialmente protendidas. As parcialmente protendidas são as estruturas que utilizam uma combinação de aço de protensão e aço de reforço passivo que permite tensões de tração e largura de fissura limitada nas combinações de carga do estado limite de serviço e também satisfazem o estado limite último ao mesmo tempo. Já as totalmente protendidas são as estruturas de concreto com compressão dominante e tensão de tração nula nas combinações de carga do estado limite de serviço, também atendendo ao estado limite último. Segundo Naaman (1983), o comportamento das estruturas com protensão parcial se situa entre o das totalmente protendidas e das estruturas de concreto armado convencionais, conforme pode ser visto na figura 2.6.



**Figura 2.6** – Diferenças entre estruturas total e parcialmente protendidas e estruturas de concreto armado convencionais (adaptada de AL-MALIKI, 2017).

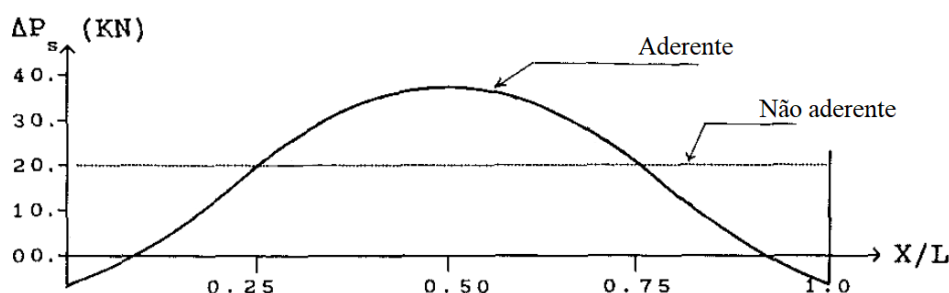
### 2.3.2 Caracterização do comportamento de peças protendidas

A aderência ou não da armadura pós-tracionada ao concreto dos elementos estruturais acarreta em uma grande influência no comportamento à flexão e à fissuração dos mesmos. Quando a armadura é aderente se verifica uma equivalência de deformações entre o aço e concreto adjacentes devido à contínua ligação entre eles. Em outras palavras, há uma compatibilidade de deformações. Na análise à flexão desses elementos, a força na armadura devido a cargas aplicadas varia de seção para seção, sendo que a magnitude dessa variação pode ser determinada simplesmente pela verificação do equilíbrio de seções individuais, onde as forças internas são conhecidas. Ou seja, a tensão na armadura aderente pode ser determinada diretamente a partir da deformação na fibra de concreto posicionada na mesma altura na seção de máxima sollicitação.

Nos elementos onde há ausência de aderência, a armadura de protensão pode mover-se livremente em relação ao concreto, ao longo do seu perfil em todas as seções transversais, exceto onde essa se encontra vinculada ao concreto, ou seja, nas seções de ancoragem, que podem ser nas extremidades ou em pontos intermediários da estrutura. Devido ao movimento

relativo entre aço e concreto, não existe uma compatibilidade de deformações em cada seção. O que se verifica é uma compatibilidade de deslocamentos nas seções de ancoragem que pode ser traduzida na equivalência da variação de comprimento na armadura não aderente com a variação total de comprimento da fibra de concreto adjacente ao perfil de protensão.

Ao se considerar a aderência total da armadura ativa ao concreto, pode-se afirmar que as maiores deformações no concreto e, portanto, as maiores deformações no cabo de protensão correspondem à seção de momento fletor máximo. Por outro lado, quando essa aderência não existe e o movimento relativo entre concreto e cabo é verificado, no momento em que ocorre a rotação da seção de maior sollicitação da estrutura, também sucede o deslizamento da armadura não aderente até que o equilíbrio de tensões ao longo de todo o seu traçado seja satisfeito. Portanto, pode-se concluir que se tem uma dependência global da tensão na armadura não aderente com as curvaturas de todas as seções ao longo de seu comprimento, o que leva uma distribuição praticamente uniforme dessa tensão ao longo da armadura (figura 2.7), ao contrário do que ocorre na compatibilidade de deformações.

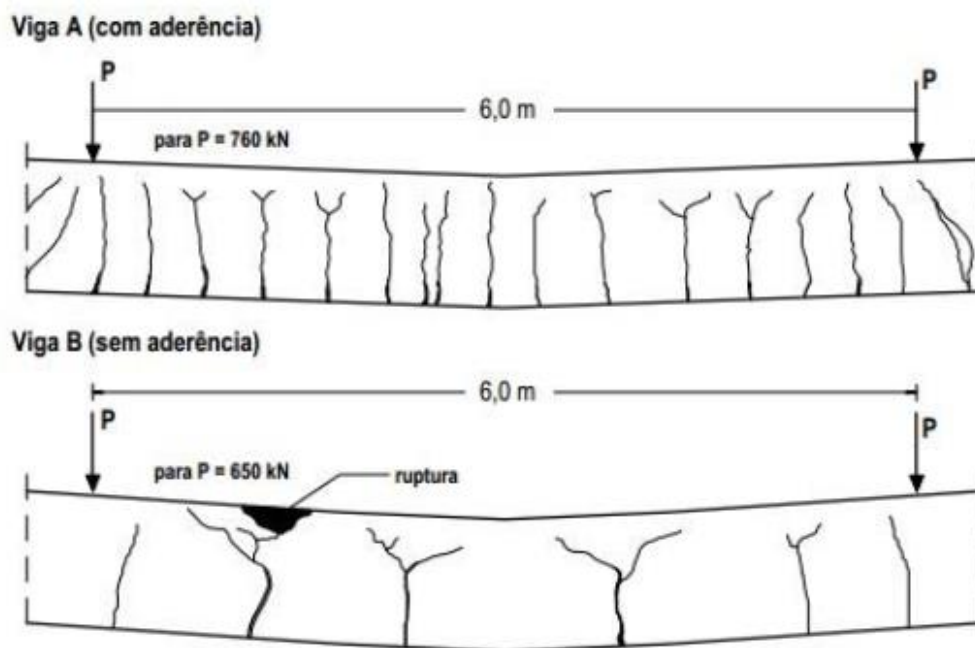


**Figura 2.7** – Variação da força de protensão ao longo do comprimento de uma viga (fonte: adaptada de EL-MEZAINI; CITIPITIOGLU, 1991).

Quanto à influência da aderência da armadura ativa na fissuração dos elementos estruturais (figura 2.8), quando uma fissura é aberta em um elemento protendido com cabos aderentes, esses cabos sofrem grandes deformações localizadas, o que gera um significativo aumento da tensão nestes pontos. Em relação à característica das fissuras neste caso, a tendência é a formação de uma grande quantidade delas com pequena abertura, semelhante ao comportamento da armadura passiva.

No caso da protensão sem aderência, quando se abre uma fissura no concreto em qualquer ponto da estrutura, o valor absoluto da abertura dessa fissura se dilui em um grande comprimento da armadura, levando não só a um pequeno acréscimo de tensão nela como também a um pequeno

alongamento unitário. As fissuras, neste caso, tendem a ser em pequeno número, porém com grande abertura.



**Figura 2.8** – Característica da fissuração em vigas protendidas na região situada entre as cargas aplicadas após atingir-se a carga limite (fonte: LEONHARDT, 1979).

A resistência última das estruturas protendidas também é influenciada pela aderência ou não da armadura de protensão, pois com o aumento do carregamento transversal os cabos aderentes sofrem grandes alongamentos nas seções com fissuras abertas, acarretando em um aumento considerável da tensão no aço nesses pontos que, por sua vez, contribui para o momento resistente do elemento estrutural. Conforme dito anteriormente, quando não existe aderência, os acréscimos de tensão são pequenos e, com isso, a contribuição da armadura ativa para o momento resistente é menos significativa.

### 2.3.3 Perdas de protensão

As forças nas armaduras de protensão variam não só ao longo do comprimento dos cabos como também no tempo. Isso ocorre devido às perdas de protensão que podem ser entendidas como todas as perdas verificadas nos esforços aplicados aos cabos de protensão. Estas podem ser quantificadas a partir do ponto de aplicação da força de protensão, ou seja, o valor da força máxima exercida pelos macacos hidráulicos para o estiramento dos cabos protendidos.

De acordo com Póvoas (1991), em relação aos elementos com armaduras pré-tracionadas, ou seja, elementos onde a protensão é feita antes da concretagem da peça, têm-se os três tipos de perdas associadas: as perdas antes e durante a transferência da protensão e as perdas desenvolvidas após a aplicação da mesma. No primeiro grupo estão as perdas associadas aos dispositivos de fixação dos cabos, as devidas ao atrito em eventuais pontos de flexão, as por retração do concreto e as devidas à relaxação do aço de protensão. No segundo grupo estão as devidas à deformação do concreto e ao escorregamento dos cabos na zona de amarração. E, no terceiro e último grupo, estão as associadas aos fenômenos de fluência e retração do concreto e à relaxação do aço da armadura.

Nos elementos onde a protensão é realizada na peça já concretada (elementos pós-tracionados), têm-se apenas as perdas que coincidem com a aplicação da força de protensão e as perdas diferidas. As instantâneas são aquelas devidas ao atrito entre a armadura e as bainhas, à penetração das cunhas e deformação das ancoragens e à deformação do concreto, em conformidade com a sequência adotada para o estiramento das armaduras de protensão. As perdas ao longo do tempo nessa situação coincidem com as perdas diferidas já ditas para os elementos pré-tracionados.

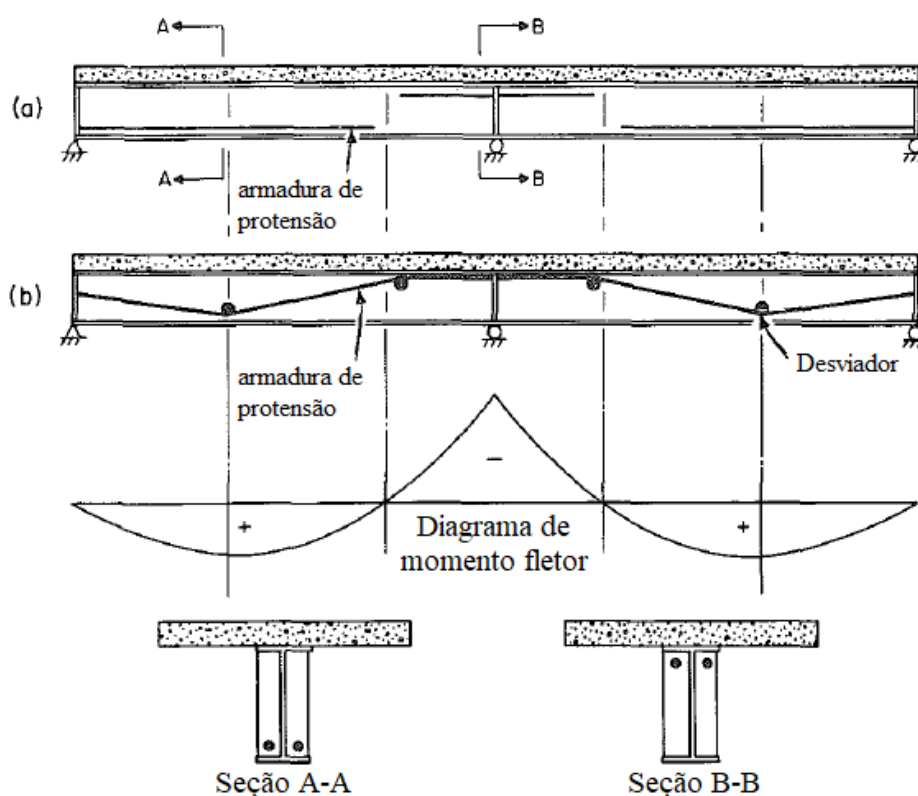
## 2.4 PROTENSÃO EM VIGAS MISTAS

A utilização da protensão em vigas mistas de aço-concreto foi proposta inicialmente pelo engenheiro civil alemão Franz Dischinger em 1949, conforme visto no item 1.3. A partir de então, foram realizadas pesquisas em quatro campos distintos: pesquisas acerca do seu desempenho estático, do seu comportamento sob momento fletor negativo (caso das vigas contínuas), do seu comportamento dinâmico e à fadiga e do seu comportamento ao longo do tempo.

Como consequência dos estudos, foram observadas algumas vantagens da protensão em vigas mistas de aço e concreto em relação às vigas mistas sem protensão. Podem ser citadas, por exemplo: a ampliação da capacidade portante e do comportamento elástico das vigas, ajustando a distribuição de forças internas na estrutura e diminuindo a sua deflexão; o aumento da resistência à fissuração na região de momento negativo de vigas contínuas, aumentando, assim, o desempenho em serviço e a durabilidade das vigas; a diminuição eficaz das tensões máximas de tração nas seções das vigas, implicando em um aumento da resistência à fadiga e a redução

das dimensões das seções das vigas. Por outro lado, a protensão inserida nos elementos mistos também implica em uma complexidade maior na concepção do projeto e, conseqüentemente, na sua construção.

A protensão em estruturas mistas não é usada para superar as deficiências de tração dos materiais — como em estruturas de concreto protendido — ela é usada para induzir tensões e esforços iniciais no membro que se opõem aos causados por cargas externas (TONG; SAADATMANESH, 1992). Em regiões de momento fletor positivo, a protensão é realizada acima da mesa inferior da viga de aço. Se não houver risco de colisão, no caso de pontes de seção mista, os cabos podem ser dispostos abaixo da mesa inferior. Já em regiões de momento negativo, a protensão se situa abaixo da mesa superior da viga ou embutida no interior da laje de concreto. Essa diferença, que pode ser vista através da figura 2.9, se deve aos esforços de tração na estrutura, sendo que quanto maior a excentricidade maior será a eficácia dos cabos.



**Figura 2.9** – Viga mista contínua com cabos de protensão a) retos e b) trapezoidais (fonte: adaptada de TONG; SAADATMANESH, 1992).

A localização das armaduras de protensão nas estruturas mistas é, então, condicionada pela necessidade da existência de um estado de tensão inicial que, concomitantemente com as

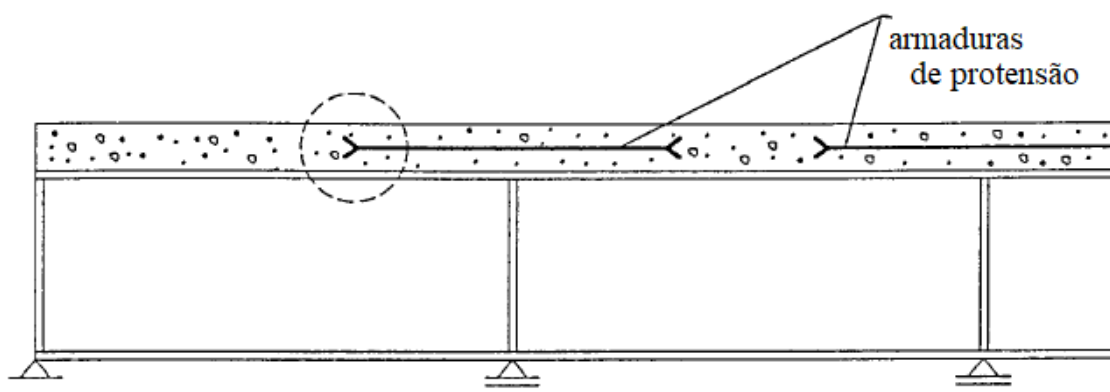
tensões resultantes das outras ações atuantes sobre a estrutura, resultem em níveis de tensões compatíveis com as características da viga de aço e da laje de concreto.

Em geral, a armadura de protensão pode ser utilizada de quatro maneiras distintas nas vigas mistas: dentro da laje de concreto, no sentido longitudinal, com aplicação da protensão na seção mista já existente; dentro da laje de concreto, também no sentido longitudinal, porém antes da laje ser conectada à viga de aço; nas vigas de aço, externamente à estrutura mista; e em lajes pré-fabricadas ligadas às vigas metálicas (QUINAZ, 1993). Essas maneiras podem ser usadas isoladamente ou concomitantemente, de tal forma que se podem ter vigas mistas protendidas na viga de aço e na laje de concreto ao mesmo tempo.

Nos itens a seguir será visto com maior detalhe a protensão feita internamente à laje de concreto, procedimento comum em regiões de momento fletor negativo, e a protensão feita de forma externa, apropriado para as regiões de momento fletor positivo e também largamente utilizada no reforço e reabilitação de estruturas.

### 2.4.1 Protensão interna

A aplicação da protensão com cabos de protensão posicionados na laje de concreto, no sentido longitudinal, é um processo muito utilizado para protender as regiões adjacentes aos apoios internos no caso de vigas contínuas (figura 2.10), ou seja, regiões de flexão negativa, onde a presença dos momentos negativos causa uma redução da resistência da seção e uma perda parcial da composição mista.



**Figura 2.10** – Protensão da laje de concreto de vigas mistas nas regiões adjacentes aos apoios internos (fonte: adaptada de QUINAZ, 1993).



Essa protensão pode ser realizada através de uma operação temporária ou de forma permanente. Na primeira técnica, a força de protensão é mantida até a resistência característica do concreto da laje ser atingida. Isso pode ser feito elevando-se os apoios internos antes da concretagem da laje e, depois que o concreto adquire resistência, se retiram essas forças de elevação. Segundo Basu, Sharif e Ahmed (1987b), esse método pode falhar na prevenção de fissuração sob carregamento de serviço sem introduzir grandes tensões de compressão na mesa inferior da seção da viga de aço nos apoios internos. Além disso, existe a limitação prática de elevar os suportes internos através de grandes distâncias a fim de eliminar as tensões de tração no topo da laje.

Em relação à protensão interna feita de forma permanente, esta pode ser realizada através de uma pré ou pós-tração. A técnica da pré-tração diz respeito às lajes de concreto protendidas antes de serem colocadas sobre a viga de aço e são convenientes à pré-fabricação. No entanto, a concretagem da laje pode ser feita *in loco* caso sejam feitas aberturas durante a sua execução em volta dos agrupamentos de conectores, permitindo, assim, que a laje de concreto se desloque sobre a mesa superior da viga de aço durante a fase de aplicação da protensão. Se o preenchimento dessas aberturas demorar a ser realizado, parte da retração e fluência ocorrerá livremente. Somente após o preenchimento dessas aberturas é que a estrutura passará a funcionar como uma viga mista e, caso não exista escoramento, as cargas permanentes devidas aos pesos da laje e da viga serão resistidas somente pela viga de aço, sendo as restantes resistidas pela seção mista.

A pós-tração da viga mista com protensão interna se trata da aplicação da protensão quando a viga de aço e a laje de concreto já estão solidarizadas, ou seja, a seção já apresenta um comportamento misto, e, segundo os experimentos de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992), constitui na técnica construtiva mais eficaz para protender uma viga mista na região de momento fletor negativo. No geral, esse método evita a fissuração da laje, minimizando, assim, a corrosão da sua armadura de reforço e a sua deterioração; aumenta a capacidade de flexão na região dos apoios internos; reduz o momento negativo nessa região pela indução de momentos pela força de protensão e pode acarretar em economias significativas em material. No entanto, a pós-tração apresenta a desvantagem do risco da ocorrência de uma acentuada fissuração junto das ancoragens, caso não seja colocada uma armadura de reforço adequada nessas zonas. Essas regiões das ancoragens apresentam características e problemas similares às encontradas em estruturas de concreto protendido. Porém, como as espessuras das lajes de concreto são menores

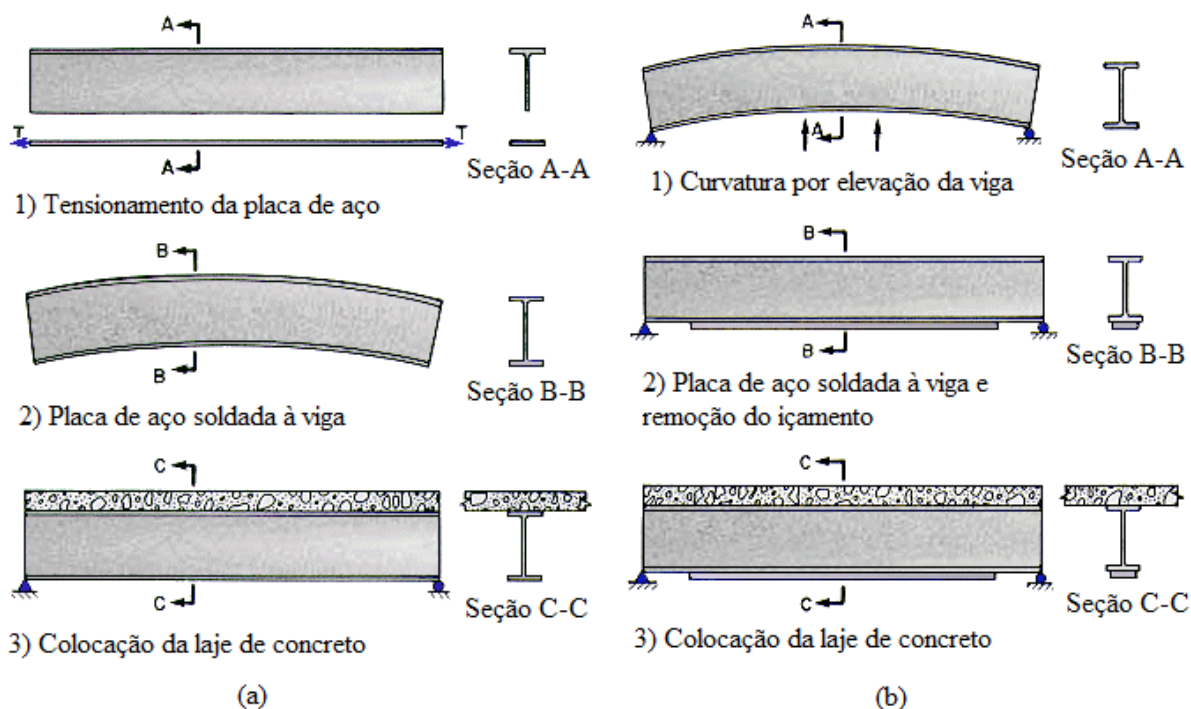
e, se tratando de cabos com traçado retilíneo, se empregam preferencialmente monocordoalhas ou então cabos de pequeno diâmetro para aplicação da protensão.

### **2.4.2 Protensão externa**

A protensão de uma viga mista quando é executada externamente à estrutura constitui em uma das técnicas mais poderosas para reforço ou reabilitação de estruturas existentes. Devido à simplicidade na construção do sistema de protensão externa em relação à inspeção e manutenção comparada com o sistema de protensão interna, ele também tem sido uma boa alternativa na concepção de novos projetos estruturais.

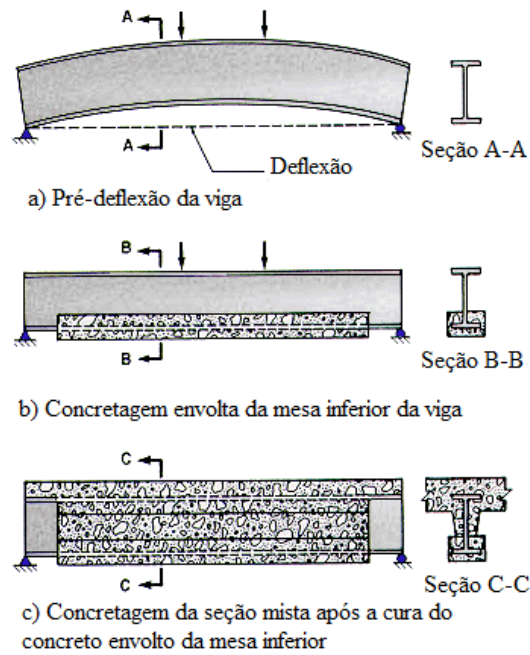
Essa protensão realizada de forma externa é utilizada nas regiões de flexão positiva das vigas contínuas ou ao longo de toda extensão de estruturas mistas simplesmente apoiadas e há diversas maneiras para a sua aplicação: através do tensionamento de componentes da viga separadamente, através do sistema *Preflex*, através de cabos externos, entre outros, sendo esse último caso o mais utilizado.

Caso opte-se por protender a estrutura através do tensionamento de seus componentes, há duas formas para isso. Na primeira (figura 2.11a), aplica-se uma força de tração a uma placa de aço de alta resistência e, com essa força mantida, a placa é soldada à estrutura de aço. Após a solda, a força é removida e a protensão é finalizada. Já na segunda maneira (figura 2.11b), a viga de aço é içada para cima criando tensões de tração na mesa superior e de compressão na mesa inferior. Com essa força de elevação mantida, uma placa de aço de alta resistência é então soldada à mesa inferior da viga. Essa placa, a qual se encontra tracionada, tem a função de prevenir o retorno da viga à posição indeformada. Após os procedimentos de protensão, a laje de concreto é, enfim, conectada à viga.



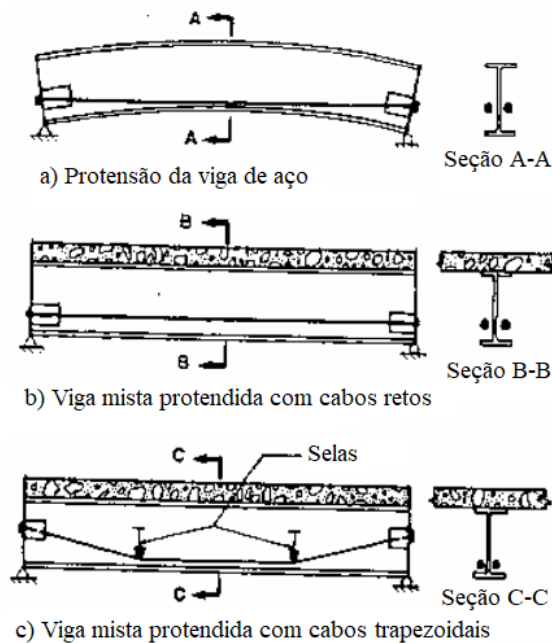
**Figura 1.11** – Protensão da viga por tensionamento de placa de aço soldada a) à seção T e b) ao perfil I (fonte: adaptada de YUEN, 2004).

Uma segunda alternativa de protensão na viga de aço consiste na utilização do sistema *Preflex*, (figura 2.12) na qual a protensão é aplicada mediante flexão elástica da viga. A técnica consiste na aplicação de cargas concentradas nos terços médios da viga de forma que, ao criar uma pré-deflexão da mesma, sejam criadas também tensões de tração na mesa inferior e de compressão na mesa superior. Em seguida, concretiza-se envolta da mesa inferior da viga. Após esse concreto adquirir sua resistência característica, removem-se as cargas aplicadas criando, então, tensões de compressão no concreto. Segundo Yuen (2004), esta técnica não só aumenta a rigidez e a relação entre vão e espessura da viga, como também diminui sua deflexão sob carregamento de serviço. E, por causa do revestimento permanente da viga de aço pelo concreto, a fissuração da estrutura também é reduzida.



**Figura 2.12** – Sistema *Preflex* (fonte: adaptada de YUEN, 2004).

No método mais utilizado, a protensão é realizada através de cabos de alta resistência, com qualquer configuração, ancorados às extremidades da viga de aço. No caso das vigas terem uma seção caixão, estas armaduras se localizam geralmente em seu interior. A figura 2.13 ilustra a protensão de viga de perfil I com cabos retos (figura 2.13b) e de traçado trapezoidal (figura 2.13c) antes da colocação laje de concreto.



**Figura 3.13** – Protensão da viga de aço através de cabos externos b) retos e c) trapezoidais (fonte: adaptada de YUEN, 2004).

A protensão externa pode ser feita antes da concretagem da laje ou após a cura do concreto, quando a viga já apresenta comportamento misto, de forma similar ao que ocorre nas vigas mistas com protensão interna. No primeiro caso, têm-se as chamadas vigas mistas pré-tracionadas externamente e, no segundo, as vigas mistas pós-tracionadas externamente. Ressalta-se que o método de protensão utilizado interfere diretamente no dimensionamento da estrutura por causa das etapas do carregamento. No caso das estruturas mistas pré-tracionadas, o peso próprio da viga de aço, a força de protensão dos cabos, o peso próprio da laje de concreto e o incremento na carga de protensão devido ao peso próprio da laje atuam somente na viga de aço, enquanto os demais atuam na viga mista já formada (TROITSKY; ZIELINSKI; NOURAEYAN, 1989).

Quanto às vigas mistas com pós-tração externa, as únicas cargas que atuam somente na viga de aço são o peso próprio da viga e o da laje. A força de protensão dos cabos, o carregamento permanente imposto, o incremento devido a este carregamento na carga de protensão, as ações variáveis de sobrecarga de utilização da estrutura e o respectivo incremento no valor da carga de protensão agem na seção mista.

### 3 MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO

Esta pesquisa pertence à mesma linha de pesquisa dos trabalhos de Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016) e Wayar (2016), assim sendo, tanto os elementos finitos quanto as relações constitutivas de todos os materiais empregados para representar a viga mista seguem os mesmos utilizados pelos referidos autores. A seguir apresenta-se a formulação resumida de todos os aspectos que devem ser levados em conta na modelagem numérica, sendo que o texto completo pode ser visto com maiores detalhes nas referências citadas.

#### 3.1 REPRESENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

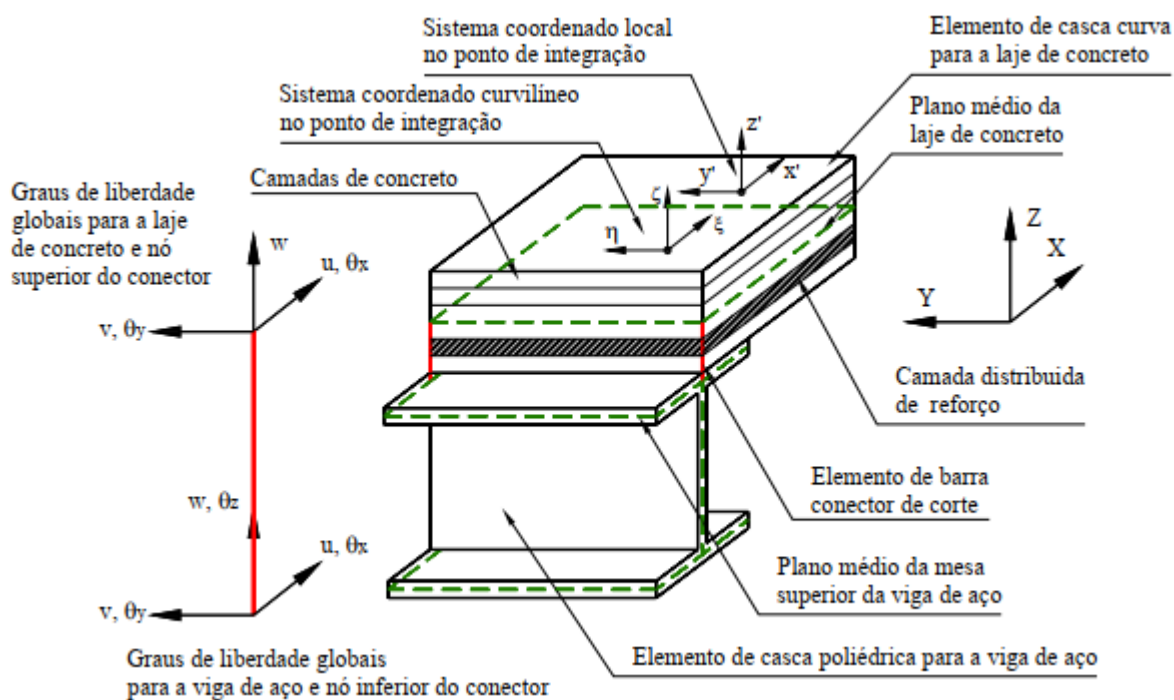
O modelo empregado para representar a viga mista de aço e concreto se baseia no método dos elementos finitos (MEF) que consiste em um procedimento numérico através do qual a região ou o contínuo é discretizado (ou dividido) em pequenos elementos conectados por nós. A partir dessas conexões nodais compartilhadas entre os elementos finitos é possível a obtenção de um conjunto de equações algébricas que pode ser solucionado numericamente através de métodos de otimização e algoritmos matriciais.

A modelagem através do MEF se inicia a partir da descrição geométrica da região do espaço na qual ela será considerada, seguida pela geração de uma malha de elementos finitos interconectados por nós. Após, definem-se as equações e condições de contorno que regem o problema para que o sistema algébrico resultante seja solucionado numericamente.

Na presente pesquisa, um tipo específico de elemento é empregado para cada um dos três componentes da estrutura. Para a laje de concreto, utilizam-se elementos de casca degenerada quadriláteros de oito nós; para a viga de aço, empregam-se elementos de casca plana fina de quatro nós e, por fim, elementos de barra tridimensionais são utilizados para os conectores de cisalhamento.

Diferentes elementos finitos são empregados na laje e na viga devido à diferença significativa quanto a espessura destes elementos. Enquanto a alma e as mesas superior e inferior da viga de aço possuem pequena espessura, os elementos da laje de concreto têm uma espessura tal que se faz necessária a consideração das tensões de corte fora do plano.

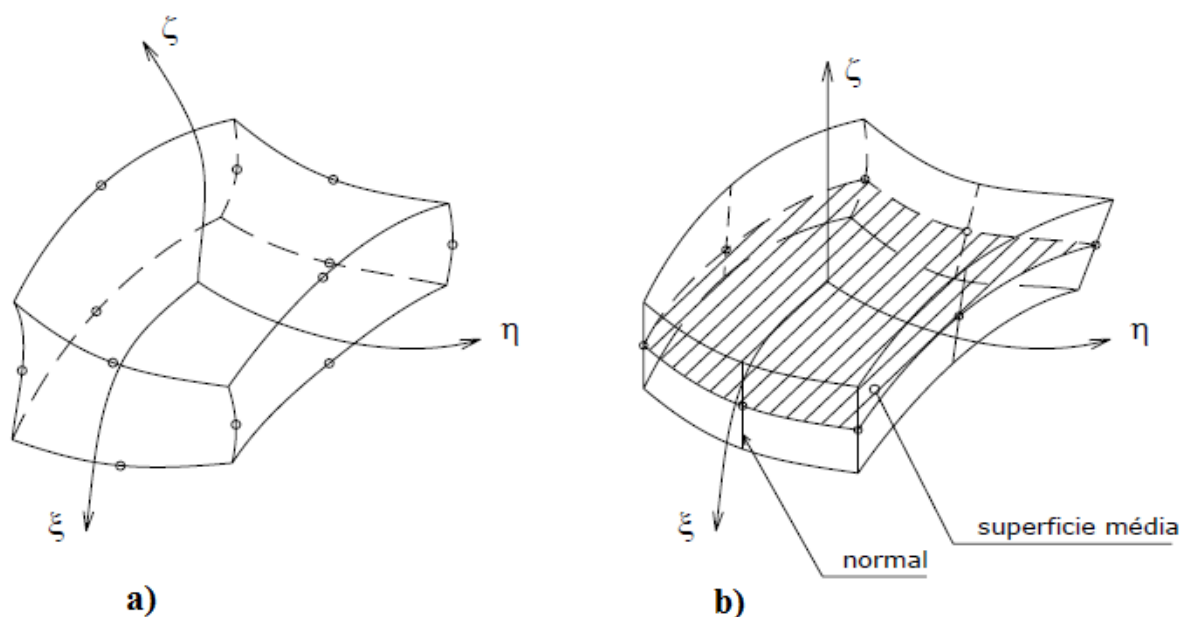
A união de todos os elementos finitos usados para a caracterização da viga mista é feita através dos planos médios dos elementos da estrutura que eles representam, pois é onde eles se encontram localizados (figura 3.1).



**Figura 3.1** – Montagem do modelo numérico para a viga mista (fonte: TAMAYO; MORSCH; AWRUCH, 2011).

### 3.1.1 Elemento finito para a laje de concreto

A figura 3.2 ilustra um elemento sólido tridimensional baseado em um campo de deslocamentos quadrático e o respectivo elemento de casca degenerado, adotado para a modelagem do concreto. Esse elemento possui cinco graus de liberdade referentes aos três deslocamentos e às duas rotações da normal em cada ponto nodal. No seu desenvolvimento, assume-se que as normais, em qualquer ponto sobre a superfície do elemento, permanecem planas após a ocorrência de deformação e que a energia de deformação correspondente à componente da tensão perpendicular à superfície média do elemento é desprezada, ou seja, essa componente é continuamente constrita a ser nula nas equações constitutivas. Uma independência rotacional e dos deslocamentos dos graus de liberdade é definida a fim de permitir a consideração das componentes transversais da tensão de corte, uma vez que as rotações não estão vinculadas à inclinação da superfície média.



**Figura 3.2** – Representação do a) elemento tridimensional sólido quadrático b) elemento de casca degenerado correspondente (fonte: TAMAYO, 2011).

A partir da definição dos sistemas de coordenadas global, nodal, curvilíneo e local, se estabelecem os três campos internos necessários para a análise de sistemas estruturais: o campo de deslocamentos, descrito em função das três translações e das duas rotações de cada nó no sistema global de coordenadas; o campo das deformações que são descritas em termos dos eixos locais; e o campo das tensões, onde se assume que a componente na direção perpendicular à superfície média da casca é nula. Os campos das deformações e tensões estão conectados através das relações tensão-deformação, ou seja, das equações constitutivas dos materiais.

Chamado na literatura de elemento *Serendipity* de oito nós, o elemento quadrático adotado emprega duas diferentes funções de forma em função da localização dos nós no contorno do elemento: uma para os nós dos cantos e outra para os nós intermediários. O fenômeno de “travamento por força cortante” (*shear locking*), comum a este elemento, é solucionado aplicando o artifício da integração reduzida 2x2 e também com a introdução de um fator de forma que acompanha as tensões de corte fora do plano.

Considera-se que o elemento de casca é formado por uma série de camadas que podem apresentar diferentes materiais, acarretando em propriedades e tensões como funções descontínuas ao longo da espessura. Tendo em vista a não linearidade física do problema, utiliza-se uma integração através das camadas, na qual a distribuição das tensões na direção da espessura é obtida por meio de um número adequado de pontos onde se satisfazem as equações

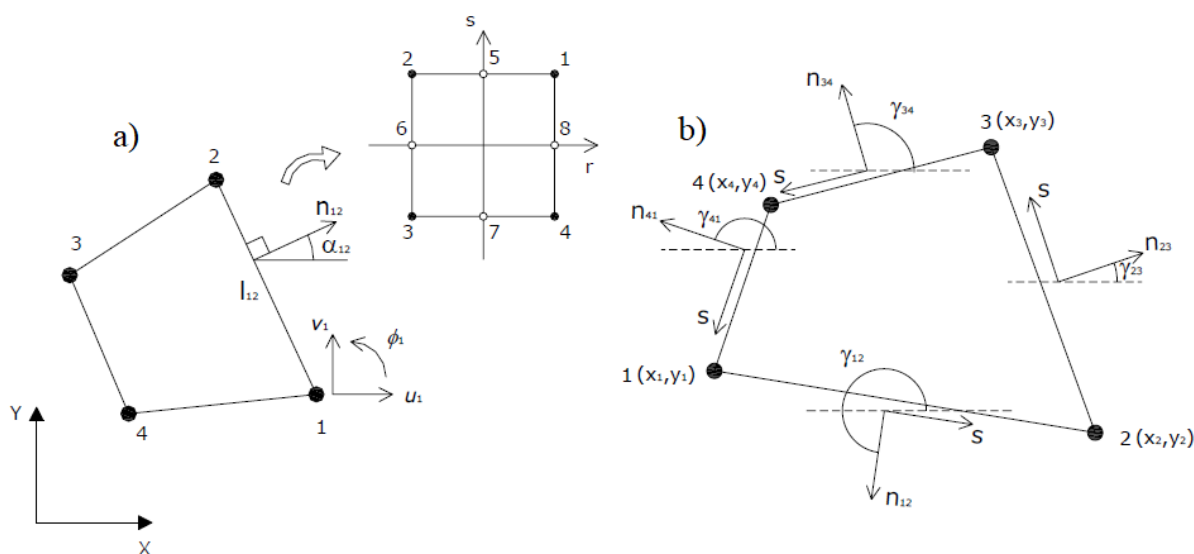


constitutivas. Caso o concreto apresente armadura passiva, esta é representada através de um modelo distribuído, onde as barras do aço de reforço são transformadas em uma camada com espessura equivalente à área da seção transversal das mesmas e são posicionadas em uma altura correspondente ao centroide das barras que representam. As componentes das tensões de cada camada que compõem a casca, seja de concreto ou de aço de reforço, são calculadas em pontos sobre sua superfície média e são consideradas constantes ao longo de sua espessura. A distribuição das tensões real da casca é obtida por aproximações de parcelas constantes.

### 3.1.2 Elemento finito para o perfil de aço

Para a modelagem da viga de aço de seção I, utiliza-se o elemento finito de casca plana, sendo que para obtê-lo, foi feita a combinação do elemento de membrana proposto pelos pesquisadores Ibrahimbegovic, Taylor e Wilson (1990) com o elemento de placa proposto por Batoz e Tahar (1982). Esse último é eficiente para a representação da parte de flexão dos elementos de casca e pode ser utilizado na modelagem de estruturas tipo seção I.

O elemento de membrana possui, em cada nó, os graus de liberdade referentes aos deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  e à rotação na direção  $z$ , já o elemento de placa possui como graus de liberdade: o deslocamento transversal na direção normal ao plano  $xy$  e as rotações nas direções  $x$  e  $y$ . Os dois elementos quadriláteros utilizados para a formulação estão ilustrados na figura 3.3.



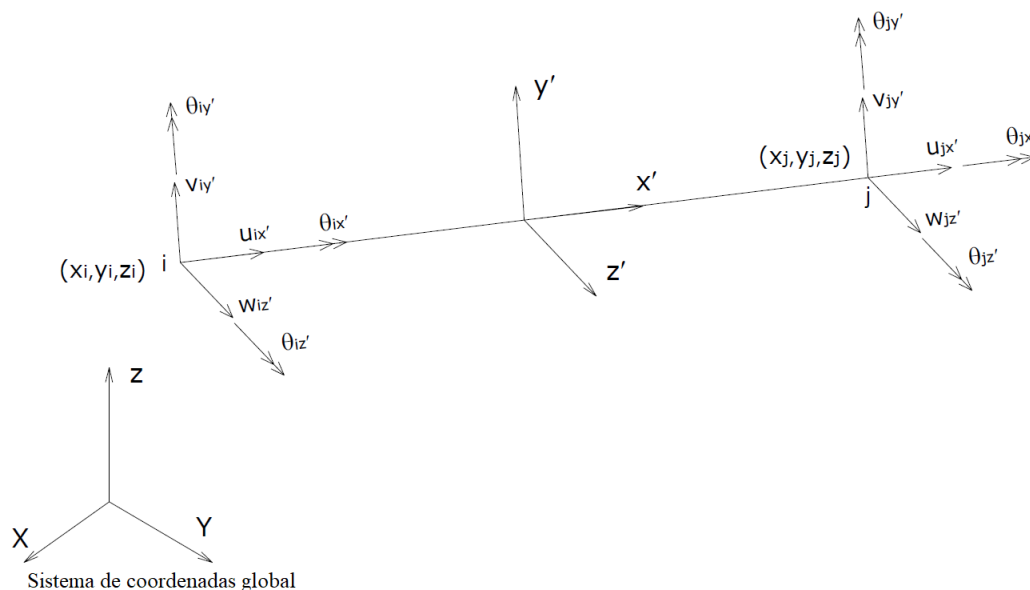
**Figura 3.3** – Representação da viga de aço a) elemento quadrilátero com grau de liberdade rotacional b) elemento quadrilátero de placa (fonte: TAMAYO, 2011).

Com as matrizes de rigidez dos elementos de membrana e de placa definidas, torna-se necessária a obtenção da matriz de acoplamento membrana-flexão devido ao acoplamento existente entre as deformações de extensão, torção e flexão pertinentes aos materiais do tipo laminados. Tais fenômenos ocorrem, principalmente, quando a isotropia é perdida por causa da plasticidade nos pontos de integração ao longo da espessura do elemento, onde são satisfeitas as equações constitutivas do material.

Emprega-se uma regra de integração gaussiana completa de  $3 \times 3$  sobre a área do elemento utilizando a fórmula da quadratura de Gauss-Legendre e uma mesma regra de integração com cinco pontos ao longo da espessura, a fim de se considerar a variação das propriedades dos materiais associadas à plastificação progressiva no elemento. Tamayo (2011) destaca que para a análise não linear do material, deve-se levar em consideração os termos fora da diagonal da matriz de rigidez para que se possa garantir a convergência do procedimento não-linear de Newton Raphson.

### **3.1.3 Elemento finito para os conectores**

Utilizam-se conectores de cisalhamento tipo pino com cabeça, *stud*, os quais são modelados através de elementos tridimensionais de barra viga-coluna (figura 3.4). O comprimento desta barra é, aproximadamente, o comprimento real do conector, o qual une os planos médios da mesa superior da viga de aço e da laje de concreto. A localização deles na malha da viga mista deve ser feita de tal forma que os nós das extremidades coincidam com os nós dos elementos principais correspondentes.



**Figura 3.4** – Elemento tridimensional de barra viga-coluna (fonte: TAMAYO, 2011).

Como foi dito no capítulo 2, os conectores são responsáveis pela transferência do cortante longitudinal e transversal da laje à viga, pela compatibilidade de giros entre esses elementos e pelo impedimento da sua separação vertical. Em relação à transferência do esforço cortante, é necessário saber a rigidez lateral dos conectores que é variável desde o início do carregamento e pode ser obtida a partir da curva de deslocamento relativo versus força cortante. O deslocamento relativo, nesta pesquisa, é considerado nas duas direções do plano  $xy$  da laje de concreto. Quanto à compatibilidade de giros nos planos unidos pelos conectores de corte, consideram-se valores bem elevados nas posições da matriz de rigidez correspondentes aos termos de flexão. Procedimento parecido é aplicado ao termo relacionado com a rigidez axial para que o efeito da separação vertical dos elementos seja impedido.

### 3.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS

O comportamento de qualquer estrutura depende fundamentalmente das equações constitutivas dos materiais que a compõe. Essas equações nada mais são que expressões que relacionam as tensões, deformações e o tempo. As vigas mistas são constituídas por diferentes elementos (laje de concreto, viga de aço, conectores de cisalhamento e armadura de reforço) que são colocados para trabalhar em conjunto como um único sistema. Tal sistema é construído a fim de explorar as propriedades de cada um dos materiais constituintes de acordo com a sua designação.

A fim de se obter uma análise satisfatória com o método dos elementos finitos, apropriados modelos constitutivos dos materiais se fazem necessários. Na maioria dos casos, o aço pode ser considerado um material homogêneo que exibe uma relação tensão-deformação similar em compressão e tração e cujas propriedades são geralmente bem definidas. Por outro lado, o comportamento do concreto é altamente dependente das propriedades de seus componentes: pasta de cimento e conjuntos de agregados. Por ser um material heterogêneo, as propriedades em compressão e em tração do concreto são bastante distintas entre si, dificultando suas definições precisas.

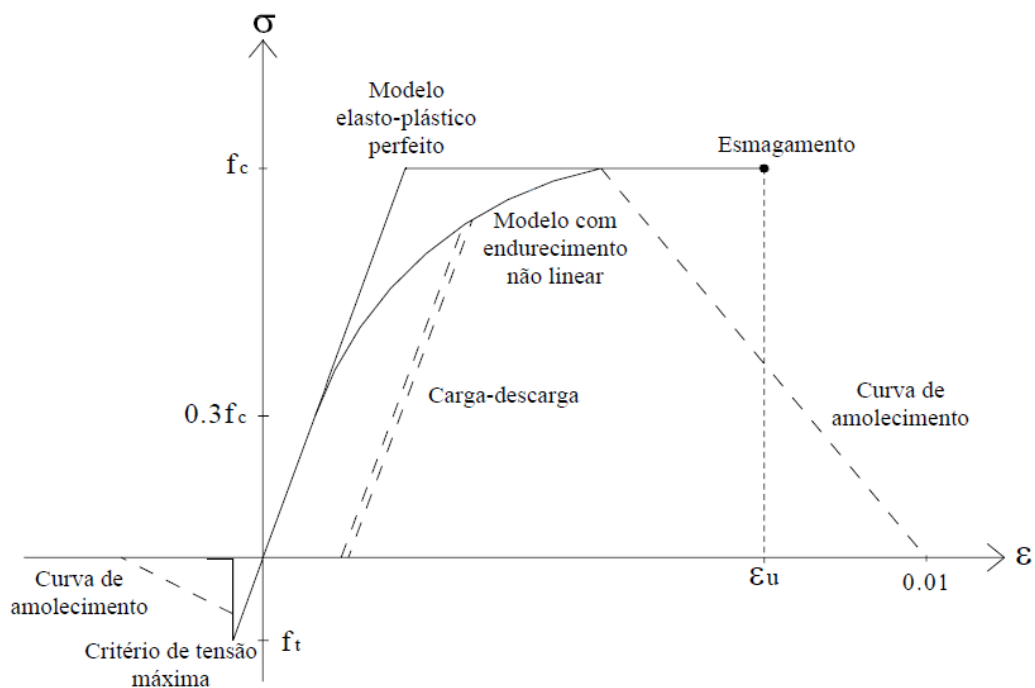
A seguir será vista uma descrição abreviada dos modelos constitutivos dos materiais utilizados em cada um dos elementos que formam a viga mista. Como mencionado no início deste capítulo, uma abordagem detalhada pode ser encontrada nas pesquisas anteriores feitas por Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016) e Wayar (2016).

### **3.2.1 Modelo elasto-plástico para o concreto**

Devido ao comportamento do concreto estrutural ser extremamente complexo, com diferenças significativas em sua resistência à tração e à compressão, são empregadas duas relações constitutivas distintas para cada situação. Em relação à modelagem do comportamento do concreto quando comprimido, um modelo elasto-plástico com endurecimento não linear é adotado e, para a situação onde o concreto encontra-se tracionado, emprega-se um comportamento elástico linear até a ruptura, a partir da qual se considera um modelo de contribuição do concreto entre fissuras na rigidez total da estrutura.

#### **3.2.1.1 Modelo para o concreto comprimido**

Para o estabelecimento das relações constitutivas do tipo incremental associadas ao modelo elasto-plástico com endurecimento não linear (figura 3.5), empregam-se um critério de plastificação e leis que definem o escoamento plástico e o endurecimento.



**Figura 3.5** – Representação unidimensional do diagrama tensão-deformação dos diferentes modelos usados para o concreto (fonte: DIAS, 2013).

O critério de plastificação elasto-plástico é associado à superfície de escoamento inicial, que determina o início da deformação plástica, e à superfície limite, que separa o endurecimento não linear do comportamento elasto-plástico perfeito, sendo ambas as superfícies expressas pela função de plastificação dada pela expressão (1). Essa função, expressa em termos das componentes das tensões no plano estrutural, corresponde a uma variação do critério de Drucker-Prager e negligencia a tensão normal à superfície média (ou seja,  $\sigma_z$  é nula), uma vez que o estado de tensões em cascas pode ser considerado biaxial.

$$f(\sigma) = \{1,355[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] + 0,355\sigma_o(\sigma_x + \sigma_y)\}^{1/2} = \sigma_o \quad (1)$$

Ao se aplicar um carregamento incremental à estrutura, assume-se uma resposta elástica até ser atingida a superfície de plastificação inicial que indica o começo do processo elasto-plástico. Com o aumento da carga, as superfícies se expandem de acordo com a lei de endurecimento adotada até a superfície limite de escoamento ser alcançada. Ao atingir esse limite, considera-se um comportamento elasto-plástico perfeito até que a condição de fratura do concreto em compressão seja verificada de acordo com uma condição de esmagamento definida.

A lei que define a plastificação relaciona os incrementos de deformação plástica com o vetor das componentes das tensões a que o material está submetido. A expressão (2) mostra a definição desses incrementos, sendo que  $d\lambda$  é a constante de proporcionalidade que determina a magnitude deles e o gradiente  $\partial f(\sigma)/\partial \sigma_{ij}$  define sua direção perpendicular à superfície de plastificação atual.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

A definição do movimento das superfícies de plastificação conforme o aumento da deformação plástica é feita pela lei de endurecimento. Considerando que o concreto é um material com endurecimento isotrópico, as superfícies de escoamento evoluem conforme a expressão (3), onde  $f(\sigma)$  é a função de plastificação (dada pela expressão (1)) e  $\sigma_y(k)$  representa a tensão de escoamento relacionada ao parâmetro de endurecimento  $k$ .

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_y(k) \quad (3)$$

O critério de esmagamento do concreto em compressão para um estado multiaxial de tensões é estabelecido a partir da conversão do critério de plastificação, descrito em termos das tensões, diretamente em termos das deformações. A partir do momento que o concreto atinge a deformação última, assume-se que são totalmente perdidas suas características de resistência e rigidez. Se o amolecimento do concreto for considerado, após a tensão efetiva atingir o valor da resistência  $f_c$ , o patamar de escoamento é substituído por uma reta descendente até o valor de 0,01 de deformação última, conforme pode ser visto na figura 3.5.

### 3.2.1.2 Modelo para o concreto tracionado

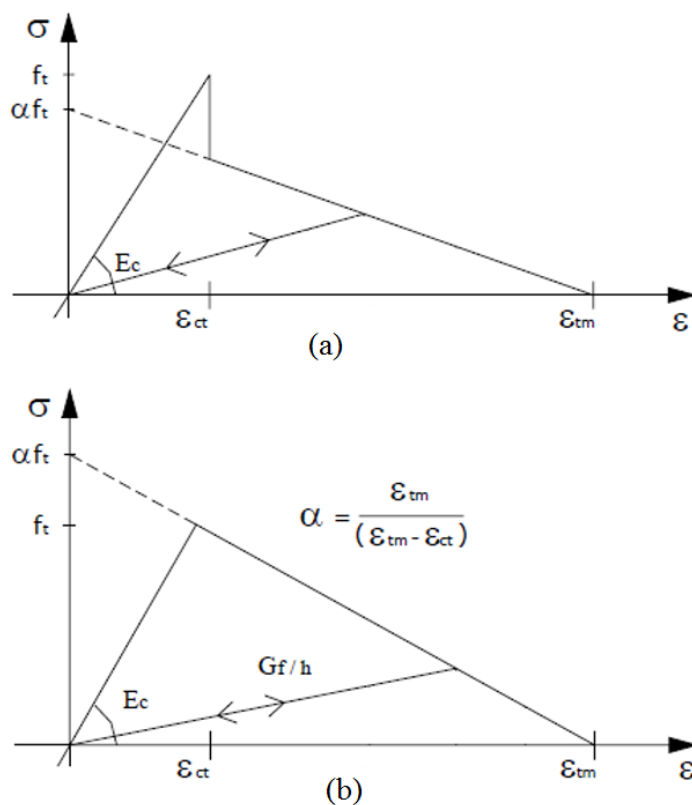
A resistência à tração do concreto não é tão importante na análise e dimensionamento das estruturas de concreto, por esta ser relativamente baixa e pouco confiável. No entanto, a extensão das zonas de concreto fissurado e o comportamento pós-fissuração influenciam significativamente na resposta não linear das estruturas. Assim sendo, um procedimento aproximado é geralmente adotado na formulação de elementos finitos: considera-se que as fissuras não são discretas, mas distribuídas na zona de influência associada ao ponto representativo do material. Tal modelo de fissuração distribuída é mais interessante nos casos

onde se deseja o comportamento geral da estrutura e quando há formação de muitas fissuras. Pela sua adoção, consegue-se manter a malha de elementos finitos original após a ocorrência da fissuração, necessitando-se apenas a atualização da relação tensão-deformação.

A resposta do concreto submetido à tração é assumida linear elástica até a superfície de fratura ser atingida. Uma vez excedida a tensão de fratura do concreto pela tensão principal máxima instalada, admite-se a formação de uma fissura na direção perpendicular à referida tensão principal, o que torna o concreto um material ortótropo cujos eixos de ortotropia são coincidentes com as direções das tensões principais.

Mesmo fissurado, o concreto tem a capacidade de conduzir as forças de corte, sendo que esta capacidade é fortemente influenciada pelos fenômenos do engrenamento que se estabelece entre as faces das fissuras, como também na presença de armaduras, a rigidez ao corte e à flexão das armaduras que as atravessam. Como a largura da fissura é um fator determinante no quanto o concreto fissurado contribui na rigidez ao corte, emprega-se um coeficiente de retenção da rigidez que gradualmente reduz o módulo de elasticidade transversal.

Outro fenômeno igualmente importante a respeito do concreto fissurado diz respeito à aderência entre as fissuras e às barras de armadura. É devido a esta aderência que o material ainda suporta certo nível de tensão depois de sua fissuração, contribuindo significativamente para a rigidez da estrutura. Esse fenômeno, conhecido como “enrijecimento à tração” (*tension stiffening*), é considerado através da utilização de dois diagramas de retenção de tensões de tração, ilustrados na figura 3.6.



**Figura 3.6** – Diagrama de retenção de tensões de tração para o concreto fissurado (fonte: DIAS, 2013).

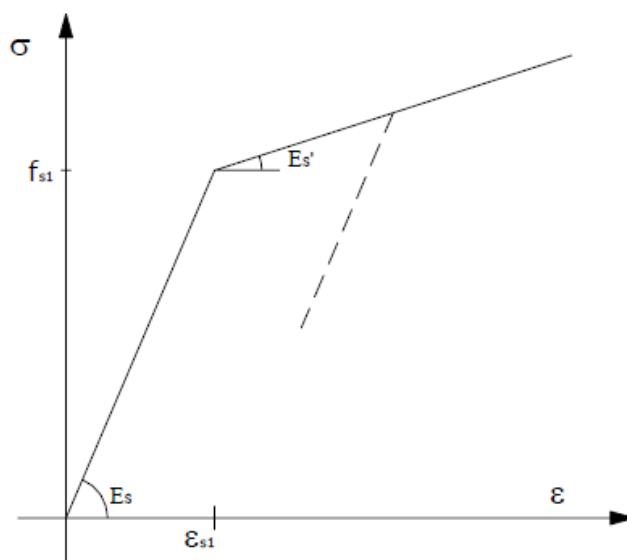
O diagrama da figura 3.6a é aplicado apenas para as regiões onde há interação entre o concreto e a armadura, o que possibilita a mobilização do mecanismo de aderência. Neste diagrama,  $\epsilon_{tm}$  é a deformação máxima em função do grau do mecanismo de aderência considerado entre a armadura e o concreto e  $\alpha$  usualmente assume um valor entre 0,5 e 0,8. Já o diagrama da figura 3.6b é adotado onde o concreto se localiza fora da zona de influência da armadura ou em estruturas de concreto simples, sendo que  $\epsilon_{tm}$  é calculado em função da energia de fratura e a espessura da peça,  $h$ .

### 3.2.1.3 Modelo para a armadura de reforço

No modelo computacional desenvolvido, as barras da armadura de reforço são consideradas como camadas de aço de espessura equivalente. Cada camada dessas exibe uma resposta uniaxial, possuindo características de resistência e rigidez somente na direção da barra. Considera-se o aço como um material que apresenta o mesmo comportamento em tração e em compressão, assim sendo, as curvas tensão-deformação dele são praticamente iguais frente a estas duas solicitações.



A relação tensão-deformação elasto-plástica do aço de reforço é modelada através de uma idealização bilinear ilustrada na figura 3.7. Basicamente, no primeiro trecho o aço se comporta como um material perfeitamente elástico, com um módulo de deformação longitudinal dado por  $E_s$ , até atingir a tensão de escoamento. Depois disso, o aço pode apresentar um comportamento elasto-plástico perfeito ou elasto-plástico com endurecimento linear, dependendo do valor de  $E'_s$ .



**Figura 3.7** – Diagrama tensão-deformação bilinear para o aço de reforço (fonte: TAMAYO, 2013).

### 3.2.2 Modelo visco-elástico para o concreto

Quando um elemento de concreto é submetido a um carregamento de longa duração, ele se deforma instantaneamente e, com o passar do tempo, essa deformação aumenta de forma gradual. Esse aumento gradativo da deformação sob tensão é denominado de fluência. Elementos de concreto também podem se deformar lentamente ao longo do tempo mesmo na ausência de tensões devido às trocas de umidade com o ambiente, sendo essas deformações, considerando temperatura constante, chamadas de retração. A propriedade que remete ao aparecimento de deformações não imediatas no concreto é denominada viscosidade e, portanto, para as análises diferidas de estruturas de concreto, um modelo viscoso se faz necessário.

Nesta pesquisa, a análise de longa duração é realizada em passos de carga, sendo que, no primeiro, supõe-se que a carga se encontra dentro dos limites de serviço, considerando, então, um comportamento elasto-plástico do concreto. A partir do segundo passo de carga, o

envelhecimento devido à hidratação das partículas de cimento ao longo do tempo é modelado como o aumento de uma fração de volume do material solidificado, o qual é tratado como um material visco-elástico sem envelhecimento descrito por uma cadeia Kelvin com parâmetros independentes da idade. Para isso, utiliza-se um histórico de deformações para expressar a taxa total da deformação visco-elástica e, ao modificar a atual taxa de fluência por uma função da tensão atual, consegue-se obter a não linearidade.

O modelo baseado na micromecânica do processo de envelhecimento apresentado por Bazant e Prasannan (1989) é empregado para o tratamento da fluência no concreto. Os pesquisadores empregam uma lei de fluência sem envelhecimento para a matéria solidificada, ou seja, para o cimento hidratado, sendo o envelhecimento expresso por uma mudança de volume. Desta forma, eles puderam associar um modelo reológico com comportamento de um elemento de matéria solidificada ao invés do concreto como um todo, o que traria complicações à análise. Esse modelo reológico sem envelhecimento, ou seja, com parâmetros elásticos e viscosos independentes do tempo, não só simplifica a análise numérica da fluência como torna a utilização da cadeia de Kelvin mais vantajosa.

A expressão (5) apresenta a deformação total da cadeia de Kelvin no tempo ( $t$ ) devido à carga aplicada no tempo ( $t_0$ ), na qual  $\eta_\mu$  é a viscosidade,  $E_\mu$  o módulo de elasticidade e  $\tau_\mu = \eta_\mu/E_\mu$  o tempo de retardamento à fluência da  $\mu$ -ésima unidade. O número total de elementos da cadeia de Kelvin,  $N$ , é adotado igual a cinco por já ser suficiente para uma aproximação satisfatória.

$$\gamma(t - t_0) = \sum_{\mu=1}^{N=5} \frac{1}{E_\mu} (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_\mu}) \quad (5)$$

A fim de evitar um sistema de equações mal condicionado, os tempos de retardamento devem ser escolhidos de forma adequada levando em conta todo o período de interesse. Para a escolha dos passos de tempo é mais eficaz mantê-los constantes na escala logarítmica ( $t - t_0$ ), sendo  $t_0$  o instante no qual o primeiro carregamento é aplicado na estrutura ou a primeira deformação imposta. Para o primeiro passo, utiliza-se 10% de  $t_0$  e, para os subsequentes, utiliza-se a expressão (6), na qual  $m$  é o número de passos por década. A cada passo de tempo, atualiza-se o valor do módulo de elasticidade, de acordo com o modelo de predição escolhido, enquanto o coeficiente de Poisson é mantido constante.

$$t_{r+1} - t_0 = 10^{1/m}(t_r - t_0) \quad (6)$$

De acordo com a formulação proposta por Bazant e Prasannan (1989), a função de fluência para um material visco-elástico com envelhecimento como o concreto é dada pela expressão (7), em que  $\gamma(t, t_0)$  é a função de fluência para um material sem envelhecimento.

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\gamma(t, t_0)}{V(t)} \quad (7)$$

Devido à contribuição de Moreno (2016), podem ser utilizados seis modelos de predição dos fenômenos de fluência e retração nas análises realizadas pelo programa Vimis. A expressão (8) mostra as funções de fluência utilizadas para os modelos ACI 209R-92 e Bazant-Baweja B3 e a expressão (9) apresenta as funções de fluência para os modelos do CEB MC90, CEB MC99, CEB MC10 e GL2000.

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (8)$$

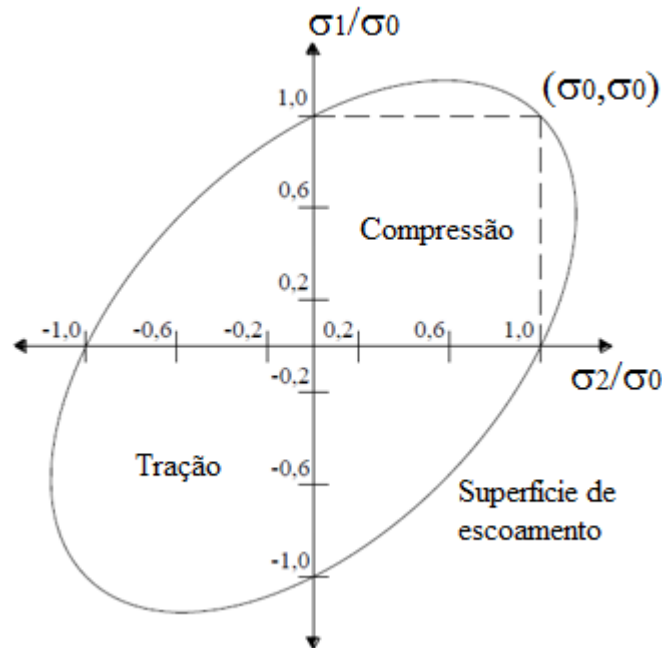
$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (9)$$

Ao comparar as funções de fluência dos modelos implementados com a proposta por Bazant e Prasannan (1989), tem-se que  $\gamma(t, t_0) = \varphi(t, t_0)$ . Discretizando-se essa função usando pontos determinados, conforme o número de pontos de tempo de análise, podem ser obtidos os parâmetros  $E_\mu$ .

### 3.2.3 Modelo para o aço estrutural

O aço estrutural possui um comportamento elasto-plástico com endurecimento e sua representação é feita através de um modelo constitutivo que considera a deformação elasto-plástica. Para tanto, é necessário se definir um critério de escoamento, uma lei de escoamento e uma lei de endurecimento.

O critério de plastificação que indica o nível de tensão no qual a deformação plástica se inicia e, conseqüentemente, o processo elasto-plástico, corresponde à lei de Huber-Von Mises para metais. A figura 3.8 ilustra a representação desse critério em duas dimensões no espaço das tensões principais ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), na qual  $\sigma_o$  é a tensão de escoamento uniaxial do aço.



**Figura 3.8** – Critério de plastificação em tração e compressão para o aço estrutural (fonte: MORENO, 2016).

Para a lei de escoamento plástica, adota-se a mesma formulação vista para o concreto em compressão. Para a lei do endurecimento, que define o movimento da superfície de escoamento com o aumento da deformação, também se considera o aço como um material isotrópico. Assim sendo, a evolução da superfície de escoamento é monitorada extrapolando as tensões do caso multiaxial ao caso uniaxial.

A expressão (10) mostra a relação uniaxial linear para a tensão de escoamento empregada nesta pesquisa, sendo  $\sigma_y^k$  a tensão de escoamento,  $\sigma_y^{k-1}$  a tensão de escoamento correspondente ao incremento de carga  $k - 1$ ,  $H'$  o módulo de endurecimento do material e  $\Delta\varepsilon_p^k$  o incremento da deformação plástica no presente incremento de carga  $k$ .

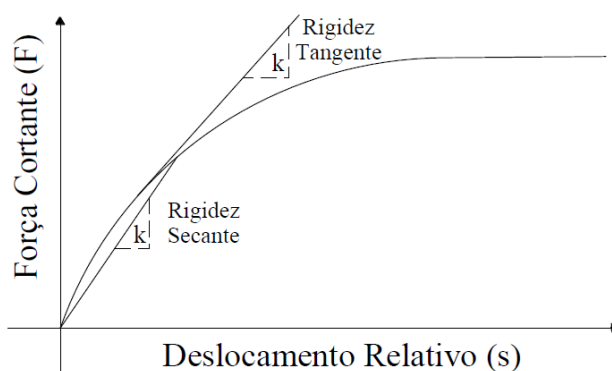
$$\sigma_y^k = \sigma_y^{k-1} + H'(\Delta\varepsilon_p^k) \quad (10)$$

### 3.2.4 Modelo para os conectores

As curvas força-deslocamento dos conectores de cisalhamento, necessárias para simular a variação de rigidez deles de acordo com o incremento da força de corte, podem ser ajustadas através de uma equação exponencial dependente de dois parâmetros,  $a$  e  $b$ , proposta pelos pesquisadores Yam e Chapman (1968), conforme apresentado na equação (11), sendo  $F_\alpha$  a força de corte atuante no conector na direção  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$  constantes que definem a forma e o tamanho da curva e  $s_\alpha$  o deslocamento relativo associado à direção  $\alpha$ .

$$F_\alpha = a[1 - e^{-bs_\alpha}] \quad (11)$$

A figura 3.9 ilustra tanto a rigidez tangente quanto a rigidez cortante que podem ser utilizadas para a determinação da rigidez dos conectores de cisalhamento no presente trabalho.



**Figura 3.9** – Representação das rigidezes tangente e secante dos conectores de cisalhamento (fonte: DIAS, 2013).

### 3.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO INCREMENTAL ITERATIVA

Para a análise não linear, é utilizada uma formulação incremental iterativa que consiste em uma técnica que subdivide o carregamento externo total em pequenos incrementos de carga. Dentro de cada incremento de carga, são realizados ciclos iterativos para obter uma solução convergente correspondente ao estágio de carregamento em consideração. Na prática, o progresso do procedimento iterativo é monitorado com referência a um critério de convergência especificado.

A técnica incremental iterativa utiliza, no código computacional desenvolvido, o método de Newton-Raphson modificado, no qual se atualiza a matriz de rigidez no começo da segunda iteração de cada incremento e no momento em que ocorre a descarga de tensão em um dado elemento, de modo que os efeitos não lineares sejam representados com maior precisão na matriz de rigidez.

Quanto à análise das vigas mistas protendidas internamente neste estudo, esta é dividida em dois passos. No primeiro passo de carga, nenhum carregamento externo é aplicado na estrutura, devido ao fato da aplicação da força de protensão inicial. Essa etapa é tomada para produzir a curvatura na viga mista devido à introdução da protensão. A partir do segundo passo de carga, a carga externa é aplicada à estrutura.

Para a consideração do efeito do tempo nas análises, um esquema de integração passo a passo no domínio do tempo é empregado, onde a cada passo de tempo, emprega-se o processo de carga incremental com a abordagem iterativa, conforme dito anteriormente, na solução das equações de equilíbrio. A consideração da carga devido às deformações por fluência e retração do concreto se faz ao final de cada passo, sendo as deformações geradas por estes fenômenos convertidas em cargas nodais aplicadas no próximo passo de tempo.

## 4 MODELAGEM NUMÉRICA DA PROTENSÃO INTERNA

A eficácia da análise não linear de estruturas protendidas está diretamente relacionada à utilização de um modelo numérico que considere apropriadamente a ação da protensão. A contribuição da armadura de protensão para o equilíbrio da estrutura deve levar em conta a modelagem da força de protensão inicial, as variações que ocorrem no valor da mesma ao longo do histórico de carregamento e a inclusão da rigidez dos cabos protendidos na formação da matriz de rigidez global da estrutura. Pode-se dizer que essa última ainda traz benefícios à análise numérica, pois se traduz em ganhos de eficácia, estabilidade e rapidez do algoritmo de solução não linear, em particular, para níveis de carga próximos do colapso da estrutura.

Ao longo dos últimos anos, diversos autores propuseram modelos para considerar a armadura de protensão em diferentes tipos de estruturas no campo das análises não lineares. Kang (1977), Zyl e Scordelis (1979), Greunen e Scordelis (1983) e Marí (1984) desenvolveram modelos para pórticos planos, tabuleiros de pontes curvas em caixão, placas e lajes, e pórticos tridimensionais, respectivamente, que consideravam o traçado do cabo através de linhas poligonais, com trechos retos no interior dos elementos, sendo considerada apenas de forma muito aproximada a contribuição da armadura de protensão para a rigidez da estrutura. Hofstetter e Mang (1986), através da utilização de elementos triangulares de casca fina, desenvolveram um modelo cujo princípio geral é a substituição da armadura de protensão por forças nodais equivalentes, não considerando a respectiva contribuição para a rigidez da estrutura.

A formulação utilizada nesta pesquisa foi inicialmente proposta por Póvoas (1991) para cabos curvos de protensão a serem incluídos em modelos baseados em elementos finitos para a análise não linear de estruturas de concreto protendido. Essa formulação é incorporada em elementos de casca grossa isoparamétrica sendo aplicável a outros tipos de elementos através de simples modificações. A geometria do cabo protendido é definida de maneira automática, permitindo a quantificação precisa das ações estruturais da protensão. Para a devida consideração dos aspectos envolvidos na contribuição da armadura de protensão para o equilíbrio da estrutura, os cabos são discretizados automaticamente em elementos finitos unidimensionais de acordo com a malha escolhida para a peça.

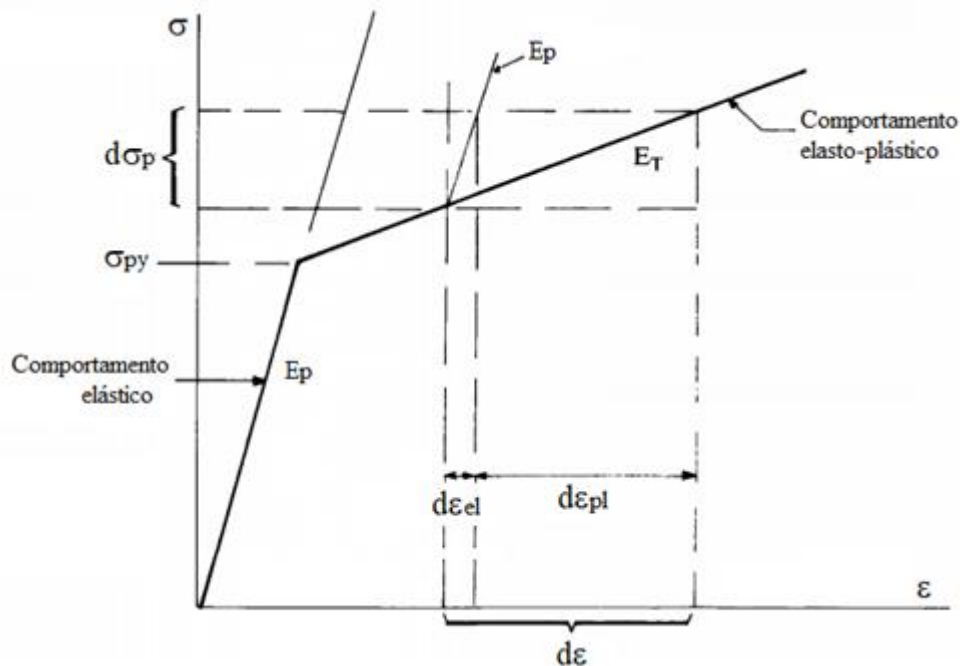
Apresenta-se na sequência os aspectos necessários para a modelagem numérica da armadura de protensão em estruturas de concreto, incluindo o modelo constitutivo empregado para o aço utilizado nos cabos. A concepção relativa à definição da geometria, da matriz de deformação e da matriz de rigidez dos elementos unidimensionais parabólicos empregados na modelagem da armadura de protensão é apresentada no item 4.2, sendo que uma distinção é feita na forma como são consideradas as forças conduzidas pelos cabos na formação das equações de equilíbrio da estrutura para os casos de protensão aderente e não aderente.

#### 4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO DE PROTENSÃO

O mesmo modelo elasto-plástico com endurecimento que foi utilizado para o aço das armaduras de reforço é empregado para o aço de protensão, sendo a igualdade de comportamento em tração e em compressão também assumida. Em estruturas protendidas, a forma do diagrama tensão-deformação se mostra de suma importância na resposta estrutural considerando análises de curta duração, tendo em vista que, com o aumento incremental do carregamento, o aço da armadura de protensão pode atingir o escoamento devido ao acréscimo significativo de tensão nos cabos.

A figura 4.1 ilustra o diagrama tensão-deformação bilinear para o aço de protensão. Nele pode ser visto que o material se deforma elasticamente de acordo com o módulo de Young,  $E_p$ , até o nível de tensão atingir o valor da tensão de escoamento,  $\sigma_{py}$ . A medida que o carregamento aumenta, o material começa a exibir um endurecimento linear, caracterizado pelo módulo tangencial,  $E_T$ .





**Figura 4.1** – Diagrama tensão-deformação bilinear para o aço de protensão (fonte: adaptado de HINTON; OWEN, 1980).

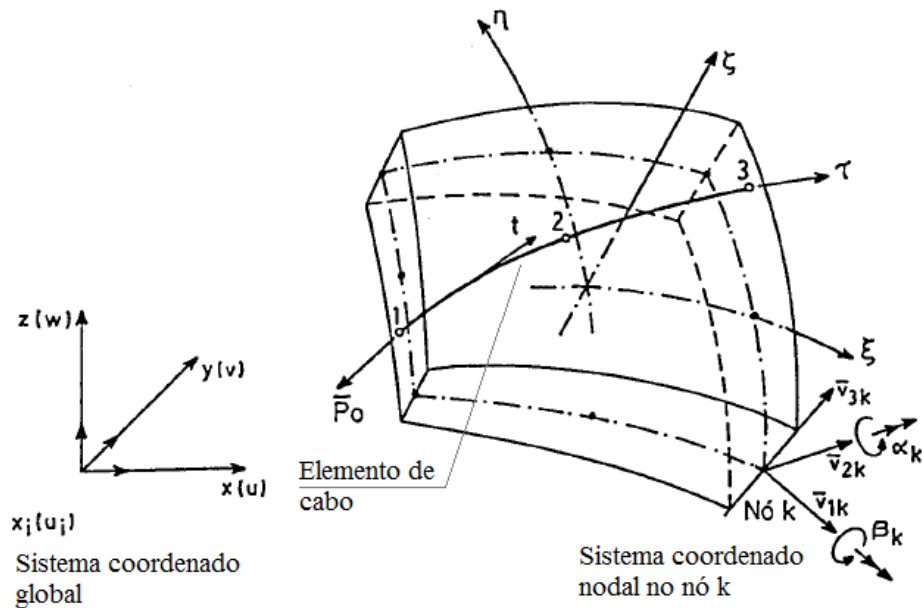
Em algum momento após o escoamento inicial, sob aplicação de uma carga adicional, um aumento incremental de tensão,  $d\sigma_p$ , é acompanhado de um aumento incremental de deformação,  $d\varepsilon$ . Assumindo que a deformação total do elemento possui parcelas elástica,  $d\varepsilon_{el}$ , e plástica,  $d\varepsilon_{pl}$ , define-se o parâmetro de endurecimento  $H'$ , expressão (12), que pode ser interpretado como a inclinação da parcela de tensão da curva tensão-deformação após a remoção da componente de deformação elástica.

$$H' = \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_{pl}} = \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon - d\varepsilon_{el}} = \frac{E_T}{1 - E_T/E_p} \quad (12)$$

O incremento da tensão axial no cabo de protensão é obtido a partir da formulação própria deste elemento que está apresentada no próximo item. Uma vez obtidos estes incrementos de tensões, emprega-se um algoritmo preditor-corretor elasto-plástico que permite corrigir as tensões para satisfazer as equações constitutivas mostradas na figura 4.1.

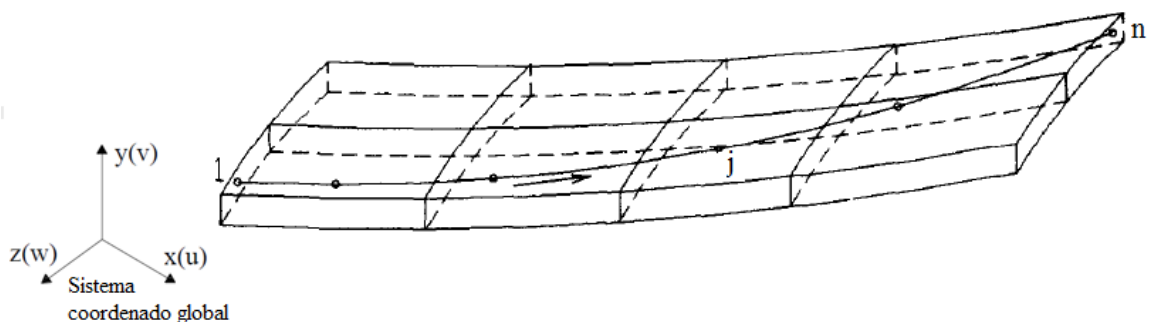
## 4.2 FORMULAÇÃO DA ARMADURA DE PROTENSÃO

O modelo empregado na presente pesquisa para a protensão da laje de concreto considera o cabo modelado de maneira incorporada dentro do elemento finito de casca degenerada (figura 4.2). Dessa forma, o traçado do cabo é dividido em segmentos que correspondem aos elementos de concreto por esse atravessados.



**Figura 4.2** – Representação do cabo de protensão incorporado dentro do elemento de casca degenerada (fonte: adaptada de PÓVOAS, 1991).

A definição da geometria do cabo é realizada a partir das coordenadas globais de três nós que determinam a localização de cada segmento da armadura (figura 4.3). Essas coordenadas são obtidas diretamente do arquivo de entrada de dados obtido na fase de pré-processamento através do *software* GiD.



**Figura 4.3** – Geometria da armadura de protensão (fonte: adaptada de PÓVOAS, 1991).

As coordenadas paramétricas são calculadas no código computacional mediante uma transformação inversa do sistema global para o sistema coordenado paramétrico. Com estas coordenadas globais definidas, não só podem ser avaliadas as contribuições que a carga aplicada pela protensão faz ao elemento de concreto atravessado pelo cabo, como também as tensões produzidas pelo efeito desta protensão, as deformações e o acréscimo de rigidez à estrutura.

#### 4.2.1 Obtenção do sistema de coordenadas naturais

A transformação do sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \zeta)$  para o sistema coordenado global  $(x, y, z)$  é feita mediante a interpolação das coordenadas nodais do elemento  $(\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n], \bar{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n])$ , conforme a equação (13).

$$x = \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{x}_j \quad ; \quad y = \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{y}_j \quad ; \quad z = \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{z}_j \quad (13)$$

Onde  $n$  é a quantidade de nós que definem o elemento de cabo e  $N_j(\xi, \eta, \zeta)$  são as funções de forma para o nó  $j$  avaliado em  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Porém, para o cabo de protensão, devem-se obter as coordenadas naturais a partir das coordenadas globais dos três nós que definem a geometria do cabo embutida dentro de cada elemento de concreto atravessado, ou seja, deve-se fazer a transformação inversa dos sistemas de coordenadas. Para isso, utiliza-se o procedimento proposto por Farias e Naylor (1998) para as coordenadas naturais  $\xi, \eta$  e, para determinar a coordenada  $\zeta$ , utiliza-se uma relação linear entre a posição na direção  $z$  do ponto e a espessura virtual da laje de concreto, considerada entre -1 e +1.

Uma variação na posição do sistema coordenado global  $(x, y)$  pode ser expressa em termo das coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , conforme a expressão (14).

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \quad ; \quad \Delta y = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta \quad (14)$$

A expressão (15) descreve esta mesma variação em forma matricial, sendo  $J$  a matriz Jacobiana, definida pela expressão (16).

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Utilizando a inversa da matriz Jacobiana, obtém-se a expressão (17), que descreve a variação das coordenadas naturais em função das coordenadas globais. Ou na forma explícita, conforme a equação (18).

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (18)$$

Emprega-se um procedimento iterativo de Newton-Raphson para determinar as coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  correspondentes às coordenadas globais  $(x, y)$ , conforme as expressões (17) e (18). Inicialmente se arbitram valores quaisquer para as coordenadas paramétricas  $(\xi_i, \eta_i)$ , em seguida, calculam-se as coordenadas globais  $(x_i, y_i)$  com a expressão (13) e faz-se uma comparação entre estas e as coordenadas do ponto objetivo  $(x_{obj}, y_{obj})$ , conforme a equação (19).

$$\Delta x = x_{obj} - x_i \quad ; \quad \Delta y = y_{obj} - y_i \quad (19)$$

Com os valores  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , realiza-se o cálculo de  $\Delta \xi$  e  $\Delta \eta$  com a expressão 18 e atualiza-se o valor das coordenadas naturais  $(\xi_i, \eta_i)$ , conforme a expressão (20). Esse procedimento é realizado repetidamente até que  $\Delta x$  e  $\Delta y$  adquiriram valores menores a uma tolerância de  $10^{-6}$ , conforme utilizada pelos pesquisadores Farias e Naylor (1998).

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta\xi \quad ; \quad \eta_{i+1} = \eta_i + \Delta\eta \quad (20)$$

#### 4.2.2 Definição da matriz de deformação

A definição da geometria de um segmento de cabo embutido em um elemento de casca pode ser especificada mediante a expressão (21), em que  $N_j'(\tau)$  são as funções de forma adotadas para um elemento unidimensional parabólico, expressas pela equação (22), e  $\tau$  é a coordenada curvilínea correspondente.

$$\{x_p(\tau)\} = \sum_{j=1}^3 N_j'(\tau) \{x_{p,j}\} \quad (21)$$

$$N_1'(\tau) = -\frac{1}{2}\tau(1-\tau) \quad ; \quad N_2'(\tau) = (1-\tau^2) \quad ; \quad N_3'(\tau) = \frac{1}{2}\tau(1+\tau) \quad (22)$$

Assume-se a equação (23) para o vetor tangente unitário correspondente, a expressão (24) para  $\{v(\tau)\}$  e expressão (25) para a norma deste.

$$\{t(\tau)\} = \frac{\{v(\tau)\}}{|\{v(\tau)\}|} \quad (23)$$

$$\{v(\tau)\} = \frac{dx}{d\tau}\{i\} + \frac{dy}{d\tau}\{j\} + \frac{dz}{d\tau}\{k\} \quad (24)$$

$$|\{v(\tau)\}| = v = \left[ \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (25)$$

Tendo em vista que somente há a necessidade da consideração da deformação axial para a armadura de protensão e ao fazer coincidir a direção do vetor tangente unitário  $\{t(\tau)\}$  com o eixo  $x'$ , do sistema coordenado local, pode-se concluir que a definição das orientações dos eixos

complementares ao  $x'$ , ou seja, os eixos  $y'$  e  $z'$ , fica condicionada apenas pela obrigatoriedade do referencial local constituir um sistema coordenado homogêneo. Dessa forma, os vetores de base unitários  $\{i'\}$ ,  $\{j'\}$ ,  $\{k'\}$  do sistema de coordenadas local, são definidos conforme as expressões (26) a (28).

$$\{i'\} = t(\tau) = a\{i\} + b\{j\} + c\{k\} \quad (26)$$

$$\{j'\} = \frac{1}{(b^2 + a^2)^{1/2}} (-b\{i\} + a\{j\}) \quad (27)$$

$$\{k'\} = \frac{\{i'\} \times \{j'\}}{|\{i'\} \times \{j'\}|} \quad (28)$$

Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  definidos por (29).

$$a = \frac{1}{v} \frac{dx}{d\tau} ; \quad b = \frac{1}{v} \frac{dy}{d\tau} ; \quad c = \frac{1}{v} \frac{dz}{d\tau} \quad (29)$$

Através das expressões (26) a (29), obtém-se a matriz de rotação  $[\Theta]$ , definida por (30), a qual relaciona os sistemas coordenados local e global.

$$[\Theta] = [\{i'\}, \{j'\}, \{k'\}] \quad (30)$$

Com a matriz de rotação definida, as derivadas parciais das componentes dos deslocamentos no referencial local são obtidas a partir das correspondentes derivadas no referencial global, conforme a equação (31).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\Theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\Theta] \quad (31)$$

Ao se considerar apenas a componente relativa à extensão axial da armadura, a expressão (31) se simplifica na (32) que, ao ser desenvolvida, resulta na expressão (33).

$$\epsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \{a \quad b \quad c\} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} = & a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + ab \frac{\partial v}{\partial x} + ac \frac{\partial w}{\partial x} + ab \frac{\partial u}{\partial y} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + bc \frac{\partial w}{\partial y} + ac \frac{\partial u}{\partial z} + bc \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (33)$$

Ao se recorrer às expressões adequadas da formulação do elemento de casca, as derivadas parciais das componentes dos deslocamentos podem ser explicitadas no referencial global, em termos dos deslocamentos nodais da casca degenerada. Assim sendo, tem-se a expressão (34) para a extensão axial do cabo de protensão.

$$\epsilon_{x'} = B_p(\tau)\{d\} \quad (34)$$

Sendo que  $B_p(\tau)$  designa a matriz de deformação da armadura de protensão e  $\{d\}$  representa o vetor de deslocamentos nodais no referencial global. Sua forma explícita pode ser vista na equação (35), na qual  $i$  varia de 1 a 8, que é o número de nós do elemento de casca. A formulação obtida para os termos genéricos da matriz de deformação é apresentada no Apêndice A desta dissertação.

$$\epsilon_{x'} = [\dots \quad B_{1i} \quad B_{2i} \quad B_{3i} \quad B_{4i} \quad B_{5i} \quad \dots] \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \end{Bmatrix} ; \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (35)$$

### 4.2.3 Matriz de rigidez para armadura aderente

Determinada a matriz de deformação,  $B_p$ , a qual relaciona a extensão axial do cabo com os graus de liberdade do elemento de casca, a contribuição da armadura de protensão, para a formação da matriz de rigidez do elemento de casca degenerada onde está embutida é dada pela expressão (36).

$$K_p = \int_{l_p} B_p^T E_p B_p A_p dl \quad (36)$$

Como se pode perceber, (36) representa a formulação usual no método dos elementos finitos, sendo que  $E_p$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço de protensão obtido pelas inclinações que definem a relação tensão-deformação adotada para o aço (item 4.1),  $A_p$  é a área da seção transversal do cabo e  $l_p$  é o comprimento do segmento de cabo incorporado dentro do elemento de casca.

Ao exprimir a integral de linha da equação (36) em termos da coordenada curvilínea  $\tau$ , obtém-se (37), cuja respectiva solução por integração numérica é dada pela expressão (38).

$$(K_{ij})_p = \int_{-1}^1 (B_i)_p^T E_p (B_j)_p A_p v d\tau \quad (37)$$



$$(K_{ij})_p = \sum_{k=1}^{NGAUS} (B_i(\xi, \eta, \zeta)_k)_p^T E_p (B_j(\xi, \eta, \zeta)_k)_p A_p v(\tau_k) w_k \quad (38)$$

Nas equações acima,  $(K_{ij})_p$  designa a contribuição da armadura de protensão para a formação da sub-matriz de rigidez que relaciona os nós  $i$  e  $j$  do elemento de casca,  $(B_i)_p$  e  $(B_j)_p$  representam as sub-matrizes de deformação associadas aos nós referidos (expressão 35),  $v(\tau_k)$  é definida pela expressão (25) e  $w_k$  designa os pesos associados aos pontos de integração considerados.

As coordenadas curvilíneas do elemento de casca degenerada nos pontos de integração do cabo,  $\tau(k)$ , necessárias à determinação da matriz  $B_p$ , são definidas por expressões equivalentes às estabelecidas para as coordenadas gerais vistas na equação (21), conforme a equação (39).

$$\begin{Bmatrix} \xi(\tau_k) \\ \eta(\tau_k) \\ \zeta(\tau_k) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 N_j'(\tau_k) \begin{Bmatrix} \xi_{p,j} \\ \eta_{p,j} \\ \zeta_{p,j} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

#### 4.2.4 Matriz de rigidez para armadura não aderente

A definição da matriz de rigidez para cabos não aderentes é bem mais complexa que para cabos com aderência. Embora a colaboração nas ancoragens e o efeito do atrito entre a estrutura e a armadura de protensão representarem certa contribuição na rigidez global da estrutura, tal contribuição é, em geral, menor que para os casos de cabos aderentes. Por outro lado, no procedimento iterativo e incremental, como o usado neste estudo, a avaliação precisa da matriz de rigidez não é crucial e o uso de uma rigidez aproximada pode vir a ser mais eficiente para o processo numérico.

Duas abordagens são comumente utilizadas nos modelos numéricos para os casos de armadura de protensão não aderente: ou a contribuição dos cabos não aderentes na matriz de rigidez global da estrutura é negligenciada, ou uma rigidez similar aos casos de cabos aderentes é utilizada. Assim sendo, após a obtenção da matriz de rigidez considerando uma aderência perfeita entre a estrutura e a armadura de protensão, utiliza-se a expressão (40), proposta pelos pesquisadores

Roca e Marí (1993), a qual multiplica esta matriz por um coeficiente  $\alpha$  que pode variar de 0 a 1, em que  $\alpha$  igual a zero representa a escolha da primeira abordagem e  $\alpha$  igual a 1 a segunda, ou seja, a armadura não aderente contribui integralmente na rigidez total da estrutura.

$$\alpha K_p ; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (40)$$

### 4.3 FORÇAS CONDUZIDAS PELA ARMADURA DE PROTENSÃO

A contribuição da armadura de protensão na formação do vetor contendo as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na estrutura é expressa por uma integral do tipo dada pela expressão (41).

$$P_p = A_p \int_{l_p} B_p^T \sigma_p dl \quad (41)$$

A solução de (41) é obtida mediante integração numérica conforme a expressão (42), na qual  $\{P_i\}_p$  é o vetor que compreende a contribuição do cabo de protensão para a determinação das forças nodais equivalentes referentes ao nó  $i$  do elemento de concreto por ele atravessado e  $\sigma_{p,k}$  é a tensão instalada nos pontos de integração do elemento unidimensional, cujo valor é obtido pela relação tensão-deformação bilinear estabelecida para o aço protendido.

$$\{P_i\}_p = A_p \sum_{k=1}^{NGAUS} [B_i(\tau_k)]_p^T \sigma_{p,k} v_k w_k \quad (42)$$

O incremento de tensão no cabo,  $\Delta\sigma_p^n$ , relativo ao incremento genérico,  $n$ , é dado pela equação (43). Utiliza-se, para isto, uma relação incremental, na qual o valor do módulo de elasticidade,  $E_p^*$ , é atualizado conforme o modelo constitutivo do aço de protensão utilizado. O nível atual de tensão conduzida no cabo é expresso pela equação (44), sendo que  $\sigma_p^{n-1}$  é a tensão no cabo em um incremento anterior e  $\Delta\varepsilon_p^n$  é a deformação incremental que deve ser diferenciada para os casos de armaduras aderentes e não aderentes.

$$\sigma_p^n = \sigma_p^{n-1} + \Delta\sigma_p^n \quad (43)$$

$$\Delta\sigma_p^n = E_p^* \Delta\varepsilon_p^n \quad (44)$$

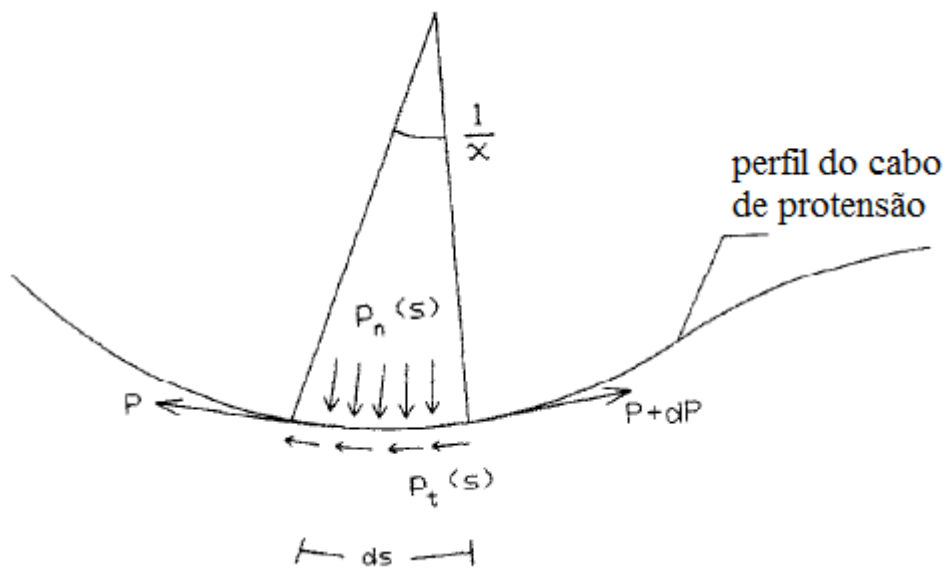
### 4.3.1 Armadura aderente

Nos casos onde os cabos de protensão se encontram perfeitamente aderidos ao concreto da laje, o campo de deslocamentos do elemento de casca degenerada e do elemento de cabo é o mesmo. Tendo isso em vista, o incremento de deformação axial para os elementos de cabo em um determinado incremento  $n$  é dado pela expressão (45), em que  $B_p$  é obtido por (34) e  $\{\Delta d\}$  é o incremento de deslocamentos nodais no referencial global.

$$\Delta\varepsilon_p^n = B_p \{\Delta d\}^n \quad (45)$$

### 4.3.2 Armadura não aderente

A compatibilidade entre os campos de deslocamentos da estrutura e da armadura de protensão para o caso de não aderência é garantida apenas nas ancoragens e então uma distinção deve ser feita entre o incremento de deformação do cabo,  $\Delta\varepsilon_p$ , e o incremento de deformação do concreto circundante,  $\Delta\varepsilon_{c.p}$ . Esse último é sempre dado pela expressão (45), vista para o caso de cabos aderentes. No entanto, para o cálculo do incremento de deformação,  $\Delta\varepsilon_p$ , para um dado ponto do cabo de protensão não aderente, uma abordagem local não é suficiente, o que leva à necessidade da consideração não só do elemento do cabo em particular, mas sim de todos os elementos que compõe o comprimento total do cabo. Sendo assim, as forças atuantes em um segmento infinitesimal de cabo podem ser vistas através da figura 4.4.



**Figura 4.4** – Forças atuantes em um segmento infinitesimal de cabo (fonte: adaptada de FIGUEIRAS; PÓVOAS, 1994).

A equação de equilíbrio do segmento de cabo ilustrado na figura acima pode ser expressa pela relação diferencial (46), em que  $\mu$  é o coeficiente de atrito,  $\chi$  é a curvatura do segmento de cabo e  $P(s)$  é a força de protensão conduzida no cabo. O sinal do lado direito da igualdade depende do sentido do movimento relativo, ou seja, do deslizamento entre o cabo e a bainha.

$$\frac{dP}{ds} = \pm \mu \chi P(s) \quad (46)$$

O incremento de deformação do cabo,  $\Delta \varepsilon_p$ , relaciona-se ao incremento de força de protensão,  $\Delta P$ , de acordo com a equação (47).

$$\Delta P = A_p E_p \Delta \varepsilon_p \quad (47)$$

Empregando as expressões (46) e (47), tem-se a equação diferencial (48), cuja solução por integração numérica é dada por (49), na qual  $C$  é a constante a ser calculada utilizando as condições de contorno do problema (isto é, a compatibilidade de deslocamentos entre a estrutura e a armadura nas ancoragens). A integral de linha é estendida da origem do segmento de cabo,  $s_A$ , até a seção  $s$ , onde o incremento de deformação virá a ser determinado.

$$\frac{d(E_p \Delta \varepsilon_p)}{ds} = \pm \mu \chi (E_p \Delta \varepsilon_p) \quad (48)$$

$$\Delta \varepsilon_p(s) = \frac{C}{E_p(s)} e^{\int_{s_A}^s \pm \mu \chi ds} = C g(s) \quad (49)$$

Na expressão (49),  $g(s)$  é a função que determina a variação de  $\Delta \varepsilon_p(s)$  ao longo do perfil do cabo protendido (função de forma) e o coeficiente  $C$  é a magnitude do incremento de deformação atual. Este coeficiente é obtido igualando-se a variação do comprimento do cabo e a correspondente variação do concreto circundante entre a origem e a extremidade oposta do cabo, conforme a expressão (50).

$$\int_{l_p} \Delta \varepsilon_p ds = \int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds \quad (50)$$

Empregando-se as expressões (49) e (50), obtém-se a equação (51).

$$C = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} \quad (51)$$

O valor do incremento de deformação do cabo,  $\Delta \varepsilon_p$ , nos casos de armadura de protensão não aderente é dado, então, pela expressão (52).

$$\Delta \varepsilon_p(s) = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} g(s) \quad (52)$$

O significado físico da constante  $C$  pode ser esclarecido tomando, na equação (49), uma função de forma normalizada,  $\bar{g}(s)$ , dada pela equação (53). Ao se integrar (49) e empregando a expressão (50), tem-se, finalmente, a expressão (54) para a constante  $C$ , sendo que nessas condições, essa constante representa o incremento de deformação médio induzido no cabo,  $\Delta \varepsilon_{p,m}$ .

$$\bar{g}(s) = \frac{\int_{l_p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} g(s) \quad (53)$$

$$C = \frac{\int_{l_p} \Delta\varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} ds} = \Delta\varepsilon_{p,m} \quad (54)$$

Na equação (55), que expressa a função de forma,  $g(s)$ , o sinal do expoente, determinante na análise, depende do deslizamento relativo,  $u_r(s)$ , entre a estrutura e o cabo, conforme a expressão (56). Sendo  $u_p(s)$  o deslocamento do cabo definido pela equação (57) e  $u_{c,p}(s)$  o deslizamento do concreto circundante definido pela equação (58).

$$g(s) = \frac{1}{E_p(s)} e^{\int_{s_A}^s \pm \mu \chi ds} \quad (55)$$

$$u_r(s) = u_p(s) - u_{c,p}(s) \quad (56)$$

$$u_p(s) = \int_{s_A}^s \Delta\varepsilon_p(s) ds \quad (57)$$

$$u_{c,p}(s) = \int_{s_A}^s \Delta\varepsilon_{c,p}(s) ds \quad (58)$$

Caso o sinal do deslizamento relativo for positivo, ou seja, se  $u_r(s) > 0$ , então o sinal do expoente da expressão (55) será positivo, caso contrário será negativo. Esse cálculo envolve um procedimento iterativo, pois a definição dos pontos onde  $u_r(s)$  muda de sinal depende do incremento de deformação do cabo,  $\Delta\varepsilon_p$ .

Começando pela ancoragem da extremidade esquerda da estrutura e tomando, em sequência, os pontos de Gauss de todos os elementos do cabo:

- a) calcula-se  $\Delta\varepsilon_{c,p}$  pela equação (45) e a correspondente variação do comprimento do cabo,  $\Delta l_p$ , pela expressão (59), na qual  $N$  é o número de pontos de Gauss multiplicado pelo número de elementos de cabo,  $v_k$  é definido na equação (25) e  $w_k$  são os pesos dos pontos de integração do elemento do cabo.

$$\sum_{k=1}^N (\Delta\varepsilon_{c,p})_k v_k w_k = \Delta l_p \quad (59)$$

- b) define-se o sinal do coeficiente de atrito  $\mu$ . Para isso, emprega-se, para a primeira iteração, a expressão (60) e, para as demais, a expressão (61).

$$(\Delta\varepsilon_{c,p})_j^1 - (\Delta\varepsilon_{c,p})_{j-1}^1 \quad (60)$$

$$(u_p)_j^{i-1} - (u_{c,p})_{j-1}^{i-1} \quad (61)$$

Se estas diferenças forem positivas, então o sinal de  $\mu$  será tomado positivo, caso contrário será negativo e, caso as diferenças forem nulas, então  $\mu$  será igual a zero. Com o sinal de  $\mu$  definido, avalia-se a função de forma,  $g(s)$ , conforme a equação (62).

$$g(s_k) = g_k = \frac{1}{(E_p)_k} \prod_{j=1}^k e^{\pm\mu\chi v_j w_j} \quad (62)$$

- c) avalia-se a correspondente integral da função de forma, empregando-se a equação (63).

$$\int_{l_p} g(s) ds = \sum_{k=1}^N \frac{v_k w_k}{(E_p)_k} \prod_{j=1}^k e^{\pm\mu\chi v_j w_j} \equiv \sum g_k v_k w_k \quad (63)$$

d) finalmente, o incremento de deformação para cabos não aderentes é dado pela expressão (64).

$$(\Delta\varepsilon_p)_k = g_k \frac{\Delta l_p}{\sum g_k v_k w_k} \quad (64)$$

O incremento de tensão,  $\Delta\sigma_p^n$ , a tensão atual conduzida pelo cabo,  $\sigma_p^n$ , e as forças nodais equivalentes,  $P_p$ , resultantes da contribuição do cabo são dadas pelas expressões (41) a (44) já apresentadas para os casos de armadura aderente.

#### 4.4 APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO

Na modelagem da transferência da força de protensão aplicada à estrutura de concreto, uma distinção deve ser feita entre as estruturas que utilizam a técnica da pré-tração das que usam pós-tração para que as correspondentes perdas sejam devidamente levadas em consideração de forma a garantir o nível de protensão efetivamente instalado na estrutura a ser analisada.

No caso das estruturas pré-tensionadas, a armadura é aderente desde o início do processo de transferência, o valor inicial do protensão é definido a partir da força de esticamento da armadura, deduzidas as perdas ocorridas até a data em que se processa a transferência da protensão, bem como eventuais perdas por atrito; e as perdas associadas à deformação da estrutura são consideradas. Já nas estruturas com pós-tração sem aderência, durante a fase de aplicação da protensão, as armaduras são consideradas não aderentes com atrito e a força de esticamento leva em consideração as perdas instantâneas associadas à transferência da protensão.

A partir da definição da força de protensão que será empregada, esta é modelada através da imposição de uma deformação inicial nos cabos de protensão,  $\Delta\varepsilon_{p,T}$ , a qual é estimada pela equação (65).

$$\Delta\varepsilon_{p,T} = \frac{P_0}{E_p A_p} \quad (65)$$



As forças nodais equivalentes a essa deformação inicial imposta à armadura de protensão são definidas pela expressão (66).

$$\sigma_p = \Delta\sigma_{p,T} = E_p \Delta\varepsilon_{p,T} \quad (66)$$

Uma vez determinado o campo de deslocamentos decorrente das forças aplicadas (a ação da protensão e, geralmente, o peso próprio da estrutura), a tensão na armadura é obtida pela expressão (67) para o sistema de pré-tração com aderência inicial, sendo que o incremento de deformação mecânica,  $\Delta\varepsilon_p(\tau)$ , é determinado pela equação (45).

$$\sigma_p(\tau) = \Delta\sigma_p(\tau) = E_p(\Delta\varepsilon_p(\tau) - \Delta\varepsilon_{p,T}) \quad (67)$$

Para o sistema de pós-tração sem aderência, a tensão na armadura é expressa pela equação (68), onde a deformação incremental média induzido no cabo,  $\Delta\varepsilon_{p,m}$ , é determinada pela expressão (54).

$$\sigma_p(\tau) = \Delta\sigma_p(\tau) = E_p(\Delta\varepsilon_{p,m} - \Delta\varepsilon_{p,T}) \quad (68)$$

A tensão inicial em um ponto qualquer da armadura de protensão é dada pela expressão (69), na qual  $(\sigma_{o,p})_j$  é a tensão inicial nos pontos nodais do cabo, cujos valores incorporam as perdas antecedendo a transferência da protensão e as perdas instantâneas para os cabos pré-tracionados e apenas essas últimas para os pós-tracionados.

$$\sigma_{o,p}(\tau) = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau)(\sigma_{o,p})_j \quad (69)$$

#### 4.5 MODELO DE RELAXAÇÃO DO AÇO DE PROTENSÃO

O alívio de tensão ao longo do tempo experimentada por um material sujeito a um estado de deformação constante é chamada de relaxação. Sendo que esta e a fluência nada mais são que manifestações distintas de um mesmo fenômeno. Embora o aço de protensão, em rigor, não

encontra-se submetido a um estado de deformação constante, considera-se que este estado é o que prevalece, razão pela qual se adota um modelo de relaxação na caracterização do respectivo comportamento reológico. O desenvolvimento da relaxação com o tempo é afetado por alguns fatores, como a temperatura, o nível de tensão inicial e o tipo de aço.

Nesta pesquisa, emprega-se a expressão (70) proposta por Póvoas (1991) para a consideração da perda de protensão devido à relaxação do aço com o tempo. Esta fórmula determina a relaxação intrínseca do aço de protensão, ou seja, a diminuição de tensão determinada em ensaios experimentais de armaduras sob alongamento constante e realizados sem alteração das condições iniciais.

$$\Delta\sigma_{pt,r} = -\frac{\sigma_{p0}}{k} \left[ \log_{10} t \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} - 0,55 \right) \right] ; \text{ para } \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} > 0,60 \quad (70)$$

Onde  $\Delta\sigma_{pt,r}$  é a diminuição de tensão verificada ao final do tempo  $t$  (em horas), para a tensão inicial  $\sigma_{p0}$ . A partir de ensaios experimentais realizados em uma larga variedade de aços de protensão, as variáveis  $k$  e  $f_{py}$  introduzem a influência do tipo de aço e assumem os valores vistos na expressão (71). Na qual,  $f_{py}$  e  $f_{pu}$  são, respectivamente, a tensão de escoamento e de ruptura à tração do aço de protensão.

$$\begin{aligned} & - \text{ para aços de relaxação normal: } k = 10 \text{ e } f_{py} = 0,85 f_{pu} \\ & - \text{ para aços de relaxação baixa: } k = 45 \text{ e } f_{py} = 0,90 f_{pu} \end{aligned} \quad (71)$$

Além da relaxação do aço utilizado para protender as estruturas de concreto, a variação da tensão instalada na armadura de protensão é afetada, também, pela história de carga e pelas perdas diferidas associadas ao concreto, fluência e retração, entre outras causas variáveis no tempo. A representação esquemática ilustrada na figura 4.5 é utilizada neste trabalho para a consideração da influência da variação de tensão associada a estas causas na quantificação da relaxação efetivamente experimentada pelos cabos de protensão. Podendo ser caracterizada pelo seguinte procedimento:

- a) conhecido o valor da tensão  $\sigma_p^{n-1}$  instalada no instante de tempo  $t_{n-1}$ , a expressão (70) é empregada na definição de uma tensão inicial fictícia  $\sigma_{p0}^{n-1}$ , que serve de base à determinação das perdas de tensão por relaxação  $\Delta\sigma_{pt,r}$ , associadas ao instante de tempo seguinte.
- b) definida a deformação mecânica do cabo  $\Delta\varepsilon_p^n$  associada à variação do campo de deslocamentos  $\{\Delta d\}^n$ , obtida para o incremento de tempo em questão, a tensão instalada no cabo no instante de tempo  $t_n$  é expressa pelas equações (72) a (74).

$$\Delta\sigma_{pt,r}^n = \Delta\sigma_{pt_n,r} - \Delta\sigma_{pt_{n-1},r} \quad (72)$$

$$\Delta\sigma_p^n = E_p\Delta\varepsilon_p^n + \Delta\sigma_{pt,r}^n \quad (73)$$

$$\sigma_p^n = \sigma_p^{n-1} + \Delta\sigma_p^n \quad (74)$$

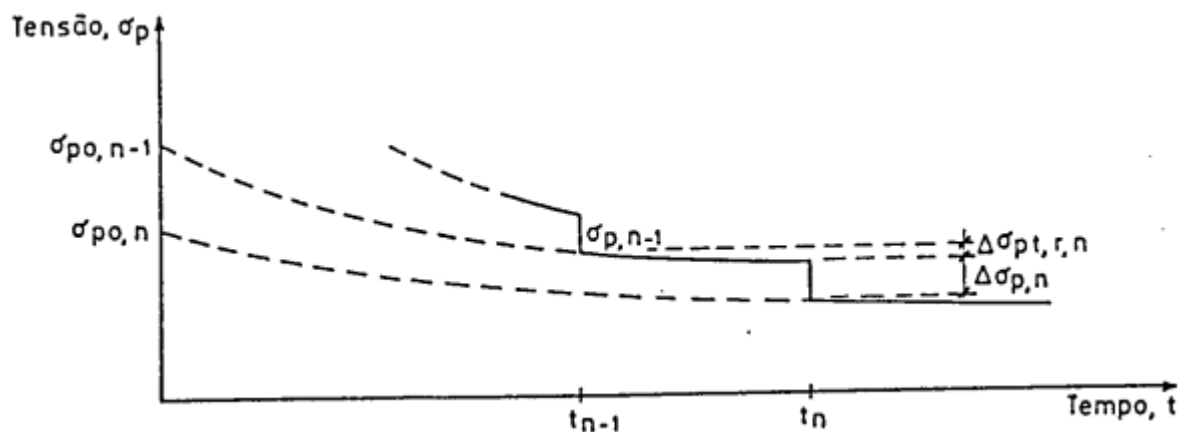


Figura 4.5 – Correção da relaxação intrínseca (fonte: PÓVOAS, 1991).

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL NO PROGRAMA VIMIS

Para que seja realizada a análise numérica de vigas mistas aço-concreto com protensão interna na laje através do código computacional existente em linguagem Fortran 90 (programa Vimis), faz-se necessário um arquivo de dados em formato *.dat*. Tal arquivo contém não somente a definição da geometria das malhas de elementos finitos utilizadas para cada um dos elementos que compõe o sistema misto, como também as condições de contorno do problema, os materiais utilizados, as solicitações da estrutura, o tipo de análise a ser efetuada (se análise última ou de serviço), o tipo de integração que será utilizado etc.

Na primeira versão do programa Vimis, Tamayo (2011) realizava a geração das malhas através do próprio código computacional. A partir de Dias (2013), esta etapa passou a ser facilitada através da utilização do *software* GiD, versão 11.0.8. O GiD abrange todas as necessidades comuns no campo das simulações numéricas, do pré ao pós-processamento, como modelagem da geometria, elaboração da malha de elementos finitos, geração dos dados em arquivo de texto para análise em *softwares* externos, e também a visualização gráfica dos resultados numéricos.

O GiD pode ser customizado através da criação de um *Problem Type*. Através dele, o programador pode estabelecer todas as informações pertinentes à estrutura, bem como o modo como essas informações serão geradas para serem utilizadas posteriormente no *software* externo que efetuará de fato a análise numérica.

### 5.1 PRÉ-PROCESSAMENTO ATRAVÉS DO SOFTWARE GiD

Nesta etapa de pré-processamento, efetua-se primeiro a geração das malhas de cada um dos elementos que compõe a viga mista de forma independente, depois a união destas em um novo arquivo com uma sequência arbitrada, a atribuição do *Problem Type* proposto, definição de todas as informações necessárias para a análise da estrutura (dados gerais, materiais, condições de contorno, carregamentos etc.) e por fim a criação do arquivo de dados que é utilizado pelo programa Vimis. Essa etapa é apresentada de forma resumida nos próximos itens. Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Dias (2013) e Moreno (2016).

A criação dos elementos de cabo protendido é feita de forma totalmente independente da estrutura mista. Gera-se a malha para o cabo e se atribui ao mesmo um *Problem Type* específico com informações que cabem tão somente à análise de vigas mistas protendidas por cabos

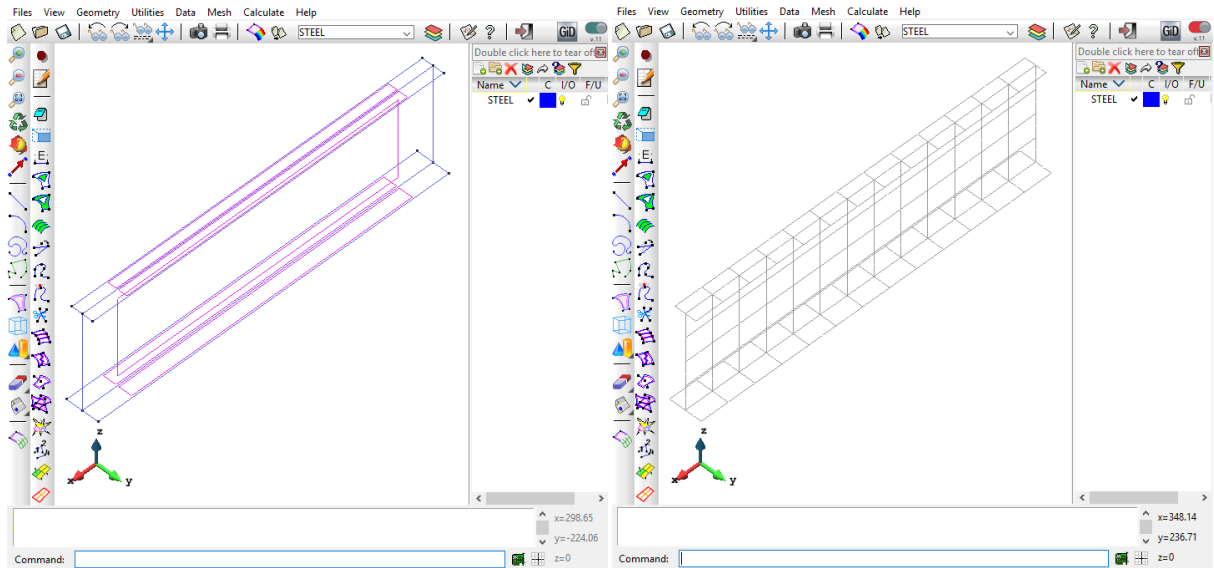
embutidos na laje de concreto. Assim foi decidido de forma a facilitar a leitura dos dados da protensão no programa Vimis: as coordenadas dos traçados dos cabos, curvos ou retos, são analisadas dentro do programa que consegue identificar quais elementos de concreto estão sendo atravessados pelos cabos e fazer as devidas considerações da contribuição, ou não, da introdução da protensão na matriz de rigidez da estrutura.

### 5.1.1 Geração e união de cada malha da viga mista

Para cada componente da viga mista deve-se gerar uma malha de elementos finitos independente das demais. O porquê disso se deve ao fato de que o GiD não permite o emprego de elementos finitos de diferentes ordens em uma mesma geometria. Conforme visto na modelagem dos componentes do sistema viga mista, para a laje de concreto são utilizados elementos finitos quadriláteros quadráticos, para a viga de aço são utilizados elementos quadriláteros lineares e para os conectores de cisalhamento utilizam-se elementos lineares.

A geometria do problema pode ser definida através das próprias ferramentas de desenho do GiD, por importação de um desenho num arquivo em formato *.dxf* ou por importação de um arquivo de dados *.bch* com as coordenadas e comandos que possibilitem ao GiD a elaboração da geometria proposta. Neste trabalho, optou-se em utilizar a primeira alternativa, ou seja, desenhar no próprio *software* a geometria da estrutura.

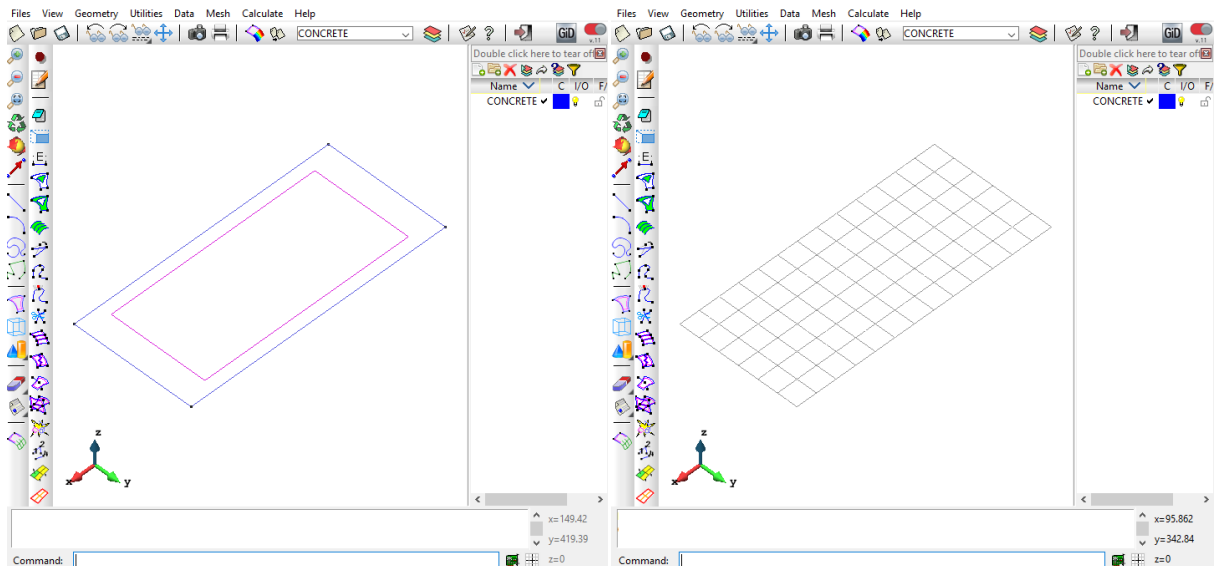
Para a viga de aço, desenham-se primeiro os eixos das mesas e depois a união destes pelos seus pontos centrais, que seria a alma da viga. Depois, se translada o perfil I criado até o comprimento da viga (ou até o seu eixo de simetria), na aba *Utilities-Copy*, tomando-se o cuidado de selecionar *Do extrude: surfaces*, para que durante a transladação o programa crie automaticamente as superfícies (figura 5.1) que são utilizadas na geração da malha de elementos finitos. Deve-se selecionar o tipo de elemento finito em *Mesh-Quadratic type-Normal*, depois ir em *Mesh-Structured-Surfaces-Assign number of cells*, clicar em cada superfície criada, uma de cada vez, e colocar a quantidade de divisões para todas as linhas que a delimitam. Uma vez seguidos esses passos para todas as superfícies, seleciona-se *Mesh-Generate mesh* e exporta-se a malha de elementos finitos para a viga de aço gerada (figura 5.2) em *Files-Export-GiD mesh*.



**Figura 5.1** – Geometria de uma viga de aço de perfil I.

**Figura 5.2** – Malha de elementos finitos para viga de aço.

O procedimento é semelhante para a laje de concreto. É importante posicionar corretamente o eixo na cota  $z$  adequada e mudar o tipo de elemento finito utilizado em *Mesh-Quadratic type-Quadratic*, uma vez que para a laje são utilizados elementos finitos quadráticos. As figuras 5.3 e 5.4 ilustram, respectivamente, um exemplo de geometria de laje de concreto e uma malha de elementos finitos para a mesma.

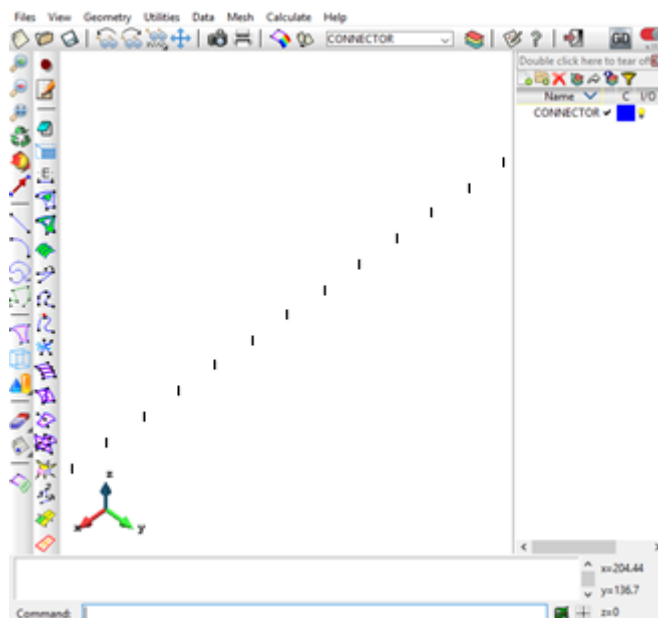


**Figura 5.3** – Geometria de laje de concreto.

**Figura 5.4** – Malha de elementos finitos para laje de concreto.

Para a malha dos conectores, desenha-se a geometria do primeiro conector e depois este é copiado em *Utilities-Copy* colocando a quantidade total de conectores em *Multiple copies* na

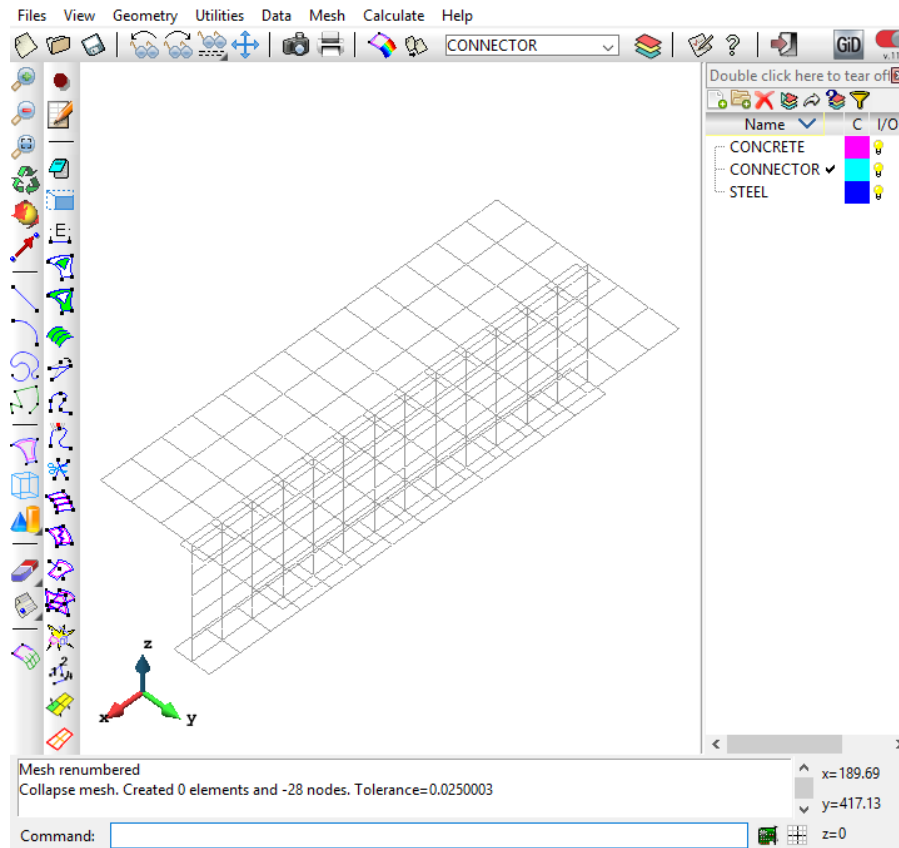
janela que se abre, sem necessidade de se gerar superfície uma vez que o elemento é linear. Na geração da malha, deve-se colocar *Mesh-Quadratic type-Normal* (figura 5.5).



**Figura 5.5** – Malha de elementos finitos para conectores de cisalhamento.

A união das malhas é feita em novo arquivo seguindo essa mesma ordem: viga de aço, laje de concreto e conectores de cisalhamento. Cria-se primeiro a *layer STEEL* e importa-se a malha da viga em *Files-Import-GiD mesh*, desliga-se esta *layer* e cria-se uma nova, *layer CONCRETE*, para que seja importada agora a malha da laje. Na importação da malha dos conectores, cria-se a *layer CONNECTOR* e seguem-se os mesmos passos descritos anteriormente. É importante salientar que o GiD questiona se a malha existente deve ou não ser removida, seleciona-se então *Add No Share* para que a cada nova importação de malha as anteriores não sejam excluídas.

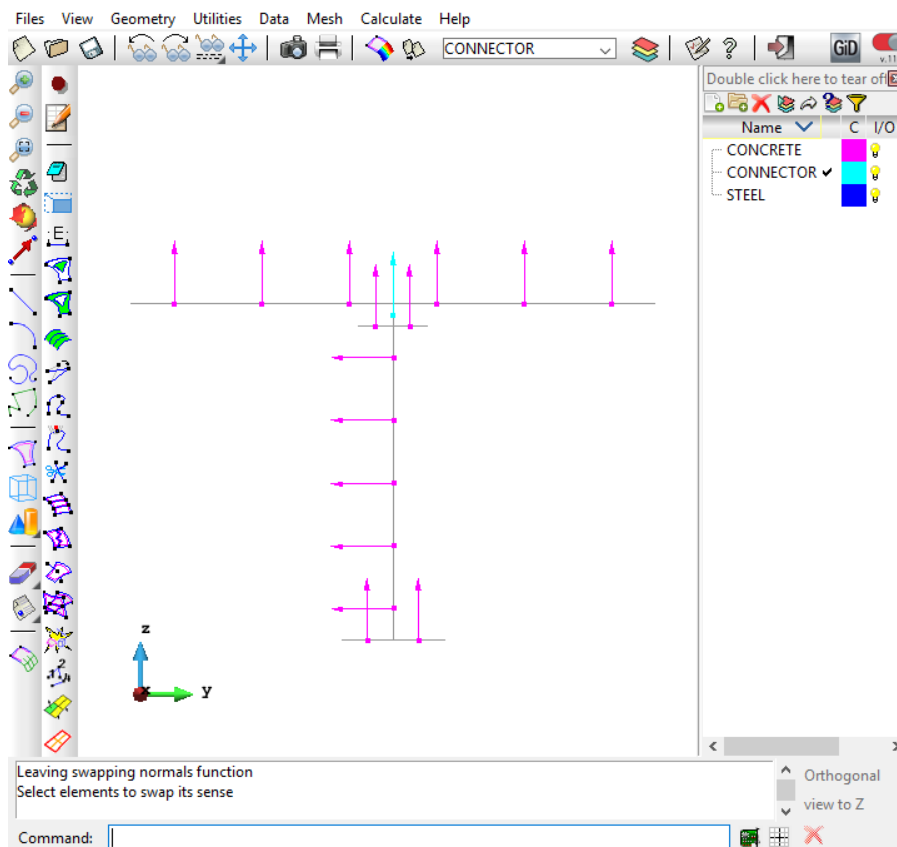
Unidos os três arquivos de malhas, devem-se excluir os nós de mesma coordenada em *Mesh-Edit mesh-Collapse-Mesh*, uma vez que os nós dos conectores são sobrepostos aos nós da laje e da viga. Uma mensagem é exibida na caixa de diálogo acima da linha de comando com a quantidade de nós eliminados após o colapso das malhas, conforme se verifica no exemplo ilustrado na figura 5.6.



**Figura 5.6** – Malha final de elementos finitos para uma viga mista após a união das malhas de cada um dos elementos constituintes.

Procede-se para a verificação da direção das normais dos elementos, já que esta interfere diretamente no sentido de numeração das conectividades dos mesmos. Seleciona-se *Utilities-Swap normals-Select* e, caso alguma normal de elemento não esteja no sentido negativo do eixo Y ou no sentido positivo do eixo Z, deve-se selecionar este elemento para que se realize a troca de direção. De forma a facilitar esta etapa, pode-se visualizar a estrutura no plano YZ, conforme a figura 5.7.





**Figura 5.7** – Direção das normais dos elementos finitos.

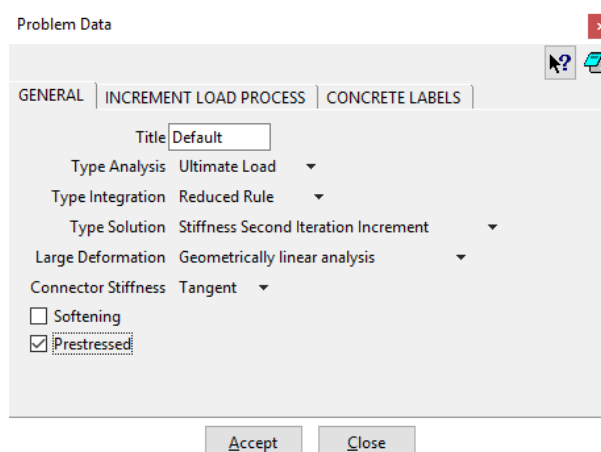
Ao final deste processo, renumeram-se os nós da malha. O GiD conta com cinco métodos de renumeração para eles que podem ser escolhidos a partir da variável *RenumberMethod*. Usa-se preferencialmente o método *Reverse Cuthill-McKee*, que é um algoritmo geométrico, o qual leva em conta a distância das coordenadas seguindo as conectividades dos elementos. A escolha desse método é conveniente, pois reduz a banda da matriz gerada pelo método dos elementos finitos. Para adotá-lo, escreve-se na linha de comando posicionada na parte inferior da interface do GiD: “*escape escape Utilities Variables RenumberMethod 1*”. Salienta-se que esta última etapa não é necessária, caso esse procedimento de renumeração seja feito antes da geração de cada uma das malhas isoladamente.

### 5.1.2 Atribuição do *Problem Type* e definição dos dados para a viga mista

Em *Data-Problem Type-VMP2*, atribui-se o *Problem Type* denominado “VMP2” para a viga mista, o qual contém todas as informações necessárias para a análise numérica, as quais foram customizadas previamente nos arquivos inseridos na pasta “VMP2.gid” criada em *C:\Program Files\GiD\GiD 11.0.8\problemtypes/VMP2.gid*.

### 5.1.2.1 Dados gerais

Em *Data-Problem Data*, abre-se uma janela responsável por atribuir os dados gerais do problema. Tal janela contém, como padrão, as abas *GENERAL*, *INCREMENT LOAD PROCESS* e *CONCRETE LABELS*. Na primeira aba, se define o tipo de análise, o tipo de integração, o tipo de solução a ser adotada, se será uma análise linear ou não linear, qual o tipo de rigidez dos conectores de cisalhamento (tangente ou secante), a consideração ou não do amolecimento no concreto e se a laje de concreto está protendida. Neste último caso, deve-se selecionar a opção *Prestressed*. A figura 5.8 ilustra a aba *GENERAL* para estruturas protendidas.



**Figura 5.8** – Aba *GENERAL* para viga mista protendida.

Na segunda aba do *Problem Data* (*INCREMENT LOAD PROCESS*), estão contidas as informações referentes ao processo de aplicação de carregamento, sendo que até quatro histórias de carga podem ser utilizadas. Ao escolher a quantidade das mesmas, arbitra-se a tolerância que será utilizada no cálculo iterativo do equilíbrio de forças internas e externas. Na definição de cada uma das histórias, deve-se informar o número de incrementos empregados, a porcentagem de carga atribuída a cada um deles, o número máximo de iterações a ser feita e o tipo de resultado a ser impresso ao final de cada intervalo (deslocamentos, reações e tensões). Nas análises de vigas mistas com protensão, na primeira história de carga se tem geralmente a protensão aplicada na laje na sua totalidade e o peso próprio da estrutura, ficando as demais histórias referentes à sobrecarga.

A terceira aba, *CONCRETE LABELS*, contém os dados relativos à laje de concreto. Utilizam-se camadas para a representação da mesma, sendo que podem ser empregadas até quatro

conjuntos de camadas distintas, cada conjunto formado por camadas de concreto e aço de reforço. Além de se informar a quantidade de camadas para cada material, deve-se definir também qual o número do material que é utilizado em cada uma delas.

Caso se escolha uma análise de serviço, na aba *GENERAL (Type Analysis-Service Load)*, torna-se disponível uma nova aba, *TIME ANALYSIS*, que é responsável pela atribuição dos parâmetros utilizados para o modelo de retração e fluência adotado para o concreto. Alguns destes são fixos para qualquer modelo que seja escolhido, são estes: o parâmetro *Step Load*, no qual se insere uma lista com as idades da estrutura (em dias) que receberão carregamento, sendo que a última idade a ser posta na lista é o tempo final da análise; *m parameter*, que é o número de passos por década considerado para a determinação dos tempos da cadeia Kelvin; *Curing Time*, que é o tempo de cura para a peça (em dias); *Cement Type* que define o tipo de cimento; *Relative Humidity*, que é a umidade relativa do ambiente; *Concrete cross section area*, que é a área da seção transversal do concreto e *Concrete perimeter in contact*, que é o perímetro da seção de concreto em contato com a atmosfera.

#### 5.1.2.2 Materiais

Ao acessar a aba *Data-Materials*, tem-se a definição de todas as propriedades para cada tipo de material empregado numa viga mista protendida: concreto, aço de reforço, aço estrutural, aço de protensão e aço dos conectores de cisalhamento.

Para a viga de aço podem ser empregados até três tipos de materiais, os de numeração 1, 2 e 11. Todos estes levam o nome “*Steel Beam*”, por se referirem ao aço estrutural. É possível definir para cada um destes: o módulo de elasticidade (módulo de Young), o coeficiente de Poisson, a espessura do elemento, o módulo de endurecimento isotrópico e a tensão de escoamento.

O material 3 se refere ao aço dos conectores de cisalhamento, “*Steel Connector*”. Para ele, é possível atribuir as rigidezes laterais dos conectores, a área e os coeficientes de corte (responsáveis pela compatibilidade de giros) e os parâmetros *a* e *b* definidos por uma equação exponencial de ajuste para curvas de deslocamento relativo dos conectores versus força cortante (*slip-shear curve*).

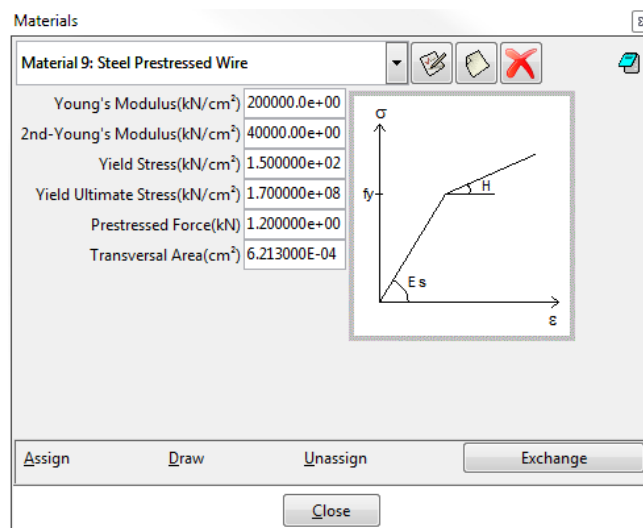
O concreto para a laje é definido no material 4, “*Concrete Slab*”. Alguns dos parâmetros inseridos para este são: espessura, módulo de Young, coeficiente de Poisson, resistência à tração

e compressão, deformação última à tração e à compressão etc. A espessura a ser inserida aqui é a espessura real da camada de concreto. Por exemplo, caso a laje possua 15,24 cm e foram definidas 10 camadas para a mesma, a espessura real é igual a 1,524 cm. Salienta-se que, para uma análise de longa duração, deve-se usar o módulo de elasticidade aos 28 dias.

Os materiais 5, 6, 7 e 8 referem-se ao aço de reforço, “*Reinforcement*”. Como se adota a armadura distribuída para a discretização em elementos finitos deve-se posicioná-la considerando a espessura normalizada da laje de concreto, de -1 a +1, sendo 0 no eixo da laje. Esta posição é inserida no parâmetro “*Normalized position*”. Também deve ser inserido o ângulo que a armadura faz com o eixo X: 0° (0 rad) para armadura no sentido longitudinal e 90° (1,571 rad) no sentido transversal da laje. Outro importante parâmetro a ser informado para a armadura passiva é a espessura normalizada da camada de aço, “*Normalized thickness*”. Com a quantidade de barras e o diâmetro da bitola das mesmas, tem-se a área real de armadura. Dividindo-se esta área de aço pelo comprimento ou largura da laje de concreto (dependendo da posição da armadura), tem-se a espessura real da camada ( $h_{real\ armadura}$ ). Multiplicando esta por 2 (pois a espessura do elemento finito varia de -1 a +1) e dividindo este valor pela espessura real da laje de concreto ( $h_{real\ laje}$ ), tem-se, finalmente, a espessura normalizada da armadura, ( $h_{normalizada\ armadura}$ ). A equação (75) representa essa operação.

$$h_{normalizada\ armadura} = \frac{2 \times h_{real\ armadura}}{h_{real\ laje}} \quad (75)$$

O aço protendido das cordoalhas pode ser definido nos materiais 9 e 10. Tem-se esta opção de utilizar dois materiais distintos, caso se empregue diferentes cordoalhas para protender a laje. Para cada um deles, além dos parâmetros do diagrama tensão-deformação adotado, são definidas a força de protensão e a seção transversal do cabo, conforme pode ser visto na figura 5.9.



**Figura 5.9** – Aba do material 9 para o aço das cordoalhas (igual para o material 10).

### 5.1.2.3 Condições da estrutura

Em *Data-Conditions* devem ser inseridas as informações acerca das condições de contorno e carga da estrutura, bem como a atribuição do material empregado para cada elemento da viga mista. O GiD permite a atribuição de condições do problema a pontos, linhas, superfícies e volumes, sendo que estas podem ser traduzidas em condições aplicadas a elementos ou a nós.

Nas condições que são colocadas nos nós, têm-se as condições de contorno e as cargas nodais. Para as primeiras serem postas, deve-se ir em *Data-Conditions-Constraints* e selecionar os graus de liberdade restritos. Com estes escolhidos, clica-se em *Assign* e selecionam-se os nós da malha que possuirão tais condições. Isso deve ser feito tantas vezes quantas forem necessárias para todas as condições de contorno do problema. Para se colocarem as cargas nodais, procede-se de forma semelhante, porém agora se troca para a opção *Data-Conditions-Load Node* e escolhe-se o grau de liberdade que se aplicará a carga e qual a sua magnitude. Caso exista mais de um carregamento, adicionam-se linhas à coluna *Load Node History* e então as preenchem com a carga correspondente àquela idade de carregamento definida em *Data-Problem Data-Time Analysis-Step Load*, sendo que essa coluna deve ter sempre uma linha a menos que aquela. No caso da laje estar protendida, a primeira linha deve apresentar valor zero, uma vez que na aplicação da protensão não existe sobrecarga.

Nas condições impostas às linhas, tem-se somente a atribuição do número do material utilizado nos conectores de cisalhamento. Para que isso seja feito, escolhe-se a aba de linha dentro da mesma janela *Data-Conditions*, sendo que a condição *Index Connector* já se encontra aberta.

Em *Index Connector-Nº Material*, coloca-se o valor igual a 3, clica-se em *Assign* e selecionam-se todos os elementos de conectores. Para facilitar esse procedimento, pode-se desligar as *layers STEEL* e *CONCRETE*, deixando apenas a *layer CONNECTOR*, referente aos conectores, ligada.

Na aba referente às condições impostas às superfícies, têm-se: a atribuição do número do material empregado para os elementos da viga de aço; a atribuição do conjunto de camadas (número da *Label*) para cada elemento da laje de concreto, conforme informado na aba *Data-Problem Data-CONCRETE LABELS*; e a atribuição das cargas de superfície.

A atribuição do número dos materiais empregados nos elementos da viga e do conjunto de camadas para os elementos de concreto da laje é feita da mesma forma que se fez para a atribuição do número do material para os conectores. Antes, porém, para a primeira, deve-se selecionar o elemento de superfície na janela *Data-Conditions* e escolher a opção *Index Steel* e, para a segunda, deve-se escolher *Index Concrete* (na mesma aba) informando no campo *Nº Label* o número do conjunto de camadas (1 a 4) que se deseja atribuir aos elementos de concreto. Para a última atribuição, referente às cargas de superfície, deve-se escolher a opção *Load Surface* e proceder de forma semelhante à adotada para aplicação das cargas nodais, ou seja, escolhe-se o grau de liberdade que será aplicada a carga, a magnitude da mesma e selecionam-se agora os elementos que a receberão.

Finalizando o preenchimento de todos os dados gerais, condições e materiais do problema, procede-se para a geração do arquivo de dados *.dat* que é utilizado pelo programa *Vimis* em *Calculate-Calculate*.

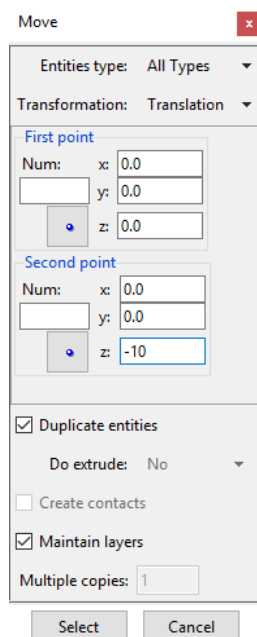
### 5.1.3 Geração da malha da armadura de protensão

A criação da malha dos cabos de protensão depende da malha da laje, uma vez que é necessária a divisão dos cabos exatamente nos pontos que atravessam os elementos de concreto. Portanto, deve-se abrir o arquivo da laje no *GiD* e salvar uma cópia da malha, em formato *.dxf*, em *Files-Export-Using Template .bas (only mesh)-DXF*.

Pode-se desenhar a geometria do cabo utilizando as próprias ferramentas do *GiD* ou importar de um arquivo externo, conforme foi mencionado para criação da geometria de cada um dos elementos da viga mista em 5.1.1. Optando-se pelo desenho no *GiD*, cria-se primeiro uma *layer*

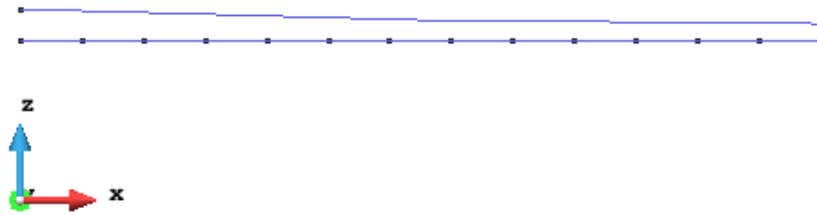
específica para o cabo (*Utilities-Layers*) e depois escolhe-se *Geometry>Create-Straight line* para criação de cabo reto ou *Geometry>Create-Arc-By 3 points* para criação de cabo curvo. Os dois pontos que definem o cabo reto e os três que definem o cabo curvo podem ser criados a partir da janela de coordenadas em *Utilities-Tools-Coordinates window*.

Uma vez desenhada a geometria do cabo, desliga-se a *layer* referente a ele e se importa a malha da laje de concreto ao selecionar *Files-Import-DXF*. Deve-se deslocar esta malha de concreto, criada no eixo da laje, até às coordenadas correspondentes à borda inferior da mesma, ou seja, se, por exemplo, a laje possui 20 cm de espessura, deve-se deslocar -10 cm no eixo Z. Para isso, seleciona-se *Utilities-Move* e, na janela que se abre, coloca-se *Entities type: All types* e na coordenada Z do segundo ponto, coloca-se o valor de -10, conforme ilustra a figura 5.10.

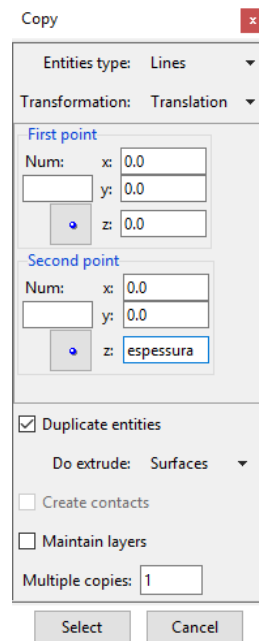


**Figura 5.10** – Janela para deslocamento da malha da laje para borda inferior da mesma.

Deslocada a malha da laje de concreto, torna-se a ligar a *layer* do cabo (figura 5.11) e seleciona-se *Utilities-Copy*. Nesta janela aberta, coloca-se *Entities type: Lines*, marca-se a opção *Duplicate entities*, seleciona-se *Do extrude: Surfaces* e desmarca-se a opção *Maintain layers*. Na coordenada Z do segundo ponto, deve-se colocar o valor da espessura real da laje de concreto, conforme pode ser visualizado na figura 5.12.



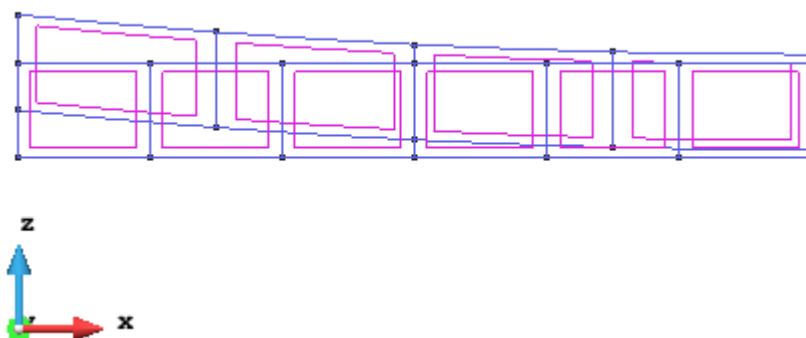
**Figura 5.11** – Geometria do cabo e malha da malha de concreto na borda inferior da laje.



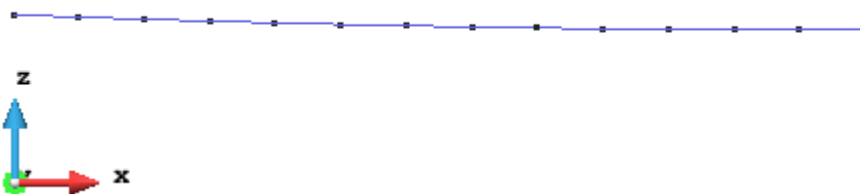
**Figura 5.12** – Janela para cópia do cabo e da malha de concreto na cota igual à espessura da laje.

Após a obtenção do resultado da ação de cópia (figura 5.13), procede-se agora para a interseção do cabo com os elementos de concreto ao selecionar *Geometry-Edit-Intersection-Surfaces* e se clicar em todos os elementos que aparecem na tela. Ou seja, é neste procedimento que se divide o cabo exatamente conforme os elementos de concreto que ele atravessa. Agora, se deve desligar a *layer* referente ao cabo e apagar todo o restante. Para isso escolhe-se *Geometry-Delete-All types* e clica-se em todos os elementos que se encontram na tela, obtendo-se o traçado do cabo dividido em segmentos, conforme ilustra a figura 5.14.





**Figura 5.13** – Cópia do cabo e da malha de concreto na cota igual à espessura da laje.



**Figura 5.14** – Traçado do cabo dividido pelos elementos de concreto que atravessa.

Realiza-se, então, a geração da malha do cabo. Primeiro deve-se digitar, na linha de comando, “*escape escape Utilities Variables RenumberMethod 2*” para que o GiD enumere os elementos e conectividades do cabo de acordo com o traçado do mesmo. Após, define-se o tipo de elemento finito para o cabo em *Mesh-Quadratic type-Quadratic*. Escolhe-se *Mesh-Structured-Lines-Assign number of cells* e atribui-se valor igual a 1 na janela que aparece. Clica-se em *Assign* e seleciona-se todo o traçado do cabo, apertando a tecla *Esc* em seguida para a atribuição. Gera-se, finalmente, a malha da cordoalha em *Mesh-Generate mesh*.

Se houver mais de um cabo protendido na estrutura, faz-se todo o procedimento visto acima para cada um deles individualmente e exporta-se cada uma das malhas em *Files-Export-GiD mesh*. Para unir todos os cabos, abre-se um novo arquivo e importa-se malha por malha (*Files-Import-GiD mesh*), semelhante ao processo de importação dos elementos da viga mista vista no item 5.1.1. Deve-se tomar o cuidado de criar, para cada cabo, uma *layer* específica: *CABLE1*, *CABLE2*, *CABLE3* etc., de acordo com a quantidade de cabos existentes na estrutura. Um exemplo de arquivo com quatro cabos de protensão pode ser vista na figura 5.15.

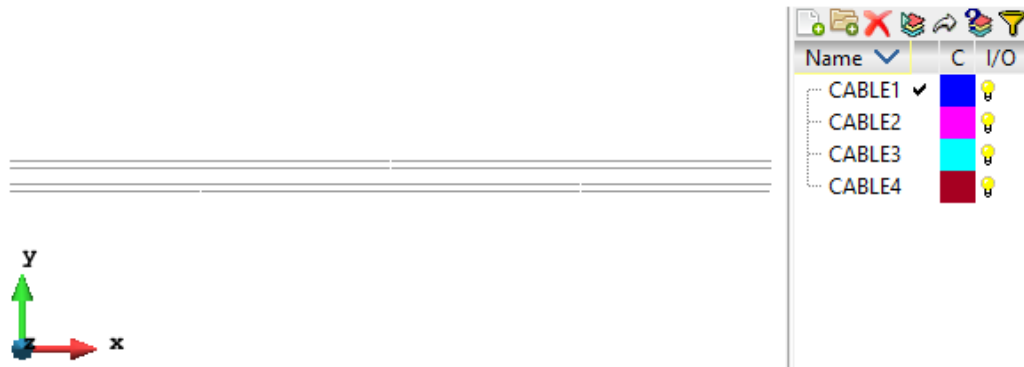


Figura 5.15 – Exemplo de arquivo com quatro cabos protendidos.

#### 5.1.4 Atribuição do *Problem Type* e definição dos dados para os cabos

Após a geração da malha para um cabo ou da união destas, caso exista mais de um, pode-se atribuir o *Problem Type* criado exclusivamente para os cabos de protensão, denominado “PRES”. Os arquivos com a customização deste encontra-se na pasta “PRES.gid” existente na mesma pasta que está inserido o “VMP2.gid”. Para atribuí-lo ao(s) cabo(s), seleciona-se *Data-Problem Type-PRES*.

Ao selecionar *Data-Problem Data*, será aberta uma janela (figura 5.16) com as informações acerca do(s) cabo(s) de protensão. Primeiro é atribuído o título do arquivo de dados, depois se define o número de cabos (1 a 8), a quantidade de pontos de Gauss para integração (2 a 10) e o número de incrementos para a carga de protensão. Após colocar essas informações, clica-se em *Accept* e pode-se fechar a janela.

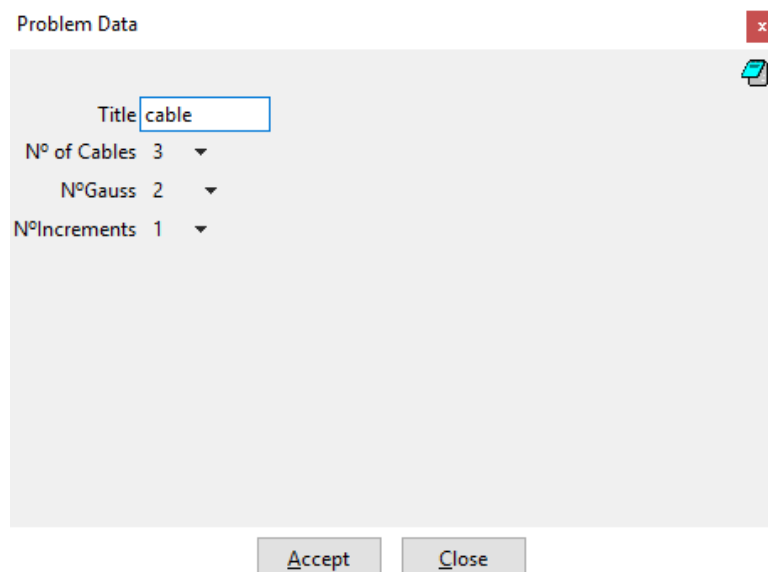
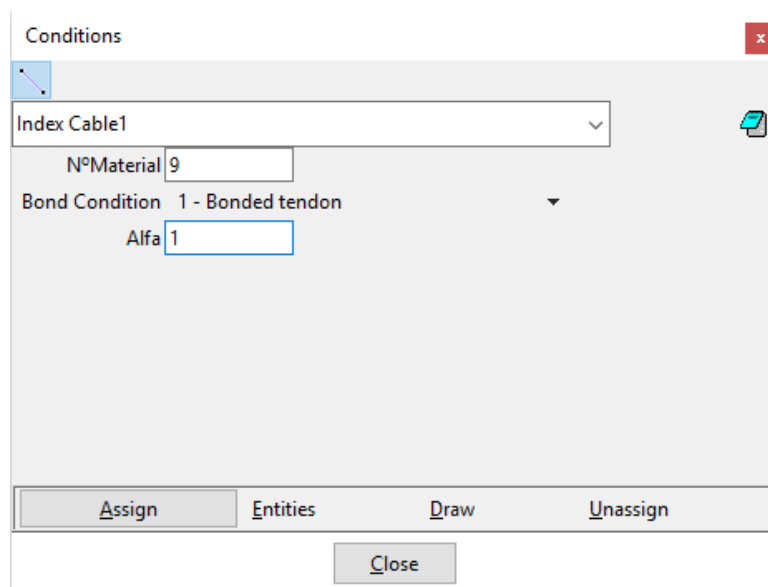


Figura 5.16 – Janela para atribuição de dados para cabos protendidos.

Em *Data-Conditions*, (figura 5.17) pode-se conferir ao(s) cabo(s) o número do material empregado em cada um deles (9 ou 10), a condição de aderência ao concreto e o coeficiente  $\alpha$ , visto na expressão (40), o qual multiplica a matriz de rigidez para cabos protendidos totalmente aderidos ao concreto da laje e que varia de 0 a 1, sendo 0 o caso de não aderência do(s) cabo(s).



**Figura 5.17** – Janela para atribuição das condições dos cabos.

Em relação à condição de aderência, três situações podem ser definidas. A primeira trata do caso de aderência total da armadura de protensão, a segunda trata das armaduras não aderentes e a terceira trata das armaduras pós-tracionadas com aderência posterior, ou seja, a armadura é considerada aderente, mas no momento da aplicação da protensão esta não possui aderência ao concreto da laje.

Para que as atribuições acima sejam feitas para um cabo, escolhe-se *Index Cable1*, preenchem-se os campos que aparecem abaixo com as informações acerca do cabo em questão, clica-se em *Assign* e selecionam-se todos os elementos que compõe aquele cabo de protensão. Existindo mais de um cabo, troca-se a seleção por *Index Cable2*, *Index Cable3* ou *Index Cable4*, dependendo de quantos cabos houver, e efetua-se o mesmo procedimento. Para facilitar a atribuição dos dados a cada cabo individualmente, desligam-se as *layers* criadas para os demais cabos, de forma a terem-se exibidos na tela apenas os elementos do cabo que receberão as informações.

Após todos os preenchimentos dos dados gerais e atribuições das condições ao(s) cabo(s) de protensão do problema, pode-se gerar o arquivo de dados *.dat* selecionando-se *Calculate-Calculate*. Esse arquivo de dados obrigatoriamente deve ser denominado “*cable.dat*” para que possa ser devidamente lido pelo programa Vimis. Um exemplo de arquivo de dados para dois cabos protendidos pode ser visto no anexo A.

## 5.2 MODIFICAÇÃO E CRIAÇÃO DE ROTINAS NO PROGRAMA VIMIS

Realizaram-se significativas mudanças no programa Vimis devido à separação da entrada de dados da viga mista e dos cabos de protensão em dois arquivos distintos, à consideração da não aderência dos cabos ao concreto da laje e à implementação da biblioteca *PARDISO* para a resolução dos sistemas de equações lineares gerados pelo método dos elementos finitos. Salienta-se que a introdução de rotinas no código computacional acerca da protensão interna na laje de concreto foi iniciada por Moreno (2016), no entanto essas tiveram que ser revistas e adaptadas nesta presente pesquisa.

O fluxograma geral do programa Vimis pode ser visualizado na figura 5.18. Ao se executar o programa, são lidos os dois arquivos *.dat* necessários para as análises: o arquivo da viga mista e o arquivo dos cabos de protensão, “*cable.dat*”. Esses arquivos contêm dados que englobam o tipo de análise a ser realizada (de carga última ou de longa duração), o tipo de integração, as coordenadas dos nós, as condições de contorno do problema, as conectividades dos elementos finitos, os parâmetros de todos os materiais utilizados etc. O módulo “*mdata*” é o responsável pela leitura e pelo armazenamento desses dados. Em seguida, o código faz a leitura dos dados de entrada das cargas aplicadas na estrutura em “*loads*” e, na sequência, zera a maioria dos vetores e matrizes que serão utilizadas na análise numérica em “*zero*”. A partir daí o programa possui duas sequências distintas: uma para análise de carga última e uma para análise de longa duração. Uma vez encerradas as análises, escrevem-se todos os resultados obtidos e geram-se os arquivos de pós-processamento para serem lidos no GiD.

Independentemente do tipo de análise a ser realizada pelo programa, quatro sub-rotinas são padrão. A primeira destas diz respeito à aplicação dos incrementos de carga e força de protensão e denomina-se “*increm*”. Na sequência, tem-se a sub-rotina “*stiff*” que é a responsável pela montagem da matriz de rigidez global da estrutura com a contribuição de todos os elementos que compõe a viga mista protendida e pela resolução do sistema de equações. A próxima sub-

rotina chama-se “finter” e realiza o cálculo das forças internas em cada elemento finito, bem como faz a montagem do vetor global de forças desequilibradas. A escrita de todos os resultados de deslocamentos, tensões e reações da estrutura é feita na sub-rotina “output”.

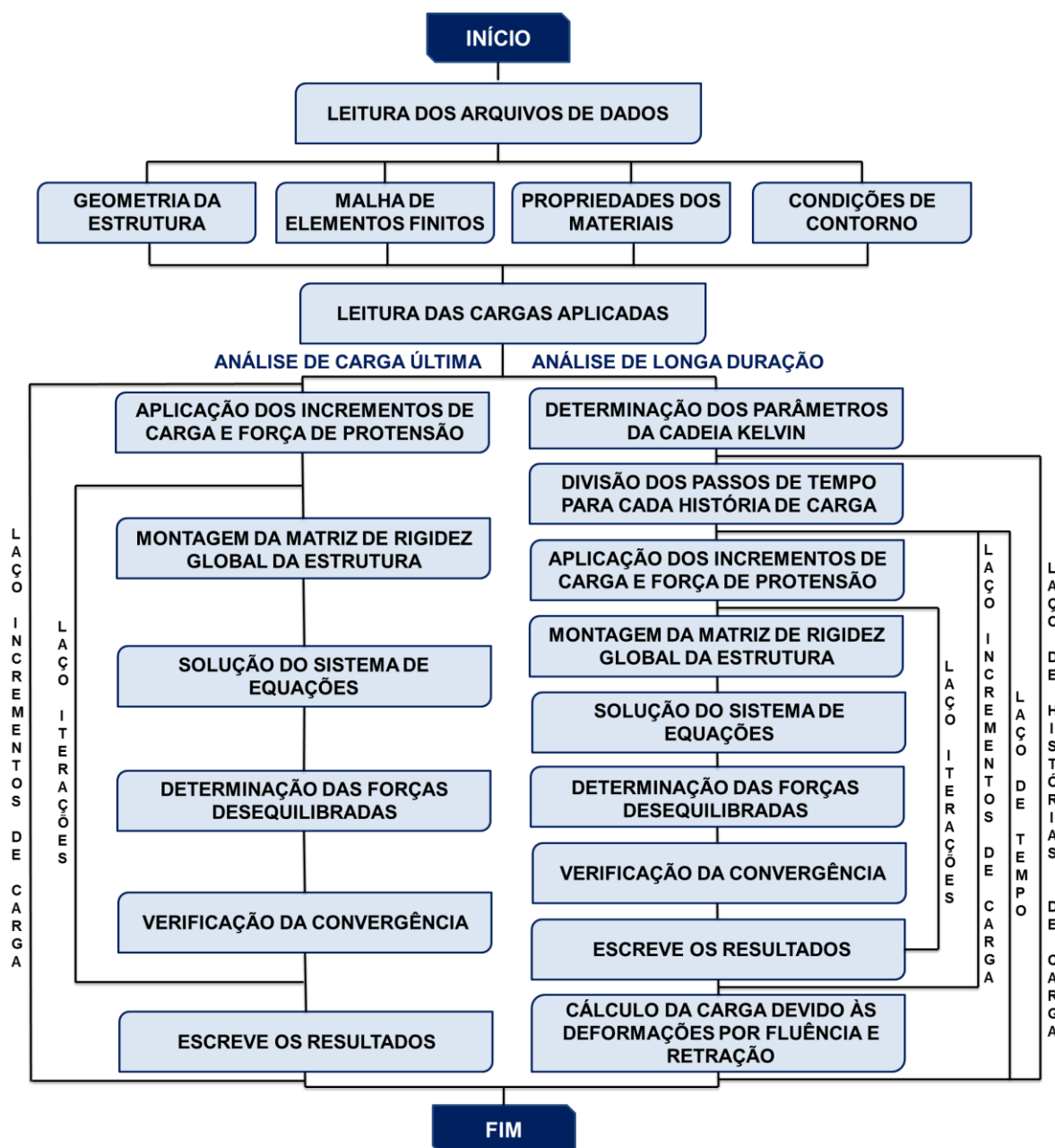


Figura 5.18 – Fluxograma do programa Vimis.

### 5.2.1 Implementação do *solver* PARDISO

Tendo em vista que a utilização do método dos elementos finitos para análise de problemas da engenharia conduz a sistemas lineares esparsos, onde boa parte de seus termos é nula, e que,

devido a isso, suas soluções requerem elevado esforço computacional, empregou-se, nesta nova versão do programa Vimis, a biblioteca *PARDISO*, que é um *software* de alto desempenho, robusto, de grande eficiência do uso de memória, criado por Schenk et al. (2001). Destinado à resolução de sistemas lineares esparsos simétricos e não simétricos via memória compartilhada e memória distribuída entre multiprocessadores, esse *software* minimiza o tempo necessário para solução dos problemas, bem como permite a análise de estruturas mais complexas e de maior dimensão. Para maiores detalhes acerca do algoritmo deste *solver* e de seu funcionamento, recomenda-se a leitura do artigo de Schenk et al. (2001) e do manual do *PARDISO*<sup>1</sup> (SCHENK et al., 2018). No anexo B, encontra-se um exemplo de resolução de sistema linear simétrico utilizando o *PARDISO*.

O *solver PARDISO* calcula a solução de um conjunto de equações lineares esparsas com múltiplos lados direitos de problema do tipo  $AX=B$  utilizando a fatoração paralela do tipo LU, LDL ou  $LL^T$ . Para tal, é necessário o armazenamento da matriz de coeficientes A em formato comprimido por linhas (formato CSR — *Compressed Sparse Row*), diferentemente do utilizado na versão anterior do programa Vimis, onde o armazenamento das matrizes esparsas era feito em formato do tipo banda, o que acarretava no armazenamento de parte dos zeros das matrizes.

Criou-se, então, o módulo “spars”, no programa Vimis, para a inserção do novo *solver*. Esse módulo é composto por quatro sub-rotinas: a de controle de nível superior ou principal “pardiso\_solve” e outras três adicionais, denominadas “asemcoo”, “coicsr” e “clncsr” (TAMAYO; AWRUCH; CALDERÓN, 2015).

A sub-rotina “pardiso\_solve” é a responsável por resolver o sistema linear e é dividida em quatro fases distintas: reordenação e fatoração simbólica, fatoração numérica; substituição para frente e retrossubstituição, incluindo refinamento iterativo; e por último a liberação de toda memória interna do *solver*.

Na sub-rotina “asemcoo”, a matriz de rigidez armazenada em um arranjo matricial é convertida em outra matriz no formato de coordenadas COO (*Coordinate Format*). Esse formato consiste no armazenamento da matriz em três vetores de tamanho igual ao seu número de elementos não nulos: o vetor de dados que armazena todos os valores não nulos da matriz (vetor A); o vetor das linhas, onde ficam armazenados os índices das linhas em que cada elemento se encontra; e

---

<sup>1</sup> O manual do *PARDISO* pode ser encontrado em <<https://www.pardiso-project.org>>.

o vetor das colunas (vetor JA), onde ficam armazenados os índices das colunas em que cada elemento se encontra.

A permutação do armazenamento da matriz em formato COO para o formato de compressão segundo linhas, CSR, é feita na rotina “coicrs”. Esse último formato pode ser considerado como uma extensão do formato de coordenadas. A diferença entre estes consiste na substituição do vetor que contém os índices das linhas por outro, usualmente mais curto, de apontadores para a posição no vetor das colunas do índice do primeiro elemento não nulo da linha correspondente à posição do primeiro vetor (isto é, do vetor de apontadores). Este novo vetor (vetor IA) tem tamanho igual ao número de linhas mais um. Subtraindo-se o elemento da posição  $n+1$  pelo elemento da posição  $n$ , obtém-se o número de elementos existentes na linha  $n$ . O vetor de dados irá conter apenas os elementos não nulos ordenados por linhas.

A sub-rotina “clncsr” é a responsável pela limpeza da matriz armazenada em formato CSR. Nesta se removem dados duplicados ou nulos e realiza-se um ordenamento parcial, o qual implica em uma nova ordem da parte triangular superior, triangular inferior e diagonal principal.

As figuras 5.19 e 5.20 exemplificam os dois formatos de armazenamento de matrizes disponíveis na nova versão do programa Vimis elaborada nesta dissertação. A figura 5.19 ilustra como era feito na versão original do programa, onde a solução adotada para o armazenamento da matriz de rigidez global era tipo banda e a figura 5.20 ilustra o formato de armazenamento CSR para uma matriz esparsa não simétrica e para uma simétrica. Formato este necessário para a resolução direta pelo *PARDISO*. Os algoritmos do novo *solver* requerem o vetor JA ordenado sequencialmente por linha e a presença do elemento da diagonal principal por linha para qualquer matriz simétrica ou estruturalmente simétrica. Já para as matrizes não simétricas os elementos da diagonal principal não são necessários (SCHENK et al., 2018).

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

val(:, -1)	0	3	7	8	9	2
val(:, 0)	10	9	8	7	9	-1
val(:, +1)	-3	6	7	5	13	0

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

val(:, -2)	0	0	3	6	0	5
val(:, 0)	10	9	8	7	9	-1
val(:, +1)	-3	6	7	5	13	0
val(:, +3)	1	-2	4	0	0	0

**Figura 5.19** – Exemplos de armazenamentos de matrizes tipo banda (fonte: adaptada de CATABRIGA, 2016).

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7.		1.			2.	7.	
2		-4.	8.		2.			
3			1.					5.
4				7.			9.	
5		-4.						
6			7.		3.			5.
7		17.					11.	
8			-3.			2.		5.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7.		1.			2.	7.	
2		-4.	8.		2.			
3			1.					5.
4				7.			9.	
5					5.	-1.	5.	
6						0.		5.
7							11.	
8								5.

K	Matriz não simétrica			Matriz simétrica		
	IA(K)	JA(K)	A(K)	IA(k)	JA(K)	A(K)
1	1	1	7.	1	1	7.
2	5	3	1.	5	3	1.
3	8	6	2.	8	6	2.
4	10	7	7.	10	7	7.
5	12	2	-4.	12	2	-4.
6	13	3	8.	15	3	8.
7	16	5	2.	17	5	2.
8	18	3	1.	18	3	1.
9	21	8	5.	19	8	5.
10		4	7.		4	7.
11		7	9.		7	9.
12		2	-4.		5	5.
13		3	7.		6	-1.
14		6	3.		7	5.
15		8	5.		6	0.
16		2	17.		8	5.
17		7	11.		7	11.
18		3	-3.		8	5.
19		7	2.			
20		8	5.			

**Figura 5.20** – Ilustração de formatos CSR de entrada de dados para o *solver PARDISO* (a) de uma matriz esparsa não simétrica de ordem 8 e (b) da parte triangular superior de uma matriz esparsa simétrica (fonte: adaptada de SCHENK et al., 2018).



A fim de comprovar a eficiência do novo *solver* quanto à minimização do tempo necessário para solução dos problemas estudados neste trabalho, elaborou-se a tabela 1. Por essa tabela pode-se ver que para a análise não linear da viga A1 de concreto protendido do exemplo de Tao e Du (1985), o tempo utilizando o *PARDISO* foi apenas 62% do tempo necessário para a solução através do armazenamento tipo banda da matriz de rigidez global da estrutura. Já para a análise linear da protensão da viga mista do estudo de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) essa redução foi ainda maior, pois o novo *solver* necessitou apenas de cerca de 32% do tempo empregado utilizando a versão anterior do programa *Vimis*.

Tabela 1 – Comparação dos tempos de análise dos dois *solvers* adotados pelo programa *Vimis*.

Exemplo analisado	Tipo de análise	Número de graus de liberdade	Tempo de análise (em segundos)	
			<i>PARDISO</i>	Banda
Tao e Du (1985)	Não linear	625	5.186,406	8.364,281
Dezi, Leoni e Tarantino (1996)	Linear	2.533	932,4844	2.923,734

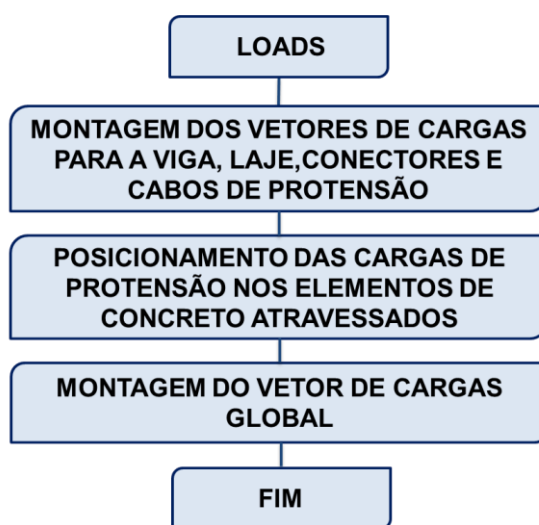
### 5.2.2 Rotinas referentes à protensão da estrutura

Na versão anterior do programa, os dados do cabo protendido estavam presentes no mesmo arquivo de dados do restante da estrutura. Com a criação de novos *Problem Type*, “VMP2” e “PRES”, que separam essas informações em dois arquivos distintos, foi necessária a adaptação da leitura da protensão no código computacional. Tal alteração foi realizada no módulo “mdata” e permite a leitura do número total de cabos utilizados na estrutura, número total de elementos de protensão e de elementos por cabo, da quantidade de pontos de Gauss para integração, do número de incrementos de carga de protensão, das conectividades dos elementos e das coordenadas globais que definem o traçado do(s) cabo(s). Além disso, para cada cabo se faz a leitura do número do material associado a ele, da condição de aderência ao concreto da laje e do valor do coeficiente  $\alpha$ .

As demais adaptações realizadas no código deram-se, principalmente, nas sub-rotinas “loads”, “stiff”, “finter” e em “viscous”. Nesta última, a qual é utilizada quando deseja-se realizar uma

análise ao longo do tempo, foi implementada a sub-rotina “ptreol” que calcula a perda de tensão na armadura de protensão devido à relaxação do aço, conforme o modelo visto no item 4.5.

Na sub-rotina “loads” (figura 5.21) realiza-se a avaliação das cargas aplicadas à estrutura. Dentro dela, é chamada outra sub-rotina, específica para a avaliação das forças nodais devido ao carregamento de protensão, chamada “presload”. Nela, se posicionam as cargas de protensão nos devidos graus de liberdade dos elementos de concreto que são atravessados pelos cabos.

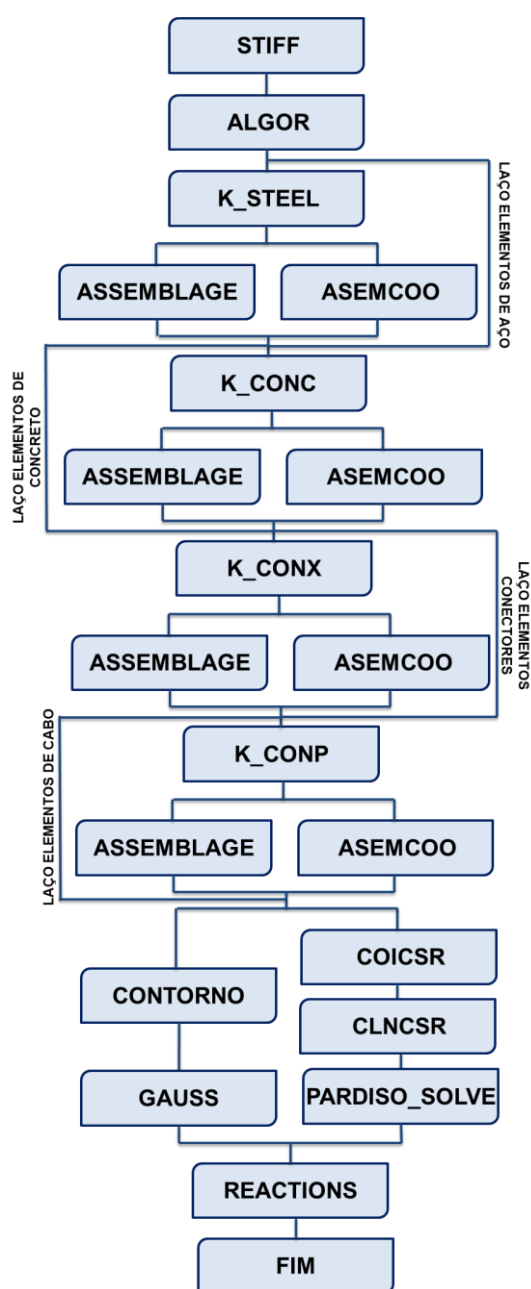


**Figura 5.21** – Sub-rotina “loads” para análise de viga mista com protensão interna.

Em relação à sub-rotina “stiff”, pode-se visualizar o diagrama de fluxo de sua nova versão através da figura 5.22. Primeiro efetua-se a escolha do algoritmo de solução e se procede para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura levando-se em conta os elementos de casca poliédrica de placa delgada (referentes à viga de aço) (rotina “k\_steel”), elementos de casca degenerada de placa grossa (referentes à laje de concreto) (rotina “k\_conc”), elementos de barra viga-coluna (referentes aos conectores de cisalhamento) (rotina “k\_conx”) e elementos unidimensionais quadráticos (referentes aos cabos de protensão). Quanto à montagem da matriz de rigidez global desses últimos, implementou-se a rotina “k\_conp” baseada na equação (38), sendo que a sua contribuição à matriz global da estrutura foi condicionada com a criação da variável “alfa”, conforme a expressão (40), cujo valor é lido no arquivo de dados do(s) cabo(s) protendido(s).

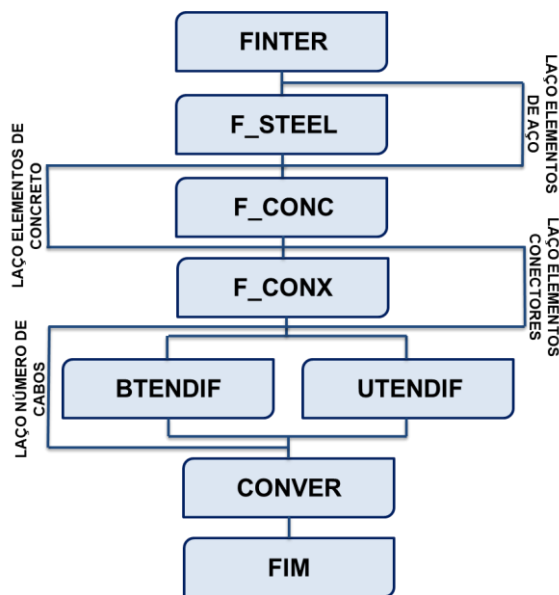
Uma vez montadas as matrizes de rigidez se realiza a resolução do sistema de equações lineares do problema. Para isso, pode-se utilizar o ordenamento tipo banda, implementado por Tamayo (2011) na versão original do programa, ou pode-se utilizar o novo *solver PARDISO*

implementado neste trabalho. A figura 5.22 ilustra a nova versão da sub-rotina “stiff”, onde as sub-rotinas “assemblage”, “contorno” e “gauss” dizem respeito à resolução mediante o ordenamento tipo banda e as sub-rotinas “asemcoo”, “coicsr”, “clncsr” e “pardiso\_solve” ao novo *solver* implementado. Pela figura, percebe-se que a última rotina a ser executada denomina-se “reactions”, sendo esta a responsável pelo cálculo das reações nos graus de liberdade restringidos.



**Figura 5.22** – Diagrama de fluxo da nova versão da sub-rotina “stiff”.

Na sub-rotina “finter”, o código computacional calcula as forças internas e verifica se a porcentagem das forças desequilibradas em relação às forças atuantes é menor que uma tolerância arbitrada (rotina “conver”), ou seja, verifica a convergência do problema. Em relação aos elementos de protensão, o cálculo das forças internas está vinculado ao tipo de aderência entre os cabos e o concreto da laje. Caso a protensão interna seja aderente, chama-se a sub-rotina “btendif” e no caso de não aderência chama-se “utendif”, criadas a partir da formulação vista em 4.3. Nessa última rotina, o código avalia todos os elementos que compõe o comprimento total do cabo de protensão para gerar o incremento de deformação em um dado ponto do mesmo. Com esses incrementos de deformação consegue-se avaliar o nível atual de tensão conduzida no cabo que, por sua vez, é utilizado para a criação do vetor que contém as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na estrutura. O novo diagrama de fluxo da sub-rotina “finter” encontra-se ilustrada na figura 5.23.



**Figura 5.23** – Diagrama de fluxo da nova versão da sub-rotina “finter”.

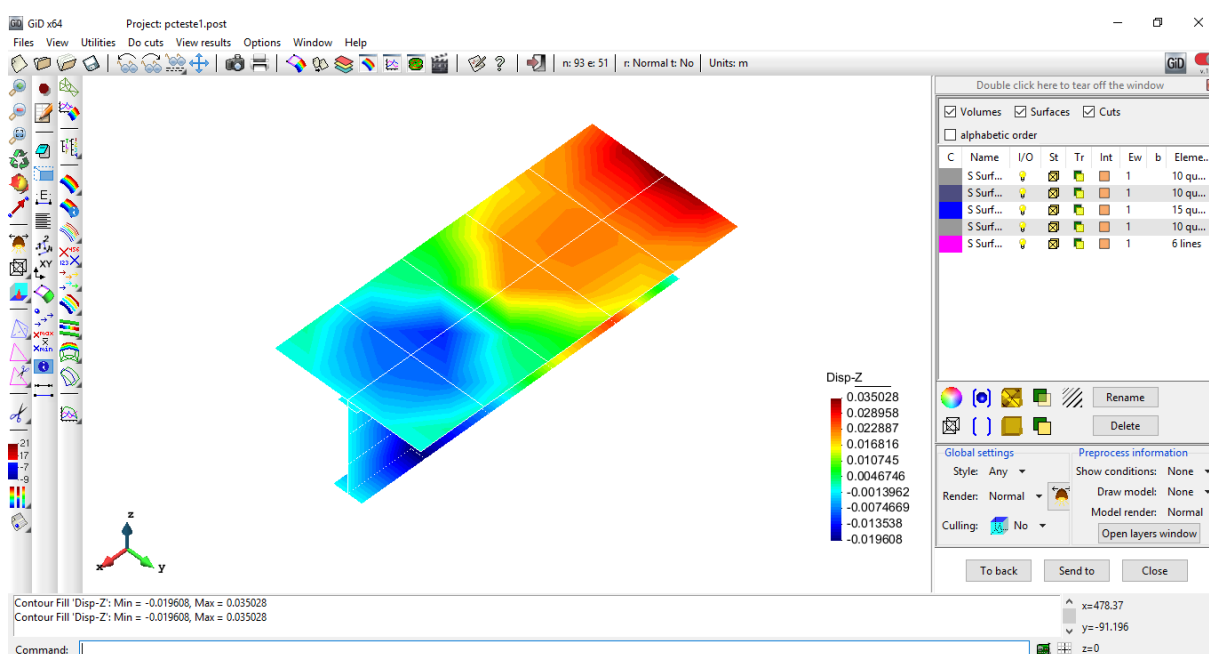
É importante salientar que, se a armadura for pós-tracionada com aderência posterior, na primeira iteração será executada a rotina “utendif” e, na segunda em diante, executa-se a rotina “btendif”.

### 5.3 PÓS-PROCESSAMENTO ATRAVÉS DO *SOFTWARE* GiD

O *software* GiD também foi adotado para a etapa de pós-processamento, uma vez que a visualização gráfica dos resultados da análise facilita a detecção de qualquer incompatibilidade

dos mesmos. Em *Files-Posprocess*, deve-se realizar a mudança da interface do GiD para que as opções de pós-análise fiquem disponíveis.

Efetuada a troca, pode-se acessar *Files-Open multiple* para carregar os dois arquivos requeridos para o pós-processamento no GiD: o arquivo que diz respeito à malha da estrutura e o outro que contém os resultados da análise propriamente dita. Tais resultados podem ser visualizados para todos os passos de tempo analisados. O primeiro arquivo possui extensão *.post.msh* e é gerado na etapa de pré-processamento e o segundo tem extensão *.post.res* e é gerado a partir do código do programa *Vimis* em Fortran em formato de leitura do GiD. Um exemplo de pós-processamento pode ser visualizado na figura 5.24.



**Figura 5.24** – Interface do GiD para pós-processamento de uma viga mista.

Em *Window-View results*, abre-se uma janela que permite a visualização dos deslocamentos, rotações e tensões na laje de concreto, na viga de aço e na viga mista como um todo, segundo os eixos X, Y e Z. O tipo de visualização pode ser escolhido em *View*, o passo de tempo em *Analysis* e o passo de carga em *Step*.

Para os cabos de protensão foi criado um arquivo de resultados específico denominado *rescabl.dat*. A figura 5.25 ilustra a primeira parte deste arquivo, onde se mostra, para cada cabo de protensão, os elementos de concreto nos quais estão embutidos os elementos do cabo em questão e as coordenadas naturais dos três pontos que definem o traçado do cabo.

rescabl.dat - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

NATURAL COORDINATES

ELEM	NODE	EPS-COOR	ETA-COOR	ZET-COOR
CABLE NO. = 1				
41	1	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
41	2	0.00000000	1.00000000	0.00000000
41	3	1.00000000	1.00000000	0.00000000
42	4	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
42	5	0.00000000	1.00000000	0.00000000
42	6	1.00000000	1.00000000	0.00000000
43	7	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
43	8	0.00000000	1.00000000	0.00000000
43	9	1.00000000	1.00000000	0.00000000
44	10	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
44	11	0.00000000	1.00000000	0.00000000
44	12	1.00000000	1.00000000	0.00000000
45	13	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
45	14	0.00000000	1.00000000	0.00000000
45	15	1.00000000	1.00000000	0.00000000
46	16	-1.00000000	1.00000000	0.00000000
46	17	0.00000000	1.00000000	0.00000000
46	18	1.00000000	1.00000000	0.00000000

**Figura 5.25** – Exemplo de arquivo *rescabl.dat* com as coordenadas naturais de um cabo.

Na figura 5.26, ilustra-se a segunda parte do arquivo *rescabl.dat*. Mostram-se, para cada ponto de Gauss do cabo, as suas respectivas coordenadas globais, a tensão no ponto, o incremento de tensão, as deformações e os deslocamentos no cabo e no concreto. Esses resultados são ilustrados em todos os passos de carga e passos de tempo analisados, indicando-se a quantidade de iterações necessária para serem computados.

rescabl.dat - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

\*\*\* TIME STEP 0 INCREMENT NO. = 1 ITERATION NO. = 7

CABLE NO. = 1

KGASP	XCOOR	YCOOR	ZCOOR	T.STRESS	I.STRESS	DEF. Ep	DEF. Ec	DISP. Up	DISP. Uc
1	0.4727	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.41155762E-03	-0.13464057E-03	-0.49356930E-03
2	2.3715	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.36492751E-03	-0.41815603E-03	-0.14151321E-02
3	5.3297	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.29228349E-03	-0.78588043E-03	-0.23724767E-02
4	8.6703	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.21024536E-03	-0.11536048E-02	-0.30611138E-02
5	11.6285	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.13760134E-03	-0.14371203E-02	-0.34086028E-02
6	13.5273	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.90971238E-04	-0.15717609E-02	-0.35177020E-02
7	14.4727	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11323093E-03	-0.17064014E-02	-0.36534966E-02
8	16.3715	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11279433E-03	-0.19899169E-02	-0.39383396E-02
9	19.3297	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11211417E-03	-0.23576413E-02	-0.43055581E-02
10	22.6703	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11134606E-03	-0.27253657E-02	-0.46702607E-02
11	25.6285	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11066590E-03	-0.30088812E-02	-0.49497287E-02
12	27.5273	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11022930E-03	-0.31435217E-02	-0.50819236E-02
13	28.4727	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11005902E-03	-0.32781623E-02	-0.52139142E-02
14	30.3715	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11039427E-03	-0.35616778E-02	-0.54926963E-02
15	33.3297	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11091654E-03	-0.39294022E-02	-0.58559920E-02
16	36.6703	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11150635E-03	-0.42971266E-02	-0.62212197E-02
17	39.6285	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11202862E-03	-0.45806420E-02	-0.65041290E-02
18	41.5273	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.11236387E-03	-0.47152826E-02	-0.66388838E-02
19	42.4727	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.10944831E-03	-0.48499232E-02	-0.67701420E-02
20	44.3715	8.0000	6.0000	0.88098493E+02	-0.23015070E+01	-0.11226863E-03	-0.10910868E-03	-0.51334386E-02	-0.70456776E-02

**Figura 5.26** – Exemplo de arquivo *rescabl.dat* para armadura de protensão não aderente.

## 6 ANÁLISES NUMÉRICAS

Neste capítulo, as alterações feitas no programa Vimis para a inserção da protensão interna são validadas e testadas com o objetivo de comprovar a eficiência do algoritmo desenvolvido. Num primeiro momento, valida-se a formulação para a armadura de protensão e comprova-se o algoritmo de protensão aderente e não aderente em vigas de concreto protendido. Após, analisam-se vigas mistas com protensão interna aderente e não aderente comparando os resultados obtidos com resultados numéricos, experimentais e analíticos.

### 6.1 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DA PROTENSÃO

De maneira similar ao que foi feito pelo pesquisador Póvoas (1991), realiza-se uma série de testes numéricos simples para validar a formulação desenvolvida pelo mesmo para a modelagem da ação da armadura de protensão. As estruturas empregadas são, inclusive, as mesmas testadas pelo autor. Dois tipos distintos de análises numéricas são efetuados: o primeiro tipo consiste na consideração do efeito da protensão através da utilização do elemento unidimensional desenvolvido no capítulo 4, e o segundo consiste na modelagem do efeito da protensão através da aplicação de cargas externas equivalentes com objetivo de se atingir o mesmo valor de deformação que o atingido com o cabo protendido. Os resultados obtidos através de ambos os tipos são comparados com soluções analíticas.

São oito vigas de concreto testadas no total que se dividem em simplesmente apoiadas e hiperestáticas, todas elas possuindo o mesmo padrão de camadas. As vigas simplesmente apoiadas e que fazem parte do primeiro tipo de análise são as vigas A1, B1 e C1, sendo que a diferença entre estas consiste na posição do cabo de protensão. Já as vigas simplesmente apoiadas e que fazem parte do segundo tipo de análise são as vigas A2, B2 e C2. As vigas contínuas são as vigas D1 e D2, sendo que a primeira tem a mesma posição de cabo que a viga A1.

#### 6.1.1 Características estruturais

Todas as vigas analisadas possuem os mesmos parâmetros de materiais. O módulo do concreto,  $E_c$ , é considerado igual a 20.000 MPa, com coeficiente de Poisson,  $\nu$ , de 0,15, resistência à tração,  $f_t$ , de 9,5 MPa e à compressão,  $f_c$ , de 41,3 MPa, e deformação última à tração,  $\varepsilon_t$ , de

0,002 e à compressão,  $\varepsilon_{cu}$  de 0,0035. São utilizadas oito camadas de concreto, cada camada com 15 cm de espessura. Em relação ao aço protendido, utiliza-se módulo de elasticidade de 200.000 MPa, com parâmetro de endurecimento linear igual a 40.000 MPa e tensão de escoamento de 2.600 MPa. A área da seção transversal da armadura de protensão é de 6,213 cm<sup>2</sup> e a força de protensão aplicada é de 1.200 kN.

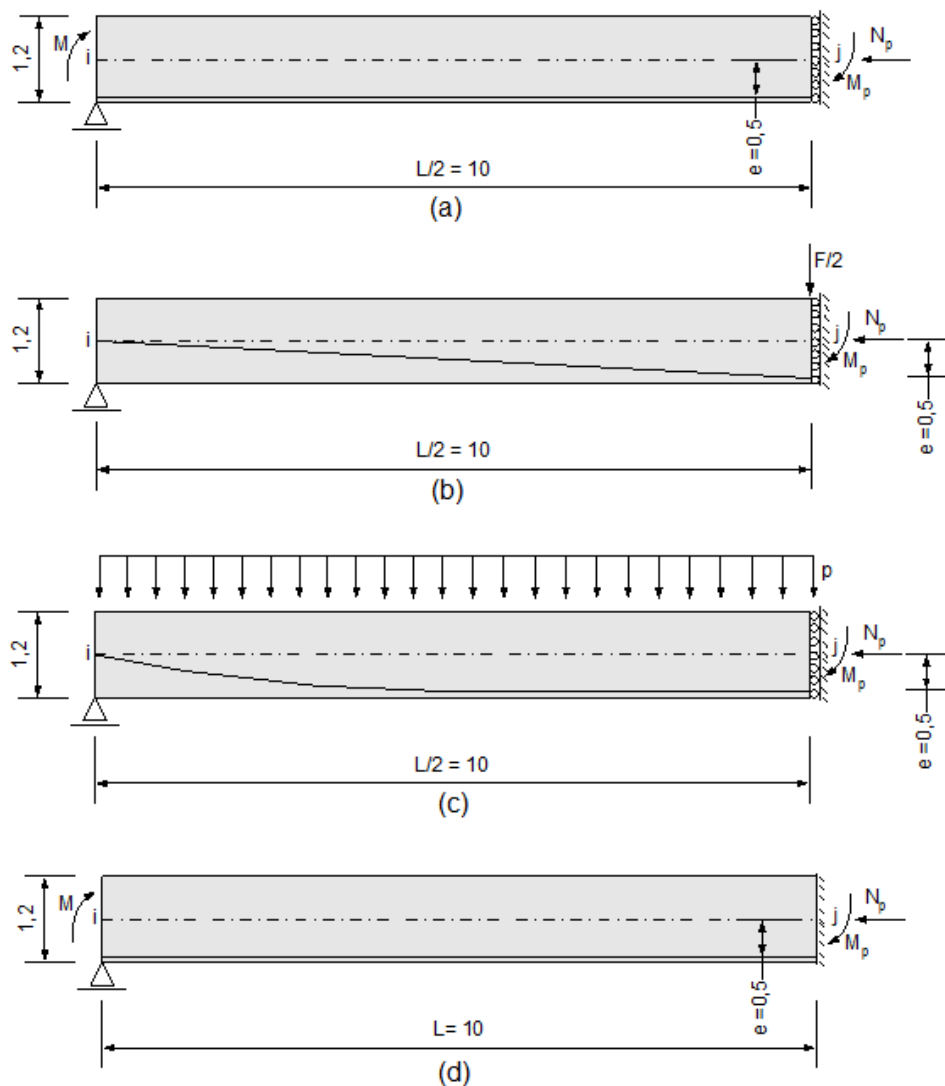
A figura 6.1 ilustra as oito vigas analisadas, sendo que todas estas possuem a mesma seção transversal 0,4 x 1,2 m. No primeiro grupo de vigas (figura 6.1a), a viga A1 é bi-apoiada e considera o efeito da protensão através da utilização de um cabo de traçado retilíneo com 0,5 m de excentricidade em relação ao eixo longitudinal das estruturas e a viga A2 é idêntica à A1, exceto pelo carregamento, no qual se considera o efeito da protensão através da aplicação de um momento externo,  $M$ , de valor 1.200 kNm sobre a viga no apoio da extremidade esquerda, ou seja, no apoio simples.

No segundo grupo de vigas, ilustrado na figura 6.1b, a viga B1 possui um cabo inclinado reto, que nos apoios possui a mesma localização do eixo longitudinal da viga e no meio do vão possui excentricidade de 0,5 m, e a viga B2 é carregada com uma carga concentrada,  $F$ , no centro do vão com valor igual a 239,7 kN.

O terceiro grupo de vigas é composto pelas vigas C1 e C2 e é ilustrado na figura 6.1c. A primeira possui um cabo parabólico, cuja posição coincide com o eixo longitudinal da viga na região dos apoios e no centro do vão possui excentricidade de 0,5 m e a segunda, viga C2, é submetida a um carregamento distribuído externo,  $p$ , com 24 kN/m de magnitude.

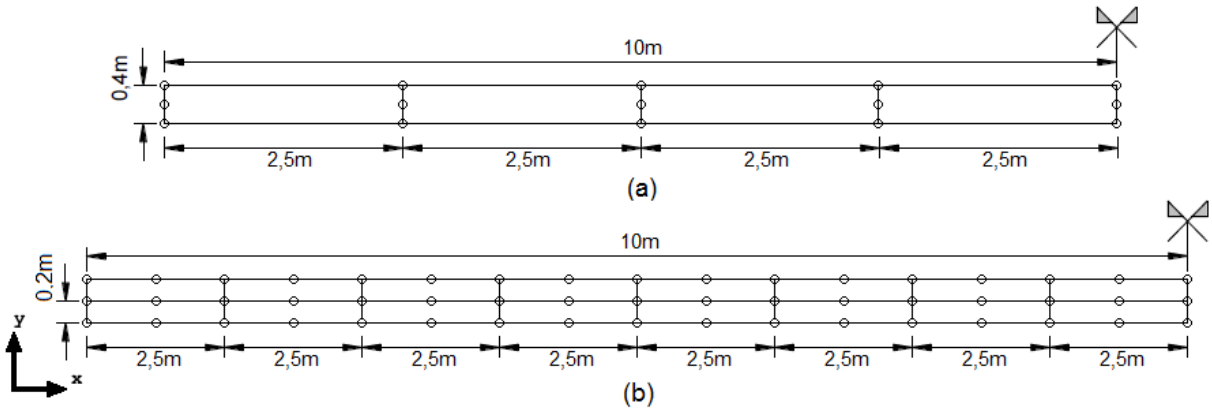
O último grupo consiste nas vigas contínuas D1 e D2 (figura 6.1d) que são idênticas às vigas A1 e A2, respectivamente, com a diferença apenas nas condições de contorno.





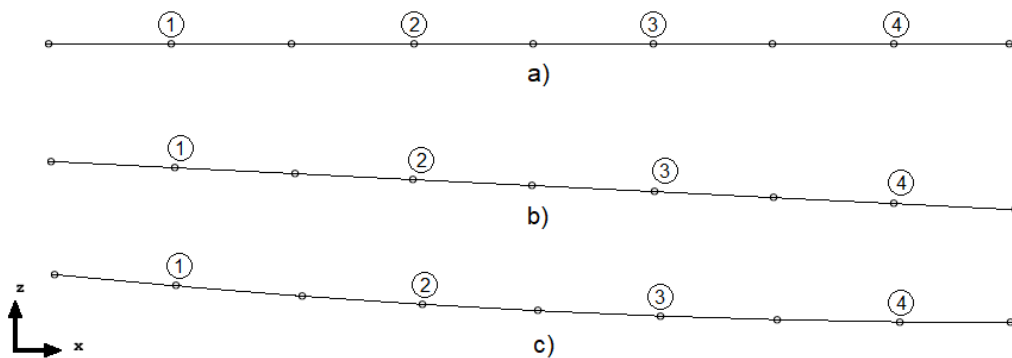
**Figura 6.1** – Representação das vigas a) A1 e A2, b) B1 e B2, c) C1 e C2 e d) D1 e D2 (fonte: adaptada de PÓVOAS, 1991).

A simetria das vigas é considerada para a elaboração da malha de elementos finitos. Assim sendo, apenas metade das mesmas é discretizada. Utilizam-se duas malhas distintas para descrever a geometria de todas as vigas, variando-se as condições de contorno. A primeira é uma malha 4x1 igual à malha empregada por Póvoas (1991) (figura 6.2a) e a segunda é uma malha 8x2 com dezesseis elementos de concreto (figura 6.2b). Essa segunda malha mantém a mesma razão de aspecto do exemplo original e foi feita para testar a formulação da armadura de protensão passando não só por dentro do elemento finito de casca degenerada, como também passando na sua extremidade.

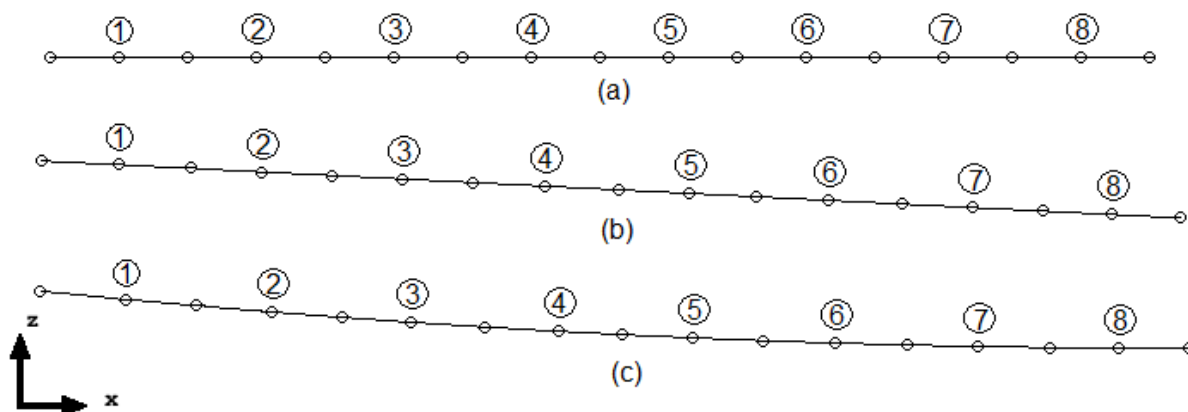


**Figura 6.2** – Malha de elementos finitos para as vigas a) com quatro elementos e b) com dezesseis elementos de concreto.

No caso das vigas A1, B1, C1 e D1, as malhas para os cabos de protensão são elaboradas de acordo com as malhas das vigas, conforme posto no capítulo 5. Dessa forma, as malhas dos cabos têm quatro (figura 6.3) e oito elementos (figura 6.4) para as malhas 4x1 e 8x2, respectivamente. Para as vigas A1 e D1, o traçado do cabo é retilíneo (figura 6.3a e 6.4a), para a viga B1, o traçado é inclinado reto (figura 6.3b e 6.4b) e, para a viga C1, o traçado é curvo (figura 6.3c e 6.4c).



**Figura 6.3** – Malha de elementos finitos para o cabo das vigas a) A1 e D1, b) B1 e c) C1 para a malha de concreto 4x1.



**Figura 6.4** – Malha de elementos finitos para o cabo das vigas a) A1 e D1, b) B1 e c) C1 para a malha de concreto 8x2.

### 6.1.2 Resultados dos testes numéricos

Os resultados obtidos pelo programa Vimis para comparação com os resultados de Póvoas (1991) e soluções analíticas são os resultados da primeira iteração que o programa realiza. A tabela 2 ilustra essa comparação através dos valores dos deslocamentos no centro do vão e das reações nos apoios. Assim como no trabalho de Póvoas (1991), a contribuição da rigidez da armadura de protensão para a estrutura não foi considerada. Através dessa tabela pode-se perceber que os resultados alcançados com o algoritmo implementado condizem fidedignamente com os resultados obtidos por Póvoas (1991) e pela solução analítica. Comparando-se, também, as duas malhas utilizadas nesta pesquisa, vê-se que a malha com dezesseis elementos de concreto apresenta, ainda que ligeiramente, mais refinamento nos resultados que a malha com apenas quatro.

Tabela 2 – Comparação de resultados para as vigas de Póvoas (1991).

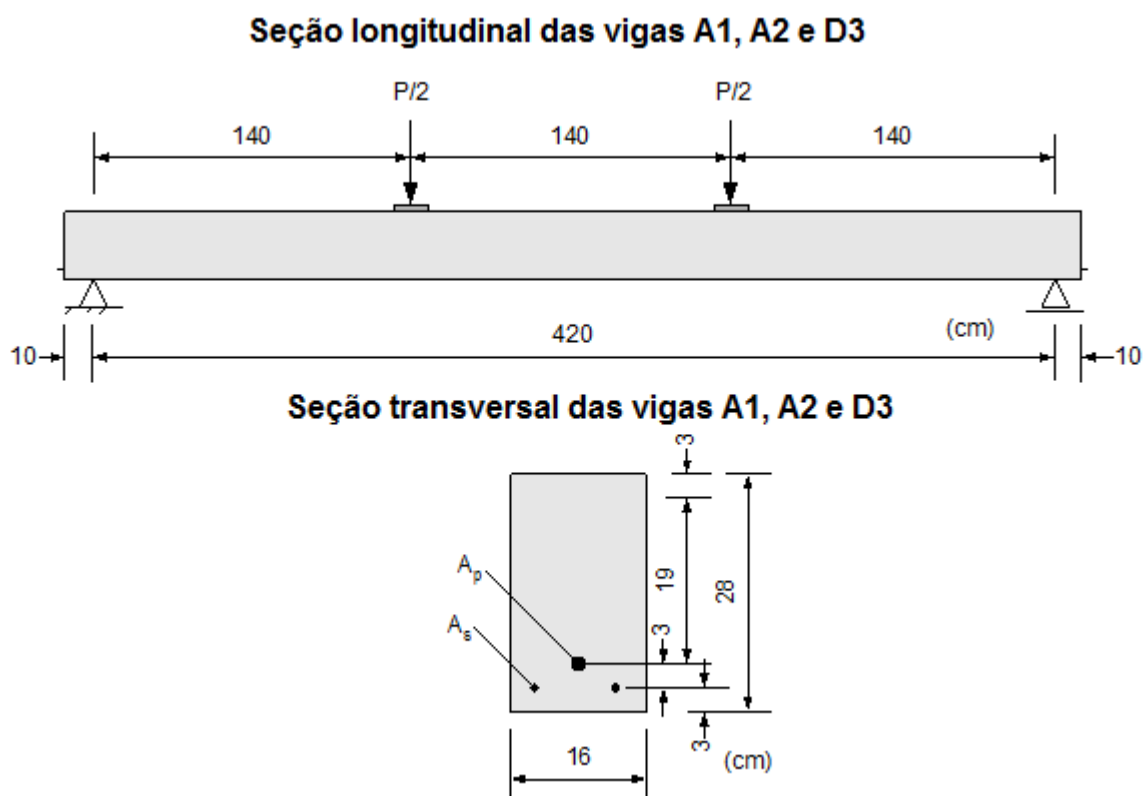
Viga	Tipo de análise	Deslocamento no centro do vão (m)	Reação vertical no nó i (kN)	Momento interno no nó j (kNm)
A1	Analítica	0,026040	0,00	0,00
	Póvoas (1991)	0,026450	0,00	0,00
	Malha 4x1	0,0264551	0,00	0,00
	Malha 8x2	0,0264545	0,00	0,00
A2	Analítica	-0,026040	0,00	0,00
	Póvoas (1991)	-0,026450	0,00	-1.200
	Malha 4x1	-0,0264551	0,00	-1.200
	Malha 8x2	-0,0264545	0,00	-1.200
B1	Analítica	0,017340	0,00	0,00
	Póvoas (1991)	0,017790	0,00	0,00
	Malha 4x1	0,0177860	0,00	0,00
	Malha 8x2	0,01778909	0,00	0,00
B2	Analítica	-0,017340	119,85	-1.198,5
	Póvoas (1991)	-0,017790	119,90	-1.199,0
	Malha 4x1	-0,0177859	119,85	-1.198,5
	Malha 8x2	-0,01778901	119,85	-1.198,5
C1	Analítica	0,02170	0,00	0,00
	Póvoas (1991)	0,022240	0,00	0,00
	Malha 4x1	0,0222037	0,00	0,00
	Malha 8x2	0,02221044	0,00	0,00
C2	Analítica	-0,02170	240	-1.200
	Póvoas (1991)	-0,022240	240	-1.200
	Malha 4x1	-0,022232	240	-1.200
	Malha 8x2	-0,0222252	240	-1.200
D1	Analítica	0,001630	90	-900
	Póvoas (1991)	0,00170	89,1	-891
	Malha 4x1	0,0017012	89,1358	-891,358
	Malha 8x2	0,00170009	89,1281	-891,281
D2	Analítica	-0,00163	-90	-300
	Póvoas (1991)	-0,00170	-89,1	-309
	Malha 4x1	-0,0017012	-89,1362	-308,642
	Malha 8x2	-0,00170019	-89,1279	-308,719

## 6.2 VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDAS

Neste item, realiza-se a avaliação do modelo numérico no que se refere à aderência da armadura de protensão à estrutura de concreto. Para isso, utiliza-se o trabalho experimental efetuado por Tao e Du (1985). Os protótipos constituem em vigas de concreto protendidas simplesmente apoiadas submetidas a carregamento concentrado até o colapso. Além da comparação com os resultados experimentais, os resultados provenientes das análises pelo programa Vimis são comparados com resultados analíticos e numéricos de Lazzari (2015) e Barbieri (2003).

### 6.2.1 Características estruturais

Três vigas são analisadas, duas com protensão não aderente parcial, vigas A1 e A2, e uma com protensão aderente, viga D3. A geometria destas vigas, bem como a localização das armaduras de reforço,  $A_s$ , e de protensão,  $A_p$ , estão ilustradas na figura 6.5.



**Figura 6.5** – Configuração geométrica das vigas protendidas de Tao e Du (1985).

A tabela 3 apresenta os dados referentes às vigas protendidas do trabalho experimental de Tao e Du (1985) utilizados para a avaliação do modelo numérico. Os três protótipos analisados

foram simulados empregando-se oito camadas de concreto e uma camada de armadura de reforço. A partir dos dados fornecidos pelos autores e de recomendações do Eurocode 2 (2004), determinaram-se os módulos de elasticidade do concreto de 3.077 kN/cm<sup>2</sup> e 3.150 kN/cm<sup>2</sup> para as vigas do grupo A e para a viga D3, respectivamente. As resistências à tração foram arbitradas em 10% da resistência à compressão. As deformações finais do concreto foram definidas de acordo com os valores medidos nos experimentos por Tao e Du (1985): 0,0025 para a viga A1, 0,0045 para a viga A2 e 0,0029 para a viga D3.

Tabela 3 – Dados dos materiais das vigas de Tao e Du (1985).

Viga	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_p$ (cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{p0}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$f_y$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{py}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{ptk}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$E_p$ (kN/cm <sup>2</sup> )
A1	3,06	0,588	96	1,57	26,7	146,5	179	20.500
A2	3,06	0,980	90,4	1,57	43	146,5	179	20.500
D3	3,56	1,568	87,9	2,36	43	136	166	20.000

Em relação ao aço de protensão, foram utilizados modelos distintos nos dois tipos de vigas analisados. De acordo com Lazzari (2015), o parâmetro de endurecimento reflete sensivelmente na inclinação do trecho da curva carga-deflexão que precede a ruptura. Com base nas recomendações propostas pela autora, empregou-se um modelo elastoplástico perfeito com parâmetro de endurecimento de 407 kN/cm<sup>2</sup> para as vigas do grupo A e um modelo elastoplástico com endurecimento linear com parâmetro de 4.250 kN/cm<sup>2</sup> para a viga D3.

O modelo numérico adotado representa apenas metade das vigas devido à simetria do problema. Assim sendo, dividiu-se a altura de cada peça em dois elementos e a metade do comprimento longitudinal em quinze, resultando em uma malha com trinta elementos de concreto, conforme ilustra a figura 6.6. Para o cabo de protensão, empregou-se uma malha com 15 elementos finitos unidimensionais e 31 nós.

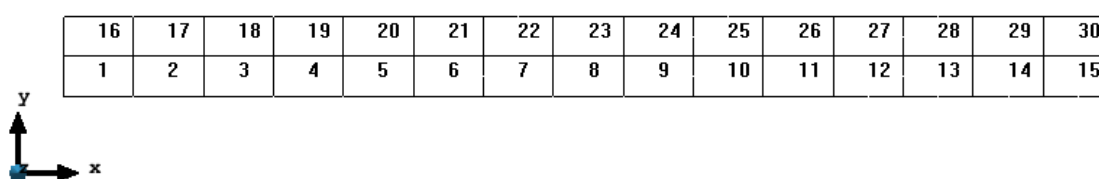
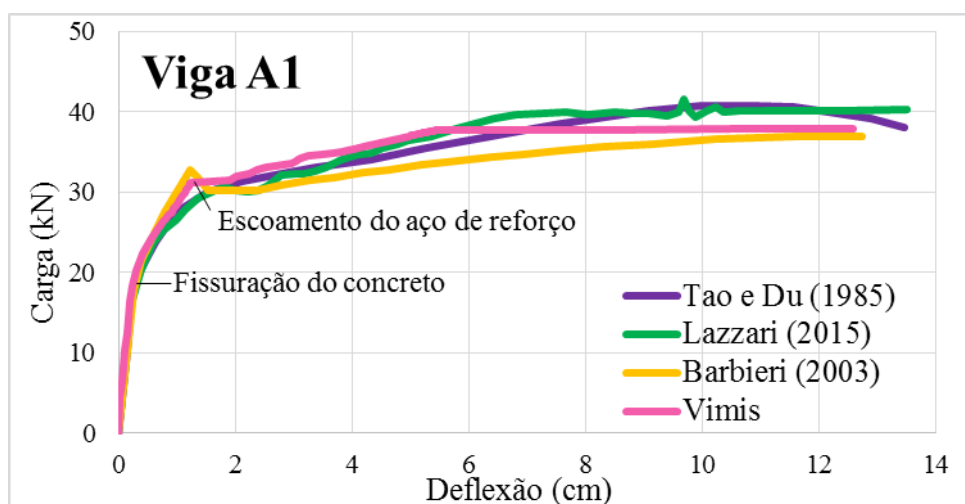


Figura 6.6 – Malha de elementos finitos para os protótipos de Tao e Du (1985).

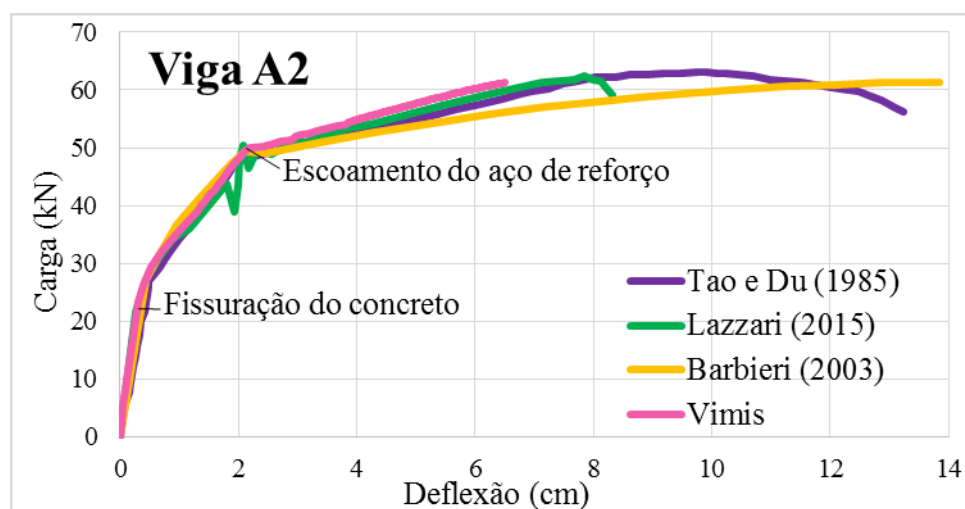
## 6.2.2 Análise dos resultados obtidos pelo programa Vimis

Nas análises numéricas, o peso próprio das vigas foi considerado como carga de curta duração e foi aplicado no momento da protensão. Já a sobrecarga foi aplicada de forma incremental em parcelas inicialmente de 5% diminuindo-as gradualmente devido ao comportamento não linear das estruturas.

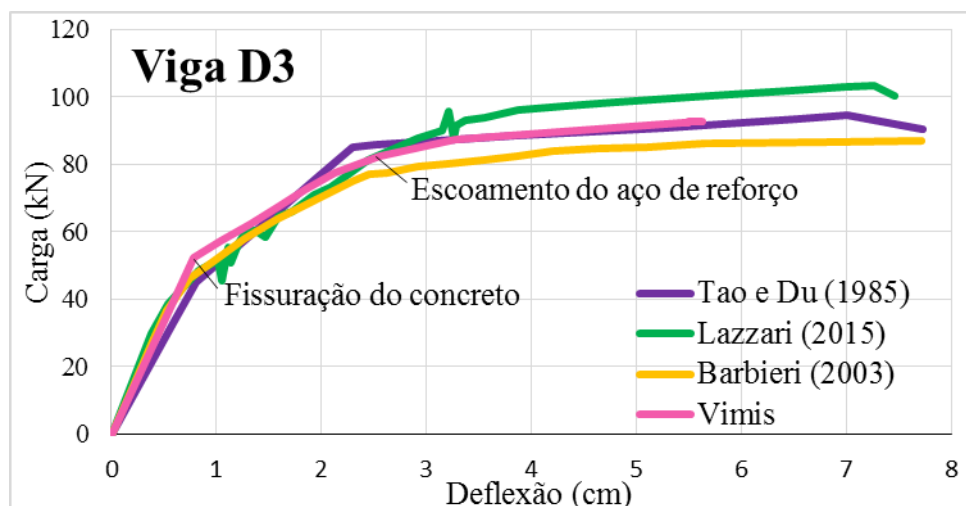
As figuras 6.7 a 6.9 comparam os resultados obtidos no programa Vimis das deflexões no centro do vão para as vigas A1, A2 e D3 com os resultados provenientes do experimento de Tao e Du (1985), como também dos estudos numéricos realizados por Lazzari (2015) e Barbieri (2003).



**Figura 6.7** – Comparação das flechas no centro do vão da viga A1.



**Figura 6.8** – Comparação das flechas no centro do vão da viga A2.



**Figura 6.9** – Comparação das flechas no centro do vão da viga D3.

Pelas curvas ilustradas, pode-se perceber o comportamento semelhante das vigas com protensão aderente e não aderente, o que se deve à adição adequada de aço de reforço (TAO; DU, 1985). Em ambos os casos, as curvas exibem essencialmente três fases distintas, que podem ser aproximadas por três segmentos retos, nomeadamente, não fissurada elástica, fissurada elástica e plástica. Nessa última fase, os protótipos apresentam um comportamento estrutural com elevada capacidade de deformação. As transições de cada estágio são as cargas equivalentes ao momento em que inicia a fissuração do concreto e o escoamento do aço de reforço.

Comparando-se as curvas carga x deslocamento ilustradas nas figuras 6.7 a 6.9, vê-se que essas apresentam boa correlação não só com os resultados dos ensaios experimentais, como também com os estudos numéricos de Lazzari (2015) e Barbieri (2003). Acredita-se que as pequenas diferenças entre as mesmas sejam devidas aos modelos constitutivos e parâmetros dos materiais empregados e também dos modelos numéricos propostos. As cargas correspondentes ao começo da fissuração do concreto e do escoamento do aço da armadura passiva, indicadas nas figuras, apresentam grande semelhança, sendo que o fato da curva obtida pelo Vimis não conseguir atingir a carga de ruptura deve-se ao esmagamento do concreto no ponto de integração, que causa a parada do programa.

Para as vigas com protensão não aderente, vigas A1 e A2, elaborou-se a tabela 4 para que a capacidade máxima à flexão das mesmas, obtidas pelo Vimis, fossem comparadas com os ensaios experimentais de Tao e Du (1985) e com os resultados analíticos obtidos pelos autores baseado nos diagramas momento-curvatura. Como percebe-se, a razão entre os momentos últimos obtidos pelos experimentos e os valores obtidos pelo Vimis tem uma média de 1,08 e



entre resultados analíticos e os obtidos pelo Vimis tem uma média de 0,97, o que indica que os valores possuem um grau relativamente alto de precisão em relação a ambos os estudos.

Tabela 4 – Comparação dos momentos últimos obtidos experimentalmente com resultados analíticos e obtidos pelo Vimis para as vigas com protensão não aderente.

Viga	$M_u$ (kNm)			Experimental /Vimis	Analítico /Vimis
	Experimental	Analítico	Vimis		
A1	31,3	27,7	28,15	1,112	0,984
A2	46,8	42,2	44,45	1,053	0,949

As figuras 6.10 e 6.11 comparam a evolução da variação das tensões na armadura de protensão não aderente dos protótipos ao longo da aplicação do carregamento obtidas experimentalmente com as provenientes das análise numéricas pelo Vimis e por Barbieri (2003). Ao comparar essas figuras com as curvas do tipo carga x deslocamento (figuras 6.7 e 6.8), percebe-se que essas curvas são bastante semelhantes na forma, o que indica uma estreita relação entre os deslocamentos e o aumento da tensão nos cabos de protensão. Pode-se observar que há uma boa proximidade entre as curvas para ambas as vigas, indicando uma adequada modelagem do comportamento experimental.

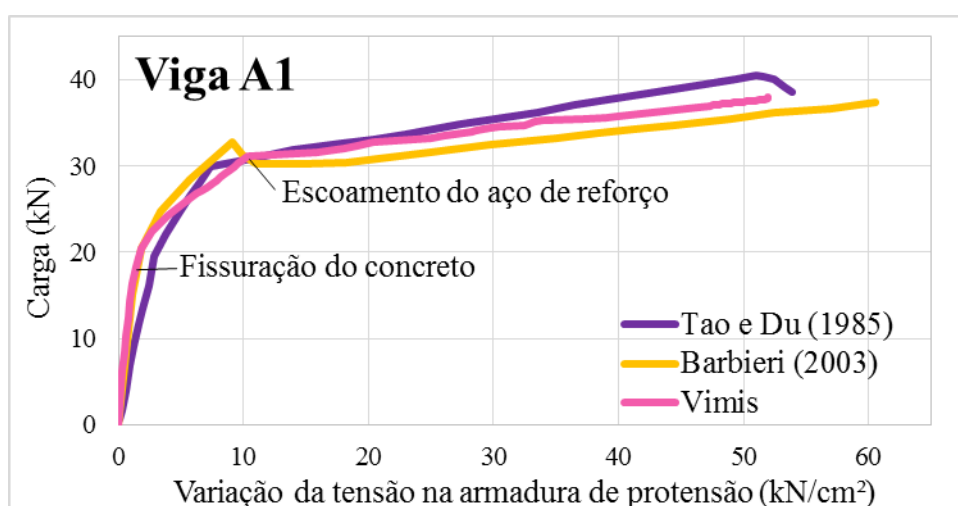
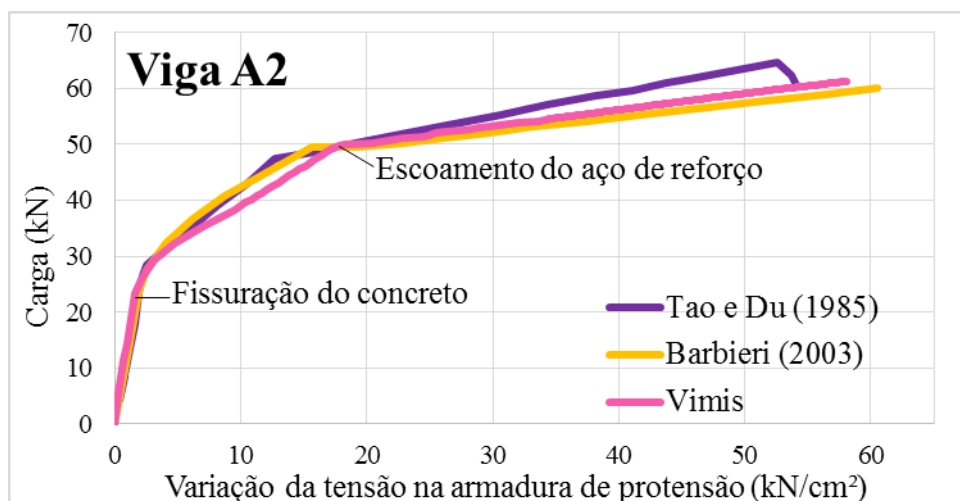


Figura 6.10 – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A1 ao longo do carregamento.



**Figura 6.11** – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A2 ao longo do carregamento.

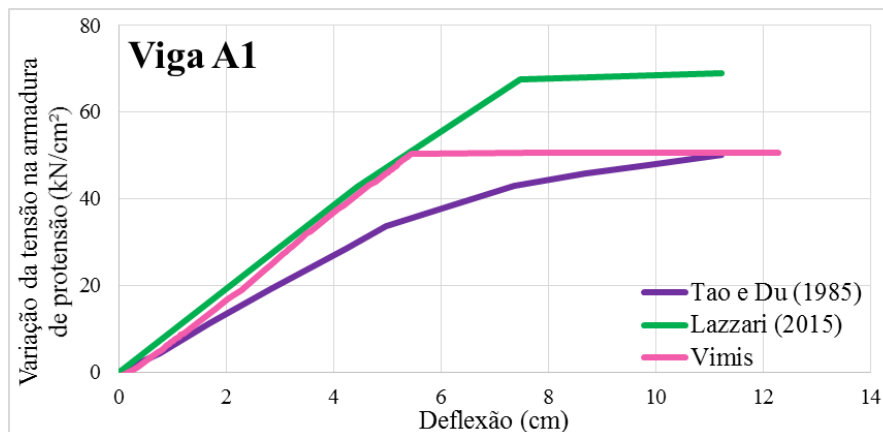
De forma semelhante ao que foi feito para a capacidade máxima à flexão, elaborou-se a tabela 5 com os valores da tensão última na armadura de protensão não aderente no momento do colapso dos protótipos A1 e A2. Ao comparar-se os resultados atingidos pelo Vimis com os resultados experimentais e analíticos de Tao e Du (1985), percebe-se que estes são muito próximos, sendo a média da razão entre experimentais/Vimis é de 1,01 e entre analíticos/Vimis é de 1,004. Ou seja, a formulação para os cabos de protensão não aderente implementada no programa Vimis consegue prever com uma precisão bastante elevada os valores da tensão última dos mesmos.

Tabela 5 – Comparação da tensão última na armadura de protensão não aderente obtidos experimentalmente com resultados analíticos e obtidos pelo Vimis.

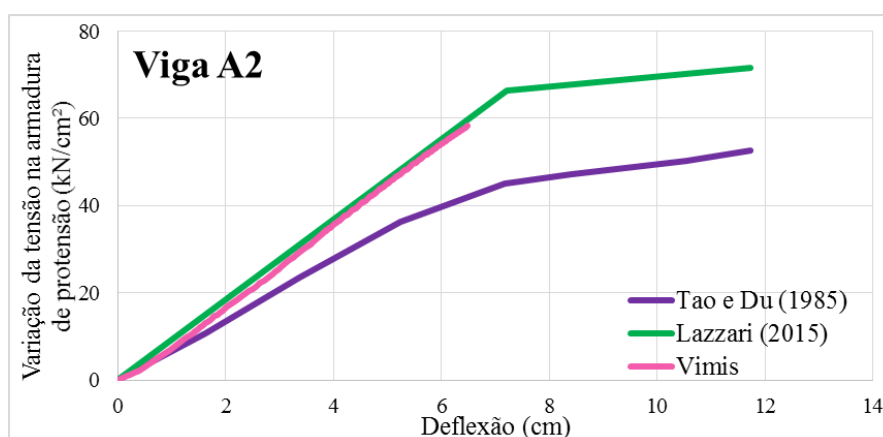
Viga	$f_{ps}$ (kN/cm <sup>2</sup> )			Experimental /Vimis	Analítico /Vimis
	Experimental	Analítico	Vimis		
A1	145,8	147,9	147,02	0,992	1,006
A2	143	139,3	139	1,029	1,002

A comparação da evolução da variação das tensões na armadura de protensão das vigas do grupo A, ao longo do desenvolvimento das deflexões, de acordo com os resultados obtidos pelo programa Vimis com os resultados experimentais e com os resultados de Lazzari (2015) são mostrados nas figuras 6.12 e 6.13. Ressalta-se que a tensão axial ao longo do cabo de protensão

sem aderência com o concreto dos protótipos obtida pelo Vimis é constante em todo o comprimento da armadura para cada incremento de carga aplicado.



**Figura 6.12** – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A1 ao longo das flechas.

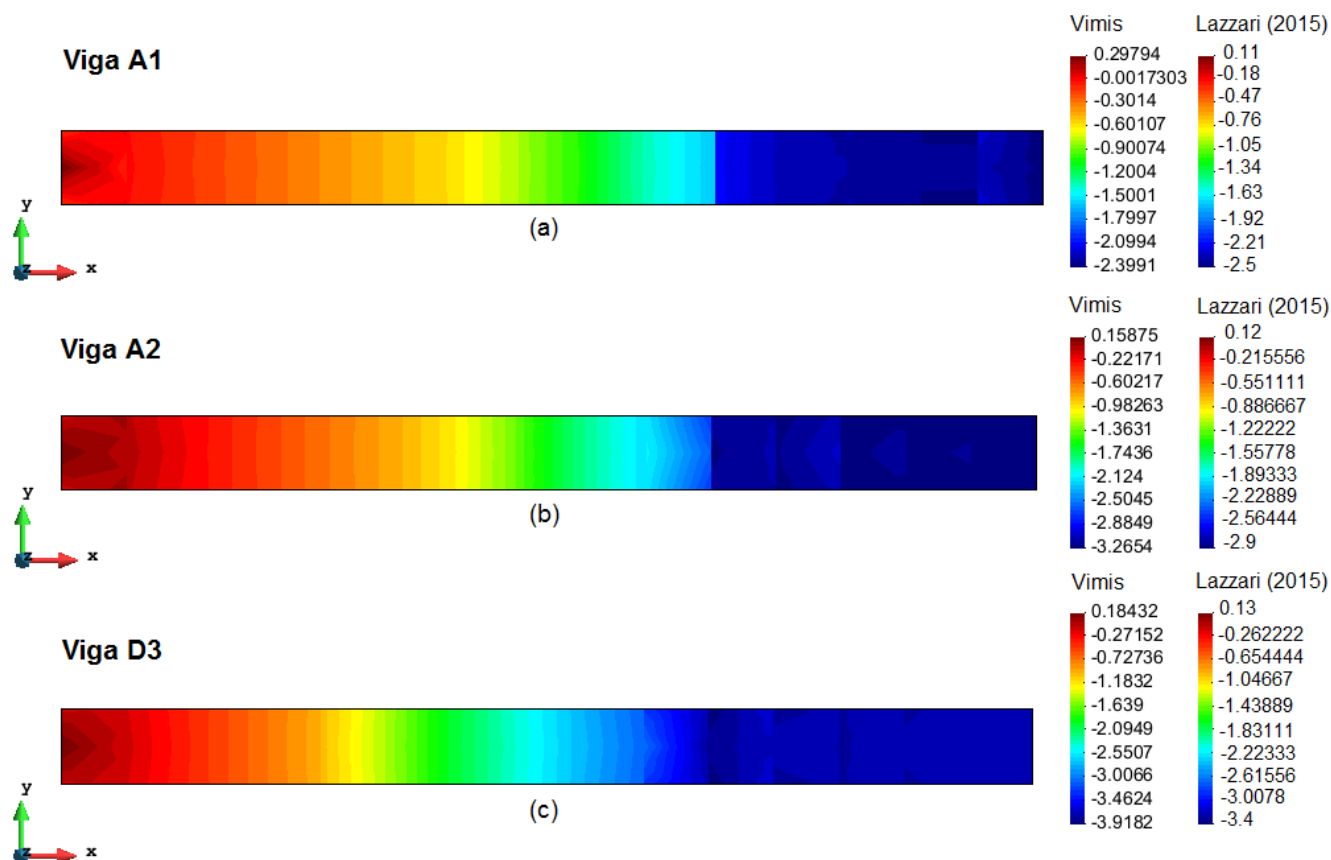


**Figura 6.13** – Comparação das variações das tensões na armadura de protensão na seção central da viga A2 ao longo das flechas.

Pode-se observar através das figuras 6.12 e 6.13 que os resultados previstos pelo Vimis estão levemente acima dos resultados determinados nos experimentos de Tao e Du (1985), mas que se correlacionam muito bem com os resultados de Lazzari (2015). Acredita-se que as diferenças entre as curvas ilustradas nas figuras se devem à adoção do diagrama tensão-deformação bilinear para a modelagem do aço de protensão. Segundo Lazzari (2015), essa diferença também pode ser explicada pela desconsideração da perda por atrito entre os cabos e a bainha.

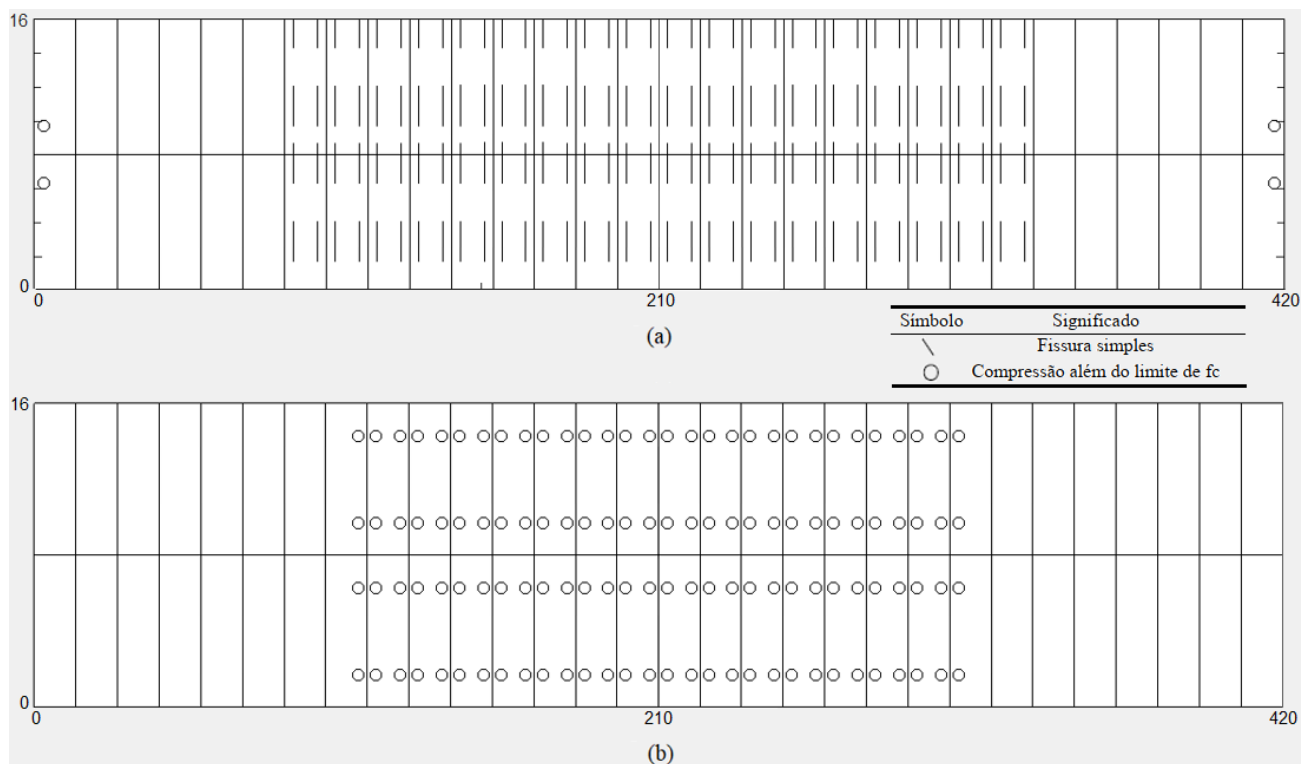
Na figura 6.14, ilustram-se os diagramas de distribuição de tensões  $\sigma_x$  nas fibras superiores dos protótipos A1, A2 e D3 sob carregamento máximo, segundo os resultados obtidos pelo programa Vimis. Comparando-se esses resultados com os resultados provenientes do modelo

computacional de Lazzari (2015), pode-se perceber uma boa correlação entre os mesmos. Na análise pelo Vimis, os valores de tensão nas fibras superiores indicam esmagamento do concreto nas regiões próximas ao centro do vão das estruturas, onde se contempla a posição mais elevada da linha neutra.



**Figura 6.14** – Comparação da distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  nas fibras superiores das vigas A1, A2 e D3 sob carga última (unidades em kN/cm<sup>2</sup>).

Para a viga A1 com protensão não aderente, ilustra-se, na figura 6.15, o padrão de fissuração quando a estrutura se encontra submetida ao máximo carregamento feita através de um *script* no *software* Matlab. As linhas retas indicam que, naquele ponto de integração, ocorreu uma fissura simples e o círculo indica que a tensão de compressão atingiu o limite da resistência à compressão do concreto. Assim sendo, a figura 6.15a ilustra as fibras inferiores da viga A1, as quais encontram-se submetidas a esforços de tração e, por essa razão, apresentam fissuras simples. Já na figura 6.15b são mostradas as fibras superiores do protótipo, as quais estão submetidas a tensões de compressão maiores que a máxima resistência à compressão do concreto.



**Figura 6.15** – Padrão de fissuração sob carga de ruptura para a) as fibras inferiores e b) fibras superiores da viga A1 (unidades em centímetros).

### 6.3 VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO PROTENDIDAS

Este item contempla as análises numéricas realizadas para vigas mistas aço-concreto com protensão aderente e não aderente na laje de concreto. Foram utilizados os estudos dos pesquisadores Dezi, Leoni e Tarantino (1996), que realizaram uma análise visco-elástica de uma viga mista contínua com protensão interna aderente, de El-Zohairy et al. (2017), que estudaram diferentes disposições de cabos de protensão numa viga mista contínua e de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992), que analisaram experimentalmente vigas mistas sujeitas a momento fletor negativo.

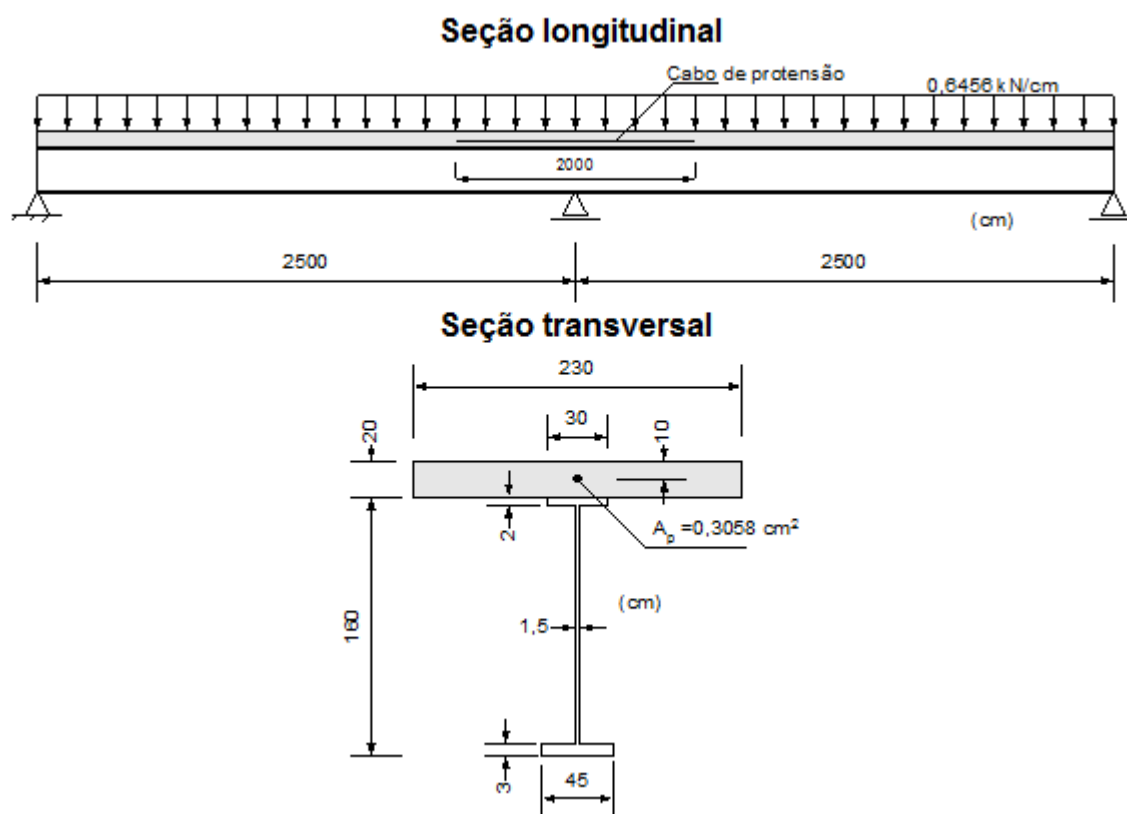
#### 6.3.1 Dezi, Leoni e Tarantino (1996)

Os pesquisadores Dezi, Leoni e Tarantino (1996) realizaram um estudo analítico do comportamento ao longo do tempo de uma viga mista de aço e concreto contínua. Foram avaliadas isoladamente três diferentes ações sobre a estrutura. Na primeira análise, os autores aplicaram uma carga distribuída e avaliaram sua ação ao longo do tempo considerando a fluência do concreto. Na segunda, avaliaram apenas o fenômeno reológico da retração sobre a

estrutura e, numa última análise, avaliaram a ação da protensão interna na laje. A mesma sequência de análise foi realizada na presente pesquisa, sendo que foi dada uma maior ênfase à última análise que se refere à aplicação da protensão na peça.

### 6.3.1.1 Características estruturais

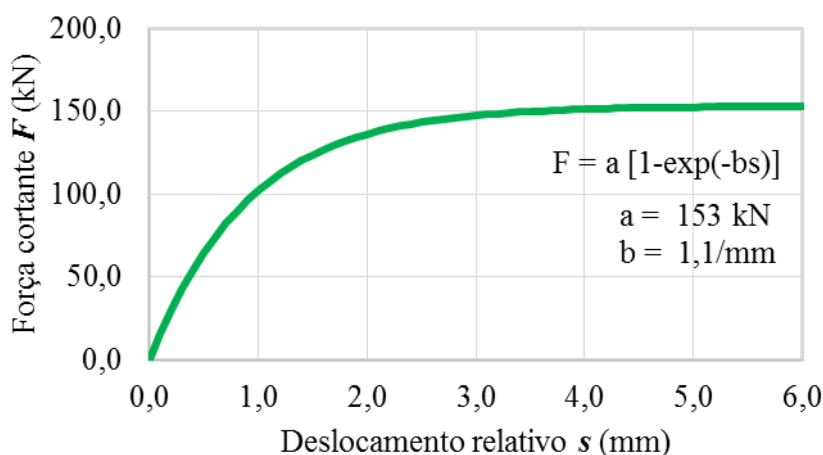
A figura 6.16 ilustra a configuração geométrica da viga analisada juntamente com a carga distribuída aplicada para a primeira análise realizada, a da fluência, e o posicionamento do cabo de protensão sobre o apoio intermediário e sua respectiva extensão. A seção transversal da peça também é ilustrada na figura 6.16. O perfil I de aço possui apenas um eixo de simetria, pois as mesas superior e inferior apresentam diferentes medidas tanto em largura quanto em espessura



**Figura 6.16** – Configuração geométrica da viga mista contínua de Dezi, Leoni e Tarantino (1996).

A laje e a viga se encontram interligadas por conectores de cisalhamento de rigidez igual a 50 kN/cm<sup>2</sup>, sendo este o único dado acerca dos mesmos fornecido pelos pesquisadores. Assim sendo, adotaram-se conectores do tipo *stud* de diâmetro igual a 22,3 mm e comprimento total de 150 mm espaçados entre si em 20 cm, tal qual MORENO (2016) adotou em seu estudo.

Estes conectores foram dispostos em uma única fileira ao longo do eixo longitudinal da viga e posicionados sobre o eixo de simetria da seção transversal. As recomendações da AASHTO foram seguidas para a determinação da capacidade máxima dos mesmos. O coeficiente de Poisson arbitrado para os conectores tem valor de 0,3 e a curva força cortante x deslocamento relativo para as análises é ilustrada na figura 6.17.



**Figura 6.17** – Curva de rigidez dos conectores da viga de Dezi, Leoni e Tarantino (1996).

Em relação aos demais dados fornecidos pelos autores, têm-se a resistência à compressão do concreto, o módulo de elasticidade do aço do perfil I e da armadura de protensão, a área da seção transversal do cabo protendido e a força de protensão aplicada, que foi de 4.000 kN. Para a análise visco-elástica, os autores adotaram o modelo CEB-FIP MC90 para o cálculo da retração e da fluência, assumiram uma umidade relativa de 50% e consideraram o carregamento distribuído aplicado aos 30 dias, sendo o tempo total de análise igual a 25.550 dias, isto é, 70 anos.

A partir das informações fornecidas, adotou-se para o concreto um módulo de elasticidade baseado no CEB-FIP MC90 e uma resistência à tração de 10% da resistência à compressão; o aço de protensão foi considerado de relaxação normal. As demais informações necessárias acerca dos materiais empregados na viga mista contínua para as análises realizadas são mostradas na tabela 6.

Tabela 6 – Propriedades dos materiais para a viga mista contínua de Dezi, Leoni e Tarantino (1996).

Material	Parâmetros	
Concreto	Módulo de elasticidade: $E_c = 3.355 \text{ kN/cm}^2$	Resistência à compressão: $f_c = 3,0 \text{ kN/cm}^2$
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,2$	Resistência à tração: $f_t = 0,3 \text{ kN/cm}^2$
	Deformação última à compressão: $\epsilon_{cu} = 0,0045$	Deformação última à tração: $\epsilon_t = 0,01$
Aço do perfil I	Módulo de elasticidade: $E_s = 21.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_y = 35 \text{ kN/cm}^2$
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$	Parâmetro de endurecimento: $H^2 = 28 \text{ kN/cm}^2$
Aço de protensão	Módulo de elasticidade: $E_{sp} = 19.700 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_{py} = 170 \text{ kN/cm}^2$
	Parâmetro de endurecimento: $H_p^2 = 400 \text{ kN/cm}^2$	Área: $A_p = 0,3058 \text{ cm}^2$

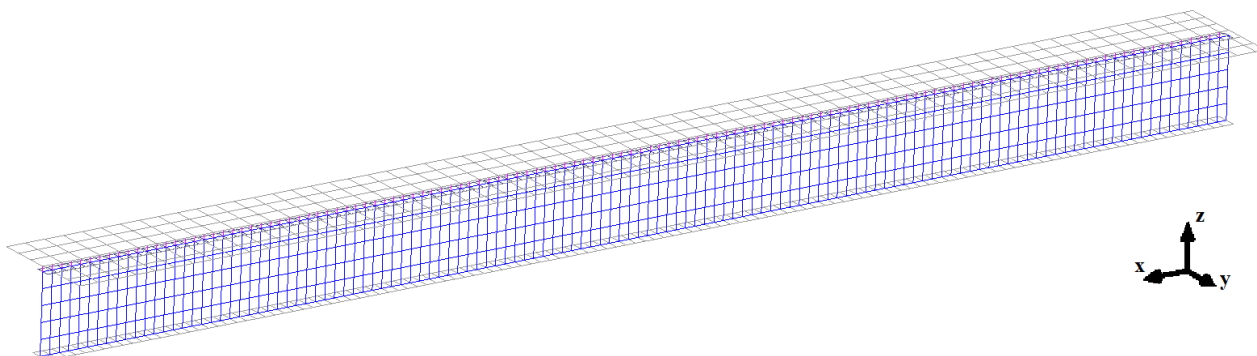
Em relação aos dados necessários para o uso do modelo CEB-FIP MC90 para o cálculo da fluência e da retração, foram utilizados cimento do tipo I, de endurecimento normal, método de cura do concreto úmida com tempo de cura de 7 dias, tempo de aplicação do carregamento também de 7 dias e temperatura de 20°C. Empregaram-se 59 passos de tempo para essa análise. Os parâmetros da cadeia de Kelvin para a estrutura podem ser vistos na tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros da cadeia de Kelvin para a viga mista contínua.

$\tau_i$	$E_i \text{ (kN/cm}^2\text{)}$
0,30	3,40
3,0	3,99
30	1,62
300	1,03
3.000	3,05
30.000	-30,10



Considerando a simetria do problema, a laje foi dividida em 378 elementos. Para a sua discretização, oito camadas de concreto foram empregadas, cada uma com 2,5 cm de espessura. Foram adotados 1.125 elementos de aço para o perfil I da viga, 125 elementos viga-coluna para os conectores de cisalhamento e, para o cabo de protensão, 25 elementos finitos unidimensionais. A malha da viga mista utilizada nas análises pode ser vista na figura 6.18.

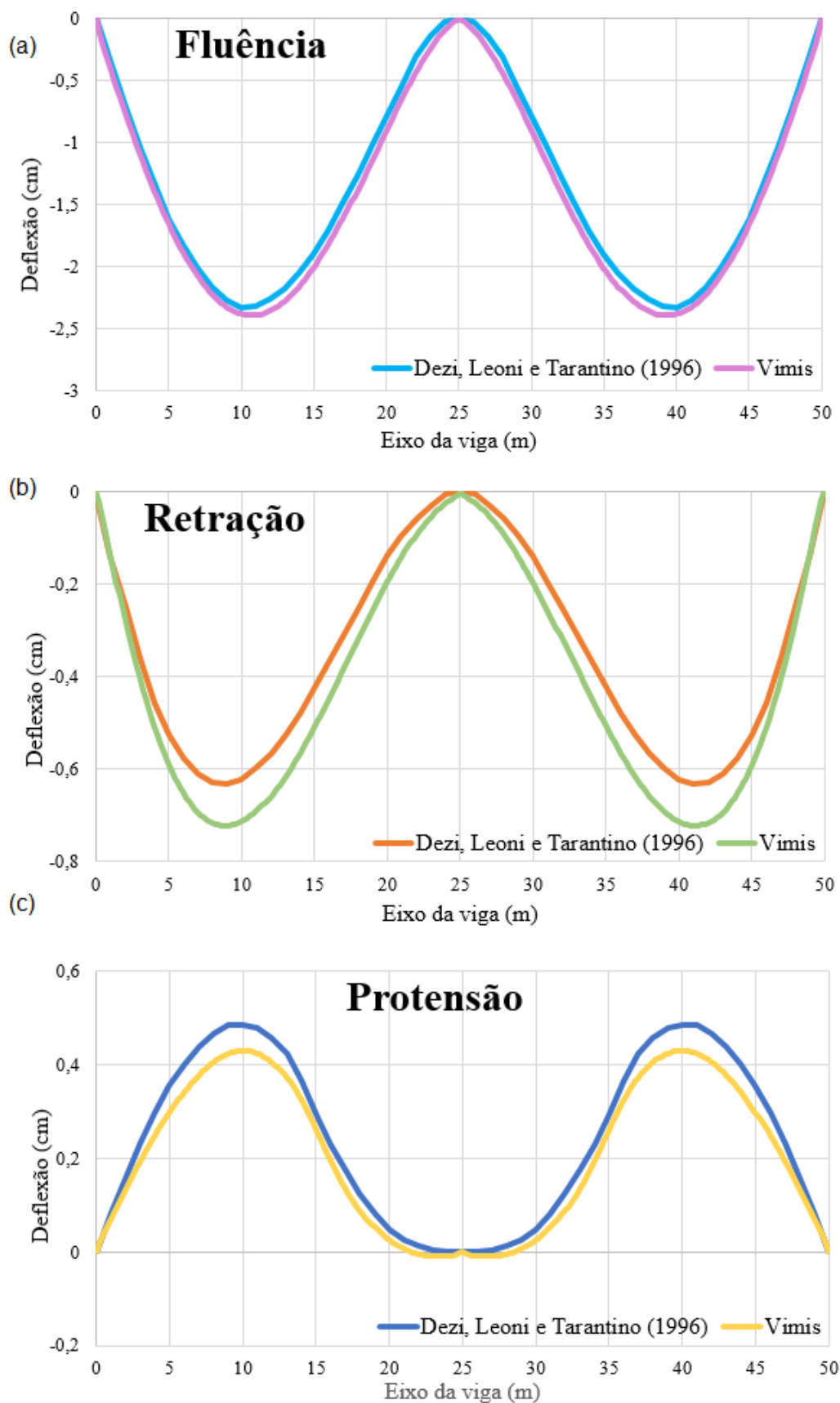


**Figura 6.18** – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga de Dezi, Leoni e Tarantino (1996).

### 6.3.1.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis

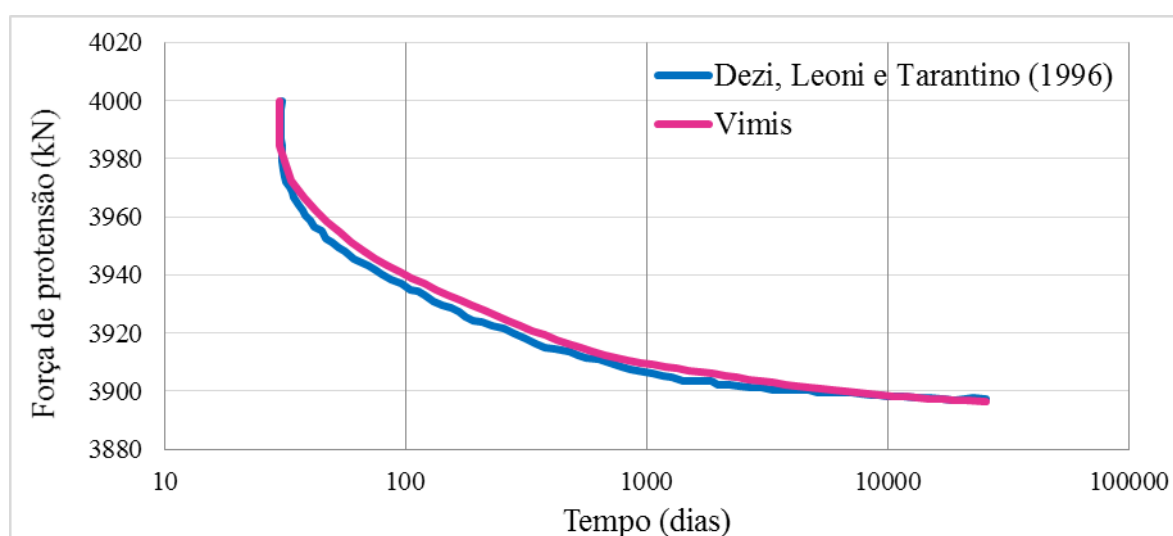
Dezi, Leoni e Tarantino (1996) desenvolveram suas análises sob o pressuposto clássico para vigas mistas, o qual consiste na preservação das seções transversais planas para todos os materiais envolvidos na estrutura. Para a modelagem do protótipo, os pesquisadores empregaram elementos de barra. Na análise considerando apenas a protensão interna na laje de concreto, assumiram a compatibilidade de deformações entre a armadura ativa e o concreto da laje, assim sendo, não existe deslizamento relativo entre a mesma e o concreto. Além da aderência entre o cabo e a estrutura, consideraram as perdas por relaxação do aço de protensão concentradas no tempo inicial de aplicação da protensão.

A figura 6.19 ilustra os resultados quanto à deflexão da viga mista contínua no tempo final das análises para cada uma das ações consideradas isoladamente. A deflexão devida exclusivamente aos efeitos da fluência é ilustrada na figura 6.19a, devido à retração na figura 6.19b e devido à aplicação da protensão aderente na figura 6.19c. Verifica-se que a diferença entre os deslocamentos verticais nos vãos são pequenas, o que indica uma boa correlação entre os resultados alcançados pelo programa Vimis com os obtidos pelos pesquisadores.



**Figura 6.19** – Deflexões na viga mista de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) considerando as ações da a) fluência, b) retração e c) protensão aderente na laje no tempo final de análise.

Uma análise mais detalhada da ação isolada da protensão aderente na laje de concreto é realizada com base no gráfico ilustrados na figura 6.20. Nesta figura, ilustra-se a curva da variação da força da protensão ao longo do tempo de análise. Pode-se concluir pelas curvas que os resultados obtidos pelo programa Vimis se correlacionam bem com os resultados obtidos por Dezi, Leoni e Tarantino (1996). A pequena diferença no desenvolvimento das curvas pode ser atribuída à consideração, pelos autores, da perda de tensão devido à relaxação do aço estar concentrada no tempo inicial da análise, enquanto nesta presente pesquisa considerou-se a real evolução desta com o tempo.



**Figura 6.20** – Variação da força de protensão ao longo do tempo de análise.

### 6.3.2 El-Zohairy et al. (2017)

Os autores El-Zohairy et al. (2017) realizaram o estudo paramétrico de uma viga mista contínua reforçada com protensão externa na viga de aço. Para fins comparativos acerca do efeito da excentricidade da protensão na qualidade desse reforço, os autores compararam a protensão externa com a protensão interna na laje de concreto. Para a validação do estudo, os autores compararam os seus resultados com o experimento realizado por Chen (2005).

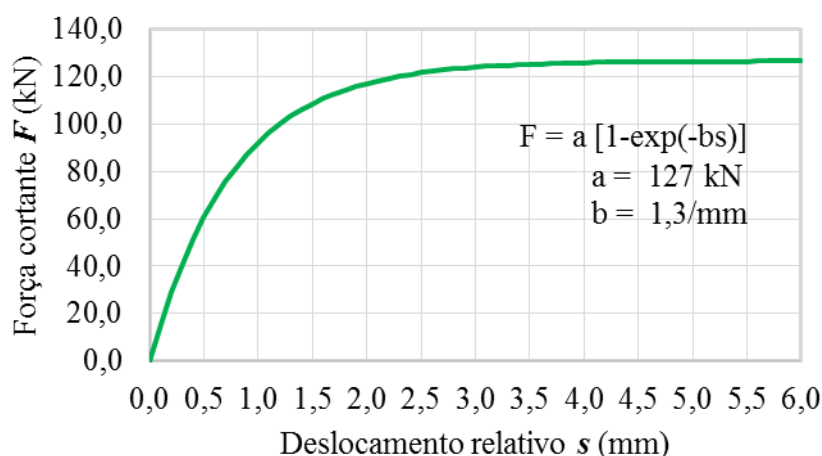
#### 6.3.2.1 Características estruturais

A peça analisada foi designada BH1 e constitui-se da porção sujeita a momento negativo de uma viga mista contínua, ou seja, a região sobre o apoio intermediário. Essa viga possui, segundo o Eurocode 4 (1994), seção compacta (classe 2), podendo ocorrer escoamento total



e de El-Zohairy et al. (2015). Para os enrijecedores transversais empregou-se o mesmo aço das mesas do perfil I.

Na viga foram soldados conectores de cisalhamento do tipo pino com cabeça de diâmetro igual a 16 mm e comprimento total de 65 mm. Em uma das metades, estes conectores foram dispostos em uma única fileira espaçados entre si em 250 mm e, na outra metade, dispostos em duas fileiras com espaçamento longitudinal de 500 mm. Para a determinação da rigidez dos conectores e obtenção da curva força cortante x deslocamento relativo ilustrada na figura 6.22, utilizou-se o BS 5400-5:2005, tal qual utilizado por Chen (2005). O coeficiente de Poisson adotado tem valor de 0,3.



**Figura 6.22** – Curva de rigidez dos conectores da viga de El-Zohairy et al. (2017).

A viga BH1 foi analisada experimentalmente simplesmente apoiada e invertida, com a laje de concreto para baixo submetida a tensões de tração, enquanto o carregamento foi aplicado numa das mesas do perfil I de aço. Não foram fornecidas contenções laterais na mesa comprimida da viga ao longo do vão nem nas seções dos apoios.

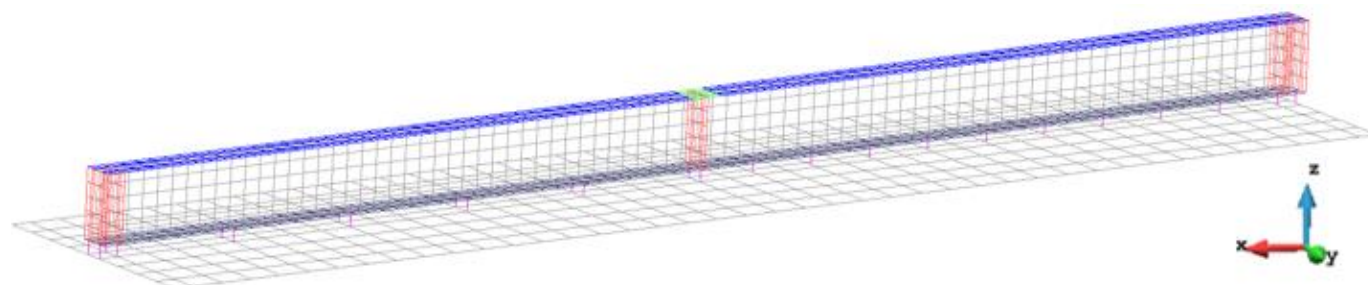
Tabela 8 – Propriedades dos materiais para a viga mista de El-Zohairy et al. (2017).

Material	Parâmetros dos materiais	
Concreto	Módulo de elasticidade: $E_c = 2.550 \text{ kN/cm}^2$	Resistência à compressão: $f_c = 4,0 \text{ kN/cm}^2$
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,20$	Resistência à tração: $f_t = 0,239 \text{ kN/cm}^2$
	Deformação última à compressão: $\epsilon_{cu} = 0,0030$	Deformação última à tração: $\epsilon_t = 0,0056$
Viga de aço	Módulo de elasticidade: $E_s = 19.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_y = 49,26 \text{ kN/cm}^2$ (alma) $f_y = 32,77 \text{ kN/cm}^2$ (mesas)
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$	Parâmetro de endurecimento: $H' = 40,80 \text{ kN/cm}^2$ (alma) $H' = 28,31 \text{ kN/cm}^2$ (mesas)
Aço de protensão	Módulo de elasticidade: $E_{sp} = 19.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_{py} = 168 \text{ kN/cm}^2$
	Parâmetro de endurecimento: $H_p' = 600 \text{ kN/cm}^2$	Seção transversal nominal: $A_p = 1,374 \text{ cm}^2$
Aço das armaduras de reforço	Módulo de elasticidade: $E_{sr} = 19.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_{ry} = 34,44 \text{ kN/cm}^2$
	Parâmetro de endurecimento: $H_r' = 167,7 \text{ kN/cm}^2$	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$

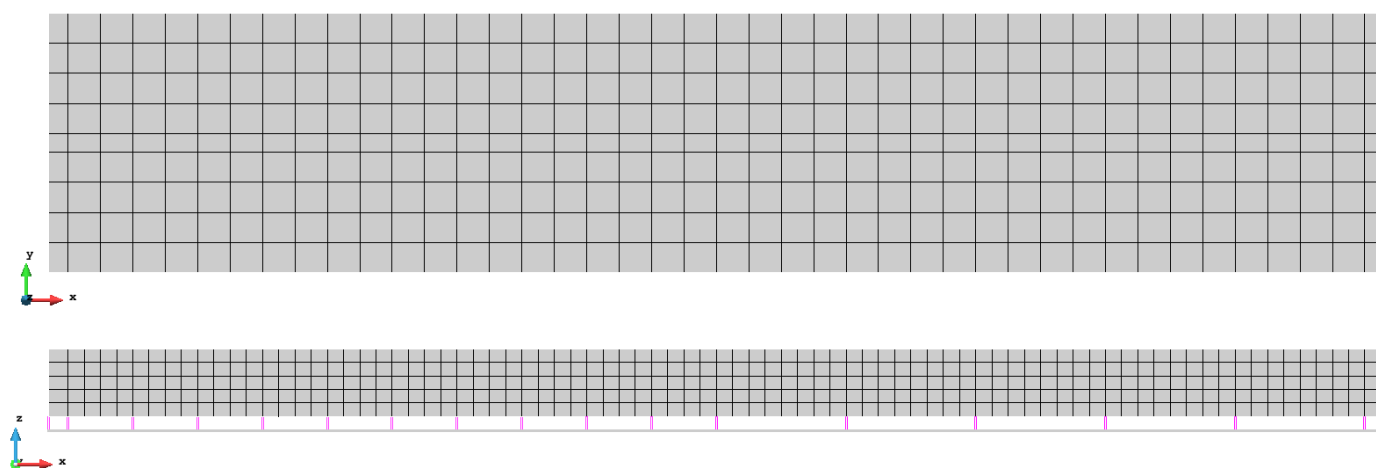
Para o modelo de elementos finitos da viga BH1 foram empregados 378 elementos de casca degenerada para a laje, 1.544 elementos para o perfil de aço e 25 elementos viga-coluna para os conectores de cisalhamento. Cada cabo de protensão foi modelado com 42 elementos finitos. A malha completa da viga mista pode ser vista na figura 6.23 e em detalhes na figura 6.24.

A laje é modelada em dez camadas de concreto com 9 mm de espessura cada reforçadas por duas camadas de armadura. O carregamento da viga foi aplicado em duas fases distintas. A primeira consistiu na aplicação da protensão, que gerou a correspondente flecha com concavidade para cima, e a segunda consistiu na aplicação do carregamento vertical de forma incremental até que fosse atingida a falha da peça. Essa carga externa foi aplicada na mesa

superior da viga de aço na sua seção intermediária através de uma placa de carregamento de 20 mm de espessura.



**Figura 6.23** – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga de El-Zohairy et al. (2017).

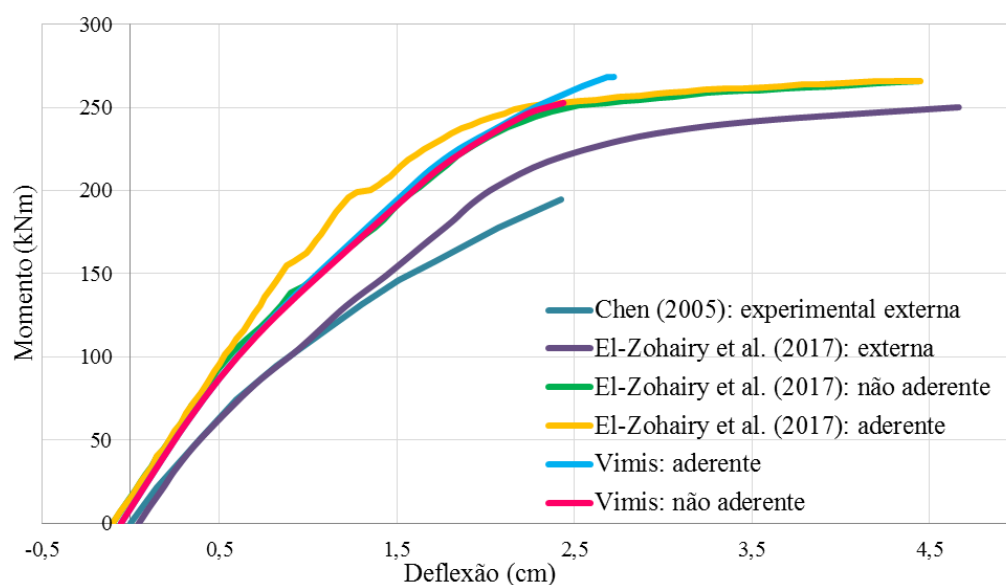


**Figura 6.24** – Vistas da malha de elementos finitos empregada para modelar a viga BH1: a) em planta e b) longitudinal.

### 6.3.2.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis

A análise numérica realizada por El-Zohairy et al. (2017) tinha ênfase no efeito da protensão externa no perfil de aço de uma viga mista submetida a momento fletor negativo e, para isso, compararam os seus resultados com a análise experimental realizada por Chen (2005). Os autores, então, supuseram o posicionamento dos cabos de protensão dentro da laje de concreto como forma de avaliar de que forma a excentricidade deles em relação ao centroide da seção transversal da viga mista interferia na resposta da peça. Assim sendo, os resultados obtidos nesta pesquisa através do programa Vimis foram comparados a esta suposição de localização da armadura ativa. Para a modelagem dos cabos, os autores empregaram elementos de barra.

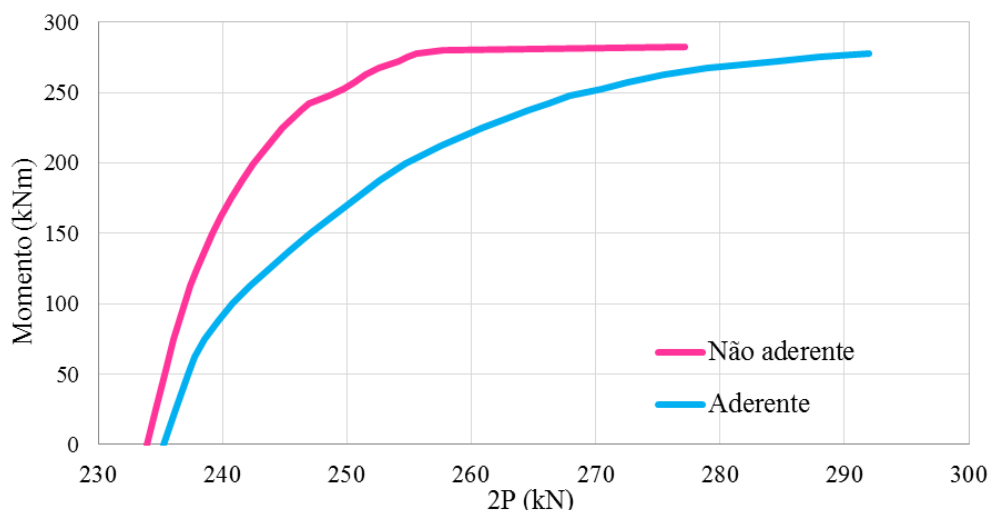
A figura 6.25 ilustra a comparação dos resultados numéricos obtidos por El-Zohairy et al. (2017) com os obtidos pelo programa Vimis para protensão interna aderente e não aderente. Vê-se que os resultados alcançados para o caso não aderente se correlacionam com uma boa precisão com os resultados obtidos pelos autores, porém, para o caso aderente, a correlação não é tão precisa. As divergências quanto às curvas dos valores do Vimis e de El-Zohairy et al. (2017) podem ser explicadas pelos diferentes modelos empregados para representarem as vigas mistas, inclusive ao modelo de barra adotado para o cabo de protensão pelos autores. No entanto, ao comparar as curvas apenas obtidas pelo Vimis, vê-se que estas diferenciam-se minimamente ao longo do carregamento. Tendo em vista que se adotou um coeficiente  $\alpha$  igual a 1,0, ou seja, considerou-se que os cabos sem aderência contribuem integralmente na rigidez global da estrutura, tal qual o caso de aderência perfeita, este comportamento poderia ser esperado.



**Figura 6.25** – Comparação das deflexões para a viga BH1 obtidas por El-Zohairy et al. (2017) e pelo programa Vimis.

Embora a aderência ou não da armadura de protensão à laje de concreto não tenha influenciado de forma considerável as curvas momento x deslocamento da estrutura, as forças de protensão atuantes nos cabos ao longo da aplicação do carregamento apresentam valores significativamente distintos, como ilustrado na figura 6.26.



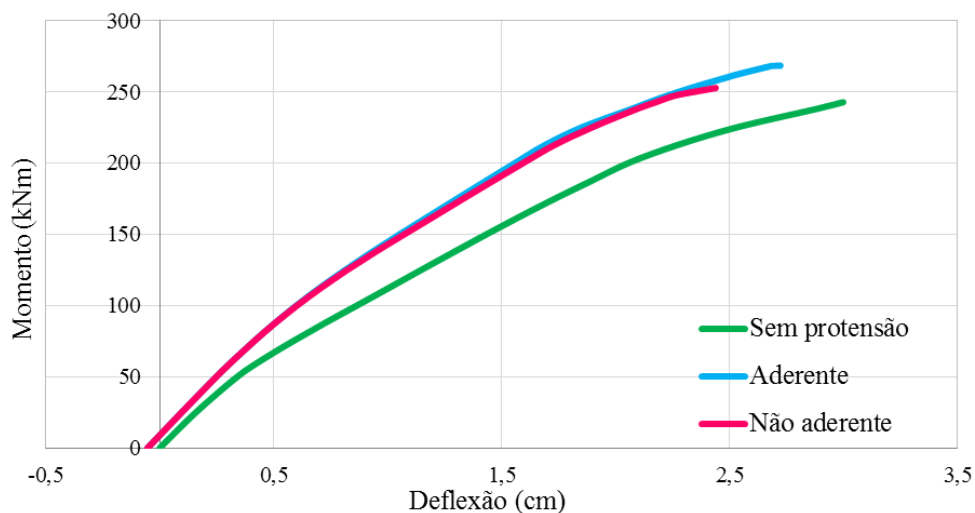


**Figura 6.26** – Comparação das forças de protensão ao longo da aplicação do carregamento para os casos de armadura aderente e não aderente.

No ensaio experimental da viga mista com protensão externa BH1 realizado por Chen (2005), o momento último atingido foi de 194 kNm quando a mesa comprimida do perfil I de aço apresentou flambagem lateral. No entanto, na análise numérica realizada por El-Zohairy et al. (2017), a estrutura falhou devido ao escoamento da mesa comprimida da viga seguido pelo escoamento do aço da armadura de reforço. Como a tensão de escoamento da viga não foi atingida na análise pelo programa Vimis, acredita-se que as curvas não tenham alcançado o mesmo deslocamento máximo da análise de El-Zohairy et al. (2017) devido ao Vimis não ter condições de capturar a flambagem lateral por torção.

Fazendo-se uma comparação do uso da protensão dentro da laje de concreto e externa na viga de aço, as curvas obtidas conseguem comprovar que o posicionamento da armadura internamente à laje de uma viga mista submetida à momento fletor negativo torna a estrutura mais rígida e aumenta sua capacidade em relação ao uso da protensão no perfil I de aço. Isso é explicado pelo aumento da excentricidade dos cabos em relação ao centroide da seção mista.

Realizou-se uma análise da estrutura sem protensão pelo Vimis a fim de quantificar o ganho de rigidez e capacidade máxima da estrutura ao se introduzir a protensão na laje, aderente e não aderente. Os resultados desta análise são mostrados na figura 6.27.



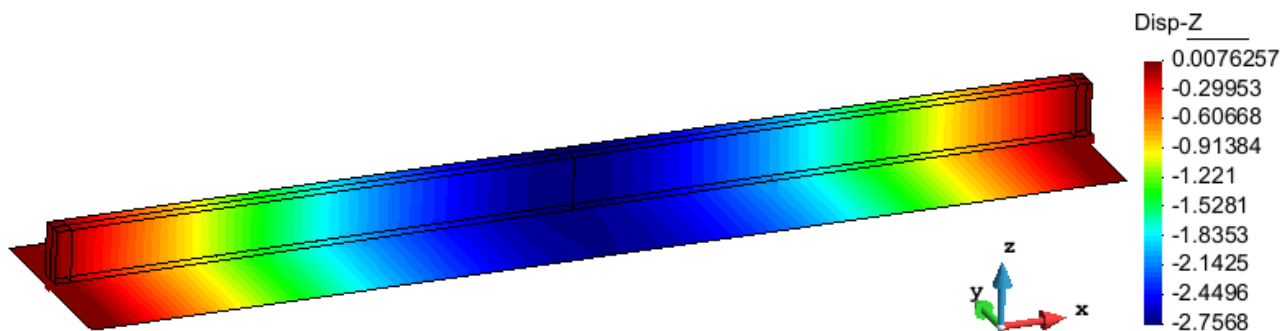
**Figura 6.27** – Comparação das deflexões da viga BH1 sem protensão e com protensão interna.

A tabela 9 faz um comparativo dos valores obtidos neste trabalho do momento de fissuração,  $M_{cr}$ , e de ruptura,  $M_u$ , com os obtidos por El-Zohairy et al. (2017) para a peça sem protensão e com protensão externa. Pode-se perceber que apesar do deslocamento máximo não tenha sido atingido para ambos os casos, aderente e não aderente, pelo programa Vimis, o pico de momento fletor foi consideravelmente similar.

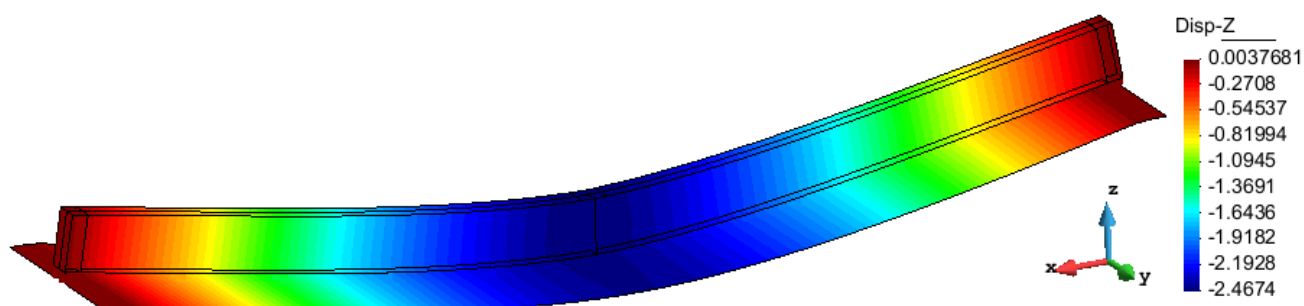
Tabela 9 – Comparação dos resultados numéricos obtidos por El-Zohairy et al. (2017) e pelo Vimis.

	El-Zohairy et al. (2017)		Vimis		
	Protensão externa	Sem protensão	Protensão aderente	Protensão não aderente	Sem protensão
$M_{cr}$ (kNm)	45	26,5	50,1	50,1	25,3
$M_u$ (kNm)	250	230	268,4	252,8	242,2

Na figura 6.28 e 6.29 estão ilustradas as deformadas da viga mista com protensão aderente e não aderente no momento em que elas se encontram submetidas ao carregamento máximo. Para o caso do uso de protensão não aderente, a deformada foi ampliada em 15 vezes para ilustrar o formato da estrutura fletida.



**Figura 6.28** – Deformada da viga com protensão aderente sob carregamento último.



**Figura 6.29** – Deformada da viga com protensão não aderente sob carregamento último (ampliada 15 vezes).

A figura 6.30 mostra a componente da tensão  $\sigma_{xx}$  no concreto na metade da espessura da laje quando a viga mista com armadura de protensão não aderente está sob o máximo carregamento. Vê-se que a disposição dos conectores de cisalhamento exerce uma certa influência na distribuição destas tensões no concreto, assim como a região de aplicação da força de protensão na peça.



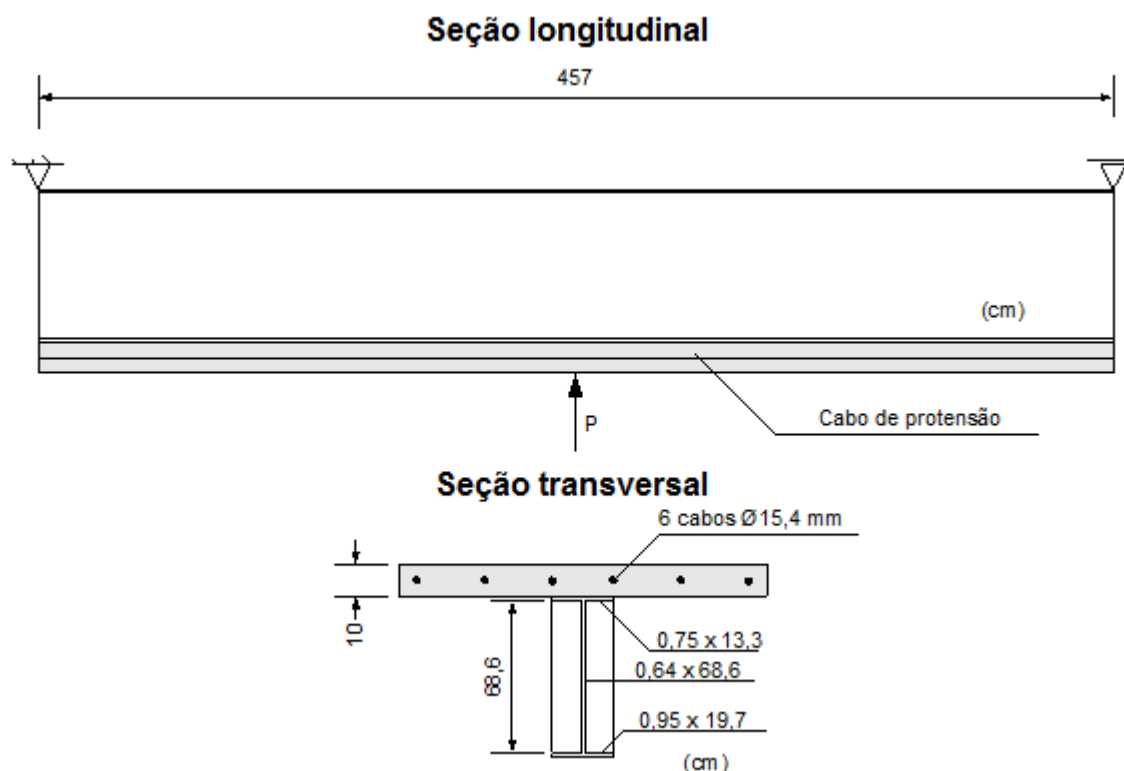
**Figura 6.30** – Componente da tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto na camada intermediária da laje da viga mista com cabos não aderentes.

### 6.3.3 Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992)

Os pesquisadores Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992) fizeram a análise experimental de cinco vigas mistas aço-concreto protendidas sujeitas a momento fletor negativo. Os protótipos foram testados para estudar variados aspectos do uso da protensão como, por exemplo, os efeitos do processo construtivo empregado, a sequência da aplicação da protensão e o tipo de cabo de protensão na performance estrutural de vigas mistas. Das cinco peças analisadas experimentalmente, quatro eram compostas por lajes protendidas pré-fabricadas que também levavam protensão externa no perfil de aço. Nesta pesquisa, analisou-se a única viga testada pelos pesquisadores sem essa protensão na viga e com protensão não aderente na laje de concreto moldada *in situ*.

#### 6.3.3.1 Características gerais da estrutura

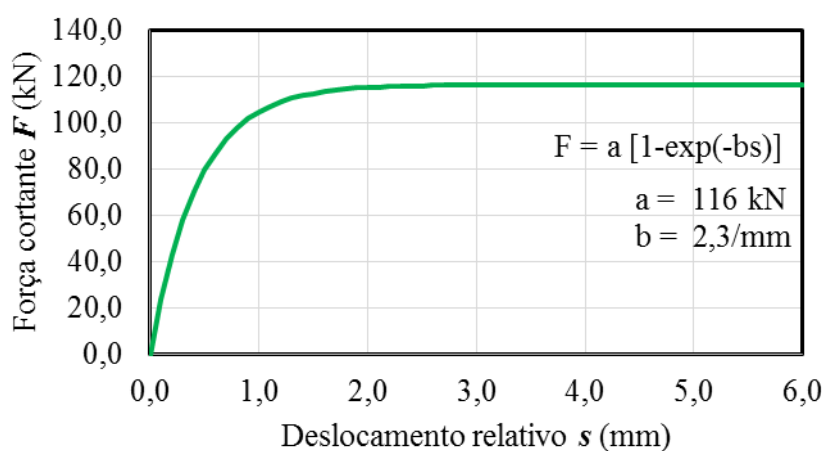
A peça analisada foi designada pela letra E e consiste em um perfil I de aço solidarizado a uma laje de concreto moldada no local. A configuração geométrica da viga E é ilustrada na figura 6.31. Assim como a viga mista BH1 do item 6.3.2, a viga E também foi ensaiada em laboratório invertida para simular a região de momento fletor negativo de uma viga contínua.



**Figura 6.31** – Configuração geométrica da viga mista E.

A laje de concreto possui 107 cm de largura e 10 cm de espessura. Nesta se posicionaram 24 barras de reforço de 10 mm de diâmetro no sentido transversal e 2 barras de mesma bitola no sentido longitudinal. Além da armadura passiva, na laje embutiram-se seis cabos de protensão de 15,2 mm de diâmetro. Na alma do perfil I de aço foram soldados três pares de 6 mm de espessura de enrijecedores sobre os apoios das extremidades e sob o ponto de aplicação do carregamento. Além destes, mais seis pares de enrijecedores transversais de mesma espessura foram soldados à alma com distância entre si de 66 cm.

Na mesa superior da viga, foram soldados 40 conectores de cisalhamento do tipo *stud* de diâmetro igual a 16 mm e comprimento total de 63 mm. Eles foram dispostos em 10 grupos de 4, sendo a distância longitudinal entre os conectores de 10,16 cm e transversal de 7,62 cm e a distância longitudinal entre o centroide dos grupos de 35,56 cm. Assim como no ensaio experimental feito pelos autores, as recomendações da AASHTO foram seguidas para a determinação da capacidade máxima dos conectores. O coeficiente de Poisson adotado tem valor de 0,3 e a curva força cortante x deslocamento relativo é mostrada na figura 6.32.



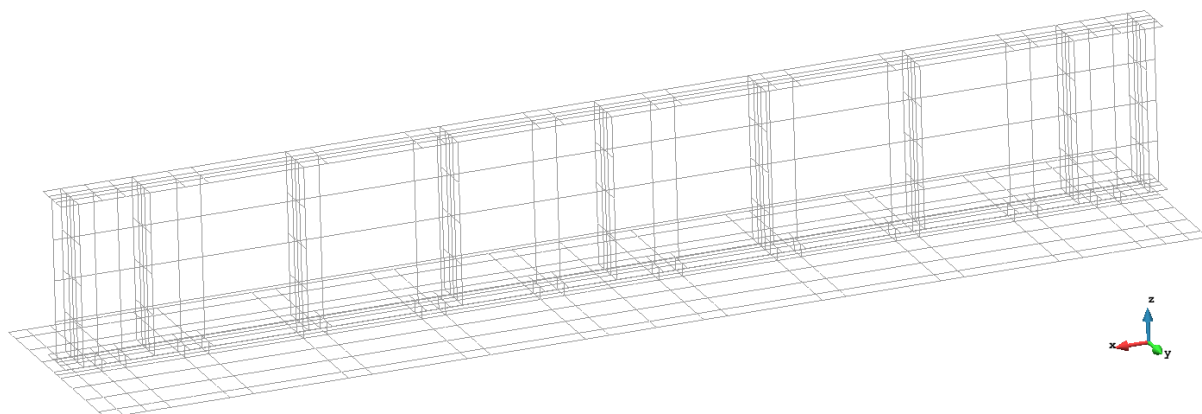
**Figura 6.32** – Curva de rigidez dos conectores da viga de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992).

Os valores dos parâmetros dos materiais da viga foram arbitrados com base no estudo analítico realizado pelos autores e encontram-se na tabela 10. O aço empregado para todos os enrijecedores soldados ao perfil I da viga de aço é igual ao aço da alma.

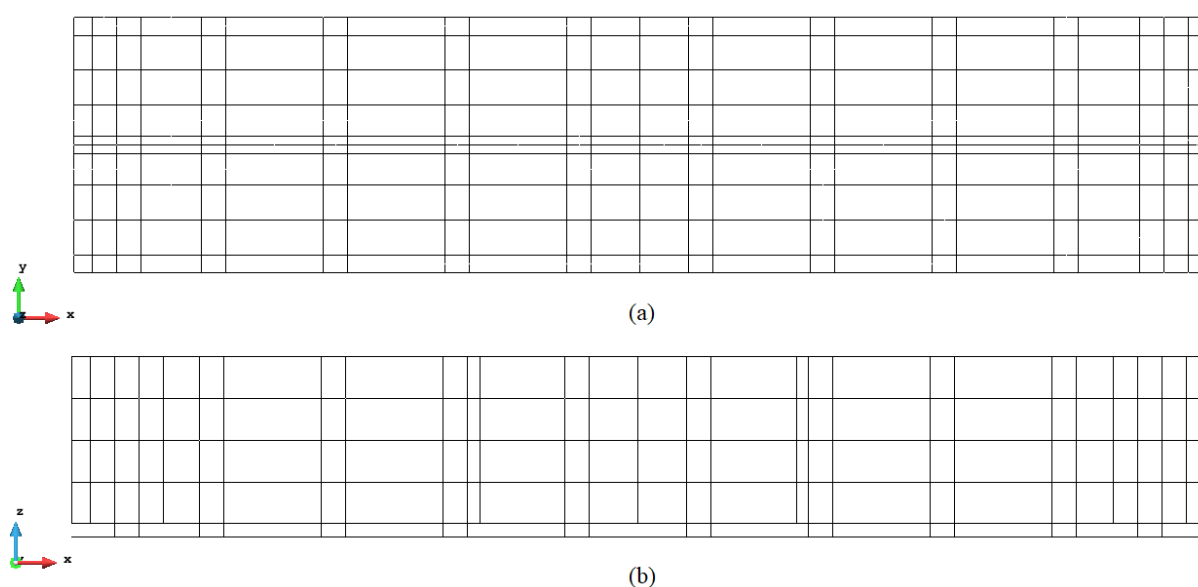
Tabela 10 – Propriedades dos materiais para a viga mista de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992).

Material	Parâmetros dos materiais	
Concreto	Módulo de elasticidade: $E_c = 2.790 \text{ kN/cm}^2$	Resistência à compressão: $f_c = 3,59 \text{ kN/cm}^2$
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,20$	Resistência à tração: $f_t = 0,33 \text{ kN/cm}^2$
	Deformação última à compressão: $\epsilon_{cu} = 0,0055$	Deformação última à tração: $\epsilon_t = 0,00025$
Viga de aço	Módulo de elasticidade: $E_s = 20.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_y = 38,90 \text{ kN/cm}^2$
	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$	Parâmetro de endurecimento: $H^? = 39,46 \text{ kN/cm}^2$
Aço de protensão	Módulo de elasticidade: $E_{sp} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_{py} = 145,74 \text{ kN/cm}^2$
	Parâmetro de endurecimento: $H_p^? = 871,02 \text{ kN/cm}^2$	Seção transversal nominal: $A_p = 1,815 \text{ cm}^2$
Aço das armaduras de reforço	Módulo de elasticidade: $E_{sr} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$	Tensão de escoamento: $f_{ry} = 91,22 \text{ kN/cm}^2$
	Parâmetro de endurecimento: $H_r^? = 108,56 \text{ kN/cm}^2$	Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$

Para o modelo de elementos finitos da viga mista E foram empregados 240 elementos para a laje, 480 elementos de aço, entre os do perfil de aço e dos enrijecedores, e 40 elementos para os conectores de cisalhamento. Cada um dos cabos de protensão foi modelado com 23 elementos finitos. A malha completa da viga mista pode ser vista na figura 6.33 e em detalhes na figura 6.34.



**Figura 6.33** – Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga mista E.



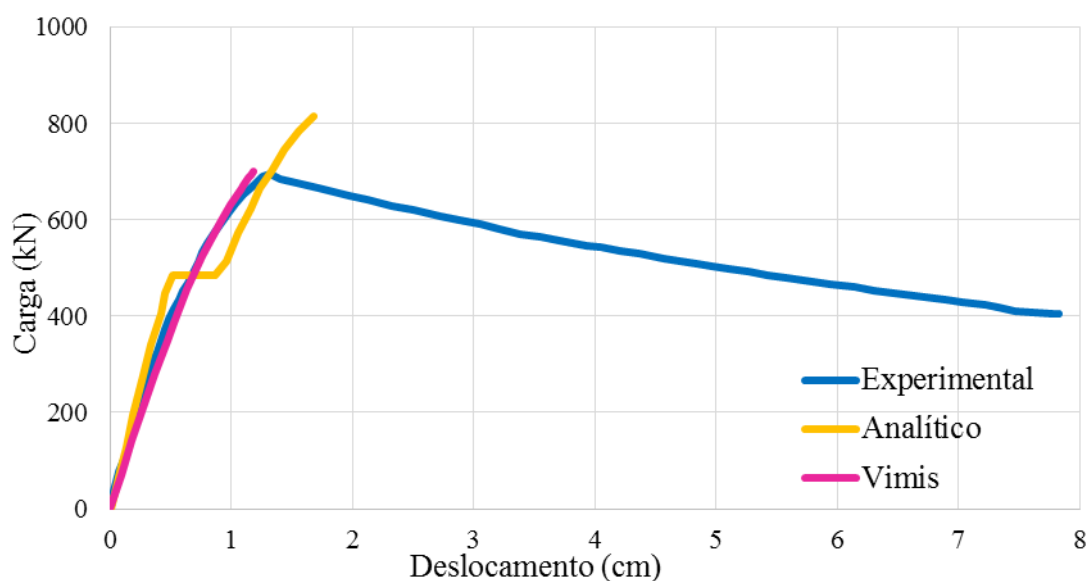
**Figura 6.34** – Vistas da malha de elementos finitos empregada para modelar a viga E: a) em planta e b) longitudinal.

A laje é modelada em dez camadas de concreto com 1,02 cm de espessura cada reforçadas por duas camadas de armadura. A viga E foi analisada experimentalmente invertida de tal forma que a laje de concreto ficou virada para baixo e simplesmente apoiada nas extremidades. Foram fornecidas contenções laterais na mesa comprimida da viga a cada quarto de vão.

O carregamento da viga foi aplicado em duas fases distintas, na primeira aplicou-se uma força de protensão de 124 kN em cada um dos seis cabos na laje de concreto e depois o carregamento externo foi aplicado de forma incremental, em parcelas inicialmente de 10% diminuindo-as gradualmente, na mesa superior da viga de aço na sua seção intermediária através de uma placa de carregamento de 2,0 cm de espessura, assim como foi feito para a estrutura analisada no item 6.2.2

### 6.3.3.2 Resultados da análise numérica pelo programa Vimis

A figura 6.35 mostra a comparação dos resultados obtidos nesta presente pesquisa com os apresentados pelos autores Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992). Como pode-se constatar, o segundo trecho da curva não foi atingido pelo Vimis, uma vez que a falha do protótipo se deu por flambagem local e o programa não possui condições de captura-la. No entanto, para o primeiro ramo da curva, os resultados obtidos correlacionam-se com boa precisão com os resultados experimentais e analíticos calculados pelos autores.



**Figura 6.35** – Comparação das deflexões para a viga E.

Na tabela 11 não só estão apresentados os valores das cargas máximas,  $P_u$ , obtidas pelo ensaio experimental, estudo analítico e pelo programa Vimis, como também os valores de carga correspondentes ao momento da abertura da primeira fissura no protótipo,  $P_{cr}$ , e ao momento correspondente ao primeiro escoamento de qualquer um dos componentes de aço da viga E,  $P_y$ . No modelo analítico, as tensões decorrentes das forças de protensão foram adicionadas às tensões devido às cargas aplicadas.

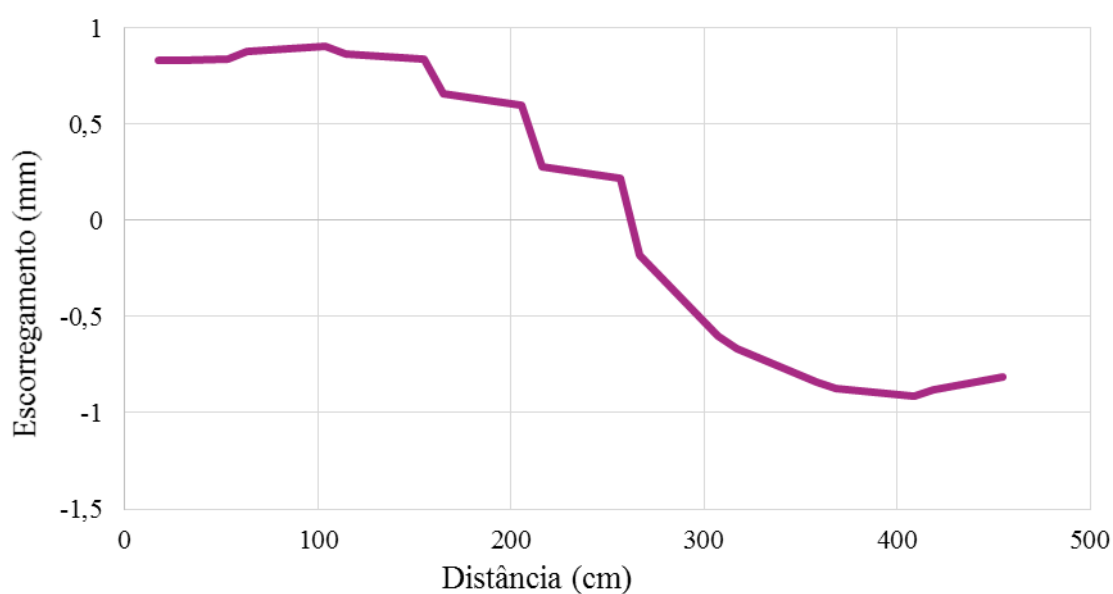
Tabela 11 – Cargas de escoamento e ruptura da viga mista E.

Experimental		Analítico		Vimis		
$P_u$ (kN)	$P_{cr}$ (kN)	$P_y$ (kN)	$P_u$ (kN)	$P_{cr}$ (kN)	$P_y$ (kN)	$P_u$ (kN)
700	590	700	955	490,14	665,2	700,2

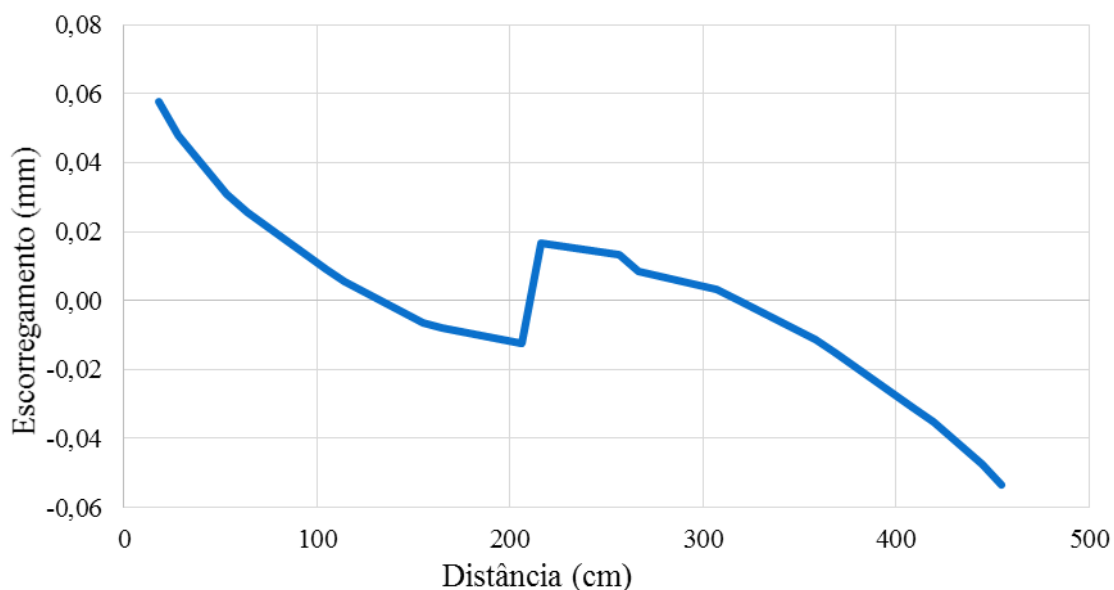


Ao comparar-se os resultados mostrados na tabela 11, tem-se a razão entre o resultado analítico e o obtido pelo Vimis de 1,364 e que o máximo carregamento obtido pelo programa para o protótipo E é o mesmo que o obtido experimentalmente. A carga de escoamento obtida pelo programa diz respeito ao escoamento da armadura do reforço utilizada na laje de concreto.

A fim de se analisar o comportamento dos conectores de cisalhamento, traçaram-se as curvas ilustradas nas figuras 6.36 e 6.37. Através destas figuras se pode avaliar a distribuição do deslizamento dos conectores de cisalhamento quando a viga encontra-se submetida ao máximo carregamento (figura 6.36) e considerando apenas a aplicação da força de protensão (figura 6.37).



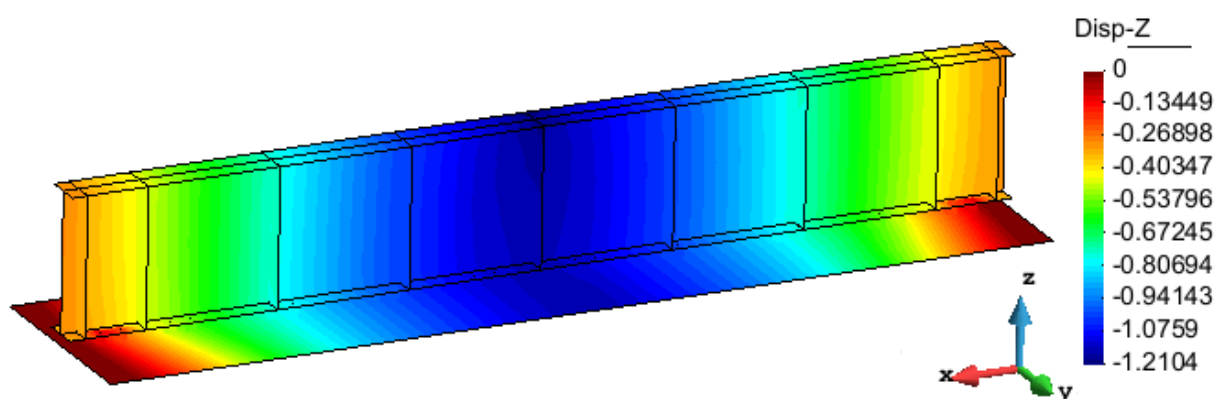
**Figura 6.36** – Distribuição do deslizamento dos conectores ao longo da viga E sob carga máxima.



**Figura 6.37** – Distribuição do deslizamento dos conectores ao longo da viga E apenas com a aplicação da força de protensão.

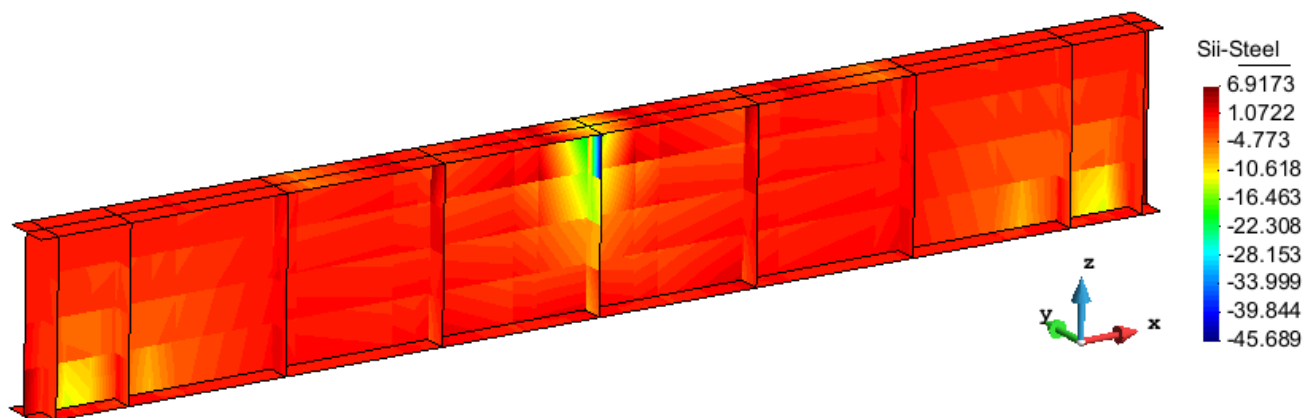
Percebe-se uma tendência à inversão da distribuição do deslizamento dos conectores nas duas situações ilustradas e que o ponto de inflexão do deslizamento fica próximo ao ponto de aplicação de carga, onde o escorregamento é nulo. Nota-se também que, quando a viga encontra-se submetida ao carregamento máximo (figura 6.36), próximo às suas extremidades, a curva do deslizamento se aproxima da horizontal e que também é nessas regiões que se atingem os valores máximos e mínimos.

A figura 6.38 ilustra a deformada da viga mista quando esta se encontra sob o máximo carregamento. Vê-se que a maior deflexão é na seção intermediária da viga, a qual recebe todo o carregamento aplicado de forma concentrada, e possui magnitude de 1,21 cm.



**Figura 6.38** – Deformada da viga E sob carga última.

Na figura 6.39, tem-se a ilustração da distribuição de tensões no perfil I de aço quando o carregamento da viga atinge o valor máximo de 700,2 kN. Pode-se verificar que a parte superior da seção intermediária encontra-se altamente comprimida, justificando a ocorrência da flambagem naquele local.



**Figura 6.39** – Distribuição de tensões no aço do perfil I da viga E.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente trabalho era a implementação de uma formulação para a consideração da protensão interna na laje de concreto de vigas mistas de aço e concreto no código computacional em linguagem Fortran 90 desenvolvido inicialmente por Tamayo (2011) no CEMACOM/UFRGS, o qual recebeu o nome de programa Vimis. O procedimento inserido foi inicialmente proposto pelo pesquisador Póvoas (1991) para cabos curvos de protensão a serem incluídos em modelos baseados em elementos finitos para a análise não linear de estruturas de concreto protendido. A discretização destes cabos em elementos finitos unidimensionais é feita de forma automática de acordo com a malha escolhida para a estrutura.

Nesta dissertação, o pré-processamento através do *software* GiD, foi modificado para que os dados referentes à armadura de protensão pudessem ler lidos de forma separada pelo Vimis. Assim sendo, desenvolveu-se um *Problem Type*, denominado “PRES”, destinado exclusivamente aos cabos de protensão, fornecendo ao código computacional informações como: quantidade de cabos, número de elementos por cabo, conectividades, coordenadas dos nós, material, se contribui na rigidez global da estrutura ou não, etc. Feito isso, partiu-se para a modificação do código com a criação e adaptação de sub-rotinas para que o efeito da protensão interna na laje da estrutura pudesse ser contabilizado.

Além das sub-rotinas referentes à protensão, implementou-se um novo *solver* ao programa para que o tempo de análise fosse reduzido. O *solver* PARDISO foi inserido através de três sub-rotinas ao programa e o seu uso otimizou o uso de memória para o armazenamento das matrizes de rigidez dos elementos e da estrutura global, bem como reduziu fortemente o tempo das análises.

A fim de validar a formulação utilizada para a protensão interna adicionada ao programa Vimis através das sub-rotinas, foram feitos testes numéricos simples em oito vigas de concreto protendido. Uma vez validadas as sub-rotinas, testou-se a eficiência do modelo da armadura quanto à questão da aderência ou não da mesma em relação ao concreto circundante da estrutura. Para isso, foram empregadas três vigas protendidas, testadas experimentalmente por Tao e Du (1985), uma com aderência e duas sem. Foram observadas, principalmente, as deflexões das vigas nos seus vãos médios e as variações das tensões nos cabos de protensão ao longo do desenvolvimento dos carregamentos e, também, das flechas.

Uma análise de longa duração foi efetuada com base no estudo de Dezi, Leoni e Tarantino (1996) para verificar como os fenômenos reológicos do concreto, fluência e retração, influenciavam na resposta de uma viga mista e como variava a força de protensão com o passar do tempo. Mediante isso, conseguiu-se validar o modelo para a relaxação do aço de protensão.

As últimas análises numéricas foram de curta duração em vigas mistas com protensão aderente e não aderente na laje. Os estudos de El-Zohairy et al. (2017) e de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1992) foram utilizados para comprovar toda a eficiência do modelo numérico proposto. Examinou-se a resposta de estruturas com diferentes tipos de protensão sujeitas à flexão negativa e pode-se constatar que a introdução da protensão, quando executado dentro da laje de concreto, é mais eficiente e acarreta numa maior capacidade à flexão que quando esta aplicação é feita externamente na viga de aço.

Conforme os resultados apresentados nesta dissertação, verifica-se a possibilidade de se simular computacionalmente o funcionamento real de estruturas com protensão aderente e não aderente, sejam elas vigas de concreto protendido ou vigas mistas protendidas na laje. Dessa forma, pode-se concluir que o programa Vimis, desenvolvido no CEMACOM/UFRGS, é uma ferramenta que apresenta eficiência e segurança na análise do comportamento destes tipos de estruturas.

Como sugestão para a continuação desta linha de pesquisa, sugere-se a análise de vigas mistas empregando todos os recursos disponíveis no programa Vimis, ou seja, análises de curta duração e ao longo do tempo, utilizando diferentes modelos de fluência e retração do concreto, de vigas mistas com protensão interna na laje de concreto e com protensão externa na viga de aço.

## REFERÊNCIAS

- AL-MALI, H. N. **Prestressing concrete**. Bagdade, Iraque, 2017. Apostila da disciplina de Reinforced Concrete Design II da Al-Mustansiriyah University.
- ALVA, G. M. S. **Sobre o projeto de edifícios em estrutura mista aço-concreto**. 2000. 277 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8.800**: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- AYYUB, B. M.; SOHN, Y. G.; SAADATMANESH, H.; Prestressed composite girders. I: experimental study for negative moment. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 10, p. 2743-2762, 1992.
- \_\_\_\_\_. Prestressed composite girders. II: analytical study for negative moment. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 10, p. 2763-2782, 1992.
- BARBIERI, R. A. **Modelo numérico para a análise à flexão de elementos com protensão aderente e não aderente**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- BARNARD, P. R. **On the collapse of composite beams**. 1964. Thesis (Doctor of Philosophy) – Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, 1964.
- BARNARD, P. R.; JOHNSON, R. P. Ultimate strength of composite beams, **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 32, n. 2, p. 161-179, 1965.
- BASU, P. K.; SHARIF, A. M.; AHMED, N. U. Partially prestressed continuous composite beams. I. **Journal of Structural Engineering**, v. 113, n. 9, p. 1909-1925, 1987.
- \_\_\_\_\_. Partially prestressed continuous composite beams. II. **Journal of Structural Engineering**, v. 113, n. 9, p. 1926-1938, 1987.
- BATOZ, J. L.; TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. **Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, n. 2, p. 1655-1677, 1982.
- BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification theory for concrete creep. I: formulation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 8, p. 1691-1703, 1989.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS 5400-5**: steel, concrete and composite bridges. Part 5: code of practice for the design of composite bridges. BS 5400-5. London, 2005.
- CATABRIGA, L. **Armazenamento de matrizes esparsas**. Vitória, Espírito Santo, 2016. Apostila da disciplina de Algoritmos Numéricos da Universidade Federal do Espírito Santo.

CHEN, S. Experimental study of prestressed steel-concrete composite beams with external tendons for negative moments. **Journal of Construction Steel Research**, v. 61, n. 12, p. 1613-1630, 2005.

DALL'ASTA, A.; DEZI, L. Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams: analytical model. **Journal of Structural Engineering**, v. 124, n. 5, p. 588-597, 1998.

DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection. **Journal of Structural Engineering**, v. 131, n. 5, p. 706-714, 2005.

DIAS, M. M. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: efeitos de longa duração**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

EL-MEZAINI, N.; CITIPITIOGLU, E. Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 117, n. 10, p. 2851-2864, 1991.

EL-ZOHAIRY, A.; SALIM, H.; SHAABAN, H.; MUSTAFA, S.; EL-SHIHY, A. Finite-element modeling of externally posttensioned composite beams. **Journal of Bridge Engineering**, v. 20, n. 12, p. 1-11, 2015.

\_\_\_\_\_. Finite element analysis and parametric study of continuous steel-concrete composite beams stiffened with post-tensioned tendons. **Advances in Structural Engineering**, v. 21, n. 6, p. 933-945, 2017.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EUROCODE 2**: design of concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings. EN 1992-1-1. Brussels, 2004.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EUROCODE 4**: design of composite steel and concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings. EN 1994-1-1. Brussels, 1994.

FARIAS, M. M.; NAYLOR, D. J. Safety analysis using finite elements. **Computers and Geotechnics**, v. 22, n. 2, p. 165-181, 1998.

FIGUEIRAS, J. A.; PÓVOAS, R. H. C. F. Modeling of prestress in non-linear analysis of concrete structures. **Computers and Structures**, v. 53, n. 1, p. 173-187, 1994.

GREUNEN, J. van.; SCORDELIS, A. C. Nonlinear analysis of prestressed concrete slab. **Journal of Structural Engineering**, Reston, USA, v. 109, n. 7, p. 1742-1760, 1983.

HINTON, E.; OWEN, D. R. J. **Finite element in plasticity-theory and practice**. Pineridge Press, Swansea, UK, 1980.

HOFSTETTER, G.; MANG, H. A. Nonlinear finite element analysis of prestressed concrete shells. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS, 3., 1986, Swansea, **Proceedings...** Swansea: Pineridge Press, 1986, p. 344-362.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L.; WILSON, E. L. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. **Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, n. 3, p. 445-457, 1990.

KANG, Y. J. **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames**. 1977. Thesis (Ph. D.) – Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, USA, 1977.

LAZZARI, B. M. **Análise por elementos finitos de peças de concreto armado e protendido sob estados planos de tensão**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: princípios básicos da construção de pontes de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

MALITE, M. **Sobre o cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios**. 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

MARÍ, A.R. **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames**. Report, n. UCB/SESM - 84/12. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, 1984.

MORENO, J. C. A. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e protensão interna**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

NAAMAN, A. E. An approximate nonlinear design procedure for partially prestressed concrete beams. **Computers and Structures**, v. 17, n. 2, p. 287-299, 1983.

NELSEN, A. C. H. **Comportamento estrutural de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa**. 2013. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

NIE, J.; TAO, M.; CAI, C. S.; LI, S. Deformation analysis of prestressed continuous steel-concrete composite beams. **Journal of Structural Engineering**, Reston, USA, v. 135, n. 11, p. 1377-1389, 2009.

OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A. **Elementary behavior of composite steel and concrete structural members**. Woburn: Butterworth-Heinemann, 1999.

**PARDISO**: Parallel Sparse Direct and Multi-Recursive Iterative Linear Solvers. Version 6.0.0. [S.l.]: Schenk et al., 2018. Disponível em: <<https://www.pardiso-project.org>>. Acesso em: 10 outubro 2018.

PÓVOAS, R. H. C. de F. **Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos**. 1991. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 1991.



QUINAZ, C. M. da S. **Estruturas de aço e mistas pré-esforçadas**. 1993. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 1993.

ROCA, P.; MARÍ, A. R. Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures. **Computers & Structures**, v. 46, n. 5, p. 905-916, 1993.

SAADATMANESH, H.; ALBRECHT, P.; AYYUB, B. M. Experimental study of prestressed composite beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 9, p. 2348-2363, 1989.

\_\_\_\_\_. Analytical study of prestressed composite beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 9, p. 2364-2381, 1989.

SARNES, F. W.; DANIELS, J. H. **Prestressing the negative moment region of composite beams**. Fritz Engineering Laboratory Reports, Lehigh University, Pennsylvania, USA, n. 359.7, 1971.

SCHENK, O.; GÄRTNER, K.; FICHTNER, W.; STRICKER, A. PARDISO: a high-performance serial and parallel sparse linear solver in semiconductor device simulation. **Future Generation Computer Systems**, v. 18, n. 1, p. 69-78, 2001.

SIESS, C. P.; VIEST, I. M. **Studies of slab and beam highway bridges, part V: test on continuous right I-beam bridges**. Engineering Experimental Station, University of Illinois, Urbana, USA, n. S-12, 1952.

STRAS, J. C. **An experimental and analytical study of prestressed composite beams**. 1964. Thesis (Master of Science) – Civil and Environmental Engineering Department, Rice University, Texas, 1964.

SZILARD, R. Design of prestressed composite steel structures. **Journal of Structural Division**, v. 85, n. 9, p. 97-124, 1959.

TAMAYO, J. L. P. **Análise numérica de vigas mistas pelo método dos elementos finitos**. 2011. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

TAMAYO, J. L. P.; AWRUCH, A. M.; CALDERÓN, W. R. Integración del paquete paralelizado *PARDISO* en un código de elementos finitos de interacción suelo-estructura. In: CONGRESO COLOMBIANO DE METODOS NUMERICOS: SIMULACIÓN EM CIENCIAS Y APLICACIONES INDUSTRIALES, 10., 2015, Cartagena de Indias, **Proceedings...** Cartagena de Indias: Universidad Tecnológica de Bolívar, 2015.

TAMAYO, J. L. P.; MORSCH, I. B.; AWRUCH, A. M. Análise de vigas mistas de aço e concreto usando o método dos elementos finitos. **Journal Mecánica Computacional**, Santa Fe, Argentina, v. XXX, n. 11, p. 913-932, 2011.

TAO, X.; DU, G. Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams. **PCI Journal**, v. 30, n. 6, p. 72-91, 1985.

- TROITSKY, M. S.; ZIELINSKI, Z. A.; NOURAEYAN, A. Pre-tensioned and post-tensioned composite girders. **Journal of Structural Engineering**, Reston, USA, v. 115, n. 12, p. 3142-3153, 1989.
- TONG, W.; SAADATMANESH, H. Parametric study of continuous prestressed composite girders. **Journal of Structural Engineering**, Reston, USA, v. 118, n. 1, p. 186-206, 1992.
- VASDRAVELLIS, G.; UY, B.; TAN, E. L.; KIRKLAND, B. Behavior and design of composite beams subjected to negative bending and compression. **Journal of Constructional Steel Research**, Amsterdam, v. 79, p. 34-47, 2012.
- WAYAR, A. M. M. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: protensão externa**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- YAM, L.; CHAPMAN, J. The inelastic behaviour of simply supported composite beams of steel and concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 41, p. 651-683, 1968.
- YUEN, W. N. **Design of continuous prestressed composite beams**. 2004. Dissertation (Master of Civil Engineering) – Department of Civil Engineering, National University of Singapore, Singapore, 2004.
- ZYL, S. F. van.; SCORDELIS, A. C. Analysis of Curved, Prestressed, Segmental Bridges. **Journal of Structural Division**, v. 105, n. 11, p. 2399-2417, 1979.

**APÊNDICE A – Matriz de deformação do elemento unidimensional  
parabólico embutido no elemento de casca degenerado**

**APÊNDICE A – Matriz de deformação do elemento unidimensional parabólico embutido no elemento de casca degenerado**

$$\epsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = B_{p,L}\{d\} = [\dots \quad B_{1i} \quad B_{2i} \quad B_{3i} \quad B_{4i} \quad B_{5i} \quad \dots] \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (\text{A1})$$

Com:

$$B_{1i} = \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (\text{A2})$$

$$B_{2i} = \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (\text{A3})$$

$$B_{3i} = \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} B_{4i} = & \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^x \\ & + \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{1,i}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^y \\ & + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{1,i}^y \quad (\text{A5}) \\ & + \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^z \\ & + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{1,i}^z + \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{1,i}^z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{5i} = & - \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^x - \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^x \\
& - \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{2,i}^x - \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^y \\
& - \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^y - \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{2,i}^y \quad (A6) \\
& - \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^z - \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} v_{2,i}^z \\
& - \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} v_{2,i}^z
\end{aligned}$$

**ANEXO A – Exemplo de arquivo de entrada de dados para a armadura de  
protensão no programa Vimis**

## ANEXO A – Exemplo de arquivo de entrada de dados para armadura de protensão no programa Vimis

cable

Prestressed information

```
npoip  ncabl  nelpr  ngaup  nincp
  90      2    44     3      1
```

Elements\_Cable\_1

```
nucab  ntotelp  alfa
  1     22      1
```

numelp	matnp	nbond	Conectividade		
1	9	1	1	2	3
2	9	1	3	4	5
3	9	1	5	6	7
4	9	1	7	8	9
5	9	1	9	10	11
6	9	1	11	12	13
7	9	1	13	14	15
8	9	1	15	16	17
9	9	1	17	18	19
10	9	1	19	20	21
11	9	1	21	22	23
12	9	1	23	24	25
13	9	1	25	26	27
14	9	1	27	28	29
15	9	1	29	30	31
16	9	1	31	32	33
17	9	1	33	34	35
18	9	1	35	36	37
19	9	1	37	38	39
20	9	1	39	40	41
21	9	1	41	42	43
22	9	1	43	44	45

Elements\_Cable\_2

```
nucab  ntotelp  alfa
  2     22      1
```

numelp	matnp	nbond	Conectividade		
1	9	1	46	47	48
2	9	1	48	49	50
3	9	1	50	51	52
4	9	1	52	53	54
5	9	1	54	55	56
6	9	1	56	57	58
7	9	1	58	59	60
8	9	1	60	61	62
9	9	1	62	63	64
10	9	1	64	65	66

11	9	1	66	67	68
12	9	1	68	69	70
13	9	1	70	71	72
14	9	1	72	73	74
15	9	1	74	75	76
16	9	1	76	77	78
17	9	1	78	79	80
18	9	1	80	81	82
19	9	1	82	83	84
20	9	1	84	85	86
21	9	1	86	87	88
22	9	1	88	89	90

## Nodes and coordinates

ipon	Coord_X	Coord_Y	Coord_Z
1	0.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
2	3.7500000000	48.0000000000	0.0000000000
3	7.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
4	20.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
5	32.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
6	45.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
7	57.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
8	70.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
9	82.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
10	95.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
11	107.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
12	120.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
13	132.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
14	145.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
15	157.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
16	170.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
17	182.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
18	195.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
19	207.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
20	220.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
21	232.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
22	245.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
23	257.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
24	270.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
25	282.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
26	295.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
27	307.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
28	320.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
29	332.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
30	345.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
31	357.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
32	370.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
33	382.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
34	395.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
35	407.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
36	420.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
37	432.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
38	445.0000000000	48.0000000000	0.0000000000



39	457.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
40	470.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
41	482.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
42	495.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
43	507.5000000000	48.0000000000	0.0000000000
44	511.2500000000	48.0000000000	0.0000000000
45	515.0000000000	48.0000000000	0.0000000000
46	0.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
47	3.7500000000	52.0000000000	0.0000000000
48	7.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
49	20.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
50	32.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
51	45.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
52	57.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
53	70.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
54	82.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
55	95.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
56	107.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
57	120.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
58	132.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
59	145.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
60	157.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
61	170.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
62	182.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
63	195.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
64	207.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
65	220.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
66	232.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
67	245.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
68	257.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
69	270.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
70	282.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
71	295.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
72	307.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
73	320.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
74	332.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
75	345.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
76	357.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
77	370.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
78	382.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
79	395.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
80	407.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
81	420.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
82	432.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
83	445.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
84	457.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
85	470.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
86	482.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
87	495.0000000000	52.0000000000	0.0000000000
88	507.5000000000	52.0000000000	0.0000000000
89	511.2500000000	52.0000000000	0.0000000000
90	515.0000000000	52.0000000000	0.0000000000

**ANEXO B – Exemplos de solução de sistemas lineares simétricos utilizando  
o solver *PARDISO***

## ANEXO B – Exemplos de solução de sistemas lineares simétricos utilizando o solver *PARDISO*

O anexo B.2 fornece um exemplo, em linguagem Fortran, para a resolução de um sistema linear simétrico utilizando o solver *PARDISO*. Ele resolve o sistema de equações  $AX=B$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 7.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 & 7.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 8.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 8.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 & 0.0 & 0.0 & 9.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 & -1.0 & 5.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 \\ 7.0 & 0.0 & 0.0 & 9.0 & 5.0 & 0.0 & 11.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 & 0.0 & 5.0 \end{pmatrix} \quad \text{e } B = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \\ 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \end{pmatrix}$$

### B.1 – Exemplo de resultados para sistemas simétricos

Após a execução bem-sucedida do *PARDISO*, o resultado da solução  $X$  é dada abaixo.

```
[PARDISO]: License check was successful ...
[PARDISO]: Matrix type      : real symmetric
[PARDISO]: Matrix dimension : 8
[PARDISO]: Matrix non-zeros : 18
[PARDISO]: Abs. coeff. range : min 0.00e+00 max 1.10e+01
[PARDISO]: RHS no. 1: min 0.00e+00 max 7.00e+00

===== PARDISO: solving a symmetric indef. system =====

Summary PARDISO 6.0.0: ( reorder to reorder )
=====

Times:
=====

    Time fulladj: 0.000000 s
    Time reorder: 0.000000 s
    Time symbfct: 0.000000 s
    Time parlist: 0.000000 s
    Time malloc : 0.000000 s
    Time total  : 0.000000 s total - sum: 0.000000 s

Statistics:
=====
< Parallel Direct Factorization with #cores: >          1
<                                     and #nodes: >      1
```

```

< Numerical Factorization with Level-3 BLAS performance >

< Linear system Ax = b>
    #equations:                8
    #non-zeros in A:           18
    non-zeros in A (%):        28.125000
    #right-hand sides:         1

< Factors L and U >
    #columns for each panel:    80
    # of independent subgraphs: 0
  < preprocessing with state of the art partitioning metis>
    #supernodes:                5
    size of largest supernode:   4
    number of nonzeros in L     29
    number of nonzeros in U     1
    number of nonzeros in L+U   30
    number of perturbed pivots  0
    number of nodes in solve    8
    mflp for the numerical factorization: 0.000075

Reordering completed ...
Number of nonzeros in factors = 30
Number of factorization MFLOPS = 0

===== PARDISO: solving a symmetric indef. system =====

Summary PARDISO 6.0.0: ( factorize to factorize )
=====

Times:
=====

    Time A to LU: 0.000000 s
    Time numfct : 0.000000 s
    Time malloc : 0.000000 s
    Time total  : 0.000000 s total - sum: 0.000000 s

Statistics:
=====
  < Parallel Direct Factorization with #cores: >          1
  <                                     and #nodes: >      1
  < Numerical Factorization with Level-3 BLAS performance >

  < Linear system Ax = b>
    #equations:                8
    #non-zeros in A:           18
    non-zeros in A (%):        28.125000
    #right-hand sides:         1

  < Factors L and U >
    #columns for each panel:    80
    # of independent subgraphs: 0
  < preprocessing with state of the art partitioning metis>
    #supernodes:                5
    size of largest supernode:   4
    number of nonzeros in L     29
    number of nonzeros in U     1
    number of nonzeros in L+U   30
    number of perturbed pivots  0
    number of nodes in solve    8
    mflp for the numerical factorization: 0.000075

```

Factorization completed ...

===== PARDISO: solving a symmetric indef. system =====

Summary PARDISO 6.0.0: ( solve to solve )

=====

Times:

=====

Time solve : 0.000000 s  
Time total : 0.000000 s total - sum: 0.000000 s

Statistics:

=====

< Parallel Direct Factorization with #cores: >	1
< and #nodes: >	1
< Numerical Factorization with Level-3 BLAS performance >	
< Linear system Ax = b>	
#equations:	8
#non-zeros in A:	18
non-zeros in A (%):	28.125000
#right-hand sides:	1
< Factors L and U >	
#columns for each panel:	80
# of independent subgraphs:	0
< preprocessing with state of the art partitioning metis>	
#supernodes: 5	
size of largest supernode:	4
number of nonzeros in L	29
number of nonzeros in U	1
number of nonzeros in L+U	30
number of perturbed pivots	0
number of nodes in solve	8
mflop for the numerical factorization:	0.000075

Solve completed ...

The solution of the system is:

x(1) = -0.3168031420208231  
x(2) = -0.4955685649709140  
x(3) = -0.2129608358961057  
x(4) = 5.6704583348771778E-002  
x(5) = 0.8607062136425950  
x(6) = 0.3140983363592574  
x(7) = 0.4003408796176218  
x(8) = 1.4988624995368485

## B.2 – Exemplo da rotina em linguagem Fortran para resolução de sistema linear simétrico

```

!-----
!   Example program to show the use of the "PARDISO" routine
!   for symmetric linear systems
!-----
!   This program can be downloaded from the following site:
!   http://www.pardiso-project.org
!
! (C) Olaf Schenk, Institute of Computational Science
!   Universita della Svizzera italiana, Lugano, Switzerland.
!   Email: olaf.schenk@usi.ch
!-----
PROGRAM pardiso_sym
IMPLICIT NONE

!..   Internal solver memory pointer
INTEGER*8 pt(64)

!..   All other variables
INTEGER maxfct, mnum, mtype, phase, n, nrhs, error, msglvl
INTEGER iparm(64)
INTEGER ia(9)
INTEGER ja(18)
REAL*8 dparm(64)
REAL*8 a(18)
REAL*8 b(8)
REAL*8 x(8)
REAL*8 y(8)

INTEGER i, j, idum, solver
REAL*8 waltime1, waltime2, ddum, normb, normr

!.. Fill all arrays containing matrix data.

DATA n /8/, nrhs /1/, maxfct /1/, mnum /1/

DATA ia /1,5,8,10,12,15,17,18,19/

DATA ja
1      /1,      3,      5,      6,      7,
2          2,      3,      5,
3              3,      8,
4                  4,      7,
5                      5,      6,      7,
6                          6,      8,
7                              7,
8                                  8/

DATA a
1      /7.d0,      1.d0,      2.d0, 7.d0,
2          -4.d0, 8.d0,      2.d0,
3              1.d0,      5.d0,
4                  7.d0,      9.d0,
5                      5.d0, 1.d0, 5.d0,
6                          0.d0, 5.d0,
7                              11.d0,
8                                  5.d0/

```

```

! .. set right hand side
do i = 1, n
  b(i) = 1.d0
end do

! .. Setup Pardiso control parameters und initialize the solvers
! internal adress pointers. This is only necessary for the FIRST
! call of the PARDISO solver.

mtype      = -2 ! unsymmetric matrix symmetric, indefinite
solver     = 10 ! use sparse direct method

! .. PARDISO license check and initialize solver
call pardisoinit(pt, mtype, solver, iparm, dparam, error)

! .. Numbers of Processors ( value of OMP_NUM_THREADS )
iparm(3) = 1

IF (error .NE. 0) THEN
  IF (error.EQ.-10 ) WRITE(*,*) 'No license file found'
  IF (error.EQ.-11 ) WRITE(*,*) 'License is expired'
  IF (error.EQ.-12 ) WRITE(*,*) 'Wrong username or hostname'
  STOP
ELSE
  WRITE(*,*) '[PARDISO]: License check was successful ... '
END IF

! .. pardiso_chk_matrix(...)
! Checks the consistency of the given matrix.
! Use this functionality only for debugging purposes

CALL pardiso_chkmatrix (mtype, n, a, ia, ja, error);
IF (error .NE. 0) THEN
  WRITE(*,*) 'The following ERROR was detected: ', error
  STOP
ENDIF

! .. pardiso_chkvec(...)
! Checks the given vectors for infinite and NaN values
! Input parameters (see PARDISO user manual for a description):
! Use this functionality only for debugging purposes

CALL pardiso_chkvec (n, nrhs, b, error);
IF (error .NE. 0) THEN
  WRITE(*,*) 'The following ERROR was detected: ', error
  STOP
ENDIF

! .. pardiso_printstats(...)
! prints information on the matrix to STDOUT.
! Use this functionality only for debugging purposes

CALL pardiso_printstats (mtype, n, a, ia, ja, nrhs, b, error);
IF (error .NE. 0) THEN
  WRITE(*,*) 'The following ERROR was detected: ', error
  STOP
ENDIF

!.. Reordering and Symbolic Factorization, This step also allocates
! all memory that is necessary for the factorization

```

```

phase      = 11      ! only reordering and symbolic factorization
msglvl     = 1       ! with statistical information
iparm(33)  = 1       ! compute determinant

CALL pardiso (pt, maxfct, mnum, mtype, phase, n, a, ia, ja,
1           idum, nrhs, iparm, msglvl, ddum, ddum, error, dparm)

WRITE(*,*) 'Reordering completed ... '

IF (error .NE. 0) THEN
  WRITE(*,*) 'The following ERROR was detected: ', error
  STOP
END IF

WRITE(*,*) 'Number of nonzeros in factors = ',iparm(18)
WRITE(*,*) 'Number of factorization MFLOPS = ',iparm(19)

!.. Factorization.

phase      = 22      ! only factorization
CALL pardiso (pt, maxfct, mnum, mtype, phase, n, a, ia, ja,
1           idum, nrhs, iparm, msglvl, ddum, ddum, error, dparm)

IF (iparm(33).EQ.1) THEN
  write(*,*) 'Log of determinant is ', dparm(33)
ENDIF

WRITE(*,*) 'Factorization completed ... '
IF (error .NE. 0) THEN
  WRITE(*,*) 'The following ERROR was detected: ', error
  STOP
ENDIF

!.. Back substitution and iterative refinement

iparm(8)   = 1       ! max numbers of iterative refinement steps
phase      = 33      ! only solve

CALL pardiso (pt, maxfct, mnum, mtype, phase, n, a, ia, ja,
1           idum, nrhs, iparm, msglvl, b, x, error, dparm)

WRITE(*,*) 'Solve completed ... '

WRITE(*,*) 'The solution of the system is '
DO i = 1, n
  WRITE(*,*) ' x(' ,i,') = ', x(i)
END DO

!.. Residual test
normb = 0
normr = 0
CALL pardiso_residual (mtype, n, a, ia, ja, b, x, y, normb, normr)
WRITE(*,*) 'The norm of the residual is ',normr/normb

!C.. Selected Inversion

phase = -22
CALL pardiso (pt, maxfct, mnum, mtype, phase, n, a, ia, ja,
1           idum, nrhs, iparm, msglvl, b, x, error, dparm)

!.. Print diagonal elements of the inverse of A = (a, ia, ja) */

```



```
do i = 1, n
  j = ia(i)
  write(*,*) 'Diagonal',i,'-element of A^{-1} = ', a(j)
end do

!C.. Termination and release of memory
phase      = -1          ! release internal memory

CALL pardiso (pt, maxfct, mnum, mtype, phase, n, ddum, idum, idum,
1           idum, nrhs, iparm, msglvl, ddum, ddum, error, dparm)
END
```