

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENG. DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

VINÍCIUS RODRIGUES

**MODELO CINEMÁTICO DE UM
MANIPULADOR DE 6 GDL**

Porto Alegre
2019

VINÍCIUS RODRIGUES

**MODELO CINEMÁTICO DE UM
MANIPULADOR DE 6 GDL**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-CCA)
apresentado à COMGRAD-CCA da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul como parte dos re-
quisitos para a obtenção do título de *Bacharel em
Eng. de Controle e Automação* .

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rafael A.C. Laranja

Porto Alegre
2019

VINÍCIUS RODRIGUES

**MODELO CINEMÁTICO DE UM
MANIPULADOR DE 6 GDL**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina de TCC do curso *Eng. de Controle e Automação* e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. Rafael A.C. Laranja, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael A.C. Laranja, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Heraldo José de Amorim, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Flávio José Lorini, UFRGS
Doutor pelo Politecnico di Milano – Milão, Itália

Prof. Dr. Marcelo Göetz
Coordenador de curso
Eng. de Controle e Automação

Porto Alegre, julho de 2019.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais Leomar e Darlene por todo o suporte e apoio todos os dias durante estes 6,5 anos. Também agradeço meus irmãos Igor e Mateus pelo incentivo e apoio. Agradeço a Brenda por me dar força e estar ao meu lado desde antes da faculdade. Agradeço de forma especial ao meu orientador, Professor Laranja, por sua ajuda essencial, suporte, contribuições e principalmente pela sua paciência ao me atender quase todos os dias durante três meses. Por fim, gostaria de deixar meu agradecimento aos poucos professores, dentre os que compõe o curso de Engenharia de Controle e Automação, que além de ótimos professores, também são boas pessoas que realmente se importam com os alunos e os tratam com igualdade.

RESUMO

Neste trabalho foi elaborado o modelo cinemático do robô *Stäubli* TX90 através da aplicação da análise cinemática direta com a utilização dos conceitos de Denavit-Hartenberg e aplicação da análise cinemática inversa a partir do método do desacoplamento cinemático. Este modelo foi comparado com simulações, através do programa *RoboDK*, e testes práticos com o robô físico, isto é, foram aplicadas 10 posições diferentes no modelo, na simulação e no robô e comparou-se a posição final do efetuador resultante. Com a realização destes testes comprovou-se que o modelo teórico está adequado, pois os resultados obtidos do modelo e da simulação foram idênticos, e com os testes práticos comprovou-se que o modelo desenvolvido representa o robô escolhido pois a diferença média encontrada entre os resultados foi de 2,8 mm.

Palavras-chave: Cinemática Direta, Cinemática Inversa, Robótica.

ABSTRACT

In this paper the kinematic model of the robot *Stäubli* TX90 was developed, using the forward kinematic analysis with the Denavit-Hartenberg concepts and applying the inverse kinematic analysis with the kinematic decoupling method. This model was compared with simulations, realized with the program *RoboDK*, and practical tests with the physical robot, thus, 10 different positions were applied to the model, simulation and robot and the final position of the resulting effector was compared. With these tests it was verified that the theoretical model is adequate, since the results obtained from the model and the simulation were identical, and with the practical tests it was verified that the developed model represents the chosen robot because the average difference found between the results were 2.8 mm.

Keywords: Forward Kinematics, Inverse Kinematics, Robotics.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE ABREVIATURAS	9
LISTA DE SÍMBOLOS	10
1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Objetivos do Trabalho	11
1.1.1 Objetivo Geral	11
1.1.2 Objetivos Específicos	11
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 Manipuladores Robóticos	13
2.2 Análise Cinemática de Manipulador Serial	13
2.2.1 Cinemática Direta	14
2.2.2 Cinemática Inversa	16
3 ESTUDO DE CASO	20
3.1 Manipulador	20
3.2 Cinemática Direta de Posição	23
3.3 Cinemática Inversa de Posição	25
3.3.1 Cinemática Inversa de Posição do Pulso	25
3.3.2 Cinemática Inversa de Orientação	26
4 TESTES E RESULTADOS	28
4.1 Testes com o Robô Físico	28
4.2 Testes Com Software Simulador	29
4.3 Resultados	31
4.3.1 Resultados Primeira Análise Comparativa	31
4.3.2 Resultados da Segunda Análise Comparativa	33
4.4 Discussões	35
5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	37
BIBLIOGRAFIA	38
APÊNDICE A CÁLCULOS MATHCAD	39
A.1 Cinemática Direta e Inversa de Posição	39

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Representação dos parâmetros de DH	14
Figura 2:	Desacoplamento Cinemático	16
Figura 3:	Cinemática Inversa de Posição	17
Figura 4:	Plano (x_0, y_0)	18
Figura 5:	Plano (x_0, z_0)	18
Figura 6:	TX90 Físico	20
Figura 7:	Graus de Liberdade TX90	21
Figura 8:	Dimensões TX90	22
Figura 9:	Modelo Esquemático (medidas em mm)	23
Figura 10:	Modelo Esquemático	26
Figura 11:	Pose Inicial TX90 Físico	29
Figura 12:	Pose Inicial TX90 de acordo com <i>RoboDK</i>	30
Figura 13:	TX90 no Programa <i>RoboDK</i> com Origem Modificada	30
Figura 14:	Diagrama dos possíveis conjuntos de ângulos	33
Figura 15:	Diagrama dos possíveis conjuntos de ângulos	34
Figura 16:	Conjunto de ângulos selecionado	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Parâmetros de Denavit-Hartenberg	14
Tabela 2:	Trasnformações Básicas de Denavit-Hartenberg	15
Tabela 3:	Tabela DH	23
Tabela 4:	Dados de entrada	31
Tabela 5:	Comparativo de posição em relação ao eixo X	32
Tabela 6:	Comparativo de posição em relação ao eixo Y	32
Tabela 7:	Comparativo de posição em relação ao eixo Z	32
Tabela 8:	Comparativo Cinemática Direta X Inversa	35

LISTA DE ABREVIATURAS

GDL	Graus de Liberdade
DH	Denavit-Hartenberg
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
LAR	Laboratório de Automação e Robótica

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo de torção do elo [rad]
θ	Ângulo de junta [rad]
d	Offset de elo [mm]
a	Comprimento de elo [mm]
$o(q)$	Posição final do atuador [mm]
H	Matriz de transformação
$R(q)$	Matriz de orientação

1 INTRODUÇÃO

Desde a Revolução Industrial, a humanidade avança no desenvolvimento de máquinas capazes de auxiliar e substituir pessoas na realização de trabalhos manuais. A utilização de robôs em processos de manufatura garante diversas vantagens como aumento da produtividade, redução dos custos a longo prazo, melhoria da qualidade dos produtos, entre outras, além de substituir o operador em tarefas de riscos e onerosas. Por isso, atualmente, cada vez mais os robôs estão ganhando espaço na indústria, principalmente em indústrias de manufatura. Em que muitos dos processos em uma linha de produção são repetitivos e exigem um controle maior do tempo de execução (CRAIG, 2004).

Pode-se dizer que este tipo de robô industrial é caracterizado como uma máquina manipuladora, com vários graus de liberdade, controlada automaticamente, reprogramável, multifuncional e que pode ter a base fixa ou móvel, para utilização em aplicações de automação industrial. Eles podem ser utilizados para desempenhar tarefas como montar uma peça, posicionar, soldar, pintar, entre diversas outras tarefas. Com o crescimento do uso destes robôs na indústria, é necessário que mais pessoas estudem robótica, uma parte da ciência que estuda a construção mecânica, projeto, controle, instrumentação, aplicação e manutenção de robôs (MORECKI; KNAPCZYK, 1999). Porém, as empresas que desenvolvem estes robôs industriais não divulgam os modelos cinemáticos de seus produtos, o que dificulta o uso desses manipuladores para fins acadêmicos.

Para auxiliar nos estudos em robótica na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), existe o Laboratório de Automação e Robótica (LAR) que disponibiliza robôs industriais que são utilizados como demonstração prática destes manipuladores. Um dos robôs presentes no LAR é o *Stäubli TX90* que é um manipulador do tipo articulado, geralmente utilizado pelas indústrias.

Levando em consideração esses fatores, este trabalho irá desenvolver o modelo cinemático do robô *Stäubli TX90*, com a finalidade de auxiliar a visualização do modelo matemático com a realidade, isto é, facilitar a visualização da teoria da análise cinemática de posição com o manipulador físico correspondente.

1.1 Objetivos do Trabalho

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um modelo cinemático do robô *Stäubli TX90* para facilitar o seu uso para fins acadêmicos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar o robô TX90 de acordo com os parâmetros de Denavit-Hartenberg;

- Desenvolver a cinemática direta deste robô;
- Desenvolver a cinemática inversa deste robô articulado a partir da abordagem de separação do pulso e do braço do robô e utilizar o método geométrico para resolução da cinemática inversa de posição do pulso;
- Verificar se o modelo cinemático a ser desenvolvido responde da mesma forma que o robô TX90.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são descritos os conceitos utilizados para o desenvolvimento do trabalho, como o embasamento teórico para realizar a análise cinemática e definições sobre o que é um manipulador robótico.

2.1 Manipuladores Robóticos

O *Robot Industries Association* (RIA) define robô como um manipulador multifuncional reprogramável capaz de movimentar materiais, peças ou ferramentas com o uso de movimentos variados programados. A utilização de robôs em trabalhos pesados e repetitivos aumenta a produtividade e padroniza a qualidade do trabalho. Por esse motivo, robôs estão sendo cada vez mais utilizados na indústria (PIOTROWSKI; BARYLSKI, 2004).

Um robô manipulador é composto por uma sequência de elos rígidos conectados através de juntas rotativas ou prismáticas. Juntas rotativas tem como movimento a rotação em torno de seu eixo e juntas prismáticas tem como movimento o deslocamento linear ao longo de seu eixo (AL-MASHHADANY, 2010). A estrutura popular de um robô manipulador é a serial, ou seja, uma estrutura em que existe uma única sequência de elos e juntas conectando as extremidades do robô. Nesta forma, cada junta, independente de seu tipo, provê ao robô um grau de liberdade (GDL) (SICILIANO et al., 2009).

Com relação ao acionamento de robôs, tipicamente pode-se usar como fonte energética energia elétrica, pneumática ou hidráulica (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998).

Também é importante destacar que, o espaço de trabalho de um manipulador corresponde ao volume total que o efetuador, localizado na extremidade deste, consegue alcançar ao executar todos os movimentos possíveis (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998). O formato e o volume do espaço de trabalho dependem dos limites mecânicos das juntas e da estrutura do manipulador (SICILIANO et al., 2009).

2.2 Análise Cinemática de Manipulador Serial

A análise cinemática de um manipulador serial tem como objetivo descrever o movimento de um manipulador em relação a um sistema de coordenadas fixo, desconsiderando as forças e torques necessários (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998). O estudo da cinemática refere-se a todas as propriedades geométricas do movimento (CRAIG, 2004).

A análise do movimento pode ser dividida em cinemática direta e inversa. Na cinemática direta tem-se como objetivo encontrar a posição e a orientação do efetuador

a partir dos ângulos/posições das juntas. Já na cinemática inversa, por sua vez, tem como objetivo definir os ângulos/posições das juntas necessários para atingir determinada posição e orientação do efetuador (HAYAT, 2015).

2.2.1 Cinemática Direta

Para realizar a análise da cinemática direta é utilizada uma convenção que permite a resolução da análise através de um procedimento sistemático. A convenção usada para selecionar o sistema de coordenadas em aplicações robóticas é a convenção de Denavit-Hartenberg (DH), pois esta permite caracterizar as transformações homogêneas em função de quatro parâmetros de junta enquanto que outras convenções utilizam seis parâmetros de coordenadas. Os parâmetros utilizados pela convenção de DH para estão descritos na Tabela 1 a seguir (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998).

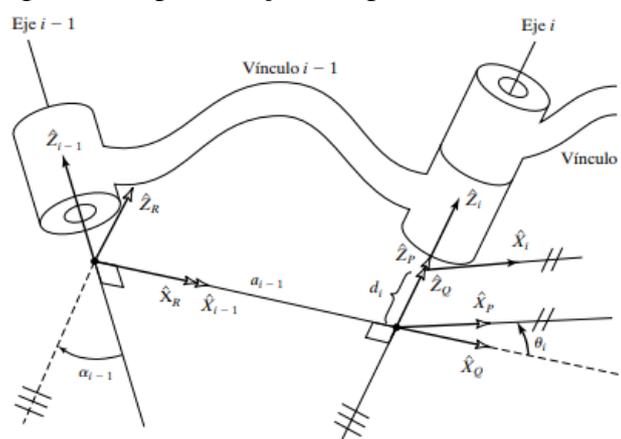
Tabela 1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Símbolo	Significado
a	Comprimento de elo
α	Ângulo de torção do elo
d	Offset de elo
θ	Ângulo de junta

Fonte: (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998)

Cada um desses parâmetros pode ser associado a um conjunto de elo e junta do manipulador (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998). A Figura 1 a seguir ilustra os parâmetros DH com uma representação gráfica (CRAIG, 2004).

Figura 1: Representação dos parâmetros de DH



Fonte: (CRAIG, 2004)

Com essa convenção, pode-se descrever qualquer matriz de transformação homogênea a partir de quatro transformações básicas, descritas na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2: Transformações Básicas de Denavit-Hartenberg

Símbolo	Significado
$R_{x,\theta}$	Rotação em torno do eixo z por um ângulo θ
$T_{z,d}$	Translação ao longo do eixo z por uma distância d
$T_{x,a}$	Translação ao longo do eixo x por uma distância a
$R_{x,\alpha}$	Rotação em torno do eixo x por um ângulo α

Fonte: (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998)

Os cálculos correspondentes a uma transformação homogênea genérica e de cada uma das transformações básicas estão apresentados nas equações seguintes.

$$H_{i-1}^i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (1)$$

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Realizando a multiplicação proposta na Equação (1), obtem-se a matriz genérica de qualquer transformação homogênea de uma junta, ilustrada na Equação (6). Também é importante destacar que a representação utilizada neste trabalho para denominar matrizes de transformação ou matrizes de rotação tem um índice e um subíndice, em que o subíndice refere-se à junta em que o sistema de coordenada se encontra e o índice refere-se à junta em que o sistema de coordenadas irá se encontrar após a realização da matriz de transformação indicada.

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \cdot \text{sen}\alpha_i & a \cdot \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \cdot \text{sen}\alpha_i & a \cdot \text{sen}\theta_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Portanto, para obter a matriz de transformação total de um manipulador com n graus de liberdade, basta multiplicar todas as matrizes de transformação de cada uma das juntas que conectam a base ao efetuador, conforme Equação (7).

$$H_0^n = H_0^1 \cdot H_1^2 \dots \cdot H_{n-1}^n \quad (7)$$

A matriz de transformação total representa as equações da cinemática direta, fornecendo a posição final (x, y e z) do atuador, através do vetor 1×3 $p(q)$, presente na última coluna da matriz. E sua orientação (rolagem, arfagem e guinada) através da matriz 3×3 $R(q)$.

$$H_0^n = \begin{bmatrix} R(q) & P(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P(q) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R(q) = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Sendo que l, m e n são os vetores ortonormais que correspondem a rolagem, arfagem e guinada respectivamente e p corresponde à posição (PIOTROWSKI; BARYLSKI, 2004).

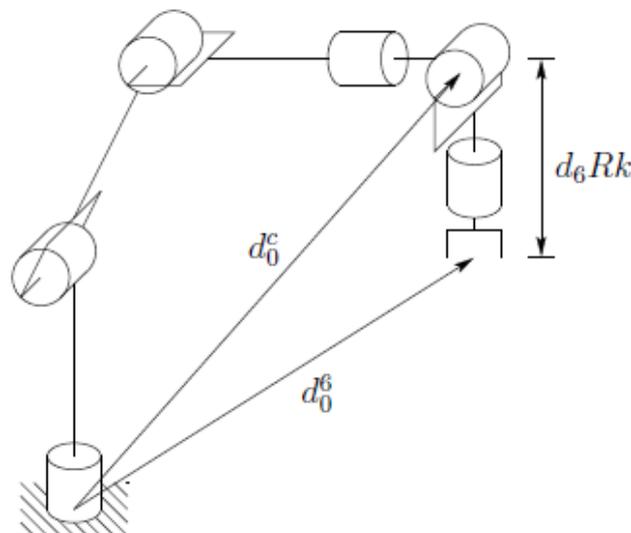
2.2.2 Cinemática Inversa

A cinemática inversa é importante pois, consiste em calcular a posição necessária de cada junta do manipulador, para atingir determinada posição e orientação desejadas da ferramenta em sua extremidade (SICILIANO et al., 2009).

No caso de um manipulador de 6 graus de liberdade com pulso esférico, é possível separar o problema da cinemática inversa em dois problemas mais simples. Esses problemas são denominados como cinemática inversa de posição e cinemática inversa de orientação (PIOTROWSKI; BARYLSKI, 2004). Essa separação é denominada desacoplamento cinemático.

Para realizar a separação, considerando um manipulador no formato citado acima, o primeiro passo é encontrar a posição central do pulso (o_c) em relação ao sistema de coordenadas da base. Essa posição corresponde ao ponto em que os eixos das juntas do pulso intersectam-se (PIOTROWSKI; BARYLSKI, 2004), ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Desacoplamento Cinemático



Para determinar o_c a partir da posição do efetuador (o) basta realizar a translação do elo d_6 na orientação do efetuador em relação ao eixo z , conforme a Figura 2 (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998) demonstrado na Equação (11).

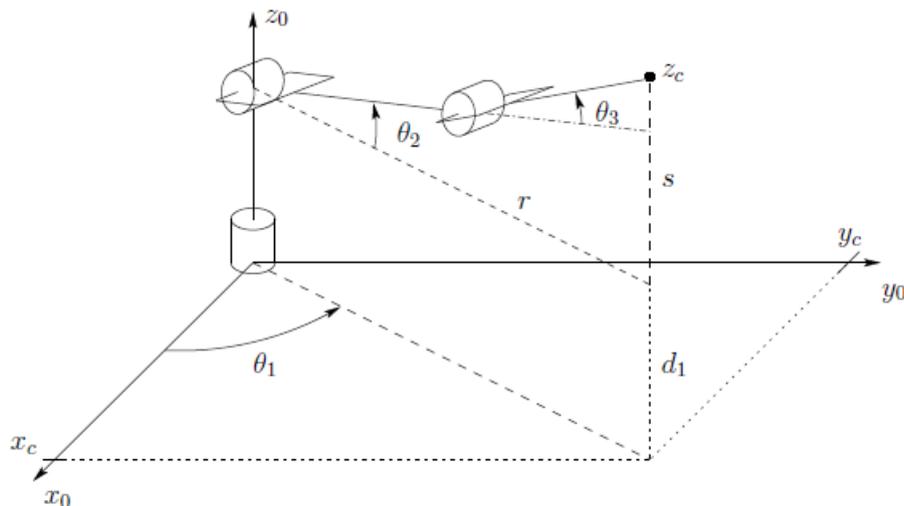
$$P_c = P - d_0^6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Então, divide-se o robô em duas partes a partir da posição central do pulso (P_c), a estrutura da base até P_c e o conjunto pulso e efetuador após P_c . A cinemática inversa de posição irá calcular a variável das juntas até P_c . Após isso, com a matriz de transformação da base a P_c determinada, calcula-se a cinemática inversa de orientação, que irá determinar a orientação do pulso.

2.2.2.1 Cinemática Inversa de Posição

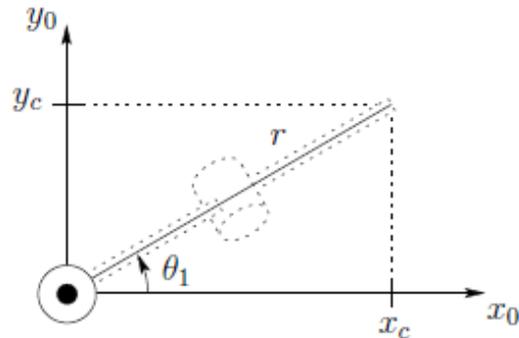
Para a solução da cinemática inversa de posição, há duas abordagens possíveis, o método geométrico e o método analítico. Para manipuladores que contêm apenas juntas rotacionais, normalmente utiliza-se o método geométrico, exemplificado na Figura 3, que é baseado em relações trigonométricas e geométricas ao analisar o manipulador em diferentes planos.

Figura 3: Cinemática Inversa de Posição



Fonte: (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998)

Para determinar a variável da primeira junta (θ_1), analisa-se o manipulador a partir do plano (x_0, y_0) , conforme a Figura 4.

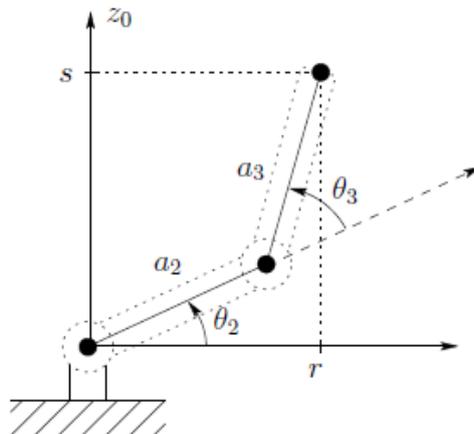
Figura 4: Plano (x_0, y_0) 

Fonte: (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998)

$$\theta_1 = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad (12)$$

É importante destacar que, a função atan2 é utilizada devido a sua capacidade de calcular ângulos entre -180 e 180 graus, enquanto que a função atan é capaz apenas de calcular ângulos entre -90 e 90 graus.

Para determinar as variáveis das outras duas juntas (θ_2 e θ_3) analisa-se o manipulador a partir do plano (x_0, z_0) , conforme Figura 5.

Figura 5: Plano (x_0, z_0) 

Fonte: (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998)

Assim, aplica-se a lei dos cossenos para obter θ_3 , conforme Equação (13) e Equação (14) sem variáveis auxiliares.

$$\cos(\theta_3) = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (13)$$

$$\cos(\theta_3) = \frac{x_c^2 + y_c^2 + (z_c - 1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = D \quad (14)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(\pm\sqrt{1 - D^2}, D) \quad (15)$$

A Equação (15) apresenta duas soluções, que representam as diferentes posições que a junta pode alcançar para o mesmo resultado final. Na maioria dos casos, corresponde a se

o cotovelo estará para cima ou para baixo (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998).

A variável da segunda junta (θ_2) pode ser calculada de forma análoga a θ_3 , conforme a Equação (16).

$$\theta_2 = \text{atan2}(z_c - d_1, \sqrt{x_c^2 + y_c^2}) - \text{atan2}(a_3 \text{sen}(\theta_3), a_2 \text{cos}(\theta_3)) \quad (16)$$

2.2.2.2 Cinemática Inversa de Orientação

Com a cinemática inversa de posição resolvida, é possível calcular a cinemática inversa de orientação, que consiste na determinação da matriz de orientação do pulso (R_3^6). Para isso, utiliza-se a Equação (17) a seguir (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998).

$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1} R \quad (17)$$

A matriz (R_3^6) corresponde a matriz de rotação das juntas 4, 5 e 6, que pode ser obtida através da realização da matriz de transformação homogênea destas juntas. Esta matriz é formada por 9 equações dependentes de 3 variáveis (θ_4 , θ_5 e θ_6). Assim, basta utilizar três destas equações para ter-se um sistema possível de resolver formado por 3 equações e 3 incógnitas. Porém, ainda é preciso obter valores equivalentes às equações para poder resolver o sistema.

Para isso, é necessário utilizar a matriz de rotação R , oriunda da cinemática direta, e a matriz de orientação R_0^3 , que é obtida através da realização da matriz de transformação homogênea das três primeiras juntas, utilizando como entrada os ângulos calculados pela cinemática inversa de posição do pulso (SPONG; HUTCHINSON; VYDYASAGAR, 1998).

3 ESTUDO DE CASO

Neste capítulo é descrito o robô escolhido para realização deste trabalho, explicitando sua composição de juntas, suas dimensões e características importantes para a análise cinemática. Também é detalhado o desenvolvimento da análise cinemática direta e inversa do manipulador escolhido.

3.1 Manipulador

Para o desenvolvimento deste trabalho, optou-se pela utilização do manipulador serial *Stäubli TX90* presente no Laboratório de Automação e Robótica da UFRGS apresentado na Figura 6. Optou-se por esse modelo, pelo fato de ele ser do tipo articulado que é amplamente utilizado nas indústrias.

Figura 6: TX90 Físico

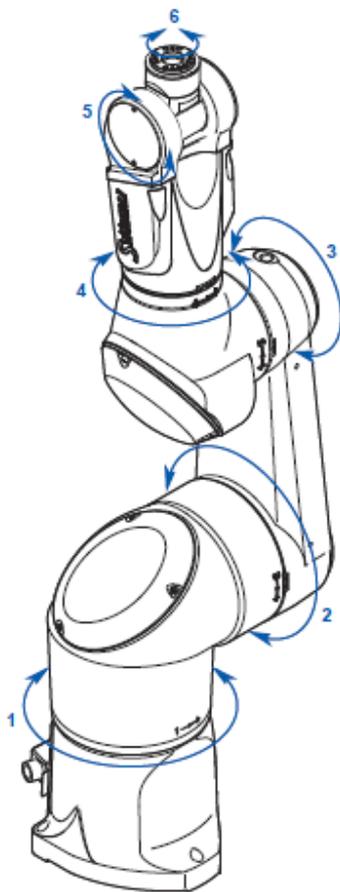


Fonte: Autor

Manipuladores do tipo articulado tem sua configuração semelhante a de um braço humano, devido ao seu conjunto de 6 juntas rotacionais, que podem ser separadas em dois grupos, as que compõe o pulso e as que correspondem ao movimento do braço.

Este modelo de configuração é o mais versátil dos manipuladores pois assegura maiores movimentos dentro de um espaço compacto. A Figura 7 indica os graus de liberdade do robô, com suas juntas e orientações de giro.

Figura 7: Graus de Liberdade TX90

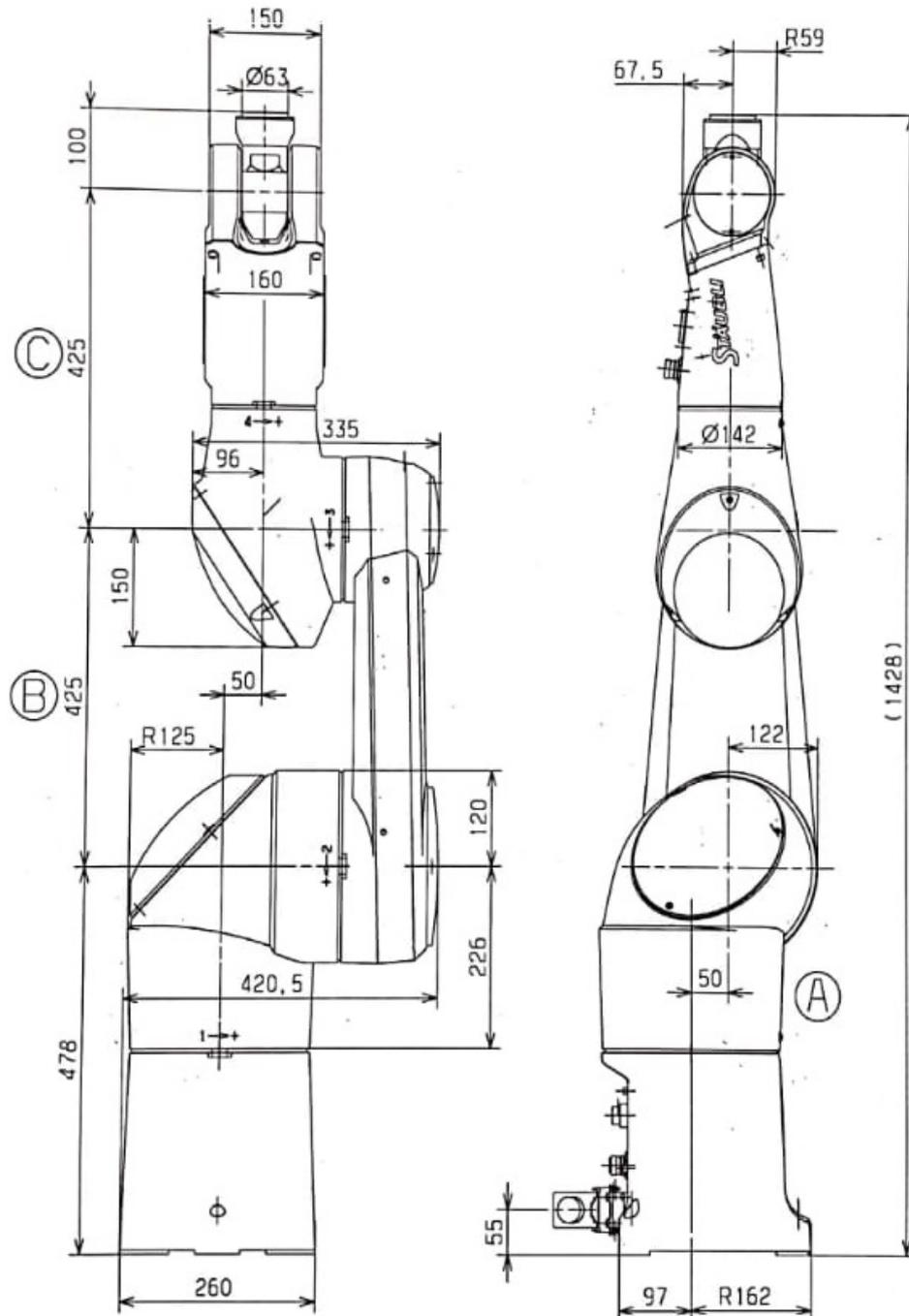


Fonte: (STAUBLI, 2018)

As juntas 1, 2 e 3 são responsáveis pela posição final do efetuador localizado na extremidade do manipulador, são essas juntas que emulam o comportamento do conjunto braço e antebraço humano. As demais juntas, isto é, as juntas 4, 5 e 6, são responsáveis pela orientação do efetuador. Isto significa que essas três últimas juntas emulam o comportamento de um pulso humano.

A Figura 8 exibe um desenho esquemático do robô TX90 com as dimensões da sua estrutura em milímetros. Este modelo possui duas características peculiares, que o difere dos modelos padrões de um manipulador articulado de 6 GDL. Isto faz com que o grau de dificuldade de sua análise cinemática seja maior do que grau de dificuldade de um manipulador articulado padrão.

Figura 8: Dimensões TX90



Fonte: (STAUBLI, 2018)

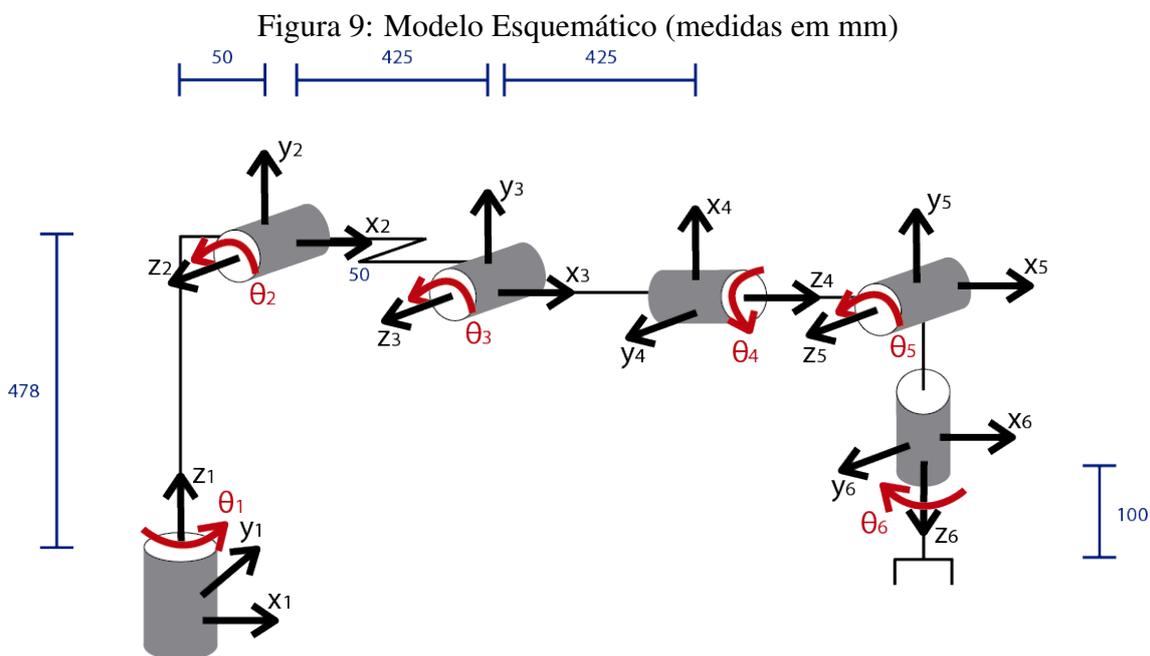
Uma das características que difere este modelo do padrão é o desalinhamento do centro da base com o centro da extremidade do manipulador, que é posição em que conecta-se um efetuador. Esse desalinhamento pode ser visto no desenho a esquerda presente na Figura 8, que mostra de forma clara que o elo em que o pulso está localizado está 50 mm para a direita com relação ao centro da base do robô.

A outra característica que dificulta a análise cinemática é outro desalinhamento do centro da base com o centro da extremidade do manipulador. Este segundo desalinha-

mento pode ser visto no desenho a direita presente na Figura 8. Este desnível, de 50 mm, está em outro sentido do desalinhamento mencionado anteriormente.

3.2 Cinemática Direta de Posição

Inicialmente, para o cálculo da cinemática direta de posição, faz-se a montagem da tabela com os parâmetros de DH. Os parâmetros de DH necessitam de um modelo esquemático do robô, bem como das suas características, sistemas de referencia e variáveis de junta de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg, assim, na Figura 9 a seguir apresenta-se o modelo utilizado neste trabalho.



Fonte: Autor

A partir do modelo esquemático, define-se a tabela de Denavit-Hartenberg, exibida na Tabela 3, cujas unidades utilizadas são milímetros para comprimento e radianos para os ângulos. Os elos presentes entre as juntas 4 e 6 são apenas representativos, ou seja, tem um comprimento de 0 mm, já que efetivamente os 3 últimos sistemas de coordenadas tem a mesma origem.

Tabela 3: Tabela DH

Junta	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	50	$\frac{\pi}{2}$	478	θ_1
2	425	0	-50	θ_2
3	425	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_3
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5
6	0	0	100	θ_6

Com a Tabela DH definida, obtém-se as matrizes de transformação homogênea de cada junta a partir da Equação (6). As matrizes de cada junta estão a seguir. Neste

trabalho será utilizado como notação que o valor subscrito na variável corresponde a uma matriz de transformação ou rotação é o sistema de referência de origem da mesma e o valor subscrito corresponde ao sistema transportado.

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 50\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 50\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 478 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 425\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 425\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 & 425\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 & 425\sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$H_3^4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$H_4^5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$H_5^6 = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A matriz de transformação homogênea do manipulador é obtida através da multiplicação das matrizes de cada junta, conforme Equação (24). Devido ao tamanho das equações, suas expressões não serão explicitadas e as células dessa matriz serão referidas conforme a Equação a seguir. O código utilizado para a desenvolvimento está no anexo A.

$$H_0^6(q) = H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot H_2^3 \cdot H_3^4 \cdot H_4^5 \cdot H_5^6 = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Por fim, obtém-se as equações referentes à posição ($P(q)$) e orientação ($R(q)$) do efetuador a partir da matriz de transformação homogênea do manipulador, conforme equações (25) e (26) respectivamente.

$$P(q) = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{03} \\ h_{13} \\ h_{23} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$R(q) = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Para realizar o cálculo de $P(q)$ e $R(q)$, é preciso definir uma configuração de pose do robô, isto é, valores de entrada para as variáveis de cada junta. Os valores ilustrativos definidos para exemplificação dos cálculos estão na Equação seguinte.

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 45 \\ -90 \\ 0 \\ 90 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ graus} = \begin{bmatrix} 1,047 \\ 0,785 \\ -1,571 \\ 0 \\ 1,571 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ rad} \quad (27)$$

A partir deste ponto, o Estudo de Caso mostrará os resultados dos cálculos sem aplicar esses valores ilustrativos de entrada e também os resultados obtidos ao aplicar esses valores. nas Equações (18) a (24), obtém-se a posição e a orientação:

$$P(q) = \begin{bmatrix} 317,574 \\ 650,055 \\ 407,289 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad (28)$$

$$R(q) = \begin{bmatrix} 0,354 & 0,866 & 0,354 \\ 0,612 & -0,5 & 0,612 \\ 0,707 & 0 & -0,707 \end{bmatrix} \text{ rad} \quad (29)$$

3.3 Cinemática Inversa de Posição

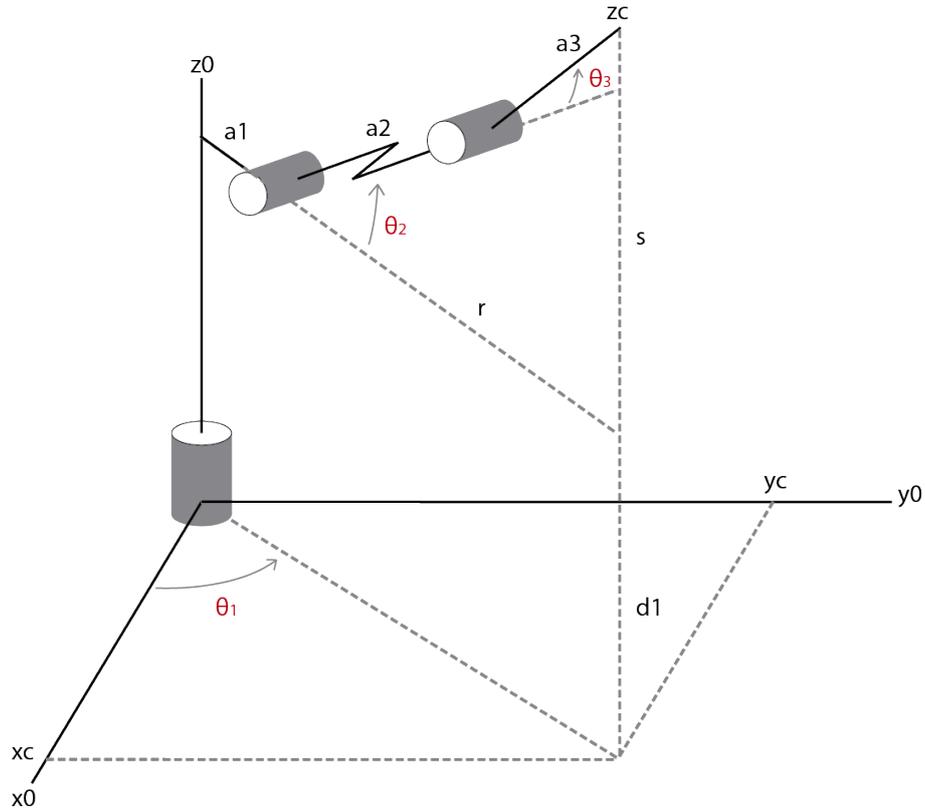
Uma vez definida a posição do manipulador de forma direta, realiza-se a análise da cinemática inversa que tem como objetivo determinar as variáveis das juntas a partir da posição e orientação do efetuador. Para tanto, será utilizado o método de desacoplamento cinemático. O desacoplamento cinemático permite separar o manipulador em duas partes, são elas: a cinemática inversa de posição do pulso e a cinemática inversa de orientação conforme explicado na revisão bibliográfica. Realiza-se o desacoplamento a partir da separação das juntas do pulso esférico das outras juntas, para isso calcula-se a posição central do pulso, conforme Equação (30). Ao longo do desenvolvimento da cinemática inversa também serão colocados os valores das Equações (28) e (29) para obter como resultado os valores para as juntas estipulados na Equação (27).

$$P_p = P - 100R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{px} \\ P_{py} \\ P_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 317,574 \\ 650,055 \\ 407,289 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad (30)$$

3.3.1 Cinemática Inversa de Posição do Pulso

O objetivo da cinemática inversa de posição do pulso é calcular os ângulos das três primeiras juntas para que o manipulador alcance a posição P_p . Para realizar a cinemática inversa de posição do pulso, será utilizado o método geométrico. A realização desse método baseia-se no desenho esquemático presente na Figura 10.

Figura 10: Modelo Esquemático



Fonte: Autor

O desenvolvimento para determinar os ângulos (θ_1, θ_2 e θ_3) a partir da Figura (10) é descrito a seguir.

$$\theta_1 = \text{atan2}(P_{px}, P_{py}) - \text{atan2}(\sqrt{(P_{px})^2 + (P_{py})^2} - 50, 50) = 1,047\text{rad} \quad (31)$$

$$Rc^2 = P_{px}^2 + P_{py}^2 - d2^2 \quad (32)$$

$$r = Rc - a1 \quad (33)$$

$$s = P_{pz} - d1 \quad (34)$$

$$w = \cos(\theta_3) = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (35)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(w, \pm\sqrt{1-w^2}) = -1,571\text{rad} \quad (36)$$

$$k = \frac{a_3^2 - a_2^2 - (r^2 + s^2)}{-2a_2\sqrt{r^2 + s^2}} \quad (37)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(r, s) - \text{atan2}(k, \pm\sqrt{1-k^2}) = 0,785\text{rad} \quad (38)$$

3.3.2 Cinemática Inversa de Orientação

A cinemática inversa de orientação consiste no cálculo dos ângulos para as três juntas do pulso. Para tal, determina-se a matriz de rotação R_3^6 através da Equação (39) (para

facilitar a visualização desta matriz, utilizou-se como notação c e s para cosseno e seno respectivamente):

$$R_3^6 = (R_0^3)^T R_0^6 = \begin{bmatrix} c(\theta_4)c(\theta_5)c(\theta_6) - s(\theta_4)s(\theta_6) & -c(\theta_6)s(\theta_4) - c(\theta_4)c(\theta_5)s(\theta_6) & c(\theta_4)s(\theta_5) \\ c(\theta_4)c(\theta_6) + c(\theta_5)c(\theta_6)s(\theta_4) & c(\theta_4)c(\theta_6) - c(\theta_5)s(\theta_4)s(\theta_6) & s(\theta_4)s(\theta_5) \\ -c(\theta_6)s(\theta_5) & s(\theta_5)s(\theta_6) & c(\theta_5) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Devido a cinemática direta, R_0^6 possui valores definidos para os ângulos colocados como entrada e com os três primeiros ângulos calculados através da cinemática inversa de posição, obtém-se a matriz de rotação das três primeiras juntas (R_0^3) com valores. Logo, é possível calcular R_3^6 com os valores de entrada.

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para determinar as equações correspondentes aos três ângulos restantes basta analisar as equações presentes na matriz R_3^6 . Para este caso, opta-se por analisar as equações presentes na matriz nas posições 33 para determinar θ_5 , 32 para θ_6 e 23 para θ_4 . Tendo assim as seguintes equações:

$$\cos(\theta_5) = i = 0 \quad (41)$$

$$\text{sen}(\theta_5)\text{sen}(\theta_6) = h = 0 \quad (42)$$

$$\text{sen}(\theta_4)\text{sen}(\theta_5) = f = 0 \quad (43)$$

Com essas equações, define-se θ_4 , θ_5 e θ_6 como:

$$\theta_5 = \text{atan2}(i, \pm\sqrt{1-i^2}) = 1,571\text{rad} \quad (44)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1-\left(\frac{h}{\text{sen}(\theta_5)}\right)^2}, \frac{h}{\text{sen}(\theta_5)}\right) = 0\text{rad} \quad (45)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1-\left(\frac{f}{\text{sen}(\theta_5)}\right)^2}, \frac{f}{\text{sen}(\theta_5)}\right) = 0\text{rad} \quad (46)$$

4 TESTES E RESULTADOS

A fim de verificar o trabalho desenvolvido realizou-se duas análises comparativas. A primeira análise é dada pela comparação dos resultados da cinemática direta desenvolvida, da posição final do robô físico presente no laboratório da universidade e da posição final de uma simulação do robô TX90 para uma mesma pose determinada. Esta comparação tem o objetivo de comprovar que a análise cinemática desenvolvida corresponde com o manipulador *Stäubli* TX90. E a segunda análise é dada pela comparação das variáveis de entrada estipuladas para cinemática direta com os resultados obtidos da cinemática inversa feita a partir dos resultados da cinemática direta. Esta análise tem o objetivo de validar que ambas as cinemáticas estão corretas.

4.1 Testes com o Robô Físico

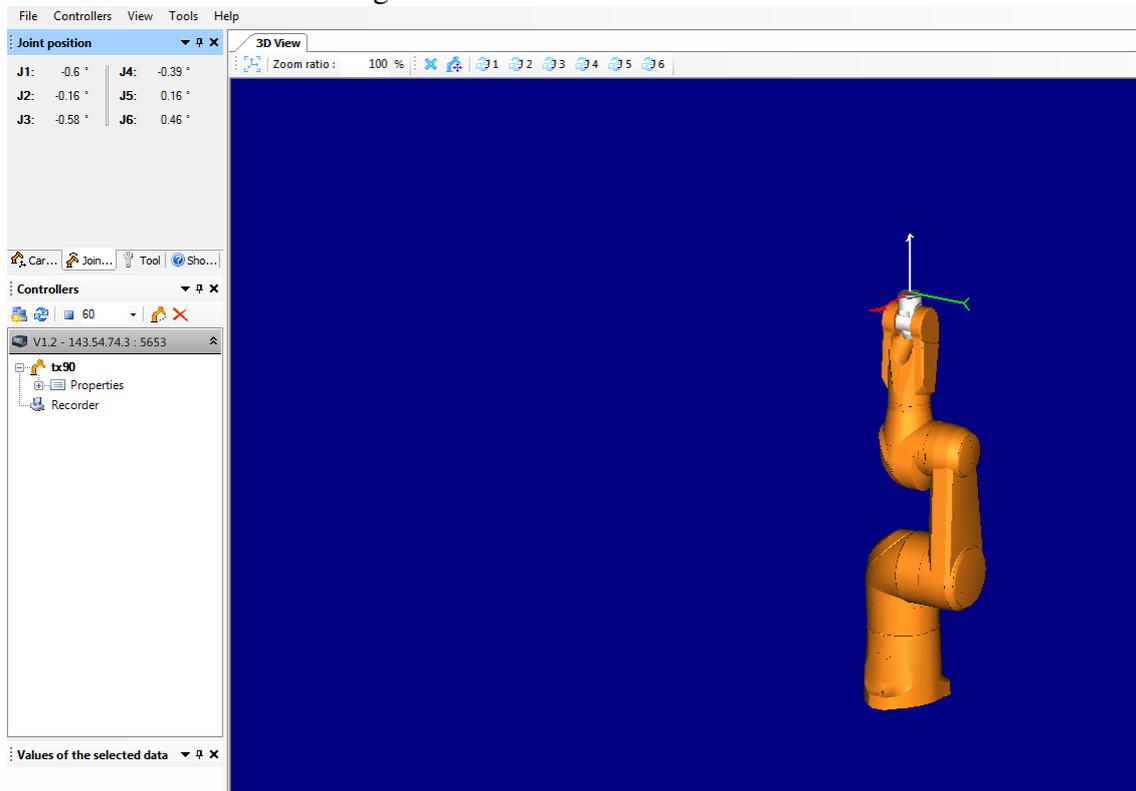
Para comprovar que a análise desenvolvida realmente corresponde ao robô *Stäubli* TX90, comparou-se a posição final do manipulador de acordo com a análise cinemática com a posição final do manipulador existente no laboratório de robótica.

Para a realização deste trabalho optou-se por controlar os movimentos do manipulador de forma manual com o controle do mesmo. O que fez com que não fosse possível obter uma alta precisão para colocar as variáveis de entrada, isto é, ângulos das juntas. Isto significa que há um certo grau de imprecisão ao manipular o robô para posicioná-lo. Por exemplo, se o teste realizado exigisse colocar 90 graus na segunda junta (θ_2), seria possível apenas optar entre 90,34 graus ou 89,58 graus devido a imprecisão do controle manual do robô.

É importante destacar que a posição inicial do manipulador físico, isto é, a pose que o robô tem quando coloca-se zero como entrada em todas as variáveis de junta, é diferente da posição inicial da análise realizada. A posição inicial definida para a análise está representada na Figura 9 enquanto que a posição inicial para o robô físico está representada na Figura 11. Isto significa que para verificar uma determinada pose é necessário fornecer diferentes ângulos para a mesma junta na análise cinemática e no robô físico.

Também é importante destacar que as juntas da análise cinemática incrementam seus ângulos quando as mesmas tendem a movimentar a extremidade do robô para o cima, isto é, aumentado o valor da posição final em relação ao eixo z de origem. Enquanto que para o robô físico, o valor dos ângulos aumentam quando tendem a movimentar a extremidade do robô para baixo. Isto ocorre devido o sentido determinado para o eixo z no sistema de cada uma das juntas.

Figura 11: Pose Inicial TX90 Físico



Fonte: Autor

Como pode ser visto na Figura 11, os dados do robô físico foram obtidos através do software do próprio robô, que é capaz de fornecer a posição e orientação do orientador em função do sistema de coordenadas de origem. Também é importante destacar que este sistema está localizado o centro da segunda junta do robô, enquanto que a análise cinemática considera a origem na base do manipulador. Portanto, para comparar os resultados será adicionado 478 mm ao valor exibido neste programa como posição final em relação ao eixo z.

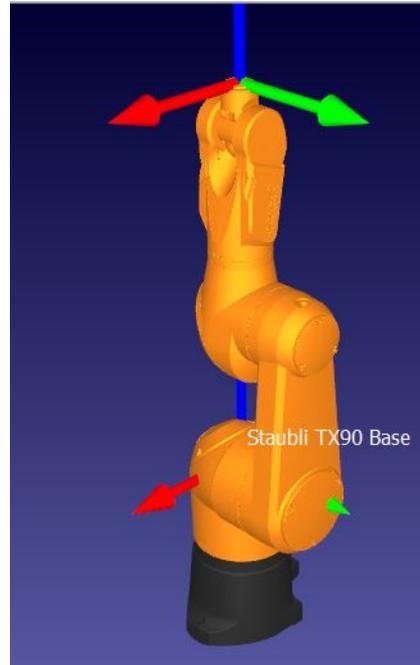
4.2 Testes Com Software Simulador

Para comparar os resultados da análise cinemática com uma simulação do manipulador TX90, utilizou-se o *Software RoboDK* que é um programa de simulação para robôs industriais. Com o uso desse programa, foi possível comparar a posição final da extremidade do manipulador TX90 que a análise da cinemática direta determina com a posição final do manipulador estando na mesma pose de acordo com o programa.

É importante salientar que a posição inicial do robô no programa, assim como o robô físico, tem uma posição inicial diferente da utilizada para realizar a análise cinemática. A pose inicial de acordo com a análise é a mesma da representação na Figura 9 enquanto que a pose inicial de acordo com o programa é como se o manipulador estivesse alinhado com o eixo z do sistema de coordenadas da base, conforme a Figura 12.

Isso significa que alguns ângulos de entrada são diferentes entre a simulação e a análise para corresponder à mesma pose do manipulador. Por exemplo, uma inclinação de 10 graus para a segunda junta na análise cinemática corresponde a uma inclinação de 80 graus para a mesma junta no programa.

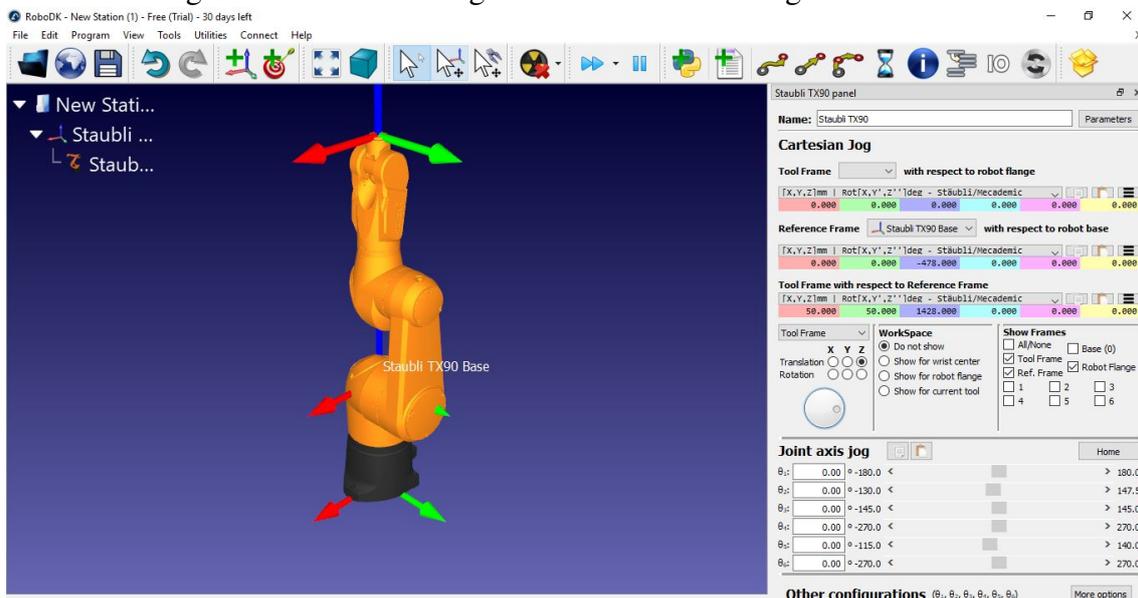
Figura 12: Pose Inicial TX90 de acordo com *RoboDK*



Fonte: Autor

Também é importante salientar que precisou-se deslocar o sistema de coordenadas de origem do manipulador. Pois de acordo com a análise cinemática o sistema de coordenadas de origem localiza-se na base do manipulador, enquanto que para o programa localiza-se no centro da segunda junta. Assim, deslocou-se este sistema em -478 mm no sentido do eixo z para que a origem seja a mesma tanto no programa quanto na análise cinemática. A figura a seguir mostra o programa além de demonstrar a pose inicial do manipulador com o sistema de coordenadas de origem modificado.

Figura 13: TX90 no Programa *RoboDK* com Origem Modificada



Fonte: Autor

A partir da Figura 13, pode-se identificar à direita os valores dos ângulos nas juntas, que são os valores de entrada para o programa. Também pode-se identificar à direita a posição de três sistemas de coordenadas, o primeiro sistema de coordenadas refere-se à posição da ferramenta em relação à extremidade do manipulador, como os testes foram realizados sem uma ferramenta na extremidade do manipulador, a posição deste sistema de coordenadas sempre será zero. O segundo sistema de coordenadas que pode ter sua posição vista e editada refere-se ao sistema de referência do manipulador, isso significa que sua origem pode ser deslocada e rotacionada. Por fim, o terceiro sistema de coordenadas que tem sua posição exibida refere-se à posição da extremidade do robô em relação ao sistema de coordenadas de origem definido anteriormente.

4.3 Resultados

Os resultados foram obtidos através da realização do teste de 10 posições diferentes. A Tabela 4 exibe as poses utilizadas como teste, isto é, os ângulos que foram impostos em cada uma das juntas.

Tabela 4: Dados de entrada

Teste	Ângulos (graus)					
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	0	0	0	0	0	0
2	60	45	-90	0	90	0
3	0	90	0	0	90	0
4	-45	0	90	90	0	30
5	45	10	30	0	45	0
6	10	15	-30	27	100	-15
7	0	20	90	0	0	30
8	0	0	30	0	0	0
9	-60	45	-90	0	90	0
10	0	-10	60	30	0	11

Estas poses foram utilizadas para realizar ambas as análises comparativas.

4.3.1 Resultados Primeira Análise Comparativa

Como mencionado anteriormente, esta análise consistiu na comparação dos resultados obtidos ao aplicar as poses teste listadas na Tabela 6 no cálculo da cinemática direta, desenvolvido através do programa *Mathcad*, no robô físico TX90, presente no laboratório da universidade, e no manipulador TX90 simulado no programa *RoboDK*. Devido a quantidade de dados, foi necessário dividi-los em três tabelas diferentes. A Tabela 5 a seguir exibe os dados coletados ao realizar os testes referentes à posição final da extremidade do robô com relação ao eixo X do sistema de coordenadas de origem, a Tabela 6 exibe os dados coletados em relação ao eixo Y e a Tabela 7 exibe os dados com relação ao eixo Z.

Tabela 5: Comparativo de posição em relação ao eixo X

Teste	P_x [mm]		
n°	Mathcad	RoboDK	TX90
1	900,00	900,00	897,71
2	317,57	317,57	317,34
3	50,00	50,00	42,87
4	441,94	441,94	437,95
5	596,60	596,60	591,4
6	948,11	948,11	945,66
7	397,98	397,98	396,85
8	893,06	893,06	894,2
9	404,17	404,17	395,31
10	808,07	808,07	829,69

Tabela 6: Comparativo de posição em relação ao eixo Y

Teste	P_y [mm]		
n°	Mathcad	RoboDK	TX90
1	50,00	50,00	51,98
2	650,05	650,05	647,70
3	50,00	50,00	49,57
4	-229,81	-229,81	-233,70
5	667,32	667,32	669,06
6	209,94	209,94	210,99
7	50,00	50,00	52,52
8	50,00	50,00	47,07
9	-600,05	-600,05	-603,25
10	100,00	100,00	98,36

Tabela 7: Comparativo de posição em relação ao eixo Z

Teste	P_z [mm]		
n°	Mathcad	RoboDK	TX90
1	378,00	378,00	371,51
2	407,29	407,29	399,81
3	1428,00	1428,00	1427,96
4	903,00	903,00	898,96
5	816,27	816,27	817,13
6	467,45	467,45	457,21
7	1056,93	1056,93	1053,91
8	603,89	603,89	592,16
9	407,28	407,28	399,81
10	674,10	674,10	671,46

4.3.2 Resultados da Segunda Análise Comparativa

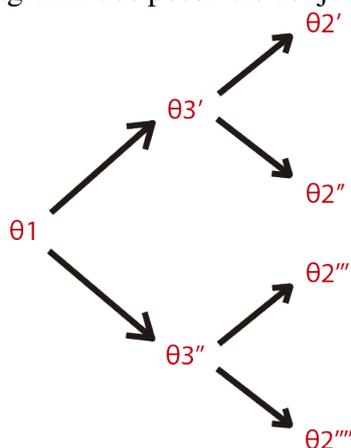
Para realizar a segunda análise é importante revisar a função da cinemática direta e da cinemática inversa. A cinemática direta tem como função calcular a posição atingida pela extremidade do manipulador a partir de ângulos escolhidos para cada uma das juntas. A cinemática inversa por sua vez, tem como função calcular os ângulos de cada uma das juntas a partir de uma determinada posição atingida pela extremidade do manipulador.

Logo, a segunda análise consiste em aplicar as poses determinadas na Tabela 4 como entrada para o cálculo da cinemática direta e a partir dos resultados obtidos, calcular a cinemática inversa. Se os resultados da cinemática inversa coincidirem com os valores utilizados como entrada para a cinemática direta, isso significa que ambas cinemáticas foram desenvolvidas de forma correta.

É importante destacar que nas equações que definem θ_2 , θ_3 , θ_4 , θ_5 e θ_6 , há raízes quadradas que fornecem dois resultados possíveis, um positivo e outro negativo. Por exemplo, a raiz quadrada de 4 pode ser 2 como também pode ser -2. Isto faz com que as equações de todos os ângulos citados retornem dois resultados possíveis, um levando em consideração o valor positivo do fornecido pela raiz quadrada e outro considerando o valor negativo. Também é importante destacar que nos cálculos da cinemática inversa, há uma cadeia de dependências entre os ângulos. Isto é, para calcular alguns ângulos é preciso ter determinado outros ângulos para ser possível realizar o cálculo. No caso da cinemática inversa de posição do pulso, para determinar θ_3 é preciso determinar θ_1 . Para calcular θ_2 é preciso ter θ_3 definido.

Com estes fatores considerados, há mais de um conjunto de ângulos possível como solução, a Figura 14 ilustra as possibilidades de solução para o conjunto θ_1 , θ_2 e θ_3 , considerando os resultados das raízes quadradas positivos e negativos.

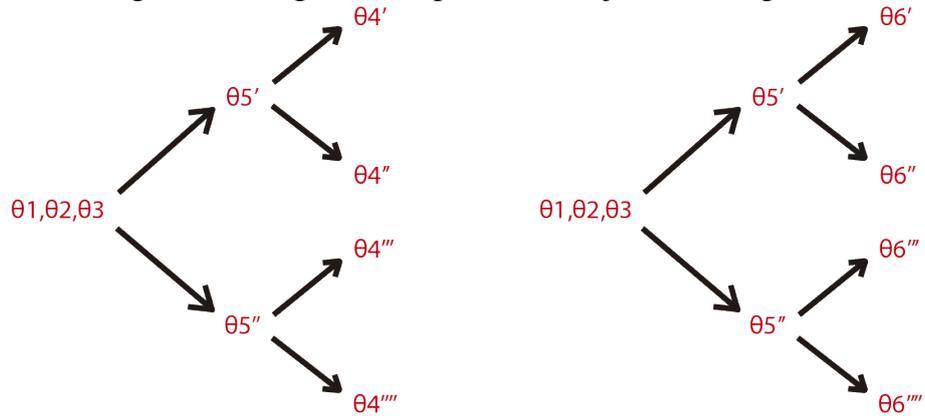
Figura 14: Diagrama dos possíveis conjuntos de ângulos



Fonte: Autor

A cinemática inversa de orientação como um todo precisa ter a inversa de posição do pulso já realizada, portanto, para determinar os 3 ângulos restantes é preciso ter os 3 primeiros já definidos. Além disso, devido as equações escolhidas na seção 3.3.2, para determinar θ_4 e θ_6 é preciso ter θ_5 calculado. A Figura 15 ilustra os possíveis conjuntos de ângulos que correspondem à soluções dos ângulos θ_4 , θ_5 e θ_6 levando em consideração a cadeia de dependência e os resultados positivos e negativos das raízes quadradas dentro das equações dos ângulos.

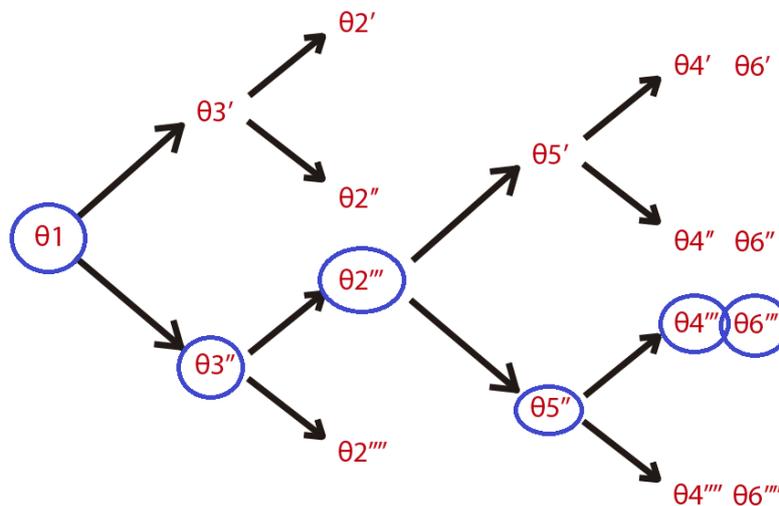
Figura 15: Diagrama dos possíveis conjuntos de ângulos



Fonte: Autor

A Tabela 8 a seguir mostra os resultados obtidos na cinemática direta ao aplicar as poses teste, presentes na Tabela 4, e o resultado da cinemática inversa ao aplicar os resultados da cinemática direta. Apenas o conjunto destacado pela Figura 16 dentro dos possíveis conjuntos que a cinemática inversa fornece foi utilizado para realizar a comparação.

Figura 16: Conjunto de ângulos selecionado



Fonte: Autor

Tabela 8: Comparativo Cinemática Direta X Inversa

Teste	Direta			Inversa					
	P_x	P_y	P_z	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	900,00	50,00	378,00	0	0	0	0	0	0
2	317,57	650,05	407,28	60	45	-90	0	90	0
3	50,00	50,00	1428,00	0	90	0	0	90	0
4	441,94	-229,81	903,00	-45	0	90	90	0	30
5	596,60	667,31	816,27	45	10	30	0	45	0
6	948,11	209,94	467,45	10	15	-30	27	100	-15
7	397,98	50,00	1056,93	0	20	90	0	0	30
8	893,06	50,00	603,897	0	0	30	0	0	0
9	404,17	-600,05	407,28	-60	45	-90	0	90	0
10	808,07	100,00	674,10	0	-10	60	30	0	11

4.4 Discussões

Com a realização do teste comparativo entre a cinemática direta, robô físico e simulação foi possível constatar alguns fatos que serão detalhados a seguir.

O primeiro fato a ser observado foi que os resultados obtidos pelos cálculos da cinemática direta coincidiram exatamente com os resultados da simulação em todos os 10 testes. Isto significa que a teoria aplicada no desenvolvimento dos cálculos está correta.

O segundo fato a ser observado foi que estes resultados teóricos não coincidiram exatamente com os dados obtidos do manipulador TX90 físico ao realizar o teste das 10 poses. Como pode ser visto, há uma diferença média entre os resultados de 2,78 mm, o que já era esperado devido a diversos fatores que podem ter contribuído para a falta de precisão do manipulador físico. Além dos fatores mencionados na seção 4.1, erros operacionais ao controlar o robô através do seu controle manual durante os testes podem ter influenciado nos resultados obtidos. O controle manual não possibilita colocar precisamente os ângulos testados, tendo um erro variável de aproximadamente um grau de diferença entre os valores definidos para realização dos testes em cada uma das juntas e os ângulos que de fato as juntas se posicionavam. Também é necessário levar em consideração que devido a estrutura do manipulador, há certas posições em que este manipulador não se sustenta de forma consistente, fazendo com que a extremidade do robô apresente certa oscilação, ou seja, que sua posição final apresente certa variação nos valores.

Na prática, uma precisão desta magnitude, de milésimo de milímetro, não se faz necessária na grande maioria dos casos em que esse tipo de robô é utilizado. Há diversos processos de manufatura e indústrias de forma geral em que precisões na escala de milímetros são aceitas para os trabalhos exercidos por manipuladores articulados.

Portanto, apesar da diferença entre os valores apresentados pelo robô físico dos valores obtidos pela cinemática direta e simulação, pode-se constatar que modelo cinemático é realmente referente ao robô articulado *Stäubli TX90*. Com isso definido, resta confirmar que o modelo cinemático como um todo está correto e para isso foi realizado a segunda análise comparativa.

Com a realização da segunda análise, que consiste em comparar os dados de entrada na cinemática direta com os resultados obtidos da inversa como descrito na seção 4.3.2, foi possível constatar que o modelo cinemático como um todo está correto, visto que

os valores que a cinemática inversa fornecem são precisamente equivalentes aos valores utilizados como entrada para a cinemática direta.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi realizado o modelo cinemático do robô *Stäubli* TX90, que é um manipulador articulado de 6 graus de liberdade, onde foi comprovado de forma experimental que o modelo de fato corresponde com o robô físico. Isso foi realizado através da caracterização do robô de acordo com os parâmetros de DH, utilizados para o desenvolvimento da cinemática direta e da cinemática inversa do manipulador utilizando a abordagem de desacoplamento cinemático. As características peculiares do robô, descritas na seção 3.1, dificultaram a análise da cinemática direta e, principalmente, o desenvolvimento da cinemática inversa, pois essas características fizeram com que o equacionamento de θ_3 e θ_2 fosse dependente dos valores de θ_1 , o que não ocorre geralmente em análises cinemáticas de manipuladores de 6 GDL.

Com relação ao resultado dos testes realizados, a comparação do modelo proposto com a simulação pelo *RoboDK* comprovou que a teoria foi aplicada de forma correta devido ao fato de que houve um erro de 0% em todas os valores ao comparar apenas os resultados do modelo com os resultados da simulação. E com a comparação destes resultados teóricos com testes do robô físico comprovou-se que o modelo cinemático desenvolvido corresponde de fato com o manipulador *Stäubli* TX90 pelo fato de que ao avaliar os 60 dados coletados, P_x , P_y e P_z para cada teste entre valores teóricos calculados e físicos, a maior diferença encontrada foi de 21,621 mm e apesar disso, o teste como um todo teve uma diferença média de 2,785 mm. Isto significa que, apesar de ter ocorrido uma diferença de magnitude acima da esperada, essa relaciona-se a um valor medido de 829,69 mm, o que significa uma diferença de 2,6%.

Como sugestão para continuação do trabalho fica a proposta de instrumentar o manipulador, para que seja possível medir as velocidades e aceleração de cada junta, e desenvolver a análise cinemática diferencial que corresponde à descrição dos movimentos do manipulador. Assim, tornando possível a comparação entre resultados teóricos da análise cinemática diferencial com testes práticos.

BIBLIOGRAFIA

CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. 3. ed. Addison-Wesley: Pearson, 2004.

HAYAT, A. A. Robot Manipulation through Inverse Kinematics. **ACM**, Delhi, India, 2015.

AL-MASHHADANY, Y. Inverse Kinematics Problem (IKP) of 6-DOF Manipulator By Locally Recurrent Neural Networks (LRNNs). **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, Al-Anbar, India, 2010.

MORECKI, A.; KNAPCZYK, J. **Basics of Robotics: Theory and Components of Manipulators and Robots**. 1. ed. New York: Springer, 1999.

PIOTROWSKI, N.; BARYLSKI, A. Modeling a 6-DOF Manipulator Using Matlab Software. **Archives of Mechanical Technology and Automation**, Gdansk, Polonia, 2004.

SICILIANO, B. et al. **Robotics Modeling, Planning and Control**. 1. ed. New York: Springer, 2009.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VYDYASAGAR, M. **Robot Modeling and Control**. 1. ed. New York: John Wiley Sons, 1998.

STAUBLI. **TX90 Range 6 Axis Industrial Robot**. Suiça, 2018. p. 5.

APÊNDICE A CÁLCULOS MATHCAD

Devido à falta de comunicação entre o programa *MathCad* em que os cálculos foram realizados e o programa *Overleaf* em que foi escrito o trabalho, os cálculos serão exibidos em forma de figuras.

A.1 Cinemática Direta e Inversa de Posição

$$\begin{array}{l}
 R_z(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_z(d) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_x(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_x(a) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H := R_z(\theta) \cdot T_z(d) \cdot T_x(a) \cdot R_x(\alpha) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -(\cos(\alpha) \cdot \sin(\theta)) & \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) & a \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) & -(\cos(\theta) \cdot \sin(\alpha)) & a \cdot \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Fonte: Autor

Matriz DH

Junta	a	α	d	θ
1	50	$\frac{\pi}{2}$	478	θ_1
2	425	0	-50	θ_2
3	425	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_3
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5
6	0	0	100	θ_6

Fonte: Autor

$$H_1(\theta_1) := R_z(\theta_1) \cdot T_z(478) \cdot T_x(50) \cdot R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 50 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & 50 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 & 478 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2(\theta_2) := R_z(\theta_2) \cdot T_z(-50) \cdot T_x(425) \cdot R_x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 425 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 425 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3(\theta_3) := R_z(\theta_3) \cdot T_z(0) \cdot T_x(425) \cdot R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & \sin(\theta_3) & 425 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & 0 & -\cos(\theta_3) & 425 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_4(\theta_4) := R_z(\theta_4) \cdot T_z(0) \cdot T_x(0) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

$$H_5(\theta_5) := R_z(\theta_5) \cdot T_z(0) \cdot T_x(0) \cdot R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & \sin(\theta_5) & 0 \\ \sin(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_6(\theta_6) := R_z(\theta_6) \cdot T_z(100) \cdot T_x(0) \cdot R_x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{simb} := H_1(\theta_1) \cdot H_2(\theta_2) \cdot H_3(\theta_3) \cdot H_4(\theta_4) \cdot H_5(\theta_5) \cdot H_6(\theta_6) \rightarrow ?$$

Isso significa que o resultado é grande de mais para printar e fazer sentido

Fonte: Autor

$$\text{submatrix}(T_{simb}, 0, 2, 3, 3) \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 50 \cdot \cos(\theta_1) - 50 \cdot \sin(\theta_1) + 425 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + 425 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) - 425 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \\ 50 \cdot \cos(\theta_1) + 50 \cdot \sin(\theta_1) + 425 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(\theta_1) + 425 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_1) - 100 \cdot \cos(\theta_1) \\ 425 \cdot \sin(\theta_2) + 425 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) + 4 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) + 100 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_4) \cdot \sin(\theta_5) + 100 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_3) + 100 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_2) + 100 \cdot \\ \cdot \sin(\theta_4) \cdot \sin(\theta_5) - 425 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) + 100 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_3) + 100 \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) + 100 \cdot \\ 425 \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_2) - 100 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_5) + 100 \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) + 100 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_5) + 100 \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_5) - 100 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_5) \\ \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_5) - 100 \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \cdot \sin(\theta_5) \\ \theta_3) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_5) + 478$$

Fonte: Autor

Matriz de Transformação Homogênea Completa INPUT ANGULOS DE ENTRADA

$$\theta_1 := 60 \cdot \frac{\pi}{180} = 1.047 \quad \theta_2 := (45) \cdot \frac{\pi}{180} = 0.785 \quad \theta_3 := (-90) \cdot \frac{\pi}{180} = -1.571$$

+

$$\theta_4 := 0 \cdot \frac{\pi}{180} = 0 \quad \theta_5 := (90) \cdot \frac{\pi}{180} = 1.571 \quad \theta_6 := (0) \cdot \frac{\pi}{180} = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6.12 \cdot 10^{-17}$$

$$\text{acos}(0) = 1.571$$

$$T := H_1(\theta_1) \cdot H_2(\theta_2) \cdot H_3(\theta_3) \cdot H_4(\theta_4) \cdot H_5(\theta_5) \cdot H_6(\theta_6) = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.866 & 0.354 & 317.574 \\ 0.612 & -0.5 & 0.612 & 650.055 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 407.289 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

Orientação

$$O := \text{submatrix}(T, 0, 2, 0, 2) = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.866 & 0.354 \\ 0.612 & -0.5 & 0.612 \\ 0.707 & 0 & -0.707 \end{bmatrix}$$

Posição

$$P := \text{submatrix}(T, 0, 2, 3, 3) = \begin{bmatrix} 317.574 \\ 650.055 \\ 407.289 \end{bmatrix}$$

$$Px := \text{submatrix}(T, 0, 0, 3, 3) = [317.574]$$

$$Py := \text{submatrix}(T, 1, 1, 3, 3) = [650.055]$$

$$Pz := \text{submatrix}(T, 2, 2, 3, 3) = [407.289]$$

$$Pz - 478 = [-70.711]$$

Posição Pulso

$$Pp := P - 100 \cdot O \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 282.219 \\ 588.818 \\ 478 \end{bmatrix}$$

$$Ppx := \text{submatrix}(Pp, 0, 0, 0, 0) = [282.219]$$

$$Ppy := \text{submatrix}(Pp, 1, 1, 0, 0) = [588.818]$$

$$Ppz := \text{submatrix}(Pp, 2, 2, 0, 0) = [478]$$

Fonte: Autor

$$a1 := \text{atan2}(Ppx, Ppy) - \text{atan2}\left(\sqrt{(Ppx)^2 + Ppy^2 - (50)^2}, 50\right) = [1.047]$$

$$a1 \cdot \frac{180}{\pi} = [60] \quad A1 := a1(0, 0) = 1.047$$

$$Rc2 := Ppx^2 + Ppy^2 - 50^2 = [423854.076]$$

$$a2 := 425$$

$$r := \sqrt{Rc2} - 50 = [601.041]$$

$$a3 := 425$$

$$s := Ppz - 478 = [0]$$

$$t2 := r^2 + s^2 = [361250]$$

$$Ct3 := \frac{(r^2 + s^2 - a2^2 - a3^2)}{2 \cdot a2 \cdot a3} = [0]$$

$$cphi := \frac{(a3^2 - a2^2 - t2)}{-2 \cdot a2 \cdot \sqrt{t2}} = 0.707$$

$$a3a := \text{atan2}\left(Ct3, -\sqrt{1 - Ct3^2}\right) = [-1.571]$$

$$a3b := \text{atan2}\left(Ct3, \sqrt{1 - Ct3^2}\right) = [1.571]$$

$$a3a \cdot \frac{180}{\pi} = [-90] \quad a3b \cdot \frac{180}{\pi} = [90]$$

$$A3 := a3a(0, 0) = -1.571$$

Fonte: Autor

$$phia := \text{atan2}\left(cphi, \sqrt{1 - cphi^2}\right) = 0.785$$

$$phib := \text{atan2}\left(cphi, -\sqrt{1 - cphi^2}\right) = -0.785$$

$$a2a := \text{atan2}(r, s) - phia = [-0.785]$$

$$a2b := \text{atan2}(r, s) - phib = [0.785]$$

$$a2a \cdot \frac{180}{\pi} = [-45] \quad a2b \cdot \frac{180}{\pi} = [45] \quad A2 := a2b(0, 0) = 0.785$$

Inversa de Orientação

$$T13 := H_1(A1) \cdot H_2(A2) \cdot H_3(A3) = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.866 & -0.354 & 282.219 \\ 0.612 & -0.5 & -0.612 & 588.818 \\ -0.707 & 0 & -0.707 & 478 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

$$T46 := H_4(A4) \cdot H_5(A5) \cdot H_6(A6) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(A4) \cdot \cos(A5) \cdot \cos(A6) - \sin(A4) \cdot \sin(A6) & -(\cos(A6) \cdot \sin(A4)) - \cos(A4) \cdot \cos(A5) \cdot \sin(A6) & \cos(A4) \cdot \sin(A5) & 100 \cdot \cos(A4) \cdot \sin(A5) \\ \cos(A4) \cdot \sin(A6) + \cos(A5) \cdot \cos(A6) \cdot \sin(A4) & \cos(A4) \cdot \cos(A6) - \cos(A5) \cdot \sin(A4) \cdot \sin(A6) & \sin(A4) \cdot \sin(A5) & 100 \cdot \sin(A4) \cdot \sin(A5) \\ -(\cos(A6) \cdot \sin(A5)) & \sin(A5) \cdot \sin(A6) & \cos(A5) & 100 \cdot \cos(A5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R13 := \text{submatrix}(T13, 0, 2, 0, 2) = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.866 & -0.354 \\ 0.612 & -0.5 & -0.612 \\ -0.707 & 0 & -0.707 \end{bmatrix}$$

$$R46 := \text{submatrix}(T46, 0, 2, 0, 2) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(A4) \cdot \cos(A5) \cdot \cos(A6) - \sin(A4) \cdot \sin(A6) & -(\cos(A6) \cdot \sin(A4)) - \cos(A4) \cdot \cos(A5) \cdot \sin(A6) & \cos(A4) \cdot \sin(A5) \\ \cos(A4) \cdot \sin(A6) + \cos(A5) \cdot \cos(A6) \cdot \sin(A4) & \cos(A4) \cdot \cos(A6) - \cos(A5) \cdot \sin(A4) \cdot \sin(A6) & \sin(A4) \cdot \sin(A5) \\ -(\cos(A6) \cdot \sin(A5)) & \sin(A5) \cdot \sin(A6) & \cos(A5) \end{bmatrix}$$

$$O36 := R13^T \cdot O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

$$\cos(A5) = 0.985 \quad \arccos(O36(2,2)) \cdot \frac{180}{\pi} = 90$$

$$A5a := \text{atan2}\left(O36(2,2), -\sqrt{1 - O36(2,2)^2}\right)$$

$$A5b := \text{atan2}\left(O36(2,2), \sqrt{1 - O36(2,2)^2}\right)$$

$$\sin(A5) \cdot \sin(A6) = 0.171 \text{ P}$$

$$SA6a := \frac{O36(2,1)}{\sin(A5a)} = 0$$

$$SA6b := \frac{O36(2,1)}{\sin(A5b)} = 0$$

$$A6a := \text{atan2}\left(-\sqrt{1 - SA6a^2}, SA6a\right)$$

$$A6b := \text{atan2}\left(\sqrt{1 - SA6a^2}, SA6a\right)$$

$$A6c := \text{atan2}\left(-\sqrt{1 - SA6b^2}, SA6b\right)$$

$$A6d := \text{atan2}\left(\sqrt{1 - SA6b^2}, SA6b\right)$$

Fonte: Autor

$$\sin(A4) \cdot \sin(A5) = 0.059$$

$$SA4a := \frac{O36(1,2)}{\sin(A5a)} = 0 \quad SA4b := \frac{O36(1,2)}{\sin(A5b)} = 0$$

$$A4a := \text{atan2}\left(-\sqrt{1-SA4a^2}, SA4a\right)$$

$$A4b := \text{atan2}\left(\sqrt{1-SA4a^2}, SA4a\right)$$

$$A4c := \text{atan2}\left(-\sqrt{1-SA4b^2}, SA4b\right)$$

$$A4d := \text{atan2}\left(\sqrt{1-SA4b^2}, SA4b\right)$$

Fonte: Autor

$$A4a \cdot \frac{180}{\pi} = -180 \quad A5a \cdot \frac{180}{\pi} = -90 \quad A6a \cdot \frac{180}{\pi} = -180$$

$$A4b \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad A5b \cdot \frac{180}{\pi} = 90 \quad A6b \cdot \frac{180}{\pi} = 0$$

$$A4c \cdot \frac{180}{\pi} = 180 \quad A6c \cdot \frac{180}{\pi} = 180$$

$$A4d \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad A6d \cdot \frac{180}{\pi} = 0$$

Fonte: Autor