UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS QUÂNTICOS

CARLOS FELIPE LARDIZÁBAL RODRIGUES

PORTO ALEGRE, MARÇO DE 2010

Tese submetida por Carlos Felipe Lardizábal Rodrigues[1] como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador

Dr. Artur Oscar Lopes (PPG-MAT/UFRGS)

Banca Examinadora

Dr. Alexandre Baraviera (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Marcelo Terra Cunha (co-orientador, UFMG)
Dra. Sandra Prado (IF/UFRGS)
Dr. Rogério Steffenon (UNISINOS)

Data de Defesa: 29 de março de 2010.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Resumo: Neste trabalho formulamos uma versão do princípio variacional de pressão no contexto de operadores densidade em mecânica quântica. Tal princípio relaciona um potencial e um conceito de entropia, que é induzido por um sistema de funções iteradas quântico (QIFS), de forma análoga ao que é feito em formalismo termodinâmico com a entropia métrica do operador shift e um potencial contínuo. Iremos definir um conceito de processo estocástico quântico induzido por tais QIFS de forma natural, e faremos considerações sobre funções de Wigner discretas e certos canais quânticos obtidos no nosso contexto.

Abstract: In this work we formulate a version of the variational principle of pressure in the context of density operators in quantum mechanics. Such principle relates a potential and a concept of entropy, which is induced by a quantum iterated function system (QIFS), in a way which is analogous to what is done in thermodynamic formalism with the metric entropy of the shift operator and a continuous potential. We will define a concept of quantum stochastic process induced by such QIFS in a natural way, and we make some considerations on discrete Wigner functions and certain quantum channels obtained in our setting.

Agradecimentos. Ao professor Artur Lopes pela sua orientação de inestimável valor durante o programa de doutorado, e também por sua amizade e pelos muitos anos de iniciação matemática que antecederam este trabalho. Agradeço também aos professores da banca, Marcelo Terra Cunha, Alexandre Baraviera, Sandra Prado e Rogério Steffenon, pelo apoio e pelos ambientes de discussões, que tornam o trabalho de investigação científica uma atividade tão estimulante. Agradeço à minha família e aos meus amigos, mas não os enumero de forma explícita simplesmente para evitar algum injusto esquecimento.

Let us draw an arrow arbitrarily. If as we follow the arrow we find more and more of the random element in the state of the world, then the arrow is pointing towards the future; if the random element decreases the arrow points towards the past...I shall use the phrase 'time's arrow' to express this one way property of time which has no analogue in space...So far as physics is concerned, time's arrow is a property of entropy alone.

Sir Arthur Stanley Eddington

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Um dos objetivos deste trabalho é construir uma versão do Princípio Variacional de Pressão, problema básico do Formalismo Termodinâmico [27], para o contexto de operadores densidade [24],[26]. Tais operadores são uma construção fundamental em Mecânica Quântica.

Como motivação, descrevemos brevemente o problema clássico de pressão.

Considere o espaço de símbolos $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e seja $0 < \theta < 1$. Defina a métrica d_θ, tal que se $x, y \in X$ então $d_\theta(x,y) = \theta^N$, onde N é o maior inteiro tal que $x_i = y_i$, para todo $i < N$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Denote por $F_\theta(X)$ o espaço das funções Lipschitz com respeito a métrica d_θ. O shift é definido por $\sigma(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$ e o operador de transferência é

$$L_f : F_\theta(X) \to F_\theta(X), \ \ (L_f w)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp\left[f(y)\right] w(y)$$

Temos o seguinte resultado básico [27]:

Teorema 1.0.1 *(Ruelle-Perron-Frobenius). Seja $f \in F_\theta(X)$. Então existe β autovalor maximal positivo de L_f com uma autofunção estritamente positiva correspondente $g \in F_\theta(X)$.*

Seja $M_\sigma :=$ o conjunto das probabilidades invariantes para o shift e seja $\mu \in M_\sigma$. Seja $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ partição de X. Defina a entropia da partição por

$$H(\mathcal{A}) = -\sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

Defina a entropia do shift relativa a partição $\mathcal{A}$ por

$$h(\sigma, \mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}\mathcal{A}\Big)$$

e então a entropia métrica da medida μ é

$$h_\mu(\sigma) := \sup_{\mathcal{A}} h(\sigma, \mathcal{A})$$

No formalismo termodinâmico estamos interessados na grandeza dada pela entropia mais um potencial:

$$h_\mu(\sigma) + \int f d\mu$$

e estamos interessados em saber qual é a medida μ, invariante para o shift, que maximiza tal grandeza [27]. Tal teoria é bem entendida matematicamente, e um dos resultados mais importantes é o seguinte:

Teorema 1.0.2 *(Princípio variacional de pressão). Seja $f \in F_\theta(X)$. Então*

$$P(f) := \sup_{\mu \in M_\sigma} \{h_\mu(\sigma) + \int f d\mu\} = \log \beta$$

onde β é o autovalor maximal para L_f. Tal supremo é atingido por uma única medida de probabilidade $\sigma - invariante$.

Agora considere a questão de obter uma versão de tal teorema para o espaço dos operadores densidade. Dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, um operador densidade sobre este espaço é um operador $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que é hermitiano, positivo, e cujo traço é igual a 1. Uma parte considerável de nossa análise será sobre sistemas que podem assumir um número finito de estados puros. Desta forma os operadores podem ser descritos por matrizes finitas. Agora, note que os operadores densidade não fazem parte do espaço de símbolos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, então o operador shift não está definido. Desta forma o operador de transferência e a entropia definidos acima não fazem sentido no nosso contexto. Portanto, parte substancial de nosso trabalho será obter novas construções que permitam demonstrar um resultado semelhante. Iremos provar o seguinte resultado, dado pelo teorema 6.5.3:

Teorema (Princípio variacional de pressão para matrizes densidade)

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*)\Big) tr(W_j \rho_W W_j^*) \leq \log \beta \qquad (1.1)$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}$$

Acima, definimos a entropia de um processo por

$$h_V(W) := -\sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho_W W_i^*) \sum_{j=1}^{k} tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

Veremos que tal entropia contém a entropia para cadeias de Markov como caso particular. Ainda, o número β que aparece em 1.1 é autovalor de

$$\mathcal{L}_H(\rho) := \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^*$$

Acima os operadores H_i são lineares, e formam um hamiltoniano do tipo $H\rho = \sum_i H_i \rho H_i^*$. Por sua vez os V_i e W_i são lineares, obtidos a partir de um Quantum Iterated Function System, que será descrito com detalhe.

Outro objetivo deste trabalho é o de fornecer uma definição de processo estocástico quântico. Veremos que é possível obter uma definição natural a partir de QIFS, e analisamos algumas de suas propriedades. Ainda, estamos interessados em desenvolver ferramentas gerais que permitam a análise de problemas em Computação Quântica. Nossa análise irá considerar, em geral, apenas uma unidade de informação (qubit), e faremos algumas considerações quando um número maior de unidades for relevante (via produto tensorial).

No capítulo 2 fornecemos uma definição de processo estocástico quântico e sobre a classe especial de sistemas de funções iteradas (QIFS) que será de nosso interesse. Diversas construções feitas ali seguem os trabalhos [24], [29]. No capítulo 3 falamos do operador de Ruelle e algumas construções básicas relacionadas com um princípio variacional de pressão. No capítulo 4 analisamos mais características de IFS e no capítulo 5 definimos a entropia que iremos usar, bem como outras construções relevantes. Finalmente o capítulo 6 enuncia e prova uma versão do princípio variacional de pressão no contexto de matrizes densidade. O capítulo 7 define a função de Wigner discreta, seguindo [25], e contém algumas relações entre tais funções e os canais quânticos considerados anteriormente.

Capítulo 2

Processos estocásticos quânticos e QIFS

2.1 Probabilidade em mecânica quântica

Seja $\mathcal{H}_N$ um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita N, com um elemento de tal espaço sendo denotado por $|\psi\rangle$. Se um sistema quântico encontra-se em um certo estado conhecido $|\psi\rangle$, dizemos que o sistema está em um **estado puro**. Caso contrário, dizemos que o sistema encontra-se em um **estado misturado**. Cada sistema quântico possuirá certos estados puros, fixados ao se definir o problema. Ainda, tais estados são normalizados de modo que $\||\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Queremos que para qualquer fase α, o elemento $|\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$ descreva o mesmo estado físico que $|\psi\rangle$. Então identificamos tais estados, e portanto o **espaço de estados puros**, denotado por $\mathcal{P}_N$, possui $2N-2$ dimensões reais. Topologicamente, ele pode ser representado pelo espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^{N-1}$ com a métrica de Fubini-Study, dada por

$$D_{FS}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) := arccos|\langle\phi|\psi\rangle|.$$

Um **qubit** é um vetor unitário em um espaço vetorial complexo de dimensão 2,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (i.e., $\langle\psi|\psi\rangle = 1$). Podemos reescrever tal equação como

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle),$$

onde θ, ϕ, γ são números reais. Como trabalhamos no espaço projetivo, o fator $e^{i\gamma}$ pode ser ignorado e então podemos escrever

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Os números θ e ϕ definem um ponto na esfera unitária tridimensional. Tal esfera é chamada **esfera de Bloch** e fornece uma maneira útil de visualizar o estado de um qubit. No entanto, não existe uma generalização simples da esfera para múltiplos qubits.

Observação Pelo que observamos acima, podemos dizer que o espaço de estados puros é $\mathbb{CP}^n$, para algum n. Determinar o valor de n depende da natureza do experimento físico que estamos modelando. Por exemplo, considere uma partícula de spin 1/2, um exemplo de sistema de dois níveis. O espaço de estados de tal sistema é $\mathbb{CP}^1$. Para um sistema de N níveis, o formalismo quântico trata cada qudit (um estado que é sobreposição de d estados puros) da mesma forma, mas o seu significado depende do problema (por exemplo, temos um átomo com N níveis relevantes de energia). Por exemplo, é possível utilizar outras unidades de informação quântica, como por exemplo o **qutrit**, escrito na forma

$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle,$$

ou seja, desta vez consideramos sobreposições de 3 estados base.

$\diamondsuit$

Seja $\mathcal{H}_N$ um espaço de Hilbert de dimensão N, denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno. Em geral, vamos considerar que $\mathcal{H}_N = \mathbb{C}^N$. Um vetor em $\mathbb{C}^N$ será denotado por $\psi = |\psi\rangle$ e o seu dual por $\psi^* = \langle\psi|$ de forma que

$$(\langle\psi|)\eta\rangle := \langle\psi|\eta\rangle := \langle\psi, \eta\rangle$$

Com tal notação segue que uma projeção pode ser escrita como

$$|\psi\rangle\langle\psi| : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \ \ (|\psi\rangle\langle\psi|)|\eta\rangle := |\psi\rangle\langle\psi|\eta\rangle = \langle\psi|\eta\rangle|\psi\rangle$$

Denote por ρ^*, ou por $\rho^\dagger$, o adjunto de $\rho : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$. Dizemos que $\rho : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$ é **hermitiano** se $\rho = \rho^*$. Dizemos que um operador hermitiano $P : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$ é **positivo**, denotado por $P \geq 0$, se

$$\langle Pv, v\rangle \geq 0, \ \ \forall v \in \mathcal{H}_N$$

Definição Um **operador densidade** é um operador ρ agindo em $\mathcal{H}_N$, com $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$, $tr\rho = 1$. Tais operadores são também chamados de **matrizes densidade**. Denote o espaço de operadores densidade por $\mathcal{M}_N$.

Um estado misturado ρ pode ser escrito como

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{2.1}$$

onde os p_i são números positivos com $\sum_i p_i = 1$, os ψ_i tem norma igual a 1 e são ortogonais entre si. Um estado puro será representado por uma projeção em um dos estados, ou seja,

$$\rho = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

para algum i. Lembre que um estado puro é tal que seu operador densidade associado satisfaz $tr(\rho^2) = 1$. Se um estado é misturado, temos apenas $tr(\rho^2) < 1$. Ainda, um operador será um operador densidade se, e somente se, seu traço for igual a 1 e se tal operador for positivo [26].

Exemplo 2.1.1 *Suponha que a evolução de um sistema quântico é descrita por um operador unitário U em um espaço de Hilbert de dimensão finita. Se o sistema encontra-se em um estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i então depois que a evolução ocorreu, o sistema estará no estado $U|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i. Portanto, a evolução de um operador densidade dado por $\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ é descrita por*

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \stackrel{U}{\mapsto} \sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger = U\rho U^\dagger.$$

$\diamondsuit$

Definição A **entropia de von Neumann** de um sistema quântico descrito por uma matriz densidade ρ é definida por

$$S(\rho) := -tr(\rho \log \rho)$$

Se λ_i são os autovalores de ρ então a entropia de von Neumann pode ser escrita como

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i \tag{2.2}$$

Ressaltamos que tal entropia não possui nenhuma característica dinâmica.

A entropia é não negativa, e será igual a zero se, e somente se, o estado for puro. Além disso, em um espaço de Hilbert de dimensão d, a entropia é no máximo igual a $\log d$. A entropia será igual a $\log d$ se, e somente se, o sistema estiver no **estado de mistura máxima** $\rho_* = I/d$.

2.2 Processos estocásticos quânticos

Nesta seção descrevemos uma conhecida definição de processos estocásticos quânticos. A construção básica, baseada em observáveis e instrumentos, segue [29].

Definição Um **espaço de estados** é um par (V, K), onde

1. V é um espaço de Banach real com norma $\|\cdot\|$.
2. K é um cone fechado em V ($\alpha u + \beta v \in K$, $u, v \in K$, $\alpha, \beta \geq 0$).
3. Se $u, v \in K$ então $\|u\| + \|v\| = \|u + v\|$
4. Se $u \in V$ e $\epsilon > 0$ então existem $u_1, u_2 \in K$ tais que $u = u_1 - u_2$ e $\|u_1\| + \|u_2\| < \|u\| + \epsilon$.

Definição Se (V, K) é um espaço de estados então existe um único funcional linear positivo $\tau : V \to \mathbb{R}$ tal que $\tau(u) = \|u\|$ se $u \in K$, e $\tau(u) \leq \|u\|$ se $u \in V$. Além disso, dizemos que $u \in K$ é um **estado** se $\tau(u) = 1$.

Exemplo 2.2.1 *Mecânica quântica sobre um espaço de Hilbert. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão finita e seja V o espaço dos operadores autoadjuntos em $\mathcal{H}$. Seja K o conjunto dos operadores positivos em V. Neste caso temos $\tau(B) = tr(B)$ para todo B operador em V.*

$\diamondsuit$

Definição Um **espaço de fase** é um espaço mensurável (Ω, Σ) onde Ω representa o conjunto dos resultados possíveis para uma medição e Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Seja V^* o espaço dual de V. Introduza uma ordem parcial em V^* definindo $\phi \geq \psi$ se, e somente se, $\phi(u) \geq \psi(u)$, para todo $u \in K$.

Definição Um **efeito** é uma aplicação $\phi \in V^*$ tal que $0 \leq \phi \leq \tau$. Denotamos o espaço de efeitos por $\mathcal{E} \subset V^*$.

Definição Dizemos que $x : \Sigma \to \mathcal{E}$ é um **observável** se x é uma medida que toma valores no conjunto de efeitos, tal que $x(\Omega) = \tau$.

Se $E \in \Sigma$, $u \in K$ e $\tau(u) = 1$ então $x(E)u$ pode ser interpretado como sendo a probabilidade de que o resultado da medição da quantidade física representada por x, preparada no estado u, pertença ao conjunto E. No caso de mecânica quântica em um espaço de Hilbert, efeitos podem ser identificados com operadores limitados A tais que $0 \leq A \leq 1$ pela fórmula

$$\phi_A(W) = tr(AW).$$

Definição Uma **operação** é um operador linear positivo $T : V \to V$ que satisfaz $0 \leq \tau(Tu) \leq \tau(u)$ para todo $u \in K$. O espaço de operações será denotado por $\mathcal{O}$.

Definição Uma **medida com valores em operações**, ou um OVM sobre um espaço de fase é uma aplicação $\mathcal{J} : \Sigma \to \mathcal{O}$ tal que se $\{E_n\}$ for uma sequência de conjuntos disjuntos em Σ, então $\mathcal{J}(\cup E_n) = \sum \mathcal{J}(E_n)$.

Definição Seja $\mathcal{J} : \Sigma \to \mathcal{O}$ um OVM, então dizemos que $\mathcal{J}$ é um **instrumento** se

$$\tau(\mathcal{J}(\Omega)u) = \tau(u), \forall u \in V. \tag{2.3}$$

Interpretamos tal noção da seguinte maneira. Seja $\mathcal{J}$ um instrumento, $E \in \Sigma$, $u \in K$. Se u é o estado do sistema no instante anterior à medição e o instrumento $\mathcal{J}$ determina um valor em E então o estado resultante é dado por

$$\frac{\mathcal{J}(E)u}{\tau(\mathcal{J}(E)u)} \tag{2.4}$$

Observamos que para cada instrumento $\mathcal{J}$, existe um único observável $x_{\mathcal{J}} : \Sigma \to \mathcal{E}$ tal que $\tau(\mathcal{J}(E)u) = x_{\mathcal{J}}(E)u$, $E \in \Sigma$, $u \in K$. Ainda, é possível que dois instrumentos diferentes correspondam ao mesmo observável.

Os seguintes são exemplos de instrumentos.

Exemplo 2.2.2 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, e $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores autoadjuntos A em $\mathcal{H}$ tais que*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, Ae_k \rangle < \infty$$

e possuem o mesmo valor em qualquer base ortonormal $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$.

Seja $\Omega = \{1, \ldots, N\}$, ou $\Omega = \mathbb{N}$, seja $\{P_i\}_{i \in \Omega}$ uma família de projeções ortogonais em $\mathcal{H}$ tais que $I = \sum_i P_i$. Defina

$$\mathcal{T} : \Sigma \to \mathcal{O}$$

$$x_{\mathcal{T}} : \Sigma \to \mathcal{E}$$

como sendo

$$\mathcal{T}(E)\rho := \sum_{i \in E} P_i \rho P_i, \tag{2.5}$$

$$x_{\mathcal{T}}(E)\rho := \sum_{i \in E} \tau(P_i \rho), \tag{2.6}$$

para todo $E \subset \Omega$ *e* $\rho \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

$\Diamond$

Exemplo 2.2.3 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert,* Ω *um espaço topológico,* Σ σ*-álgebra de* Ω *e* m *uma medida em* (Ω, Σ). *Seja* $\{P_a\}_{a \in \Omega}$ *uma família de projeções em* $\mathcal{H}$*, tais que a aplicação* $a \to P_a$ *é fortemente contínua e* $\int_\Omega P_a dm(a) = I$. *Então defina*

$$\mathcal{T} : \Sigma \to \mathcal{O}$$

$$x_{\mathcal{T}} : \Sigma \to \mathcal{E}$$

como sendo

$$\mathcal{T}(E)\rho := \int_E P_a \rho P_a dm(a) \tag{2.7}$$

$$x_{\mathcal{T}}(E)\rho := \int_E \tau(P_a \rho) dm(a), \tag{2.8}$$

para todo $E \subset \Omega$ *e* $\rho \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

$\Diamond$

Exemplo 2.2.4 *Seja* X *um espaço de Hausdorff localmente compacto,* V *o espaço das funções contavelmente aditivas na* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(X)$ *de* X *munido com a norma de variação total. Seja* K *o conjunto das medidas não-negativas de* V. *Seja* $(\Omega, \Sigma) = (X, \mathcal{B}(X))$. *Então*

$$\mathcal{T}(E)\mu(A) = \mu(A \cap E), \tag{2.9}$$

para $\mu \in V$, $A, E \in \Sigma$ *é um instrumento, e o observável correspondente é*

$$x_{\mathcal{T}}(E)\mu = \mu(E) \tag{2.10}$$

$\Diamond$

Definição Um **processo estocástico quântico** (quantum stochastic process, QSP) é uma família arbitrária de instrumentos $\{\mathcal{I}_t\}_{t\in\mathfrak{I}}$. O parâmetro t pode ser interpretado como sendo o tempo físico. Seja $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}$ ou $\mathfrak{I} = \mathbb{R}$ para tempo discreto ou contínuo, respectivamente.

As **distribuições de dimensão finita** do processo são medidas $\mu^u_{t_0,\ldots,t_{n-1}}$ definidas em $(\Omega^n, B(\Omega^n))$ como sendo as extensões naturais das funções dadas por

$$\mu^u_{t_0,\ldots,t_{n-1}}(E_0 \times \cdots \times E_{n-1}) = \tau((\mathcal{T}_{t_{n-1}}(E_{n-1}) \circ \mathcal{T}_{t_{n-2}}(E_{n-2}) \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{t_0}(E_0))u), \tag{2.11}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $t_0 < \cdots < t_{n-1}$, $t_i \in \mathcal{I}$, $u \in V$ e $E_0, \ldots, E_{n-1} \in \Sigma$. O significado de tal expressão é o seguinte: $\mu^u_{t_0,\ldots,t_{n-1}}(E_0 \times \cdots \times E_{n-1})$ é a probabilidade conjunta de que medições sucessivas do sistema pelos instrumentos $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_{n-1}$ nos instantes $t_0, \ldots, t_{n-1}$ produzam valores em $E_0, \ldots, E_{n-1}$, quando o estado de pré-medição for u.

Definição Dizemos que um QSP é **Markov** se existe uma família de transições de probabilidade $\{P_{s,t}\}_{s<t}$ tais que

$$\mu^u_{t_0,\ldots,t_{n-1}}(E_0 \times \cdots \times E_{n-1})$$
$$= \int_{E_0}\int_{E_1}\cdots\int_{E_n} P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n)\cdots P_{t_0,t_1}(y_0, dy_1)\mu^u_{t_0}(dy_0) \tag{2.12}$$

para todo $t_0 < \ldots < t_n, t_i \in \mathcal{I}$, $u \in V$, $E_0, \ldots, E_n \in \Sigma$. Uma **transição de probabilidade** é uma aplicação $P : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que $P(\cdot, E)$ é mensurável para todo $E \in \Sigma$ e $P(x, \cdot)$ é uma medida de probabilidade para todo $x \in \Omega$. Um QSP Markov é **homogêneo** se as transições de probabilidade $P_{s,t}$ dependem apenas da diferença $t - s$.

Observação Em contraste com a teoria clássica de processos estocásticos, as transições de probabilidade de um QSP Markov não satisfazem em geral a equação de Chapman-Kolmogorov (ver seção 2.7).

$\diamondsuit$

Definição Se o espaço de fase (Ω, Σ) está munido com a medida de Borel m, uma transição de probabilidade P pode ter a forma

$$P(x, E) = \int_E p(x, y)dm(y) \tag{2.13}$$

onde $p : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ é uma **função de transição**, ou seja, uma aplicação mensurável tal que $\int_\Omega p(x, y)dm(y) = 1$.

Considere um sistema que é medido sucessivamente por um instrumento $\mathcal{I}$. Assuma que tal evolução é descrita por um grupo $\mathcal{G} = \{T_t\}_{t\in\mathfrak{I}}$ de automorfismos isométricos de V. Então a evolução do sistema pode ser descrita pelo QSP $\{\mathcal{I}_t\}_{i\in\mathfrak{I}}$, onde $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_{T_t}$ é um **instrumento transformado**, ou seja,

$$\mathcal{I}_t(E) = T_t^{-1} \circ \mathcal{I}(E) \circ T_t \tag{2.14}$$

para $E \in \Sigma$. Denotaremos tal processo por $\mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{I})$.

Exemplo 2.2.5 *(Instrumento nuclear) Seja (V, K) um espaço de estados, (Ω, Σ) um espaço de fase e x um observável. Seja $\phi : \Omega \to V$ um operador x-mensurável, x-essencialmente limitado. Então a fórmula*

$$\mathcal{I}(E) = \int_E \phi dx, \;\; E \in \Sigma \tag{2.15}$$

define um instrumento. Ainda, se m é uma medida em (Ω, Σ), dizemos que x é **absolutamente contínua** *com respeito a m (ver [29]) se existir uma função mensurável $f : \Omega \to \mathcal{E}$ tal que*

$$\int_\Omega f dm = \tau \tag{2.16}$$

e

$$x(E) = \int_E f dm, \;\; E \in \Sigma \tag{2.17}$$

Neste caso, (2.15) assume a forma

$$\mathcal{I}(E)u = \int_E (f(a)u)\phi(a)dm(a), \;\; E \in \Sigma, u \in V \tag{2.18}$$

$\Diamond$

A seguinte proposição possui demonstração em [29].

Proposição 2.2.6 *Seja $\mathcal{I}$ um instrumento nuclear absolutamente contínuo e seja $\mathcal{G} = \{T_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ um semigrupo de automorfismos isométricos sobre o espaço de estados V. Então o processo $\mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ é um processo de Markov quântico homogêneo com função de transição dada por*

$$p_t(a, b) = f(b)(T_t(\phi(a))) \tag{2.19}$$

Os seguintes são exemplos de processos de Markov quânticos.

Exemplo 2.2.7 *Seja $\mathcal{T}$ o instrumento do exemplo 2.2.4,*

$$\mathcal{T}(E)\mu(A) = \mu(A \cap E), \tag{2.20}$$

e seja $\Theta : X \to X$ uma aplicação mensurável. Então Θ gera o automorfismo $T_\Theta : V \to V$, $T_\Theta(\mu)(A) = \mu(\Theta^{-1}(A))$, para $\mu \in V$, $A \in \mathcal{B}(X)$. O processo $\mathcal{C}(T_\Theta, \mathcal{T})$ é um processo de Markov quântico e sua transição de probabilidade é dada por $P(x, E) = \chi_E(\Theta x)$, para $x \in X$, $E \in \mathcal{B}(X)$.

$\diamondsuit$

Exemplo 2.2.8 *Seja $\mathcal{T}$ o instrumento dado no exemplo 2.2.2 ou 2.2.3, tal que cada P_a é atômico, $a \in \Omega$, ou seja, $P_a = |\alpha_a\rangle\langle\alpha_a|$, para algum $|\alpha_a\rangle \in \mathcal{H}$. Assuma que o sistema evolui de acordo com $T_U(\rho) = U^{-1}\rho U$, para algum operador unitário U. Segue que $\mathcal{C}(T_U, \mathcal{T})$ é um processo de Markov quântico homogêneo com função de transição dada por*

$$p(a, b) = tr(P_b U^{-1} P_a U)/D, \tag{2.21}$$

onde $D = \langle\alpha_a|\alpha_a\rangle$. Consequentemente,

$$p(a, b) = |\langle\alpha_b|U|\alpha_a\rangle|^2/D \tag{2.22}$$

$\diamondsuit$

2.3 IFS clássicos

Definição Seja Ω um espaço métrico compacto e $f_i : \Omega \to \Omega$, $p_i : \Omega \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$, tais que para cada $x \in \Omega$ a condição $\sum_{i=1}^{k} p_i(x) = 1$ é satisfeita. Chamamos o conjunto $\mathcal{F}_{Cl} = \{\Omega, f_i, p_i : i = 1, \ldots, k\}$ de **sistema de funções iteradas** (iterated function system, IFS).

Entendemos as funções f_i dadas acima como sendo aplicações clássicas que agem aleatoriamente em Ω, com probabilidades p_i.

Seja $\mathcal{M}^1(\Omega)$ o espaço de probabilidades em Ω. Associado ao IFS $\mathcal{F}_{Cl}$ temos o operador de Markov $P : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$,

$$(P\mu)(B) = \sum_{i=1}^{k} \int_{f^{-1}(B)} p_i(x) d\mu(x),$$

onde B é um subconjunto mensurável de Ω.

Definição Seja d a métrica em Ω. Um IFS é **hiperbólico** se, para todo $i = 1, \ldots, k$,

1. $d(f_i(x), f_i(y)) \leq L_i d(x,y)$, para algum $L_i < 1$, $\forall x, y \in \Omega$.

2. $|p_i(x) - p_i(y)| \leq K_i d(x,y)^\alpha$, para algum $\alpha \in (0,1]$, $K_i \in \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \Omega$.

3. $p_i(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.

O operador de Markov associado a um IFS hiperbólico possui uma única medida de probabilidade invariante, isto é, μ_* tal que $P\mu_* = \mu_*$.

2.4 Exemplos de IFS

Exemplo 2.4.1 *Seja $\Omega = [0,1]$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$ e as transformações afins $f_1(x) = x/3$, $f_2(x) = x/3 + 2/3$, $x \in \Omega$. Ambas as funções são contrações, com constantes de Lipschitz $L_1 = L_2 = 1/3 < 1$, portanto este IFS é hiperbólico. Portanto existe uma única medida invariante atrativa μ_*.*

$\Diamond$

Exemplo 2.4.2 *Como antes, $\Omega = [0,1]$, $k = 2$ e $f_1(x) = x/3$, $f_2(x) = x/3 + 2/3$, $x \in \Omega$. Defina $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1 - x$. Este IFS não é hiperbólico, mas ainda assim uma única medida invariante existe.*

$\Diamond$

Exemplo 2.4.3 $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, *$k = 4$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$. Considere as seguintes transformações afins:*

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Este IFS também não é hiperbólico, já que as transformações f_i não são globalmente contrativas. Tal IFS também admite uma medida invariante.

$\Diamond$

Exemplo 2.4.4 $\Omega = S^2$. *Seja $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, seja $f_1(\theta, \phi) = (\theta, \phi + \xi_1)$ (rotação em torno do eixo z de ângulo ξ_1) e f_2 uma rotação de ângulo ξ_2 em torno de um eixo inclinado por um ângulo β como respeito ao eixo z. Ambas aplicações são isometrias, portanto este IFS não é hiperbólico. A medida de Lebesgue em $[0,1]$ é ume medida invariante para este IFS.*

$\diamondsuit$

Exemplo 2.4.5 *$\Omega = [0,1]$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, $f_1(x) = 2x$ para $x < 1/2$ e $f_1(x) = 2(1-x)$ para $x \geq 1/2$. $f_2(x) = 2x$ para $x < 1/2$ e $f_2(x) = 2x - 1$ para $x \geq 1/2$. Ambas aplicações são expansivas, portanto este IFS não é hiperbólico. A medida de Lebesgue em $[0,1]$ é uma medida invariante para este IFS.*

$\diamondsuit$

2.5 IFS quânticos

Definição Sejam $V_i : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$, $W_i : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$, $i = 1, \ldots, k$ operadores lineares invertíveis, com $\sum W_i^\dagger W_i = I$. Defina $F_i : \mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N$, $i = 1, \ldots, k$ como sendo

$$F_i(|\phi\rangle) := \frac{V_i(|\phi\rangle)}{\|V_i(|\phi\rangle)\|}.$$

Defina também $p_i : \mathcal{P}_N \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, k$,

$$p_i(|\phi\rangle) := \|W_i(|\phi\rangle)\|^2.$$

Chamamos o conjunto $\mathcal{F}_N = \{\mathcal{P}_N, F_i, p_i : i = 1, \ldots, k\}$ de **QIFS para estados puros**.

Note que na definição acima, vale a condição $\sum_i p_i(|\phi\rangle) = 1$. Ainda, tais QIFS não podem ser hiperbólicas, pois as aplicações F_i não são contrações com respeito a métrica de Fubini-Study em $\mathcal{P}_N$.

Para poder definir IFS para estados misturados, consideramos o espaço $\mathcal{M}_N$ dos operadores densidade para descrever tais estados.

Definição Sejam $G_i : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$, $p_i : \mathcal{M}_N \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, k$ e tal que $\sum_i p_i(\rho) = 1$. Chamamos o conjunto

$$\mathcal{F}_N = \{\mathcal{M}_N, G_i, p_i : i = 1, \ldots, k\} \tag{2.23}$$

de **QIFS para estados misturados**.

A definição acima é mais geral do que a anterior porque, em particular, G_i e p_i podem ser definidos por

$$G_i(\rho) := \frac{V_i \rho V_i^\dagger}{tr(V_i \rho V_i^\dagger)} \tag{2.24}$$

e

$$p_i(\rho) := tr(W_i \rho W_i^\dagger) \tag{2.25}$$

Portanto cada QIFS definido em $\mathcal{P}_N$ pode ser estendido de forma a ser um QIFS em $\mathcal{M}_N$.

Definição Um QIFS é **homogêneo** se p_i e $G_i p_i$ são aplicações afins, $i = 1, \ldots, k$. Um QIFS de estados misturados é homogêneo se V_i=W_i, $i = 1, \ldots, k$. O QIFS segundo a definição geral (i.e., quando $W_i \neq V_i$) será dito **não homogêneo**.

Aqui podemos definir como no caso clássico o operador de Markov $P : \mathcal{M}(\mathcal{M}_N) \to \mathcal{M}(\mathcal{M}_N)$,

$$(P\mu)(B) = \sum_{i=1}^{k} \int_{G_i^{-1}(B)} p_i(\rho) d\mu(\rho),$$

Definimos também $\Lambda : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\Lambda(\rho) := \sum_{i=1}^{k} p_i(\rho) G_i(\rho)$$

Se a QIFS é homogênea, temos

$$\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^\dagger \tag{2.26}$$

Teorema 2.5.1 *Um estado misturado ρ é Λ-invariante se, e somente se,*

$$\rho = \int_{\mathcal{M}_N} x d\mu(x), \tag{2.27}$$

para alguma medida P-invariante μ.

A seção 4.5 contém a demonstração do teorema acima, que requer algumas construções preliminares.

Para definirmos QIFS hiperbólicos, precisamos especificar uma distância no espaço de estados quânticos misturados. Três possibilidades são as seguintes:

$$D_{HS}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{tr[(\rho_1 - \rho_2)^2]}$$
$$D_{tr}(\rho_1, \rho_2) = tr\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2}$$

$$D_{Bures}(\rho_1,\rho_2) = \sqrt{2\{1 - tr[(\rho_1^{1/2}\rho_2\rho_1^{1/2})^{1/2}]\}}$$

Tais métricas geram a mesma topologia em $\mathcal{M}$. Munindo o espaço de estados misturados com uma métrica usamos uma definição de hiperbolicidade análoga a do caso para IFS.

Definição Um QIFS é **hiperbólico** se as aplicações quânticas G_i forem contrações com respeito a uma das distâncias em $\mathcal{M}_N$ e se as p_i forem Hölder-contínuas e positivas.

Proposição 2.5.2 *Se um QIFS (2.23) é homogêneo e hiperbólico então o operador de Markov associado P possui uma única medida invariante μ. Tal medida invariante determina um único estado Λ-invariante $\rho \in \mathcal{M}_N$, dado por (2.27).*

A seção 4.5 contém a demonstração da proposição acima.

2.6 Exemplos de QIFS

Exemplo 2.6.1 *Seja $\Omega = \mathcal{P}_N = \mathbb{CP}^{N-1}$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, $F_1(|\psi\rangle) = U_1(|\psi\rangle)$, $F_2(|\psi\rangle) = U_2(|\psi\rangle)$, onde os U_i são unitários. Neste caso ambas aplicações são isometrias. Portanto a medida Riemanniana natural (Fubini-Study) em $\mathcal{P}_N$ é invariante, mas sua unicidade depende de U_1 e U_2.*

$\diamondsuit$

Exemplo 2.6.2 $\Omega = \mathcal{M}_N$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, $G_1(\rho) = U_1\rho U_1^\dagger$, $G_2(\rho) = U_2\rho U_2^\dagger$. *A matriz identidade normalizada, $\rho_* = I/N$ é Λ-invariante, independentemente da forma dos operadores unitários U_1 e U_2. Note que podemos escrever*

$$\rho_* = \int_{\mathcal{M}_N} \rho d\mu(\rho)$$

onde a medida μ, distribuida uniformemente sobre $\mathcal{P}_N$ (a medida de Fubini-Study), é P-invariante.

$\diamondsuit$

Exemplo 2.6.3 *Seja $\Omega = \mathcal{M}_N$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, $G_1(\rho) = (\rho + 2\rho_1)/3$, $G_2(\rho) = (\rho + 2\rho_2)/3$, onde escolhemos os projetores $\rho_1 = |1\rangle\langle 1|$ e $\rho_2 = |2\rangle\langle 2|$ de modo que sejam ortogonais. Como G_1 e G_2 são contrações (com constante de Lipschitz $1/3$), este QIFS é hiperbólico e portanto existe uma única medida invariante.*

$\Diamond$

Definição Uma aplicação Λ é **completamente positiva**, CP, se $\Lambda \otimes I$ for positiva para qualquer extensão do espaço de Hilbert inicial $\mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_E$.

Sabemos que toda aplicação CP que preserva o traço pode ser representada (de forma não única) na forma

$$\Lambda_K(\rho) = \sum_{j=1}^{k} V_j \rho V_j^\dagger, \text{ com } \sum_{j=1}^{k} V_j^\dagger V_j = I,$$

onde os V_j são operadores lineares. Chamamos tal forma de **forma de Stinespring-Kraus**. Se além disso, temos $\sum_{j=1}^{k} V_j V_j^\dagger = I$, então $\Lambda(I/N) = I/N$ e a aplicação Λ é dita **unitária**. Esse é o caso se cada um dos V_j é normal: $V_j V_j^\dagger = V_j^\dagger V_j$.

Definição Uma aplicação CP unitária e que preserva o traço é dita **biestocástica**.

Um exemplo de aplicação biestocástica é

$$\Lambda_U(\rho) = \sum_{i=1}^{k} p_i U_i \rho U_i^\dagger,$$

onde os U_i são operadores unitários e $\sum_i p_i = 1$.

Note que fazendo $G_i(\rho) = U_i \rho U_i^\dagger$, temos que o exemplo 2.6.2 faz parte dessa classe de QIFS. Chamaremos tais QIFS de **unitários**. Para um QIFS unitário, temos que ρ_* é um estado invariante para Λ_U e também que δ_{ρ_*} é invariante para o operador de Markov P_U induzido por essa QIFS.

Definição Dizemos que matrizes unitárias de mesma dimensão possuem **diagonais em blocos comuns** se elas forem diagonais em bloco na mesma base, e com os mesmos blocos.

Proposição 2.6.4 *Assuma que p_i, $i = 1, \ldots, k$ são estritamente positivos. Então o estado de mistura máxima ρ_* é o único estado invariante para o operador Λ_U se, e somente se, os operadores unitários U_i, $i = 1, \ldots, k$ não forem diagonais em blocos comuns.*

Para provar a proposição, precisamos de um lema.

Lema 2.6.5 *Seja $U = (U_{nm})_{n,m=1,\dots,N}$ uma matriz unitária de ordem N. Suponha que existem dois conjuntos não vazios de índices A e B tais que $A \cup B = I := \{1, \dots, N\}$ e $A \cap B = \emptyset$. Então $U_{nm} = 0$ para $n \in A$ e $m \in B$ implica $U_{nm} = 0$ para $n \in B$ e $m \in A$.*

Prova do lema Calculamos o número de elementos do conjunto A:

$$|A| = \sum_{n\in A}\sum_{m\in I}|U_{nm}|^2 = \sum_{n\in A}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2 + \sum_{n\in A}\sum_{m\in B}|U_{nm}|^2$$

$$= \sum_{n\in A}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2 = \sum_{n\in I}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2 - \sum_{n\in B}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2$$

$$= |A| - \sum_{n\in B}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2,$$

e portanto $\sum_{n\in B}\sum_{m\in A}|U_{nm}|^2 = 0$.

□

Prova da proposição Sejam U_i, $i = 1, \dots, k$ diagonais em bloco na base comum a elas, e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_L$ as dimensões dos blocos, onde $\sum_{j=1}^{L} \alpha_j = N$. Defina, para σ_j quaisquer tais que $\sum_{j=1}^{L} \sigma_j = 1$, a seguinte matriz densidade diagonal:

$$\rho := \bigoplus_{j=1}^{L} \frac{\sigma_j}{\alpha_j} 1_{\alpha_j}$$

Então $U_i \rho U_i^\dagger = \rho$ para cada $i = 1, \dots, k$. Portanto ρ é Λ_U-invariante e δ_ρ é uma medida P_U-invariante em $\mathcal{P}_N$ para uma escolha arbitrária de $(\sigma_j)_{j=1,\dots,L}$.

Reciprocamente, seja ρ um estado invariante para Λ_U tal que $\rho \neq \rho_*$. Então ρ pode ser escrito na forma

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|,$$

onde $|\Psi_m\rangle \in \mathcal{P}_N$, $\langle\Psi_n|\Psi_m\rangle = \delta_{mn}$, $n, m = 1, \dots, N$, e $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N$, $\sigma_1 < 1/N$.

Para $\gamma \in [0, 1]$, defina o operador densidade

$$\rho_\gamma := \gamma\rho + (1-\gamma)\rho_* = \sum_{n=1}^{N} \sigma'_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|,$$

onde $\sigma'_n := \gamma\sigma_n + (1-\gamma)/N$, $n = 1, \ldots, N$. Então ρ_γ também é um estado invariante para Λ_U. Seja

$$\gamma := \frac{1}{1 - \sigma_1 N}$$

Tal escolha implica $\sigma'_1 = 0$ e $\sum_{n=1}^N \sigma'_n = 1$. Assuma que $\sigma'_n = 0$ para $n = 1, \ldots, n'$ e $\sigma'_n > 0$ para $n = n'+1, \ldots, N$, onde $n' \geq 1$. A equação $\Lambda_U(\rho_\gamma) = \rho_\gamma$ pode ser reescrita na forma

$$\sigma'_n = \sum_{i=1}^k p_i \sum_{m=1}^N |(U_i)_{nm}|^2 \sigma'_m,$$

onde $(U_i)_{nm}$, $n, m = 1, \ldots, N$ são os elementos das matrizes U_i, $i = 1, \ldots, k$ na base $(|\Psi_n\rangle)_{n=1,\ldots,N}$.

Para $n = 1, \ldots, n'$, obtemos

$$0 = \sum_{i=1}^k p_i \sum_{m=n'+1}^N |(U_i)_{nm}|^2 \sigma'_m.$$

Portanto, $(U_i)_{nm} = 0$ para $n = 1, \ldots, n'$ e $m = n'+1, \ldots, N$. Usando o lema, deduzimos que $(U_i)_{nm} = 0$ para $n = n'+1, \ldots, N$ e $m = 1, \ldots, n'$. Portanto, os U_i, $i = 1, \ldots, k$ são diagonais em blocos comuns.

$\square$

Exemplo 2.6.6 *Seja* $\Omega = \mathcal{P}_2$, $U_1 = I$, $U_2 = \sigma_1$, $U_3 = \sigma_2$, $U_4 = \sigma_3$, $p_1 = 1 - p$, $p_2 = p_3 = p_4 = p/3 > 0$, *onde*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são as matrizes de Pauli. Como tais matrizes não são diagonais em blocos comuns, o estado de mistura máxima ρ_* *é o único estado invariante de*

$$\Lambda_U(\rho) = \sum p_i U_i \rho U_i^\dagger = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3).$$

A aplicação acima, que é biestocástica, é chamada canal quântico depolarizador (veja [24]).

$\diamond$

Exemplo 2.6.7 *Seja* $\Omega = \mathcal{P}_2$*,* $p_1 = 1 - p$*,* $p_2 = p$*,*

$$U_1 = exp(-iH_0T/\hbar),$$

$$U_2 = exp(-\frac{i}{\hbar}(H_0T + \int_0^T V(t)dt))$$

onde $V(t) = V(t+T)$*. O estado de mistura máxima* $\rho_* = I/2$ *é o estado invariante do operador* Λ_U *correspondente a este QIFS. Para uma perturbação genérica* V*, as matrizes* U_1 *e* U_2 *não são diagonais em blocos comuns, portanto* ρ_* *é o único estado invariante para* Λ_U*.*

$\diamondsuit$

Exemplo 2.6.8 *Considere um sistema composto descrito, inicialmente, pelo estado*

$$\sigma = \rho_A \otimes \rho_*^B = \rho_A \otimes \frac{I_m}{m}$$

Uma matriz unitária U *de ordem* Nm *agindo no espaço* $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_m$ *pode ser representado na sua decomposição de Schmidt como*

$$U = \sum_{i=1}^{K} \sqrt{q_i} V_i^A \otimes V_i^B,$$

onde $K = min\{N^2, m^2\}$*. Os operadores* V_i^A *e* V_i^B *agem em certos espaços de Hilbert* $\mathcal{H}_N$ *e* $\mathcal{H}_m$*, respectivamente. Ainda, temos que* $\sum_{i=1}^K q_i = 1$ *(coeficientes de Schmidt). Lembre que o traço parcial é*

$$tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) := |a_1\rangle\langle a_2| tr(|b_1\rangle\langle b_2|)$$

onde $|a_1\rangle$ *e* $|a_2\rangle$ *são vetores no espaço de estados de* A *e* $|b_1\rangle$ *e* $|b_2\rangle$ *são vetores no espaço de estados de* B*. O operador traço aparecendo no lado direito é o operador traço usual para o sistema* B*. Assim, podemos descrever o seguinte QIFS homogêneo:*

$$\Lambda_U(\rho_A) := tr_B(U\sigma U^\dagger) = \sum_{i=1}^{K} q_i V_i^A \rho_A V_i^{A\dagger}$$

Portanto, se $\rho_*^A := 1_N/N$*, temos*

$$\Lambda_U(\rho_*^A) = tr_B(U(\rho_*^A \otimes \rho_*^B)U^\dagger) = \rho_*^A$$

e então a aplicação completamente positiva Λ_U *preserva o traço, i.e., é biestocástica.*

$\diamondsuit$

2.7 Mecânica quântica e a equação de Chapman-Kolmogorov

Iniciamos com uma breve digressão sobre a equação de Chapman-Kolmogorov para cadeias de Markov. Seja $X = \{X_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis. Iremos supor que

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

para todo n, i, j. Ou seja, X é homogênea com relação ao tempo. Vamos supor que X assume valores no conjunto S que por simplicidade, iremos supor que é finito. E definimos a matriz $P = (p_{ij})$ de ordem $|S|$, cujas entradas são

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Definimos também a matriz de n transições $P_n = (p_{ij}(n))$, onde

$$p_{ij}(n) = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

Claramente, temos $P_1 = P$. Vamos supor ainda que temos uma cadeia de Markov, ou seja,

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \tag{2.28}$$

para todo $n \geq 1$, e todo $x_0, \ldots, x_n \in S$.

O seguinte lema é elementar. Depois buscaremos uma versão de tal lema que seja adequada para sistemas quânticos.

Lema 2.7.1 *Para quaisquer eventos $A_1, \ldots, A_n$, temos*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{2.29}$$

Corolário 2.7.2 *Para quaisquer eventos A_1, A_2, A_3, temos*

$$P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1 | A_2 \cap A_3) P(A_2 | A_3) \tag{2.30}$$

Usando o corolário acima, temos

$$p_{ij}(m+n) = P(X_{m+n} = j | X_0 = i) = \sum_k P(X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i) P(X_m = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_m = k) P(X_m = k | X_0 = i) \tag{2.31}$$

Isso mostra que

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n) \tag{2.32}$$

e portanto $P_{m+n} = P_m P_n$ e $P_n = P^n$. A expressão (2.32) é a equação de Chapman-Kolmogorov.

$\diamondsuit$

Estamos interessados em estudar processos estocásticos quânticos e em obter uma definição adequada para o que seria um processo quântico de Markov. Primeiramente observamos que uma construção conhecida sobre o assunto mostra que sob certas condições o equivalente da equação de Chapman-Kolmogorov não é válido em geral [29]. Entretanto no trabalho [15], obtemos um ambiente em que uma versão da equação de Chapman-Kolmogorov é válida.

Em termos algébricos, podemos pensar que a dedução de (2.32) acima não é válida para processos quânticos devido à equação (2.30). Mais precisamente, uma vez que em sistemas quânticos temos que levar em consideração a interferência causada por medições, faz-se necessário analisar com mais detalhe como funcionam medidas de probabilidade em tais espaços.

Levando em consideração a interferência, queremos construir um ambiente onde seja possível obter uma equação análoga a de Chapman-Kolmogorov. Faremos algumas considerações a respeito disso a seguir.

$\diamondsuit$

Em mecânica quântica, podemos considerar um espaço inicial (Ω, Λ, μ) tal como definimos espaços de probabilidade em teoria da medida. Entretanto teremos que Λ é uma σ-álgebra e μ é uma medida em Λ apenas quando nos restringimos a uma única medição. Quando realizarmos várias medições, ocorrem efeitos de interferência e desta forma não estamos mais considerando um problema de probabilidade clássica [13].

Podemos pensar que a interferência ocorre porque ao contrário das medidas de probabilidade clássicas, que podem ser bastante arbitrárias, as funções de probabilidade quânticas são obtidas de uma maneira bastante específica.

Em mecânica quântica, temos uma função de amplitude $a : \Omega \to \mathbb{C}$, e se $B \in \Lambda$, definimos a amplitude de B por

$$A(B) = \sum_{\omega \in B} a(\omega) \tag{2.33}$$

e definimos a probabilidade de que B ocorra por

$$\mu(B) = |A(B)|^2 \tag{2.34}$$

Vamos formalizar tais ideias e fazer mais algumas considerações a respeito de amplitudes condicionais. Será instrutivo considerar um ambiente axiomático para a mecânica quântica, baseado em funções de amplitude. Iremos nos concentrar no mínimo necessário para nossos argumentos. Para mais detalhes ver [13].

Seja Ω um conjunto não vazio e seja $a : \Omega \to \mathbb{C}$. Dizemos que $\omega \in \Omega$ é um **ponto amostral**, a função a é uma **amplitude de probabilidade**, e (Ω, a) é um **espaço de probabilidade quântica**. Um conjunto $A \subset \Omega$ é **somável** se $\sum_{\omega \in A} |a(\omega)|^2 < \infty$ e denotamos a coleção dos conjuntos somáveis por Σ_0. Agora defina $A : \Sigma_0 \to \mathbb{C}$ por $A(\emptyset) = 0$ e

$$A(B) := \sum_{\omega \in B} a(\omega) \tag{2.35}$$

Dizemos que $A(B)$ é a **amplitude** de B. Agora defina

$$A(B_1|B_2) := \frac{A(B_1 \cap B_2)}{A(B_2)} \tag{2.36}$$

se $A(B_2) \neq 0$ e igual a zero, caso contrário. No caso em que $A(B_2) \neq 0$, vale que $A(\cdot|B_2)$ é uma medida complexa em $P(\Omega)$, com $A(\Omega|B_2) = 1$. Dizemos que $A(B_1|B_2)$ é a **amplitude condicional** de B_1, dado B_2. Observamos que $A(B) = 0$ não implica $A(B \cap C) = 0$ [13]. Por causa disso, fórmulas do tipo $A(B \cap C) = A(B)A(C|B)$ podem não ser verdade quando $A(B) = 0$. Entretanto, quando os conjuntos condicionantes tiverem amplitude não nula, temos a seguinte fórmula

$$A(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = A(B_1)A(B_2|B_1)A(B_3|B_1 \cap B_2) \cdots A(B_n|B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}), \tag{2.37}$$

que é o análogo para amplitudes da equação (2.29). Defina a matriz $A = (a_{ij})$, onde

$$a_{ij} = A(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Agora vamos supor que a cadeia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **markoviana quântica**, ou seja,

$$A(X_n = x_n|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = A(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}) \tag{2.38}$$

para todo $n \geq 1$, e todo $x_0, \ldots, x_n \in S$. Então de maneira análoga a feita para probabilidades, definimos a matriz de n transições $A_n = (a_{ij}(n))$, onde

$$a_{ij}(n) = A(X_{m+n} = j|X_m = i)$$

e obtemos

$$a_{ij}(m+n) = \sum_k a_{ik}(m)a_{kj}(n) \tag{2.39}$$

e portanto $A_{m+n} = A_m A_n$ e $A_n = A^n$.

$\Diamond$

2.8 Medidas de probabilidade induzidas por QIFS

Vamos considerar o caso de um espaço de Hilbert complexo de dimensão $N = 2$ e $k = 2$, ou seja, duas matrizes V_i. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ e também

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{21}} & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix}, \; \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

Queremos obter os pontos fixos de

$$\mathcal{L}(\rho) = q_1 V_1 \rho V_1^* + q_2 V_2 \rho V_2^*$$

para os V_i definidos acima. Então

$$q_1 V_1 \rho V_1^\dagger + q_2 V_2 \rho V_2^\dagger = \rho \tag{2.40}$$

implica

$$q_1\left[(\sqrt{p_{11}}\rho_1 + \sqrt{p_{12}}\rho_3)\sqrt{p_{11}} + (\sqrt{p_{11}}\rho_2 + \sqrt{p_{12}}\rho_4)\sqrt{p_{12}}\right] = \rho_1$$

$$q_2\left[(\sqrt{p_{21}}\rho_1 + \sqrt{p_{22}}\rho_3)\sqrt{p_{21}} + (\sqrt{p_{21}}\rho_2 + \sqrt{p_{22}}\rho_4)\sqrt{p_{22}}\right] = \rho_4$$

E (2.40) também implica que $\rho_2 = \rho_3 = 0$, e então reescrevemos o sistema acima como

$$q_1\left[\sqrt{p_{11}}\rho_1\sqrt{p_{11}} + \sqrt{p_{12}}\rho_4\sqrt{p_{12}}\right] = \rho_1$$

$$q_2\left[\sqrt{p_{21}}\rho_1\sqrt{p_{21}}+\sqrt{p_{22}}\rho_4\sqrt{p_{22}}\right]=\rho_4$$

ou ainda como

$$a\rho_1 + f\rho_4 = \rho_1 \tag{2.41}$$

$$g\rho_1 + h\rho_4 = \rho_4 \tag{2.42}$$

onde

$$a = q_1p_{11}, \;\; f = q_1p_{12}, \;\; g = q_2p_{21}, \;\; h = q_2p_{22}$$

Ainda, obtemos

$$\rho_1 = \frac{f}{1-a}\rho_4$$

$$\rho_1 = \frac{1-h}{g}\rho_4$$

o que nos leva a uma restrição sobre os q_i, a saber,

$$\frac{f}{1-a} = \frac{1-h}{g}$$

Portanto, a solução de (2.41) e (2.42) é

$$\rho = \rho_4\begin{pmatrix} \frac{f}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_4\begin{pmatrix} \frac{1-h}{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas $\rho_1 + \rho_4 = 1$ implica a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{q_1p_{12}}{q_1p_{12}-q_1p_{11}+1} & 0 \\ 0 & \frac{1-q_1p_{11}}{q_1p_{12}-q_1p_{11}+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-q_2p_{22}}{1-q_2p_{22}+q_2p_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{q_2p_{21}}{1-q_2p_{22}+q_2p_{21}} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Assumiremos agora que

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

é coluna estocástica. Seja π tal que $P\pi = \pi$. Tal π é dado por

$$\pi = (\frac{p_{12}}{p_{12}-p_{11}+1}, \frac{1-p_{11}}{p_{12}-p_{11}+1}) \tag{2.44}$$

Compare (2.44) com (2.43). Basta então fixar $q_1 = q_2 = 1$ então temos que as entradas não nulas de ρ são as entradas de π. Temos que a escolha feita para os q_i acima é única. De fato, comparando a (i,i)-ésima coordenada de ρ

com a i-ésima coordenada de π, vemos que se existem q_i' que também tornam ρ e π iguais, então

$$\frac{q_1 p_{12}}{q_1 p_{12} - q_1 p_{11} + 1} = \frac{q_1' p_{12}}{q_1' p_{12} - q_1' p_{11} + 1},$$

o que implica

$$q_1(q_1' p_{12} - q_1' p_{11} + 1) = q_1'(q_1 p_{12} - q_1 p_{11} + 1)$$

$$\Rightarrow q_1 q_1' p_{12} - q_1 q_1' p_{11} + q_1 = q_1 q_1' p_{12} - q_1 q_1' p_{11} + q_1'$$

e cancelando, obtemos $q_1 = q_1'$. Analogamente,

$$\frac{1 - q_2 p_{22}}{1 - q_2 p_{22} + q_2 p_{21}} = \frac{1 - q_2' p_{22}}{1 - q_2' p_{22} + q_2' p_{21}}$$

implica

$$(1 - q_2 p_{22})(1 - q_2' p_{22} + q_2' p_{21}) = (1 - q_2' p_{22})(1 - q_2 p_{22} + q_2 p_{21})$$

$$\Rightarrow 1 - q_2' p_{22} + q_2' p_{21} - q_2 p_{22} + q_2 q_2' p_{22}^2 - q_2 q_2' p_{22} p_{21}$$
$$= 1 - q_2 p_{22} + q_2 p_{21} - q_2' p_{22} + q_2 q_2' p_{22}^2 - q_2 q_2' p_{22} p_{21}$$

Cancelando, obtemos

$$q_2' p_{21} = q_2 p_{21} \Rightarrow q_2' = q_2$$

e portanto neste caso, a escolha de q_1 e q_2 é única.

$\Diamond$

Considere um QIFS homogêneo $\mathcal{F} = \{\mathcal{M}_N, F_i, p_i\}_{i=1,\ldots,k}$, onde

$$F_i(\rho) = \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

onde os V_i são operadores lineares com $\sum_i V_i^* V_i = I$ e $p_i(\rho) = tr(V_i \rho V_i^*)$. Desta forma Λ é simplesmente

$$\Lambda(\rho) = \sum_i p_i F_i = \sum_i V_i \rho V_i^*$$

Por simplicidade, vamos supor que o sistema quântico considerado pode assumir dois estados, e chamaremos tais estados de 1 e 2. Fixaremos $k = 2$ e vamos supor que temos dois operadores lineares V_1 e V_2.

Dizemos que o par $(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \mu)$, $X_n : \Omega \to \{1,\dots,k\}$, é um **processo estocástico quântico**, QSP (caso homogêneo), associado ao QIFS $\mathcal{F}$ quando μ for definida por

$$\mu(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) := tr(V_{x_n} V_{x_{n-1}} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^*) \tag{2.45}$$

onde $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ é qualquer operador densidade. Para explicitar tal estado, podemos denotar tal medida por μ_{ρ_0}. O operador ρ_0 é um estado de pré-medição, ou seja, temos um sistema quântico e preparamos o estado inicial na forma ρ_0. Por exemplo, se queremos que o estado inicial seja 1, então basta escolher $\rho_0 = |1\rangle\langle 1|$ (ver [29] para um tratamento semelhante dado a uma sequência de medições).

Com isso definimos para qualquer r,

$$\mu(X_r = x_r | X_{r-1} = x_{r-1}) = \frac{tr(V_{x_r} V_{x_{r-1}} \rho_0 V_{x_{r-1}}^* V_{x_r}^*)}{tr(V_{x_{r-1}} \rho_0 V_{x_{r-1}}^*)} \tag{2.46}$$

Definição Dizemos que um processo estocástico quântico é **Markov** se

$$\mu(X_n = x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mu(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \tag{2.47}$$

$\Diamond$

Observação A condição $\sum_i V_i^* V_i = I$ é suficiente para mostrar que a medida de uma partição de cilindros é igual a 1. Por exemplo, para dois estados 1 e 2, para $k = 2$ e denotando

$$\mu(\overline{ij}) := \mu(X_1 = i, X_2 = j),$$

temos

$$\begin{aligned}
&\mu(\overline{11}) + \mu(\overline{12}) + \mu(\overline{21}) + \mu(\overline{22}) \\
&= tr(V_1 V_1 \rho V_1^* V_1^*) + tr(V_2 V_1 \rho V_1^* V_2^*) + tr(V_1 V_2 \rho V_2^* V_1^*) + tr(V_2 V_2 \rho V_2^* V_2^*) \\
&= tr(V_1^* V_1 [V_1 \rho V_1^*]) + tr(V_2^* V_2 [V_1 \rho V_1^*]) + tr(V_1^* V_1 [V_2 \rho V_2^*]) + tr(V_2^* V_2 [V_2 \rho V_2^*]) \\
&= tr\Big((V_1^* V_1 + V_2^* V_2)[V_1 \rho V_1^*]\Big) + tr\Big((V_1^* V_1 + V_2^* V_2)[V_2 \rho V_2^*]\Big) \\
&= tr(V_1 \rho V_1^*) + tr(V_2 \rho V_2^*) = tr((V_1^* V_1 + V_2^* V_2)\rho) = 1
\end{aligned} \tag{2.48}$$

No entanto observamos que existem exemplos onde podemos mostrar que a medida de uma partição de cilindros é igual a 1 mesmo sem supor que $\sum_i V_i^* V_i = I$. Isso ocorre, por exemplo, na construção com matrizes estocásticas a seguir.

$\diamondsuit$

Agora vamos considerar o caso particular em que o operador $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ na definição de QSP é ponto fixo do operador $\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^*$ induzido pelo QIFS $\mathcal{F}$.

Considere o caso particular em que temos

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{21}} & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

definidos no início desta seção. Supomos que a matriz $P = (p_{ij})$ é coluna estocástica e que temos π tal que $P\pi = \pi$. Por exemplo, temos

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 2) = tr(V_2 V_1 \rho_0 V_1^* V_2^*) = p_{21}(p_{11}\rho_{11} + p_{12}\rho_{22}) = p_{21}\rho_{11} \tag{2.50}$$

pois com a escolha de V_i que fizemos, temos que as entradas não nulas de ρ_0 correspondem às entradas de π. Então podemos interpretar p_{ij} como sendo

$$p_{ij} = \mu(X_2 = j | X_1 = i) \tag{2.51}$$

De forma semelhante,

$$\mu(X_1 = 2, X_2 = 1) = tr(V_1 V_2 \rho_0 V_2^* V_1^*) = p_{12}\rho_{22} \tag{2.52}$$

e

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) = tr(V_1 V_2 V_1 \rho_0 V_1^* V_2^* V_1^*) = p_{12} p_{21} \rho_{11} \tag{2.53}$$

Observação Um cálculo simples mostra que as escolhas de V_i dadas por (2.49) são tais que $\sum_i V_i^* V_i \neq I$, mas no entanto temos

$$\mu(\overline{11}) + \mu(\overline{12}) + \mu(\overline{21}) + \mu(\overline{22}) = 1$$

$\diamondsuit$

Para provar que a escolha (2.49) se reduz ao caso clássico para qualquer sequência, usaremos o seguinte lema.

Lema 2.8.1 *Suponha $N = 2$, $k = 2$. Então para todo m, para a escolha de V_i dada por (2.49) e ρ_0 correspondente ao vetor estacionário π de P, temos que o produto*

$$V_{x_m} V_{x_{m-1}} \cdots V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_m}^* \tag{2.54}$$

é da forma

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

dependendo se $x_m = 1$ ou $x_m = 2$, respectivamente.

Prova Por indução. Se $m = 1$ então

$$V_1\rho_0V_1^* = \begin{pmatrix} p_{11}\rho_{11} + p_{12}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

e

$$V_2\rho_0V_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{21}\rho_{11} + p_{22}\rho_{22} \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Supondo o lema válido para m, consideramos o produto

$$V_{x_{m+1}}V_{x_m}\cdots V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_m}^*V_{x_{m+1}}^* \tag{2.58}$$

Suponha $x_{m+1} = 1$. Então um cálculo simples mostra que

$$V_1\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V_1^* \quad \text{e} \quad V_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}V_1^* \tag{2.59}$$

possuem apenas a entrada $(1,1)$ não nula. Analogamente para o caso em que $x_{m+1} = 2$, ou seja

$$V_2\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V_2^* \quad \text{e} \quad V_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}V_2^* \tag{2.60}$$

possuem apenas a entrada $(2,2)$ não nula.

$\square$

Lema 2.8.2 *Fixando*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{21}} & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

temos que

$$\mu(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = p_{x_nx_{n-1}}p_{x_{n-1}x_{n-2}}\cdots p_{x_3x_2}p_{x_2x_1}\rho_{x_1x_1} \tag{2.62}$$

onde ρ_{ij} denota a (i,j)-ésima entrada de ρ_0, autoestado de $\Lambda(\rho) = \sum_i V_i\rho V_i^*$.

Prova Por definição, temos

$$\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) := tr(V_{x_n}V_{x_{n-1}}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*) \tag{2.63}$$

Faremos a prova por indução. Suponha $n = 1$. Então

$$\mu(X_1 = 1) = tr(V_1\rho_0V_1^*) = p_{11}\rho_{11} + p_{12}\rho_{22} = \rho_{11}$$

$$\mu(X_1 = 2) = tr(V_2 \rho_0 V_2^*) = p_{21}\rho_{11} + p_{22}\rho_{22} = \rho_{22}$$

Apenas para exemplificar, mostramos também o caso $n = 2$. Temos, após alguns cálculos,

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 1) = tr(V_1 V_1 \rho_0 V_1^* V_1^*) = p_{11}\rho_{11} \tag{2.64}$$

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 2) = tr(V_2 V_1 \rho_0 V_1^* V_2^*) = p_{21}\rho_{11} \tag{2.65}$$

$$\mu(X_1 = 2, X_2 = 1) = tr(V_1 V_2 \rho_0 V_2^* V_1^*) = p_{12}\rho_{22} \tag{2.66}$$

$$\mu(X_1 = 2, X_2 = 2) = tr(V_2 V_2 \rho_0 V_2^* V_2^*) = p_{22}\rho_{22} \tag{2.67}$$

Suponha o lema válido para n, vamos provar para $n + 1$.

Primeiro, suponha $x_{n+1} = 1$. Então

$$\begin{aligned} &\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = 1) \\ &= tr(V_1 V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* V_1^*) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Usando o lema 2.8.1, temos dois casos. Se $x_n = 1$ então

$$V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$V_1 V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* V_1^* = V_1 \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1^* = \begin{pmatrix} *p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto tomando o traço obtemos

$$\begin{aligned} &tr(V_1 V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* V_1^*) \\ &= p_{11} p_{1x_{n-1}} p_{x_{n-1}x_{n-2}} \cdots p_{x_3x_2} p_{x_2x_1} \rho_{x_1x_1} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Analogamente se $x_n = 2$

$$V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$V_1 V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* V_1^* = V_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} V_1^* = \begin{pmatrix} *p_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e tomando o traço,

$$tr(V_1 V_{x_n} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^* V_1^*)$$

$$= p_{12}p_{2x_{n-1}}p_{x_{n-1}x_{n-2}}\cdots p_{x_3x_2}p_{x_2x_1}\rho_{x_1x_1} \tag{2.70}$$

Agora, supomos $x_{n+1} = 2$, e procedemos de maneira análoga.

$$\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = 2)$$

$$= tr(V_2V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*V_2^*) \tag{2.71}$$

Pelo lema 2.8.1, temos dois casos. Se $x_n = 1$ então

$$V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^* = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$V_2V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*V_2^* = V_2\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V_2^* = \begin{pmatrix} *p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto tomando o traço obtemos

$$tr(V_2V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*V_2^*)$$

$$= p_{21}p_{1x_{n-1}}p_{x_{n-1}x_{n-2}}\cdots p_{x_3x_2}p_{x_2x_1}\rho_{x_1x_1} \tag{2.72}$$

Analogamente se $x_n = 2$

$$V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$V_2V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*V_2^* = V_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}V_2^* = \begin{pmatrix} *p_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e tomando o traço,

$$tr(V_2V_{x_n}\cdots V_{x_2}V_{x_1}\rho_0V_{x_1}^*V_{x_2}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*V_{x_n}^*V_2^*)$$

$$= p_{22}p_{2x_{n-1}}p_{x_{n-1}x_{n-2}}\cdots p_{x_3x_2}p_{x_2x_1}\rho_{x_1x_1} \tag{2.73}$$

Isso conclui o lema.

□

Corolário 2.8.3 *O processo estocástico quântico induzido por*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{21}} & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

é Markov.

Prova Evidente, pois pelo lema a medida μ se reduz à medida de Markov para matrizes.

$\square$

Exemplo 2.8.4 *Vamos supor que temos aplicações lineares V_1, V_2 quaisquer e que ρ_0 é ponto fixo de*

$$\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$$

Mostremos que para l, m quaisquer,

$$\mu(X_1 = l, X_2 = m) = \mu(X_2 = l, X_3 = m)$$

Note que

$$\mu(X_1 = l, X_2 = m) = tr(V_m V_l \rho_0 V_l^* V_m^*) \tag{2.75}$$

e

$$\mu(X_2 = l, X_3 = m) = \sum_p \mu(X_1 = p, X_2 = l, X_3 = m)$$

$$= tr(V_m V_l V_1 \rho_0 V_1^* V_l^* V_m^*) + tr(V_m V_l V_2 \rho_0 V_2^* V_l^* V_m^*)$$

$$= tr\Big(V_m V_l (V_1 \rho_0 V_1^* + V_2 \rho_0 V_2^*) V_l^* V_m^*\Big) = tr(V_m V_l \rho_0 V_l^* V_m^*) \tag{2.76}$$

$\diamondsuit$

O exemplo acima sugere o resultado geral:

Lema 2.8.5 *Para V_i aplicações lineares e ρ_0 ponto fixo de $\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$, temos para m, n quaisquer,*

$$\mu(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mu(X_{m+1} = x_1, X_{m+2} = x_2, \ldots, X_{m+n} = x_n)$$

Prova Provaremos no caso em que temos duas dinâmicas possíveis. Temos

$$\mu(X_m = x_1, X_{m+1} = x_2, \ldots, X_{m+n} = x_n)$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{m-1}} \mu(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = x_1, \ldots, X_{m+n} = x_n)$$

$$= \sum_{i_2, \ldots, i_{m-1}} tr(V_{x_n} \cdots V_{x_1} V_{i_{m-1}} \cdots V_{i_2} V_1 \rho_0 V_1^* V_{i_2}^* \cdots)$$

$$+ tr(V_{x_n} \cdots V_{x_1} V_{i_{m-1}} \cdots V_{i_2} V_2 \rho_0 V_2^* V_{i_2}^* \cdots)$$

$$= \sum_{i_2,\ldots,i_{m-1}} tr(V_{x_n}\cdots V_{x_1}V_{i_{m-1}}\cdots V_{i_2}\rho_0 V_{i_2}^* V_{i_3}^*\cdots V_{i_{m-1}}^* V_{x_1}^*\cdots V_{x_n}^*)$$

Repetindo o procedimento acima para i_2, i_3, etc. obtemos

$$\mu(X_m = x_1, X_{m+1} = x_2, \ldots, X_{m+n} = x_n) = tr(V_{x_n}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_n}^*)$$

o que conclui a prova.

□

Exemplo 2.8.6 *Vamos fazer uma inspeção referente a equação de Chapman-Kolmogorov, ou seja, queremos saber se vale a igualdade*

$$\mu_{ij}(m+n) \stackrel{?}{=} \sum_k \mu_{ik}(m)\mu_{kj}(n) \tag{2.77}$$

onde

$$\mu_{ij}(n) = \mu(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

Vamos tomar, por exemplo, $m = n = i = j = 1$ então

$$\sum_k \mu_{ik}(m)\mu_{kj}(n) = \mu_{11}(1)\mu_{11}(1) + \mu_{12}(1)\mu_{21}(1)$$

$$= \frac{tr(V_1V_1\rho V_1^*V_1^*)^2}{tr(V_1\rho V_1^*)^2} + \frac{tr(V_2V_1\rho V_1^*V_2^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)}\frac{tr(V_1V_2\rho V_2^*V_1^*)}{tr(V_2\rho V_2^*)} \tag{2.78}$$

e

$$\mu_{ij}(m+n) = \mu_{11}(2) = \mu(X_3 = 1 | X_1 = 1)$$

$$= \frac{tr(V_1V_1V_1\rho V_1^*V_1^*V_1^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)} + \frac{tr(V_1V_2V_1\rho V_1^*V_2^*V_1^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)} \tag{2.79}$$

Fixando V_1 e V_2 da forma (2.61), obtemos cálculos clássicos e então temos a fórmula de Chapman-Kolmogorov. Agora, tomando

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

temos, por (2.78) e (2.79):

$$\frac{tr(V_1V_1\rho V_1^*V_1^*)^2}{tr(V_1\rho V_1^*)^2} + \frac{tr(V_2V_1\rho V_1^*V_2^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)}\frac{tr(V_1V_2\rho V_2^*V_1^*)}{tr(V_2\rho V_2^*)} = 1 + \frac{\rho_{11}}{\rho_{11}+4\rho_{22}} \tag{2.81}$$

e

$$\frac{tr(V_1V_1V_1\rho V_1^*V_1^*V_1^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)} + \frac{tr(V_1V_2V_1\rho V_1^*V_2^*V_1^*)}{tr(V_1\rho V_1^*)} = 1 + 1 = 2 \tag{2.82}$$

Então vale Chapman-Kolmogorov neste caso se, e somente se, $\rho_{22} = 0$ *ou seja, se* $\rho_{11} = 1$. *Observamos também que* $\sum_i V_i^* V_i \neq I$.

Para concluir o exemplo, tomamos V_1 *e* V_2 *com* $\sum_i V_i^* V_i = I$*, a saber,*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Escolha por exemplo $\rho_0 = \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{3}{4}|2\rangle\langle 2|$. *Um cálculo simples mostra que (2.78) e (2.79) são distintos. Logo, estes cálculos mostram que a equação de Chapman-Kolmogorov não vale em geral.*

$\diamondsuit$

Lema 2.8.7 *Para todo QSP Markov homogêneo no tempo, vale a equação de Chapman-Kolmogorov.*

A prova é a mesma vista na seção 2.7, página 24.

$\diamondsuit$

Gostaríamos de obter uma versão não homogênea para a medida definida por (2.45), página 29, para o caso homogêneo, i.e., queremos definir uma medida induzida por um QIFS não homogêneo. Sejam W_i, $i = 1, \ldots, k$ operadores lineares tais que $\sum_i W_i^* W_i = I$. Seja $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ qualquer. Defina

$$\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) :=$$

$$= tr(W_{x_1}\rho_0 W_{x_1}^*)\frac{tr(W_{x_2}V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^* W_{x_2}^*)}{tr(V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*)}\frac{tr(W_{x_3}V_{x_2}V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* W_{x_3}^*)}{tr(V_{x_2}V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^*)} \times \cdots$$

$$\cdots \times \frac{tr(W_{x_{n-1}}V_{x_{n-2}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^* \cdots V_{x_{n-2}}^* W_{x_{n-1}}^*)}{tr(V_{x_{n-2}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_{n-2}}^*)} \times$$

$$\times \frac{tr(W_{x_n}V_{x_{n-1}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_{n-1}}^* W_{x_n}^*)}{tr(V_{x_{n-1}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_{n-1}}^*)} \tag{2.84}$$

ou seja,

$$\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) :=$$

$$tr(W_{x_1}\rho_0 W_{x_1}^*)\prod_{i=2}^{n}\frac{tr(W_{x_i}V_{x_{i-1}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_{i-1}}^* W_{x_i}^*)}{tr(V_{x_{i-1}}V_{x_{i-2}}\cdots V_{x_1}\rho_0 V_{x_1}^*\cdots V_{x_{i-2}}^* V_{x_{i-1}}^*)} \tag{2.85}$$

Observação Um cálculo mostra que, com a suposição $\sum_i W_i^* W_i = I$, temos

$$\sum_{i_1,\dots i_n} \mu(\overline{i_1 \cdots i_n}) = 1$$

Além disso, supondo que $W_i = V_i$ para todo i, recuperamos a definição de medida para QSP, caso homogêneo, ou seja,

$$\mu(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) :=$$

$$tr(V_{x_n} V_{x_{n-1}} \cdots V_{x_2} V_{x_1} \rho_0 V_{x_1}^* V_{x_2}^* \cdots V_{x_{n-1}}^* V_{x_n}^*) \tag{2.86}$$

$\Diamond$

Sendo assim, considere um QIFS $\mathcal{F} = \{\mathcal{M}_N, F_i, p_i\}_{i=1,\dots,k}$, onde

$$F_i(\rho) = \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

onde os V_i são operadores lineares e $p_i(\rho) = tr(W_i \rho W_i^*)$, com $\sum_i W_i^* W_i = I$.

Definição Dizemos que o par $(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \mu)$, $X_n : \Omega \to \{1, \dots, k\}$, é um **processo estocástico quântico** associado ao QIFS não homogêneo $\mathcal{F}$ se μ é definida por (2.85), onde $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ é qualquer operador densidade.

E definimos para qualquer r,

$$\begin{aligned} \mu(X_r = x_r | X_{r-1} = x_{r-1}) &= \frac{\mu(X_r = x_r, X_{r-1} = x_{r-1})}{\mu(X_{r-1} = x_{r-1})} \\ &= tr(W_{r-1} \rho_0 W_{r-1}^*) \frac{tr(W_r V_{r-1} \rho_0 V_{r-1}^* W_r^*)}{tr(V_{r-1} \rho_0 V_{r-1}^*)} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Observação Na definição acima podemos, é claro, considerar o caso particular em que ρ_0 é ponto fixo do operador

$$\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho W_i^*) \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

induzido pelo QIFS $\mathcal{F}$.

$\Diamond$

Lembramos que um QSP homogêneo sempre é estacionário. O seguinte exemplo fornece uma intuição com respeito à questão de estacionariedade para QSP não homogêneos.

Exemplo 2.8.8 *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ QSP induzido por um QIFS não homogêneo. Vamos fazer uma inspeção com respeito a estacionariedade. Queremos saber se*

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 2) \overset{?}{=} \mu(X_2 = 1, X_3 = 2) \tag{2.88}$$

Por definição temos:

$$\mu(X_1 = 1, X_2 = 2) = tr(W_1\rho_0W_1^*)\frac{tr(W_2V_1\rho_0V_1^*W_2^*)}{tr(V_1\rho_0V_1^*)} \tag{2.89}$$

E também

$$\mu(X_2 = 1, X_3 = 2) = \mu(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2) + \mu(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2)$$

$$= tr(W_1\rho_0W_1^*)\frac{tr(W_1V_1\rho_0V_1^*W_1^*)}{tr(V_1\rho_0V_1^*)}\frac{tr(W_2V_1V_1\rho_0V_1^*V_1^*W_2^*)}{tr(V_1V_1\rho_0V_1^*V_1^*)}$$

$$+tr(W_2\rho_0W_2^*)\frac{tr(W_1V_2\rho_0V_2^*W_1^*)}{tr(V_2\rho_0V_2^*)}\frac{tr(W_2V_1V_2\rho_0V_2^*V_1^*W_2^*)}{tr(V_1V_2\rho_0V_2^*V_1^*)} \tag{2.90}$$

$$= tr\Bigg[W_2V_1\Bigg[tr(W_1\rho_0W_1^*)\frac{V_1\rho_0V_1^*}{tr(V_1\rho_0V_1^*)}\Big(\frac{tr(W_1V_1\rho_0V_1^*W_1^*)}{tr(V_1V_1\rho_0V_1^*V_1^*)}\Big)+$$

$$+tr(W_2\rho_0W_2^*)\frac{V_2\rho_0V_2^*}{tr(V_2\rho_0V_2^*)}\Big(\frac{tr(W_1V_2\rho_0V_2^*W_1^*)}{tr(V_1V_2\rho_0V_2^*V_1^*)}\Big)\Bigg]V_1^*W_2^*\Bigg] \tag{2.91}$$

Observe que no caso homogêneo, as duas frações entre parenteses em (2.91) são iguais a 1 e então se ρ_0 é ponto fixo de Λ, temos a estacionariedade, fato que já provamos em geral anteriormente. Mas no caso não homogêneo, os termos em parenteses não são iguais a 1, em geral.

$\diamondsuit$

2.9 Apêndice: Aplicações completamente positivas

Vimos brevemente na seção 2.6 a definição de aplicações completamente positivas. Nesta seção definimos tais operadores com mais detalhe.

Seja $\mathbb{C}^{n\times n}$ o conjunto das matrizes complexas de ordem n. Diremos que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é **positivo**, denotado por $A \geq 0$, se A for hermitiano com espectro não negativo.

Uma aplicação linear $\Psi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ é dita **positiva** se $\Psi(A) \geq 0$, para todo $A \geq 0$. Seja I_k a matriz identidade de ordem k. Toda aplicação linear Ψ induz uma aplicação

$$I_k \otimes \Psi : \mathbb{C}^{k\times k} \otimes \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{k\times k} \otimes \mathbb{C}^{m\times m}$$

quando definimos

$$(I_k \otimes \Psi)(M \otimes A) := M \otimes \Psi(A)$$

e estendemos tal definição por linearidade. Todo elemento de $\mathbb{C}^{k\times k} \otimes \mathbb{C}^{n\times n}$ pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},$$

i.e., onde cada elemento A_{ij} é uma matriz em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Então

$$(I_k \otimes \Psi)(\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \Psi(A_{11}) & \cdots & \Psi(A_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi(A_{k1}) & \cdots & \Psi(A_{kk}) \end{pmatrix}$$

Dizemos que Ψ é k**-positiva** se $I_k \otimes \Psi$ for uma aplicação positiva e chamaremos Ψ de **completamente positiva** se for k-positiva para todo k.

Nem toda aplicação positiva é completamente positiva. O exemplo clássico é a transposição, que é positiva, mas não é 2-positiva. De fato, denote por T a transposição em $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Então

$$(I_2 \otimes T)(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que não é hermitiana, e portanto não é positiva.

Uma aplicação linear Ψ é dita **copositiva** se $\Psi \circ T$ for positiva. De forma análoga ao que fizemos antes, Ψ será dita k**-copositiva** se $I_k \otimes \Psi$ for uma aplicação copositiva e chamaremos Ψ de **completamente copositiva** se for k-copositiva para todo k.

Toda aplicação Λ completamente positiva (CP) que preserva o traço pode ser representada (de forma não única) na forma de Stinespring-Kraus,

$$\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^*, \;\; \sum_{i=1}^{k} V_i^* V_i = I,$$

onde os operadores lineares V_i são ditos **operadores de Kraus** [24].

$\Diamond$

Capítulo 3

Formalismo termodinâmico e o operador de Ruelle

3.1 Problema variacional

Estamos interessados em problemas variacionais tais como o problema de Pressão que encontramos em Formalismo Termodinâmico. Começamos com um exemplo para motivação.

Seja $\mathcal{H}_N$ um espaço de Hilbert complexo de dimensão N. Como antes, seja $\mathcal{M}_N$ o espaço dos operadores densidade em $\mathcal{H}_N$. Inicialmente desejamos obter pontos fixos para um operador do tipo $\Lambda : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^*,$$

onde os V_i são certas aplicações lineares. Vamos tentar relacionar esta análise com estados que maximizam pressão. Nossa análise inicial ocorre fazendo $N = 2$ e $k = 2$. Sejam

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \rho_4 \end{pmatrix},$$

onde V_1 e V_2 são operadores invertíveis e ρ é operador densidade (i.e., hermitiano, positivo, traço igual a 1).

Suponha que ρ é tal que

$$V_1 \rho V_1^\dagger + V_2 \rho V_2^\dagger = \rho. \tag{3.1}$$

Um cálculo para (3.1) produz 4 igualdades, mas duas delas são idênticas, então temos 3 equações independentes:

$$(\rho_1|v_1|^2 + \rho_2 v_1 \overline{v_2} + \overline{\rho_2 v_1} v_2 + \rho_4 |v_2|^2) + (\rho_1 |w_1|^2 + \rho_2 w_1 \overline{w_2} + \overline{\rho_2 w_1} w_2 + \rho_4 |w_2|^2) = \rho_1$$

$(\rho_1|v_3|^2+\rho_2 v_3\overline{v_4}+\overline{\rho_2 v_3}v_4+\rho_4|v_4|^2)+(\rho_1|w_3|^2+\rho_2 w_3\overline{w_4}+\overline{\rho_2 w_3}w_4+\rho_4|w_4|^2) = \rho_4$

$(\rho_1 v_1\overline{v_3}+\rho_2 v_1\overline{v_4}+\overline{\rho_2}v_2\overline{v_3}+\rho_4 v_2\overline{v_4})+(\rho_1 w_1\overline{w_3}+\rho_2 w_1\overline{w_4}+\overline{\rho_2}w_2\overline{w_3}+\rho_4 w_2\overline{w_4}) = \rho_2$

Ainda, note que como ρ é densidade, temos $\rho_4 = 1-\rho_1$ e então podemos reescrever o cálculo acima, com as coordenadas de ρ em evidência para obter

$$\begin{aligned}\rho_1(|v_1|^2-|v_2|^2+|w_1|^2-|w_2|^2-1)+\rho_2(v_1\overline{v_2}+w_1\overline{w_2})\\ +\overline{\rho_2}(v_2\overline{v_1}+w_2\overline{w_1})+(|v_2|^2+|w_2|^2)=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\rho_1(|v_3|^2-|v_4|^2+|w_3|^2-|w_4|^2+1)+\rho_2(v_3\overline{v_4}+w_3\overline{w_4})\\ +\overline{\rho_2}(v_4\overline{v_3}+w_4\overline{w_3})+(|v_4|^2+|w_4|^2-1)=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\rho_1(v_1\overline{v_3}-v_2\overline{v_4}+w_1\overline{w_3}-w_2\overline{w_4})+\rho_2(v_1\overline{v_4}+w_1\overline{w_4}-1)\\ +\overline{\rho_2}(v_2\overline{v_3}+w_2\overline{w_3})+(v_2\overline{v_4}+w_2\overline{w_4})=0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Chame de F_i, G_i, J_i, $i=1,\ldots,4$ cada termo em parenteses nas equações acima de tal forma que é possível obter os coeficientes de ρ em função dos V_i ao reescrever as equações (3.2), (3.3) e (3.4) como

$$\rho_1 F_1+\rho_2 F_2+\overline{\rho_2}F_3+F_4=0$$

$$\rho_1 G_1+\rho_2 G_2+\overline{\rho_2}G_3+G_4=0$$

$$\rho_1 J_1+\rho_2 J_2+\overline{\rho_2}J_3+J_4=0,$$

(note que os F_i, G_i, J_i não dependem de ρ). Neste caso a solução é

$$\rho_{1,p} = -\frac{\sum_{\sigma\in S(\{2,3,4\})} sgn(\sigma)F_{\sigma(2)}G_{\sigma(3)}J_{\sigma(4)}}{\sum_{\gamma\in S(\{1,2,3\})} sgn(\gamma)F_{\gamma(1)}G_{\gamma(2)}J_{\gamma(3)}} \tag{3.5}$$

$$\rho_{2,p} = \frac{\sum_{\sigma\in S(\{1,3,4\})} sgn(\sigma)F_{\sigma(1)}G_{\sigma(3)}J_{\sigma(4)}}{\sum_{\gamma\in S(\{1,2,3\})} sgn(\gamma)F_{\gamma(1)}G_{\gamma(2)}J_{\gamma(3)}} \tag{3.6}$$

Uma condição que impomos sobre os V_i é $V_1^\dagger V_1+V_2^\dagger V_2=I$. Em coordenadas, temos

$$|v_1|^2+|v_3|^2+|w_1|^2+|w_3|^2=1$$

$$|v_2|^2+|v_4|^2+|w_2|^2+|w_4|^2=1$$

$$v_1\overline{v_2}+v_3\overline{v_4}+w_1\overline{w_2}+w_3\overline{w_4}=0.$$

Ficam assim determinados os pontos fixos através das equações (3.5) e (3.6).

$\Diamond$

Exemplo 3.1.1 *Seja*

$$V_1 = e^{ik}\begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad V_2 = e^{il}\begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-p} \end{pmatrix},$$

onde $k, l \in \mathbb{R}$, $p \in (0,1)$. *Então* $V_1^\dagger V_1 + V_2^\dagger V_2 = I$. *Neste exemplo, um cálculo simples mostra que as funções* F_i, G_i *e* J_i *se reduzem a*

$$F_i = 0, i = 1, \ldots, 4$$

$$G_i = 0, i = 1, \ldots, 4$$

$$J_1 = 0, \;\; J_2 = -2, \;\; J_3 = J_4 = 0$$

e portanto $\rho_2 = 0$. *Então*

$$\rho = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1-q \end{pmatrix}$$

é invariante para $\Lambda(\rho) = V_1 \rho V_1^\dagger + V_2 \rho V_2^\dagger$, *para todo* $q \in \mathbb{R}$.

$\Diamond$

Exemplo 3.1.2 *Seja*

$$V_1 = V_2 = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{p} & \sqrt{1-p} \\ \sqrt{1-p} & -\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

Alguns cálculos nos fornecem

$$F_1 = 2p-2, \;\; F_2 = \sqrt{p(1-p)}, \;\; F_3 = \sqrt{p(1-p)}, \;\; F_4 = 1-p$$

$$G_1 = 2-2p, \;\; G_2 = -\sqrt{p(1-p)}, \;\; G_3 = -\sqrt{p(1-p)}, \;\; G_4 = p-1$$

$$J_1 = 2\sqrt{p(1-p)}, \;\; J_2 = -p-1, \;\; J_3 = 1-p, \;\; J_4 = -\sqrt{p(1-p)}$$

Resolvendo, obtemos que

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{2\rho_2\sqrt{p(1-p)}+1-p}{p-1} & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 + \frac{1}{2}\frac{2\rho_2\sqrt{p(1-p)}+1-p}{p-1} \end{pmatrix}$$

com $\rho_2 \in \mathbb{R}$, *é invariante para* $\Lambda(\rho) = V_1 \rho V_1^\dagger + V_2 \rho V_2^\dagger$, $k \in \mathbb{R}$, $p \in (0,1)$. *Fazendo* $\rho_2 = 0$, *obtemos a solução diagonal* $I/2$.

$\Diamond$

Exemplo 3.1.3 *Um exemplo não diagonal. Seja*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{290}{359}} & 0 \\ -\frac{31\sqrt{359}}{4308} & \frac{\sqrt{359}}{20} \end{pmatrix}$$

Um cálculo nos fornece

$$V_1^\dagger V_1 + V_2^\dagger V_2 = \begin{pmatrix} \frac{25}{144} & \frac{31}{240} \\ \frac{31}{240} & \frac{41}{400} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{119}{144} & -\frac{31}{240} \\ -\frac{31}{240} & \frac{359}{400} \end{pmatrix} = I$$

Resolver (3.1) usando (3.5) e (3.6) nos fornece ρ_1 livre e

$$\rho_2 = (\frac{1746}{23335} - \frac{4837}{1353430}\sqrt{290})\rho_1 + \frac{9}{1885}\sqrt{290} + \frac{6}{65}$$

$$\overline{\rho_2} = (\frac{24383}{14001} + \frac{4837}{1353430}\sqrt{290})\rho_1 - \frac{9}{1885}\sqrt{290} - \frac{9}{13}$$

Mas $\rho_1 \in \mathbb{R}$, portanto $\rho_2 = \overline{\rho_2}$ e assim obtemos

$$\rho_1 = 0.5296472016$$

$$\rho_2 = \overline{\rho_2} = 0.002881638863\sqrt{290} + 0.1319376051 = 0.1810101467$$

e então

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.5296472016 & 0.1810101467 \\ 0.1810101467 & 0.4703527984 \end{pmatrix}$$

é ponto fixo para Λ.

$\Diamond$

Agora consideramos um problema variacional de pressão, via multiplicadores de Lagrange.

Seja

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 + i\eta_1 & \nu_2 + i\eta_2 \\ \nu_3 + i\eta_3 & \nu_4 + i\eta_4 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ \overline{h_2} & h_4 \end{pmatrix}$$

$$F(\rho) = -tr(\rho \log \rho) - \frac{1}{T}tr(H\rho) = S(\rho) - \frac{1}{T}tr(H\rho)$$

Queremos obter ρ_q tal que

$$F(\rho_q) = \sup_{\rho \in \mathcal{M}_n} F(\rho) \tag{3.7}$$

onde $\mathcal{M}_n$ é o conjunto dos operadores densidade de ordem n. Nos nossos cálculos, $n = 2$.

O problema acima é o correspondente a maximização de pressão em Formalismo Termodinâmico. Note, porém, que não existe nenhuma característica dinâmica em tal problema, visto que a entropia que consideramos não está associada a nenhuma dinâmica. Mais tarde vamos considerar problemas desta natureza, mas onde desempenha papel importante a dinâmica de um QIFS (via um diferente conceito de entropia).

Defina ainda

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \nu_1 + i\eta_1 + \nu_4 + i\eta_4 - 1 \\ I(\rho) &= \nu_2 - \nu_3 \\ J(\rho) &= \eta_2 + \eta_3 \\ \Gamma(\rho, \lambda, \mu, \zeta) &= F + \lambda G + \mu I + \zeta J \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} tr(H\rho) &= h_1\rho_1 + h_2\rho_3 + \overline{h_2}\rho_2 + h_4\rho_4 \\ &= h_1(\nu_1 + i\eta_1) + h_2(\nu_3 + i\eta_3) + \overline{h_2}(\nu_2 + i\eta_2) + h_4(\nu_4 + i\eta_4) \end{aligned}$$

e de $\nabla\Gamma = 0$, temos:

$$\begin{aligned} S_{\nu_1} - \frac{h_1}{T} + \lambda = 0, &\qquad S_{\eta_1} - \frac{ih_1}{T} + i\lambda = 0 \\ S_{\nu_2} - \frac{\overline{h_2}}{T} + \mu = 0, &\qquad S_{\eta_2} - \frac{i\overline{h_2}}{T} + \zeta = 0 \\ S_{\nu_3} - \frac{h_2}{T} - \mu = 0, &\qquad S_{\eta_3} - \frac{ih_2}{T} + \zeta = 0 \\ S_{\nu_4} - \frac{h_4}{T} + \lambda = 0, &\qquad S_{\eta_4} - \frac{ih_4}{T} + i\lambda = 0 \\ \nu_1 + \nu_4 = 1, &\qquad \eta_1 + \eta_4 = 0 \\ \nu_2 = \nu_3, &\qquad \eta_2 = -\eta_3 \end{aligned}$$

Sejam β_1 e β_2 os autovalores de ρ. Então $\rho = BDB^{-1}$, onde B é a matriz dos autovetores de ρ e

$$D = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

e então $S(\rho) = S(\beta_1, \beta_2) = -\beta_1 \log \beta_1 - \beta_2 \log \beta_2$.

Como estamos em dimensão 2, podemos ainda escrever

$$\beta_1 = \frac{\rho_1}{2}+\frac{\rho_4}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3},\ \ \beta_2 = \frac{\rho_1}{2}+\frac{\rho_4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}.$$

Então

$$\begin{aligned}
S_{\eta_1} &= -\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_1}\log\beta_1 - \beta_1\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_1} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_1}\log\beta_2 - \beta_2\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_1}\\
&= -\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_1}(\log\beta_1+1) - \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_1}(\log\beta_2+1)\\
\Rightarrow S_{\eta_i} &= -\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_i}(\log\beta_1+1) - \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_i}(\log\beta_2+1),\\
\text{e } S_{\nu_i} &= -\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_i}(\log\beta_1+1) - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_i}(\log\beta_2+1),\ \ i=1,\ldots,4.
\end{aligned}$$

E temos, escrevendo $\rho_k = \nu_k + i\eta_k$, $k = 1,\ldots,4$ sempre que for conveniente,

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\rho_1-\rho_4}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}, \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_2} = \frac{\rho_3}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_3} = \frac{\rho_2}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}, \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\rho_4-\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}$$

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\rho_1-\rho_4}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}, \qquad \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_2} = -\frac{\rho_3}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}$$

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_3} = -\frac{\rho_2}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}, \qquad \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\rho_4-\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}$$

e

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_k} = i\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_k}, \qquad \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_k} = i\frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_k}, \qquad k=1,\ldots,4$$

Das equações para $\nabla\Gamma = 0$, temos

$$S_{\nu_1} - \frac{h_1}{T} - S_{\nu_4} + \frac{h_4}{T} = 0$$

$$\Rightarrow S_{\nu_1} - S_{\nu_4} = \frac{h_1}{T} - \frac{h_4}{T}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_1}K_1 - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_1}K_2 + \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_4}K_1 + \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_4}K_2 = \frac{h_1-h_4}{T}$$

$$\Rightarrow (\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_4} - \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_1})K_1 + (\frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_4} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_1})K_2 = \frac{h_1 - h_4}{T},$$

onde

$$K_1 = 1 + \log\beta_1, \quad K_2 = 1 + \log\beta_2$$

Pelas expressões para β_1 e β_2 obtidas acima, vemos que

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_4} - \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_1} = \frac{\rho_4 - \rho_1}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}},$$

e que

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_4} - \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_1} = -\Big(\frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_4} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_1}\Big)$$

Então simplificamos para obter

$$\frac{\rho_1 - \rho_4}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}} \log\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{h_1 - h_4}{T} \tag{3.8}$$

Continuando, temos:

$$S_{\nu_2} - \frac{\overline{h_2}}{T} + S_{\nu_3} - \frac{h_2}{T} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_2}K_1 - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_2}K_2 - \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_3}K_1 - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_3}K_2 = \frac{2}{T}Re(h_2)$$

$$\Rightarrow -(\frac{\rho_2 + \rho_3}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}})K_1 - (-\frac{\rho_2 + \rho_3}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}})K_2 = \frac{2}{T}Re(h_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2 + \rho_3}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}} \log\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{T}Re(h_2) \tag{3.9}$$

E ainda

$$S_{\eta_3} - \frac{ih_2}{T} - S_{\eta_2} + \frac{i\overline{h_2}}{T} = 0$$

$$S_{\eta_3} - S_{\eta_2} + \frac{2}{T}Im(h_2) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_3}K_1 - \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_3}K_2 + \frac{\partial\beta_1}{\partial\eta_2}K_1 + \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_2}K_2 + \frac{2}{T}Im(h_2) = 0$$

$$\Rightarrow i\Big(- \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_3}K_1 - \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_3}K_2 + \frac{\partial\beta_1}{\partial\nu_2}K_1 + \frac{\partial\beta_2}{\partial\nu_2}K_2\Big) = -\frac{2}{T}Im(h_2)$$

$$\Rightarrow i\Big(\frac{\rho_3 - \rho_2}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}}K_1 + \frac{\rho_2 - \rho_3}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_4)^2 + 4\rho_2\rho_3}}K_2\Big) = -\frac{2}{T}Im(h_2)$$

$$\Rightarrow i\Big(\frac{\rho_2-\rho_3}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}\log\frac{\beta_2}{\beta_1}\Big) = -\frac{2}{T}Im(h_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2-\rho_3}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}\log\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{T}iIm(h_2) \tag{3.10}$$

Somando (3.9) e (3.10), obtemos

$$\frac{\rho_2}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}\log\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{h_2}{T} \tag{3.11}$$

Defina

$$\beta = \beta(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_1-\rho_4)^2+4\rho_2\rho_3}}\log\frac{\beta_2}{\beta_1}$$

e reescreva as equações (3.8) e (3.11) como

$$(\rho_4-\rho_1)\beta = \frac{h_4-h_1}{T} \Rightarrow \beta = \frac{h_4-h_1}{T(\rho_4-\rho_1)}$$

$$\rho_2\beta = \frac{h_2}{T} \Rightarrow \beta = \frac{h_2}{T\rho_2}$$

e obtemos

$$\frac{\rho_2}{\rho_1-\rho_4} = \frac{h_2}{h_1-h_4} \Rightarrow \frac{\rho_2}{2\rho_1-1} = \frac{h_2}{h_1-h_4}.$$

Note que a expressão acima nos diz que obtemos uma solução diagonal se, e somente se, $h_2 = 0$. Substitua em (3.11) a expressão de ρ_2 obtida acima, então aplicando os vínculos impostos sobre ρ e um cálculo elementar nos leva a

$$\rho_{1,q} = \frac{1}{2}\Bigg[\frac{e^{\frac{h_1-h_4}{T}\sqrt{1+4h}}\Big(\sqrt{1+4h}-1\Big)+1+\sqrt{1+4h}}{\sqrt{1+4h}\Big(e^{\frac{h_1-h_4}{T}\sqrt{1+4h}}+1\Big)}\Bigg], \tag{3.12}$$

$$\rho_{2,q} = \frac{(e^{\frac{h_1-h_4}{T}\sqrt{1+4h}}-1)h_2}{\sqrt{1+4h}\Big(e^{\frac{h_1-h_4}{T}\sqrt{1+4h}}+1\Big)(h_1-h_4)}, \tag{3.13}$$

onde $h = |h_2/(h_1-h_4)|^2$. Ainda, note que se $h_2 = 0$ então $h = 0$ e assim recuperamos a solução do caso clássico.

Suponha que fixamos $\rho_p = (\rho_{1,p},\rho_{2,p})$ solução para o problema (3.1) e vamos impor que

$$\begin{aligned} \rho_{1,p} &= \rho_{1,q} \\ \rho_{2,p} &= \rho_{2,q} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos pensar no problema de obter h_1, h_2 e h_4 em função da solução $\rho_{1,p}, \rho_{2,p}$. Alguns cálculos nos mostram que

$$h_1 - h_4 = \frac{\log\Big(-\frac{2\rho_{1,p}\sqrt{1+4h}-1-\sqrt{1+4h}}{2\rho_{1,p}\sqrt{1+4h}+1-\sqrt{1+4h}}\Big)T}{\sqrt{1+4h}} \tag{3.15}$$

$$h_2 = -\frac{\log\Big(-\frac{2\rho_{1,p}\sqrt{1+4h}-1-\sqrt{1+4h}}{2\rho_{1,p}\sqrt{1+4h}+1-\sqrt{1+4h}}\Big)\rho_{2,p}T}{\sqrt{1+4h}(2\rho_{1,p}-1)}. \tag{3.16}$$

Note que tais expressões implicam

$$\frac{h_2}{h_1 - h_4} = \frac{\rho_{2,p}}{1 - 2\rho_{1,p}} \tag{3.17}$$

e portanto temos uma expressão para $h = |h_2/(h_1 - h_4)|^2$ que não depende dos h_i (pois a solução $\rho_p = (\rho_{1,p}, \rho_{2,p})$ para o problema (3.1) não depende dos h_i).

Vamos escrever a expressão matricial de ρ. Multiplicamos e dividimos as expressões (3.12) e (3.13) por $e^{-(h_1/T)\sqrt{1+4h}}$ e rearranjamos para obter

$$\rho_{1,q} = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}} - e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}}}{\sqrt{1+4h}(e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}} + e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}})}\Big] \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow \rho_{4,q} = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}} - e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}}}{\sqrt{1+4h}(e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}} + e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}})}\Big] \tag{3.19}$$

$$\rho_{2,q} = \frac{(e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}} - e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}})h_2}{\sqrt{1+4h}(e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}} + e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}})(h_1 - h_4)} \tag{3.20}$$

Então podemos escrever

$$\rho_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} & \gamma\frac{h_2}{h_1-h_4} \\ \gamma\frac{h_2}{h_1-h_4} & \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{h_2}{h_1-h_4} \\ \frac{h_2}{h_1-h_4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &:= \frac{e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}} - e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}}}{\sqrt{1+4h}(e^{-\frac{h_1}{T}\sqrt{1+4h}} + e^{-\frac{h_4}{T}\sqrt{1+4h}})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4h}}\tanh\frac{(h_1 - h_4)\sqrt{1+4h}}{2T} \in (-1, 1), \end{aligned} \tag{3.22}$$

a última igualdade seguindo da definição

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Queremos saber quais hipóteses sobre H fazem com que $\sup F(\rho) = 0$. No problema variacional clássico, tal fato ocorre se

$$h_1 = -T \log\left(1 - e^{-\frac{h_4}{T}}\right) \tag{3.23}$$

ou seja, se

$$e^{-\frac{h_1}{T}} + e^{-\frac{h_4}{T}} = 1. \tag{3.24}$$

Note que tal condição implica que $h_1 > 0$ e $h_4 > 0$.

Vamos calcular a pressão. Temos

$$F(\rho_q) = -tr(\rho_q \log \rho_q) - \frac{1}{T} tr(H\rho_q)$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1}{2} + \gamma\frac{\sqrt{(h_1 - h_4)^2 + 4|h_2|^2}}{2(h_1 - h_4)}\right) \log\left(\frac{1}{2} + \gamma\frac{\sqrt{(h_1 - h_4)^2 + 4|h_2|^2}}{2(h_1 - h_4)}\right) \\
&\quad -\left(\frac{1}{2} - \gamma\frac{\sqrt{(h_1 - h_4)^2 + 4|h_2|^2}}{2(h_1 - h_4)}\right) \log\left(\frac{1}{2} - \gamma\frac{\sqrt{(h_1 - h_4)^2 + 4|h_2|^2}}{2(h_1 - h_4)}\right) \\
&\quad -\frac{1}{T}\left(\frac{h_1}{2}(1-\gamma) + 2\frac{\gamma|h_2|^2}{h_1 - h_4} + \frac{h_4}{2}(1+\gamma)\right),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde usamos os autovalores $\lambda_\pm$ de ρ_q para calcular a entropia. No caso clássico, $h_2 = 0$, o que implica $h = 0$ e então

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\gamma}{2}$$

e

$$F(\rho_q) = -\frac{1}{2}\left((1-\gamma)\log\frac{1}{2}(1-\gamma) + (1+\gamma)\log\frac{1}{2}(1+\gamma) + \frac{1}{T}\Big(h_1(1-\gamma) + h_4(1+\gamma)\Big)\right)$$

com γ reescrito como

$$\gamma = \frac{e^{-\frac{h_4}{T}} - e^{-\frac{h_1}{T}}}{e^{-\frac{h_4}{T}} + e^{-\frac{h_1}{T}}} = \tanh\frac{h_1 - h_4}{2T}$$

Lema 3.1.4 *Suponha $h_2 = 0$, $T = 1$ e que (3.24) vale. Neste caso, $\gamma = e^{-h_4} - e^{-h_1}$ e $F(\rho_q) = 0$.*

Demonstração Imediata.

Note que tanto no caso clássico como no geral, temos $\lim_{T\to\infty}\gamma = 0$. Ainda, $\lim_{T\to 0}\gamma = \pm 1$, dependendo do sinal de $h_1 - h_4$.

Alguns cálculos sugerem que os seguintes resultados são válidos.

Conjectura 3.1.5 *Seja H hermitiano, então $\lim_{T\to\infty} F(\rho_q) = \log 2$. Denotando por $F_T(\rho_q)$ a pressão na temperatura T, temos ainda que $\{F_T(\rho_q)\}_{T=1}^{\infty}$ é uma sequência monótona.*

Conjectura 3.1.6 *Suponha que H é tal que h_1, h_4 satisfazem (3.24). Então para o ρ_q associado, temos $F(\rho_q) \leq 0$ e $F(\rho_q) = 0$ se, e somente se, $h_2 = 0$.*

O lema acima mostra que a condição (3.24) é apropriada para o caso clássico, mas não para o caso geral. Uma ideia seria obter uma generalização de (3.24). Observe que no caso clássico temos, por (3.23), o seguinte:

Lema 3.1.7 *Suponha que $h_1 - h_4 = k$. Então*

$$e^{-\frac{h_1}{T}} + e^{-\frac{h_4}{T}} = 1 \Leftrightarrow k = T\log\left(e^{\frac{h_1}{T}} - 1\right) \tag{3.26}$$

Ainda, note que a diferença $h_1 - h_4$ depende de apenas uma das entradas de H. Então podemos supor que no caso geral, temos

$$h_4 = h_1 + k(h_1, h_2; T), \tag{3.27}$$

onde k é uma função de h_1 e h_2, mas não de h_4. No caso clássico, tomamos $k = k_{cl}(h_1;T) := -T\log\Big(e^{\frac{h_1}{T}} - 1\Big)$. Mas a princípio, poderíamos fixar k igual a uma constante, e tentar obter soluções. De fato, alguns cálculos nos mostram como obter H tal que $F(\rho_q) = 0$. As expressões são as que seguem. Defina

$$\alpha := \frac{\sqrt{\gamma^2(k^2 + 4|h_2|^2)}}{k},$$

então

$$h_1 = \frac{1}{2}\Bigg(k(1+\gamma) - \frac{4\gamma|h_2|^2}{k} + T\Big(\alpha\log\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right] - \log\left[\frac{1}{4}\Big(1-\alpha\Big)\Big(1+\alpha\Big)\right]\Big)\Bigg)$$

$$h_4 = h_1 - k, \tag{3.28}$$

com h_2 livre. Em particular, note que se $h_2 = 0$ então $\alpha = \gamma = \tanh(k/2T)$, e resolvendo (3.28) para k nos fornece duas soluções, a saber,

$$k = T\log\Big(e^{\frac{h_1}{T}} - 1\Big) \quad \text{ou} \quad k = T\log\Big(-e^{\frac{h_1}{T}} - 1\Big)$$

e note que a primeira destas é igual à condição (3.26), e portanto tal procedimento nos permite reobter o valor de k para o caso clássico.

$\diamondsuit$

Vamos analisar o problema (3.1) onde temos apenas um operador V_1 invertível. Isso equivale a considerar as equações (3.2), (3.3) e (3.4) onde as entradas w_i de V_2 são nulas. Então

$$\rho_1(|v_1|^2 - |v_2|^2 - 1) + \rho_2(v_1\overline{v_2}) + \overline{\rho_2}(v_2\overline{v_1}) + (|v_2|^2) = 0 \tag{3.29}$$

$$\rho_1(|v_3|^2 - |v_4|^2 + 1) + \rho_2(v_3\overline{v_4}) + \overline{\rho_2}(v_4\overline{v_3}) + (|v_4|^2 - 1) = 0 \tag{3.30}$$

$$\rho_1(v_1\overline{v_3} - v_2\overline{v_4}) + \rho_2(v_1\overline{v_4} - 1) + \overline{\rho_2}(v_2\overline{v_3}) + (v_2\overline{v_4}) = 0. \tag{3.31}$$

De forma semelhante ao caso anterior, chame de f_i, g_i, j_i, $i = 1, \ldots, 4$ cada termo em parenteses e então

$$\rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \overline{\rho_2} f_3 + f_4 = 0$$

$$\rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 + \overline{\rho_2} g_3 + g_4 = 0$$

$$\rho_1 j_1 + \rho_2 j_2 + \overline{\rho_2} j_3 + j_4 = 0,$$

Como antes,

$$\rho_{1,p} = -\frac{\sum_{\sigma \in S(\{2,3,4\})} sgn(\sigma) f_{\sigma(2)} g_{\sigma(3)} j_{\sigma(4)}}{\sum_{\gamma \in S(\{1,2,3\})} sgn(\gamma) f_{\gamma(1)} g_{\gamma(2)} j_{\gamma(3)}} \tag{3.32}$$

$$\rho_{2,p} = \frac{\sum_{\sigma \in S(\{1,3,4\})} sgn(\sigma) f_{\sigma(1)} g_{\sigma(3)} j_{\sigma(4)}}{\sum_{\gamma \in S(\{1,2,3\})} sgn(\gamma) f_{\gamma(1)} g_{\gamma(2)} j_{\gamma(3)}} \tag{3.33}$$

Observamos que mesmo neste caso, a fórmula explícita envolvendo as componentes f_i, g_i, j_i é bastante longa, envolvendo muitos termos.

$\diamondsuit$

3.2 Operador de Ruelle

Faremos agora algumas considerações sobre o operador de Ruelle $\mathcal{L}$ definido a seguir. Em particular mostraremos que o problema clássico de Perron é um caso particular do problema do operador $\mathcal{L}$ agindo em matrizes. Sejam

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{10} & 0 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix}, \; \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

Defina

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^{4} q_i(\rho) V_i \rho V_i^\dagger$$

Temos que $\mathcal{L}(\rho) = \rho$ implica em $\rho_2 = 0$ e

$$a\rho_1 + b\rho_4 = \rho_1 \tag{3.34}$$

$$c\rho_1 + d\rho_4 = \rho_4 \tag{3.35}$$

onde

$$a = q_1 p_{00}^2, \;\; b = q_2 p_{01}^2, \;\; c = q_3 p_{10}^2, \;\; d = q_4 p_{11}^2$$

Resolver (3.34) e (3.35) para ρ_1 nos fornece

$$\rho_1 = \frac{b}{1-a}\rho_4, \;\; \rho_1 = \frac{1-d}{c}\rho_4$$

ou seja,

$$\frac{b}{1-a} = \frac{1-d}{c} \tag{3.36}$$

o que é uma restrição sobre os q_i.

Por (3.36), podemos resolver (3.34) e (3.35):

$$\rho = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{1-d}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\rho = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{q_2 p_{01}^2}{1-q_1 p_{00}^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{1-q_4 p_{11}^2}{q_3 p_{10}^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas queremos que ρ seja operador densidade, portanto $\rho_1 + \rho_4 = 1$ e então um cálculo nos permite fixar ρ_4 e obter

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{q_2 p_{01}^2}{q_2 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1-q_1 p_{00}^2}{q_2 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-q_4 p_{11}^2}{1-q_4 p_{11}^2 + q_3 p_{10}^2} & 0 \\ 0 & \frac{q_3 p_{10}^2}{1-q_4 p_{11}^2 + q_3 p_{10}^2} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Seja

$$P = \sum_i V_i = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

coluna estocástica. Seja $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ tal que $P\pi = \pi$. Então

$$\pi = (\frac{p_{01}}{p_{01} - p_{00} + 1}, \frac{1 - p_{00}}{p_{01} - p_{00} + 1}) \tag{3.38}$$

Comparar (3.38) e (3.37) sugere que fixemos

$$q_1 = \frac{1}{p_{00}}, \;\; q_2 = \frac{1}{p_{01}}, \;\; q_3 = \frac{1}{p_{10}}, \;\; q_4 = \frac{1}{p_{11}} \tag{3.39}$$

Então as entradas não nulas de ρ são as entradas de π e assim associamos o ponto fixo de P ao ponto fixo de um certo $\mathcal{L}$ de maneira natural. Mas note ainda que tal escolha não é única, pois

$$q_2 = \frac{1 - q_1 p_{00}^2}{p_{01} p_{10}}, \;\; q_4 = \frac{1 - q_3 p_{10} p_{01}}{p_{11}^2}, \tag{3.40}$$

q_1, q_3 quaisquer, também produz ρ com coordenadas não nulas iguais as de π.

Note que também poderíamos ter considerado P linha estocástica, e π' tal que $\pi' P = \pi$. Tal π' tem a forma

$$\pi' = (\frac{p_{10}}{p_{10} - p_{00} + 1}, \frac{1 - p_{00}}{p_{10} - p_{00} + 1})$$

Então escolhendo

$$q_2 = \frac{p_{10}(q_1 p_{00}^2 - 1)}{p_{01}^2 (p_{00} - 1)}, \;\; q_4 = \frac{1 - q_3 p_{10}(1 - p_{00})}{p_{11}^2}, \tag{3.41}$$

q_1, q_3 quaisquer, produzimos ρ com coordenadas não nulas iguais as de π'.

$\Diamond$

Observação Outra forma de se chegar na mesma condição sobre os q_i é a seguinte. Suponha que os operadores V_i formam uma resolução da identidade, ou seja $\sum_i V_i^\dagger V_i = I$. Note que se os V_i são as coordenadas de uma matriz estocástica, isso não ocorre imediatamente. Ao invés disso considere matrizes $c_i V_i$, onde os c_i são constantes a determinar. Então para termos

$$\sum_{i=1}^{4} c_i^2 V_i^\dagger V_i = \begin{pmatrix} c_1^2 p_{00}^2 + c_3^2 p_{10}^2 & 0 \\ 0 & c_2^2 p_{01}^2 + c_4^2 p_{11}^2 \end{pmatrix} = I,$$

basta escolher (notando que $p_{00} + p_{10} = 1$ e $p_{01} + p_{11} = 1$) os c_i tais que

$$c_1^2 = \frac{1}{p_{00}}, \;\; c_2^2 = \frac{1}{p_{01}}, \;\; c_3^2 = \frac{1}{p_{10}}, \;\; c_4^2 = \frac{1}{p_{11}}$$

ou seja, na notação do que analisamos acima, $c_i = \sqrt{q_i}$.

$\diamondsuit$

Agora consideramos apenas duas matrizes V_i. Sejam

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Então

$$q_1 V_1 \rho V_1^\dagger + q_2 V_2 \rho V_2^\dagger = \rho \tag{3.42}$$

implica

$$q_1[(p_{00}\rho_1 + p_{01}\rho_3)p_{00} + (p_{00}\rho_2 + p_{01}\rho_4)p_{01}] = \rho_1$$

$$q_2[(p_{10}\rho_1 + p_{11}\rho_3)p_{10} + (p_{10}\rho_2 + p_{11}\rho_4)p_{11}] = \rho_4$$

E (3.42) também implica que $\rho_2 = \rho_3 = 0$, e então reescrevemos o sistema acima como

$$a\rho_1 + f\rho_4 = \rho_1 \tag{3.43}$$

$$g\rho_1 + h\rho_4 = \rho_4 \tag{3.44}$$

onde

$$a = q_1 p_{00}^2, \;\; f = q_1 p_{01}^2, \;\; g = q_2 p_{10}^2, \;\; h = q_2 p_{11}^2$$

Ainda, obtemos

$$\rho_1 = \frac{f}{1-a}\rho_4$$

$$\rho_1 = \frac{1-h}{g}\rho_4$$

o que nos leva a uma restrição sobre os q_i, a saber,

$$\frac{f}{1-a} = \frac{1-h}{g}$$

Portanto, a solução de (3.43) e (3.44) é

$$\rho = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{f}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_4 \begin{pmatrix} \frac{1-h}{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas $\rho_1 + \rho_4 = 1$ implica a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{q_1 p_{01}^2}{q_1 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1 - q_1 p_{00}^2}{q_1 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - q_2 p_{11}^2}{1 - q_2 p_{11}^2 + q_2 p_{10}^2} & 0 \\ 0 & \frac{q_2 p_{10}^2}{1 - q_2 p_{11}^2 + q_2 p_{10}^2} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Assumiremos agora que

$$P = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

é coluna estocástica. Seja π tal que $P\pi = \pi$. Tal π é dado por (3.38):

$$\pi = (\frac{p_{01}}{p_{01} - p_{00} + 1}, \frac{1 - p_{00}}{p_{01} - p_{00} + 1}) \tag{3.46}$$

Compare (3.46) com (3.45). Temos uma situação diferente do que ocorre no caso anterior, onde ρ possui q_1 e q_2 em sua expressão, ao passo que neste caso temos apenas q_1 (ou apenas q_2) na expressão de ρ. Fixando

$$q_1 = \frac{1}{p_{00}^2 - p_{00}p_{01} + p_{01}}, \ \ q_2 = \frac{p_{10}}{p_{01}p_{10}^2 - p_{11}p_{00} + p_{11}^2},$$

temos que as entradas não nulas de ρ são as entradas de π. Ainda, comparando a (i,i)-ésima coordenada de ρ com a i-ésima coordenada de π, vemos que se existem q_i' que também tornam ρ e π iguais, então

$$\frac{q_1 p_{01}^2}{q_1 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1} = \frac{q_1' p_{01}^2}{q_1' p_{01}^2 - q_1' p_{00}^2 + 1},$$

o que implica

$$q_1(q_1' p_{01}^2 - q_1' p_{00}^2 + 1) = q_1'(q_1 p_{01}^2 - q_1 p_{00}^2 + 1)$$

$$\Rightarrow q_1 q_1' p_{01}^2 - q_1 q_1' p_{00}^2 + q_1 = q_1 q_1' p_{01}^2 - q_1 q_1' p_{00}^2 + q_1'$$

e cancelando, obtemos $q_1 = q_1'$. Analogamente,

$$\frac{1 - q_2 p_{11}^2}{1 - q_2 p_{11}^2 + q_2 p_{10}^2} = \frac{1 - q_2' p_{11}^2}{1 - q_2' p_{11}^2 + q_2' p_{10}^2}$$

implica

$$(1 - q_2 p_{11}^2)(1 - q_2' p_{11}^2 + q_2' p_{10}^2) = (1 - q_2' p_{11}^2)(1 - q_2 p_{11}^2 + q_2 p_{10}^2)$$

$$\Rightarrow 1 - q_2' p_{11}^2 + q_2' p_{10}^2 - q_2 p_{11}^2 + q_2 q_2' p_{11}^4 - q_2 q_2' p_{11}^2 p_{10}^2$$
$$= 1 - q_2 p_{11}^2 + q_2 p_{10}^2 - q_2' p_{11}^2 + q_2 q_2' p_{11}^4 - q_2 q_2' p_{11}^2 p_{10}^2$$

Cancelando, obtemos

$$q_2' p_{10}^2 = q_2 p_{10}^2 \Rightarrow q_2' = q_2$$

e portanto neste caso, a escolha de q_1 e q_2 é única.

Ainda, podemos comparar (3.45) com o ponto fixo de P, mas agora supondo $P = V_1 + V_2$ linha estocástica. Tal ponto fixo é π' tal que $\pi' P = \pi'$,

$$\pi' = (\frac{p_{10}}{p_{10} - p_{00} + 1}, \frac{1 - p_{00}}{p_{10} - p_{00} + 1})$$

Um cálculo análogo nos mostra que se

$$q_1 = \frac{p_{10}}{p_{10}p_{00}^2 - p_{01}^2 p_{00} + p_{01}^2}, \;\; q_2 = \frac{1 - p_{00}}{p_{10}^3 - p_{11}^2 p_{00} + p_{11}^2},$$

as entradas não nulas de ρ são as entradas de π'. Novamente, comparando a (i, i)-ésima coordenada de ρ com a i-ésima coordenada de π', vemos que se existem q'_i que também tornam ρ e π' iguais, então $q'_i = q_i$, como mostramos acima.

Alternativamente, poderíamos ter definido

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_{00} & 0 \\ p_{10} & 0 \end{pmatrix}, \;\; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix},$$

ou seja, separando P pelas colunas, e não pelas linhas. Neste caso o sistema obtido é

$$q_1 p_{00}^2 \rho_1 + q_2 p_{01}^2 \rho_4 = \rho_1$$

$$q_1 p_{00} p_{10} \rho_1 + q_2 p_{01} p_{11} \rho_4 = \rho_2$$

$$q_1 p_{10}^2 \rho_1 + q_2 p_{11}^2 \rho_4 = \rho_4$$

ou reescrevendo,

$$a\rho_1 + b\rho_4 = \rho_1 \tag{3.47}$$

$$k\rho_1 + m\rho_4 = \rho_2 \tag{3.48}$$

$$s\rho_1 + t\rho_4 = \rho_4 \tag{3.49}$$

onde

$$a = q_1 p_{00}^2, \;\; b = q_2 p_{01}^2, \;\; k = q_1 p_{00} p_{10}, \;\; m = q_2 p_{01} p_{11}, \;\; s = q_1 p_{10}^2, \;\; t = q_2 p_{11}^2$$

Note que ρ_2 é determinado por ρ_1 e ρ_4. Podemos resolver (3.47) e (3.49) de forma semelhante a dos casos anteriores. Primeiro, obtemos a relação de consistência

$$\frac{b}{1 - a} = \frac{1 - t}{s}$$

Então resolvendo (3.47), (3.48), (3.49), obtemos a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{q_2p_{01}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} & k\rho_1+m\rho_4 \\ k\rho_1+m\rho_4 & \frac{1-q_1p_{00}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{q_2p_{01}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} & \frac{q_1q_2p_{00}p_{10}p_{01}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1}+\frac{q_2p_{01}p_{11}(1-q_1p_{00}^2)}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} \\ \frac{q_1q_2p_{00}p_{10}p_{01}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1}+\frac{q_2p_{01}p_{11}(1-q_1p_{00}^2)}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} & \frac{1-q_1p_{00}^2}{q_2p_{01}^2-q_1p_{00}^2+1} \end{pmatrix}$$

ou de forma equivalente, a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-q_2p_{11}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} & k\rho_1+m\rho_4 \\ k\rho_1+m\rho_4 & \frac{q_1p_{10}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-q_2p_{11}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} & \frac{q_1p_{00}p_{10}(1-q_2p_{11}^2)}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1}+\frac{q_1q_2p_{01}p_{11}p_{10}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} \\ \frac{q_1p_{00}p_{10}(1-q_2p_{11}^2)}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1}+\frac{q_1q_2p_{01}p_{11}p_{10}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} & \frac{q_1p_{10}^2}{q_1p_{10}^2-q_2p_{11}^2+1} \end{pmatrix}.$$

Lembre que a solução do problema estocástico clássico para P é

$$\pi = (\frac{p_{01}}{p_{01}-p_{00}+1}, \frac{1-p_{00}}{p_{01}-p_{00}+1})$$

$$\pi' = (\frac{p_{10}}{p_{10}-p_{00}+1}, \frac{1-p_{00}}{p_{10}-p_{00}+1}),$$

onde, como antes, π corresponde ao caso P coluna estocástica, π' ao caso P linha estocástica. Aqui buscamos alguma interpretação em termos de estados misturados. Note que a solução (3.50) parece estar relacionada à solução (3.37) (caso em que P é separada em 4 matrizes) pois a diagonal dos dois operadores é a mesma. Mas como neste caso os termos não diagonais de ρ são a princípio não nulos, uma correspondência entre as entradas de ρ com as de π não parece tão evidente.

Mesmo assim, podemos pensar no problema de obter q_i tais que as entradas da diagonal de ρ correspondem às entradas de π, e como consequência obter expressões para os termos não diagonais, possivelmente em uma forma mais simplificada, mas ainda associado a algum tipo de mistura entre as coordenadas. Então pelo cálculo obtido para P separado em 4 matrizes, obtemos de (3.40) e (3.41) que

$$q_2 = \frac{1-q_1p_{00}^2}{p_{01}p_{10}},$$

q_1 qualquer, tornam a diagonal de ρ igual a π e

$$q_2 = \frac{p_{10}(q_1 p_{00}^2 - 1)}{p_{01}^2(p_{00} - 1)},$$

q_1 qualquer, tornam a diagonal de ρ igual a π'.

$\Diamond$

Agora, consideramos o seguinte problema. Sejam

$$V_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{10} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11} \end{pmatrix}, \ H = \sum_i V_i, \ \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

Defina

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^{4} q_i V_i \rho V_i^{\dagger},$$

com $q_i \in \mathbb{R}$. Assumimos que $h_{ij} \in \mathbb{R}$ e queremos obter λ tal que $\mathcal{L}(\rho) = \lambda\rho$, $\lambda \neq 0$, e λ é o maior dos autovalores possíveis. Com um cálculo, obtemos $\rho_2 = \rho_3 = 0$,

$$q_1 h_{00}^2 \rho_1 + q_2 h_{01}^2 \rho_4 = \lambda\rho_1$$
$$q_3 h_{10}^2 \rho_1 + q_4 h_{11}^2 \rho_4 = \lambda\rho_4$$

ou equivalentemente,

$$a\rho_1 + b\rho_4 = \lambda\rho_1 \tag{3.51}$$
$$c\rho_1 + d\rho_4 = \lambda\rho_4, \tag{3.52}$$

com

$$a = q_1 h_{00}^2, \ b = q_2 h_{01}^2, \ c = q_3 h_{10}^2, \ d = q_4 h_{11}^2$$

donde

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - d}{c}\rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{\lambda - a}\rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\lambda - d}{c} = \frac{b}{\lambda - a}$$

Resolvendo para λ, obtemos os autovalores

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\zeta}{2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(q_1h_{00}^2 + q_4h_{11}^2 \pm \sqrt{(q_4h_{11}^2 - q_1h_{00}^2)^2 + 4q_2q_3h_{01}^2h_{10}^2}\Big),$$

onde

$$\zeta = \sqrt{(d-a)^2+4bc} = \sqrt{(q_4h_{11}^2 - q_1h_{00}^2)^2 + 4q_2q_3h_{01}^2h_{10}^2}$$

e as autofunções associadas

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{a-d\pm\zeta}{2c}\rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{d-a\pm\zeta}\rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

Mas $\rho_1 + \rho_4 = 1$ então obtemos a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{a-d\pm\zeta}{a-d\pm\zeta+2c} & 0 \\ 0 & \frac{2c}{a-d\pm\zeta+2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1h_{00}^2-q_4h_{11}^2\pm\zeta}{q_1h_{00}^2-q_4h_{11}^2\pm\zeta+2q_3h_{10}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2q_3h_{10}^2}{q_1h_{00}^2-q_4h_{11}^2\pm\zeta+2q_3h_{10}^2} \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

ou de forma equivalente, a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{-2b}{a-2b-d\mp\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{a-d\mp\zeta}{a-2b-d\mp\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2q_2h_{01}^2}{q_1h_{00}^2-2q_2h_{01}^2-q_4h_{11}^2\mp\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{q_1h_{00}^2-q_4h_{11}^2\mp\zeta}{q_1h_{00}^2-2q_2h_{01}^2-q_4h_{11}^2\mp\zeta} \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

Assim obtemos que $\rho_1, \rho_4, q_1, ..., q_4, \lambda$ são soluções implícitas do conjunto de equações (3.51)-(3.52). Lembre que neste caso, obtemos $\rho_2 = \rho_3 = 0$.

Agora consideramos o problema de encontrar o autovetor v associado ao autovalor dominante de H. Os autovalores são

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(h_{00} + h_{11} \pm \sqrt{(h_{00}-h_{11})^2 + 4h_{01}h_{10}}\Big)$$

Então obtemos v tal que $Hv = \lambda v$ a partir do conjunto de equações

$$h_{00}v_1 + h_{01}v_2 = \lambda v_1 \tag{3.55}$$

$$h_{10}v_1 + h_{11}v_2 = \lambda v_2 \tag{3.56}$$

que determinam implicitamente v_1, v_2, λ. Note agora que tomando

$$q_1 = \frac{1}{h_{00}},\ \ q_2 = \frac{1}{h_{01}},\ \ q_3 = \frac{1}{h_{10}},\ \ q_4 = \frac{1}{h_{11}}$$

vemos que os conjuntos de equações (3.51)-(3.52) e (3.55)-(3.56) são os mesmos. Assim, concluímos que o problema clássico de Perron é um caso particular do problema do operador $\mathcal{L}$ agindo em matrizes.

Defina agora $\mathcal{L}$ com $q_i \in \mathbb{C}$, $h_{ij} \in \mathbb{C}$, H hermitiano complexo. Queremos obter λ tal que $\mathcal{L}(\rho) = \lambda\rho$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, λ sendo o maior dos autovalores. Supomos ainda ρ hermitiano e positivo. Note que as equações (3.55)-(3.56) também valem para H hermitiano complexo qualquer. Ainda, nesse cálculo podemos tomar os operadores V_i com coordenadas complexas. Mas observe o seguinte: neste caso complexo que queremos considerar, (3.53) e (3.54) mostram que existem restrições sobre os q_i, pois como ρ é hermitiano, temos que as entradas da diagonal de ρ devem ser reais.

Por exemplo, em (3.53) (ou em (3.54)), notamos que mesmo supondo todos os q_i reais, pode ocorrer que $\rho_{00} \notin \mathbb{R}$ ou $\rho_{11} \notin \mathbb{R}$.

Agora, consideramos o problema de dividir H em duas matrizes apenas. Aqui temos dois casos a considerar, de forma semelhante ao que fizemos antes. Em ambos os casos, assuma $H = V_1 + V_2$ hermitiano complexo. Temos:

1. $$V_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & 0 \\ h_{10} & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & h_{01} \\ 0 & h_{11} \end{pmatrix}$$

   E $\mathcal{L}(\rho) = \lambda\rho$ nos leva a

   $$q_1|h_{00}|^2\rho_1 + q_2|h_{01}|^2\rho_4 = \lambda\rho_1 \tag{3.57}$$

   $$q_1h_{00}h_{01}\rho_1 + q_2h_{01}h_{11}\rho_4 = \lambda\rho_2 \tag{3.58}$$

   $$\overline{q_1}h_{00}h_{01}\rho_1 + \overline{q_2}h_{01}h_{11}\rho_4 = \lambda\rho_2 \tag{3.59}$$

   $$q_1|h_{10}|^2\rho_1 + q_2|h_{11}|^2\rho_4 = \lambda\rho_4 \tag{3.60}$$

   Este sistema generaliza algumas das construções que vimos antes, e nota-se que vários dos cálculos a seguir são semelhantes. Observe ainda que ρ_2 é uma combinação de ρ_1 e ρ_4 e que podemos tratar (3.57) e (3.60) em conjunto para obter os seguintes cálculos. Denote

   $$\hat{a} = q_1|h_{00}|^2, \;\; \hat{b} = q_2|h_{01}|^2, \;\; \hat{c} = q_1|h_{10}|^2, \;\; \hat{d} = q_2|h_{11}|^2$$

   donde obtemos a relação

   $$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\hat{d}}{\hat{c}}\rho_4 & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \rho_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{b}}{\lambda-\hat{a}}\rho_4 & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \rho_4 \end{pmatrix}$$

   e

   $$\frac{\lambda - \hat{d}}{\hat{c}} = \frac{\hat{b}}{\lambda - \hat{a}}$$

$$\lambda = \frac{\hat{a}+\hat{d}}{2} \pm \frac{\hat{\zeta}}{2} = \frac{\hat{a}+\hat{d}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\hat{d}-\hat{a})^2+4\hat{b}\hat{c}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(q_1|h_{00}|^2 + q_2|h_{11}|^2 \pm \sqrt{(q_2|h_{11}|^2 - q_1|h_{00}|^2)^2 + 4q_2q_1|h_{01}|^4}\Big) \quad (3.61)$$

Então obtemos a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}}{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}+2\hat{c}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{2\hat{c}}{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}+2\hat{c}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}+2q_1|h_{10}|^2} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{2q_1|h_{10}|^2}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}+2q_1|h_{10}|^2} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

ou de forma equivalente, a relação

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{-2\hat{b}}{\hat{a}-2\hat{b}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{\hat{a}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}}{\hat{a}-2\hat{b}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2q_2|h_{01}|^2}{q_1|h_{00}|^2-2q_2|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-2q_2|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

onde

$$\rho_2 = \frac{q_1}{\lambda}h_{00}h_{01}\rho_1 + \frac{q_2}{\lambda}h_{01}h_{11}\rho_4$$

$$= \frac{\overline{q_1}}{\lambda}h_{00}h_{01}\rho_1 + \frac{\overline{q_2}}{\lambda}h_{01}h_{11}\rho_4 \quad (3.64)$$

2. Ao contrário do que vimos acima, o caso a seguir terá solução diagonal (o que o torna pouco interessante). De fato,

$$V_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix}$$

E $\mathcal{L}(\rho) = \lambda\rho$ nos leva a

$$q_1(|h_{00}|^2\rho_1 + h_{00}\overline{h_{01}}\rho_2 + h_{01}\overline{h_{00}}\rho_3 + |h_{01}|^2\rho_4) = \lambda\rho_1$$

$$q_2(|h_{10}|^2\rho_1 + h_{10}\overline{h_{11}}\rho_2 + h_{11}\overline{h_{10}}\rho_3 + |h_{11}|^2\rho_4) = \lambda\rho_4$$

$$\lambda\rho_2 = 0$$

o que, caso $\lambda \neq 0$, se reduz em

$$q_1(|h_{00}|^2\rho_1 + |h_{01}|^2\rho_4) = \lambda\rho_1$$

$$q_2(|h_{10}|^2\rho_1 + |h_{11}|^2\rho_4) = \lambda\rho_4$$

Denote

$$\tilde{a} = q_1|h_{00}|^2,\ \ \tilde{b} = q_1|h_{01}|^2,\ \ \tilde{c} = q_2|h_{10}|^2,\ \ \tilde{d} = q_2|h_{11}|^2$$

O cálculo exigido neste caso é quase idêntico ao do caso anterior, exceto por certos coeficientes envolvidos, e pelo fato de que temos apenas termos diagonais não nulos. Ainda, um cálculo simples mostra que ao obter λ em função dos q_i e de H, obtemos o mesmo valor do caso 1, dado por (3.61). Então como

$$\lambda = \frac{\tilde{a}+\tilde{d}}{2} \pm \frac{\tilde{\zeta}}{2} = \frac{\tilde{a}+\tilde{d}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{d}-\tilde{a})^2 + 4\tilde{b}\tilde{c}}}{2},$$

temos

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{a}-\tilde{d}\pm\tilde{\zeta}}{\tilde{a}-\tilde{d}\pm\tilde{\zeta}+2\tilde{c}} & 0 \\ 0 & \frac{2\tilde{c}}{\tilde{a}-\tilde{d}\pm\tilde{\zeta}+2\tilde{c}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\tilde{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\tilde{\zeta}+2q_2|h_{10}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{2q_1|h_{10}|^2}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\tilde{\zeta}+2q_2|h_{10}|^2} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

ou de forma equivalente,

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{-2\tilde{b}}{\tilde{a}-2\tilde{b}-\tilde{d}\mp\tilde{\zeta}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{a}-\tilde{d}\mp\tilde{\zeta}}{\tilde{a}-2\tilde{b}-\tilde{d}\mp\tilde{\zeta}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2q_1|h_{01}|^2}{q_1|h_{00}|^2-2q_1|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\tilde{\zeta}} & 0 \\ 0 & \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\tilde{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-2q_1|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\tilde{\zeta}} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

$\Diamond$

3.3 Operador de Ruelle e o problema variacional

Queremos comparar a relação

$$\rho_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} & \gamma \frac{h_{01}}{h_{00}-h_{11}} \\ \gamma \overline{\frac{h_{01}}{h_{00}-h_{11}}} & \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{h_{01}}{h_{00}-h_{11}} \\ \overline{\frac{h_{01}}{h_{00}-h_{11}}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\gamma = \frac{e^{-\frac{h_{11}}{T}\sqrt{1+4h}} - e^{-\frac{h_{00}}{T}\sqrt{1+4h}}}{\sqrt{1+4h}(e^{-\frac{h_{00}}{T}\sqrt{1+4h}} + e^{-\frac{h_{11}}{T}\sqrt{1+4h}})} \qquad h = \left| \frac{h_{01}}{h_{00}-h_{11}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4h}} \tanh \frac{(h_{00}-h_{11})\sqrt{1+4h}}{2T} \in (-1,1), \quad (3.68)$$

referente à solução do problema variacional de pressão que analisamos anteriormente, com as relações

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}}{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}+2\hat{c}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{2\hat{c}}{\hat{a}-\hat{d}\pm\hat{\zeta}+2\hat{c}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}+2q_1|h_{10}|^2} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{2q_1|h_{10}|^2}{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\pm\hat{\zeta}+2q_1|h_{10}|^2} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{-2\hat{b}}{\hat{a}-2\hat{b}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{\hat{a}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}}{\hat{a}-2\hat{b}-\hat{d}\mp\hat{\zeta}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2q_2|h_{01}|^2}{q_1|h_{00}|^2-2q_2|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}} & \rho_2 \\ \overline{\rho_2} & \frac{q_1|h_{00}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2-2q_2|h_{01}|^2-q_2|h_{11}|^2\mp\hat{\zeta}} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

onde

$$\rho_2 = \frac{q_1}{\lambda} h_{00} h_{01} \rho_1 + \frac{q_2}{\lambda} h_{01} h_{11} \rho_4 = \frac{\overline{q_1}}{\lambda} h_{00} h_{01} \rho_1 + \frac{\overline{q_2}}{\lambda} h_{01} h_{11} \rho_4, \quad (3.71)$$

$$\hat{a} = q_1|h_{00}|^2, \ \hat{b} = q_2|h_{01}|^2, \ \hat{c} = q_1|h_{10}|^2, \ \hat{d} = q_2|h_{11}|^2$$

$$\hat{\zeta} = \sqrt{(\hat{d}-\hat{a})^2 + 4\hat{b}\hat{c}} = \sqrt{(q_2|h_{11}|^2 - q_1|h_{00}|^2)^2 + 4q_2q_1|h_{01}|^4}$$

referente à solução do problema de autovalores do operador de Ruelle, também analisado anteriormente. Ambas as soluções são referentes ao caso complexo. A solução do operador de Ruelle indicada acima corresponde ao caso em que dividimos o hamiltoniano em duas matrizes, cada uma com uma coluna não nula (lembre que esse foi o único caso com coeficientes complexos em que obtivemos uma solução não diagonal). Note que trocamos a notação dos índices de H no problema variacional de modo que $h_{00} = h_1$, $h_{01} = h_2$, $h_{10} = h_3$, $h_{11} = h_4$ (a notação de índices enumerando linhas e colunas é mais conveniente ao se considerar casos mais gerais).

Nossa pergunta é a seguinte. Fixado H, queremos determinar q_1 e q_2 tais que a solução do problema do operador de Ruelle $\mathcal{L}_{q_1,q_2}$ associado é igual a ρ_q que, lembramos, corresponde ao máximo da pressão para operadores densidade.

Comparando (3.67) e (3.69), e as coordenadas dos ρ respectivos, chegamos ao seguinte sistema:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma) = \frac{q_1|h_{00}|^2 - q_2|h_{11}|^2 \pm \hat{\zeta}}{q_1|h_{00}|^2 - q_2|h_{11}|^2 \pm \hat{\zeta} + 2q_1|h_{10}|^2} \tag{3.72}$$

$$\frac{\gamma h_{01}}{h_{00} - h_{11}} = \frac{1}{2\lambda}\Big(q_1 h_{00} h_{01}(1-\gamma) + q_2 h_{01} h_{11}(1+\gamma)\Big) \tag{3.73}$$

$$\hat{\zeta} = \sqrt{(q_1|h_{00}|^2 - q_2|h_{11}|^2)^2 + 4q_1q_2|h_{01}|^2} \tag{3.74}$$

Um cálculo longo, mas elementar nos fornece o seguinte.

Lema 3.3.1 *Fixado H, existem q_1 e q_2 tais que a solução do problema de autovalores de $\mathcal{L}_{q_1,q_2}$ é a solução do problema variacional de pressão.*

3.4 Um teorema de autovalores

As proposições a seguir são inspiradas em [27]. Lembramos que um operador linear $P : V \to V$ em um espaço de Hilbert $(V, \langle\cdot\rangle)$ é **positivo** se $\langle Pv, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in V$. Denotamos tal propriedade de P por $P \geq 0$.

Seja $\mathcal{H}_N$ espaço de Hilbert complexo de dimensão N. Defina o espaço dos operadores positivos em $\mathcal{H}_N$:

$$\mathcal{PH}_N := \{\rho : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N : \rho = \rho^*, \rho \geq 0\}$$

Defina:

$$\mathcal{M}_N := \{\rho \in \mathcal{PH}_N : tr(\rho) = 1\}$$

o espaço dos operadores densidade em $\mathcal{H}_N$. Sejam $V_i : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$ operadores lineares, $i = 1, \ldots, k$.

Observação Em [24] é suposto ainda que os V_i são invertíveis, mas não usaremos tal fato aqui.

$\diamondsuit$

Defina o operador hermitiano e positivo $\mathcal{L}_V : \mathcal{PH}_N \to \mathcal{PH}_N$,

$$\mathcal{L}_V(\rho) := \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^* \tag{3.75}$$

Proposição 3.4.1 *Existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_V(\rho) = \beta\rho$.*

Prova Defina $\mathcal{L}_n : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\mathcal{L}_n(\rho) := \frac{\mathcal{L}_V(\rho + \frac{I}{n})}{tr(\mathcal{L}_V(\rho + \frac{I}{n}))} \ , \ \ n \geq 1$$

Note que o operador acima está bem definido. De fato, note que

$$tr(\sum_i V_i(\rho + \frac{I}{n})V_i^*) = tr(\sum_i V_i \rho V_i^* + \frac{1}{n}\sum_j V_j V_j^*)$$

$$= tr(\mathcal{L}_V(\rho)) + \frac{1}{n}\sum_j tr(V_j V_j^*)$$

Mas $V_j V_j^*$ é positivo, para todo j, assim como $\mathcal{L}_V(\rho)$ é positivo. E sabemos que para qualquer operador positivo $P \neq 0$, se $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}_N$, temos

$$tr(P) = \sum_{i=1}^{N} \langle P v_i, v_i \rangle > 0$$

Logo, $tr(\mathcal{L}_V(\rho + \frac{I}{n})) > 0$, $n \geq 1$, e portanto $\mathcal{L}_n(\rho)$ está bem definida.

Sabemos que $\mathcal{M}_N$ é compacto e convexo, então podemos aplicar o teorema de Schauder para cada uma das aplicações $\mathcal{L}_n$, $n \geq 1$ e obter $\rho_n \in \mathcal{M}_N$ tais que

$$\mathcal{L}_n(\rho_n) = \rho_n \ \Rightarrow \ \mathcal{L}_V(\rho_n + \frac{I}{n}) = \beta_n \rho_n, \ \ n \geq 1$$

onde

$$\beta_n := tr(\mathcal{L}_V(\rho_n + \frac{I}{n}))$$

Pela compacidade de $\mathcal{M}_N$, podemos escolher um ponto $\rho \in \mathcal{M}_N$ que seja limite da sequência $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ e então, por continuidade, $\mathcal{L}_V(\rho) = \beta\rho$, onde $\beta = tr(\mathcal{L}_V(\rho))$. Ainda, note que $\beta \geq 0$, pois para $\{v_1, \ldots, v_N\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_N$,

$$tr(\mathcal{L}_V(\rho)) = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathcal{L}_V(\rho)v_i, v_i\rangle \geq 0,$$

pois $\mathcal{L}_V(\rho)$ é positivo, e a desigualdade será igual a zero apenas se $\mathcal{L}_V(\rho)$ for o operador nulo. Assim mostramos que existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_V(\rho) = \beta\rho$.

□

A prova acima funciona, com pequenas alterações, para o operador hermitiano e positivo $\mathcal{L}_{W,V} : \mathcal{PH}_N \to \mathcal{PH}_N$,

$$\mathcal{L}_{W,V}(\rho) := \sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho W_i^*)V_i\rho V_i^* \tag{3.76}$$

Proposição 3.4.2 *Existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \beta\rho$.*

Prova Defina $\mathcal{L}_n : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\mathcal{L}_n(\rho) := \frac{\mathcal{L}_{W,V}(\rho + \frac{I}{n})}{tr(\mathcal{L}_{W,V}(\rho + \frac{I}{n}))} \quad , \quad n \geq 1$$

Tal operador está bem definido. De fato, note que $\mathcal{L}_{W,V}(\rho)$, $W_jW_j^*$, $V_jV_j^*$ são positivos para todo j. Então

$$tr\Big[\sum_i tr\Big(W_i(\rho+\frac{I}{n})W_i^*\Big)V_i(\rho+\frac{I}{n})V_i^*\Big] = \sum_i tr\Big(W_i(\rho+\frac{I}{n})W_i^*\Big)tr(V_i(\rho+\frac{I}{n})V_i^*)$$

$$= \sum_i tr(W_i\rho W_i^* + \frac{1}{n}W_iW_i^*)tr(V_i\rho V_i^* + \frac{1}{n}V_iV_i^*) \geq$$

$$\geq \sum_i tr(W_i\rho W_i^*)tr(V_i\rho V_i^*) = tr(\mathcal{L}_{W,V})$$

E sabemos que para qualquer operador positivo $P \neq 0$, se $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}_N$, temos

$$tr(P) = \sum_{i=1}^{N} \langle P v_i, v_i \rangle > 0$$

Logo, $tr(\mathcal{L}_{W,V}(\rho + \frac{I}{n})) > 0$, $n \geq 1$, e portanto $\mathcal{L}_n(\rho)$ está bem definida.

Sabemos que $\mathcal{M}_N$ é compacto e convexo, então podemos aplicar o teorema de Schauder para cada uma das aplicações $\mathcal{L}_n$, $n \geq 1$ e obter $\rho_n \in \mathcal{M}_N$ tais que

$$\mathcal{L}_n(\rho_n) = \rho_n \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{L}_{W,V}(\rho_n + \frac{I}{n}) = \beta_n \rho_n, \;\; n \geq 1$$

onde

$$\beta_n := tr(\mathcal{L}_{W,V}(\rho_n + \frac{I}{n}))$$

Pela compacidade de $\mathcal{M}_N$, podemos escolher um ponto $\rho \in \mathcal{M}_N$ que seja limite da sequência $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ e então, por continuidade, $\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \beta\rho$, onde $\beta = tr(\mathcal{L}_{W,V}(\rho))$. Ainda, note que $\beta \geq 0$, pois para $\{v_1, \ldots, v_N\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_N$,

$$tr(\mathcal{L}_{W,V}(\rho)) = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathcal{L}_{W,V}(\rho) v_i, v_i \rangle \geq 0,$$

pois $\mathcal{L}_{W,V}(\rho)$ é positivo, e a desigualdade será igual a zero apenas se $\mathcal{L}_{W,V}(\rho)$ for o operador nulo. Assim mostramos que existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \beta\rho$.

$\square$

Capítulo 4

Baricentros, pontos fixos e autovalores para IFS

4.1 Integrais vetoriais e baricentros

Nota sobre pontos fixos de QIFS homogêneos. Esta exposição é baseada em [24] e [32].

Nesta seção voltamos a considerar operadores markovianos.

Seja $M_N(\mathbb{C})$ o conjunto de matrizes complexas de ordem N. Sejam

$$\mathcal{H}_N := \{\rho \in M_N(\mathbb{C}) : \rho^* = \rho\}$$

$$\mathcal{PH}_N := \{\rho \in \mathcal{H}_N : \langle \rho\psi, \psi\rangle \geq 0, \forall \psi \in \mathbb{C}^N\}$$
$$\mathcal{M}_N := \{\rho \in \mathcal{PH}_N : tr(\rho) = 1\}$$
$$\mathcal{P}_N := \{\rho \in \mathcal{H}_N : \rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \psi \in \mathbb{C}^N, \langle\psi|\psi\rangle = 1\},$$

o espaço dos operadores hermitianos, positivos, dos estados densidade, e dos estados puros, respectivamente. Como visto anteriormente, ρ^* denota o transposto conjugado (adjunto) de ρ, tr é o funcional traço, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ é o produto interno em $M_N(\mathbb{C})$ e $|\psi\rangle\langle\psi|$ é a notação de Dirac para projeções.

Embora as construções e teoremas mencionados em [32] sejam completamente gerais, estaremos mais interessados no caso em que temos IFS quânticos sobre estados misturados, o que significa considerar o espaço de operadores densidade $\mathcal{M}_N$ em um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita. Portanto, sempre que possível, indicaremos um exemplo das construções feitas no caso de matrizes densidade.

Seja (X,d) espaço métrico, $\mathbb{B}(X)$ os subconjuntos de Borel de X. Defina

$$fa(X) := \{f : \mathbb{B}(X) \to \mathbb{R} : f \text{ é finitamente aditiva }\}$$

$$ca(X) := \{f : \mathbb{B}(X) \to \mathbb{R} : f \text{ é contavelmente aditiva }\}$$

Seja $m \in fa(X)$. Dizemos que m é **limitada** se

$$\|m\|_{tot} := \sup\{\sum_{a\in\mathcal{A}} |m(A)| : \mathcal{A} \text{ é partição mensurável de } (X, \mathbb{B}(X))\}$$

for finita. Defina

$$bfa(X) := \{f \in fa(X) : f \text{ é limitada }\}$$

$$bca(X) := \{f \in ca(X) : f \text{ é limitada }\}$$

Denote por $M(X)$ o cone dos elementos positivos de $ca(X)$ (i.e., as medidas) e

$$M^{fin}(X) := bca(X) \cap M(X)$$

$$M^1(X) := \{\mu \in M(X) : \mu(X) = 1\}$$

Para $m \in fa(X)$, defina

$$\langle f, m\rangle := \int f dm,$$

se o lado direito da expressão existir.

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real, e τ uma topologia em V. Dizemos que $(V, +, \cdot; \tau)$ é um espaço vetorial topológico se for Hausdorff e se as operações $+$ e $\cdot$ forem contínuas.

Por exemplo, no contexto de matrizes densidade, V será o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N$ e X será o espaço $\mathcal{M}_N$ das matrizes densidade.

Definição Seja (X, Σ) um espaço mensurável, seja $\mu \in M(X)$, seja $(V, +, \cdot; \tau)$ um espaço localmente convexo e seja $f : X \to V$. Dizemos que $x \in V$ é a **integral** de f em X, denotado por

$$x := \int_X f d\mu$$

se

$$\Psi(x) = \int_X \Psi \circ f d\mu,$$

para todo $\Psi \in V^*$.

Denote por $co(X)$ a **cobertura convexa** de X, ou seja, o conjunto convexo mínimo que contém X. Definimos o **fecho convexo** como sendo $\overline{co(X)}$.

Proposição 4.1.1 *Seja (X, d) espaço métrico compacto, $\mu \in M^{fin}(X)$, seja $(V, +, \cdot; \tau)$ espaço localmente convexo e seja $f : X \to V$ uma função contínua tal que $\overline{co}f(X)$ é compacto. Então a integral de f em X existe e pertence a $\overline{co}f(X)$.*

Observação Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e τ é a topologia da norma em V, então a suposição da compacidade de $\overline{co}f(X)$ é satisfeita automaticamente.

Proposição 4.1.2 *[33] Seja V um espaço localmente convexo, seja $E \subset V$ um conjunto completo, convexo e limitado, e $\mu \in M^1(E)$. Então existe um único $x \in E$ tal que*

$$l(x) = \int_E l d\mu,$$

para todo $l \in V^*$.

A expressão acima é dita **fórmula baricêntrica** e o ponto x definido acima é dito **baricentro** de μ, denotado por $r(\mu)$.

4.2 Estados

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Seja $C \subset V$, não vazio. Dizemos que C é um **cone** se $C + C \subset C$ e $\lambda C \subset C$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dizemos que C é um cone **próprio** se $C \cap (-C) = \{0\}$ e **gerador** se $C \oplus (-C) = V$.

Um exemplo de cone que veremos é o espaço $\mathcal{PH}_N$ dos operadores hermitianos positivos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N$.

Seja $\leq$ uma ordem parcial em V. Dizemos que $(V, +, \cdot, \leq)$ é um **espaço vetorial ordenado** se

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \;\; x, y, z \in V$$

$$x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y, \;\; x, y \in V, \;\; \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Para matrizes densidade $\rho, \psi \in \mathcal{M}_N$, iremos definir $\rho \leq \psi$ se $\psi - \rho$ for matriz positiva.

Se $(V, +, \cdot, \leq)$ é um espaço vetorial ordenado, então

$$V^+ := \{x : x \geq 0\}$$

é um cone próprio, chamado **cone positivo**. Um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ é dito **positivo** se $f(V^+) \subset \mathbb{R}^+$ e é dito **estritamente positivo** se $f(V^+ \backslash \{0\}) \subset \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. Ainda, se f é funcional positivo, defina $f_+, f_- : V \to \mathbb{R}$ como

$$f_+(x) := \inf\{f(y) : y \in V^+, y - x \in V^+\} \tag{4.1}$$

$$f_-(x) := \inf\{f(z) : z \in V^+, z + x \in V^+\} \tag{4.2}$$

e

$$\|x\|_f := f_+(x) + f_-(x), \ \ x \in V.$$

Observação Apesar do nome, note que a princípio um funcional positivo e em V pode assumir valor negativos para algum ponto em V (pois, por definição, $e(V^+) \subset \mathbb{R}^+$, e não $e(V) \subset \mathbb{R}^+$).

No contexto de matrizes densidade, o funcional e será o traço em $V = \mathcal{H}_N$.

Definição Seja K um cone em V e seja e um funcional estritamente positivo em V. Dizemos que $x \in V$ **admite uma decomposição mínima com respeito a** (K, e) se existirem $y, z \in K$ tais que $x = y - z$, e para quaisquer $u, v \in K$ tais que $x = u - v$, temos que $e(y) \leq e(u)$ e $e(z) \leq e(v)$.

Definição Dizemos que (V, V^+, e) é um **espaço de estados** se

1. $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real e $V^+ \subset V$ é um cone.
2. $e : V \to \mathbb{R}$ é um funcional estritamente positivo tal que todo $x \in V$ admite uma decomposição mínima com respeito a (V^+, e).

O funcional e é chamado **funcional de carga**. Se no item 2, a decomposição mínima for única, dizemos que (V, V^+, e) é um espaço de estados **regular**.

Definição Seja $K \subset V$ um cone gerador próprio e seja B um subconjunto convexo de K. Dizemos que B é uma **base** de K se para todo $x \in K \backslash \{0\}$ existe um único $b \in B$ e $\lambda > 0$ tal que $x = \lambda b$.

Proposição 4.2.1 *[32] Seja B um subconjunto de um cone gerador próprio K. São equivalentes:*

1. *B é uma base de K.*

2. *Existe um funcional estritamente positivo e em V tal que*

$$B = \{x \in K : e(x) = 1\}.$$

Pela proposição acima, se (V, V^+, e) é um espaço de estados, temos que $B = \{x \in V^+ : e(x) = 1\}$ é um base de V^+. Tais elementos são ditos **estados** e dizemos que $x \in B$ é um **estado puro** se $x \in ex(B)$, onde $ex(B)$ denota o conjunto de pontos extremais de B.

Naturalmente, iremos associar B às matrizes densidade, que são os objetos que descrevem os estados misturados, e $ex(B)$ aos estados puros.

No caso de espaço de estados regulares, iremos denotar os elementos da única decomposição mínima de $x \in V$ por x_+ e x_-. Então, $x = x_+ - x_-$, $x_+, x_- \in V^+$ e ainda, temos $e(x_+) = e_+(x)$ e $e(x_-) = e_-(x)$, onde, de forma análoga às definições (4.1) e (4.2),

$$e_+(x) := \inf\{e(y) : y \in V^+, y - x \in V^+\} \tag{4.3}$$

$$e_-(x) := \inf\{e(z) : z \in V^+, z + x \in V^+\} \tag{4.4}$$

Precisaremos destas definições acima para poder descrever certas propriedades de operadores de Markov e submarkovianos em geral. Lembre que uma aplicação **positivamente homogênea** F é aquela em que $F(x + y) = F(x) + F(y)$ e $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, $\alpha > 0$.

Proposição 4.2.2 *Seja (V, V^+, e) um espaço de estados regular. Então*

1. *e pode ser decomposto como $e = e_+ - e_-$, onde e_+, e_- são positivos, positivamente homogêneos e subaditivos.*

2. *e marca o contorno do cone, i.e., $V^+ = \{x \in V : e(x) = e_+(x)\}$.*

Definição Seja (V, V^+, e) um espaço de estados com base

$$B = \{x \in V^+ : e(x) = 1\} \tag{4.5}$$

Seja $C \subset V^+$ um cone e seja τ uma topologia localmente convexa em $\langle C \rangle$ (o espaço gerado por C). Dizemos que o par (C, τ) é uma **estrutura compacta** em V^+ se

$$B_C := B \cap C$$

for compacto na τ-topologia. A estrutura compacta será **metrizável** se a τ-topologia restrita a B_C for metrizável.

No caso de operadores densidade, podemos tomar simplesmente $C = V^+ = \mathcal{PH}_N$, com V=$\mathcal{H}^N$ por exemplo, e portanto $B_C = B \cap V^+ = B = \mathcal{M}_N$, que é compacto na topologia Euclidiana τ (i.e., a topologia métrica induzida pela métrica Euclidiana em V). Logo $(C, \tau) = (\mathcal{PH}_N, \tau)$ é uma estrutura compacta para esse caso particular.

4.3 Exemplo: matrizes densidade

Aqui resumimos, a título de ilustração, como a construção da seção anterior se ajusta ao caso de matrizes densidade.

Usando a notação da seção anterior, defina $V := \mathcal{H}_N$, $V^+ := \mathcal{PH}_N$ (note que tal espaço é um cone convexo), e seja a ordem parcial $\leq$ em $\mathcal{PH}_N$ dada por $\rho \leq \psi$ se, e somente se, $\psi - \rho \geq 0$, i.e., se $\psi - \rho$ for positivo. Então, temos que

$$(V, V^+, e) = (\mathcal{H}_N, \mathcal{PH}_N, tr),$$

onde tr denota o funcional traço, é um espaço de estados regular. Ainda naquela notação, o conjunto B dos elementos de V^+ de traço 1 é, naturalmente, o espaço de matrizes densidade. Logo, $B = \mathcal{M}_N$.

Seja $Z \subset V^*$ um subespaço vetorial não vazio de V^*. A menor topologia em V tal que todo funcional definido em Z é contínuo nessa topologia, denotada por $\sigma(V, Z)$, torna V um espaço localmente convexo. Em particular, $\sigma(V, V^*)$ é chamada de **topologia fraca** em V. Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então $\sigma(V^*, V)$ é chamada **topologia fraca*** em V^* (identificamos V com um subespaço de V^{**}).

Temos também que $(C, \tau) = (\mathcal{PH}_N, \tau)$, onde τ é a topologia fraca* (e que coincide com a Euclidiana, ver p. 26 de [32]) é uma estrutura compacta metrizável. Temos, nesse caso, que $B_C = B \cap C = \mathcal{M}_N$.

Observação O conjunto de estados puros pode ser identificado com o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{N-1}$. Para $N = 2$, temos que $\mathcal{M}_2$ é isomorfo à bola fechada em $\mathbb{R}^3$ (a bola de Bloch) e o conjunto de estados puros $\mathcal{P}_2$ é isomorfo à sua fronteira (a esfera unitária de dimensão 2), chamada esfera de Poincaré. Mais especificamente, cada $\rho \in \mathcal{M}_2$ pode ser escrito na forma

$$\rho = \frac{\mathbb{I} + \mathbf{u} \cdot \sigma}{2}, \;\; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \;\; |\mathbf{u}| \leq 1,$$

onde $\mathbb{I}$ é matriz identidade e $\sigma := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli, que já vimos antes:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, um estado puro pode ser descrito da forma acima, mas com $\mathbf{u}$ tal que $|\mathbf{u}| = 1$.

$\diamondsuit$

Observamos a título de curiosidade que estas construções gerais também permitem modelar problemas baseados em álgebras C^*, tal como é descrito em [32], por exemplo.

4.4 Operadores Markovianos, submarkovianos e IFS

Definição Seja (X, d) espaço métrico. Sejam $p_i : X \to \mathbb{R}^+$ funções mensuráveis tais que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ e sejam $F_i : X_i \to X$ funções mensuráveis, $i = 1, \ldots, k$, onde $X_i = \{x \in X : p_i(x) \neq 0\}$. Dizemos que $\mathcal{F} = (X, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ é um **sistema de funções iteradas parcial** (PIFS).

Observação A diferença entre IFS definidos anteriormente e os PIFS é o fato de que nesta última, as funções F_i estão restritas ao subconjunto de X onde os p_i não se anulam. Note que a definição de IFS hiperbólicos dada antes já contém essa restrição, sendo que nesse caso IFS e PIFS são o mesmo objeto. Ainda, é possível mostrar que os teoremas clássicos de existência de uma única medida atrativa invariante para IFS podem ser estendidos para PIFS. Por causa disso iremos, por simplicidade, nos referir sempre a IFS indistintamente, exceto quando tal propriedade sobre os p_i for essencial.

$\diamondsuit$

No contexto de sistemas quânticos definimos QIFS homogêneos, que são um caso particular do que segue. Seja $\mathcal{F} = (B, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ um IFS. Defina

$$B_i := \{x \in B : p_i(x) \neq 0\} \tag{4.6}$$

e também $\lambda_i : B \to V^+$,

$$\lambda_i(x) := (p_i F_i)(x),$$

se $x \in B_i$, e $\lambda_i(x) := 0$ se $x \notin B_i$. Então dizemos que $\mathcal{F}$ é **homogêneo** se p_i e $\lambda_i = p_i F_i$ forem aplicações afins, $i = 1, \ldots, k$.

Em termos de espaços de matrizes, uma **aplicação afim** é uma aplicação $M : M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C})$ do tipo

$$M(Q) = L(Q) + K, \ \ K, Q \in M_N(\mathbb{C}), L : M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C}),$$

e L é linear.

Um **operador de Markov** para medidas de probabilidade é um operador $P : M^1(X) \to M^1(X)$ tal que

$$P(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) = \lambda P\mu_1 + (1-\lambda)P\mu_2,$$

para $\mu_1, \mu_2 \in M^1(X)$, $\lambda \in (0,1)$. Um exemplo de operador de Markov para medidas é o que definimos anteriormente, $\mathcal{V} : M^1(X) \to M^1(X)$,

$$(\mathcal{V}\nu)(B) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\nu, \tag{4.7}$$

e que chamaremos de **operador de Markov induzido por** $\mathcal{F}$.

Seja

$$m_b(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \text{f é mensurável e limitada}\}$$

Então, defina

$$I(x) := \{i : x \in X_i\}, \ \ x \in X,$$

e também $\mathcal{U} : m_b(X) \to m_b(X)$,

$$(\mathcal{U}f)(x) := \sum_{i \in I(x)} p_i(x) f(F_i(x))$$

Proposição 4.4.1 *[32] Seja $f \in m_b(X)$ e $\mu \in M^1(X)$, então*

$$\langle f, \mathcal{V}\mu \rangle = \langle \mathcal{U}f, \mu \rangle = \sum_{i=1}^{k} \int_{X_i} p_i (f \circ F_i) d\mu,$$

onde $\langle f, \mu \rangle$ denota a integral de f com respeito a μ.

Agora assuma que (V, V^+, e) é um espaço de estados completo com base

$$B = \{x \in V^+ : e(x) = 1\}$$

Defina

$$\|x\| = \|x\|_e := e_+(x) + e_-(x)$$

(ver equações (4.3) e (4.4)). Estamos interessados em operadores de Markov sobre elementos de um espaço vetorial. Tal definição imita o que temos para operadores de Markov para medidas.

Definição Seja $P : B \to B$. Dizemos que P é **operador de Markov** se

$$P(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda P(x_1) + (1-\lambda)P(x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in B$, $\lambda \in (0,1)$.

Proposição 4.4.2 *Todo operador de Markov $P : B \to B$ pode ser estendido de maneira única a um operador $P_+ : V^+ \to V^+$, satisfazendo*

1. $P_+(x+y) = P_+(x) + P_+(y)$
2. $P_+(\alpha x) = \alpha P_+(x), \ \ \alpha > 0$
3. $\|P_+(x)\| = \|x\|, \ \ \forall x \in V^+$

Prova Defina $P_+ : V^+ \to V^+$ como sendo $P_+(z) = \|z\| P(\frac{z}{\|z\|})$, $z \in V^+$. Claramente P_+ é uma extensão de P. Sejam $x, y \in V^+$, $\alpha > 0$. Temos

$$P_+(x+y) = \|x+y\| P(\frac{x+y}{\|x+y\|})$$

$$= (\|x\| + \|y\|) P\Big(\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{y}{\|y\|}\Big) = P_+(x) + P_+(y)$$

Ainda,

$$P_+(\alpha x) = \|\alpha x\| P(\frac{x}{\|x\|}) = \alpha P_+(x)$$

Além disso, $\frac{x}{\|x\|} \in B$ implica

$$\|P_+(x)\| = \|x\| \|P(\frac{x}{\|x\|})\| = \|x\|.$$

$\square$

Proposição 4.4.3 *Todo operador de Markov $P : B \to B$ pode ser estendido de maneira única a um operador $\overline{P} : V \to V$, satisfazendo*

1. $\overline{P}$ *é linear*
2. $\overline{P}(x) \in V^+, \ \forall x \in V^+$
3. $\|\overline{P}(x)\| = \|x\|, \ \forall x \in V^+$
4. $\|\overline{P}(x)\| \leq \|x\|, \ \forall x \in V$
5. $e \circ \overline{P} = e$

Prova Defina $\overline{P} : V \to V$ como sendo $\overline{P}(x) = P_+(y) - P_+(z)$, para $x \in V$, $y, z \in V^+$, $x = y - z$, onde $P_+ : V^+ \to V^+$ é definido na proposição anterior. De tal proposição segue que $\overline{P}$ é uma extensão de P_+, e portanto de P. Logo os itens 2 e 3 que enunciamos são válidos. Para mostrar que $\overline{P}$ está bem definida, assuma que $x = y - z = \tilde{y} - \tilde{z}$, com $y, \tilde{y}, z, \tilde{z} \in V^+$. Então

$$P_+(y) + P_+(\tilde{z}) = P_+(y + \tilde{z}) = P_+(\tilde{y} + z) = P_+(\tilde{y}) + P_+(z)$$

e portanto $P_+(y) - P_+(z) = P_+(\tilde{y}) - P_+(\tilde{z})$.

A seguir provamos que $\overline{P}$ é linear. Claramente $\overline{P}$ é aditiva pois P_+ é aditiva. Seja $x \in V$, $y, z \in V^+$, $x = y - z$. Para $\alpha > 0$, temos $\overline{P}(\alpha x) = P_+(\alpha y) - P_+(\alpha z) = \alpha(P_+(y) - P_+(z)) = \alpha\overline{P}(x)$. Para $\alpha < 0$, temos $\overline{P}(\alpha x) = P_+(|\alpha| z) - P_+(|\alpha| y) = |\alpha| P_+(z) - |\alpha| P_+(y) = |\alpha|(-\overline{P}(x)) = \alpha\overline{P}(x)$. Isso prova o item 1.

Seja $x \in V$, $y, z \in V^+$ tais que $x = y - z$ e $\|x\| = \|y\| + \|z\|$. Então $P_+(y)$ e $P_+(z)$ são uma decomposição positiva de $\overline{P}(x)$. Logo, $\|\overline{P}(x)\| \leq \|P_+(y)\| + \|P_+(z)\| = \|y\| + \|z\| = \|x\|$. Isso prova o item 4. Ainda, pela proposição anterior deduzimos que

$$e(\overline{P}(x)) = \|P_+(y)\| - \|P_+(z)\| = e(y) - e(z) = e(x),$$

e com isso provamos o item 5.

$\square$

Definição Um operador $Q : V^+ \to V^+$ é dito **submarkoviano** (ou subestocástico) se

1. $Q(x + y) = Q(x) + Q(y)$

2. $Q(\alpha x) = \alpha Q(x)$

3. $\|Q(x)\| \leq \|x\|$,

para todo x, $y \in V^+$, $\alpha > 0$.

Observação De maneira análoga a feita na proposição para operadores de Markov, todo operador submarkoviano $Q : V^+ \to V^+$ pode ser estendido de maneira única a uma contração linear positiva em V.

Definição Seja $P : V^+ \to V^+$ um operador de Markov e sejam $P_i : V^+ \to V^+$, $i = 1, \ldots, k$ operadores submarkovianos tais que $P = \sum_i P_i$. Dizemos que $(P, \{P_i\}_{i=1}^k)$ é um **par de Markov**.

A relevância dos pares de Markov está indicada na seguinte proposição, onde estabelecemos uma correspondência 1-1 entre IFS homogêneos e pares de Markov.

Proposição 4.4.4 *Seja $\mathcal{F} = (B, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ um IFS. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ é homogêneo.*

2. *Existe um par de Markov $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$, i.e, um operador de Markov $\Lambda : B \to B$ e uma decomposição $\Lambda = \sum_i \Lambda_i$, com $\Lambda_i : B \to V^+$, tal que*

$$p_i(x) = \|\Lambda_i(x)\|, \;\; x \in B$$

$$F_i(x) = \frac{\Lambda_i(x)}{\|\Lambda_i(x)\|}, \;\; x \in B_i.$$

Além disso, tal Λ e Λ_i são únicos. Dizemos que $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$ é o **par de Markov associado a** *$\mathcal{F}$, e $\mathcal{F}$ é o* **IFS gerado por** *$(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$.*

Prova $1 \Rightarrow 2$. Defina $\Lambda_i := \lambda_i = p_i F_i$, $i = 1, \ldots, k$ e $\Lambda := \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Para $x \in B$ temos

$$\|\Lambda_i(x)\| = \|p_i(x) F_i(x)\| = p_i(x)$$

e

$$\|\Lambda(x)\| = \|\sum_{i=1}^k p_i(x) F_i(x)\| = \sum_{i=1}^k p_i(x) \|F_i(x)\| = 1$$

Logo, Λ é operador de Markov e os Λ_i são operadores submarkovianos em B.

$2 \Rightarrow 1$. É claro que $\Lambda_i = p_i F_i$ é aplicação afim e $p_i = \|\Lambda_i\|$ é afim, por ser combinação de duas aplicações lineares.

□

Por exemplo, sejam $V_i : B \to V^+$ operadores lineares, e defina

$$F_i(\rho) := \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

$$p_i(\rho) := tr(V_i \rho V_i^*)$$

Então defina $\Lambda(\rho) := \sum_i \Lambda_i = \sum_i V_i \rho V_i^*$, onde $\Lambda_i := p_i F_i$. Temos, pela demonstração da proposição acima, que $(\Lambda, \{\Lambda_i\})$ é um par de Markov. Vimos anteriormente que supondo $\sum_i V_i^* V_i = I$, temos ainda que Λ representa um operador linear positivo que preserva o traço.

Dizemos que uma medida $\mu \in M^1(X)$ é **invariante** para um PIFS $\mathcal{F}$ se ela for invariante para o operador de Markov associado $\mathcal{V}$, dado por (4.7). Denotaremos

$$M^{\mathcal{V}}(X) := \{\mu \in M^1(X) : \mathcal{V}(\mu) = \mu\}$$

Observamos que $M^{\mathcal{V}}(X)$ é um subconjunto convexo de $M^1(X)$ [32].

Ainda, se $\mathcal{V}$ é o operador de Markov induzido por uma PIFS $\mathcal{F}$, denotaremos

$$M^{\mathcal{F}}(X) := M^{\mathcal{V}}(X)$$

Dizemos que uma medida de probabilidade μ é **atrativa** se $\mathcal{V}^n \nu \overset{w^*}{\to} \mu$ (convergência fraca*), se $n \to \infty$, para toda medida $\nu \in M^1(X)$.

Assuma agora que $\mathcal{F}$ é um IFS homogêneo e que $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$ é o par de Markov associado. Para enunciar o teorema de ponto fixo com toda generalidade, tomamos ainda a seguinte definição.

Definição Sejam (V, V^+, e) um espaço de estados com base B, (C, τ) uma estutura compacta em (V, V^+, e), $B_C = B \cap C$ e $P : V^+ \to V^+$ um operador submarkoviano. Dizemos que P é (C, τ)**-contínuo** se $P(C) \subset C$ e se $P|_C$ for τ-contínuo. Ainda, dizemos que um par de Markov $(P, \{P_i\}_{i=1}^k)$ é (C, τ)-contínuo se para cada $i = 1, \ldots, k$, P_i for (C, τ)-contínuo, ou equivalentemente, se para cada $i = 1, \ldots, k$, $P_i(B_C) \subset C$ e $P_i|_{B_C}$ for τ-contínuo.

4.5 Pontos fixos para IFS e matrizes densidade

O que faremos a seguir é enunciar os resultados de pontos fixos para IFS homogêneos com toda generalidade, segundo [32]. Para as demonstrações, faremos as simplificações e ajustes necessários de modo a obter o resultado no caso particular de IFS quânticos de estados misturados, ou seja, no espaço $\mathcal{M}_N$ das matrizes densidade em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N$ de dimensão finita.

Inicialmente assuma apenas que $\mathcal{F} = (B, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ é um IFS qualquer, $\Lambda = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i$.

Faremos as seguintes definições. Denote, para X um espaço métrico qualquer (podemos tomar $X = B$),

$$B = \{x \in V^+ : e(x) = 1\}$$

$$X_i = \{x \in X : p_i(x) \neq 0\}$$

$$I(x) := \{i : x \in X_i\}, \ \ x \in X,$$

$$I_k := \{1, \ldots, k\}$$

$$I_k^n := \{1, \ldots, k\}^n$$

Para $\iota = (i_1, \ldots, i_n) \in I_k^n$ e $\kappa = (k_1, \ldots, k_m) \in I_k^m$ defina a **concatenação** $\iota\kappa \in I_k^{n+m}$ como sendo $(\iota\kappa)_j := i_j$, se $j = 1, \ldots n$ e $(\iota\kappa)_j := k_{j-n}$ se $j = n+1, \ldots, n+m$. Note que para $i \in I_k$, temos que X_i, F_i, p_i já foram definidos. Seja $n \in \mathbb{N}$, $\iota \in I_k^n$, $i \in I_k$. Defina

$$F_{\iota i} := F_i \circ F_\iota \tag{4.8}$$

$$X_{\iota i} := X_\iota \cap F_\iota^{-1}(X_i) \tag{4.9}$$

$$p_{\iota i}(x) = \begin{cases} p_i(F_\iota x)p_\iota(x) & \text{se } x \in X_\iota \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus X_\iota \end{cases} \tag{4.10}$$

Portanto, para $\iota = (i_1, \ldots, i_n) \in I_k^n$ e $x \in X_\iota$,

$$F_\iota(x) = F_{i_n}(F_{i_{n-1}}(F_{i_{n-2}}(\cdots(F_{i_1}x)))) \tag{4.11}$$

e

$$p_\iota(x) = p_{i_1}(x)p_{i_2}(F_{i_1}x)\cdots p_{i_n}(F_{i_{n-1}}(F_{i_{n-2}}(\cdots(F_{i_1}x)))) \tag{4.12}$$

Ainda, $\mathcal{V}$ é o operador de Markov em $M^1(B)$ gerado por $\mathcal{F}$,

$$(\mathcal{V}\nu)(A) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i^{-1}(A)} p_i d\nu, \ \ A \in \mathbb{B}(X)$$

e, como antes,

$$(\mathcal{U}f)(x) = \sum_{i \in I(x)} p_i(x) f(F_i(x))$$

Defina ainda

$$I_k^n(x) := \{\iota \in I_k^n : x \in X_\iota\}, \ \ x \in X$$

Proposição 4.5.1 *Seja $n \in \mathbb{N}$, $f \in m_b(X)$, $x \in X$. Então*

$$(\mathcal{U}^n f)(x) = \sum_{\iota \in I_k^n(x)} p_\iota(x) f(F_\iota(x))$$

Proposição 4.5.2 *Seja $x \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\Lambda^n(x) = \sum_{\iota \in I_k^n(x)} p_\iota(x) F_\iota(x).$$

Proposição 4.5.3 *Seja $\mathcal{F}$ um IFS e seja $g : B \to \mathbb{R}$. Então para $n \in \mathbb{N}$,*

1. *Se g é côncava então $\mathcal{U}^n g \leq g \circ \Lambda^n$*
2. *Se g é convexa então $\mathcal{U}^n g \geq g \circ \Lambda^n$*
3. *Se g é afim então $\mathcal{U}^n g = g \circ \Lambda^n$*
4. *Se $\overline{x}$ é ponto fixo para Λ então a sequência $((\mathcal{U}^n g)(\overline{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ será descrescente, crescente ou constante, conforme g seja côncava, convexa ou afim, respectivamente.*

   Ainda, suponha que $\mathcal{F}$ é homogêneo. Então:

5. *Se g é côncava, então $\mathcal{U}g$ é côncava.*
6. *Se g é convexa, então $\mathcal{U}g$ é convexa.*
7. *Se g é afim, então $\mathcal{U}g$ é afim.*

Seja $P : M^1(X) \to M^1(X)$ um operador de Markov e seja $\mu \in M^1(X)$. Dizemos que μ é P-**persistente** se a sequência $(P^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta.

Denote por $B(X) \subset C(X)$ o conjunto das funções contínuas reais e limitadas em X. Seja $P : M^1(X) \to M^1(X)$ um operador submarkoviano. Dizemos que P é **um operador de Feller** se existe $U : B(X) \to B(X)$ tal que $\langle Uf, \mu\rangle = \langle f, P\mu\rangle$, para todo $f \in B(X)$ e $\mu \in M^1(X)$. Dizemos que U é o **conjugado** de P.

Seja $\mu \in M^1(X)$. Defina

$$V(\mu) := \{\nu \in M^1(X) : \nu \text{ é ponto de acumulação de } (\sum_{i=0}^{n-1} P^i\mu)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

$$S(\mu) := M^P(X) \cap \mathrm{Lim}(P^n\mu)_{n\in\mathbb{N}},$$

onde $\mathrm{Lim}(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota o fecho convexo do conjunto dos pontos de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathrm{Lim}(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} := \overline{co}\{\nu \in M^1(X) : \nu \text{ é ponto de acumulação de } (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Ainda, denotamos $S_{\mathcal{F}}(\mu)$ o conjunto $S(\mu)$ associado ao operador de Markov induzido pelo IFS $\mathcal{F}$.

Observação Seja $P : M^1(X) \to M^1(X)$ operador de Feller, $\mu \in M^1(X)$. Se μ é P-persistente, então $V(\mu) \subset S(\mu) \subset M^P(X)$, $V(\mu)$ é um subconjunto compacto não vazio de $M^1(X)$, e $S(\mu)$ é um subconjunto compacto, convexo não vazio de $M^1(X)$ [32].

$\diamondsuit$

Os resultados sobre pontos fixos para IFS homogêneos são os seguintes. Denote por δ_x a delta de Dirac em x. O primeiro teorema a seguir estabelece para IFS homogêneos, uma relação entre medidas invariantes para o operador de Markov $\mathcal{V}$ e pontos fixos para Λ. O segundo teorema é a relação entre pontos fixos para Λ e baricentros de medidas.

Teorema 4.5.4 *1. $\mathcal{F}$ é homogêneo se, e somente se, p_ι e $p_\iota F_\iota$ forem lineares para cada $\iota \in I_k^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Ainda, se $\mathcal{F}$ for homogêneo, então para $\overline{x} \in B$,

2. $\Lambda(\overline{x}) = \overline{x}$ se, e somente se, $\overline{x} = \sum_{i:p_i(\overline{x})\neq 0} p_i(\overline{x})F_i(\overline{x})$

3. *Se* $\mathcal{V}\delta_{\overline{x}} = \delta_{\overline{x}}$*, então* $\Lambda(\overline{x}) = \overline{x}$.

4. *Se* $\Lambda(\overline{x}) = \overline{x}$ *então* $\overline{x}$ *é o baricentro de* $\mathcal{V}^n\delta_{\overline{x}}$ *e*

$$\overline{x} = \sum_{i \in I_k^n(\overline{x})} p_i(\overline{x})F_i(\overline{x}),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Destacamos no seguinte lema um resultado visto em [32].

Lema 4.5.5 *Seja* $\mathcal{F}$ *homogêneo,* $\overline{x} \in B$*. São equivalentes:*

1. $\mathcal{V}\delta_{\overline{x}} = \delta_{\overline{x}}$

2. $\Lambda_i(\overline{x}) = p_i(\overline{x})\overline{x}$*, para todo* $i = 1, \ldots, k$

3. $F_{i_0}(\overline{x}) = \overline{x}$ *e* $p_{i_0}(\overline{x}) = 1$ *para algum* $i_0 = 1, \ldots, k$

Prova Primeiro, note que

$$\mathcal{V}\delta_{\overline{x}}(B) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\delta_{\overline{x}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int p_i(x)1_B(F_i(x))d\delta_{\overline{x}} = \sum_{i:p_i(\overline{x})\neq 0} p_i(\overline{x})\delta_{F_i(\overline{x})}(B) \tag{4.13}$$

Agora, suponha que vale o item 1. Note que pelo teorema 4.5.4, $\mathcal{V}\delta_{\overline{x}} = \delta_{\overline{x}}$ implica

$$\Lambda(\overline{x}) = \overline{x} = \overline{x}\sum_{i=1}^{k} p_i(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{k} p_i(\overline{x})\overline{x},$$

então $\Lambda_i(\overline{x}) = p_i(\overline{x})F_i(\overline{x}) = p_i(\overline{x})\overline{x}$, pela unicidade da decomposição de Λ. Logo, 1 implica 2. Suponha que vale o item 2. Assim temos $F_i(\overline{x}) = \overline{x}$, então

$$\sum_{i:p_i(\overline{x})\neq 0} p_i(\overline{x})\delta_{F_i(\overline{x})} = \sum_{i:p_i(\overline{x})\neq 0} p_i(\overline{x})\delta_{\overline{x}} = \delta_{\overline{x}},$$

o que implica 3. Para provar que 3 implica 1, basta observar que por (4.13),

$$\mathcal{V}\delta_{\overline{x}} = \sum_{i:p_i(\overline{x})\neq 0} p_i(\overline{x})\delta_{F_i(\overline{x})} = p_{i_0}(\overline{x})\delta_{F_{i_0}(\overline{x})} = \delta_{\overline{x}}$$

□

Exemplo 4.5.6 *(Sobre pontos fixos de QIFS homogêneos) Observamos que o lema 4.5.5 não implica que todo ponto fixo* ρ_0 *de* $\Lambda = \sum_i p_i F_i$ *é tal que* $F_i(\rho_0) = \rho_0$ *para todo i, embora existam diversos exemplos onde isso ocorre. Com efeito, considere*

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

é ponto fixo de $\Lambda(\rho) = V_1 \rho V_1^* + V_2 \rho V_2^*$*. No entanto, temos*

$$V_1 \rho_0 V_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 \rho_0 V_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto $F_1(\rho_0) \neq \rho_0$ *e* $F_2(\rho_0) \neq \rho_0$*.*

$\diamondsuit$

Teorema 4.5.7 *[32] Seja* $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$ *um par de Markov no espaço de estados* (V, V^+, e) *e seja* (C, τ) *uma estrutura compacta em* (V, V^+, e) *tal que* $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$ *é* (C, τ)*-contínuo. Seja* $B_C = B \cap C$ *e defina*

$$\mathcal{F}_C = ((B_C, \tau), F_i|_{B_i \cap C}, p_i|_{B_C})_{i=1,\ldots,k}$$

(lembre que $B_i := \{x \in B : p_i(x) \neq 0\}$*). Então*

1. *Um elemento* $\overline{x} \in B_C$ *é tal que* $\Lambda(\overline{x}) = \overline{x}$ *se, e somente se,* $\overline{x}$ *é o baricentro de algum* $\mu \in M^{\mathcal{F}_C}(B_C)$*.*

2. *Se* $\mathcal{F}_C$ *possui uma medida invariante e atrativa* μ *então*

$$\Lambda^n(y) \xrightarrow{\tau} r(\mu), \ \ n \to \infty,$$

para todo $y \in B_C$*.*

Estamos interessados na versão do teorema acima aplicado ao caso particular de IFS quânticos para estados misturados, ou seja, em que o espaço considerado é o espaço das matrizes densidade $\mathcal{M}_N$. Nesse caso particular, o teorema pode ser reescrito como:

Teorema 4.5.8 *[24] Um estado misturado $\hat{\rho}$ é Λ-invariante se, e somente se,*

$$\hat{\rho} = \int_{\mathcal{M}_N} \rho d\mu(\rho), \tag{4.15}$$

para alguma medida $\mathcal{V}$-invariante μ, isto é, se, e somente se, $\hat{\rho}$ for o baricentro de algum $\mu \in M^{\mathcal{V}}(\mathcal{M}_N)$:

$$\Psi(\hat{\rho}) = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi(\rho) d\mu(\rho), \ \ \forall \Psi \in (\mathcal{M}_N)^*$$

Adaptando as demonstrações dos teoremas (4.5.4) e (4.5.7), podemos obter uma prova simples do teorema acima. Precisamos ainda do seguinte lema:

Lema 4.5.9 *Seja $P : M^1(X) \to M^1(X)$ um operador de Feller, $\mu \in M^1(X)$, $g \in B(X)$. Se μ é P-persistente então*

1.

$$\lim_{n\to\infty} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle g, P^{i+j}\mu \rangle = \min\{\langle g, \nu\rangle : \nu \in S(\mu)\}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle g, P^{i+j}\mu \rangle = \max\{\langle g, \nu\rangle : \nu \in S(\mu)\}$$

Prova do teorema 4.5.8 Seja $\hat{\rho} \in \mathcal{M}_N$ tal que $\Lambda(\hat{\rho}) = \hat{\rho}$. Seja Ψ funcional linear em $\mathcal{M}_N$. Então

$$\int_{\mathcal{M}_N} \Psi(\rho) d\mathcal{V}\delta_{\hat{\rho}} = \int_{\mathcal{M}_N} \mathcal{U}\Psi(\rho) d\delta_{\hat{\rho}} = \int_{\mathcal{M}_N} \sum_{i\in I(\rho)} p_i(\rho)\Psi(F_i(\rho)) d\delta_{\hat{\rho}}$$

$$= \int_{\mathcal{M}_N} \Psi\Big(\sum_{i\in I(\rho)} p_i(\rho)F_i(\rho)\Big) d\delta_{\hat{\rho}} = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi(\Lambda(\rho)) d\delta_{\hat{\rho}}$$

$$= \Psi\Big(\int_{\mathcal{M}_N} \Lambda(\rho) d\delta_{\hat{\rho}}\Big) = \Psi(\Lambda(\hat{\rho})) = \Psi(\hat{\rho})$$

Logo, $\hat{\rho}$ é o baricentro de $\mathcal{V}\delta_{\hat{\rho}}$. Usando o lema 4.5.9, obtemos que

$$\Psi(\hat{\rho}) = \lim_{n\to\infty} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \Psi d\mathcal{V}^{i+j}\delta_{\hat{\rho}} = \min\Big\{ \int \Psi d\mu : \mu \in S_{\mathcal{F}}(\delta_{\hat{\rho}})\Big\}$$

$$\Psi(\hat{\rho}) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \Psi d\mathcal{V}^{i+j}\delta_{\hat{\rho}} = \max\Big\{ \int \Psi d\mu : \mu \in S_{\mathcal{F}}(\delta_{\hat{\rho}}) \Big\}$$

Portanto $\Psi(\hat{\rho}) = \int \Psi d\mu$, para qualquer $\mu \in S_{\mathcal{F}}(\delta_{\hat{\rho}}) \subset M^{\mathcal{F}}(\mathcal{M}_N)$. Reciprocamente, seja $\hat{\rho} = r(\mu)$ o baricentro de uma certa medida $\mu \in M^{\mathcal{V}}(\mathcal{M}_N)$. Então para $\Psi \in (\mathcal{M}_N)^*$, usando a proposição 4.5.3,

$$\Psi(\Lambda(\hat{\rho})) = \mathcal{U}(\Psi)(\hat{\rho}) = \int_{\mathcal{M}_N} \mathcal{U}(\Psi) d\mu = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi d\mathcal{V}\mu = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi d\mu = \Psi(\hat{\rho}),$$

donde $\Lambda(\hat{\rho}) = \hat{\rho}$.

$\square$

Lembre que um IFS é hiperbólico se as aplicações F_i forem contrações com respeito a uma das distâncias padrão em $\mathcal{M}_N$, e as p_i são Hölder contínuas e positivas. Nestas condições, obtemos unicidade da medida invariante. Temos o seguinte:

Proposição 4.5.10 *Se um QIFS é homogêneo e hiperbólico então o operador de Markov associado $\mathcal{V}$ possui uma única medida invariante μ.*

Observação Pela proposição e pelo teorema 4.5.8, tal medida invariante μ determina um único estado Λ-invariante $\hat{\rho} \in \mathcal{M}_N$, dado por (4.15).

Para provar este resultado, tomamos a seguinte definição. Dizemos que o operador de Markov $\mathcal{V}$ é **assintoticamente estável** se admite uma medida invariante e atrativa. Dizemos que o IFS $\mathcal{F}$ é assintoticamente estável se o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado for assintoticamente estável. Agora, note que o item 2 do teorema 4.5.7 nos diz que se o IFS $\mathcal{F}$ é assintoticamente estável, então $\{\Lambda^n(y)\}$ converge para um único estado invariante, independentemente da escolha do estado inicial y. Em particular, Λ possui um único ponto fixo invariante, e pelo teorema 4.5.7, $\mathcal{V}$ possui uma única medida invariante, e tal resultado é a proposição 4.5.10.

Portanto, uma maneira de completar o argumento feito acima e provar a proposição 4.5.10 é mostrar que toda IFS hiperbólica é assintoticamente estável. Tal resultado pode ser visto em [32]. Assumindo tal resultado, temos que se $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ é um estado qualquer, então para Ψ funcional linear,

$$\Psi(\Lambda^n(\rho_0)) = \mathcal{U}^n\Psi(\rho_0) = \int_{\mathcal{M}_N} \mathcal{U}^n \Psi d\delta_{\rho_0} = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi d\mathcal{V}^n \delta_{\rho_0},$$

e portanto, $\Psi(\Lambda^n(\rho_0)) \to \int_{\mathcal{M}_N} \Psi d\mu = \Psi(r(\mu))$, quando $n \to \infty$, para todo $\Psi \in (\mathcal{M}_N)^*$. Portanto, $\Lambda^n(\rho_0) \to r(\mu)$, quando $n \to \infty$, o que conclui a prova.

Capítulo 5

Entropia para QIFS

5.1 Entropia de estados coerentes

A definição de entropia dada nesta seção segue [29]. Seja $\mathcal{H}_N$ um espaço de Hilbert, o qual representa a **cinemática** do sistema quântico e seja $U : \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_N$ um operador unitário, o qual representa a **dinâmica**.

Seja Ω um espaço de fase compacto munido de uma medida de probabilidade m. Sejam $x_1, x_2, \ldots \in \Omega$ tais que a partir deles podemos obter uma família $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \ldots \in \mathcal{H}_N$, de modo que

$$x_i \in \Omega \mapsto |x_i\rangle \in \mathcal{H}_N$$

é contínua e

$$\int_\Omega |x_i\rangle\langle x_i| dm(x_i) = I,$$

para todo x_i. Assuma ainda que $\langle x_i|x_i\rangle := N$. Defina $K_U : \Omega^2 \to \mathbb{R}$,

$$K_U(x,y) := \frac{1}{N}|\langle y|U|x\rangle|^2$$

Seja $\mathcal{A} := \{E_1, \ldots, E_k\}$ uma partição de Ω. Defina

$$P^{CS}(i_0, \ldots, i_{n-1}) := \int_{E_{i_0}} dm(x_0) \cdots \int_{E_{i_{n-1}}} dm(x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} K_U(x_{j-1}, x_j),$$

$i_j = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, n-1$. Defina as **entropias parciais** por H_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n := -\sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}=1}^{k} P^{CS}(i_0, \ldots, i_{n-1}) \log P^{CS}(i_0, \ldots, i_{n-1})$$

Defina a **entropia de estados coerentes de U com respeito a $\mathcal{A}$** por

$$H(U,\mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty}(H_{n+1}-H_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_n$$

Ambas as sequências acima são decrescentes. Ainda, o número

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{k} m(E_i)\log m(E_i),$$

que não depende de U é a **entropia da partição $\mathcal{A}$**, denotada $H(\mathcal{A})$.

Vamos dividir a entropia de estados coerentes com respeito a uma partição em duas partes. Uma associada à suposição de que uma medição é um processo aproximado, e outra à dinâmica do sistema. Defina

$$H_{meas}(\mathcal{A}) := H(I,\mathcal{A})$$

$$H_{dyn}(U,\mathcal{A}) := H(U,\mathcal{A}) - H_{meas}(\mathcal{A}) = H(U,\mathcal{A}) - H(I,\mathcal{A})$$

Finalmente, defina a **entropia de estados coerentes de U** por

$$H_{dyn}(U) := \sup_{\mathcal{A}} H_{dyn}(U,\mathcal{A}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas.

5.2 Uma definição de entropia para QIFS

Estamos interessados em uma versão do problema variacional baseada na entropia definida em [21], [22]. Fazemos as seguintes construções básicas. Seja $\mathcal{U}_p : m_b(\mathcal{M}_N) \to m_b(\mathcal{M}_N)$,

$$(\mathcal{U}_p f)(\rho) := \sum_{i=1}^{k} p_i(\rho) f(F_i(\rho))$$

Vamos pensar em todas as escolhas possíveis de p_i (que determinam o que chamamos p) que satisfaçam $\mathcal{U}_p 1 = 1$. Cada p determina um $\mathcal{U}_p$. O conjunto dos p possíveis é denotado por P.

Seja $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\dots k}$ um QIFS. Um exemplo de operador de Markov para medidas é o que definimos anteriormente, $\mathcal{V}_p : M^1(\mathcal{M}_N) \to M^1(\mathcal{M}_N)$,

$$(\mathcal{V}_p \nu)(B) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\nu,$$

e que chamaremos de **operador de Markov induzido pelos** p_i. Ou seja consideramos todos os $\mathcal{V}_p$ com $p \in P$.

Dizemos que ν é **invariante** para os F_i se para algum $p \in P$ vale que $\mathcal{V}_p \nu = \nu$.

Seja $\mathcal{M}_F$ o conjunto de todas as medidas invariantes para a escolha fixa dos F_i. Para tais medidas $\nu \in \mathcal{M}_F$, e baseado em [21], [22], defina

$$h_0(\nu) := \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu$$

Acima, $\mathbb{B}^+$ denota as funções boreleanas, limitadas e positivas em $\mathcal{M}_N$.

Proposição 5.2.1 *Para $\nu \in \mathcal{M}_F$, temos que $0 \leq h_0(\nu) \leq \log k$.*

Para provar essa proposição precisamos do seguinte lema.

Lema 5.2.2 *[21] Sejam $\beta \geq 1 + \alpha$ e números $a_i \in [1 + \alpha, \beta]$, $i = 1, \ldots, k$. Então existe $\epsilon \geq 1$ tal que*

$$\log\left(\epsilon \sum_{i=1}^{k} a_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \log(\epsilon a_i).$$

A demonstração do lema segue fazendo a escolha

$$\epsilon = \exp\left(\frac{1}{k} \frac{\log \sum_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} \log a_i}\right)$$

Lema 5.2.3 *Se $f \in \mathbb{B}^+$ e $\nu \in \mathcal{M}_F$ então*

$$\sum_{i=1}^{k} \int f \circ F_i d\nu \geq \int f d\nu$$

Prova Suponha primeiro que $f = 1_B$, onde B é conjunto mensurável. Temos

$$\sum_{i=1}^{k} \int 1_B \circ F_i d\nu \geq \sum_{i=1}^{k} \int p_i(x) 1_B(F_i(x)) d\nu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i^{-1}(B)} p_i(x) d\nu(x)$$

$$= \mathcal{V}_p(\nu)(B) = \nu(B) = \int 1_B d\nu$$

A seguir, assuma que $f = \sum_{j=1}^{l} b_j 1_{B_j}$, i.e., uma função simples. Então

$$\sum_{i=1}^{k} \int \sum_{j=1}^{l} b_j 1_{B_j} \circ F_i d\nu = \sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{i=1}^{k} \int 1_{B_j} \circ F_i d\nu$$

$$\geq \sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{i=1}^{k} \int p_i(x) 1_{B_j}(F_i(x)) d\nu = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathcal{V}_p(\nu)(B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} b_j \nu(B_j) = \int f d\nu$$

Agora, seja $f = \lim_n f_n$ limite de uma sequência de funções simples. Note que supomos $f \in \mathbb{B}^+$, então temos que f é limitada, e como ν é probabilidade em $\mathcal{M}_N$, segue que f é integrável. Pelo teorema da convergência limitada, temos

$$\sum_{i=1}^{k} \int f \circ F_i d\nu = \sum_{i=1}^{k} \int \lim_n f_n \circ F_i d\nu = \lim_n \sum_{i=1}^{k} \int f_n \circ F_i d\nu$$

$$\geq \lim_n \int f_n d\nu = \int \lim_n f_n d\nu = \int f d\nu$$

□

A demonstração seguinte é adaptada de [21].

Prova da proposição 5.2.1 Vamos restringir a demonstração ao caso de um QIFS do tipo $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$, onde $F_i(\rho) = V_i \rho V_i^*$, onde os V_i são aplicações lineares invertíveis, como visto em [24]. Em particular, F_i é invertível.

Primeiro, note que se $f \equiv 1$, temos $\int \log(\sum_{i=1}^{k} 1) d\nu = \log k$, logo $h_0(\nu) \leq \log k$.

Seja $I = \int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu$ e suponha, sem perda de generalidade, que $1 + \alpha \leq f \leq \beta$ (note que essa integral é invariante pela transformação projetiva $f \to \lambda f$). Então

$$I = \int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon f \circ F_i}{\epsilon f}) d\nu = \int \log(\sum_{i=1}^{k} \epsilon f \circ F_i) d\nu - \int \log(\epsilon f) d\nu \tag{5.1}$$

Defina

$$a_i = f \circ F_i(\rho)$$

Então

$$\epsilon(\rho) = \exp\Big(\frac{1}{k}\frac{\log\sum_{i=1}^{k} f\circ F_i}{\sum_{i=1}^{k}\log f\circ F_i}\Big) \geq \epsilon_0 \geq 1,$$

pela compacidade de $\mathcal{M}_N$. Com tal escolha, obtemos, pelo lema 5.2.2,

$$\log(\epsilon_0 \sum_{i=1}^{k} f\circ F_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \log(\epsilon_0 f\circ F_i) \tag{5.2}$$

Aplique (5.2) em (5.1), então

$$I \geq \sum_{i=1}^{k} \int \log(\epsilon_0 f\circ F_i)d\nu - \int \log(\epsilon_0 f)d\nu$$

Então, pelo lema 5.2.3 aplicado na função $\log(\epsilon f)$ (temos $\log(\epsilon_0 f) \in \mathbb{B}^+$ pois $\epsilon_0 \geq 1$), obtemos

$$I \geq \int \log(\epsilon f)d\nu - \int \log(\epsilon f)d\nu = 0$$

$\square$

Seja $H : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$ um operador hermitiano. Temos o seguinte problema. Defina $F_0 : \mathcal{M}_F \to \mathbb{R}$,

$$F_0(\mu) := h_0(\mu) - \frac{1}{T}tr(H\rho_\mu) = \inf_{f\in\mathbb{B}^+}\int \log(\sum_{i=1}^{k}\frac{f\circ F_i}{f})d\mu - \frac{1}{T}tr(H\rho_\mu),$$

onde ρ_μ é o baricentro de μ. Então, queremos obter $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_F$ tal que

$$\hat{\mu} = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_F} F_0(\mu)$$

5.3 Fórmula integral para entropia de IFS

Seja (X, d) um espaço métrico completo separável. Seja (V, V^+, e) um espaço de estados completo, $B = \{x \in V^+ : e(x) = 1\}$ e $\mathcal{F} = (X, F_i, p_i)_{i=1,\dots,k}$ o IFS homogêneo gerado pelo par de Markov $(\Lambda, \{\Lambda_i\}_{i=1}^{k})$.

Defina $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} -x\log x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Defina a **função entropia de Shannon-Boltzmann** por $h : X \to \mathbb{R}^+$,

$$h(x) := \sum_{i=1}^{k} \eta(p_i(x))$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Defina a **entropia parcial** $H_n : X \to \mathbb{R}^+$ por

$$H_n(x) := \sum_{\iota \in I_k^n} \eta(p_\iota(x)),$$

para $n \geq 1$ e $H_0(x) := 0$, $x \in X$. Defina, para $x \in X$,

$$\overline{\mathcal{H}}(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n(x),$$

a **entropia superior** em x, e

$$\underline{\mathcal{H}}(x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n(x),$$

a **entropia inferior** em x. Se tais limites coincidem, chamamos o valor comum de **entropia** em x, denotado por $\mathcal{H}(x)$.

Seja $\mu \in M^{\mathcal{F}}(X)$. A **entropia parcial da medida** μ é definida por

$$H_n(\mu) := \sum_{\iota \in I_k^n} \eta(\langle p_\iota, \mu \rangle),$$

para $n \geq 1$ e $H_0(\mu) := 0$.

Proposição 5.3.1 *Seja $\mu \in M^{\mathcal{F}}(X)$. Então as sequências $\frac{1}{n}(H_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ são não negativas, descrescentes e possuem o mesmo limite.*

Definimos o limite comum das sequências mencionadas na proposição acima de $\mathcal{H}(\mu)$ e o chamamos de **entropia da medida** μ, i.e.,

$$\mathcal{H}(\mu) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n(\mu) = \lim_{n\to\infty} (H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu))$$

O seguinte resultado nos fornece uma fórmula integral para a entropia, bem como uma relação entre as entropias que definimos acima. Lembramos que $S(\mu) := M^P(X) \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{V}^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\mathrm{Lim}(\mathcal{V}^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ é o fecho convexo do conjunto dos pontos de acumulação de $(\mathcal{V}^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, e $S_{\mathcal{F}}(\mu)$ é o conjunto $S(\mu)$ associado ao operador de Markov induzido pela IFS $\mathcal{F}$.

Teorema 5.3.2 *[32] (Fórmula integral para entropia de IFS homogêneos, caso compacto). Seja (C,τ) uma estrutura compacta metrizável em (V,V^+,e) tal que $(\Lambda,\{\Lambda_i\}_{i=1}^k)$ é (C,τ)-contínua. Assuma que $\rho_0 \in B_C := B\cap C$ é tal que $\Lambda(\rho_0)=\rho_0$. Então*

$$\mathcal{H}(\rho_0)=\mathcal{H}(\nu)=\int_X h d\nu$$

para cada $\nu \in S_{\mathcal{F}_C}(\delta_{\rho_0})$, onde $\mathcal{F}_C$ é a PIFS $\mathcal{F}$ restrita a (B_C,τ).

O resultado análogo para IFS hiperbólicos é o seguinte.

Teorema 5.3.3 *[32] Seja $\mathcal{F}=(X,F_i,p_i)_{i=1,\dots,k}$ um IFS hiperbólico, $x\in X$, $\mu \in M^1(X)$ uma medida invariante e atrativa para $\mathcal{F}$. Então*

$$\mathcal{H}(x)=\lim_{n\to\infty}(H_{n+1}(x)-H_n(x))$$

e

$$\mathcal{H}(x)=\mathcal{H}(\mu)=\int_X h d\mu.$$

5.4 Alguns lemas para IFS

Queremos entender a estrutura do operador $\widehat{\mathcal{L}}:\mathcal{M}_N\to\mathcal{M}_N$,

$$\widehat{\mathcal{L}}(\rho):=\sum_{i=1}^k p_iF_i=\sum_{i=1}^k tr(W_i\rho W_i^*)\frac{V_i\rho V_i^*}{tr(V_i\rho V_i^*)},$$

com V_i, W_i lineares invertíveis, $\sum_i W_i^*W_i=I$. Tal operador está associado de maneira natural a um IFS que não é homogêneo. Entretanto, algumas das propriedades enunciadas anteriormente para IFS homogêneos também valem para o caso não homogêneo e nesta seção explicitamos algumas dessas propriedades, enunciando e provando certos resultados elementares e relevantes para nosso estudo.

Os lemas valem para IFS quaisquer, exceto o lema 5.4.4, cuja prova dada abaixo vale apenas com a suposição de homogeneidade.

Lema 5.4.1 *Seja $\{X,F_i,p_i\}_{i=1,\dots,k}$ um IFS, Ψ funcional linear em X. Então $\mathcal{U}\circ\Psi=\Psi\circ\mathcal{L}$.*

Prova Temos

$$(\mathcal{U}\Psi)(x)=\sum_{i\in I(x)}p_i(x)\Psi(F_i(x))=\Psi(\sum_i p_i(x)F_i(x))=\Psi(\mathcal{L}(x))$$

$\square$

Corolário 5.4.2 *Seja $\mathcal{F} = (X, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ um IFS e seja $\rho_0 \in X$. Então $\mathcal{L}(\rho_0) = \rho_0$ se, e somente se, $\mathcal{U}(\Psi(\rho_0)) = \Psi(\rho_0)$, para todo Ψ funcional linear.*

Prova Suponha que $\mathcal{L}(\rho_0) = \rho_0$. Então

$$\mathcal{U}(\Psi(\rho_0)) = \sum_i p_i(\rho_0)\Psi(F_i(\rho_0)) = \Psi(\sum_i p_i(\rho_0)F_i(\rho_0)) = \Psi(\mathcal{L}(\rho_0)) = \Psi(\rho_0)$$

Reciprocamente, se $\mathcal{U}(\Psi(\rho_0)) = \Psi(\rho_0)$,

$$\Psi(\mathcal{L}(\rho_0)) = \mathcal{U}(\Psi(\rho_0)) = \Psi(\rho_0)$$

$\square$

Lema 5.4.3 *Seja $\mathcal{F} = \{X, F_i, p_i\}_{i=1,\ldots,k}$ um IFS, $\mathcal{V}(\mu)(B) = \sum_{i=1}^k \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\mu$.*

1. *Seja $\rho_0 \in X$ tal que $F_i(\rho_0) = \rho_0$, $i = 1, \ldots, k$. Então $\mathcal{V}\delta_{\rho_0} = \delta_{\rho_0}$.*
2. *Seja $\rho_0 \in X$ tal que $\mathcal{V}\delta_{\rho_0} = \delta_{\rho_0}$, então $\mathcal{L}(\rho_0) = \rho_0$.*

Prova 1. Temos

$$\mathcal{V}\delta_{\rho_0}(B) = \sum_{i=1}^k \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\delta_{\rho_0} = \sum_{i=1}^k \int p_i(\rho)1_B(F_i(\rho))d\delta_{\rho_0}$$

$$= \sum_{i=1}^k p_i(\rho_0)1_B(F_i(\rho_0)) = \sum_{i=1}^k p_i(\rho_0)1_B(\rho_0) = \delta_{\rho_0}(B)$$

2. Seja Ψ funcional linear. Então

$$\Psi(\mathcal{L}(\rho_0)) = \mathcal{U}(\Psi(\rho_0)) = \int \mathcal{U}(\Psi(\rho))d\delta_{\rho_0} = \int \Psi(\rho)d\mathcal{V}\delta_{\rho_0}$$

$$= \int \Psi(\rho)d\delta_{\rho_0} = \Psi(\rho_0)$$

$\square$

Lema 5.4.4 *Seja $\{X, F_i, p_i\}_{i=1,\ldots,k}$ um IFS homogêneo, $\Lambda = \sum_i p_i F_i$.*

1. *Seja ρ_ν o baricentro de uma probabilidade ν. Então $\Lambda(\rho_\nu)$ é baricentro de $\mathcal{V}\nu$, onde $\mathcal{V}$ é o operador de Markov associado.*

2. *Seja μ probabilidade invariante para $\mathcal{V}$. Então o baricentro de μ, denotado por ρ_μ, é ponto fixo de Λ.*

Prova 1. Temos, para Ψ funcional linear,

$$\Psi(\Lambda(\rho_\nu)) = \int \Psi(\Lambda(\rho))d\nu = \int \mathcal{U} \circ \Psi d\nu = \int \Psi d\mathcal{V}\nu$$

2. Pelo lema 5.4.1, temos

$$\Psi(\mathcal{L}(\rho_\mu)) = \mathcal{U} \circ \Psi(\rho_\mu) = \int \mathcal{U} \circ \Psi d\mu = \int \Psi d\mathcal{V}\mu = \int \Psi d\mu = \Psi(\rho_\mu),$$

onde o fato de que $\mathcal{U} \circ \Psi$ é linear segue da homogeneidade de $\mathcal{F}$.

$\square$

Exemplo 5.4.5 *Sejam $k = N = 2$,*

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$W_1 = (1/2)I$, $W_2 = (\sqrt{3}/2)I$. Então

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_i p_i(\rho)F_i(\rho) = \sum_i tr(W_i\rho W_i^*)\frac{V_i\rho V_i^*}{tr(V_i\rho V_i^*)} = \frac{1}{4}V_1\rho V_1^* + \frac{3}{4}\frac{V_2\rho V_2^*}{tr(V_2\rho V_2^*)}$$

$$= \frac{1}{4}V_1\rho V_1^* + \frac{3}{4}\frac{V_2\rho V_2^*}{(\frac{9}{8} + \frac{27}{8}\rho_1)}$$

induz um IFS não homogêneo e é tal que possui $\rho_0 = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|$ como ponto fixo, e ainda temos $F_1(\rho_0) = F_2(\rho_0) = \rho_0$. Podemos aplicar o lema 5.4.3 e concluir que δ_{ρ_0} é medida invariante para o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado ao IFS determinado pelos p_i e F_i, e que ρ_0 é ponto fixo de $\mathcal{L}$. Ainda, um cálculo sobre as iterações de tal IFS sugere que ρ_0 é o único ponto fixo.

$\diamond$

O seguinte lema, adaptado de [32], fixa condições razoáveis em que podemos obter um ponto fixo para $\mathcal{L}$ a partir de uma certa medida invariante para o operador de Markov $\mathcal{V}$.

Lema 5.4.6 *Seja $\{\mathcal{M}_N, F_i, p_i\}_{i=1,\ldots,k}$ um IFS que possui uma medida μ atrativa e invariante para $\mathcal{V}$. Então $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^n(\rho_0) = \rho_\mu$, para qualquer $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$, onde ρ_μ é o baricentro de μ.*

Prova Seja $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$. Então

$$\Psi(\mathcal{L}^n(\rho_0)) = \mathcal{U}^n(\Psi(\rho_0)) = \int \mathcal{U}^n(\Psi(\rho))d\delta_{\rho_0} = \int \Psi(\rho)d\mathcal{V}^n\delta_{\rho_0}$$

e portanto $\Psi(\mathcal{L}^n(\rho_0)) \to \int \Psi(\rho)d\mu = \Psi(\rho_\mu)$, quando $n \to \infty$, para todo Ψ funcional linear. Logo, $\mathcal{L}^n(\rho_0) \to \rho_\mu$ quando $n \to \infty$, para todo $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$.

$\square$

5.5 Alguns cálculos sobre entropia

Fazemos a seguir alguns cálculos baseados no exemplo 2.6.8. Seja U matriz unitária de ordem mn agindo em $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}_n$. Sua decomposição de Schmidt é

$$U = \sum_{i=1}^{K} \sqrt{q_i} V_i^A \otimes V_i^B, \ \ K = min\{m^2, n^2\}$$

Os operadores V_i^A e V_i^B agem em certos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_m$ e $\mathcal{H}_n$, respectivamente. Temos também que $\sum_{i=1}^K q_i = 1$.

Seja $\sigma = \rho_A \otimes \rho_*^B = \rho_A \otimes I_n/n$ e defina

$$\Lambda(\rho_A) := tr_B(U\sigma U^\dagger) = \sum_{i=1}^{K} q_i V_i^A \rho_A V_i^{A\dagger}$$

Lembre que

$$tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) := |a_1\rangle\langle a_2| tr(|b_1\rangle\langle b_2|)$$

onde $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são vetores no espaço de estados de A e $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ são vetores no espaço de estados de B. O operador traço aparecendo no lado direito é o operador traço usual para o sistema B.

Um cálculo mostra que se $\rho_*^A = I_m/m$, $\Lambda(\rho_*^A) = \rho_*^A$ e portanto Λ é uma aplicação biestocástica (i.e., $\Lambda(I_m/m) = I_m/m$ e Λ preserva o traço).

Seja $\mathcal{F}$ o IFS homogêneo associado aos V_i^A, isto é $p_i(\rho) = tr(q_i V_i^A \rho V_i^{A\dagger})$, $F_i(\rho) = (q_i V_i^A \rho V_i^{A\dagger})/tr(q_i V_i^A \rho V_i^{A\dagger})$ e seja ρ_0 ponto fixo de $\Lambda = \sum_i p_i F_i$.

Pelo teorema 4.5.4, ρ_0 é o baricentro de $\mathcal{V}^n\delta_{\rho_0}$, $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 5.3.2, podemos calcular a entropia de tal IFS. Nesse caso, temos

$$\mathcal{H}(\rho_0) = \mathcal{H}(\nu) = \int_{\mathcal{M}_N} h d\nu, \tag{5.3}$$

onde $\nu \in M^P(X) \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{V}^n\delta_{\rho_0})_{n\in\mathbb{N}}$.

$\lozenge$

Seja $\mathcal{F} = (\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$ um IFS qualquer, $\Lambda = \sum_i p_i F_i$. Seja $\mathcal{U}$ o conjugado de $\mathcal{V}$. Pela proposição 4.5.1,

$$(\mathcal{U}^n h)(\rho) = \sum_{\iota\in I_k^n(\rho)} p_\iota(\rho) h(F_\iota(\rho))$$

e como $h(\rho) = \sum_{j=1}^k \eta(p_j(\rho))$, temos, para $\iota = (i_1, \ldots, i_n)$, $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ qualquer,

$$\int_{\mathcal{M}_N} h d\mathcal{V}^n\delta_{\rho_0} = \int_{\mathcal{M}_N} \mathcal{U}^n h d\delta_{\rho_0} \tag{5.4}$$

$$= -\int_{\mathcal{M}_N} \sum_{\iota\in I_k^n(\rho)} p_\iota(\rho) \sum_{j=1}^k p_j(F_\iota(\rho)) \log p_j(F_\iota(\rho)) d\delta_{\rho_0} \tag{5.5}$$

$$= -\sum_{\iota\in I_k^n(\rho_0)} p_\iota(\rho_0) \sum_{j=1}^k p_j(F_\iota(\rho_0)) \log p_j(F_\iota(\rho_0)) \tag{5.6}$$

$$= -\sum_{\iota\in I_k^n(\rho_0)} p_{i_1}(\rho_0)p_{i_2}(F_{i_1}\rho_0)\cdots p_{i_n}(F_{i_{n-1}}(F_{i_{n-2}}(\cdots(F_{i_1}\rho_0))))\times \tag{5.7}$$

$$\times \sum_{j=1}^k p_j(F_{i_n}(F_{i_{n-1}}(\cdots(F_{i_1}\rho_0)))) \log p_j(F_{i_n}(F_{i_{n-1}}(\cdots(F_{i_1}\rho_0)))) = (\mathcal{U}^n h)(\rho_0) \tag{5.8}$$

Suponha $\Lambda(\rho_0) = \rho_0$. Temos pela proposição 4.5.3 que, como h é côncava, $(\mathcal{U}^n h)_{n\in\mathbb{N}}$ é descrescente, $\mathcal{U}^n h \leq h \circ \Lambda^n$ e então

$$\int_{\mathcal{M}_N} h d\mathcal{V}^n\delta_{\rho_0} \leq h(\Lambda^n(\rho_0)) = h(\rho_0), \tag{5.9}$$

para todo n.

$\lozenge$

Agora considere IFS homogêneos e hiperbólicos. Temos o seguinte lema:

Lema 5.5.1 *Seja $\mathcal{F}$ um IFS homogêneo e hiperbólico, $\mathcal{V}$ o operador de Markov associado e μ a única medida invariante e atrativa associada a $\mathcal{V}$. Então para todo $n \geq 1$, e para todo $\rho \in \mathcal{M}_N$,*

$$\int_{\mathcal{M}_N} hd\mathcal{V}^n\delta_\rho = (\mathcal{U}^n h)(\rho) \quad e \quad \int_{\mathcal{M}_N} hd\mathcal{V}^n\delta_\rho \leq h(\Lambda^n(\rho))$$

o que implica

$$\int_{\mathcal{M}_N} hd\mu = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{U}^n h)(\rho) \quad e \quad \int_{\mathcal{M}_N} hd\mu \leq h(\tilde{\rho}),$$

onde $\tilde{\rho}$ é o baricentro de μ.

Observação Um operador de Markov é **assintoticamente estável** se ele admite uma medida invariante e atrativa. Um IFS é dita assintoticamente estável se o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado for assintoticamente estável e o lema acima é verdadeiro para tais tipos de IFS. Ainda, o caso hiperbólico segue do fato de que IFS hiperbólicos são assintoticamente estáveis. Portanto, temos

Lema 5.5.2 *[32] O lema 5.5.1 é válido supondo que o IFS homogêneo $\mathcal{F}$ é assintoticamente estável.*

$\Diamond$

5.6 Formulando uma expressão de entropia

Seja $\mathcal{M}_N$ o espaço dos operadores densidade. Seja H um operador autoadjunto, e V_i, $i = 1, \dots, k$ operadores lineares de tal forma que podemos definir uma dinâmica $F_i : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$:

$$F_i(\rho) := \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)} \tag{5.10}$$

Sejam W_i, $i = 1, \dots, k$ operadores lineares tais que $\sum_{i=1}^k W_i^* W_i = I$. Desta forma, toda escolha de W_i determina funções $p_i : \mathcal{M}_N \to \mathbb{R}$

$$p_i(\rho) := tr(W_i \rho W_i^*) \tag{5.11}$$

e temos, naturalmente, que $\sum_{i=1}^{k} p_i(\rho) = 1$, para todo ρ. Então uma família $W := \{W_i\}_{i=1,\ldots,k}$ determina um QIFS $\mathcal{F}_W$,

$$\mathcal{F}_W = \{\mathcal{M}_N, F_i, p_i\}_{i=1,\ldots,k}$$

com F_i, p_i dados por (5.10) e (5.11), e também uma entropia $h_V(W)$,

$$h_V(W) := -\sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho_W W_i^*) \sum_{j=1}^{k} tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big) \tag{5.12}$$

onde ρ_W denota o baricentro da única medida atrativa e invariante para o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado a $\mathcal{F}_W$ (i.e., supomos um QIFS com tal propriedade). Nestas condições, pelo lema 5.4.6, vale que ρ_W é um ponto fixo para o operador $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathcal{F}_W}$ associado,

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathcal{F}_W}(\rho) := \sum_{i=1}^{k} p_i(\rho)F_i(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho W_i^*)\frac{V_i\rho V_i^*}{tr(V_i\rho V_i^*)} \tag{5.13}$$

Definimos também

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_W}(\rho) := \sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho W_i^*)V_i\rho V_i^* \tag{5.14}$$

Note que pela construção feita na seção 5.5, temos $h_V(W) = \mathcal{U}h(\rho_W)$, onde $\mathcal{U}h(\rho) = \sum_i p_i(\rho)h(F_i(\rho))$.

Observação O lema 5.5.1 mostra como os cálculos (5.4)-(5.8), usados para definir $h_V(W)$, são usados para se obter, sob certas condições, uma fórmula integral para entropia. Ainda, os teoremas 5.3.2 e 5.3.3 fornecem outras condições sob as quais temos uma fórmula integral.

$\Diamond$

Temos o seguinte lema, cuja prova é simples.

Lema 5.6.1 *Seja $\mathcal{F} = (\mathcal{M}_N, F_i, p_i)$ um QIFS, com F_i, p_i da forma (5.10) e (5.11). Suponha que existe $\rho_0 \in \mathcal{M}_N$ tal que δ_{ρ_0} é a única medida $\mathcal{V}$-invariante. Então $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathcal{F}}(\rho_0) = \rho_0$ (eq. (5.13)) e*

$$\int \mathcal{U}^n h d\delta_{\rho_0} = \mathcal{U}^n h(\rho_0) = h(\rho_0),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Além disso,* $\mathcal{U}^n h(\rho_0) = \mathcal{U} h(\rho_0)$ *e portanto*

$$h_V(W) = \mathcal{U}^n h(\rho_0),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova O fato de que $\mathcal{L}(\rho_0) = \rho_0$ segue do lema 5.4.3, item 2. Ainda,

$$\mathcal{U}^n h(\rho_0) = \int \mathcal{U}^n h d\delta_{\rho_0} = \int h d\mathcal{V}^n \delta_{\rho_0} = \int h d\delta_{\rho_0} = h(\rho_0)$$

e

$$\mathcal{U}^n h(\rho_0) = \int \mathcal{U}^n h d\delta_{\rho_0} = \int h d\mathcal{V}^n \delta_{\rho_0} = \int h d\mathcal{V} \delta_{\rho_0} = \int \mathcal{U} h d\delta_{\rho_0} = \mathcal{U} h(\rho_0)$$

□

Lema 5.6.2 *Se* μ *é medida* $\mathcal{V}$*-invariante e atrativa então se* ρ_μ *é o baricentro de* μ *temos, para qualquer* ρ,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}^n h(\rho) = \int \mathcal{U} h d\mu = \int h d\mu \leq h(\rho_\mu) \tag{5.15}$$

Prova A desigualdade segue de [32], proposição 1.15. Ainda, pela proposição 4.4.1 temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}^n h(\rho) = \lim_{n\to\infty} \int \mathcal{U}^n h d\delta_\rho = \lim_{n\to\infty} \int \mathcal{U} h d\mathcal{V}^{n-1} \delta_\rho = \int \mathcal{U} h d\mu,$$

a última passagem devido a convergência fraca de $(\mathcal{V}^n \delta_\rho)_{n\in\mathbb{N}}$. Isso prova a primeira igualdade em (5.15). Como $\int \mathcal{U} h d\mu = \int h d\mathcal{V}\mu = \int h d\mu$, obtemos a segunda igualdade.

□

Lema 5.6.3 *Seja* $\mathcal{F} = (\mathcal{M}_N, F_i, p_i)$ *um QIFS, com* F_i, p_i *da forma (5.10) e (5.11). Suponha que* ρ *é o único ponto tal que* $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathcal{F}}(\rho) = \rho$ *(eq. (5.13)). Suponha que* $F_i(\rho) = \rho$, $i = 1, \ldots, k$. *Então*

$$\mathcal{U}^n h(\rho) = h(\rho),$$

$n = 1, 2, \ldots$, *e portanto* $h_V(W)$ *independe de* n.

Prova A prova segue por indução. Seja $n = 1$. Temos:

$$\mathcal{U}h(\rho) = \sum_i p_i(\rho)h(F_i(\rho)) = h(\rho)\sum_i p_i(\rho) = h(\rho)$$

E note que $\mathcal{U}^n h(\rho) = \mathcal{U}(\mathcal{U}^{n-1}h)(\rho)$, o que conclui a prova.

$\square$

Exemplo 5.6.4 *Podemos considerar a entropia de um QIFS com V_i complexos. Por exemplo, se $k = 2$, $W_1 = W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}I$, $V_1 = I$,*

$$V_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Então um cálculo simples mostra que $h_V(W) = \log 2$.

$\Diamond$

5.7 Entropia e cadeias de Markov

Seja $\mathcal{M}_N$ o espaço dos operadores densidade. Sejam V_i, W_i operadores lineares, invertíveis, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^k W_i^* W_i = I$. Vamos supor que os V_i estão fixados e determinam uma dinâmica dada por operadores por $F_i : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$, $i = 1, \dots, k$. Defina

$$P := \{(p_1, \dots, p_k) : p_i : \mathcal{M}_N \to \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k p_i(\rho) = 1, \forall \rho \in \mathcal{M}_N\}$$

$$P' := P \cap \{(p_1, \dots, p_k) : \exists W_i, i = 1, \dots, k : p_i(\rho) = tr(W_i \rho W_i^*),$$
$$W_i \text{ linear, invertível }, \sum_i W_i^* W_i = I\}$$

$$\mathcal{M}_F := \{\mu \in M^1(\mathcal{M}_N) : \exists p \in P' \text{ tal que } \mathcal{V}_p \mu = \mu\},$$

onde $\mathcal{V}_p : M^1(\mathcal{M}_N) \to M^1(\mathcal{M}_N)$,

$$\mathcal{V}_p(\mu)(B) := \sum_{i=1}^k \int_{F_i^{-1}(B)} p_i d\mu$$

Note que uma família $W := \{W_i\}_{i=1,\dots,k}$ determina um QIFS $\mathcal{F}_W$,

$$\mathcal{F}_W = \{\mathcal{M}_N, F_i, p_i\}_{i=1,\dots,k}$$

Defina

$$h_V(W) := -\sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i\rho_W W_i^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr\Big(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*\Big) \log\Big(\frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big), \tag{5.16}$$

onde, como antes, ρ_W denota o baricentro da única medida atrativa e invariante para o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado a $\mathcal{F}_W$.

Lema 5.7.1 $0 \leq h_V(W) \leq \log k$, *para qualquer família* W *de operadores lineares satisfazendo* $\sum_i W_i^* W_i = I$, $i = 1, \ldots, k$.

Prova Note que, por definição,

$$h_V(W) = (\mathcal{U}h)(\rho_W) = \int_{\mathcal{M}_N} h d\mathcal{V}\delta_{\rho_W}$$

e a função h (entropia de Shannon-Boltzmann) é ≥ 0. Isso prova o lema. Uma outra prova elementar é a que segue. Como ρ_W é positivo, temos $\langle W_i\rho_W W_i^* v, v\rangle = \langle \rho_W W_i^* v, W_i^* v\rangle \geq 0$, $v \in \mathcal{H}_N$. Logo, para $\{v_l\}_{l=1,\ldots N}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_N$,

$$tr(W_i\rho_W W_i^*) = \sum_{l=1}^{N} \langle W_i\rho_W W_i^* v_l, v_l\rangle > 0$$

Analogamente a expressão acima vale para os $V_i\rho_W V_i^*$, e portanto também para os $W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*$, pois

$$\langle W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^* v, v\rangle = \langle V_i \rho_W V_i^* W_j^* v, W_j^* v\rangle \geq 0$$

Para concluir que $h_V(W) \geq 0$, resta mostrar que $tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*) \leq tr(V_i\rho_W V_i^*)$ (note o sinal negativo na expressão de $h_V(W)$). De $\sum_{i=1}^k W_i^* W_i = I$, temos

$$tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*) = tr(W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*) \leq \sum_{j=1}^{k} tr(W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*)$$

$$= tr(\sum_{j=1}^{k} W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*) = tr(V_i \rho_W V_i^*)$$

Agora, mostremos que $h_V(W) \leq \log k$. Note que a expressão

$$h_V(W) := -\sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho_W W_i^*) \sum_{j=1}^{k} tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)$$

pode ser vista como uma média ponderada de entropias (cada uma destas dada pelo somatório em j), então o máximo de $h_V(W)$ será determinado se estimarmos o valor do somatório em j. Primeiro note que, para i fixado, os termos

$$q_j := tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

são positivos e $\sum_j q_j = 1$. Ainda, a soma

$$-\sum_{j=1}^{k} tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

tem como máximo o valor $\log k$, que ocorre quando

$$tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) = \frac{1}{k}$$

Logo,

$$h_V(W) \leq \sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho_W W_i^*) \log k = \log k$$

$\square$

Observação O máximo e o mínimo da entropia são atingidos. Com efeito, para qualquer dinâmica fixada V_i, $i = 1, \ldots, k$, se temos $W_m^* W_m = I$ para algum m então os demais p_i devem ser iguais a zero, pela condição $\sum_i W_i^* W_i = I$. Neste caso, temos $h_V(W) = 0$. E temos que $h_V(W)$ atinge o máximo se escolhermos $W_i = 1/\sqrt{k} I$, para cada i, onde I é o operador identidade.

$\lozenge$

Definição Seja $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$ uma matriz estocástica e irredutível. Seja π o vetor estacionário de P. A **entropia de** P, i.e., a entropia da probabilidade invariante no espaco de Bernoulli associada à matriz estocástica P, é definida por

$$H(P) := -\sum_{i,j=1}^{N} \pi_i p_{ji} \log p_{ji} \tag{5.17}$$

Faremos a seguir alguns exemplos, cujos resultados serão usados posteriormente. No final da seção, apresentamos um lema simples relacionado com tais exemplos.

Exemplo 5.7.2 *(Caso homogêneo, 4 matrizes). Vamos fazer alguns cálculos, tendo em mente a descrição feita na seção 3.2. Seja* $N = 2$*,* $k = 4$ *e*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{00}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{01}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{11}} \end{pmatrix}$$

Note que

$$\sum_i V_i^* V_i = \begin{pmatrix} p_{00} + p_{10} & 0 \\ 0 & p_{01} + p_{11} \end{pmatrix}$$

e portanto temos $\sum_i V_i^* V_i = I$ *ao supor que*

$$P := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

é coluna estocástica. Temos

$$V_1 \rho V_1^* = \begin{pmatrix} p_{00}\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 \rho V_2^* = \begin{pmatrix} p_{01}\rho_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 \rho V_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{10}\rho_1 \end{pmatrix}, \; V_4 \rho V_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{11}\rho_4 \end{pmatrix}$$

donde

$$tr(V_1 \rho V_1^*) = p_{00}\rho_1, \; tr(V_2 \rho V_2^*) = p_{01}\rho_4$$
$$tr(V_3 \rho V_3^*) = p_{10}\rho_1, \; tr(V_4 \rho V_4^*) = p_{11}\rho_4$$

Um cálculo simples mostra que o ponto fixo de $\mathcal{L}(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$ *é*

$$\rho_V = \begin{pmatrix} \frac{p_{01}}{1-p_{00}+p_{01}} & 0 \\ 0 & \frac{1-p_{00}}{1-p_{00}+p_{01}} \end{pmatrix}$$

Seja $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ *tal que* $P\pi = \pi$*. Sabemos que*

$$\pi = \left(\frac{p_{01}}{1 - p_{00} + p_{01}}, \frac{1 - p_{00}}{1 - p_{00} + p_{01}}\right) \tag{5.18}$$

Então as entradas não nulas de ρ_V *são as entradas de* π *e assim associamos o ponto fixo de* P *ao ponto fixo de um certo* $\mathcal{L}$ *de maneira natural.*

Vamos calcular $h_V(W)$. Note que $\mathcal{L}$ definido acima está associado a um IFS homogêneo. Então $W_i = V_i$, $i = 1, \ldots, k$ e

$$h_V(W) = h_V(V)$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i \rho_V W_i^*)}{tr(V_i \rho_V V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr\Big(W_j V_i \rho_V V_i^* W_j^*\Big) \log\Big(\frac{tr(W_j V_i \rho_V V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_V V_i^*)}\Big)$$

$$= -\sum_{i,j} tr\Big(V_j V_i \rho_V V_i^* V_j^*\Big) \log\Big(\frac{tr(V_j V_i \rho_V V_i^* V_j^*)}{tr(V_i \rho_V V_i^*)}\Big) \tag{5.19}$$

Um cálculo elementar mostra que, neste caso,

$$H(P) = h_V(V) \tag{5.20}$$

onde $H(P)$ é a entropia da matriz estocástica, definida por (5.17). Isso mostra que a entropia de cadeias de Markov é um caso particular da entropia para QIFS que definimos anteriormente.

Exemplo 5.7.3 *(Caso não homogêneo, 4 matrizes). Podemos refazer o exemplo anterior, considerando $V_i \neq W_i$. Mais precisamente, seja $N = 2$, $k = 4$ e*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{00}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{01}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{11}} \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q_{00}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_{01}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{q_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \; W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{11}} \end{pmatrix}$$

Note que

$$\sum_i V_i^* V_i = \begin{pmatrix} p_{00} + p_{10} & 0 \\ 0 & p_{01} + p_{11} \end{pmatrix}, \; \sum_i W_i^* W_i = \begin{pmatrix} q_{00} + q_{10} & 0 \\ 0 & q_{01} + q_{11} \end{pmatrix}$$

e portanto temos $\sum_i V_i^* V_i = \sum_i W_i^* W_i = I$ ao supor que

$$P := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \; Q := \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}$$

são coluna estocástica. Então

$$tr(V_1 \rho V_1^*) = p_{00} \rho_1, \;\; tr(V_2 \rho V_2^*) = p_{01} \rho_4$$

$$tr(V_3\rho V_3^*) = p_{10}\rho_1, \;\; tr(V_4\rho V_4^*) = p_{11}\rho_4$$
$$tr(W_1\rho W_1^*) = q_{00}\rho_1, \;\; tr(W_2\rho W_2^*) = q_{01}\rho_4$$
$$tr(W_3\rho W_3^*) = q_{10}\rho_1, \;\; tr(W_4\rho W_4^*) = q_{11}\rho_4$$

Queremos o ponto fixo de $\mathcal{L}(\rho) = \sum_i tr(W_i\rho W_i^*)V_i\rho V_i^*/tr(V_i\rho V_i^*)$. *Isso nos leva a*

$$\frac{q_{00}}{p_{00}}\begin{pmatrix} p_{00}\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{q_{01}}{p_{01}}\begin{pmatrix} p_{01}\rho_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{q_{10}}{p_{10}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{10}\rho_1 \end{pmatrix} + \frac{q_{11}}{p_{11}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{11}\rho_4 \end{pmatrix} = \rho$$

Note que os p_{ij} *se cancelam e então obtemos um cálculo análogo ao do exemplo anterior para o ponto fixo, que será*

$$\rho_W = \begin{pmatrix} \frac{q_{01}}{1-q_{00}+q_{01}} & 0 \\ 0 & \frac{1-q_{00}}{1-q_{00}+q_{01}} \end{pmatrix},$$

cujas coordenadas não nulas são as coordenadas do ponto fixo da matriz estocástica Q. *Vamos calcular* $h_V(W)$. *Alguns cálculos simples nos levam a*

$$h_V(W) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i\rho_W W_i^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr\Big(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*\Big) \log\Big(\frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)$$
$$= -\frac{q_{01}}{q_{01}+q_{10}}(q_{00}\log q_{00} + q_{10}\log q_{10}) - \frac{q_{10}}{q_{01}+q_{10}}(q_{01}\log q_{01} + q_{11}\log q_{11}) = H(Q) \tag{5.21}$$

onde $H(Q)$ *é a entropia da probabilidade invariante no espaço de Bernoulli associada à matriz estocástica* Q. *Logo, obtemos um cálculo análogo ao do caso homogêneo. Portanto, este resultado generaliza o que vimos no exemplo anterior.*

Observação *Neste exemplo os números* p_{ij} *se cancelam e não aparecem nos demais cálculos. Portanto não é necessário supor neste exemplo que os* p_{ij} *formam uma matriz estocástica.*

Exemplo 5.7.4 *(Caso homogêneo, 2 matrizes). Vamos calcular o exemplo acima dividindo a matriz estocástica em duas. Seja* $N = 2$, $k = 2$ *e*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{00}} & 0 \\ \sqrt{p_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \;\; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{01}} \\ 0 & \sqrt{p_{11}} \end{pmatrix},$$

Note que, da mesma forma que no exemplo anterior,

$$\sum_i V_i^* V_i = \begin{pmatrix} p_{00}+p_{10} & 0 \\ 0 & p_{01}+p_{11} \end{pmatrix}$$

e portanto temos $\sum_i V_i^* V_i = I$ *ao supor que*

$$P := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

é coluna estocástica. Alguns cálculos são semelhantes aos vistos para as equações (3.47), (3.48), (3.49), (3.50), seção 3.2. Vamos calcular a entropia do IFS homogêneo associado. O ponto fixo para $\mathcal{L}$ *é*

$$\rho_V = \begin{pmatrix} \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}} & \frac{p_{00}p_{10}p_{01}}{p_{01}+p_{10}} + \frac{p_{01}p_{11}p_{10}}{p_{01}+p_{10}} \\ \frac{p_{00}p_{10}p_{01}}{p_{01}+p_{10}} + \frac{p_{01}p_{11}p_{10}}{p_{01}+p_{10}} & \frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} \end{pmatrix}$$

As entradas da diagonal principal de ρ_V *correspondem as entradas do ponto fixo da matriz estocástica* P*. As outras entradas são uma certa combinação linear das principais, fato já discutido na seção 3.2. Então para tais* V_i *temos que* $h_V(W)$ *se reduz a*

$$h_V(W) = h_V(V) = -\sum_{i,j} tr\Big(V_j V_i \rho_V V_i^* V_j^*\Big) \log\Big(\frac{tr(V_j V_i \rho_V V_i^* V_j^*)}{tr(V_i \rho_V V_i^*)}\Big) = H(P) \tag{5.22}$$

por um cálculo idêntico ao feito para a equação (5.21) do exemplo anterior. Observe que o fato de o ponto fixo de $\mathcal{L}$ *não ser diagonal não modifica o cálculo da entropia.*

Exemplo 5.7.5 *(Caso não homogêneo, 2 matrizes). Pela simetria dos exemplos anteriores, é de se esperar que a entropia do IFS seja igual ao do processo estocástico associado. Sejam*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{00}} & 0 \\ \sqrt{p_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{01}} \\ 0 & \sqrt{p_{11}} \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q_{00}} & 0 \\ \sqrt{q_{10}} & 0 \end{pmatrix}, \ W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_{01}} \\ 0 & \sqrt{q_{11}} \end{pmatrix}$$

Como nos exemplos anteriores, teremos $\sum_i V_i^* V_i = \sum_i W_i^* W_i = I$ *ao supor que*

$$P := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \ Q := \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}$$

são coluna estocástica. De

$$tr(V_1 \rho V_1^*) = \rho_1, \ tr(V_2 \rho V_2^*) = \rho_4$$

$$tr(W_1 \rho W_1^*) = \rho_1, \ tr(W_2 \rho W_2^*) = \rho_4$$

$$tr(W_1V_1\rho V_1^*W_1^*) = p_{00}\rho_1, \;\; tr(W_2V_1\rho V_1^*W_2^*) = p_{10}\rho_1$$
$$tr(W_1V_2\rho V_2^*W_1^*) = p_{01}\rho_4, \;\; tr(W_2V_2\rho V_2^*W_2^*) = p_{11}\rho_4$$

e um cálculo simples, obtemos que, de fato, $h_V(W) = H(P)$. Isso conclui o exemplo.

$\Diamond$

Lema 5.7.6 *Sejam V_{ij} matrizes de ordem n da forma*

$$V_{ij} = \sqrt{p_{ij}}|i\rangle\langle j|$$

i.e., com uma entrada não nula apenas, $i, j = 1, \ldots, n$. Seja

$$\Lambda_P(\rho) := \sum_{i,j} V_{ij}\rho V_{ij}^*$$

onde $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Então para todo n, $\Lambda_P^n(\rho) = \Lambda_{P^n}(\rho)$.

Prova Note que

$$V_{kl}V_{ij} = \sqrt{p_{kl}}\sqrt{p_{ij}}\delta_{li}|k\rangle\langle j| \tag{5.23}$$

então

$$\Lambda_P^2(\rho) = \Lambda_P(\sum_{i,j} V_{ij}\rho V_{ij}^*) = \sum_{k,l,i,j} V_{kl}V_{ij}\rho(V_{kl}V_{ij})^*$$

$$= \sum_{k,j}\sum_i p_{ki}p_{ij}|k\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle k| = \sum_{k,j} p_{kj}^2|k\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle k| = \Lambda_{P^2}(\rho)$$

O caso geral segue iterando o cálculo acima.

$\square$

Corolário 5.7.7 *Nas condições do lema, temos que* $\lim_{n\to\infty}\Lambda_P^n(\rho) = \Lambda_\pi(\rho)$, *onde $\pi = \lim_{n\to\infty} P^n$ é a matriz estocástica cujas colunas são todas iguais ao vetor estacionário de P.*

5.8 Sobre entropias e medidas de Markov

Considere o espaço $\Omega = I_m^{\mathbb{N}}$, onde $I_m = \{1, \ldots, m\}$, seja $\mathcal{C} = \{C_\iota : \iota \in \cup_{n\in\mathbb{N}} I_m^n\}$ o conjunto dos cilindros em Ω, onde

$$C_\iota := \{\omega \in I_k^{\mathbb{N}} : w(j) = i_j, j = 1, \ldots, r, \iota = (i_1, \ldots, i_r) \in I_m^r\}$$

e denote por $\sigma(\mathcal{C})$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros em Ω.

Seja (P,π) uma cadeia de Markov, de modo que $P=(p_{ij})$ é uma matriz de ordem n, com $p_{ij}\geq 0$, $\sum_j p_{ij}=1$ (linha-estocástica), e $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ é o autovetor à esquerda com autovalor 1. Portanto $\pi P=\pi$, ou seja, $\sum_i \pi_i p_{ij}=\pi_j$.

Associada à matriz P temos a seguinte medida.

Definição A **medida de Markov** (associada à cadeia (P,π)) de um cilindro é definida por

$$\mu(C_\iota) := \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{r-1} i_r} \tag{5.24}$$

$\diamondsuit$

Estamos interessados na seguinte análise. Queremos comparar a entropia h_0 vista na seção 5.2,

$$h_0(\nu) := \inf_{f\in\mathbb{B}^+} \int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{f\circ F_i}{f}) d\nu \tag{5.25}$$

com a entropia $h_V(W)$ para QIFS, definida na seção 5.6,

$$h_V(W) := -\sum_{i=1}^{k} tr(W_i\rho_W W_i^*) \sum_{j=1}^{k} tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \tag{5.26}$$

no caso em que a medida ν em (5.25) é uma medida de Markov. Mais precisamente, mostraremos que nesse caso tais entropias são iguais. Isso é o que faremos a seguir.

$\diamondsuit$

Usamos a notação $\overline{ij}$ para denotar o cilindro em $I_m^{\mathbb{N}}$ que consiste no conjunto das sequências $(w_1,w_2,\ldots)$ tais que $w_1=i$ e $w_2=j$. Denote por $1_{\overline{ij}}$ a função indicadora de $\overline{ij}$. Para simplificar, suponha $m=2$ então o alfabeto considerado possui apenas 2 símbolos, que denotaremos por 1 e 2. Defina a seguinte função $f: I_2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} 1_{\overline{ij}}(x) \tag{5.27}$$

onde $a_{ij}\in\mathbb{R}^+$. Ou seja, f é uma função simples, constante nos cilindros $\overline{ij}$. Desta forma, $\log f = \sum_{i,j} \log a_{ij} 1_{\overline{ij}}$.

Vamos supor que $F_i : I_m^{\mathbb{N}} \to I_m^{\mathbb{N}}$ é a aplicação $F_i(w_1, w_2, \ldots) = (i, w_1, w_2, \ldots)$. Se ν é uma medida de Markov, temos

$$\int_{I_2^{\mathbb{N}}} \log f d\nu = \int_{I_2^{\mathbb{N}}} \sum_{i,j=1}^{2} \log{(a_{ij})} 1_{\overline{ij}} d\nu = \sum_{i,j=1}^{2} \log{(a_{ij})} \nu(\overline{ij}) = \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i p_{ij} \log a_{ij} \tag{5.28}$$

Ainda, temos, para $w = (i, j, \ldots)$,

$$f \circ F_l(w) = \sum_{i,j} a_{ij} 1_{\overline{ij}}(F_l(w)) = a_{li} \tag{5.29}$$

Então

$$\int \log(\sum_{i=1}^{2} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu = \int \log(\sum_{l=1}^{2} f \circ F_l) d\nu - \int \log f d\nu$$

$$= \int \log(\sum_{l=1}^{2} f \circ F_l) d\nu - \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i p_{ij} \log a_{ij} \tag{5.30}$$

Note que para qualquer $w \in I_m^{\mathbb{N}}$, $w = (1, \ldots)$ ou $w = (2, \ldots)$. Então, por (5.29),

$$\sum_{l=1}^{2} f \circ F_l(w) = \begin{cases} a_{11} + a_{21} & \text{se } w = (1, \ldots) \\ a_{12} + a_{22} & \text{se } w = (2, \ldots) \end{cases} \tag{5.31}$$

Agora, fixe $a_{ij} = p_{ji}$, onde p_{ij} são as entradas da matriz linha estocástica P fixada inicialmente. Desta forma, $a_{11} + a_{21} = p_{11} + p_{12} = 1$ e $a_{12} + a_{22} = p_{21} + p_{22} = 1$. Portanto, para tal escolha de a_{ij} e para qualquer $w \in I_m^{\mathbb{N}}$, a soma (5.31) é igual a 1. Logo, de (5.30), obtemos

$$\int \log(\sum_{i=1}^{2} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu = - \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i p_{ij} \log p_{ij} = H(P) \tag{5.32}$$

Logo,

$$\inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \log(\sum_{i=1}^{2} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu \leq H(P) \tag{5.33}$$

$\Diamond$

Agora note que qualquer função f positiva pode ser escrita como

$$f(w) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} p_{ji} \, 1_{\overline{ji}}(w)$$

Defina

$$u(w) := \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \, 1_{\overline{ji}}(w)$$

e

$$g(w) := \sum_{i,j=1}^{2} p_{ji} \, 1_{\overline{ji}}(w)$$

Temos

$$\int_{I_2^{\mathbb{N}}} \log f d\nu = \int_{I_2^{\mathbb{N}}} \sum_{i,j=1}^{2} \log{(a_{ij} p_{ji})} 1_{\overline{ji}} d\nu = \sum_{i,j=1}^{2} \log{(a_{ij} p_{ji})} \nu(\overline{ji})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \pi_j p_{ji} \log(a_{ij} p_{ji}) = \sum_{i,j=1}^{2} \pi_j p_{ji} \log(a_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{2} \pi_j p_{ji} \log(p_{ji}) \tag{5.34}$$

Se $w = (i, j, \ldots)$, então $f \circ F_l(w) = a_{li} p_{il}$ e portanto

$$\sum_l f \circ F_l = \sum_l a_{li} p_{il}$$

Escrevemos

$$\mathcal{L}_g(u)(w) = \sum_l f \circ F_l(w) = \sum_l \sum_{i,j} a_{ij} p_{ji} 1_{ij}(F_l(w)) \tag{5.35}$$

Temos também o seguinte.

Lema 5.8.1

$$\int \mathcal{L}_g(\log u) d\nu = \int \log u d\nu \tag{5.36}$$

Prova Temos

$$\int \log u d\nu = \int \sum_{i,j} \log(a_{ij}) 1_{ji} d\nu = \sum_{i,j} \log(a_{ij}) \nu(\overline{ji}) = \sum_{i,j} \log(a_{ij}) \pi_j p_{ji} \tag{5.37}$$

E ainda

$$\int \mathcal{L}_g(\log u) d\nu = \int \sum_l \sum_{i,j} \log(a_{ij}) p_{ji} 1_{\overline{ij}}(F_l(w)) d\nu$$

$$= \sum_{i,j} \log(a_{ij}) p_{ji} \sum_l \int 1_{\overline{ij}}(F_l(w)) d\nu$$

$$= \sum_{i,j} \log(a_{ij}) p_{ji} \sum_l \nu(\overline{lj}) = \sum_{i,j} \log(a_{ij}) p_{ji} (\pi_1 p_{1j} + \pi_2 p_{2j}) = \sum_{i,j} \log(a_{ij}) \pi_j p_{ji} \tag{5.38}$$

Logo,

$$\int \mathcal{L}_g(\log u) d\nu = \int \log u d\nu \tag{5.39}$$

$\square$

Desta forma temos, usando (5.34), (5.36) e (5.37),

$$\int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu = \int \log(\sum_{l=1}^{2} f \circ F_l) d\nu - \int \log f d\nu$$

$$= \int \log(\sum_{l=1}^{2} f \circ F_l) d\nu - \Big(\sum_{i,j=1}^{2} \pi_j p_{ji} \log(a_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i p_{ij} \log(p_{ij}) \Big)$$

$$= \int \log\left(\mathcal{L}_g(u)\right) d\nu - \int \log u \, d\nu + H(P) \tag{5.40}$$

$$= \int \log\left(\mathcal{L}_g(u)\right) d\nu - \int \mathcal{L}_g(\log u) \, d\nu + H(P) \tag{5.41}$$

Queremos mostrar que

$$\int \log\left(\mathcal{L}_g(u)\right) d\nu - \int \mathcal{L}_g(\log u) \, d\nu \geq 0 \tag{5.42}$$

Isto segue imediatamente se mostrarmos que para $w = (i, j, \ldots)$,

$$\log\left(\mathcal{L}_g(u)\right)(w) \geq \mathcal{L}_g(\log u)(w) \tag{5.43}$$

A última expressão segue de convexidade. De fato, para provar a desigualdade acima, basta mostrar que para qualquer $w = (i, j, \ldots)$, temos

$$\log\Big(\sum_l a_{li} p_{il}\Big) \geq \sum_l p_{il} \log a_{li} \tag{5.44}$$

Tal desigualdade é verdadeira, pois os p_{il} são números positivos com $\sum_l p_{il} = 1$, para qualquer i, e a função log é côncava.

Portanto, concluímos de (5.41) e (5.42) que

$$\int \log(\sum_{i=1}^{k} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu \geq H(P) \tag{5.45}$$

Conclusão Por (5.33) e (5.45) concluímos que se ν é uma medida de Markov associada à uma matriz estocástica P, temos

$$\inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \log(\sum_{i=1}^{2} \frac{f \circ F_i}{f}) d\nu = H(P) \tag{5.46}$$

Capítulo 6

Problema variacional de pressão para QIFS

6.1 Problema de pressão e multiplicadores de Lagrange

Seja M_F o conjunto das medidas invariantes definido na seção 5.7. Dadas aplicações lineares W_i, com $\sum_i W_i^* W_i = I$, estas determinam aplicações p_i e uma medida de probabilidade μ que por sua vez determina o baricentro ρ_μ. Para $\mu \in M_F$ seja $\rho_W = \rho_\mu \in \mathcal{M}_N$ o seu baricentro. Defina

$$F_\mu := h_V(W) - \frac{1}{T} tr(H\rho_W), \tag{6.1}$$

onde $h_V(W)$ é definido na seção 5.7, e H é um operador hermitiano. Assim, temos o seguinte problema: encontrar μ tal que

$$F_\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_F} F_\nu \tag{6.2}$$

Observação A pressão, como definida em (6.1), é uma aplicação que toma como valor o baricentro de uma medida invariante associada. Dadas aplicações lineares W_i, com $\sum_i W_i^* W_i = I$, estas determinam aplicações p_i e uma medida de probabilidade μ que por sua vez determina o baricentro ρ_μ. Para se poder descrever o problema de pressão usando multiplicadores de Lagrange, é necessário escrever as coordenadas de ρ_μ em função dos W_i. Dadas certas hipóteses (lema 5.4.6), vale que ρ_μ é o único ponto fixo do operador $\mathcal{L}$ associado ao IFS $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)$. Ou seja, as coordenadas de ρ_μ serão as coordenadas do ponto fixo de $\mathcal{L}$, e estas podem ser escritas em função dos W_i como veremos posteriormente.

$\diamondsuit$

No que segue faremos alguns cálculos preliminares a fim de resolver o problema dado por (6.2). Estamos interessados nos pontos fixos de

$$\mathcal{L}(\rho) := \sum_{i=1}^{k} p_i F_i = \sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho W_i^*) \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)} \tag{6.3}$$

Considere o caso $N = k = 2$. Sejam

$$\rho_\mu = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_4 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Observação Ao invés de considerar W_1 e W_2 nos cálculos, defina $\tilde{W}_1 := W_1^* W_1$ e $\tilde{W}_2 := W_2^* W_2$. Após resolver o sistema associado aos multiplicadores de Lagrange para $\tilde{W}_1$ e $\tilde{W}_2$, podemos calcular a raiz quadrada para recuperar W_1 e W_2. Sendo assim, defina

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

e queremos obter ρ tal que

$$\frac{tr(\tilde{W}_1 \rho)}{tr(V_1 \rho V_1^*)} V_1 \rho V_1^* + \frac{tr(\tilde{W}_2 \rho)}{tr(V_2 \rho V_2^*)} V_2 \rho V_2^* = \rho \tag{6.4}$$

$\diamondsuit$

Continuando, temos

$$tr(V_1 \rho V_1^*) = (x_1^2 + x_3^2)\rho_1 + 2(x_1 x_2 + x_3 x_4)\rho_2 + (x_2^2 + x_4^2)\rho_4 = A_1 \rho_1 + A_2 \rho_2 + A_3$$

$$tr(V_2 \rho V_2^*) = (y_1^2 + y_3^2)\rho_1 + 2(y_1 y_2 + y_3 y_4)\rho_2 + (y_2^2 + y_4^2)\rho_4 = A_4 \rho_1 + A_5 \rho_2 + A_6$$

$$tr(\tilde{W}_1 \rho) = u_1 \rho_1 + (u_2 + u_3)\rho_2 + u_4 \rho_4 = B_1 \rho_1 + B_2 \rho_2 + B_3$$

$$tr(\tilde{W}_2 \rho) = z_1 \rho_1 + (z_2 + z_3)\rho_2 + z_4 \rho_4 = B_4 \rho_1 + B_5 \rho_2 + B_6$$

onde, como $\rho_4 = 1 - \rho_1$,

$$A_1 = x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 - x_4^2, \;\; A_2 = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4), \;\; A_3 = x_2^2 + x_4^2$$

$$A_4 = y_1^2 + y_3^2 - y_2^2 - y_4^2, \;\; A_5 = 2(y_1 y_2 + y_3 y_4), \;\; A_6 = y_2^2 + y_4^2$$

$$B_1 = u_1 - u_4, \;\; B_2 = u_2 + u_3, \;\; B_3 = u_4$$

$$B_4 = z_1 - z_4,\ \ B_5 = z_2 + z_3,\ \ B_6 = z_4$$

e

$$\begin{aligned} tr(\tilde{W}_1 V_1 \rho V_1^*) &= C_1\rho_1 + C_2\rho_2 + C_3 = \beta_{11}(\rho) \\ tr(\tilde{W}_2 V_1 \rho V_1^*) &= C_4\rho_1 + C_5\rho_2 + C_6 = \beta_{21}(\rho) \\ tr(\tilde{W}_1 V_2 \rho V_2^*) &= D_1\rho_1 + D_2\rho_2 + D_3 = \beta_{12}(\rho) \\ tr(\tilde{W}_2 V_2 \rho V_2^*) &= D_4\rho_1 + D_5\rho_2 + D_6 = \beta_{22}(\rho) \end{aligned}$$

para certas constantes C_i, D_i, $i = 1, \ldots, 6$ que dependem das entradas dos V_i e W_i. Ainda

$$V_1\rho V_1^* = \begin{pmatrix} x_1^2\rho_1 + 2x_1x_2\rho_2 + x_2^2\rho_4 & x_1x_3\rho_1 + (x_2x_3 + x_1x_4)\rho_2 + x_2x_4\rho_4 \\ x_1x_3\rho_1 + (x_2x_3 + x_1x_4)\rho_2 + x_2x_4\rho_4 & x_3^2\rho_1 + 2x_3x_4\rho_2 + x_4^2\rho_4 \end{pmatrix}$$

$$V_2\rho V_2^* = \begin{pmatrix} y_1^2\rho_1 + 2y_1y_2\rho_2 + y_2^2\rho_4 & y_1y_3\rho_1 + (y_2y_3 + y_1y_4)\rho_2 + y_2y_4\rho_4 \\ y_1y_3\rho_1 + (y_2y_3 + y_1y_4)\rho_2 + y_2y_4\rho_4 & y_3^2\rho_1 + 2y_3y_4\rho_2 + y_4^2\rho_4 \end{pmatrix}$$

De (6.4) obtemos 4 igualdades, mas duas delas são idênticas então temos 3 equações independentes:

$$\begin{aligned} &\frac{B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + B_3}{A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3}\Big((x_1^2 - x_2^2)\rho_1 + 2x_1x_2\rho_2 + x_2^2\Big) \\ +&\frac{B_4\rho_1 + B_5\rho_2 + B_6}{A_4\rho_1 + A_5\rho_2 + A_6}\Big((y_1^2 - y_2^2)\rho_1 + 2y_1y_2\rho_2 + y_2^2\Big) = \rho_1 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + B_3}{A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3}\Big((x_1x_3 - x_2x_4)\rho_1 + (x_2x_3 + x_1x_4)\rho_2 + x_2x_4\Big) \\ +&\frac{B_4\rho_1 + B_5\rho_2 + B_6}{A_4\rho_1 + A_5\rho_2 + A_6}\Big((y_1y_3 - y_2y_4)\rho_1 + (y_2y_3 + y_1y_4)\rho_2 + y_2y_4\Big) = \rho_2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + B_3}{A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3}\Big((x_3^2 - x_4^2)\rho_1 + 2x_3x_4\rho_2 + x_4^2\Big) \\ +&\frac{B_4\rho_1 + B_5\rho_2 + B_6}{A_4\rho_1 + A_5\rho_2 + A_6}\Big((y_3^2 - y_4^2)\rho_1 + 2y_3y_4\rho_2 + y_4^2\Big) = 1 - \rho_1 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Podemos reescrever tais equações como

$$\alpha_1(\rho)\Big((x_1^2 - x_2^2)\rho_1 + 2x_1x_2\rho_2 + x_2^2\Big) + \alpha_2(\rho)\Big((y_1^2 - y_2^2)\rho_1 + 2y_1y_2\rho_2 + y_2^2\Big) = \rho_1 \tag{6.8}$$

$$\alpha_1(\rho)\Big((x_1x_3 - x_2x_4)\rho_1 + (x_2x_3 + x_1x_4)\rho_2 + x_2x_4\Big)$$
$$+\alpha_2(\rho)\Big((y_1y_3 - y_2y_4)\rho_1 + (y_2y_3 + y_1y_4)\rho_2 + y_2y_4\Big) = \rho_2 \tag{6.9}$$

$$\alpha_1(\rho)\Big((x_3^2 - x_4^2)\rho_1 + 2x_3x_4\rho_2 + x_4^2\Big) + \alpha_2(\rho)\Big((y_3^2 - y_4^2)\rho_1 + 2y_3y_4\rho_2 + y_4^2\Big) = 1 - \rho_1 \tag{6.10}$$

onde

$$\alpha_1(\rho) := \frac{B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + B_3}{A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3}$$
$$\alpha_2(\rho) := \frac{B_4\rho_1 + B_5\rho_2 + B_6}{A_4\rho_1 + A_5\rho_2 + A_6}$$

$\diamondsuit$

Queremos obter expressões para ρ_μ que dependem de W_i e V_i apenas. Note que o traço é linear, e como os W_i, V_i são lineares, as aplicações

$$\rho \mapsto tr(V_i\rho V_i^*)$$
$$\rho \mapsto tr(W_i\rho W_i^*)$$
$$\rho \mapsto tr(W_jV_i\rho V_i^* W_j^*)$$

são funcionais lineares. Ainda, para qualquer funcional linear Ψ temos, por definição, que $\Psi(\rho_\mu) = \int_{\mathcal{M}_N} \Psi(\rho)d\mu$ e então

$$tr(V_i\rho_\mu V_i^*) = \int_{\mathcal{M}_2} tr(V_i\rho V_i^*)d\mu \tag{6.11}$$

$$tr(W_i\rho_\mu W_i^*) = \int_{\mathcal{M}_2} tr(W_i\rho W_i^*)d\mu = \int_{\mathcal{M}_2} p_i(\rho)d\mu(\rho) \tag{6.12}$$

$$tr(W_jV_i\rho_\mu V_i^* W_j^*) = \int_{\mathcal{M}_2} tr(W_jV_i\rho V_i^* W_j^*)d\mu = \int_{\mathcal{M}_2} p_j(V_i\rho V_i^*)d\mu(\rho) \tag{6.13}$$

$\diamondsuit$

Vamos enunciar o problema (6.2) com multiplicadores de Lagrange. Escreveremos $\rho_\mu^i = \rho_i$ para simplificar a notação. Consideramos o caso real com $N = 2$. Defina

$$\rho_W = \rho_\mu = \begin{pmatrix} \rho_\mu^1 & \rho_\mu^2 \\ \rho_\mu^2 & \rho_\mu^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \; W_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \; W_2 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(W) = F(W_1, W_2) = F(u, z) \\ = F(u_1, u_2, u_3, u_4, z_1, z_2, z_3, z_4) := h_{W,V}(\rho_\mu) - \frac{1}{T} tr(H\rho_\mu) \\ \Rightarrow tr(H\rho) = h_1\rho_1 + 2h_2\rho_2 + h_4\rho_4 \end{aligned}$$

A condição $\sum_i W_i^* W_i = I$ fornece os seguintes vínculos:

$$G_1(W_1, W_2) := u_1^2 + u_3^2 + z_1^2 + z_3^2 - 1$$

$$G_2(W_1, W_2) := u_2^2 + u_4^2 + z_2^2 + z_4^2 - 1$$

$$G_3(W_1, W_2) := u_1u_2 + u_3u_4 + z_1z_2 + z_3z_4$$

Observação Como sugerido inicialmente, poderíamos escrever $\tilde{W}_i = W_i^* W_i$ e considerar os vínculos associados a tal transformação. As conclusões a seguir valeriam da mesma forma para os $\tilde{W}_i$.

$\Diamond$

Continuando, defina

$$\Gamma(W_1, W_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) := F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$$

Vamos calcular $\nabla\Gamma = 0$. Temos

$$u_1^2 + u_3^2 + z_1^2 + z_3^2 = 1$$

$$u_2^2 + u_4^2 + z_2^2 + z_4^2 = 1$$

$$u_1u_2 + u_3u_4 + z_1z_2 + z_3z_4 = 0$$

$$h_V(W) = -\frac{tr(W_1\rho_W W_1^*)}{tr(V_1\rho_W V_1^*)} \Big(tr\Big(W_1V_1\rho_W V_1^* W_1^*\Big) \log\Big(\frac{tr(W_1V_1\rho_W V_1^* W_1^*)}{tr(V_1\rho_W V_1^*)}\Big)$$

$$+ tr\Big(W_2V_1\rho_W V_1^* W_2^*\Big) \log\Big(\frac{tr(W_2V_1\rho_W V_1^* W_2^*)}{tr(V_1\rho_W V_1^*)}\Big)\Big)$$

$$-\frac{tr(W_2\rho_W W_2^*)}{tr(V_2\rho_W V_2^*)}\Big(tr\Big(W_1V_2\rho_W V_2^*W_1^*\Big)\log\Big(\frac{tr(W_1V_2\rho_W V_2^*W_1^*)}{tr(V_2\rho_W V_2^*)}\Big)$$

$$+tr\Big(W_2V_2\rho_W V_2^*W_2^*\Big)\log\Big(\frac{tr(W_2V_2\rho_W V_2^*W_2^*)}{tr(V_2\rho_W V_2^*)}\Big)\Big)$$

$$= -\alpha_1(\rho_W)\Big(\beta_{11}(\rho_W)\log\Big(\frac{\beta_{11}(\rho_W)}{A_1\rho_1+A_2\rho_2+A_3}\Big)+\beta_{21}(\rho_W)\log\Big(\frac{\beta_{21}(\rho_W)}{A_1\rho_1+A_2\rho_2+A_3}\Big)\Big)$$

$$-\alpha_2(\rho_W)\Big(\beta_{12}(\rho_W)\log\Big(\frac{\beta_{12}(\rho_W)}{A_4\rho_1+A_5\rho_2+A_6}\Big)+\beta_{22}(\rho_W)\log\Big(\frac{\beta_{22}(\rho_W)}{A_4\rho_1+A_5\rho_2+A_6}\Big)\Big) \tag{6.14}$$

Pela equação (6.14) nota-se, uma vez que iremos calcular a derivada da entropia, que precisamos obter uma expressão explícita para

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\rho_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z_i}\rho_j,$$

onde $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, 2, 4$ e u_i, z_i são as coordenadas dos W_i. Em outras palavras, dados W_i, obtemos uma medida invariante e o baricentro associado a tal medida. Então será necessário obter uma expressão para as derivadas das coordenadas ρ_i do baricentro.

Note que como supomos que o baricentro é o ponto fixo do operador $\mathcal{L}$ associado ao IFS podemos, a princípio, usar como expressão para ρ a solução dada pelo sistema (6.5)-(6.7), cuja solução é o ponto fixo para $\mathcal{L}$. Na prática, a expressão que resolve tal sistema, para W_i tais que $\sum_i W_i^* W_i = I$ e V_i quaisquer, é difícil de ser analisada e então uma pergunta natural seria tentar analisar algum caso particular que forneça simplificações algébricas convenientes.

$\Diamond$

Exemplo 6.1.1 *Vamos fazer os cálculos do multiplicador de Lagrange no caso particular em que*

$$V_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix}$$

Como feito nas considerações gerais acima, escreveremos $\tilde{W}_1 = W_1^* W_1$, $\tilde{W}_2 = W_2^* W_2$. *Então*

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \ \tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

e

$$tr(V_1\rho V_1^*) = a^2\rho_1,\;\; tr(V_2\rho V_2^*) = b^2\rho_4$$
$$tr(\tilde{W}_1\rho) = u_1\rho_1 + (u_2+u_3)\rho_2 + u_4\rho_4$$
$$tr(\tilde{W}_2\rho) = z_1\rho_1 + (z_2+z_3)\rho_2 + z_4\rho_4$$
$$tr(\tilde{W}_1 V_1\rho V_1^*) = a^2u_1\rho_1,\;\; tr(\tilde{W}_2 V_1\rho V_1^*) = a^2z_1\rho_1$$
$$tr(\tilde{W}_1 V_2\rho V_2^*) = b^2u_4\rho_4,\;\; tr(\tilde{W}_2 V_2\rho V_2^*) = b^2z_4\rho_4$$

Pela observação no início desta seção, precisamos obtemos expressões para os pontos fixos de $\mathcal{L}$. A solução de $\mathcal{L}(\rho) = \rho$ neste exemplo é $\rho_2 = 0$ e

$$\rho_1 = \frac{u_4}{u_4 - u_1 + 1} \tag{6.15}$$

Logo

$$\rho_W = \begin{pmatrix} \frac{u_4}{u_4-u_1+1} & 0 \\ 0 & \frac{1-u_1}{u_4-u_1+1} \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Ainda, $\rho_1 + \rho_4 = 1$ implica

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\rho_4 = -\frac{\partial}{\partial u_i}\rho_1 \tag{6.17}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\rho_1 = \frac{u_4}{(u_4-u_1+1)^2},\;\; \frac{\partial}{\partial u_2}\rho_1 = \frac{\partial}{\partial u_3}\rho_1 = 0,\;\; \frac{\partial}{\partial u_4}\rho_1 = \frac{1-u_1}{(u_4-u_1+1)^2} \tag{6.18}$$

Ainda, obtemos

$$tr(H\rho_W) = h_1\rho_1 + h_4\rho_4$$

$$\begin{aligned} h_V(W) = &-\frac{u_1\rho_1 + (u_2+u_3)\rho_2 + u_4\rho_4}{a^2\rho_1}\times \\ &\times\Big(a^2u_1\rho_1\log\left(\frac{a^2u_1\rho_1}{a^2\rho_1}\right) + a^2z_1\rho_1\log\left(\frac{a^2z_1\rho_1}{a^2\rho_1}\right)\Big) \\ &-\frac{z_1\rho_1 + (z_2+z_3)\rho_2 + z_4\rho_4}{b^2\rho_4}\times \\ &\times\Big(b^2u_4\rho_4\log\left(\frac{b^2u_4\rho_4}{b^2\rho_4}\right) + b^2z_4\rho_4\log\left(\frac{b^2z_4\rho_4}{b^2\rho_4}\right)\Big) \\ = &-\frac{u_1\rho_1 + u_4\rho_4}{a^2\rho_1}\Big(a^2u_1\rho_1\log(u_1) + a^2z_1\rho_1\log(z_1)\Big) \end{aligned}$$

$$-\frac{z_1\rho_1+z_4\rho_4}{b^2\rho_4}\Big(b^2u_4\rho_4\log(u_4)+b^2z_4\rho_4\log(z_4)\Big)$$

$$=-(u_1\rho_1+u_4\rho_4)\Big(u_1\log(u_1)+z_1\log(z_1)\Big)-(z_1\rho_1+z_4\rho_4)\Big(u_4\log(u_4)+z_4\log(z_4)\Big) \tag{6.19}$$

Observe que em dimensão 2, é imediato escrever as variáveis z_i em função das variáveis u_i. Podemos a seguir considerar o problema de multiplicadores de Lagrange sobre as 4 variáveis u_i apenas, e com vínculos que levam a equações fáceis de analisar. Desta forma, usando (6.15), (6.18), (6.19), e escrevendo $z_1=1-u_1$, $z_4=1-u_4$, obtemos

$$h_V(W)=-\Big(\frac{u_1u_4}{u_4-u_1+1}+\frac{u_4(1-u_1)}{u_4-u_1+1}\Big)(u_1\log(u_1)+(1-u_1)\log(1-u_1))$$

$$-\Big(\frac{u_4(1-u_1)}{u_4-u_1+1}+\frac{(1-u_4)(1-u_1)}{u_4-u_1+1}\Big)(u_4\log(u_4)+(1-u_4)\log(1-u_4)) \tag{6.20}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial u_1}h_V(W)=-\Big[\frac{u_4(\log(u_1)u_4+\log(u_1)-\log(1-u_1)u_4}{(u_4-u_1+1)^2}$$

$$\frac{-u_4\log(u_4)-\log(1-u_4)+\log(1-u_4)u_4)}{(u_4-u_1+1)^2}\Big] \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_4}h_V(W)=\frac{(u_1-1)(u_1\log(u_1)+\log(1-u_1)-\log(1-u_1)u_1-2\log(1-u_4)}{(u_4-u_1+1)^2}$$

$$\frac{-\log(u_4)u_1+\log(u_4)+\log(1-u_4)u_1)}{(u_4-u_1+1)^2} \tag{6.22}$$

Agora, definimos

$$F(u_1,u_2,u_3,u_4):=h_V(W)-\frac{1}{T}tr(H\rho_W) \tag{6.23}$$

$$=h_V(W)-\frac{1}{T}(h_1\rho_1+h_4\rho_4) \tag{6.24}$$

$$G_1(\tilde{W}_1,\tilde{W}_2):=u_2+z_2,\ \ G_2(\tilde{W}_1,\tilde{W}_2):=u_3+z_3,\ \ G_3(\tilde{W}_1,\tilde{W}_2):=u_2-u_3$$

$$\Gamma(\tilde{W}_1,\tilde{W}_2,\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,3}):=F+\sum_{i=1}^{3}\lambda_iG_i \tag{6.25}$$

Vamos calcular $\nabla\Gamma=0$. Temos, por (6.17), que

$$\partial_{u_i}tr(H\rho)=h_1\partial_{u_i}\rho_1+h_4\partial_{u_i}\rho_4=(h_1-h_4)\partial_{u_i}\rho_1 \tag{6.26}$$

$$\partial_{z_i} tr(H\rho) = h_1\partial_{z_i}\rho_1 + h_4\partial_{z_i}\rho_4 = (h_1 - h_4)\partial_{z_i}\rho_1, \tag{6.27}$$

$i = 1, \ldots, 4$ e então

$$u_2 + z_2 = u_3 + z_3 = 0, \;\; u_2 = u_3 \tag{6.28}$$

$$\partial_{u_1} h_V(W) - \frac{h_1 - h_4}{T}\partial_{u_1}\rho_1 = 0 \tag{6.29}$$

$$\partial_{u_2} h_V(W) - \frac{h_1 - h_4}{T}\partial_{u_2}\rho_1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{6.30}$$

$$\partial_{u_3} h_V(W) - \frac{h_1 - h_4}{T}\partial_{u_3}\rho_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \tag{6.31}$$

$$\partial_{u_4} h_V(W) - \frac{h_1 - h_4}{T}\partial_{u_4}\rho_1 = 0 \tag{6.32}$$

As equações (6.30) e (6.31) se reduzem a $\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$. Portanto, o problema se reduz a resolver (6.29) e (6.32). Usando (6.18), temos

$$\frac{\partial h_V(W)}{\partial u_1} = \frac{h_1 - h_4}{T}\frac{u_4}{(u_4 - u_1 + 1)^2} \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial h_V(W)}{\partial u_4} = \frac{h_1 - h_4}{T}\frac{1 - u_1}{(u_4 - u_1 + 1)^2} \tag{6.34}$$

Substituimos nessas equações as expressões de entropia obtidas em (6.21) e (6.22). Então alguns cálculos nos permitem obter a solução de (6.33) e (6.34), que é

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} \end{pmatrix}, \;\; \tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} \frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

e portanto, de $\tilde{W}_i = W_i^* W_i$, $i = 1, 2$, obtemos

$$W_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}}} \end{pmatrix}, \tag{6.36}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}}} \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

$\Diamond$

6.2 Revisando um exemplo

Revisamos aqui o exemplo 6.1.1, indicando os cálculos referentes a pontos fixos, autovalores e pressão associados. Naquele exemplo, temos:

$$V_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 1-u_1 & -u_2 \\ -u_2 & 1-u_4 \end{pmatrix}$$

Defina

$$\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(\tilde{W}_i\rho)\frac{V_i\rho V_i^*}{tr(V_i\rho V_i^*)} \tag{6.38}$$

$$\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(\tilde{W}_i\rho)V_i\rho V_i^* \tag{6.39}$$

O ponto fixo de $\widehat{\mathcal{L}}$ é

$$\rho_W = \begin{pmatrix} \frac{u_4}{u_4-u_1+1} & 0 \\ 0 & \frac{1-u_1}{u_4-u_1+1} \end{pmatrix} \tag{6.40}$$

A escolha de $\tilde{W}_i$ tais que

$$F_\mu = h_V(W) - \frac{1}{T}tr(H\rho_W) \tag{6.41}$$

é maximal é dada por

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} \end{pmatrix} \tag{6.42}$$

$$\tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} \frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

Portanto, por (6.40), o ponto fixo para o operador $\widehat{\mathcal{L}}$ associado aos W_i maximais é

$$\rho_{W,m} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}} \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

Agora, note que pela proposição 3.4.2, temos que existem $\rho_\beta \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tal que $\mathcal{L}_{W,V}(\rho_\beta) = \beta\rho_\beta$ e. Os autovalores e autoestados associados a $\mathcal{L}$ são

$$\beta = a^2 u_1, \ \ \rho_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

e

$$\beta = b^2(1-u_1), \ \ \rho_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

Logo, para o operador $\mathcal{L}$ associado aos W_i maximais, temos

$$\beta_m = \frac{a^2 e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}} \quad \text{ou} \quad \beta_m = \frac{b^2 e^{-h_4/T}}{e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}} \tag{6.47}$$

A pressão maximal naquele exemplo é

$$F_\mu = h_V(W) - \frac{1}{T} tr(H\rho_W)$$

$$= -\Bigg[\frac{T e^{-h_1/T} \log\left(\frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T}+e^{-h_4/T}}\right) + T e^{-h_4/T} \log\left(\frac{e^{-h_4/T}}{e^{-h1/T}+e^{-h_4/T}}\right)}{T\Big(e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}\Big)}$$

$$+ \frac{h_1 e^{-h_1/T} + h_4 e^{-h_4/T}}{T\Big(e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}\Big)} \Bigg] \tag{6.48}$$

Alguns cálculos a partir da pressão obtida acima nos leva ao seguinte:

Lema 6.2.1 *Temos que*

$$F_\mu = \log x_H, \tag{6.49}$$

onde

$$x_H := e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T} \tag{6.50}$$

Como o exemplo a seguir mostra, temos a igualdade $F_\mu = \log \beta$ apenas em certos casos especiais.

$\diamondsuit$

Exemplo 6.2.2 *Seja H um potencial fixo. Defina*

$$a := \pm e^{h_1/2T}(e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}) \tag{6.51}$$

e seja b qualquer tal que $\beta = a^2 u_1 \geq b^2(1-u_1)$, onde u_1 é tal como obtido na solução para $\tilde{W}_1$,

$$u_1 = \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}} \tag{6.52}$$

Considere o QIFS com dinâmicas V_1 e V_2 como o do exemplo 6.1.1 e entradas a e b como definido acima. Então

$$\beta = a^2 \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}} = e^{h_1/T}(e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T})^2 \frac{e^{-h_1/T}}{e^{-h_1/T} + e^{-h_4/T}} = x_H \tag{6.53}$$

e portanto $F_\mu = \log \beta$.

$\Diamond$

6.3 Função capacidade com custo

Vimos anteriormente que toda aplicação Λ completamente positiva (CP) que preserva o traço pode ser representado (de forma não única) na forma de Stinespring-Kraus,

$$\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^*, \ \ \sum_{i=1}^{k} V_i^* V_i = I,$$

para V_i operadores lineares. Aplicações CP que preservam o traço também são chamadas **canais quânticos**.

Definição A **capacidade de Holevo** para enviar informação clássica via um canal quântico Λ é definido por

$$C_\Lambda(\rho) := \max_{\substack{p_i \in [0,1] \\ \rho_i \in \mathcal{M}_N}} S\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \Lambda(\rho_i) \Big) - \sum_{i=1}^{n} p_i S\Big(\Lambda(\rho_i) \Big) \tag{6.54}$$

onde $S(\rho) = -tr(\rho \log \rho)$ é a entropia de Von Neumann e acima escrevemos $\rho = \sum_i p_i \rho_i$. O máximo é, portanto, sobre as escolhas de n probabilidades p_i e operadores densidade ρ_i, para algum $n \in \mathbb{N}$. A capacidade de Holevo estabelece um limite superior sobre a quantidade de informação que um sistema quântico possui [26].

Definição Seja Λ um canal quântico. Defina a **entropia mínima de saída** como sendo

$$H^{min}(\Lambda) := \min_{|\psi\rangle} S(\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|))$$

Conjectura da aditividade Temos que

$$C_{\Lambda_1 \otimes \Lambda_2} = C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2}, \ \ \forall \rho$$

Conjectura da entropia mínima de saída Para quaisquer canais Λ_1 e Λ_2,

$$H^{min}(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) = H^{min}(\Lambda_1) + H^{min}(\Lambda_2)$$

Em [28], é mostrado que a conjectura da aditividade é equivalente à conjectura da entropia mínima de saída, e em [18] obtemos um contraexemplo para esta última conjectura.

$\Diamond$

Definição Seja M_F o conjunto das medidas invariantes definido na seção 5.7 e seja H um operador autoadjunto. Para $\mu \in \mathcal{M}_F$ seja ρ_μ o seu baricentro. Defina a **função capacidade-custo** $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por

$$C(a) := \max_{\mu \in \mathcal{M}_F} \{h_{W,V}(\rho_\mu) : tr(H\rho_\mu) \leq a\} \tag{6.55}$$

A descrição a seguir é adaptada de [23]. Existe uma relação entre a função capacidade-custo e o problema variacional de pressão. Com efeito, seja $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a função dada por

$$F(\lambda) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_F} \{h_{W,V}(\rho_\mu) - \lambda tr(H\rho_\mu)\} \tag{6.56}$$

Temos os seguintes fatos: existe uma única probabilidade $\nu_0 \in \mathcal{M}_F$ tal que

$$F(\lambda) = h_{W,V}(\rho_{\nu_0}) - \lambda tr(H\rho_{\nu_0})$$

E o seguinte lema:

Lema 6.3.1 *Seja $\lambda \leq 0$, seja $\hat{a} = tr(H\rho_{\nu_0})$. Então*

$$C(\hat{a}) = h_{W,V}(\rho_{\nu_0}) \tag{6.57}$$

Prova Seja $\nu \in \mathcal{M}_F$, $\nu \neq \nu_0$, com $tr(H\rho_\nu) \leq \hat{a} = tr(H\rho_{\nu_0})$. Então

$$h_{W,V}(\rho_\nu) - \lambda tr(H\rho_\nu) < h_{W,V}(\rho_{\nu_0}) - \lambda tr(H\rho_{\nu_0})$$

e portanto,

$$h_{W,V}(\rho_\nu) < h_{W,V}(\rho_{\nu_0})$$

Logo,

$$h_{W,V}(\rho_{\nu_0}) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_F} \{h_{W,V}(\rho_\mu) : tr(H\rho_\mu) \leq \hat{a}\} = C(\hat{a})$$

$\square$

6.4 Potenciais e operadores de transferência

O problema variacional de pressão conforme visto em [27], por exemplo, relaciona o valor da pressão maximal com o maior autovalor do operador de transferência associado em um espaço de símbolos. Mais precisamente, se X é um espaço de símbolos, $C(X)$ são as funções contínuas nesse espaço e dado um potencial H, definimos $L_H : C(X) \to C(X)$

$$L_H(w)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} e^{H(y)} w(y) \tag{6.58}$$

onde σ é o shift em X (ver introdução deste trabalho). Seguindo [27], se

$$P(H) := \sup_{\mu} \{h_\mu(\sigma) + \int H d\mu\}, \tag{6.59}$$

onde $h_\mu(\sigma)$ é a entropia do shift e o supremo é tomado sobre todas as medidas σ-invariantes, temos que

$$P(H) = \log \beta, \tag{6.60}$$

onde β é o maior autovalor de L_H.

Dizemos que H está normalizado se $L_H(1) = 1$. Poderia se dizer de outra forma que L_H está normalizado. Neste caso o operador dual L_H^* leva probabilidades em probabilidades.

A generalização do conceito de probabilidade (Mecânica Estatística) em Mecânica Quântica é a matriz densidade. Uma matriz diagonal em que $p_1 \geq 0$ e $p_2 \geq 0$, são os termos diagonais, e ainda $p_1 + p_2 = 1$ corresponde a uma probabilidade. Mas um operador positivo de traço 1 pode ser bem mais geral.

Desta forma, podemos identificar de certa forma heurística o operador $\mathcal{U}$ com L_H e o operador de Markov $\mathcal{V}$ com L_H^*.

Uma ideia básica considerada neste trabalho é a de que no contexto de sistemas quânticos, se ao invés de considerarmos o operador de transferência, considerarmos operadores do tipo $\mathcal{L}_{W,V} : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho W_i^*) V_i \rho V_i^*, \tag{6.61}$$

então é possível obter certos resultados análogos aos de termodinâmica clássica. O operador $\mathcal{L}_{W,V}$ está relacionado com os canais quânticos vistos nas seções 2.6 e 6.3.

O operador $\mathcal{L}_{W,V}$ não parece ser análogo a L_H, pois age em matrizes, mas tem uma natureza distinta de $\mathcal{V}$. Ele não tem um análogo em Mecânica

Estatística. Poderia se pensar que de certa forma que ele é o análogo de $\mathcal{V}$ mas agindo em baricentros.

Podemos fazer a suposição que $\sum_{i=1}^k V_i^* V_i = I$ e que os V_i estão fixos. Assim, fixamos um IFS clássico.

Vamos pensar que os W_i podem ser variados (não como os V_i, que estão fixos). Se supusermos que $\sum_{i=1}^k W_i^* W_i = I$, então diremos que $\mathcal{L}_{W,V}$ está normalizado. Neste caso $\mathcal{L}_{W,V}$ leva matrizes positivas de traço 1 em matrizes positivas de traço 1. Tal caso foi explorado em [15] [16].

Pensamos, de maneira análoga a Mecânica Estatística, que os W_i determinam o jacobiano de uma medida invariante para o QIFS.

Aqui vamos considerar o caso mais geral em que $\sum_{i=1}^k W_i^* W_i$ não é necessariamente igual a identidade. Como vimos antes, neste caso, $\mathcal{L}_{W,V}$ pode não ter ponto fixos, mas existem ρ e λ tal que $\mathcal{L}_{W,V}(\rho) = \lambda\rho$.

Desejamos analisar o problema análogo ao formalismo termodinâmico da Mecânica Estatística na Mecânica Quântica. Para isto necessitamos fixar a dinâmica da IFS definido pelos V_i e buscar medidas sobre matrizes densidades (em vez de medidas) que tenham caráter estacionário. Desejamos buscar uma definição de entropia que seja para "sistemas estacionários". Isto significa duas coisas: uma medida sobre matrizes densidades que seja fixa por $\mathcal{V}$ e ainda o estado ρ_ν que é o seu baricentro. Isto deveria permitir definir uma entropia estacionária. O teste para saber se tal entropia é estacionaria é que sua definição independa do n da iteração.

6.5 Princípio variacional de pressão

Sejam V_i, W_i, operadores lineares, $i = 1, \ldots, k$, com $\sum_i W_i^* W_i = I$ e seja

$$H\rho := \sum_{i=1}^k H_i \rho H_i^* \tag{6.62}$$

uma operador autoadjunto. Estamos interessados em obter uma versão do princípio variacional de pressão para o nosso contexto. Veremos que a pressão atingirá o máximo quando houver uma certa relação entre o potencial H e a distribuição de probabilidade considerada (representada aqui pelos W_i).

O lema seguinte será fundamental para a construção que segue.

Lema 6.5.1 *Se $r_1, \ldots, r_k$ e $q_1, \ldots, q_k$ são duas distribuições de probabilidade em $1, \ldots, k$ tais que $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$, então*

$$-\sum_{j=1}^k q_j \log q_j + \sum_{j=1}^k q_j \log r_j \leq 0$$

e a igualdade vale se, e somente se, $r_j = q_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Prova ver [27].

$\square$

O potencial (6.62) em conjunto com os V_i induz um operador dado por

$$\mathcal{L}_H(\rho) := \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^* \tag{6.63}$$

Sabemos que tal operador admite um autovalor β e um autoestado associado ρ_β. Então $\mathcal{L}_H(\rho_\beta) = \beta \rho_\beta$ implica

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) V_i \rho_\beta V_i^* = \beta \rho_\beta \tag{6.64}$$

Em coordenadas, (6.64) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) (V_i \rho_\beta V_i^*)_{jl} = \beta (\rho_\beta)_{jl} \tag{6.65}$$

onde a notação $(B)_{jl}$ significa a coordenada (j, l) da matriz associada ao operador B, j,$l = 1, \ldots k$.

Observação Fazendo uma comparação com o problema análogo para cadeias de Markov, a equação (6.64) pode ser vista como o análogo da expressão

$$le^A = \lambda l \tag{6.66}$$

que teríamos para o problema clássico para matrizes. Ali, a matriz A, com entradas a_{ij} faz o papel do potencial, e^A é a matriz com coordenadas $e^{a_{ij}}$ e l_j denota a j-ésima entrada do autovetor à esquerda l associado ao autovalor λ. Em coordenadas,

$$\sum_i l_i e^{a_{ij}} = \lambda l_j, \;\; i, j = 1, \ldots, k \tag{6.67}$$

$\Diamond$

De (6.64) obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\beta} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) tr(V_i \rho_\beta V_i^*) = 1 \tag{6.68}$$

o que é apenas a expressão explícita para β que calculamos no teorema de autovalores,

$$\beta = \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) tr(V_i \rho_\beta V_i^*) \tag{6.69}$$

Com isso em mente, defina

$$r_{jlm} = \frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \tag{6.70}$$

Portanto, temos $\sum_j r_{jlm} = 1$. Para a análise que queremos fazer no momento não precisaremos das expressões explícitas dos números $(V_j \rho_\beta V_j^*)_{kl}$. Posteriormente faremos tais cálculos (ver expressão (6.96) e seguintes).

Seja

$$q_{ij} := tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \tag{6.71}$$

onde, como antes, ρ_W denota o ponto fixo associado ao operador renormalizado $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$, induzido pelo QIFS $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\dots,k}$,

$$F_i(\rho) = \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

e

$$p_i(\rho) = tr(W_i \rho W_i^*)$$

Note que temos

$$\sum_{j=1}^{k} q_{ij} = \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr(W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*)$$

$$= \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(\sum_{j=1}^{k} W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*) = 1$$

Logo, podemos aplicar o lema 6.5.1 para r_{jlm}, q_{ij}, $j = 1, \dots k$, com i,l,m fixados, para obter

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log\Big(\frac{1}{\beta(\rho_\beta)_{lm}} tr(H_j \rho_\beta H_j^*)(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}\Big) \leq 0 \tag{6.72}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta(\rho_\beta)_{lm}} tr(H_j \rho_\beta H_j^*)(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.73}$$

Então

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big)$$

$$\leq \sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log \beta$$

o que equivale a

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) \leq \log \beta \tag{6.74}$$

Multiplicando por $tr(W_i \rho_W W_i^*)$ e somando em i obtemos

$$h_V(W) + \sum_j \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) \sum_i \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)$$

$$\leq \sum_i tr(W_i \rho_W W_i^*) \log \beta = \log \beta \tag{6.75}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.76}$$

Vamos reescrever a desigualdade (6.75). Primeiro, usamos o fato de que ρ_W é ponto fixo de $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$,

$$\sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho_W W_i^*) \frac{V_i \rho_W V_i^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} = \rho_W \tag{6.77}$$

Agora, compomos ambos os lados da igualdade acima com o operador

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) W_j^* W_j \tag{6.78}$$

(i.e., multiplicamos à direita) e então obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho_W W_i^*) \frac{V_i \rho_W V_i^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) W_j^* W_j$$

$$= \rho_W \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) W_j^* W_j \tag{6.79}$$

Rearranjando termos, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} V_i \rho_W V_i^* W_j^* W_j$$

$$= \rho_W \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) W_j^* W_j \tag{6.80}$$

Tomando o traço em ambos os lados, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) tr(\rho_W W_j^* W_j) \tag{6.81}$$

Note que o lado esquerdo de (6.81) é uma das somas em (6.75). Portanto, substituindo (6.81) em (6.75) nos fornece a seguinte desigualdade:

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \Big) tr(W_j \rho_W W_j^*) \leq \log \beta \tag{6.82}$$

o que equivale a

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*)$$

$$+\sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*)\log\Big(\frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) \leq \log\beta \tag{6.83}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)\frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \tag{6.84}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 6.5.2 *Suponha que o potencial considerado acima é tal que $H_i = H$, $i = 1, \ldots, k$ para um certo H. Então de (6.83) temos*

$$h_V(W) + \log tr(H\rho_\beta H^*) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*)\log\frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \leq \log\beta \tag{6.85}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta}tr(H\rho_\beta H^*)\frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \tag{6.86}$$

$\diamondsuit$

Observação Observe que podemos obter uma versão da desigualdade (6.83) se analisarmos a equação (6.64),

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i\rho_\beta H_i^*)V_i\rho_\beta V_i^* = \beta\rho_\beta \tag{6.87}$$

mas desta fazendo um cálculo diretamente sobre tal equação (e não sobre suas coordenadas). Enunciamos assim o resultado:

Teorema 6.5.3 *Seja $\mathcal{F}_W$ um QIFS tal que existe uma única medida atrativa invariante para o operador de Markov associado $\mathcal{V}$. Seja ρ_W o baricentro de tal medida e seja ρ_β um autoestado de $\mathcal{L}_H(\rho)$ com autovalor β. Então*

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*)\log tr(H_j\rho_\beta H_j^*)$$

$$+\sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*)\log tr(V_j\rho_\beta V_j^*) \leq \log\beta \tag{6.88}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*) = \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \tag{6.89}$$

A prova de tal resultado é semelhante aos cálculos vistos acima, e pode ser vista no apêndice deste capítulo.

$\Diamond$

Exemplo 6.5.4 *Suponha que a dinâmica é trivial, ou seja,* $V_i = I$, $i = 1, \ldots, k$. *Então (6.82) se torna*

$$h_I(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \leq \log \beta, \tag{6.90}$$

onde

$$h_I(W) = -\sum_j tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(W_j \rho_W W_j^*) \tag{6.91}$$

e por (6.84), vale a igualdade se, e somente se, para todo j,

$$tr(H_j \rho_\beta H_j^*) = \beta tr(W_j \rho_W W_j^*) \tag{6.92}$$

$\Diamond$

Exemplo 6.5.5 *Suponha que a dinâmica é trivial,* $V_i = I$, $i = 1, \ldots, k$, *e suponha que o potencial é tal que* $H_i = H$, $i = 1, \ldots, k$ *para um certo* H. *Então pelo exemplo 6.5.4,*

$$h_I(W) + \log tr(H \rho_\beta H^*) \leq \log \beta \tag{6.93}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo j,

$$tr(H \rho_\beta H^*) = \beta tr(W_j \rho_W W_j^*) \tag{6.94}$$

$\Diamond$

Agora vamos analisar as equações dadas por (6.65). Para simplificar, consideramos $k = 2$ e escreveremos

$$\rho_\beta = \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Então (6.65) pode ser escrito como

$$tr(H_1 \rho H_1^*)(V_1 \rho V_1^*)_{jl} + tr(H_2 \rho H_2^*)(V_2 \rho V_2^*)_{jl} = \beta \rho_{jl} \tag{6.95}$$

para $j, l = 1, 2$. Isso nos fornece 3 equações (lembre que ρ é autoadjunto). Seja h^i_{jl} a coordenada (j, l) de H_i, $i = 1, 2$. Então

$$tr(H_i\rho H_i^*) = ((h^i_{11})^2 + (h^i_{12})^2)\rho_{11} + 2(h^i_{11}h^i_{12} + h^i_{12}h^i_{22})\rho_{12} + ((h^i_{12})^2 + (h^i_{22})^2)\rho_{22}$$

Ainda, se

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

temos

$$(V_1\rho V_1^*)_{11} = v_{11}^2\rho_{11} + 2v_{11}v_{12}\rho_{12} + v_{12}^2\rho_{22}$$
$$(V_1\rho V_1^*)_{12} = (V_1\rho V_1^*)_{21} = v_{21}v_{11}\rho_{11} + (v_{21}v_{12} + v_{22}v_{11})\rho_{12} + v_{22}v_{12}\rho_{22}$$
$$(V_1\rho V_1^*)_{22} = v_{21}^2\rho_{11} + 2v_{21}v_{22}\rho_{12} + v_{22}^2\rho_{22}$$

$$(V_2\rho V_2^*)_{11} = w_{11}^2\rho_{11} + 2w_{11}w_{12}\rho_{12} + w_{12}^2\rho_{22}$$
$$(V_2\rho V_2^*)_{12} = (V_2\rho V_2^*)_{21} = w_{21}w_{11}\rho_{11} + (w_{21}w_{12} + w_{22}w_{11})\rho_{12} + w_{22}w_{12}\rho_{22}$$
$$(V_2\rho V_2^*)_{22} = w_{21}^2\rho_{11} + 2w_{21}w_{22}\rho_{12} + w_{22}^2\rho_{22}$$

Portanto as equações (6.65) podem ser escritas como

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{11}^2\rho_{11} + 2v_{11}v_{12}\rho_{12} + v_{12}^2\rho_{22})$$
$$+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{11}^2\rho_{11} + 2w_{11}w_{12}\rho_{12} + w_{12}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{11} \qquad (6.96)$$

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{21}v_{11}\rho_{11} + (v_{21}v_{12} + v_{22}v_{11})\rho_{12} + v_{22}v_{12}\rho_{22})$$
$$+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{21}w_{11}\rho_{11} + (w_{21}w_{12} + w_{22}w_{11})\rho_{12} + w_{22}w_{12}\rho_{22}) = \beta\rho_{12} \qquad (6.97)$$

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{21}^2\rho_{11} + 2v_{21}v_{22}\rho_{12} + v_{22}^2\rho_{22})$$
$$+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{21}^2\rho_{11} + 2w_{21}w_{22}\rho_{12} + w_{22}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{22} \qquad (6.98)$$

$\Diamond$

Gostaríamos de obter condições tais que seja possível obter um autoestado ρ_β que seja diagonal e uma matriz A tal que

$$\sum_j e^{a_{ij}} \rho_{jj} = \beta \rho_{ii}, \ \ i = 1, 2 \tag{6.99}$$

ou seja, se $r = (\rho_{11}, \rho_{22})$, temos

$$E^A r = \beta r \tag{6.100}$$

a equação de autovetor a direita para uma cadeia de Markov clássica. Acima E^A denota a matriz cujas entradas são os números $e^{a_{ij}}$.

Se existir tal autoestado e a matriz A mencionada acima, obtemos o seguinte lema.

Lema 6.5.6 *Suponha que*

$$\rho_\beta = \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 \\ 0 & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

é o autoestado associado ao autovalor β do operador (6.63). Seja $r = (\rho_{11}, \rho_{22})$. Então $e^A r = \beta r$, onde e^A denota a matriz cujas entradas são os números $e^{a_{ij}}$.

$\diamondsuit$

Exemplo 6.5.7 *Considere o caso particular em que a dinâmica de cada ramo do QIFS é unitária, ou seja $V_i^* V_i = I$, $i = 1, \ldots, k$. Então temos que $tr(V_i \rho_\beta V_i^*) = 1$ e*

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) V_i \rho_\beta V_i^* = \beta \rho_\beta \tag{6.101}$$

implica

$$\beta = \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) \tag{6.102}$$

Então, como nestas condições temos $\log tr(V_j \rho_\beta V_j^*) = 0$, podemos reescrever (6.88) como

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \leq \log \beta \tag{6.103}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) = tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*) \tag{6.104}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 6.5.8 *No exemplo 6.5.7, onde consideramos uma dinâmica unitária, suponha que o potencial é tal que $H_i = H$, $i = 1, \ldots, k$ para um certo H. Então podemos, por (6.102), escrever*

$$tr(H\rho_\beta H^*) = \frac{\beta}{k} \tag{6.105}$$

e portanto (6.103) é a desigualdade

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \leq \log \beta \tag{6.106}$$

ou seja,

$$h_V(W) + \log \frac{\beta}{k} \leq \log \beta \tag{6.107}$$

o que nos leva a

$$h_V(W) \leq \log k \tag{6.108}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{k} = tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*) \tag{6.109}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 6.5.9 *Defina*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p_3} & 0 \end{pmatrix}, \ V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_4} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{h_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{h_3} & 0 \end{pmatrix}, \ H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{h_4} \end{pmatrix}$$

e também

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1-\rho_1 \end{pmatrix}$$

Se $\mathcal{L}(\rho) = \sum_i tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^*$ então resolver a equação $\mathcal{L}(\rho) = \beta\rho$ nos leva a

$$h_1\rho_1 \begin{pmatrix} p_1\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + h_2(1-\rho_1) \begin{pmatrix} p_2(1-\rho_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + h_3\rho_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_3\rho_1 \end{pmatrix}$$

$$+h_4(1-\rho_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_4(1-\rho_1) \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1-\rho_1 \end{pmatrix} \tag{6.110}$$

o que implica $\rho_2 = 0$ *e*

$$(h_1p_1)\rho_1^2 + (h_2p_2)(1-\rho_1)^2 = \beta\rho_1 \qquad (6.111)$$

$$(h_3p_3)\rho_1^2 + (h_4p_4)(1-\rho_1)^2 = \beta(1-\rho_1) \qquad (6.112)$$

E resolver tal sistema mostra que ρ_1 *é raiz de*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (6.113)$$

onde

$$a = h_3p_3 + h_4p_4 + h_1p_1 + h_2p_2 \qquad (6.114)$$

$$b = -h_1p_1 - 2h_4p_4 - 3h_2p_2, \;\; c = 3h_2p_2 + h_4p_4, \;\; d = -h_2p_2 \qquad (6.115)$$

Seja ρ_i, $i = 1, 2, 4$ *as entradas de* $\rho_\beta = \rho$. *Então*

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*) = h_1\rho_1, \;\; tr(H_2\rho_\beta H_2^*) = h_2\rho_4 \qquad (6.116)$$

$$tr(H_3\rho_\beta H_3^*) = h_3\rho_1, \;\; tr(H_4\rho_\beta H_4^*) = h_4\rho_4 \qquad (6.117)$$

$$tr(V_1\rho_\beta V_1^*) = p_1\rho_1, \;\; tr(V_2\rho_\beta V_2^*) = p_2\rho_4 \qquad (6.118)$$

$$tr(V_3\rho_\beta V_3^*) = p_3\rho_1, \;\; tr(V_4\rho_\beta V_4^*) = p_4\rho_4 \qquad (6.119)$$

Então a desigualdade (6.83),

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*) \log tr(H_j\rho_\beta H_j^*)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*) \log tr(V_j\rho_\beta V_j^*) \leq \log\beta \qquad (6.120)$$

pode ser reescrita. Temos, lembrando que $\rho_4 = 1 - \rho_1$,

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*) \log[tr(H_j\rho_\beta H_j^*) tr(V_j\rho_\beta V_j^*)] \leq \log\beta \qquad (6.121)$$

equivale a

$$h_V(W) + tr(W_1\rho_W W_1^*)[\log(p_1h_1) + \log\rho_1^2] + tr(W_2\rho_W W_2^*)[\log(p_2h_2) + \log\rho_4^2]$$
$$+ tr(W_3\rho_W W_3^*)[\log(p_3h_3) + \log\rho_1^2]$$
$$+ tr(W_4\rho_W W_4^*)[\log(p_4h_4) + \log\rho_4^2] \leq \log\beta \qquad (6.122)$$

ou seja,

$$h_V(W) + \sum_i \Big(tr(W_i\rho_W W_i^*) \log p_ih_i\Big) + [tr(W_1\rho_W W_1^*) + tr(W_3\rho_W W_3^*)] \log\rho_1^2$$
$$+ [tr(W_2\rho_W W_2^*) + tr(W_4\rho_W W_4^*)] \log(1-\rho_1)^2 \leq \log\beta \qquad (6.123)$$

$\Diamond$

6.6 Problema de autovalores revisado

Considere o operador

$$\mathcal{L}_H(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^* \tag{6.124}$$

induzido por uma dinâmica fixada V_i $i = 1, \ldots, k$, V_i lineares, e por $H\rho := \sum_i H_i \rho H_i^*$, H_i lineares quaisquer. A equação de autovalores para $\mathcal{L}_H$ escrita em coordenadas nos fornece o seguinte sistema, de acordo com o cálculo geral que fizemos na seção anterior, com $k = 2$:

$$\begin{aligned} &tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{11}^2\rho_{11} + 2v_{11}v_{12}\rho_{12} + v_{12}^2\rho_{22}) \\ &+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{11}^2\rho_{11} + 2w_{11}w_{12}\rho_{12} + w_{12}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{11} \end{aligned} \tag{6.125}$$

$$\begin{aligned} &tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{21}v_{11}\rho_{11} + (v_{21}v_{12} + v_{22}v_{11})\rho_{12} + v_{22}v_{12}\rho_{22}) \\ &+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{21}w_{11}\rho_{11} + (w_{21}w_{12} + w_{22}w_{11})\rho_{12} + w_{22}w_{12}\rho_{22}) = \beta\rho_{12} \end{aligned} \tag{6.126}$$

$$\begin{aligned} &tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{21}^2\rho_{11} + 2v_{21}v_{22}\rho_{12} + v_{22}^2\rho_{22}) \\ &+tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{21}^2\rho_{11} + 2w_{21}w_{22}\rho_{12} + w_{22}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{22} \end{aligned} \tag{6.127}$$

E escrevemos também, para $i = 1, 2$,

$$tr(H_i\rho H_i^*) = ((h_{11}^i)^2 + (h_{12}^i)^2)\rho_{11} + 2(h_{11}^i h_{12}^i + h_{12}^i h_{22}^i)\rho_{12} + ((h_{12}^i)^2 + (h_{22}^i)^2)\rho_{22} \tag{6.128}$$

Exemplo 6.6.1 *No caso $k = 2$, tomando H_1, H_2 unitários e tomando V_1, V_2 da forma*

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \tag{6.129}$$

temos que o sistema (6.125)-(6.127) assume a seguinte forma conveniente. Obtemos $\rho_{12} = 0$ e

$$v_{11}^2\rho_{11} + v_{12}^2\rho_{22} = \beta\rho_{11} \tag{6.130}$$

$$w_{21}^2\rho_{11} + w_{22}^2\rho_{22} = \beta\rho_{22} \tag{6.131}$$

Comparando tal sistema com o obtido no problema de encontrar os autovalores de uma matriz com entradas positivas $A = (a_{ij})$,

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 = \beta v_1 \tag{6.132}$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 = \beta v_2 \tag{6.133}$$

vemos que tais sistemas são idênticos no caso em que tivermos

$$v_{11} = \sqrt{a_{11}},\ \ v_{12} = \sqrt{a_{12}},\ \ w_{21} = \sqrt{a_{21}},\ \ w_{22} = \sqrt{a_{22}} \tag{6.134}$$

$\Diamond$

Suponha H_1, H_2 quaisquer, sejam V_1, V_2 definidos por

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \tag{6.135}$$

então temos, pelo sistema geral (6.125)-(6.127), que $\rho_{12} = 0$ e

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*)(v_{11}^2\rho_{11} + v_{12}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{11} \tag{6.136}$$

$$tr(H_2\rho_\beta H_2^*)(w_{21}^2\rho_{11} + w_{22}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{22} \tag{6.137}$$

ou seja,

$$[((h_{11}^1)^2 + (h_{12}^1)^2)\rho_{11} + ((h_{12}^1)^2 + (h_{22}^1)^2)\rho_{22}](v_{11}^2\rho_{11} + v_{12}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{11} \tag{6.138}$$

$$[((h_{11}^2)^2 + (h_{12}^2)^2)\rho_{11} + ((h_{12}^2)^2 + (h_{22}^2)^2)\rho_{22}](w_{21}^2\rho_{11} + w_{22}^2\rho_{22}) = \beta\rho_{22} \tag{6.139}$$

Ainda, vamos supor que

$$v_{11} = v_{12} = w_{21} = w_{22} = 1 \tag{6.140}$$

Então obtemos

$$((h_{11}^1)^2 + (h_{12}^1)^2)\rho_{11} + ((h_{12}^1)^2 + (h_{22}^1)^2)\rho_{22} = \beta\rho_{11} \tag{6.141}$$

$$((h_{11}^2)^2 + (h_{12}^2)^2)\rho_{11} + ((h_{12}^2)^2 + (h_{22}^2)^2)\rho_{22} = \beta\rho_{22} \tag{6.142}$$

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz com entradas positivas e considere o problema de encontrar seus autovalores e autovetores. Então de

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 = \beta v_1 \tag{6.143}$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 = \beta v_2 \tag{6.144}$$

vemos que os sistemas (6.141)-(6.142) e (6.143)-(6.144) são idênticos no caso em que escolhemos

$$a_{11} = (h_{11}^1)^2 + (h_{12}^1)^2,\ \ a_{12} = (h_{12}^1)^2 + (h_{22}^1)^2 \tag{6.145}$$

$$a_{21} = (h_{11}^2)^2 + (h_{12}^2)^2,\ \ a_{22} = (h_{12}^2)^2 + (h_{22}^2)^2 \tag{6.146}$$

Assim, concluímos que o problema clássico de Perron é um caso particular do problema do operador $\mathcal{L}_H$ agindo em matrizes. Com efeito, basta fixar as matrizes

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.147}$$

e dada a matriz com entradas positivas A, escolha

$$H_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{12}} \end{pmatrix},\ \ H_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{21}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix} \tag{6.148}$$

Então o operador $\mathcal{L}_H$ associado possui um autoestado diagonal

$$\rho_\beta = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 \\ 0 & \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{6.149}$$

associado ao autovalor β, e temos que definindo $v = (\rho_{11}, \rho_{22})$, obtemos $Av = \beta v$.

Exemplo 6.6.2 *Vamos calcular a desigualdade básica (6.83) para V_i, H_i fornecido por (6.147) e (6.148). Temos*

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*) = a_{11}\rho_{11} + a_{12}\rho_{22} \tag{6.150}$$

$$tr(H_2\rho_\beta H_2^*) = a_{21}\rho_{11} + a_{22}\rho_{22} \tag{6.151}$$

$$tr(V_1\rho_\beta V_1^*) = tr(V_2\rho_\beta V_2^*) = 1 \tag{6.152}$$

$$\mathcal{L}_H(\rho) = (a_{11}\rho_{11} + a_{12}\rho_{22}) \begin{pmatrix} 1+2\rho_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_{21}\rho_{11} + a_{22}\rho_{22}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2\rho_{12} \end{pmatrix}$$

Note que $\mathcal{L}_H(\rho) = \beta\rho$ nos leva a $\rho_{12} = 0$. Então

$$\beta = tr(H_1\rho_\beta H_1^*)tr(V_1\rho_\beta V_1^*) + tr(H_2\rho_\beta H_2^*)tr(V_2\rho_\beta V_2^*)$$

$$= tr(H_1\rho_\beta H_1^*) + tr(H_2\rho_\beta H_2^*) = (a_{11} + a_{21})\rho_{11} + (a_{12} + a_{22})\rho_{22} \tag{6.153}$$

Tembém podemos escrever

$$\beta = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{\zeta}{2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

onde

$$\zeta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}$$

onde tal expressão é obtida ao se resolver uma equação quadrática associada ao sistema $\mathcal{L}_H(\rho) = \beta\rho$, que no nosso exemplo é

$$a_{11}\rho_{11} + a_{12}\rho_{22} = \beta\rho_{11} \tag{6.154}$$

$$a_{21}\rho_{11} + a_{22}\rho_{22} = \beta\rho_{22} \tag{6.155}$$

Obtemos também os autoestados associados

$$\rho_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{2a_{21}+a_{11}-a_{22}+\zeta}{a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{a_{11}-2a_{12}-a_{22}-\zeta}{a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}} \end{pmatrix} \tag{6.156}$$

Logo, temos

$$h_V(W) + tr(W_1\rho_W W_1^*)\log\Big(a_{11}\rho_{11} + a_{12}\rho_{22}\Big)$$

$$+tr(W_2\rho_W W_2^*)\log\Big(a_{21}\rho_{11} + a_{22}\rho_{22}\Big) \leq \log\beta \tag{6.157}$$

onde, na expressão acima, ρ_{11} e ρ_{22} são as coordenadas não nulas de ρ_β, dadas pela expressão (6.156).

$\Diamond$

Exemplo 6.6.3 *Sejam*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.158}$$

e defina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{6.159}$$

Então $Av = \beta v$ nos leva a

$$v_1 + 4v_2 = \beta v_1 \tag{6.160}$$

$$3v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \beta v_2 \tag{6.161}$$

As soluções são as seguintes. Os autovalores são

$$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{193}$$

com autovetores, respectivamente,

$$\frac{1}{1 \pm \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{193}}(\frac{1}{12} \pm \frac{1}{12}\sqrt{193}, 1)$$

(a renormalização faz com que a soma das coordenadas seja igual a 1). Logo, temos $\beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{193}$*,* $v = \frac{1}{1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}}(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{193}, 1)$ *tais que* $Av = \beta v$*. Sejam*

$$H_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; H_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{21}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{6.162}$$

Então resolver $\mathcal{L}_H(\rho) = \beta\rho$ *nos leva a* $\rho_{12} = 0$ *e*

$$\rho_{11} + 4\rho_{22} = \beta\rho_{11} \tag{6.163}$$

$$3\rho_{11} + \frac{1}{2}\rho_{22} = \beta\rho_{22} \tag{6.164}$$

o que é o mesmo sistema (6.160)-(6.161). Portanto temos $\beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{193}$ *e o autoestado correspondente é, como* $\rho_{12} = 0$*,*

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}}{1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}} \end{pmatrix} \tag{6.165}$$

♢

6.7 Cálculos de uma desigualdade

Vamos fazer mais uma análise com a desigualdade

$$-\sum_{j=1}^{k} q_j \log q_j + \sum_{j=1}^{k} q_j \log r_j \leq 0 \tag{6.166}$$

obtida pelo lema 6.5.1. Ali, temos $r_1, \ldots, r_k$ e $q_1, \ldots, q_k$ duas distribuições de probabilidade em $1, \ldots, k$ tais que $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$, e a igualdade vale se, e somente se, $r_j = q_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Seja A uma matriz. Se v denota o autovetor à esquerda da matriz e^A, tal que cada entrada é $e^{a_{ij}}$, então a equação $ve^A = \beta v$ em coordenadas é

$$\sum_i v_i e^{a_{ij}} = \beta v_j, \;\; \forall j \tag{6.167}$$

Defina

$$r_{ij} := \frac{e^{a_{ij}} v_i}{\beta v_j} \tag{6.168}$$

Logo, $\sum_i r_{ij} = 1$. Sejam $q_{ij} > 0$ tais que $\sum_i q_{ij} = 1$. Por (6.166), temos:

$$-\sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log r_{ij} \leq 0 \tag{6.169}$$

Então

$$-\sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log \frac{e^{a_{ij}} v_i}{\beta v_j} \leq 0 \tag{6.170}$$

Daí

$$-\sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} a_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log v_i - \sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log v_j \leq \log \beta$$

Ou seja,

$$-\sum_{i=1}^{k} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} a_{ij} + \sum_{i=1}^{k} q_{ij} (\log v_i - \log v_j) \leq \log \beta \tag{6.171}$$

Se Q denota a matriz com entradas q_{ij}, seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ o vetor estacionário associado a Q. Como supomos $\sum_i q_{ij} = 1$, Q é coluna-estocástica e então escrevemos $Q\pi = \pi$. Multiplicando a desigualdade acima por π_j e somando em j obtemos

$$-\sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} a_{ij} + \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} (\log v_i - \log v_j) \leq \log \beta \tag{6.172}$$

Em coordenadas, $Q\pi = \pi$ é $\sum_j q_{ij}\pi_j = \pi_i$, para todo i. Então

$$\begin{aligned} &-\sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} a_{ij} \\ &+\sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log v_i - \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log v_j \leq \log \beta \end{aligned} \tag{6.173}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &-\sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} a_{ij} \\ &+\sum_{i} \log v_i \sum_{j} \pi_j q_{ij} - \sum_{j} \pi_j \log v_j \sum_{i} q_{ij} \leq \log \beta \end{aligned} \tag{6.174}$$

donde

$$-\sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} \pi_j \sum_{i} q_{ij} a_{ij}$$

$$+\sum_i \pi_i \log v_i - \sum_j \pi_j \log v_j \leq \log \beta \tag{6.175}$$

e portanto, como os dois últimos somatórios acima cancelam, obtemos

$$-\sum_j \pi_j \sum_i q_{ij} \log q_{ij} + \sum_j \pi_j \sum_i q_{ij} a_{ij} \leq \log \beta \tag{6.176}$$

$\Diamond$

Definição Chamamos a desigualdade (6.176) de **desigualdade clássica** associada à matriz com entradas positivas A e à matriz estocástica Q.

$\Diamond$

Definição Para k fixado, e para $l, m = 1, \ldots, k$, chamamos a desigualdade

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*)$$

$$+\sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log \left(\frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \right) \leq \log \beta, \tag{6.177}$$

que é equivalente a

$$h_V(W) + \sum_j tr(W_j \rho_W W_j^*) \sum_i \frac{tr(W_i V_j \rho_W V_j^* W_i^*)}{tr(V_j \rho_W V_j^*)} \log \left(tr(H_i \rho_\beta H_i^*) \frac{(V_i \rho_\beta V_i^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} \right)$$

$$\leq \log \beta \tag{6.178}$$

de **desigualdade básica** associada ao potencial $H\rho = \sum_i H_i \rho H_i^*$ e ao QIFS determinado por V_i, W_i, $i = 1, \ldots, k$. Tal desigualdade foi obtida na seção 6.5 e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.179}$$

$\Diamond$

Acima ρ_β é autoestado de

$$\mathcal{L}_H(\rho) = \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^*$$

com autovalor β e com antes, definimos a entropia do QIFS como sendo

$$h_V(W) = -\sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i V_j \rho_W V_j^* W_i^*)}{tr(V_j \rho_W V_j^*)} \log \frac{tr(W_i V_j \rho_W V_j^* W_i^*)}{tr(V_j \rho_W V_j^*)},$$

onde ρ_W denota o baricentro da única medida atrativa e invariante para o operador de Markov $\mathcal{V}$ associado ao QIFS $\mathcal{F}_W$.

Dada a desigualdade clássica (6.176) obtida acima, queremos compará-la com a desigualdade básica (6.177). Mais precisamente, queremos fazer o seguinte. Queremos saber se existem V_i tais que dada uma matriz com entradas positivas A e um matriz Q linha-estocástica, existem H_i e W_i tais que a desigualdade (6.177) se torna a desigualdade (6.176). De fato, isso é possível e temos a seguinte proposição.

Proposição 6.7.1 *Defina*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.180}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.181}$$

Seja $A = (a_{ij})$ matriz com entradas positivas e $Q = (q_{ij})$ matriz linha-estocástica, ambas de ordem 2. Defina

$$H_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{e^{a_{11}}} & \sqrt{e^{a_{11}}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{e^{a_{12}}} & \sqrt{e^{a_{12}}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.182}$$

$$H_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{e^{a_{21}}} & \sqrt{e^{a_{21}}} \end{pmatrix}, \quad H_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{e^{a_{22}}} & \sqrt{e^{a_{22}}} \end{pmatrix} \tag{6.183}$$

e também

$$W_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.184}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{q_{21}} & 0 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22}} \end{pmatrix} \tag{6.185}$$

Então a desigualdade básica associada a W_i, V_i, H_i, $i = 1, \ldots, 4$, $l = m = 1$ ou $l = m = 2$, é equivalente a desigualdade clássica associada às matrizes A e Q.

Para provar esta proposição usamos o seguinte lema.

Lema 6.7.2 *Para a escolha de V_i dada por*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{v_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{v_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.186}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{v_{21}} & 0 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v_{22}} \end{pmatrix} \tag{6.187}$$

onde os v_{ij} são números positivos quaisquer, temos que o QIFS associado é tal que ρ_W e ρ_β são operadores densidade diagonais, para qualquer escolha de W_i e H_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Prova do lema 6.7.2 O operador ρ_W é ponto fixo de

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_i tr(W_i \rho W_i^*) \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

Escrevendo,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix},$$

temos que a equação $\mathcal{L}(\rho) = \rho$ nos leva a

$$\frac{tr(W_1 \rho W_1^*)}{tr(V_i \rho V_i^*)} \begin{pmatrix} v_{11}\rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{tr(W_2 \rho W_2^*)}{tr(V_2 \rho V_2^*)} \begin{pmatrix} v_{12}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{tr(W_3 \rho W_3^*)}{tr(V_3 \rho V_3^*)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{21}\rho_{11} \end{pmatrix} + \frac{tr(W_4 \rho W_4^*)}{tr(V_4 \rho V_4^*)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{22}\rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Portanto, $\rho_{12} = 0$ e então ρ_W é diagonal. Analogamente, o operador ρ_β é autoestado de

$$\mathcal{L}_H(\rho) = \sum_i tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^*$$

Logo, a equação $\mathcal{L}_H(\rho) = \beta\rho$ nos leva a

$$tr(H_1 \rho H_1^*) \begin{pmatrix} v_{11}\rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + tr(H_2 \rho H_2^*) \begin{pmatrix} v_{12}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ tr(H_3 \rho H_3^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{21}\rho_{11} \end{pmatrix} tr(H_4 \rho H_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{22}\rho_{22} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Portanto, $\rho_{12} = 0$ e então ρ_β é diagonal.

$\square$

Prova da proposição 6.7.1 Sejam V_i, $i = 1, \ldots, 4$ como os definidos no enunciado. Seja A matriz com entradas positivas a_{ij} fixadas e seja Q uma matriz com entradas positivas q_{ij}, com $\sum_i q_{ij} = 1$ (i.e., coluna-estocástica). Defina W_i, $i = 1, \ldots, 4$ e H_{ij}, $i, j = 1, 2$ como no enunciado. Um cálculo simples mostra que tal escolha de H_{ij} satisfaz

$$tr(H_{ij}\rho_\beta H_{ij}^*) = e^{a_{ij}} \tag{6.188}$$

(note que ρ_β é diagonal, pelo lema 6.7.2). Pelo exemplo 5.7.3, as escolhas de V_i e W_i que fizemos são tais que a entropia $h_V(W)$ se reduz a entropia de cadeias de Markov. Desta forma, um cálculo simples mostra

$$\frac{(V_i\rho_\beta V_i^*)_{11}}{(\rho_\beta)_{11}} = \frac{(\rho_\beta)_{11}}{(\rho_\beta)_{11}} = 1 \tag{6.189}$$

Analogamente,

$$\frac{(V_i\rho_\beta V_i^*)_{22}}{(\rho_\beta)_{22}} = \frac{(\rho_\beta)_{22}}{(\rho_\beta)_{22}} = 1 \tag{6.190}$$

Então da desigualdade básica, para $l = m = 1$ ou $l = m = 2$,

$$h_V(W)+\sum_j tr(W_j\rho_W W_j^*)\sum_i \frac{tr(W_iV_j\rho_W V_j^* W_i^*)}{tr(V_j\rho_W V_j^*)}\log\left(tr(H_i\rho_\beta H_i^*)\frac{(V_i\rho_\beta V_i^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\right)$$

$$\leq \log\beta \tag{6.191}$$

obtemos

$$h_V(W) + \sum_j tr(W_j\rho_W W_j^*)\sum_i \frac{tr(W_iV_j\rho_W V_j^* W_i^*)}{tr(V_j\rho_W V_j^*)}\log tr(H_i\rho_\beta H_i^*) \leq \log\beta \tag{6.192}$$

Finalmente como $tr(H_{ij}\rho_\beta H_{ij}^*) = e^{a_{ij}}$, obtemos após alguns cálculos simples, observando que $Q\pi = \pi$, que a desigualdade (6.192) se torna a desigualdade clássica (6.176).

□

Exemplo 6.7.3 *O seguinte exemplo ilustra um cálculo da desigualdade básica com um potencial composto por coordenadas complexas. Também ilustramos aqui a renormalização de tal potencial. Sejam*

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_2 = I,\ H_3 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_4 = I$$

Então

$$H_1^* = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ -2i & 0 \end{pmatrix}, \; H_2^* = I, \; H_3^* = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \; H_4^* = I$$

No caso particular em que os V_i são os do teorema 6.7.1, temos que ρ_β é diagonal e então

$$tr(H_1\rho_\beta H_1^*) = 4, \;\; tr(H_2\rho_\beta H_2^*) = 1, \;\; tr(H_3\rho_\beta H_3^*) = 2, \;\; tr(H_4\rho_\beta H_4^*) = 1$$

Daí $\mathcal{L}_H(\rho) = \beta\rho$ implica o sistema

$$4\rho_{11} + \rho_{22} = \beta\rho_{11}$$

$$2\rho_{11} + \rho_{22} = \beta\rho_{22}$$

Um cálculo simples fornece

$$\beta = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

com autoestado

$$\rho_\beta = \frac{4}{7+\sqrt{17}} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estamos interessados em obter os W_i que maximizam a desigualdade básica (6.177) neste caso particular. Lembrando que pelo teorema 6.7.1, a escolha dos V_i que fizemos é tal que

$$\frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = 1,$$

temos

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j\rho_W W_j^*) \log tr(H_j\rho_\beta H_j^*) \leq \log\beta \tag{6.193}$$

E vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j\rho_\beta H_j^*) \frac{(V_j\rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \tag{6.194}$$

Escolha, por exemplo, $l = m = 1$. Então a condição (6.194), para os V_i, H_i fixados consiste de 16 igualdades (i.e., $i, j = 1, \ldots, 4$) que nos permitem determinar os W_i.

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j\rho_\beta H_j^*) = \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \tag{6.195}$$

Para simplificar cálculos, escrevemos $\widehat{W_i} = W_i^* W_i$ e escrevemos $\widehat{W_i} = (w_{ij}^i)$. Alguns cálculos nos fornecem

$$\frac{tr(H_i \rho_\beta H_i^*)}{\beta} = w_{11}^i = w_{22}^i, \;\; i = 1, \ldots, 4 \tag{6.196}$$

Portanto, concluímos que

$$W_i = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} \sqrt{tr(H_i \rho_\beta H_i^*)} & 0 \\ 0 & \sqrt{tr(H_i \rho_\beta H_i^*)} \end{pmatrix}, \;\; i = 1, \ldots, 4 \tag{6.197}$$

Ou seja,

$$W_1 = \frac{2}{\sqrt{\beta}} I, \;\; W_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} I, \;\; W_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} I, \;\; W_4 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} I \tag{6.198}$$

Note que

$$\sum_i W_i^* W_i = \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} I \neq I$$

Para resolver isso, renormalizamos o potencial, definindo

$$\tilde{H}_i := \sqrt{\alpha} H_i \tag{6.199}$$

onde

$$\alpha := \frac{\sqrt{\beta}}{4 + \sqrt{2}} \tag{6.200}$$

Desta forma, um cálculo mostra que a equação $\mathcal{L}_{\tilde{H}}(\rho) = \tilde{\beta}\rho$ nos fornece o mesmo autoestado que obtivemos antes, ou seja, $\rho_{\tilde{\beta}} = \rho_\beta$. Mas note que o autovalor associado é $\tilde{\beta} = \alpha\beta$. Agora, note que é possível renormalizar os W_i de modo a ter $\tilde{W}_i$, com $\sum_i \tilde{W}_i^* \tilde{W}_i = I$, e que maximizam a desigualdade básica para os H_i fixados inicialmente. Com efeito, dados os $\tilde{H}_i$ renormalizados, definimos

$$\tilde{W}_i = \sqrt{\alpha} W_i, \;\; i = 1, \ldots, 4 \tag{6.201}$$

Note que temos $\sum_i \tilde{W}_i^* \tilde{W}_i = I$. E também obtemos

$$h_V(\tilde{W}) + \sum_{j=1}^{k} tr(\tilde{W}_j \rho_{\tilde{W}} \tilde{W}_j^*) \log tr(\sqrt{\alpha} H_j \rho_\beta \sqrt{\alpha} H_j^*) \leq \log \alpha\beta \tag{6.202}$$

o que equivale a

$$h_V(\tilde{W}) + \sum_{j=1}^{k} tr(\tilde{W}_j \rho_{\tilde{W}} \tilde{W}_j^*) \log(\alpha tr(H_j \rho_\beta H_j^*)) \leq \log \alpha + \log \beta \tag{6.203}$$

Ou seja

$$h_V(\tilde{W}) + \sum_{j=1}^{k} tr(\tilde{W}_j \rho_{\tilde{W}} \tilde{W}_j^*) \log \alpha$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} tr(\tilde{W}_j \rho_{\tilde{W}} \tilde{W}_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \leq \log \alpha + \log \beta, \tag{6.204}$$

e cancelando os termos $\log \alpha$, obtemos a mesma desigualdade para os H_i não renormalizados. Como vimos, tais $\tilde{W}_i$ fornecem a igualdade. Portanto,

$$h_V(\tilde{W}) + \sum_{j=1}^{k} tr(\tilde{W}_j \rho_{\tilde{W}} \tilde{W}_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) = \log \beta \tag{6.205}$$

Isso conclui o exemplo.

$\Diamond$

6.8 Sobre logaritmos e a positividade de um operador

Faremos a seguir algumas considerações sobre operadores positivos. Lembre que um operador linear A é positivo, denotado por $A \geq 0$, se $\langle Av, v\rangle \geq 0$, para todo v, ou equivalentemente, se $A = M^*M$ para alguma matriz M, ou equivalentemente, se todos os seus autovalores são positivos. Ainda, se B é outro operador linear, escrever $A \leq B$ significa $B - A \geq 0$.

Proposição 6.8.1 *Temos:*

1. *Se $A \geq 0$, $B \geq 0$ então $A^2 \geq 0$ e $A + B \geq 0$.*
2. *Se $A \geq 0$, $B \geq 0$ e $AB = BA$ então $AB \geq 0$.*
3. *Se A_i são operadores lineares positivos tais que $\sum_{i=1}^{k} A_i = I$ então para todo $i = 1, \ldots, k$, temos $I - A_i \geq 0$.*

Prova A prova de 1 e 3 é elementar. Sobre a prova de 2, ver [17].

$\square$

O **espectro** de um operador linear T, denotado por $\sigma(T)$, é o conjunto de todos os números λ tais que $T - \lambda I$ não é invertível. O **raio espectral** de T é definido por

$$\rho(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Defina o logaritmo de um operador A tal que $\rho(I - A) < 1$ da seguinte forma:

$$\log A := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(I - A)^k}{k} \tag{6.206}$$

Agora fazemos os seguintes cálculos. Sejam Q_i operadores positivos, $i = 1, \ldots, k$ tais que $\sum_i Q_i = I$. Pelo item 3 da proposição 6.8.1, $I - Q_i \geq 0$. Note que $I - Q_i$ comuta com Q_i, para todo i. Então pelo item 2 da proposição 6.8.1, $Q_i(I - Q_i) \geq 0$. Agora, observe que para qualquer i, e para todo n,

$$-Q_i\Big(-\sum_{m=1}^{n} \frac{(I - Q_i)^m}{m}\Big) = Q_i \sum_{m=1}^{n} \frac{(I - Q_i)^m}{m} \geq 0 \tag{6.207}$$

e portanto, se para todo i temos $\rho(I - Q_i) < 1$ então o operador

$$\varphi(Q_i) = -Q_i \log Q_i \tag{6.208}$$

é positivo. Podemos ainda tomar outro conjunto de operadores P_i positivos, $i = 1, \ldots, k$ tais que $\sum_i P_i = I$. Daí, se para todo i temos $\rho(I - P_i) < 1$ então, para os Q_i fixados acima, podemos definir os operadores

$$\eta_i(P_i) = -Q_i \log P_i \tag{6.209}$$

Exemplo 6.8.2 *Sejam $k = n = 2$ e*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Claramente as matrizes acima determinam operadores positivos e tais que $Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 = I$. Além disso, uma inspeção simples mostra que $\rho(I - P_i) < 1$ e $\rho(I - Q_i) < 1$, $i = 1, 2$ e também que os autovalores da matriz

$$\sum_{i=1}^{2} \eta_i(P_i) - \sum_{i=1}^{2} \varphi(Q_i) \tag{6.210}$$

são positivos, e portanto

$$-\sum_{i=1}^{2} Q_i \log P_i + \sum_{i=1}^{2} Q_i \log Q_i \geq 0 \tag{6.211}$$

$\diamondsuit$

Dado o exemplo acima, queremos saber se o seguinte resultado, ou algo semelhante, é verdadeiro.

Conjectura 6.8.3 *Sejam Q_i, P_i operadores positivos tais que $\rho(I-P_i) < 1$, $\rho(I-Q_i) < 1$, $\sum_i P_i = \sum_i Q_i = I$, $i = 1, \ldots, k$. Então*

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i(P_i) - \sum_{i=1}^{k} \varphi(Q_i) \geq 0 \tag{6.212}$$

ou seja

$$-\sum_{i=1}^{k} Q_i \log P_i + \sum_{i=1}^{k} Q_i \log Q_i \geq 0 \tag{6.213}$$

e vale a igualdade se, e somente se, $P_i = Q_i$, $i = 1, \ldots, k$.

$\diamondsuit$

Observação Podemos aumentar o domínio de convergência da série (6.206). Defina

$$\log A := 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \Big[(A-I)(A+I)^{-1} \Big]^{2k+1} \tag{6.214}$$

que é convergente para toda matriz A tal que $\rho[(A-I)(A+I)^{-1}] < 1$. Isto implica que tal série converge para todas as matrizes cujo espectro esteja situado sobre o semiplano aberto à direita do eixo imaginário [9].

$\diamondsuit$

6.9 Uma variante do operador de Ruelle

Defina $\mathcal{L}_{H,V} : \mathcal{PH}_N \to \mathcal{PH}_N$,

$$\mathcal{L}_{H,V}(\rho) := \sum_{i=1}^{k} H_i \rho H_i^* V_i \rho V_i^* \tag{6.215}$$

Para ver porque tal operador é positivo, note que

$$tr(\mathcal{L}_{H,V}) = \sum_{i} tr(H_i \rho H_i^* V_i \rho V_i^*)$$

$$= \sum_i tr(V_i^* H_i \rho H_i^* V_i \rho) = \sum_i tr(V_i^* H_i \rho^{1/2} \rho^{1/2} H_i^* V_i \rho^{1/2} \rho^{1/2})$$

$$= \sum_i tr(\rho^{1/2} V_i^* H_i \rho^{1/2} \rho^{1/2} H_i^* V_i \rho^{1/2}) = \sum_i tr(A_i A_i^*),$$

onde

$$A_i = \rho^{1/2} V_i^* H_i \rho^{1/2}$$

De fato, note que

$$A_i^* = (\rho^{1/2} V_i^* H_i \rho^{1/2})^* = \rho^{1/2} (\rho^{1/2} V_i^* H_i)^*$$

$$= \rho^{1/2} H_i^* (\rho^{1/2} V_i^*)^* = \rho^{1/2} H_i^* V_i^* \rho^{1/2}$$

Sabemos que para qualquer operador positivo $A \neq 0$, se $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}_N$, temos

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{N} \langle A v_i, v_i \rangle > 0$$

Portanto,

$$tr(\mathcal{L}_{H,V}) = \sum_i tr(A_i A_i^*) = \sum_i \sum_j \langle A_i v_j, v_j \rangle > 0$$

Proposição 6.9.1 *Existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_{H,V}(\rho) = \beta\rho$.*

Prova Defina $\mathcal{L}_n : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$,

$$\mathcal{L}_n(\rho) := \frac{\mathcal{L}_{H,V}(\rho + \frac{I}{n})}{tr(\mathcal{L}_{H,V}(\rho + \frac{I}{n}))} \ , \ n \geq 1$$

Tal operador está bem definido. De fato, note que

$$tr\Big[\sum_i H_i(\rho + \frac{I}{n}) H_i^* V_i (\rho + \frac{I}{n}) V_i^*\Big] = \sum_i tr\Big(H_i(\rho + \frac{I}{n}) H_i^* V_i (\rho + \frac{I}{n}) V_i^*\Big)$$

$$= \sum_i tr((H_i \rho H_i^* + \frac{1}{n} H_i H_i^*)(V_i \rho V_i^* + \frac{1}{n} V_i V_i^*))$$

$$= \sum_i tr(H_i \rho H_i^* V_i \rho V_i^*) + \frac{1}{n} tr(H_i \rho H_i^* V_i V_i^*) + \frac{1}{n} tr(H_i H_i^* V_i \rho V_i^*) + \frac{1}{n} tr(H_i H_i^* V_i V_i^*)$$

Agora note que

$$tr(H_i \rho H_i^* V_i V_i^*) = tr(V_i^* H_i \rho H_i^* V_i) \geq 0$$

pois $V_i^* H_i \rho H_i^* V_i = A_i A_i^*$, onde $A_i = V_i^* H_i \rho^{1/2}$. Analogamente,

$$tr(H_i H_i^* V_i \rho V_i^*) = tr(H_i^* V_i \rho V_i^* H_i) \geq 0$$

pois $H_i^* V_i \rho V_i^* H_i = B_i B_i^*$, onde $B_i = H_i^* V_i \rho^{1/2}$. Ainda,

$$tr(H_i H_i^* V_i V_i^*) = tr(V_i^* H_i H_i^* V_i) \geq 0$$

pois $V_i^* H_i H_i^* V_i = C_i C_i^*$, onde $C_i = V_i^* H_i$. Logo,

$$tr\Big[\sum_i H_i(\rho + \frac{I}{n}) H_i^* V_i(\rho + \frac{I}{n}) V_i^*\Big] \geq \sum_i tr(H_i \rho H_i^* V_i \rho V_i^*) = tr(\mathcal{L}_{H,V})$$

E sabemos que para qualquer operador positivo $P \neq 0$, se $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}_N$, temos

$$tr(P) = \sum_{i=1}^{N} \langle P v_i, v_i \rangle > 0$$

Logo, $tr(\mathcal{L}_{H,V}(\rho + \frac{I}{n})) > 0$, $n \geq 1$, e portanto $\mathcal{L}_n(\rho)$ está bem definida.

Sabemos que $\mathcal{M}_N$ é compacto e convexo, então podemos aplicar o teorema de Schauder para cada uma das aplicações $\mathcal{L}_n$, $n \geq 1$ e obter $\rho_n \in \mathcal{M}_N$ tais que

$$\mathcal{L}_n(\rho_n) = \rho_n \;\; \Rightarrow \;\; \mathcal{L}_{H,V}(\rho_n + \frac{I}{n}) = \beta_n \rho_n, \;\; n \geq 1$$

onde

$$\beta_n := tr(\mathcal{L}_{H,V}(\rho_n + \frac{I}{n}))$$

Pela compacidade de $\mathcal{M}_N$, podemos escolher um ponto $\rho \in \mathcal{M}_N$ que seja limite da sequência $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ e então, por continuidade, $\mathcal{L}_{H,V}(\rho) = \beta\rho$, onde $\beta = tr(\mathcal{L}_{H,V}(\rho))$. Ainda, note que $\beta \geq 0$, pois para $\{v_1, \ldots, v_N\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_N$,

$$tr(\mathcal{L}_{H,V}(\rho)) = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathcal{L}_{H,V}(\rho) v_i, v_i \rangle \geq 0,$$

pois $\mathcal{L}_{H,V}(\rho)$ é positivo, e a desigualdade será igual a zero apenas se $\mathcal{L}_{H,V}(\rho)$ for o operador nulo. Assim mostramos que existem $\rho \in \mathcal{M}_N$ e $\beta > 0$ tais que $\mathcal{L}_{H,V}(\rho) = \beta\rho$.

$\square$

Sejam V_i, W_i, operadores lineares, $i = 1, \ldots, k$, com $\sum_i W_i^* W_i = I$ e seja

$$H\rho := \sum_{i=1}^{k} H_i \rho H_i^* \tag{6.216}$$

uma operador autoadjunto. Estamos interessados em obter uma versão do princípio variacional de pressão para o nosso contexto. Veremos que a pressão atingirá o máximo quando houver uma certa relação entre o potencial H e a distribuição de probabilidade considerada (representada aqui pelos W_i).

O potencial (6.216) em conjunto com os V_i induz um operador dado por

$$\mathcal{L}_H(\rho) := \sum_{i=1}^{k} H_i \rho H_i^* V_i \rho V_i^* \tag{6.217}$$

Sabemos que tal operador admite um autovalor β e um autoestado associado ρ_β. Então $\mathcal{L}_H(\rho_\beta) = \beta \rho_\beta$ implica

$$\sum_{i=1}^{k} H_i \rho_\beta H_i^* V_i \rho_\beta V_i^* = \beta \rho_\beta \tag{6.218}$$

Em coordenadas, (6.218) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{k} (H_i \rho_\beta H_i^* V_i \rho_\beta V_i^*)_{lm} = \beta (\rho_\beta)_{lm} \tag{6.219}$$

onde a notação $(B)_{lm}$ significa a coordenada (l, m) da matriz associada ao operador B, l,$m = 1, \ldots k$.

Defina

$$r_{jlm} = \frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{\beta (\rho_\beta)_{lm}} \tag{6.220}$$

Portanto, temos $\sum_j r_{jlm} = 1$.

Seja

$$q_{ij} := tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \Big) \tag{6.221}$$

onde, como antes, ρ_W denota o ponto fixo associado ao operador renormalizado $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$, induzido pelo QIFS $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$,

$$F_i(\rho) = \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

e

$$p_i(\rho) = tr(W_i \rho W_i^*)$$

Note que temos

$$\sum_{j=1}^{k} q_{ij} = \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr(W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*)$$

$$= \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(\sum_{j=1}^{k} W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*) = 1$$

Logo, podemos aplicar o lema 6.5.1 para r_{jlm}, q_{ij}, $j = 1, \ldots k$, com i,l,m fixados, para obter

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{\beta(\rho_\beta)_{lm}}\Big) \leq 0 \qquad (6.222)$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{\beta(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \qquad (6.223)$$

Então

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big)$$

$$\leq \sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log \beta$$

o que equivale a

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) \leq \log \beta \qquad (6.224)$$

Multiplicando por $tr(W_i \rho_W W_i^*)$ e somando em i obtemos

$$h_V(W) + \sum_i \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_j \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)$$

$$\leq \sum_i tr(W_i \rho_W W_i^*) \log \beta = \log \beta \tag{6.225}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.226}$$

Vamos reescrever a desigualdade (6.225). Primeiro, usamos o fato de que ρ_W é ponto fixo de $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$,

$$\sum_{i=1}^k tr(W_i \rho_W W_i^*) \frac{V_i \rho_W V_i^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} = \rho_W \tag{6.227}$$

Agora, compomos ambos os lados da igualdade acima com o operador

$$\sum_{j=1}^k \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) W_j^* W_j \tag{6.228}$$

(i.e., multiplicamos à direita) e então obtemos

$$\sum_{i=1}^k tr(W_i \rho_W W_i^*) \frac{V_i \rho_W V_i^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^k \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) W_j^* W_j$$

$$= \rho_W \sum_{j=1}^k \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) W_j^* W_j \tag{6.229}$$

Tomando o traço em ambos os lados, e rearranjando termos obtemos

$$\sum_{i=1}^k \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^k \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)$$

$$= \sum_{j=1}^k \log\Big(\frac{(H_j \rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) tr(\rho_W W_j^* W_j) \tag{6.230}$$

Note que o lado esquerdo de (6.230) é uma das somas em (6.225). Portanto, substituindo (6.230) em (6.225) nos fornece a seguinte desigualdade:

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} \log\Big(\frac{(H_j\rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}}\Big) tr(W_j \rho_W W_j^*) \leq \log\beta \tag{6.231}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j, l, m,

$$\frac{(H_j\rho_\beta H_j^* V_j \rho_\beta V_j^*)_{lm}}{(\rho_\beta)_{lm}} = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.232}$$

$\Diamond$

6.10 Exemplo

Exemplo 6.10.1 *Seja $N = 2$, $k = 3$, seja ρ operador densidade e V_i, W_i lineares, $i = 1, 2, 3$.*

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \overline{\rho_{12}} & \rho_{22} \end{pmatrix},\ V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ W_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix},\ W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Temos que $\sum_i W_i^* W_i = I$. Ainda, como $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$, alguns cálculos fornecem

$$tr(W_1 \rho W_1^*) \frac{V_1 \rho V_1^*}{tr(V_1 \rho V_1^*)} = \frac{1}{3}\rho_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.233}$$

$$tr(W_2 \rho W_2^*) \frac{V_2 \rho V_2^*}{tr(V_2 \rho V_2^*)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{6.234}$$

$$tr(W_3 \rho W_3^*) \frac{V_3 \rho V_3^*}{tr(V_3 \rho V_3^*)} = \frac{1}{3}\rho_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.235}$$

E portanto

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_i tr(W_i \rho W_i^*) \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

$$= \frac{1}{3}\rho_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\rho_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \rho_{11} & i \\ -i & 1 + \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{6.236}$$

Então uma inspeção simples mostra que, por exemplo, o operador

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

(obtido pela expressão (6.236) ao fazer $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$*), é um estado densidade e além disso, temos* $\mathcal{L}(\rho_0) = \rho_0$*.*

$\Diamond$

6.11 Sobre o problema de pressão e mecânica quântica

Uma das questões que nos interessam neste trabalho é entender de que forma podemos formular um princípio variacional de pressão em um contexto de informação quântica. Uma combinação apropriada destas duas teorias poderia ter como ponto de partida relacionar a desigualdade para números positivos

$$-\sum_i q_i \log q_i + \sum_i q_i \log p_i \leq 0,$$

fundamental para diversas demonstrações de princípio variacional de pressão, com a entropia de QIFS que definimos anteriormente. Procedendo dessa forma, obtivemos a desigualdade básica, que em uma de suas versões é

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) tr(W_j \rho_W W_j^*) \leq \log \beta \tag{6.237}$$

onde vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.238}$$

Ainda, podemos supor que os V_i são unitários. Desta forma, combinamos de maneira natural um problema de formalismo termodinâmico e uma evolução de caráter quântico. Neste caso particular, temos para cada i que $V_i V_i^* = V_i^* V_i = I$ e portanto

$$tr(V_j \rho_\beta V_j^*) = tr(V_i \rho_W V_i^*) = 1,$$

então a desigualdade básica se torna

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*) \leq \log \beta \tag{6.239}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*) = tr(W_jV_i\rho_W V_i^* W_j^*) \tag{6.240}$$

E temos o seguinte:

Lema 6.11.1 *Dado um QIFS com dinâmica unitária (i.e., com V_i unitário, para cada i), existem $\hat{W}_i$ que maximizam (6.237), ou seja, tais que*

$$h_V(\hat{W}) + \sum_{j=1}^{k} tr(\hat{W}_j\rho_{\hat{W}}\hat{W}_j^*)\log tr(H_j\rho_\beta H_j^*) = \log\beta \tag{6.241}$$

Prova Defina, para cada j,

$$\hat{W}_j := \sqrt{\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)}I \tag{6.242}$$

onde I é a matriz identidade. A condição de igualdade (6.240) é satisfeita por tais $\hat{W}_j$, donde segue o lema.

$\square$

Observação O lema acima também vale para a desigualdade básica em coordenadas, dada por (6.177) e condição de igualdade (6.179), página 146.

Observação É imediato obter uma versão semelhante ao lema acima para todo QIFS tal que os V_i são múltiplos da identidade; também é imediato obter uma versão semelhante ao lema acima para todo QIFS tal que ρ_W fixa cada um dos ramos, ou seja, tal que

$$\frac{V_i\rho_W V_i^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} = \rho_W$$

$\lozenge$

6.12 Apêndice: cálculo alternativo para o problema de pressão

Sejam V_i, W_i, operadores lineares, $i = 1, \ldots, k$, com $\sum_i W_i^* W_i = I$ e seja

$$H\rho := \sum_{i=1}^{k} H_i\rho H_i^* \tag{6.243}$$

uma operador autoadjunto. Estamos interessados em obter uma versão do princípio variacional de pressão para o nosso contexto. Veremos que a pressão atingirá o máximo quando houver uma certa relação entre o potencial H e a distribuição de probabilidade considerada (representada aqui pelos W_i).

O potencial (6.243) em conjunto com os V_i induzem um operador dado por

$$\mathcal{L}_H(\rho) := \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho H_i^*) V_i \rho V_i^* \tag{6.244}$$

Sabemos que tal operador admite um autovalor β e um autoestado associado ρ_β. Então $\mathcal{L}_H(\rho_\beta) = \beta \rho_\beta$ implica

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) V_i \rho_\beta V_i^* = \beta \rho_\beta \tag{6.245}$$

Em coordenadas, (6.245) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*)(V_i \rho_\beta V_i^*)_{jl} = \beta(\rho_\beta)_{jl} \tag{6.246}$$

onde a notação $(B)_{jl}$ significa a coordenada (j, l) da matriz associada ao operador B, j,$l = 1, \dots k$.

Observação Fazendo uma comparação com o problema análogo para cadeias de Markov, a equação (6.245) pode ser visto como o análogo da expressão

$$l e^A = \lambda l \tag{6.247}$$

que teríamos para o problema clássico para matrizes. Ali, a matriz A faz o papel do potencial, e^A é a matriz com coordenadas $e^{A_{ij}}$ e l_j denota a j-ésima entrada do autovetor à esquerda l associado ao autovalor λ. Em coordenadas,

$$\sum_i l_i e^{A_{ij}} = \lambda l_j, \;\; i, j = 1, \dots, k \tag{6.248}$$

$\Diamond$

De (6.245) obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\beta} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) tr(V_i \rho_\beta V_i^*) = 1 \tag{6.249}$$

o que é apenas a expressão explícita para β que calculamos no teorema de autovalores,

$$\beta = \sum_{i=1}^{k} tr(H_i \rho_\beta H_i^*) tr(V_i \rho_\beta V_i^*) \tag{6.250}$$

Com isso em mente, defina

$$r_j = \frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \tag{6.251}$$

Portanto, temos $\sum_j r_j = 1$.

Observação A definição de r_j acima é a diferença fundamental entre a análise feita aqui, e que é feita na seção 6.5.

$\Diamond$

Seja

$$q_j^i := tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \tag{6.252}$$

onde, como antes, ρ_W denota o ponto fixo associado ao operador renormalizado $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$, induzido pelo QIFS $(\mathcal{M}_N, F_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$,

$$F_i(\rho) = \frac{V_i \rho V_i^*}{tr(V_i \rho V_i^*)}$$

e

$$p_i(\rho) = tr(W_i \rho W_i^*)$$

Note que temos

$$\sum_{j=1}^{k} q_j^i = \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} tr(W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*)$$

$$= \frac{1}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(\sum_{j=1}^{k} W_j^* W_j V_i \rho_W V_i^*) = 1$$

Logo, podemos aplicar o lema 6.5.1 para r_j, q_j^i, $j = 1, \ldots k$, com i fixado, para obter

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big) \log tr\Big(\frac{W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)\log\Big(\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)\Big)\leq 0 \qquad (6.253)$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i,j,

$$\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)=\frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \qquad (6.254)$$

Então

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)\log tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)\log\Big(tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)\Big)$$

$$\leq\sum_j tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)\log\beta$$

o que equivale a

$$-\sum_j tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)\log tr\Big(\frac{W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\Big)$$

$$+\sum_j \frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}\log\Big(tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)\Big)\leq\log\beta \qquad (6.255)$$

Multiplicando por $tr(W_i\rho_W W_i^*)$ e somando em i obtemos

$$h_V(W)+\sum_j\log\Big(tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)\Big)\sum_i\frac{tr(W_i\rho_W W_i^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}tr(W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*)$$

$$\leq\sum_i tr(W_i\rho_W W_i^*)\log\beta=\log\beta \qquad (6.256)$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i,j,

$$\frac{1}{\beta}tr(H_j\rho_\beta H_j^*)tr(V_j\rho_\beta V_j^*)=\frac{tr(W_jV_i\rho_W V_i^*W_j^*)}{tr(V_i\rho_W V_i^*)} \qquad (6.257)$$

Vamos reescrever a desigualdade (6.256). Primeiro, usamos o fato de que ρ_W é ponto fixo de $\widehat{\mathcal{L}}_{W,V}$,

$$\sum_{i=1}^k tr(W_i\rho_W W_i^*)\frac{V_i\rho_W V_i^*}{tr(V_i\rho_W V_i^*)}=\rho_W \qquad (6.258)$$

Agora, compomos ambos os lados da igualdade acima com o operador

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) W_j^* W_j \tag{6.259}$$

e então obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} tr(W_i \rho_W W_i^*) \frac{V_i \rho_W V_i^*}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) W_j^* W_j$$

$$= \rho_W \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) W_j^* W_j \tag{6.260}$$

Rearranjando termos, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} V_i \rho_W V_i^* W_j^* W_j$$

$$= \rho_W \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) W_j^* W_j \tag{6.261}$$

Tomando o traço em ambos os lados, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(W_i \rho_W W_i^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) tr(\rho_W W_j^* W_j) \tag{6.262}$$

Note que o lado esquerdo de (6.262) é uma das somas em (6.256). Portanto, substituindo (6.262) em (6.256) nos fornece a seguinte desigualdade:

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} \log \Big(tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \Big) tr(W_j \rho_W W_j^*) \leq \log \beta \tag{6.263}$$

o que equivale a

$$h_V(W) + \sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(H_j \rho_\beta H_j^*)$$

$$+\sum_{j=1}^{k} tr(W_j \rho_W W_j^*) \log tr(V_j \rho_\beta V_j^*) \leq \log \beta \tag{6.264}$$

e vale a igualdade se, e somente se, para todo i, j,

$$\frac{1}{\beta} tr(H_j \rho_\beta H_j^*) tr(V_j \rho_\beta V_j^*) = \frac{tr(W_j V_i \rho_W V_i^* W_j^*)}{tr(V_i \rho_W V_i^*)} \tag{6.265}$$

$\diamondsuit$

Capítulo 7

Função de Wigner

7.1 Relações de Weyl discretas

Esta seção é inspirada em [4]. Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$. Seja $\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}$ uma base ortonormal. Fixe $\alpha_u, \alpha_v \in [0,1]$ e defina as seguintes matrizes U_N, $V_N \in M_N(\mathbb{C})$:

$$U_N := e^{\frac{2\pi}{N}i\alpha_u} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi}{N}ik} |k\rangle\langle k|, \;\; V_N := e^{\frac{2\pi}{N}i\alpha_v} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle\langle k-1| \tag{7.1}$$

juntamente com a identificação $|j\rangle = |j \bmod N\rangle$. Tais operadores são unitários e temos

$$U_N|l\rangle = e^{\frac{2\pi}{N}i(\alpha_u+l)}|l\rangle, \;\; V_N|l\rangle = e^{\frac{2\pi}{N}i\alpha_v}|l+1\rangle \tag{7.2}$$

Definindo $n := (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, temos que U_N e V_N satisfazem as **relações de Weyl discretas**:

$$U_N^{n_1} V_N^{n_2} = e^{\frac{2\pi}{N}in_1n_2} V_N^{n_1} U_N^{n_2} \tag{7.3}$$

Ainda, inspirados no caso contínuo, definimos os **operadores de Weyl discretos**:

$$W_N(n) := e^{-i\frac{\pi}{N}n_1n_2} U_N^{n_1} V_N^{n_2} \tag{7.4}$$

Tais operadores satisfazem

$$W_N^\dagger(n) = W(-n) \tag{7.5}$$

e

$$W_N(n)W_N(m) = e^{i\frac{\pi}{N}\sigma(n,m)} W_N(n+m) \tag{7.6}$$

onde $\sigma(n,m) := n_1m_2 - n_2m_1$.

Quando normalizados, os operadores de Weyl discretos formam uma base ortonormal para $M_N(\mathbb{C})$. De fato, usando (7.2) e (7.4), temos

$$tr(W_N(n)) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i\frac{\pi}{N}n_1n_2}\langle l|U_N^{n_1}V_N^{n_2}|l\rangle$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i\frac{\pi}{N}(n_1n_2+2n_1(\alpha_u+l)-2n_2\alpha_v)}\langle l|l+n_2\rangle$$

$$= \delta_{n_2,0}\sum_{l=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i n_1}{N}(\alpha_u+l)} = N\delta_{n,0} \tag{7.7}$$

Isso nos permite obter

$$tr(W_N^\dagger(n)W_N(m)) = N\delta_{n,m} \tag{7.8}$$

e portanto para todo $A \in M_N(\mathbb{C})$,

$$A = \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}_N^2} tr\Big(W_N^\dagger(n)A\Big)W_N(n) \tag{7.9}$$

onde $\mathbb{Z}_N^2 := \{n = (n_1, n_2) : 0 \leq n_i \leq N-1\}$.

$\diamondsuit$

7.2 Introdução à função de Wigner

Esta seção segue partes de [31]. Estamos interessados em obter uma outra forma de representar a função de onda $\Psi(x)$. Tal forma será a função de Wigner, que será dependente de duas variáveis, momento e posição. Para se entender tal objeto, será importante estudar a estrutura de espaços de fase.

A função de Wigner consiste de uma maneira especial de descrever operadores densidade. A princípio, podemos dizer que o operador densidade é uma estrutura mais fundamental do que a sua representação de Wigner. Por exemplo, a representação de Wigner é incapaz de descrever os operadores densidade correspondentes a sistemas de dois níveis. Entretanto, devido a sua simplicidade, veremos que compreender a distribuição de Wigner nos fornece maneiras de se entender melhor certos aspectos dos operadores densidade.

Definição Dada uma função de onda $\Psi(x)$, a **função distribuição de Wigner** é

$$W(q,p) := \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isp/\hbar}\langle q - \frac{s}{2}|\Psi\rangle\langle\Psi|q + \frac{s}{2}\rangle ds \tag{7.10}$$

onde acima, estamos usando a notação de Dirac

$$\langle q - \frac{s}{2}|\Psi\rangle = \Psi(q - \frac{s}{2}) \tag{7.11}$$

$$\langle\Psi|q + \frac{s}{2}\rangle = \Psi^*(q + \frac{s}{2}) \tag{7.12}$$

Defina a mudança de coordenadas

$$x = q + \frac{s}{2},\ \ x' = q - \frac{s}{2} \tag{7.13}$$

e então obtemos

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}\langle x'|\Psi\rangle\langle\Psi|x\rangle ds \tag{7.14}$$

Ou seja, a distribuição de Wigner é obtida ao se calcular o produto $\Psi(x')\Psi^*(x)$ e depois aplicando a transformada de Fourier em $s = x - x'$. Tal distribuição tem as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q,p)dp = \langle q|\Psi\rangle\langle\Psi|q\rangle = |\Psi(q)|^2 \tag{7.15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q,p)dq = \langle p|\Psi\rangle\langle\Psi|p\rangle = |\tilde{\Psi}(p)|^2 \tag{7.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(q,p)dpdq = 1 \tag{7.17}$$

onde $\tilde{\Psi}$ é a representação de momento da função de onda Ψ.

Agora, note que (7.14) pode ser escrito como

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}\langle x'(|\Psi\rangle\langle\Psi|)x\rangle ds = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}\langle x'|\rho|x\rangle ds \tag{7.18}$$

onde

$$x = q + \frac{s}{2},\ \ x' = q - \frac{s}{2} \tag{7.19}$$

onde definimos o operador densidade de estados puros por

$$\rho := |\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{7.20}$$

A definição mais geral de ρ inclui os estados puros e os misturados:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \tag{7.21}$$

onde $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. Tal equação descreve ρ como uma superposição incoerente de operadores densidade de estados puros $|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$, onde Ψ_i é uma função de onda, mas não necessariamente um autoestado de energia. Na equação (7.21) os p_i denotam as probabilidades de se encontrar o sistema no estado $|\Psi_i\rangle$.

Portanto, além da interpretação probabilística usual para se encontrar a partícula descrita por uma certa função de onda em uma certa posição, temos também uma distribuição de probabilidade de que tal partícula se encontre em estados distintos.

$\lozenge$

Denote por $\langle A\rangle_t$ o valor esperado de um observável A correspondendo a um operador $\hat{A}$. Então

$$\langle A\rangle_t = \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle = tr(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\hat{A}) = tr(\rho\hat{A}) \tag{7.22}$$

Logo,

$$\langle A\rangle_t = tr(\rho\hat{A}) \tag{7.23}$$

Observe que a expressão acima é o análogo da expressão de mecânica clássica para a média de um observável $A(p,q)$ com respeito a uma densidade clássica $\rho(p,q)$, ou seja

$$\langle A\rangle_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(p,q)\rho(p,q)dpdq \tag{7.24}$$

Ou seja, em mecânica quântica o operador traço faz o papel de uma integração sobre p e q em mecânica clássica.

$\lozenge$

7.3 Função de Wigner discreta

Esta seção segue partes de [25] e [34]. Em dimensão 1, a **função de Wigner, caso contínuo**, está em correspondência 1-1 com uma matriz densidade ρ e é definida por

$$W(q,p) := \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda p/\hbar}\langle q - \frac{\lambda}{2}|\rho|q + \frac{\lambda}{2}\rangle d\lambda \tag{7.25}$$

Tal função é determinada de forma única pelas seguintes propriedades [25],[34]:

1. $W(q,p) \in \mathbb{R}$

2. O produto interno entre dois estados ρ_1 e ρ_2 pode ser computado a partir da função de Wigner da seguinte forma:

$$tr(\rho_1\rho_2) = 2\pi\hbar \int W_1(q,p)W_2(q,p)dqdp \tag{7.26}$$

3. (Propriedade de projeção) A integral ao longo de uma linha no espaço de fase, descrita pela equação $a_1q + a_2p = a_3$, é a densidade de probabilidade de que a medição do observável $a_1\hat{Q} + a_2\hat{P}$ tenha a_3 como resultado.

Observação A propriedade de projeção enunciada acima nos diz, em outras palavras, que a projeção da função de Wigner ao longo de qualquer direção do espaço de fase é igual à distribuição de probabilidade de um certo observável, $a_1q + a_2p$, associado com aquela direção. Dois casos especiais desta propriedade são bem conhecidos:

$$\int W(q,p)dq \tag{7.27}$$

é a distribuição de probabilidade para o momento, e

$$\int W(q,p)dp \tag{7.28}$$

é a distribuição de probabilidade para a posição. Entretanto a propriedade 3 é mais forte do que apenas esses dois casos particulares. Sobre a validade de tais propriedades para a função de Wigner, ver [34].

◊

Podemos escrever W como o valor esperado de um certo operador, chamado **operador de Fano**, de modo que

$$W(q,p) = tr(\rho\hat{A}(q,p)) \tag{7.29}$$

onde $\hat{A}$ pode ser escrito como

$$\hat{A}(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int exp\Big[-\frac{\lambda}{\hbar}(\hat{P}-p) + i\frac{\lambda'}{\hbar}(\hat{Q}-q)\Big]d\lambda d\lambda' \tag{7.30}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \hat{D}(\lambda,\lambda')exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(\lambda' q - \lambda p)\Big]d\lambda d\lambda' \tag{7.31}$$

onde

$$\hat{D}(\lambda,\lambda') := exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(\lambda\hat{P} - \lambda'\hat{Q})\Big] \tag{7.32}$$

Ainda, podemos reescrever $\hat{A}$ como

$$\hat{A}(q,p) = \frac{1}{\pi\hbar}\hat{D}(q,p)\hat{R}\hat{D}^*(q,p) \tag{7.33}$$

onde $\hat{R}$ é o operador que age em autoestados de posição de modo que $\hat{R}|x\rangle = |-x\rangle$.

A prova de que a função W definida acima satisfaz as propriedades de unicidade 1 a 3 segue de propriedades simples do espaço de fase. O fato de que $W(q,p) \in \mathbb{R}$ é consequência de $\hat{A}(q,p)$ ser hermitiano. A propriedade 2 segue da relação de completude de $\hat{A}(q,p)$. De fato, é possível mostrar que tais operadores satisfazem a relação

$$tr\Big(\hat{A}(q,p)\hat{A}(q',p')\Big) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta(q-q')\delta(p-p') \tag{7.34}$$

Como consequência disso, é possível inverter a equação (7.29) e expressar o operador densidade como uma combinação linear dos operadores de Fano. A função de Wigner determina os coeficientes de tal expansão:

$$\rho = 2\pi\hbar\int W(q,p)\hat{A}(q,p)dqdp \tag{7.35}$$

A propriedade 2 segue da fórmula acima. Quanto a propriedade 3, observe que integrar $\hat{A}(q,p)$ ao longo de uma linha no espaço de fase fornece um operador projeção. Logo,

$$\int \delta(a_1 q + a_2 p - a_3)\hat{A}(q,p)dqdp = |a_3\rangle\langle a_3| \tag{7.36}$$

onde $|a_3\rangle$ é um autoestado do operador $a_1\hat{Q} + a_2\hat{P}$ com autovalor a_3. Tal identidade pode ser provada ao se escrever a função delta como a integral de uma exponencial e então realizando a integração no espaço de fase. Depois faremos a prova do caso discreto, de forma semelhante a que acabamos de descrever.

$\diamondsuit$

Agora estamos interessados em definir a função de Wigner no caso discreto. Primeiro faremos algumas observações preliminares. O primeiro passo é definir um espaço de fases discreto. Iremos considerar um espaço de Hilbert de dimensão N. Considere uma base

$$B_x = \{|n\rangle, n = 0, \ldots, N-1\},$$

que será uma **base de posições discretas**. Iremos impor a condição de contorno periódica $|n+N\rangle = |n\rangle$, para todo n. Agora, queremos definir uma base de momentos conjugados, que denotaremos por

$$B_p = \{|k\rangle, k = 0, \ldots, N-1\}$$

Uma maneira natural de introduzir a base de momentos a partir da base de posições é através da **transformada de Fourier discreta**. Então podemos obter os estados de B_p a partir dos estados de B_x da seguinte forma:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \exp[2\pi i n k/N] |n\rangle \tag{7.37}$$

Portanto, assim como no caso contínuo, posição e momento estão relacionados pela transformada de Fourier.

Observação Podemos relacionar a dimensão do espaço de Hilbert com a constante de Planck da seguinte forma. Estamos considerando que o espaço de fase possui uma área finita, que podemos supor igual a 1. Nessa área podemos comportar N estados ortogonais. Se cada estado ocupar uma área do espaço de fase que é igual a $2\pi\hbar$, temos que $N = 1/2\pi\hbar$. Em outras palavras, N faz o papel do inverso da constante de Planck, e o limite para N tendendo ao infinito pode ser visto como o limite semiclássico [25].

$\diamondsuit$

Dadas as bases de posição e momento, podemos definir os seus respectivos operadores de deslocamento. Para sistemas discretos podemos definir operadores de translação finitos, $\hat{U}$ e $\hat{V}$, de forma semelhante ao que temos em (7.1) e (7.2) na seção 7.1:

$$\hat{U}^m|n\rangle := |n+m\rangle, \;\; \hat{U}^m|k\rangle := \exp[-2\pi imk/N]|k\rangle \tag{7.38}$$

onde as somas de vetores é mod N. De forma semelhante, o operador $\hat{V}$ é um shift na base de momentos e é diagonal na de posições

$$\hat{V}^m|k\rangle := |k+m\rangle, \;\; \hat{V}^m|n\rangle := \exp[2\pi imn/N]|n\rangle \tag{7.39}$$

Então é possível mostrar que

$$\hat{V}^p\hat{U}^q = e^{2\frac{\pi}{N}ipq}\hat{U}^q\hat{V}^p, \tag{7.40}$$

as relações de Weyl discretas (7.3), vistas na seção 7.1. Vamos também definir um operador de reflexão como sendo $\hat{R}|n\rangle := |-n\rangle$. Vale a seguinte relação

$$\hat{U}\hat{R} = \hat{R}\hat{U}^{-1}, \;\; \hat{V}\hat{R} = \hat{R}\hat{V}^{-1} \tag{7.41}$$

O operador de reflexão está relacionado com a transformada de Fourier da seguinte forma. Denote por U_{FT} o operador que realiza a transformada de Fourier discreta, ou seja, o operador cujas entradas na base B_x são

$$\langle n'|U_{FT}|n\rangle = \exp[2\pi inn'/N] \tag{7.42}$$

Então vale que

$$\hat{R} = U_{FT}^2 \tag{7.43}$$

Observação O uso da transformada de Fourier discreta (DFT) para relacionar posição e momento implica que temos condições de contorno periódicas em ambas as variáveis, e portanto temos a geometria de um toro sobre o espaço de fase. Não somos obrigados a considerar a transformada, mas a escolha do toro como a geometria preferida para os problemas que nos interessam também se deve ao fato de que a DFT é bastante usada no estudo de algoritmos quânticos [25].

$\Diamond$

Para definir a função de Wigner discreta, precisamos ainda definir um **operador de translação** $\hat{T}$ e um operador pontual $\hat{A}$ (correspondente ao operador de Fano definido no caso contínuo). Isso é o que faremos a seguir.

Defina

$$\hat{T}(q,p) := \hat{U}^q \hat{V}^p \exp[i\pi qp/N] \tag{7.44}$$

Tais operadores satisfazem

$$\hat{T}(\lambda q, \lambda p) = \hat{T}^\lambda(q,p) \tag{7.45}$$

Observação Em $\mathbb{R}^2$ definimos o operador de translação na posição q e momento p como sendo

$$\hat{T}(q,p) = e^{-\frac{i}{\hbar}(q\hat{P}-p\hat{Q})} \tag{7.46}$$

Ao invés das definições (7.38) e (7.39) para $\hat{U}$ e $\hat{V}$ poderíamos, a princípio, definir $\hat{U}$ e $\hat{V}$ como sendo a exponencial de dois operadores $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ definidos como sendo diagonais em B_x e B_p. No entanto, operadores $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ infinitesimais que satisfazem as relações de comutatividade canônicas (CCR) não podem ser definidos em um espaço de Hilbert discreto [10],[34]. Portanto iremos usar os shift cíclicos finitos, dados por (7.38) e (7.39).

$\Diamond$

Seja $\alpha = (q,p)$ ponto do espaço de fase reticulado, com q e p assumindo valores entre 0 e $2N-1$. Defina

$$\hat{A}(\alpha) := \frac{1}{(2N)^2}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{2N-1}\hat{T}(\lambda,\lambda')\exp\Big[-2\pi i\frac{(\lambda' q-\lambda p)}{2N}\Big] = \frac{1}{2N}\hat{U}^q\hat{R}\hat{V}^{-p}e^{i\pi pq/N} \tag{7.47}$$

Podemos expressar o operador de translação em termos de $\hat{A}(\alpha)$ ao inverter a definição acima, e então obtemos a transformada de Fourier de $\hat{A}$:

$$\tilde{T}(n,k) = \sum_{q,p=0}^{2N-1}\hat{A}(q,p)\exp[-i\frac{2\pi}{2N}(np-kq)] \tag{7.48}$$

Note que como definimos os operadores de Fano acima sobre um reticulado de $2N\times 2N$ pontos, temos um total de $4N^2$ operadores. Entretanto, tal conjunto não é independente. De fato, é possível mostrar que apenas N^2 deles o são, pois

$$\hat{A}(q+\sigma_q N, p+\sigma_p N) = \hat{A}(q,p)(-1)^{\sigma_p q+\sigma_q p+\sigma_q\sigma_p N} \tag{7.49}$$

para $\sigma_q, \sigma_p = 0, 1$. Defina

$$G_N := \{\alpha = (q,p) : 0 \le q,p \le N-1\}$$

E o conjunto G_{2N} irá denotar o reticulado completo de ordem $2N$.

Uma relação entre $\hat{A}$ e $\hat{T}$ é a seguinte:

$$\hat{A}(\alpha)\hat{A}(\alpha') = \hat{T}(\alpha - \alpha')\frac{\exp[i(\pi/N)(q_\alpha p_{\alpha'} - q_{\alpha'} p_\alpha)]}{4N^2} \tag{7.50}$$

Tomando o traço da equação acima obtemos

$$tr(\hat{A}(\alpha)\hat{A}(\alpha')) = \frac{1}{4N}\delta_N(q' - q)\delta_N(p' - p) \tag{7.51}$$

onde α e α' estão em G_N e

$$\delta_N(q) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi iqn/N} \tag{7.52}$$

é a delta de Dirac periódica, que é igual a zero a menos que $q \equiv 0 \mod N$.

Definição A **função de Wigner discreta** é

$$W(\alpha) := tr(\hat{A}(\alpha)\rho) \tag{7.53}$$

onde $\alpha \in G_{2N}$. Esses $4N^2$ valores não são independentes, pois a função de Wigner obedece a mesma relação satisfeita pela função pontual $\hat{A}$:

$$\hat{W}(q + \sigma_q N, p + \sigma_p N) = \hat{W}(q, p)(-1)^{\sigma_p q + \sigma_q p + \sigma_q \sigma_p N} \tag{7.54}$$

para $\sigma_q, \sigma_p = 0, 1$. Como os operadores $\hat{A}(\alpha)$ formam um conjunto completo, podemos escrever o operador densidade como uma combinação linear dos $\hat{A}(\alpha)$. Podemos ver que a função de Wigner $W(\alpha)$ fornece os coeficientes de tal expansão. Portanto, é possível mostrar que

$$\rho = 4N\sum_{\alpha\in G_N} W(\alpha)\hat{A}(\alpha) = N\sum_{\tilde{\alpha}\in G_{2N}} W(\tilde{\alpha})\hat{A}(\tilde{\alpha}) \tag{7.55}$$

Observação É possível mostrar que a função de Wigner discreta definida acima satisfaz as propriedades de unicidade 1 a 3, enunciadas no início desta seção. A propriedade 1 é consequência do fato de que $\hat{A}(q, p)$ são hermitianos. A propriedade 2 segue da completude do conjunto $\hat{A}(\alpha)$, o que nos permite mostrar que

$$tr(\rho_1\rho_2) = N\sum_{\alpha\in G_{2N}} W_1(\alpha)W_2(\alpha) \tag{7.56}$$

A prova da terceira propriedade requer uma análise do reticulado G_N e referimos o leitor à seção 7.6 deste capítulo para mais detalhes.

$\diamondsuit$

Um resumo Definimos a função de Wigner discreta para sistemas sobre um espaço de Hilbert de dimensão $N < \infty$ qualquer. A função de Wigner é definida como sendo o valor esperado do operador $\hat{A}(\alpha)$ definido sobre o espaço de fase, dado pela equação (7.47). A definição é tal que $W(\alpha) \in \mathbb{R}$. Tal definição pode ser usada para calcular o produto interno entre estados e fornece as distribuições marginais corretas quando somadas ao longo de qualquer linha no espaço de fase que, por sua vez, é um reticulado G_{2N} com $4N^2$ pontos. Ainda, os valores de $W(\alpha)$ no subreticulado G_N são suficientes para reconstruir o espaço de fase, uma vez que o conjunto $\hat{A}(\alpha)$ é completo quando α pertence a G_N.

$\diamondsuit$

7.4 Calculando funções de Wigner

Para calcular a função de Wigner de um estado quântico, iremos usar (7.38), (7.39) e (7.47) para escrever W na seguinte forma conveniente:

Lema 7.4.1

$$W(q,p) = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle q-n|\rho|n\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \tag{7.57}$$

Prova Nos cálculos a seguir, lembramos que o produto interno é linear na segunda variável. Temos

$$W(q,p) = tr(A\rho) = \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]tr(U^q RV^{-p}\rho)$$

$$= \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\langle n|U^q RV^{-p}\rho|n\rangle = \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\langle U^{-q}n|RV^{-p}\rho|n\rangle$$

$$= \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\langle n-q|RV^{-p}\rho|n\rangle = \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\langle q-n|V^{-p}\rho|n\rangle$$

$$= \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\langle V^p(q-n)|\rho|n\rangle$$

$$= \frac{1}{2N}\exp[i\pi pq/N]\sum_{i=0}^{N-1}\exp[-2\pi ip(q-n)/N]\langle q-n|\rho|n\rangle$$

Ainda, note que

$$i\pi pq/N - 2\pi ip(q-n)/N = \frac{ip\pi}{N}(q-2(q-n)) = \frac{ip\pi}{N}(2n-q) = \frac{2\pi ip}{N}(n-q/2)$$

Logo,

$$W(q,p) = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle q-n|\rho|n\rangle \exp[\frac{2\pi ip}{N}(n-q/2)]$$

□

Exemplo 7.4.2 *Seja* $N = 2$, *e seja* $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ *uma superposição de estados. Sejam* $W_1(\alpha)$ *e* $W_2(\alpha)$ *as funções de Wigner para* $|0\rangle$ *e* $|1\rangle$, *respectivamente. Temos que a função de Wigner* W *para* $|\psi\rangle$ *é tal que*

$$W(\alpha) = |a|^2W_1(\alpha) + |b|^2W_2(\alpha) + 2Re\{ab^*\langle 1|A(\alpha)|0\rangle\} \tag{7.58}$$

De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} W(\alpha) = tr(A(\alpha)\rho) &= tr\Big(A(\alpha)(|a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1| + ab^*|0\rangle\langle 1| + a^*b|1\rangle\langle 0|)\Big) \\ &= |a|^2W_1(\alpha) + |b|^2W_2(\alpha) + ab^*tr(A(\alpha)|0\rangle\langle 1|) + a^*btr(A(\alpha)|1\rangle\langle 0|) \\ &= |a|^2W_1(\alpha) + |b|^2W_2(\alpha) + ab^*tr(\langle 1|A(\alpha)|0\rangle) + a^*btr(\langle 0|A(\alpha)|1\rangle) \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

♢

Vamos analisar algumas características da função de Wigner para estados puros. Neste caso temos que ρ é um operador projeção. Então expandindo ρ em termos dos operadores de espaço de fase, como na equação (7.55) e impondo a condição $\rho^2 = \rho$, obtemos

$$W(\alpha) = 4N^2\sum_{\beta,\gamma\in G_N}\Gamma(\alpha,\beta,\gamma)W(\beta)W(\gamma) \tag{7.59}$$

onde a função $\Gamma(\alpha,\beta,\gamma)$, dependente de 3 pontos do espaço de fase (i.e., de um triângulo) é dada por

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma) := tr(\hat{A}(\alpha)\hat{A}(\beta)\hat{A}(\gamma)) = \frac{1}{4N^3}\exp\Big[\frac{2\pi i}{N}S(\alpha,\beta,\gamma)\Big], \tag{7.60}$$

se 2 ou 3 dos pontos (α,β,γ) possuem coordenadas q e p pares. Caso contrário, definimos

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma) := 0, \tag{7.61}$$

e na expressão acima, válida para N par, o valor $S(\alpha, \beta, \gamma)$ é a área do triângulo formado por tais pontos do espaço de fase (medido em unidades do triângulo elementar formado por 3 pontos que estão à distância de uma posição).

$\diamondsuit$

Agora calculamos a função de Wigner de um autoestado de posição,

$$\rho_{q_0} = |q_0\rangle\langle q_0| \tag{7.62}$$

Obtemos a seguinte expressão fechada para W:

$$\begin{aligned} W_{q_0}(q,p) &= \frac{1}{2N}\langle q_0|\hat{U}^q \hat{R}\hat{V}^{-p}|q_0\rangle e^{i\pi pq/N} \\ &= \frac{1}{2N}\delta_N(q-2q_0)(-1)^{p[(q-2q_0) \bmod N]} \end{aligned} \tag{7.63}$$

De forma semelhante é possível fazer o cálculo para um autoestado de momento,

$$\rho_{k_0} = |k_0\rangle\langle k_0| \tag{7.64}$$

Podemos também analisar a função de Wigner de um estado, que é uma superposição linear:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|q_0\rangle + e^{-i\phi}|q_1\rangle) \tag{7.65}$$

Novamente é possível obter uma expressão fechada para W, que é

$$W(q,p) = \frac{1}{2}\Big(W_{q_0}(q,p) + W_{q_1}(q,p) + \Delta W_{q_0,q_1}(q,p)\Big) \tag{7.66}$$

onde o termo de interferência é

$$\Delta W_{q_0,q_1}(q,p) := \frac{1}{N}\delta_N(\tilde{q})(-1)^{\tilde{q}p}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}p + \phi\right) \tag{7.67}$$

onde

$$\tilde{q} = q_0 + q_1 - q, \;\; \lambda = \frac{2N}{q_0 - q_1} \tag{7.68}$$

Esta é uma expressão explícita para o que calculamos no exemplo 7.4.2.

$\diamondsuit$

Agora fazemos algumas considerações sobre a evolução temporal de sistemas quânticos no espaço de fase. Se U é o operador de evolução unitário que leva o estado do sistema do tempo t ao tempo $t+1$ então a matriz densidade evolui da seguinte forma

$$\rho(t+1) = U\rho(t)U^* \tag{7.69}$$

Usando tal fato é possível mostrar que a função de Wigner evolui da seguinte forma:

$$W(\alpha, t+1) = \sum_{\beta \in G_{2N}} Z_{\alpha\beta} W(\beta, t) \tag{7.70}$$

onde a matriz $Z_{\alpha\beta}$ é definida por

$$Z_{\alpha\beta} := N tr\Big(\hat{A}(\alpha) U \hat{A}(\beta) U^*\Big) \tag{7.71}$$

Portanto, a evolução temporal no espaço de fase é representada por uma transformação linear, o que é uma consequência da equação de Schrödinger. A unitariedade impõe algumas restrições sobre a matriz $Z_{\alpha\beta}$. De fato, como a pureza dos estados é preservada, a evolução temporal deve preservar a restrição dada pela equação (7.59). Portanto, a matriz deve deixar invariante a função $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$, ou seja,

$$\Gamma(\alpha', \beta', \gamma') = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} Z_{\alpha'\alpha} Z_{\beta'\beta} Z_{\gamma'\gamma} \Gamma(\alpha, \beta, \gamma) \tag{7.72}$$

A matriz real $Z_{\alpha\beta}$ contém toda a informação sobre a evolução temporal do sistema. Em geral, tal matriz relaciona um ponto α com diversos outros pontos β. Portanto, a evolução será, em geral, não local no espaço de fase, o que é uma característica única da mecânica quântica. Em sistemas clássicos o valor da função distribuição clássica $W(\alpha, t+1)$ é igual ao valor $W(\beta, t)$ para algum ponto β, o que consiste em uma função de α e t bem definida. Entretanto, temos em [25] alguns exemplos de operadores unitários que geram uma evolução dinâmica local no espaço de fase.

$\diamondsuit$

7.5 Funções de Wigner e QIFS

Considere a seguinte expressão para a função de Wigner, obtida na seção 7.4:

$$W(q,p) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle q-n|\rho|n\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N} p(n - q/2)\right] \tag{7.73}$$

Considere o operador agindo em operadores densidade

$$\Lambda(\rho) = \sum_{i=1}^{k} V_i \rho V_i^* \tag{7.74}$$

onde V_i, são lineares. Primeiramente seja $\rho_{q_0} = |q_0\rangle\langle q_0|$, onde $q_0 = 0$ ou 1. Já vimos como calcular a função de Wigner de tais estados (dada pela eq. (7.63), página 180):

$$W_{q_0}(q,p) = \frac{1}{2N}\langle q_0|\hat{U}^q \hat{R}\hat{V}^{-p}|q_0\rangle e^{i\pi pq/N} = \frac{1}{2N}\delta_N(q-2q_0)(-1)^{p[(q-2q_0) \bmod N]} \tag{7.75}$$

$\diamondsuit$

Agora considere V_i operadores lineares, $i = 1, \ldots, k$ tais que $\sum_i V_i^* V_i = I$. Então $\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^* \in \mathcal{M}_N$. Logo,

$$\begin{aligned} W_{\Lambda(\rho)}(q,p) &= \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle q-n|\Lambda(\rho)|n\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\langle q-n|V_i\rho V_i^*|n\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\langle (q-n)V_i|\rho|V_i^*(n)\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \end{aligned} \tag{7.76}$$

Escrevendo $\rho = \sum_{j=0}^{N-1}\rho_j|j\rangle\langle j|$, $\sum_j \rho_j = 1$, obtemos

$$W_{\Lambda(\rho)}(q,p) = \frac{1}{2N}\sum_{n,j=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\rho_j\langle (q-n)V_i|j\rangle\langle j|V_i^*(n)\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \tag{7.77}$$

Portanto a função de Wigner de $\Lambda(\rho)$ é obtida de forma simples a partir da função para ρ.

Observação Note que a função de Wigner é linear com respeito a soma de operadores densidade, pois

$$W_{\rho+\eta}(\alpha) = tr(A(\alpha)(\rho+\eta)) = tr(A(\alpha)\rho) + tr(A(\alpha)\eta) = W_\rho(\alpha) + W_\eta(\alpha)$$

No entanto, é claro que o fato análogo com respeito a funções de onda não é verdadeiro, pois se $\psi = a|0\rangle + b|1\rangle$ é uma função de onda então o operador induzido é

$$|\psi\rangle\langle\psi| = (a|0\rangle + b|1\rangle)(a^*\langle 0| + b^*\langle 1|) = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1| + ab^*|0\rangle\langle 1| + a^*b|1\rangle\langle 0|$$

Portanto, $W_{\psi+\phi}(\alpha) \neq W_\psi(\alpha) + W_\phi(\alpha)$. O mesmo ocorre no caso contínuo.

$\diamondsuit$

7.6 Propriedades básicas da função de Wigner discreta

Enunciamos novamente as propriedades básicas que determinam a função de Wigner [25],[34]:

1. $W(q,p) \in \mathbb{R}$

2. O produto interno entre dois estados ρ_1 e ρ_2 pode ser computado a partir da função de Wigner da seguinte forma:

$$tr(\rho_1\rho_2) = 2\pi\hbar \int W_1(q,p)W_2(q,p)dqdp \tag{7.78}$$

3. (Propriedade de projeção) A integral ao longo de uma linha no espaço de fase, descrita pela equação $a_1q + a_2p = a_3$, é a densidade de probabilidade de que a medição do observável $a_1\hat{Q} + a_2\hat{P}$ tenha a_3 como resultado.

Já vimos na seção 7.3 que a função de Wigner discreta

$$W(\alpha) = tr(\hat{A}(\alpha)\rho) \tag{7.79}$$

satisfaz as propriedades 1 e 2. Agora vamos analisar a propriedade 3. Reescrevemos aqui as definições para W. Temos que $\rho = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|$, $\sum_i p_i = 1$ é um operador densidade. Temos uma base de posições

$$B_x = \{|n\rangle, n = 0, \ldots, N-1\},$$

e uma base de momentos

$$B_p = \{|k\rangle, k = 0, \ldots, N-1\}$$

onde

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \exp[2\pi ink/N]|n\rangle \tag{7.80}$$

Ainda,

$$\hat{U}^m|n\rangle := |n+m\rangle, \;\; \hat{U}^m|k\rangle := \exp[-2\pi imk/N]|k\rangle \tag{7.81}$$

$$\hat{V}^m|k\rangle := |k+m\rangle, \;\; \hat{V}^m|n\rangle := \exp[2\pi imn/N]|n\rangle \tag{7.82}$$

$$\hat{T}(q,p) := \hat{U}^q \hat{V}^p \exp[i\pi qp/N] \tag{7.83}$$

$$\hat{R}|x\rangle = |-x\rangle \tag{7.84}$$

$$\hat{A}(\alpha) := \frac{1}{(2N)^2} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{2N-1} \hat{T}(\lambda,\lambda') \exp\Big[-2\pi i \frac{(\lambda' q - \lambda p)}{2N}\Big] = \frac{1}{2N} \hat{U}^q \hat{R} \hat{V}^{-p} e^{i\pi pq/N} \tag{7.85}$$

$$\tilde{T}(n,k) = \sum_{q,p=0}^{2N-1} \hat{A}(q,p) \exp[-i\frac{2\pi}{2N}(np - kq)] \tag{7.86}$$

Para provar a propriedade 3 devemos mostrar que ao somar os operadores $\hat{A}(q,p)$ sobre os pontos do espaço de fase que estão em uma reta L, obtemos um operador de projeção. Isso implica que somar os valores da função de Wigner sobre todos os pontos de uma reta nos fornece um número positivo, que pode ser interpretado como sendo uma probabilidade.

Iniciamos definindo retas no nosso espaço de fase. Uma reta L é um conjunto de pontos do reticulado definido por

$$L = L(n_1, n_2, n_3) = \{(q,p) \in G_{2N} : n_1 p - n_2 q = n_3, 0 \leq n_i \leq 2N-1\} \tag{7.87}$$

Ainda, dizemos que duas retas são paralelas se elas forem parametrizadas pelos mesmos inteiros n_1 e n_2.

Agora, vamos mostrar que ao somar os operadores A sobre uma reta, obtemos operadores de projeção. Estamos interessados no operador

$$\hat{A}_L = \sum_{(q,p)\in L} \hat{A}(q,p) \tag{7.88}$$

Como $\delta_N(q) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i qn/N}$, podemos reescrever tal operador como

$$\begin{aligned} A_L &= \sum_{q,p=0}^{2N-1} \hat{A}(q,p)\delta_{2N}(n_1 p - n_2 q - n_3) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\lambda=0}^{2N-1} \sum_{q,p=0}^{2N-1} \hat{A}(q,p) \exp[-i\frac{2\pi}{2N}\lambda(n_1 p - n_2 q - n_3)] \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\lambda=0}^{2N-1} \hat{T}^\lambda(n_1, n_2) \exp[i\frac{2\pi}{2N} n_3 \lambda] \end{aligned} \tag{7.89}$$

onde usamos a transformada de Fourier (7.86) de $\hat{A}$ para obter a última igualdade. Como $\hat{T}$ é unitária, possui N autovetores $|\phi_j\rangle$ com autovalores

$\exp[-2\pi i\phi_j/N]$. Além disso, tal operador é cíclico e satisfaz $\hat{T}^N = I$. Portanto, como os seus autovalores são raízes N-ésimas da unidade, os ϕ_j são inteiros. Logo, podemos reescrever (7.89) como

$$\hat{A}_L = \frac{1}{2N}\sum_{\lambda=0}^{2N-1}\sum_{j=0}^{N}\exp[-i\frac{2\pi}{2N}(2\phi_j - n_3)\lambda]|\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\delta_{2N}(2\phi_j - n_3)|\phi_j\rangle\langle\phi_j| \tag{7.90}$$

Segue que $\hat{A}_L$ é um operador de projeção sobre um subespaço gerado por um subconjunto de autovetores do operador de translação $\hat{T}(n_1, n_2)$.

$\diamondsuit$

7.7 Sobre transformada de Fourier discreta e W-transformada

Exemplo 7.7.1 *Este exemplo segue [25]. Para uma reta L_q definida por $q = n_3$ (ou seja, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$), a função de Wigner somada sobre todos os pontos de L_q é*

$$\sum_{(q,p)\in L_q} W_\rho(q,p) = \sum_p W_\rho(n_3,p) = \langle n_3/2|\rho|n_3/2\rangle \tag{7.91}$$

se n_3 for par, e igual a zero caso contrário.

$\diamondsuit$

Registramos o resultado acima na seguinte proposição:

Proposição 7.7.2 *Seja N par e ρ operador densidade. Então*

$$\sum_{p=0}^{2N-1} W_\rho(2q,p) = \langle q|\rho|q\rangle, \;\; q = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.92}$$

e

$$\sum_{p=0}^{2N-1} W_\rho(2q+1,p) = 0, \;\; q = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.93}$$

Prova Primeiramente, para ver porque o caso q ímpar implica que a função de Wigner é igual a zero, considere a expressão para W dada por

$$W_\rho(q,p) = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle q-n|\rho|n\rangle \exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] \qquad (7.94)$$

Escreva $\rho = \sum_j c_j|j\rangle\langle j|$, $c_j > 0$. Então

$$\langle q-n|\rho|n\rangle = \sum_j c_j\langle q-n|j\rangle\langle j|n\rangle \qquad (7.95)$$

e tal valor é $\neq 0$ se e somente se $j = q-n = n$ para algum j. Em particular, a fim de que o produto interno acima seja não nulo, é necessário que q seja par, pois $q-n = n$ implica $q = 2n$.

Agora suponha que $q = 2q_0$. Pela análise acima, vemos que na soma dos termos que formam a função de Wigner (expressão (7.94)), basta somar os índices tais que a equação modular

$$q-n = n \Leftrightarrow 2q_0 - n = n \qquad (7.96)$$

é satisfeita. Tal equação possui duas soluções, a saber, $n = q_0$ e $n = q_0 + N/2$ (por exemplo, se $N = 2$, e $q = 0$, as soluções de $-n = n$ são $n = 0$ e $n = 1$; se $N = 4$ e $q_0 = 0$ as soluções de $-n = n$ são $n = 0$ e $n = 2$; se $N = 4$ e $q_0 = 1$ as soluções de $2-n = n$ são $n = 1$ e $n = 1+2 = 3$, etc.).

Para ver que existem apenas duas soluções para (7.96), procedemos da seguinte forma. De $2q_0 - n = n$ obtemos $2(q_0 - n) = 0$. Sabemos que $n = 0$ e $n = q_0 + N/2$ soluções. Note que $x = 0$ e $x = N/2$ são soluções de $2x = 0$. Agora, se y é solução de $2x = 0$ então $y - N/2$ também é. Claramente se y é um elemento entre 0 e $N/2$ então $2y$ será no máximo igual a $2N-2$, portanto $2y \neq 0$. Finalmente, seja y elemento entre $N/2$ e N e por absurdo suponha que $2y = 0$. Então pelo que observamos antes, temos que $z = 2y - N/2$ também é solução, e z está entre 0 e $N/2$. Mas não existem soluções de $2x = 0$ entre 0 e $N/2$. Isso mostra que $2x = 0$ admite apenas as duas soluções dadas acima.

Agora, note que se n for igual a q_0 então

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{N}p(n-q/2)\right] = 1 \qquad (7.97)$$

Se $n = q_0 + N/2$, temos que a exponencial acima é igual a ± 1, sendo positivo ou negativo se p for par ou ímpar, respectivamente. Portanto, para N par e $q = 2q_0$, temos

$$W_\rho(2q_0, p) = \frac{1}{2N}(\langle q_0|\rho|q_0\rangle \pm \langle q_0 + N/2|\rho|q_0 + N/2\rangle) \tag{7.98}$$

onde o sinal $\pm$ depende de p. Para q fixo e considerando todos os p possíveis ($p = 0, \ldots, 2N-1$), temos que o segundo produto interno acima terá sinal positivo nas N possibilidades em que p for par e terá sinal negativo nas N possibilidades restantes. Portanto,

$$\sum_p W_\rho(2q_0, p) = \langle q_0|\rho|q_0\rangle \tag{7.99}$$

Isso conclui a prova.

□

Corolário 7.7.3 *Se q é ímpar então $W_\rho(q, p) = 0$, para qualquer p e qualquer ρ operador densidade.*

Prova Ver primeiro parágrafo da demonstração do lema.

□

Definição Seja ψ um estado. A **W-transformada** de ψ é

$$\phi(p) := \sum_{q=0}^{2N-1} W_\psi(q, 2p) \tag{7.100}$$

para $p = 0, \ldots, 2N-1$.

Seja ϕ a W-transformada de ψ, e seja $\mathcal{F}\psi$ a transformada de Fourier discreta de ψ.

Pergunta:

$$|(\mathcal{F}\psi)(p)|^2 \stackrel{?}{=} \phi(p), \ \ p = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.101}$$

Resposta Para $N = 2$ e $\psi = |0\rangle$ ou $|1\rangle$, a resposta é sim. Com efeito, seja $|\psi\rangle = |0\rangle = (1, 0)$. Então

$$\mathcal{F}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \exp\left[2\pi i j 0/2\right]|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}|0\rangle)(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |(\mathcal{F}|0\rangle)(0)|^2 = \frac{1}{2}$$

E

$$\phi(0) = \sum_q W_{|0\rangle}(q,0) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$$

Ainda

$$(\mathcal{F}|0\rangle)(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |(\mathcal{F}|0\rangle)(1)|^2 = \frac{1}{2}$$

E

$$\phi(1) = \sum_q W_{|0\rangle}(q,2) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$$

Portanto, neste caso,

$$|(\mathcal{F}\psi)(p)|^2 = \phi(p), \;\; p = 0,1 \tag{7.102}$$

Agora seja $|\psi\rangle = |1\rangle = (0,1)$. Então

$$\mathcal{F}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \exp[2\pi i j/2]|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \exp[2\pi i/2]|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}|1\rangle)(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |(\mathcal{F}|0\rangle)(0)|^2 = \frac{1}{2}$$

E

$$\phi(0) = \sum_q W_{|1\rangle}(q,0) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$$

Ainda,

$$(\mathcal{F}|1\rangle)(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |(\mathcal{F}|0\rangle)(0)|^2 = \frac{1}{2}$$

E

$$\phi(1) = \sum_q W_{|1\rangle}(q,2) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$$

Portanto, neste caso,

$$|(\mathcal{F}\psi)(p)|^2 = \phi(p), \;\; p = 0,1 \tag{7.103}$$

Vamos ver um exemplo em que o estado considerado é misturado. Seja $\psi = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$. Então

$$\mathcal{F}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{F}|0\rangle + \mathcal{F}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\Big] = |0\rangle \tag{7.104}$$

Então $|(\mathcal{F}\psi)(0)|^2 = 1$ e $|(\mathcal{F}\psi)(1)|^2 = 0$. Agora vamos calcular $\phi(p)$, $p = 0, 1$. Por definição, temos $\phi(p) = \sum_q W_\psi(q, 2p)$. Podemos usar a expressão (7.66):

$$W_\psi(q,0) = \frac{1}{2}\Big(W_{|0\rangle}(q,0) + W_{|1\rangle}(q,0) + \Delta_{0,1}(q,0)\Big) \tag{7.105}$$

$$W_\psi(q,2) = \frac{1}{2}\Big(W_{|0\rangle}(q,2) + W_{|1\rangle}(q,2) + \Delta_{0,1}(q,2)\Big) \tag{7.106}$$

Então

$$W_\psi(0,0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0) = \frac{1}{4}$$
$$W_\psi(1,0) = \frac{1}{2}(0 + 0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$
$$W_\psi(2,0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0) = \frac{1}{4}$$
$$W_\psi(3,0) = \frac{1}{2}(0 + 0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

o que implica $\phi(0) = 1 = |(\mathcal{F}\psi)(0)|^2$. Analogamente,

$$W_\psi(0,2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0) = \frac{1}{4}$$
$$W_\psi(1,2) = \frac{1}{2}(0 + 0 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$
$$W_\psi(2,2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0) = \frac{1}{4}$$
$$W_\psi(3,2) = \frac{1}{2}(0 + 0 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

o que implica $\phi(1) = 0 = |(\mathcal{F}\psi)(1)|^2$.

$\Diamond$

Inspirados no cálculo acima, provamos o seguinte lema, cuja prova abaixo vale para estados puros apenas. Depois, provaremos o resultado para operadores densidade quaisquer.

Lema 7.7.4 *Seja $\psi = |m\rangle \in \{|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle\}$, N par, e ϕ a W-transformada de ψ. Então*

$$|(\mathcal{F}\psi)(p)|^2 = \phi(p), \;\; p = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.107}$$

Prova Temos

$$\mathcal{F}|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[2\pi i j m/N\right]|j\rangle$$

Logo,

$$(\mathcal{F}|m\rangle)(p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left[2\pi i p m/N\right] \Rightarrow |(\mathcal{F}|m\rangle)(p)|^2 = \frac{1}{N}$$

Vamos calcular $\phi(p) = \sum_{q=0}^{2N-1} W_{|m\rangle}(q, 2p)$. Pelo corolário 7.7.3, basta somar os q pares. Então $\phi(p) = \sum_{q=0}^{N-1} W_{|m\rangle}(2q, 2p)$. Pela proposição 7.7.2 obtemos, usando a expressão (7.98), que

$$W_\rho(2q_0, p) = \frac{1}{2N}(\langle q_0|\rho|q_0\rangle + \langle q_0 + N/2|\rho|q_0 + N/2\rangle) \tag{7.108}$$

onde o sinal do segundo produto interno é positivo porque $2p$ é par. Agora, observe que apenas um dos dois produtos internos pode ser não nulo, pois ρ é por hipótese um estado puro. Mais ainda, ρ puro implica que tais produtos internos são iguais a 1. Finalmente, como q varia entre 0 e $2N-1$ temos exatamente dois termos não nulos na soma de $\phi(p)$ a saber, os termos correspondentes a m e $m + N/2$. Logo,

$$\phi(p) = 1/2N + 1/2N = 1/N = |(\mathcal{F}|m\rangle)(p)|^2$$

Isso conclui a prova.

$\square$

O seguinte resultado, inspirado no anterior, completa a proposição 7.7.2, que relaciona a função de Wigner discreta e a base de posições. Agora fazemos a prova referente a base de momentos.

Proposição 7.7.5 *Seja N par e ρ operador densidade. Seja $|p\rangle$ vetor da base de momentos, ou seja, obtida via transformada de Fourier discreta a partir da base de posições:*

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[2\pi i j p/N\right]|j\rangle \tag{7.109}$$

Então

$$\sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q, 2p) = \langle p|\rho|p\rangle, \;\; p = 0, 1, \ldots N-1 \tag{7.110}$$

$$\sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q, 2p+1) = 0, \;\; p = 0, 1, \ldots N-1 \tag{7.111}$$

Prova Vamos calcular $\phi(p) = \sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q,2p)$. Pelo corolário 7.7.3, basta somar os q pares. Então $\phi(p) = \sum_{q=0}^{N-1} W_\rho(2q,2p)$. Pela proposição 7.7.2 obtemos, usando a expressão (7.98), que

$$W_\rho(2q,2p) = \frac{1}{2N}(\langle q|\rho|q\rangle + \langle q+N/2|\rho|q+N/2\rangle) \tag{7.112}$$

onde o sinal do segundo produto interno é positivo porque $2p$ é par. Escreva $\rho = \sum_i c_i |i\rangle\langle i|$. Tome, por exemplo, $q = 0$. Então

$$W_\rho(0,2p) = \frac{1}{2N}(\langle 0|\rho|0\rangle + \langle 0+N/2|\rho|0+N/2\rangle)$$

$$= \frac{1}{2N}(\sum_i c_i \langle 0|i\rangle\langle i|0\rangle + \langle N/2|i\rangle\langle i|N/2\rangle) = \frac{1}{2N}(c_0 + c_{N/2}) \tag{7.113}$$

Como sabemos, $W_\rho(1,2p) = 0$. Tomando $q = 2$ obtemos

$$W_\rho(2,2p) = \frac{1}{2N}(c_1 + c_{N/2+1}) \tag{7.114}$$

e assim por diante (notando que sempre temos zeros quando q é ímpar). Desta forma, somamos todos os coeficientes c_i duas vezes (pois q varia entre 0 e $2N-1$) e obtemos que

$$\phi(p) = \sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q,2p) = \frac{1}{N}(c_0 + c_1 + \cdots + c_{2N-1}) = \frac{1}{N} \tag{7.115}$$

Pelo cálculo acima, resta calcular $\langle p|\rho|p\rangle$ e mostrar que tal número é igual a $1/N$. Com efeito, lembrando que o produto interno é linear na segunda variável, temos, escrevendo $\rho = \sum_m c_m |m\rangle\langle m|$:

$$\langle p|\rho|p\rangle = \sum_m c_m \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp[-2\pi ijp/N] \sum_{l=0}^{N-1} \exp[2\pi ilp/N]\langle j|m\rangle\langle m|l\rangle$$

$$= \sum_m c_m \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp[-2\pi ijp/N] \exp[2\pi imp/N]\langle j|m\rangle = \frac{1}{N}\sum_m c_m = \frac{1}{N} \tag{7.116}$$

□

Conclusão Pelas proposições 7.7.2 e 7.7.5 temos para a transformada de Wigner discreta que se N é par e ρ é operador densidade então

$$\sum_{p=0}^{2N-1} W_\rho(2q,p) = \langle q|\rho|q\rangle, \quad \sum_{p=0}^{2N-1} W_\rho(2q+1,p) = 0, \;\; q = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.117}$$

e se

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[2\pi i jp/N\right] |j\rangle \tag{7.118}$$

então

$$\sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q,2p) = \langle p|\rho|p\rangle, \quad \sum_{q=0}^{2N-1} W_\rho(q,2p+1) = 0, \;\; p = 0,1,\ldots N-1 \tag{7.119}$$

Tais expressões são os análogos discretos do resultado para a função de Wigner, caso contínuo, que relaciona as marginais com a transformada de Fourier $\mathcal{F}$: se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ então

$$\int W_\rho(q,p)dp = |\psi(q)|^2, \quad \int W_\rho(q,p)dq = |\mathcal{F}\psi(p)|^2 \tag{7.120}$$

Ver [11] para mais detalhes.

$\diamondsuit$

Exemplo 7.7.6 *Denote por $\mathcal{W}_\rho$ a matriz com entradas $W_\rho(q,p)$ para $q,p = 0,\ldots,2N-1$. Por exemplo para $N=2$, e escrevendo os vetores $|0\rangle$, $|1\rangle$ em coordenadas ou seja, $|0\rangle = (1,0)$ e $|1\rangle = (0,1)$, temos que $\mathcal{W}_\rho$ contem a imagem da função de Wigner para cada ponto do espaço de fase. Como era de se esperar, a função é real em cada ponto e a integral do espaço é igual a 1:*

$$\mathcal{W}_{|0\rangle\langle 0|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}_{|1\rangle\langle 1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.121}$$

Podemos usar as proposições anteriores para verificar o valor das marginais. Por exemplo, pela proposição 7.7.2 verificamos que para $\rho = |0\rangle\langle 0|$, vale que $\sum_p W(q,p)$ é igual a 1, 0, 0 e 0, para $q = 0,1,2,3$, respectivamente. Pela proposição 7.7.5, calculamos as somas $\sum_q W(q,p)$, para $p = 0,1,2,3$, e por uma inspeção simples na matriz $\mathcal{W}$ acima, tais valores devem ser iguais a

1/2, 0, 1/2 e 0, respectivamente. Com efeito, exibimos tal cálculo a seguir. Seja $\rho = |0\rangle\langle 0|$. *Então por (7.110) e (7.111), temos que as somas* $\sum_q W(q,p)$ *para* $p = 0,1,2,3$ *são iguais a* $\langle 0|\rho|0\rangle$, 0, $\langle 1|\rho|1\rangle$ *e* 0. *Mostremos que*

$$\langle 0|\rho|0\rangle = \langle 1|\rho|1\rangle = 1/2$$

Por (7.109), temos que

$$\mathcal{F}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \ \ \mathcal{F}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{7.122}$$

Então

$$\langle 0|\rho|0\rangle = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle + |1\rangle, (|0\rangle\langle 0|)(|0\rangle + |1\rangle)\Big) = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle + |1\rangle, |0\rangle\Big) = \frac{1}{2}$$

Analogamente,

$$\langle 1|\rho|1\rangle = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle - |1\rangle, (|0\rangle\langle 0|)(|0\rangle - |1\rangle)\Big) = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle - |1\rangle, |0\rangle\Big) = \frac{1}{2}$$

Isso confirma o que esperávamos e conclui o exemplo.

$\Diamond$

Exemplo 7.7.7 *Denote por* $\mathcal{W}_\rho$ *a matriz com entradas* $W_\rho(q,p)$ *para* $q,p = 0,\ldots,2N-1$. *Seja* $N = 4$, *e escrevendo os vetores* $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ *em coordenadas ou seja,* $|0\rangle = (1,0,0,0)$, $|1\rangle = (0,1,0,0)$, $|2\rangle = (0,0,1,0)$, $|3\rangle = (0,0,0,1)$, *temos que* $\mathcal{W}_\rho$ *contem a imagem da função de Wigner para cada ponto do espaço de fase:*

$$\mathcal{W}_{|0\rangle\langle 0|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{W}_{|1\rangle\langle 1|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{W}_{|2\rangle\langle 2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{W}_{|3\rangle\langle 3|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Observação 1 O que ocorre em geral para estados puros: a função de Wigner $W_{|q_0\rangle\langle q_0|}$ é zero exceto em duas faixas localizadas em $q \equiv 2(modN)$. Quando $q = 2q_0$, W toma o valor $1/2N$, e quando $q = 2q_0 \pm N$ assume o valor $1/2N$ para valores pares de p e $-1/2N$ para valores ímpares. Tais oscilações são típicas de franjas de interferência e podem ser interpretadas como surgindo da interferência entre a faixa $q = 2q_0$ e uma imagem espelhada formada a uma distância de $2N$ de $2q_0$, induzida pelas condições de contorno periódicas [25].

Observação 2 O fato de que a função de Wigner assume valores negativos na faixa de interferência é essencial para se poder recuperar as distribuições marginais corretas. Somar os valores de $W(q,p)$ ao longo de uma reta vertical fornece a probabilidade de se medir $q/2$, que deve ser igual a 1 se $q = 2q_0$, e igual a zero, caso contrário. Um cálculo semelhante pode ser feito para um autoestado de momento $\rho = |k\rangle\langle k|$. O resultado é semelhante, exceto que desta vez as faixas serão horizontais [25].

$\diamondsuit$

7.8 Transformadas discretas e canais quânticos

Lema 7.8.1 *Defina* $\Lambda : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$, $\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$, *com* V_i *lineares,* $\sum_i V_i^* V_i = I$ *e seja* $W_{\Lambda(\rho)}$ *a função de Wigner discreta associada. Então* *dados (q,p) existem $M_i = M_i(q,p)$ tais que*

$$W_{\Lambda(\rho)}(q,p) = \sum_i tr(M_i \rho M_i^*) \tag{7.123}$$

Prova Primeiro, como $A(q,p)$ é hermitiano, temos uma decomposição

$$A = UDU^{-1}$$

onde U é unitária e D é diagonal (e real). Então

$$A^{1/2} = UD^{1/2}U^{-1}$$

onde $(A^{1/2})^2 = A$, $D^{1/2}$ é a matriz diagonal cujas entradas são as raízes quadradas positivas das entradas de D. Então

$$W_{\Lambda(\rho)}(q,p) = tr(\hat{A}(q,p)\Lambda(\rho)) = tr(\hat{A}\sum_i V_i \rho V_i^*) = \sum_i tr(\hat{A} V_i \rho V_i^*)$$

$$= \sum_i tr(A^{1/2} V_i \rho V_i^* A^{1/2}) = \sum_i tr(UD^{1/2}U^{-1} V_i \rho V_i^* UD^{1/2}U^{-1}) \tag{7.124}$$

Definindo $M_i = UD^{1/2}U^{-1}V_i$ e notando que $U^{-1} = U^*$, podemos escrever

$$W_{\Lambda(\rho)}(q,p) = \sum_i tr(M_i \rho M_i^*)$$

$\square$

Corolário 7.8.2 *Sejam*

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.125}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{21}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix} \tag{7.126}$$

onde os p_{ij} formam uma matriz coluna estocástica. Então os $M_i = M_i(q,p)$ citados no lema são dados por

$$M_1 = \frac{1}{det(U)} \begin{pmatrix} (u_{11}\sqrt{d_{11}}u_{22} - u_{12}\sqrt{d_{22}}u_{21})\sqrt{p_{11}} & 0 \\ u_{21}u_{22}(\sqrt{d_{11}} - \sqrt{d_{22}})\sqrt{p_{11}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \frac{1}{det(U)} \begin{pmatrix} 0 & (u_{11}\sqrt{d_{11}}u_{22} - u_{12}\sqrt{d_{22}}u_{21})\sqrt{p_{12}} \\ 0 & u_{21}u_{22}(\sqrt{d_{11}} - \sqrt{d_{22}})\sqrt{p_{12}} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \frac{1}{det(U)} \begin{pmatrix} u_{11}u_{12}(\sqrt{d_{22}} - \sqrt{d_{11}})\sqrt{p_{21}} & 0 \\ (u_{22}\sqrt{d_{22}}u_{11} - u_{21}\sqrt{d_{11}}u_{12})\sqrt{p_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \frac{1}{det(U)} \begin{pmatrix} 0 & u_{11}u_{12}(\sqrt{d_{22}} - \sqrt{d_{11}})\sqrt{p_{22}} \\ 0 & (u_{22}\sqrt{d_{22}}u_{11} - u_{21}\sqrt{d_{11}}u_{12})\sqrt{p_{22}} \end{pmatrix}$$

onde $D = (d_{ij})$, $U = (u_{ij})$, e $A = A(q,p) = U(q,p)D(q,p)U^{-1}(q,p)$ é a decomposição para A dada no lema.

Lema 7.8.3 *Seja $\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$ e defina $F(\rho) = \mathcal{F}\rho\mathcal{F}^*$, onde $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier discreta. Então existe $G : \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_N & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}_N \\ \Lambda \big\downarrow & & \big\downarrow G \\ \mathcal{M}_N & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}_N \end{array} \tag{7.127}$$

Prova Primeiro, note que $F^{-1}(\rho) = \mathcal{F}^*\rho\mathcal{F}$. Observe que $\mathcal{F}$ é unitária, portanto temos $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. Defina $G = F \circ \Lambda \circ F^{-1}$. Explicitamente,

$$G(\rho) = F(\sum_i V_i\mathcal{F}^*\rho\mathcal{F}V_i^*) = \mathcal{F}\Big[\sum_i V_i\mathcal{F}^*\rho\mathcal{F}V_i^*\Big]\mathcal{F}^*$$

$$= \sum_i \mathcal{F}V_i\mathcal{F}^*\rho\mathcal{F}V_i^*\mathcal{F}^* = \sum_i \tilde{V}_i\rho\tilde{V}_i^*$$

onde $\tilde{V}_i = \mathcal{F}V_i\mathcal{F}^*$. E uma inspeção simples mostra que

$$F(\Lambda(\rho)) = G(F(\rho)) = \sum_i \mathcal{F}V_i\rho V_i^*\mathcal{F}^*$$

$\square$

Observação O lema 7.8.3 vale se tomarmos $F(\rho) = \mathcal{G}\rho\mathcal{G}^*$, onde $\mathcal{G}$ é qualquer aplicação $\mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_N$ unitária.

$\lozenge$

Exemplo 7.8.4 *Considere $N = 2$. Então a transformada de Fourier discreta é dada por*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.128}$$

Neste caso, temos $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}$. Sejam

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.129}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{21}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{22}} \end{pmatrix} \tag{7.130}$$

onde os p_{ij} formam uma matriz coluna estocástica P. O lema 7.8.3 para este exemplo mostra que $G(\rho) = \sum_i \tilde{V}_i \rho \tilde{V}_i^*$, onde

$$\tilde{V}_1 = \mathcal{F} V_1 \mathcal{F}^* = \frac{1}{2}\sqrt{p_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \tilde{V}_2 = \mathcal{F} V_2 \mathcal{F}^* = \frac{1}{2}\sqrt{p_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_3 = \mathcal{F} V_3 \mathcal{F}^* = \frac{1}{2}\sqrt{p_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; \tilde{V}_4 = \mathcal{F} V_4 \mathcal{F}^* = \frac{1}{2}\sqrt{p_{22}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

E então, de $p_{11} + p_{21} = 1$, $p_{12} + p_{22} = 1$ e escrevendo

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 - \rho_{11} \end{pmatrix}$$

e para o lema 7.8.3, obtemos a expressão

$$F(\Lambda(\rho)) = G(F(\rho)) = \sum_i \mathcal{F} V_i \rho V_i^* \mathcal{F}^*$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & p_{11}\rho_{11} + p_{12}(1 - \rho_{11}) - \frac{1}{2} \\ p_{11}\rho_{11} + p_{12}(1 - \rho_{11}) - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{7.131}$$

No caso em que o vetor $\pi = (\rho_{11}, 1 - \rho_{11})$ é fixo para a matriz estocástica P, podemos reescrever a expressão acima como

$$F(\Lambda(\rho)) = G(F(\rho)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \rho_{11} - \frac{1}{2} \\ \rho_{11} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{7.132}$$

$\diamondsuit$

Lista de Símbolos

$\mathcal{P}_N$	Estados puros	6
ρ^*	Adjunto de ρ	7
$\rho^\dagger$		7
$\mathcal{M}_N$	Operadores densidade	7
$S(\rho)$	Entropia de Von Neumann	8
$\mathcal{M}^1(\Omega)$	Medidas de probabilidade em Ω	14
$\mathcal{H}_N$		69
$\mathcal{PH}_N$	Operadores positivos	69
$fa(X)$		69
$ca(X)$		70
$bfa(X)$		70
$bca(X)$		70
$M(X)$	Medidas em X	70
$M^{fin}(X)$		70
$r(\mu)$	Baricentro de uma medida	71
V^+		71
$f_+(x)$		71
$f_-(x)$		71
$\|x\|_f$		72
e		72
B		73
(C, τ)	Estrutura compacta	73
B_C		73
$\mathcal{V}$	Operador de Markov	76
$m_b(X)$		76
$I(x)$		76
$\mathcal{U}$	Dual de $\mathcal{V}$	76
$\langle f, \mu \rangle$		76
$(P, \{P_i\})$	Par de Markov	79
$M^{\mathcal{V}}(X)$		80
$M^{\mathcal{F}}(X)$	Medidas invariantes para $\mathcal{F}$	80
I_k		81
I_k^n		81
$F_{\iota i}$		81
$X_{\iota i}$		81
$p_{\iota i}(x)$		81
$I_k^n(x)$		82
$V(\mu)$		83
$S(\mu)$		83

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Baraviera, A., Lardizábal, C. F., A. Lopes, A. O., Terra Cunha, M. A dynamical point of view of Quantum Information: entropy, pressure and Wigner measures. Preprint Arxiv (2009). A ser publicado em "Dynamics, Games and Science in honour of Mauricio Peixoto and David Rand". Springer (2010), ISBN: 978-3-642-11455-7.

[2] Baraviera, A., Lardizábal, C. F., Lopes, A. O., Terra Cunha, M. Quantum Stochastic Processes, Quantum Iterated Function Systems and Entropy. Preprint Arxiv (2009). A ser publicado no São Paulo Journal of Mathematical Sciences (2010).

[3] Baraviera, A., Lardizábal, C. F., A. Lopes, A. O., Terra Cunha, M. A Thermodynamic Formalism for density matrices in Quantum Information. Preprint Arxiv (2009). A ser publicado no Applied Mathematics Research Express (2010).

[4] Benatti, F. Dynamics, Information and Complexity in Quantum Systems. Springer, 2009.

[5] Bertrand, J., Bertrand, P. A tomographic approach to Wigner's Function. Found. Phys. 17, 397, 1987.

[6] Bengtsson, I., Życzkowski, K. Geometry of Quantum States. Cambridge University Press, 2006.

[7] Bouten, L. Applications of quantum stochastic processes in quantum optics. Physical Measurement and Control 266-33, California Institute of Technology, 1200 E. California Blvd., Pasadena, CA 91125, USA.

[8] Busch, P., Ruch, E. The measure cone: irreversibility as a geometrical phenomenon, Int. J. Quantum Chemistry. 41, 163-185, 1992.

[9] Cardoso, J. Logaritmos de matrizes, aspectos teóricos e numéricos. Universidade de Coimbra, 2003.

[10] García-Mata, I., Saraceno, M. Spectral approach to chaos and quantum-classical correspondence in quantum maps. Mod. Phys. Let. B, Vol 19, No. 7, 8 (2005)

[11] de Gosson, M. Symplectic geometry and quantum mechanics. Birkhauser, 2006.

[12] Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R. Probability and random processes. Oxford University Press, 1992.

[13] Gudder, S. Quantum Probability. Academic Press, 1988.

[14] Gudder, S., Marbeau, J. Analysis of a Quantum Markov Chain. Annales de l'Institut Henri Poincaré - Physique Théorique, Vol 52, no. 1, 1990, p. 31-50.

[15] Gudder, S., Schindler, C. Quasi-discrete quantum Markov processes. Annales de l'Institute Henri Poincaré. Vol 56, no. 2, 1992.

[16] Gustafson, S., Sigal, I. Mathematical Concepts of Quantum Mechanics. Springer-Verlag, 2003.

[17] Gustafson, K. The angle of an operator and positive operator products. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 74, Number 3 (1968), 488-492.

[18] Hastings, M. B. A counterexample to additivity of minimum output entropy. arXiv:0809.3972v3 [quant-ph], 2008.

[19] Jordan, T. Affine maps of density matrices. Physical Review A, 71, 034101, 2005.

[20] Lasota, A., Mackey, M. Chaos, fractals and noise. Springer-Verlag, New York, 1994.

[21] Lopes, A., Oliveira, E. Entropy and variational principles for holonomic probabilities of IFS. Discrete and Continuous Dynamical Systems Vol. 23, N, 3, 937-955 (2009) Series A.

[22] Lopes, A. An analogy of the charge distribution on Julia sets with the Brownian motion. J. Math. Phys. 30 (9), 1989.

[23] Lopes, A. Craizer, M. The capacity-cost function of a hard-constrained channel. Int. Journal of Appl. Math. Vol 2, N 10 pp 1165-1180 (2000).

[24] Lozinski, A., Życzkowski, K., Słomczyński, W. Quantum iterated function systems, Physical Review E, Volume 68, 04610, 2003.

[25] Miquel, C., Paz, J.P., Saraceno, M. Quantum computers in phase space. Phys. Rev. A. Vol. 65, 062309, 2002.

[26] Nielsen, M., Chuang, I. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, 2000.

[27] Parry, W., Pollicott, M. Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics. Société Mathématique de France. 187-188, Astérisque, 1990.

[28] Shor, P. W. Equivalence of additivity question in quantum information theory. Comm. Math. Phys. 246, 453-472 (2004).

[29] Słomczyński, W., Życzkowski, K. Quantum Chaos: an entropy approach. J. Math. Physics, 32 (1), 1994, p. 5674-5700.

[30] Srinivas, M. D. Foundations of a quantum probability theory. J. Math. Phys., Vol 16, No. 8, 1975.

[31] Tannor, D. J. Introduction To Quantum Mechanics: A Time-dependent Perspective. University Science Books, 2006.

[32] Słomczyński, W., Dynamical Entropy, Markov Operators and Iterated Function Systems. Jagiellonian University Press, 2003.

[33] Winkler, G., Choquet Order and Simplices. Lecture notes in Mathematics 1145. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[34] Wootters, W. K. A Wigner-Function formulation of finite-state quantum mechanics. Ann. Phys., 176, 1-21 (1987).