

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Estudo da sincronização de novos modelos
metapopulacionais com acoplamento não
linear**

por

Francisco Helmuth Soares Dias

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
Orientador

Porto Alegre, novembro de 2018.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Dias, Francisco Helmuth Soares

Estudo da sincronização de novos modelos metapopulacionais com acoplamento não linear / Francisco Helmuth Soares Dias.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2018.

141 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientador: Silva, Jacques Aveline Loureiro da

Tese: Matemática Aplicada

Metapopulação, Sincronização, Número de Lyapunov transversal, Quociente

Estudo da sincronização de novos modelos metapopulacionais com acoplamento não linear

por

Francisco Helmuth Soares Dias

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não Lineares e Biomatemática

Orientador: Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva

Banca examinadora:

Profa. Dra. Diomar Cristina Mistro
PPGMat/UFSM

Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues
PPGMat/UFSM

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
PPGMAp/UFRGS

Profa. Dra. Flavia Tereza Giordani
UFSC

Tese apresentada e aprovada em
23 de novembro de 2018.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora Medianeira, por tudo o que tenho em minha vida, por todas as oportunidades e realizações.

A minha mãe Alicia Soares por todo o seu amor, carinho, educação e confiança durante todos estes anos.

Ao meu orientador Jacques pelos ensinamentos.

Aos meus familiares, em especial ao meu vô Manoel Pedro, que mesmo não estando mais presente entre nós, sei que ainda zela e intercede por mim.

Aos professores da banca examinadora, pelas correções e sugestões, em especial aos professores Luiz Alberto e Diomar pelos ensinamentos e dedicação.

Aos meus professores das disciplinas do doutorado pelos ensinamentos.

Ao professor José Afonso Barrionuevo, que me abriu as portas da UFRGS.

Aos amigos da pós-graduação pela convivência, amizade e troca de conhecimentos, em especial Felipe, Joice, Simone, Otonio e Marline.

Ao coordenador Carlos e a secretária Rhuany que sempre se mostraram dispostos a ajudar os alunos do PPGMAp.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xiv
RESUMO	xv
ABSTRACT	xvi
1 INTRODUÇÃO	1
2 CONCEITOS BÁSICOS	7
2.1 Sistemas Dinâmicos	7
2.1.1 Números de Lyapunov	7
2.1.2 Conjunto Atrator	8
2.1.3 Teorema de Birkhoff e Medida Natural	9
2.1.4 Teorema Multiplicativo de Oseledec	11
2.1.5 As funções logística e exponencial logística	11
2.2 Matrizes Circulantes	16
3 O MODELO METAPOPOPULACIONAL	18
3.1 O modelo	18
3.2 Conectividade	21
3.3 Sincronização	22
3.4 Estabilidade do Estado Síncrono	23
4 ESTABILIDADE DO ESTADO SÍNCRONO	28
4.1 O caso em que $g(x) = x$	28
4.1.1 Simulações Numéricas	29

4.1.1.1	Número de Lyapunov transversal	29
4.1.1.2	Espaço \times tempo	32
4.2	O caso em que $g(x) = 1/x$	38
4.2.1	Simulações Numéricas	39
4.2.1.1	Número de Lyapunov transversal	39
4.2.1.2	Espaço \times tempo	42
4.3	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$	47
4.3.1	Simulações Numéricas	48
4.3.1.1	Número de Lyapunov transversal	48
4.3.1.2	Espaço \times tempo	51
4.4	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$	56
4.4.1	Simulações Numéricas	57
4.4.1.1	Número de Lyapunov transversal	57
4.4.1.2	Espaço \times tempo	60
5	MODELO METAPOPOPULACIONAL COM MOVIMENTAÇÃO DEPENDENTE DA DIFERENÇA DE DENSIDADE	65
5.1	O modelo	65
5.2	Sincronização	68
5.3	Estabilidade do Estado Síncrono	69
5.4	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$	72
5.4.1	Simulações Numéricas	73
5.4.1.1	Número de Lyapunov transversal	73
5.4.1.2	Espaço \times tempo	76
5.5	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$	81
5.5.1	Simulações Numéricas	82

5.5.1.1	Número de Lyapunov transversal	82
5.5.1.2	Espaço \times tempo	85
6	MODELO METAPOPOPULACIONAL COM MOVIMENTAÇÃO DEPENDENTE DA DIFERENÇA RELATIVA DE DENSIDADE	90
6.1	O modelo	90
6.2	Sincronização	93
6.3	Estabilidade do Estado Síncrono	94
6.4	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$	98
6.4.1	Simulações Numéricas	99
6.4.1.1	Número de Lyapunov transversal	99
6.4.1.2	Espaço \times tempo	101
6.5	O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$	106
6.5.1	Simulações Numéricas	107
6.5.1.1	Número de Lyapunov transversal	107
6.5.1.2	Espaço \times tempo	109
7	COMPARAÇÃO DE MODELOS	114
7.1	Evolução da densidade ao longo do tempo	114
7.2	Sincronização	129
8	CONCLUSÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	135
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	138

Lista de Figuras

Figura 1.1	Vizinhança tipo anel cíclico, conexão local (à esquerda) e conexão global (à direita)	3
Figura 2.1	Gráfico da função logística para $a = 1, a = 2, 5$ e $a = 4$	12
Figura 2.2	Diagrama de Bifurcação das soluções da equação logística discreta. (a) $0 < a \leq 4$; (b) $3, 5 \leq a \leq 4$	13
Figura 2.3	Números de Lyapunov da equação logística discreta.	14
Figura 2.4	Gráfico da função exponencial logística para $r = 1, r = 2, 5$ e $r = 2, 8$	14
Figura 2.5	Diagrama de Bifurcação das soluções da equação de Ricker discreta. (a) $0 < r \leq 4$; (b) $2, 8 \leq r \leq 4$	15
Figura 2.6	Números de Lyapunov para a equação de Ricker discreta.	16
Figura 4.1	Λ em função de μ , com $\alpha_0 = 0, 5$ e $n = 30$	29
Figura 4.2	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	30
Figura 4.3	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	31
Figura 4.4	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	34
Figura 4.5	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	35
Figura 4.6	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	36
Figura 4.7	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	37
Figura 4.8	Λ em função de μ , com $\alpha_0 = 0, 5$ e $n = 30$	39
Figura 4.9	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	40
Figura 4.10	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	41

Figura 4.11 Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	43
Figura 4.12 Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	44
Figura 4.13 Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	45
Figura 4.14 Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	46
Figura 4.15 Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$	47
Figura 4.16 $\Lambda \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	48
Figura 4.17 $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	49
Figura 4.18 $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	50
Figura 4.19 Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	52
Figura 4.20 Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	53
Figura 4.21 Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	54
Figura 4.22 Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	55
Figura 4.23 Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$	56
Figura 4.24 $\Lambda \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	57
Figura 4.25 $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	58
Figura 4.26 $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	59
Figura 4.27 Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	61

Figura 4.28	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	62
Figura 4.29	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	63
Figura 4.30	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	64
Figura 5.1	$\Gamma \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	73
Figura 5.2	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	74
Figura 5.3	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	75
Figura 5.4	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	77
Figura 5.5	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	78
Figura 5.6	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	79
Figura 5.7	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	80
Figura 5.8	$\Gamma \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	82
Figura 5.9	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	83
Figura 5.10	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	84
Figura 5.11	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	86
Figura 5.12	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	87
Figura 5.13	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	88

Figura 5.14	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	89
Figura 6.1	$\Upsilon \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$	99
Figura 6.2	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	99
Figura 6.3	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	100
Figura 6.4	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	102
Figura 6.5	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	103
Figura 6.6	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	104
Figura 6.7	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	105
Figura 6.8	$\Upsilon \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$	106
Figura 6.9	$L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	107
Figura 6.10	$L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	108
Figura 6.11	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	110
Figura 6.12	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	111
Figura 6.13	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	112
Figura 6.14	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	113
Figura 7.1	Densidade \times tempo, modelo (7.4) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	120
Figura 7.2	Densidade \times tempo, modelo (7.4) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	120

Figura 7.3	Densidade \times tempo, modelo (4.1) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	121
Figura 7.4	Densidade \times tempo, modelo (4.1) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	121
Figura 7.5	Densidade \times tempo, modelo (4.4) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	122
Figura 7.6	Densidade \times tempo, modelo (4.4) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	122
Figura 7.7	Densidade \times tempo, modelo (4.7) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	123
Figura 7.8	Densidade \times tempo, modelo (4.7) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	123
Figura 7.9	Densidade \times tempo, modelo (4.9) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	124
Figura 7.10	Densidade \times tempo, modelo (4.9) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	124
Figura 7.11	Densidade \times tempo, modelo (5.15) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	125
Figura 7.12	Densidade \times tempo, modelo (5.15) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	125
Figura 7.13	Densidade \times tempo, modelo (5.17) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	126
Figura 7.14	Densidade \times tempo, modelo (5.17) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	126
Figura 7.15	Densidade \times tempo, modelo (6.14) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	127
Figura 7.16	Densidade \times tempo, modelo (6.14) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	127
Figura 7.17	Densidade \times tempo, modelo (6.16) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	128
Figura 7.18	Densidade \times tempo, modelo (6.16) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$	128

Figura 7.19	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	130
Figura 7.20	Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	131
Figura 7.21	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	132
Figura 7.22	Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$	133

Lista de Tabelas

Tabela 7.1	Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,5$ e Rede Convexa simples.	116
Tabela 7.2	Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,8$ e Rede Convexa simples.	117
Tabela 7.3	Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,5$ e Rede Convexa dinâmica.	118
Tabela 7.4	Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,8$ e Rede Convexa dinâmica.	119

RESUMO

Neste trabalho abordamos três modelos metapopulacionais com acoplamento não linear. Os modelos proporcionam a escolha do sítio de destino de acordo com a densidade do sítio de destino, diferença de densidade entre os sítios de destino e de origem ou diferença relativa de densidade entre os sítios de destino e de origem. Utilizamos taxa de migração independente da densidade e para a matriz de conexão uma combinação convexa de uma matriz de conexão local como uma matriz de conexão global. Apresentamos resultados de estabilidade assintótica do atrator sincronizado associado aos modelos. Para cada modelo metapopulacional, com diferentes funções de agregação e antiagregação avaliamos o comportamento do número de Lyapunov transversal conforme a taxa de migração e a taxa de reprodução intrínseca da função de dinâmica local variam. Fazemos também uma análise de como a órbita sincronizada se comporta com relação a pequenas perturbações. Por fim fizemos uma comparação entre todos os modelos desenvolvidos, e com o que lhes deu origem.

ABSTRACT

In this work we approach three metapopulation models with nonlinear coupling. The models provide the choice of the destination site according to the density of the destination site, density difference between the destination and source sites, or relative density difference between the destination and source sites. We use density independent migration rate and for the connection matrix a convex combination of a local connection matrix as a global connection matrix. We present results of asymptotic stability of the synchronized attractor associated to the models. For each metapopulation model, with different aggregation and antiaggregation functions we evaluated the behavior of the transverse Lyapunov number according to the migration rate and the intrinsic reproduction rate of the local dynamics function vary. We also perform an analysis of how the synchronized orbit behaves in relation to small perturbations. Finally we made a comparison between all the models developed, and with what gave them origin.

1 INTRODUÇÃO

As pesquisas em dinâmica populacional têm crescido nas últimas décadas, principalmente aquelas que consideram que a população está dividida em pequenos fragmentos adequados para reprodução e sobrevivência da espécie, ditos sítios ou “*patches*”, e ao conjunto discreto deles denominado metapopulação, como pode ser visto em [8, 22, 3, 32, 31, 13, 36, 23, 35].

O termo metapopulação foi utilizado pioneiramente por Levins [25], para descrever uma população de populações. Uma metapopulação em que todos os seus sítios possuem a mesma dinâmica local (reprodução e sobrevivência) é dita homogênea. Caso contrário, a metapopulação é dita heterogênea.

Hanski [15] em seu trabalho distingue três abordagens para a ecologia espacial. A primeira é a de ecologistas teóricos que investigam modelos que descrevem indivíduos em um espaço uniforme, sem qualquer heterogeneidade ambiental. Por outro lado, os ecologistas de paisagem reproduzem descrições da estrutura física muito complexa de ambientes reais e o movimento de indivíduos e recursos neles. Já os ecologistas de metapopulação tentam chegar a um meio termo. O espaço é descrito como fragmentos de habitat nos quais as espécies vivem como populações locais discretas conectadas pela migração.

Os sítios estão cercados por um ambiente hostil e totalmente impróprio para reprodução e sobrevivência. A conexão entre eles ocorre através de movimentos migratórios que, vamos supor, ocorrem depois do processo de dinâmica local. Segundo Hassell et al. [20], se esses processos não forem bem separados, poderão ocorrer resultados improváveis do ponto de vista biológico. Neste trabalho, migração e dispersão terão o mesmo significado, e serão utilizadas para descrever o movimento dos indivíduos de um sítio para outro.

Muitos trabalhos destacam a relevância da dispersão no acoplamento de populações. Rohani, May e Hassell [29] mostraram analiticamente e por meio de simulações numéricas que para os modelos gerais de competição de espécies, a migração não tem efeito sobre as propriedades de estabilidade geral do equilíbrio homogêneo.

Por outro lado Rohani e Ruxton [30], investigaram os efeitos da dispersão na estabilidade do equilíbrio das populações locais de uma metapopulação de hospedeiros. Eles concluíram que para um modelo hospedeiro-parasitoide, uma grande assimetria nas taxas de dispersão de hospedeiros e parasitoides pode ser destabilizadora, do ponto de vista do equilíbrio da metapopulação. Essa conclusão só é possível se não ocorrerem refúgios para os hospedeiros, reprodução hospedeira dependente da densidade ou outros mecanismos reguladores.

A dispersão também pode ter uma relação com a persistência de uma população conforme mostram Hanski e Zhang [16] e Hassell, Comins e May [18]. Hanski e Zhang [16], concluíram que uma taxa de migração muito alta pode ser tão ruim para a persistência da metapopulação quanto a migração baixa. Além disso, espécies com taxas intermediárias de migração respondem melhor à fragmentação de habitat. Segundo Hassell, Comins e May [18], a dispersão em um ambiente irregular pode ajudar populações hospedeiras e parasitoides que apresentam dinâmicas locais instáveis a persistirem juntas.

Uma vez que existe dispersão, precisamos definir a topologia de rede. Como queremos uma rede em que os indivíduos tenham uma movimentação por vezes permitida para qualquer sítio e outras vezes, mais restrita aos sítios mais próximos, motivados por Giordani e Silva [12], consideraremos um acoplamento não linear, formado pela combinação convexa de anéis cíclicos, um de conexão local e outro de conexão global (veja a Figura 1.1). Essa combinação convexa será, num primeiro momento, simples e num segundo momento, dinâmica.

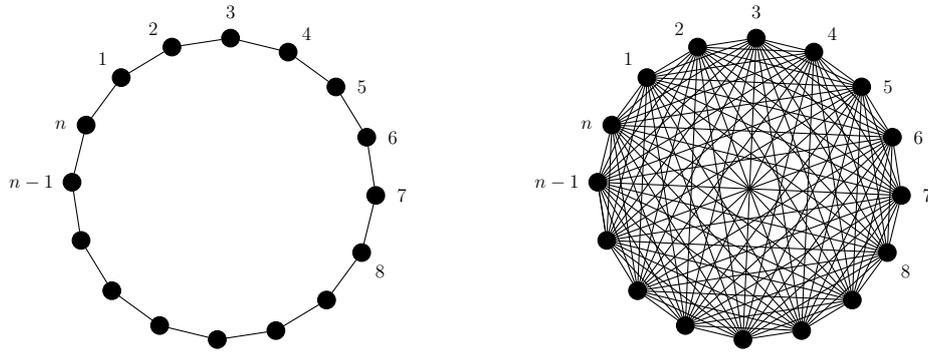


Figura 1.1: Vizinhança tipo anel cíclico, conexão local (à esquerda) e conexão global (à direita)

A movimentação entre os sítios, pode provocar um outro processo muito importante, denominado sincronização. Uma dinâmica sincronizada ocorre quando todos os sítios da metapopulação, com condições iniciais diferentes, passam a ter o mesmo número de indivíduos num determinado instante de tempo, a partir do qual oscilam de maneira idêntica.

De acordo com Liebhold, Koenig e Bjornstad [26], a dispersão entre populações (reduzindo o tamanho de populações relativamente grandes e aumentando as relativamente pequenas), fatores exógenos (como o efeito Moran (influência de variações ambientais comuns)) e interações tróficas (com populações de outras espécies que sejam elas próprias espacialmente síncronas), são as três causas principais que dão origem a sincronia.

Segundo Earn, Levin e Rohani [8], a sincronização está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação. Os autores estabeleceram em seu estudo uma correspondência positiva entre o grau de sincronia das populações e o risco de extinção da metapopulação. Em contraponto, para minimizar os efeitos da sincronização, Allen, Schaffer e Rosko [1] sugerem o uso de oscilações caóticas, pois estas reduzem a viabilidade de sincronização, reduzindo assim a probabilidade de extinção.

Uma alternativa de diminuir a extinção em metapopulações bastante utilizada é a criação de corredores. Para Haddad et al. [14], corredores são longas e estreitas faixas de habitat que ligam fragmentos de habitat, antes isolados. De acordo com Simberloff et al. [33], as funções atribuídas aos corredores para movimento são: diminuir a taxa de extinção, diminuir a estocasticidade demográfica, deter a depressão endogâmica e satisfazer uma necessidade inerente de movimento. Já para Damschen [5], a função de corredor bem sucedida baseia-se no pressuposto de que o movimento dos organismos aumenta entre os sítios conectados, aumentando a colonização e o fluxo de genes, com um benefício líquido para a biodiversidade.

Entretanto, a criação de corredores é uma estratégia discutível para a conservação de populações em habitats fragmentados (Falcy e Estades [11]). Para Hess [21], muita atenção tem sido dada aos benefícios potenciais dos corredores com pouco destaque dado às consequências potencialmente adversas. Ele estudou, o efeito dos corredores na sobrevivência de uma metapopulação na presença de uma doença fatal, que é disseminada pelo contato direto entre indivíduos suscetíveis e infectados. Os resultados sugerem que os corredores podem aumentar drasticamente a probabilidade de extinção da metapopulação. Isso ocorre quando a mortalidade induzida pela doença é baixa o suficiente para permitir que os indivíduos infectados espalhem a doença, mas suficientemente alta para reduzir os níveis populacionais, a ponto de eventos demográficos e ambientais aleatórios causarem extinções frequentes da metapopulação. A topologia de rede que utilizamos neste trabalho inviabiliza a criação de corredores.

Apresentamos aqui três modelos metapopulacionais com taxa de migração independente da densidade. Antes de entrarmos em detalhes sobre eles, salientamos que quem é independente da densidade é a taxa de migração e não o processo migratório.

Todos os modelos que aqui abordamos foram elaborados a partir do modelo metapopulacional utilizado por Silva [31], através da inclusão de quocientes.

O primeiro modelo que trabalhamos considera na contabilização dos indivíduos que chegam num sítio, o quociente da densidade do sítio de destino pela média ponderada das densidades dos sítios, com pesos iguais às frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. A inclusão da média ponderada é importante, pois de acordo com Britton [4], a densidade de população média correta a considerar é a média ponderada em relação ao tempo atual e ao posicionamento dos indivíduos. Obtemos assim, um modelo que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a sua densidade.

O segundo modelo foi estruturado de tal forma que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a diferença de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem. Para isso, ele contém um quociente da diferença de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem por uma média ponderada das diferenças de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais às frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho.

Por sua vez, o terceiro modelo que aqui abordamos possibilita a escolha do sítio de destino de acordo com a diferença relativa de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem. Ele é configurado com um quociente da diferença relativa de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem por uma média ponderada das diferenças relativas de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais às frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho.

Este trabalho é organizado como segue. No Capítulo 2, listamos algumas definições e resultados importantes que são utilizadas no decorrer deste estudo. Já no terceiro capítulo, apresentamos o primeiro modelo metapopulacional, a matriz de conexão que utilizamos ao longo deste texto, o comportamento do respectivo modelo em caso de sincronia e sua estabilidade neste estado e um resultado sobre estabilidade do atrator sincronizado.

É ainda abordado no Capítulo 4 o primeiro modelo metapopulacional, porém agora para diferentes funções de agregação e antiagregação. Avaliamos o comportamento do número de Lyapunov transversal em relação à taxa de migração e à taxa de reprodução intrínseca da função de dinâmica local. Através de gráficos espaço \times tempo fazemos uma análise de como a órbita sincronizada se comporta com relação a pequenas perturbações.

Da mesma forma, que nos Capítulos 3 e 4, procedemos no Capítulo 5 e no Capítulo 6, para os modelos com movimentação dependente da diferença de densidade e com movimentação dependente da diferença relativa de densidade, respectivamente.

O Capítulo 7, é destinado a uma comparação dos modelos metapopulacionais propostos (entre si) e com o modelo que lhes dá origem, através de gráficos densidade \times tempo para ver o comportamento da densidade dos sítios ao longo do tempo. Além disso, confrontamos todos os modelos metapopulacionais, conexões, taxas de reprodução intrínseca (da função de dinâmica local) e as taxas de migração quanto à ocorrência da sincronização.

No último capítulo, apresentamos as conclusões gerais do trabalho e expomos algumas ideias com relação à continuidade do trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e conceitos importantes utilizados no desenvolvimento deste trabalho, que se fazem necessários para uma melhor leitura e compreensão do mesmo.

2.1 Sistemas Dinâmicos

2.1.1 Números de Lyapunov

Segundo Diaz e Jorge [7], quantidades importantes associadas a um sistema dinâmico são seus números de Lyapunov. Eles medem a velocidade média com que as órbitas se separam e são, portanto, um indicador de caoticidade de um sistema dinâmico. Os resultados aqui apresentados, podem ser encontrados em Alligood, Sauer e Yorke [2] e Diaz e Jorge [7].

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 .

Definimos o *número de Lyapunov* da órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ como

$$L(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{\tau=0}^{t-1} |f'(x_\tau)| \right)^{1/t}, \quad (2.1)$$

e o *expoente de Lyapunov* como

$$h(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} \ln |f'(x_\tau)|, \quad (2.2)$$

desde que ambos limites existam. Notemos que $h(x_0)$ existe se, e somente se, $L(x_0)$ existe e $\ln(L(x_0)) = h(x_0)$.

Uma órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ é denominada *assintoticamente periódica* se ela converge para uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$.

Dizemos que a órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ é *caótica* se ela não é assintoticamente periódica e se $L(x_0) > 1$ (ou $h(x_0) > 0$).

2.1.2 Conjunto Atrator

Como estudaremos a estabilidade assintótica do atrator sincronizado, precisamos de alguns conceitos importantes, que podem ser encontrados em Alligood, Sauer e Yorke [2] e Thunberg [34].

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 .

Definimos o conjunto ω -limite da órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ como o conjunto

$$\omega(x_0) = \left\{ x : \exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ tal que } x = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x_0) \right\}.$$

Um conjunto *atrator* é um conjunto ω -limite que atrai um conjunto de valores iniciais que tem medida diferente de zero.

Seja $\{x_0, x_1, \dots\}$ uma órbita caótica. Se $x_0 \in \omega(x_0)$, então $\omega(x_0)$ é denominado um conjunto *caótico*. Um *atrator caótico* é um conjunto caótico que também é um atrator.

Para as funções logística e exponencial logística (que veremos com maiores detalhes na Subseção 2.1.5) o conjunto atrator possui três comportamentos distintos:

- (i) um ciclo periódico;
- (ii) um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue nula;
- (iii) uma união finita de intervalos.

Além disso, o caos somente é possível quando temos um atrator que é um intervalo.

2.1.3 Teorema de Birkhoff e Medida Natural

O teorema fundamental da Teoria Ergódica afirma que, para qualquer subconjunto mensurável e para quase todo ponto, existe um tempo médio de permanência da órbita de um ponto nesse conjunto. Este resultado é devido a Birkhoff (Oliveira [28]). Os resultados aqui abordados, podem ser encontrados em Diaz e Jorge [7], Oliveira [28] e Thunberg [34].

Começamos lembrando de algumas definições envolvendo Teoria da Medida e Integração. Dizemos que um espaço (X, \mathcal{A}, ν) é de probabilidade se X é um conjunto, \mathcal{A} é uma σ -álgebra definida em X e ν uma medida definida em (X, \mathcal{A}) tal que $\nu(X) = 1$. Uma transformação mensurável $h : X \rightarrow X$, *preserva a medida* ν ou ν é *h-invariante*, se para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ vale $\nu(h^{-1}(A)) = \nu(A)$. Chamamos uma medida de *ergódica* para h se para qualquer subconjunto h -invariante $A \in \mathcal{A}$ (ou seja, $A = h^{-1}(A)$), se verifica $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A) = 1$.

Agora, vamos analisar o que é tempo médio de permanência de uma órbita num conjunto. Consideremos um espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, ν) , uma transformação mensurável $h : X \rightarrow X$ e um ponto $x \in X$. A frequência com que a órbita de x por h visita um conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$ é

$$\eta_t(x, A) = \frac{1}{t} \#\{0 \leq j \leq t-1 : h^j(x) \in A\}.$$

Mas isto é o mesmo que

$$\eta_t(x, A) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \mathcal{X}_A(h^j(x)),$$

onde \mathcal{X}_A é a função característica do conjunto A . O *tempo médio de permanência* da órbita de x em A é o limite

$$\eta(x, A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t(x, A), \tag{2.3}$$

quando este limite existir.

Enunciamos agora o resultado devido a von Neumann (em sua forma mais fraca) e provada na sua forma definitiva por Birkhoff.

Proposição 2.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Consideremos um espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, ν) e uma transformação mensurável $h : X \rightarrow X$ que preserva a medida ν . Então, para toda função integrável φ , existe uma função integrável ϑ e h -invariante que verifica as seguintes propriedades:*

(i) *para ν -quase todo $x \in X$ se verifica*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \varphi(h^j(x)) = \vartheta;$$

(ii) $\int_X \varphi \, d\nu = \int_X \vartheta \, d\nu;$

(iii) *Se a medida ν for ergódica (com respeito a h), então ϑ é constante $\nu - q.t.p.$ Em particular, para ν -quase todo $x \in X$:*

$$\vartheta(x) = \int_X \varphi \, d\nu.$$

Uma primeira consequência do Teorema de Birkhoff é que a menos de um conjunto de medida ν nula, o limite (2.3) existe e é uma função integrável, verificando

$$\int_X \eta(x, A) \, d\nu = \nu(A).$$

Para a outra consequência, necessitamos de uma definição. Dizemos que uma medida invariante ρ é uma medida *natural* para h se para qualquer x em um conjunto de medida de Lebesgue positiva temos

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{h^j(x)},$$

onde δ_x denota a função delta de Dirac em x .

Sendo assim, decorre do Teorema de Birkhoff que se ν é ergódica, então o limite (2.3) existe e é igual a $\nu(A)$, para $\nu - q.t.p$ $x \in X$, isto é ν é a medida natural para h .

2.1.4 Teorema Multiplicativo de Oseledec

Enunciamos aqui um importante resultado que diz como as órbitas se distribuem sobre atratores, no caso de mapeamentos multidimensionais. Para maiores detalhes, consulte Eckmann e Ruelle [9].

Proposição 2.2 (Teorema Multiplicativo de Oseledec). *Consideremos um espaço \mathbb{M} , ν uma medida de probabilidade neste espaço e $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ um mapa que preserva a medida ergódica ν . Seja T um mapeamento mensurável de \mathbb{M} no espaço das matrizes de ordem $m \times m$, tal que*

$$\int \ln^+ \|T(x)\| \nu(dx) < \infty,$$

onde $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\}$. Se $T_x^t = T(h^{t-1}(x)) \dots T(h(x))T(x)$ é uma matriz, então para ν -quase todo x , existe o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_x^{t*} T_x^t)^{\frac{1}{2t}} = M_x.$$

Aqui, T_x^{t*} denota a matriz adjunta de T_x^t .

2.1.5 As funções logística e exponencial logística

Várias funções podem ser usadas como dinâmica local. Exemplos para a função f podem ser encontrados em [17, 19, 10, 27]. Aqui vamos trabalhar com duas funções clássicas, porém para objetivos diferentes. A função logística será utilizada para determinar os coeficientes da combinação convexa (veja a Seção 3.2), enquanto que a função exponencial logística será utilizada como a dinâmica local nas simulações que serão feitas ao longo deste trabalho.

A função logística é definida como

$$f(x) = ax(1 - x),$$

onde o parâmetro a é a taxa de reprodução intrínseca da população.

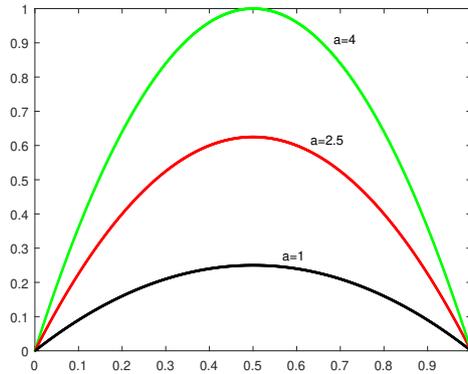
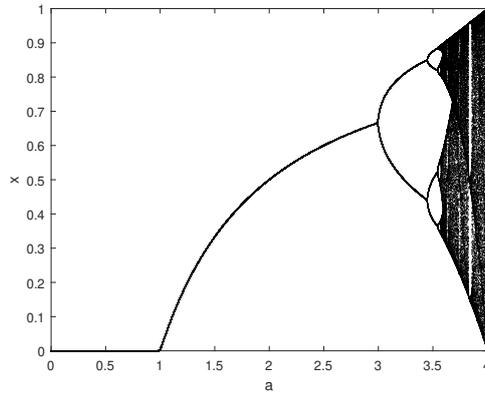
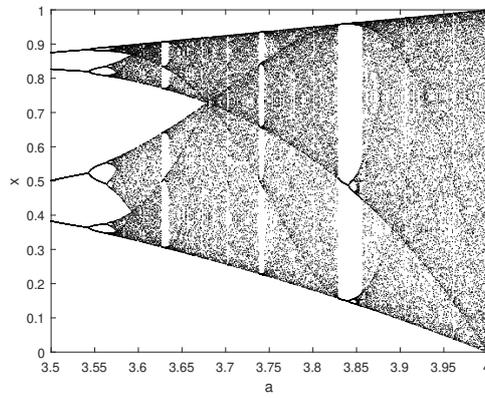


Figura 2.1: Gráfico da função logística para $a = 1$, $a = 2,5$ e $a = 4$.

Consideremos a equação logística discreta: $x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$. Temos alguns comportamentos distintos das soluções dela de acordo com a variação do parâmetro a . Para $a \in (0, 1]$ temos um ponto fixo trivial estável. Quando $1 < a < 3$, a solução apresenta um ponto fixo estável dado por $\frac{a-1}{a}$. A partir de $a = 3$ a solução passa a ter oscilações periódicas de período 2, permanecendo assim até que essas oscilações tornem-se instáveis, surgindo assim oscilações de período 4. Esse processo, de duplicação de períodos, continua repetindo-se até que as oscilações ocorrem de maneira aperiódica. Surge então, para $a > 3,57$ um comportamento caótico. Para $a > 4$ a função deixa o intervalo $[0, 1]$. Esses comportamentos podem ser observados no diagrama de bifurcação (Figura 2.2). Na Figura 2.3, apresentamos os números de Lyapunov para a equação logística discreta.



(a)



(b)

Figura 2.2: Diagrama de Bifurcação das soluções da equação logística discreta. (a) $0 < a \leq 4$; (b) $3,5 \leq a \leq 4$.

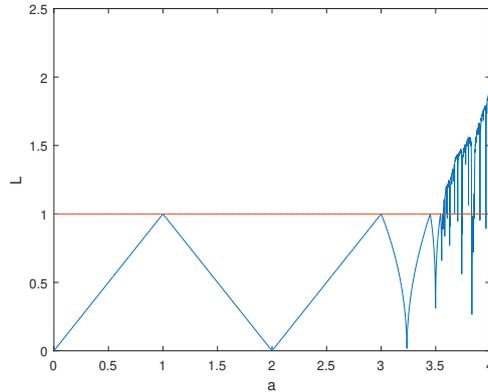


Figura 2.3: Números de Lyapunov da equação logística discreta.

A função exponencial logística ou função de Ricker é definida como

$$f(x) = xe^{r(1-x)},$$

onde o parâmetro r é a taxa de reprodução intrínseca da população.

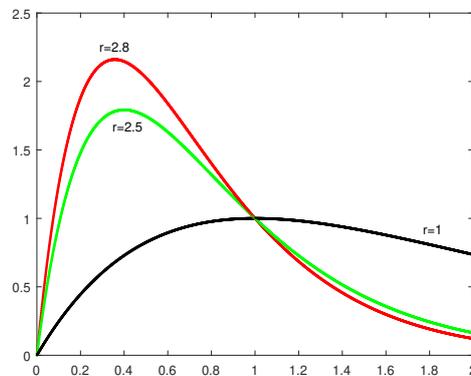
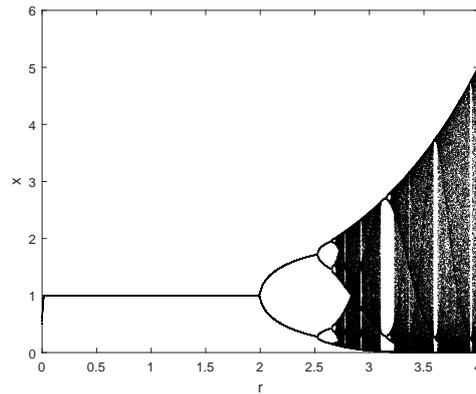


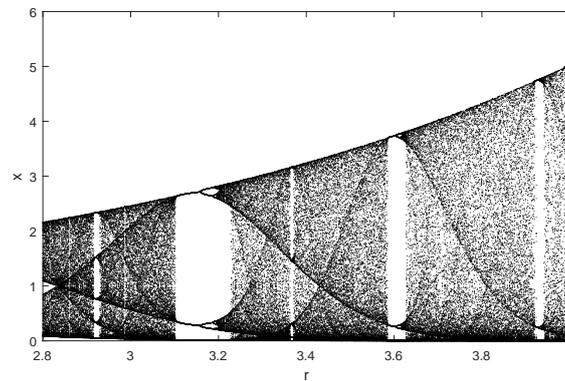
Figura 2.4: Gráfico da função exponencial logística para $r = 1$, $r = 2,5$ e $r = 2,8$.

Consideremos a equação de Ricker discreta: $x_{t+1} = x_t e^{r(1-x_t)}$. Observando o diagrama de bifurcação (Figura 2.5), notamos dinâmicas variadas, conforme r varia. Quando $r \in (0, 2)$, temos um ponto fixo estável. A partir de $r = 2$, as soluções da equação de Ricker discreta passam a apresentar oscilações periódicas de

período 2, que conforme r aumenta, essas oscilações periódicas tornam-se de período 4 e assim sucessivamente, até aproximadamente $r = 2,7$, onde as bifurcações de período 2^n , $n \in \mathbb{N}$, não ocorrem mais. Surge aí, um comportamento caótico entremeadado por janelas periódicas.



(a)



(b)

Figura 2.5: Diagrama de Bifurcação das soluções da equação de Ricker discreta. (a) $0 < r \leq 4$; (b) $2,8 \leq r \leq 4$.

Na Figura 2.6 encontramos os números de Lyapunov para a equação de Ricker discreta.

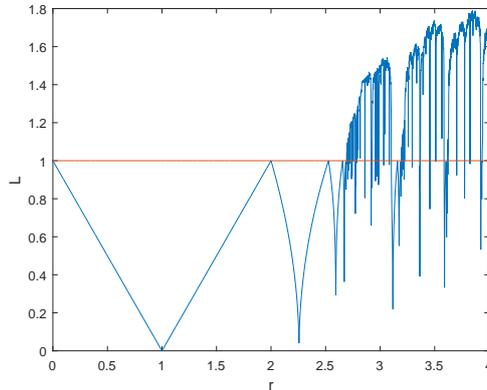


Figura 2.6: Números de Lyapunov para a equação de Ricker discreta.

2.2 Matrizes Circulantes

Os resultados aqui descritos, podem ser encontrados em Davis [6] e Lancaster e Tismenetsky [24].

Uma matriz é *circulante* se ela é da forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} = \text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Podemos observar que a partir da segunda linha, cada linha avança um elemento para a direita relativamente à linha precedente. Dessa forma, as matrizes circulantes ficam completamente especificadas pelo vetor que forma a primeira linha.

Uma vez que se A e B são matrizes circulantes, então a soma $A + B$ é circulante e o produto AB é circulante com $AB = BA$, temos que o conjunto das matrizes circulantes forma um anel comutativo.

As matrizes circulares são diagonalizáveis por uma matriz de Fourier, isto é, se A é uma matriz circular, então existe uma matriz F tal que

$$A = FDF^{-1},$$

onde F é a matriz de Fourier, definida por

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \kappa & \kappa^2 & \cdots & \kappa^{n-1} \\ 1 & \kappa^2 & \kappa^4 & \cdots & \kappa^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \kappa^{n-1} & \kappa^{2(n-1)} & \cdots & \kappa^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

com $\kappa = e^{-\frac{2\pi}{n}i}$, e $D = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, sendo $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, os autovalores da matriz A .

Os autovalores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, da matriz circular A são dados por

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \xi_k^j, \quad (2.5)$$

onde $\xi_k = e^{\frac{2\pi k}{n}i}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Já os autovetores correspondentes a estes autovalores, são dados pelas colunas da matriz de Fourier.

3 O MODELO METAPOPOPULACIONAL

Neste capítulo descreveremos o nosso primeiro modelo metapopulacional bem como a matriz de conexão que utilizaremos ao longo deste texto. Verificaremos também como o modelo metapopulacional se comporta em caso de sincronia, assim como, a estabilidade do estado síncrono para o caso geral.

3.1 O modelo

Consideremos uma metapopulação homogênea formada por n sítios enumerados de 1 até n . Em cada sítio existe uma população de uma única espécie, chamada população local ou subpopulação. Denotamos por $x_t^i \in \mathbb{R}$ o número de indivíduos do sítio i no instante de tempo t e vamos supor que uma função f , suave, descreve o processo de dinâmica local. Então, na ausência de migração entre os sítios, a evolução de cada população é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Exemplos para a função f podem ser encontrados em [17, 19, 10, 27].

Após o processo de dinâmica local em cada sítio, ocorre o processo de migração. A cada passo de tempo, uma fração μ de indivíduos, $\mu \in [0, 1]$, deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos. Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos j , uma fração c_{ij} chegará ao sítio i . Por se tratar de um processo de curta duração, supomos que não há perdas durante essa movimentação, ou seja, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Assumimos também que $c_{ii} = 0$. Os elementos c_{ij} formam a matriz de conexão $C = [c_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

A fim de formular um sistema de equações que descreve a dinâmica metapopulacional, definimos três operadores. O primeiro deles é o operador dinâmica

local:

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^n)).$$

O segundo deles é o operador dispersão:

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (M_1(x^1, \dots, x^n), \dots, M_n(x^1, \dots, x^n)),$$

onde

$$M_i(x^1, \dots, x^n) = (1 - \mu)x^i + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{x^i}{\sum_{k=1}^n c_{kj} x^k} x^j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podemos observar que o operador dispersão é composto de duas partes. A primeira é a densidade de indivíduos que permanece no sítio i e a segunda é uma soma, formada pelos imigrantes que chegam no sítio i multiplicados pelo quociente da densidade do sítio i pela média ponderada do conjunto das densidades $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ com pesos $\{c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\}$, respectivamente.

Por fim, definimos o operador

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(M_1, \dots, M_n) \mapsto (G(M_1), \dots, G(M_n)),$$

onde

$$G(M_i) = (1 - \mu)x^i + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{g(x^i)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(x^k)} x^j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sendo $g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ uma função apropriada.

Essa função $g(x)$ pode representar agregação ou antiagregação. Se tivermos uma função crescente, então para baixas densidades teremos poucos indivíduos chegando no sítio i e para altas densidades muitos indivíduos chegando neste sítio,

caracterizando assim uma agregação. No caso de uma função decrescente, para baixas densidades teremos muitos indivíduos chegando no sítio i e para altas densidades poucos indivíduos chegando no respectivo sítio, o que determina uma antiagregação.

Uma vez que o processo de dinâmica local antecede a dispersão, podemos aplicar a composição $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{F}$, no vetor populacional, $X_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)$, para obtermos X_{t+1} , isto é, $X_{t+1} = \mathcal{H}(X_t)$.

Dessa forma,

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} (1 - \mu)f(x_t^1) + \sum_{j=1}^n \mu c_{1j} \frac{g(f(x_t^1))}{\sum_{k=1}^n c_{kj}g(f(x_t^k))} f(x_t^j) \\ (1 - \mu)f(x_t^2) + \sum_{j=1}^n \mu c_{2j} \frac{g(f(x_t^2))}{\sum_{k=1}^n c_{kj}g(f(x_t^k))} f(x_t^j) \\ \vdots \\ (1 - \mu)f(x_t^n) + \sum_{j=1}^n \mu c_{nj} \frac{g(f(x_t^n))}{\sum_{k=1}^n c_{kj}g(f(x_t^k))} f(x_t^j) \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{g(f(x_t^i))}{\sum_{k=1}^n c_{kj}g(f(x_t^k))} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

O primeiro termo no lado direito da equação (3.2) representa os indivíduos que permanecem no sítio i no instante de tempo t , enquanto o segundo termo descreve os indivíduos que partem dos sítios vizinhos e chegam no sítio i , levando em consideração a densidade do sítio de destino e uma média ponderada das densidades dos sítios, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho.

O modelo que aqui apresentamos, inclui o quociente da densidade do sítio de destino pela média ponderada das densidades dos sítios no modelo apresen-

tado por Silva [31], a saber,

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Esse modelo é o mesmo dos trabalhos de Barrionuevo e Silva [3] e Silva, Barrionuevo e Giordani [32] considerando a taxa de migração constante.

3.2 Conectividade

Uma vez que existe a dispersão, precisamos definir a topologia da rede. Consideramos uma matriz C gerada por uma combinação convexa de duas matrizes circulantes, uma representando um anel cíclico de conexão local e outra, representando um anel cíclico de conexão global, definidas por

$$C_l = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

e

$$C_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

respectivamente.

Num primeiro momento, utilizaremos uma combinação convexa simples, isto é, dado $\alpha \in [0, 1]$ a matriz C será expressa por

$$C = (1 - \alpha)C_l + \alpha C_g. \quad (3.5)$$

Num segundo momento, a topologia de rede será mais dinâmica, ou seja,

$$C = (1 - \alpha_t)C_l + \alpha_t C_g, \quad (3.6)$$

onde α_t é o coeficiente de combinação convexa, dado por $\alpha_{t+1} = v(\alpha_t)$, sendo v a função logística e $\alpha_o \in [0, 1]$.

Nas demonstrações usaremos apenas α_t , mas o resultados valem para o coeficiente α também. Nas simulações faremos referências separadas aos mesmos.

3.3 Sincronização

A sincronização do sistema (3.2) é obtida quando todos os sítios apresentam a mesma densidade populacional em cada passo de tempo t . Isto significa que $x_t^i = x_t$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Logo, substituindo isso em (3.2), obtemos

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij} g(f(x_t))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t))} f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Já sabemos que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$. Por sua vez, supondo que

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

obtemos que a matriz C é duplamente estocástica, e por consequência a expressão acima torna-se

$$x_{t+1}^i = f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado dada em (3.1). Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Consideremos a órbita sincronizada $s_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema (3.2). Seja X_t uma perturbação do estado sincronizado, isto é, $X_t = s_t + \Delta_t$, onde Δ_t é uma pequena perturbação. Logo,

$$X_{t+1} = \mathcal{H}(X_t) = \mathcal{H}(s_t + \Delta_t).$$

Expandindo em série de Taylor, segue que

$$\mathcal{H}(s_t + \Delta_t) = \mathcal{H}(s_t) + J(s_t)\Delta_t + O(\Delta_t^2), \quad (3.7)$$

sendo $J(s_t)$ a matriz Jacobiana de \mathcal{H} aplicada na órbita sincronizada, dada por

$$J(s_t) = f'(x_t) \begin{cases} (1 - \mu) + \frac{\mu g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left(1 - \sum_{k=1}^n c_{ik}^2\right), & \text{para } i = j, \\ \mu \left[\frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \sum_{k=1}^n c_{ik}(-c_{jk}) + c_{ij} \right], & \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (3.8)$$

Visto que $\mathcal{H}(s_t) = s_{t+1} = X_{t+1} - \Delta_{t+1}$, a equação (3.7) torna-se

$$X_{t+1} = X_{t+1} - \Delta_{t+1} + J(s_t)\Delta_t + O(\Delta_t^2),$$

ou seja,

$$\Delta_{t+1} = J(s_t)\Delta_t + O(\Delta_t^2).$$

Portanto, a linearização do sistema (3.2) em torno da órbita sincronizada é dada por

$$\Delta_{t+1} = J(s_t)\Delta_t, \quad (3.9)$$

onde $J(s_t)$ é dado por (3.8).

3.4 Estabilidade do Estado Síncrono

Seja $s_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^n$ a órbita sincronizada do sistema (3.2). Queremos determinar se as órbitas que iniciam próximas do estado sincronizado,

serão atraídas para este estado. Com este objetivo, linearizamos o sistema (3.2) em torno da órbita sincronizada e obtemos de acordo com (3.9)

$$\Delta_{t+1} = J(s_t)\Delta_t, \quad (3.10)$$

sendo $J(s_t)$ dado por

$$J(s_t) = \Omega_t f'(x_t), \quad (3.11)$$

onde $\Omega_t = I_n - \mu B_t$, I_n é a matriz identidade de ordem n e $B_t = \text{circ}(b_0^t, b_1^t, \dots, b_{n-1}^t)$, com $b_3^t = b_4^t = \dots = b_{n-3}^t$, $b_{n-2}^t = b_2^t$, $b_{n-1}^t = b_1^t$,

$$\begin{aligned} b_0^t &= 1 - \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[1 - 2\varrho^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right], \\ b_1^t &= \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t, \\ b_2^t &= \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \\ b_3^t &= \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \end{aligned}$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$.

Visto que a matriz B_t é circulante, existe uma matriz F que diagonaliza a matriz B_t . Mais precisamente, $B_t = F D_t F^{-1}$, onde $F = [f_{ij}]$ é a matriz de Fourier, definida em (2.4) e $D_t = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1^t, \dots, \lambda_{n-1}^t)$, sendo $\lambda_0, \lambda_1^t, \dots, \lambda_{n-1}^t$, os autovalores da matriz B_t .

Uma vez que $\sum_{j=0}^{n-1} b_j^t = 0$, segue que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor simples da matriz B_t associado ao autovetor $v = (1, 1, \dots, 1)^T$, pois

$$\begin{aligned} B_t v &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j^t, \sum_{j=0}^{n-1} b_j^t, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} b_j^t \right)^T \\ &= (0, 0, \dots, 0)^T \\ &= 0v. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz Ω_t toma a forma

$$\Omega_t = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} - \mu \bar{D}_t & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \quad (3.12)$$

onde $\bar{D}_t = \text{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_{n-1}^t)$.

Observemos que $\zeta = 1$ é um autovalor simples de Ω_t e seu correspondente autoespaço é exatamente a diagonal do espaço de fase que é precisamente o estado sincronizado. Isto significa, que as perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. Já as perturbações no espaço gerado pelos autovalores de $(I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)$ são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade assintótica.

Como o objetivo é verificar o crescimento das perturbações transversais à órbita sincronizada, basta considerar

$$J(s_t) = F[(I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)f'(x_t)]F^{-1},$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)f'(x_t)\Delta_t.$$

Escolhendo uma perturbação inicial Δ_0 qualquer, obtemos

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu \bar{D}_{t-1})f'(x_{t-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_1)f'(x_1)(I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)f'(x_0)\Delta_0.$$

Desta forma a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \|^{1/\tau} < 1, \quad (3.13)$$

onde $P_t = (I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)f'(x_t)$, com $t = 0, 1, 2, \dots$

Podemos escrever,

$$\| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \| = \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\| \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|.$$

Portanto, temos que

$$L_{\perp}(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0 \|^{1/\tau} = L(x_0) \Lambda(x_0), \quad (3.14)$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}, \quad (3.15)$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em x_0 , e

$$\Lambda(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\|^{1/\tau}. \quad (3.16)$$

Denominaremos $L_{\perp}(x_0)$ de número Lyapunov transversal, com órbita iniciando em x_0 .

Supondo que a função f preserva a medida natural ρ , e também que $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$ segue pelo Teorema de Birkoff (Proposição 2.1) que (3.15) existe para todo x_0 (com relação à medida ρ), e é independente de x_0 .

Adicionalmente, assumindo que $\ln^+ \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_t)\| \in L^1(\rho)$, decorre do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec (Proposição 2.2) que o limite (3.16), a menos de um conjunto de medida ρ nula, existe para todo x_0 , independe de x_0 e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\|^{1/\tau} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu \lambda_i^t| \right)^{1/\tau} \quad (3.17)$$

Através de (2.5) podemos encontrar uma forma para (3.17). Temos que

$$\lambda_k^t = b_0^t + b_1^t (\xi_k + \xi_k^{n-1}) + b_2^t (\xi_k^2 + \xi_k^{n-2}) + b_3^t \sum_{j=3}^{n-3} \xi_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\xi_k + \xi_k^{n-1} &= 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \\ \xi_k^2 + \xi_k^{n-2} &= 4 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 2, \\ \sum_{j=3}^{n-3} \xi_k^j &= \frac{8 \cos^3\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 6 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + 2}{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda_k^t &= \left\{ 1 - \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad \left\{ \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ &\quad \left\{ \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ &\quad \left\{ \frac{g'(f(x_t))f(x_t)}{g(f(x_t))} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)},\end{aligned}\tag{3.18}$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n}\right)$.

Portanto, $\Lambda(x_0)$ representado por (3.17) tem λ_i^t dado por (3.18).

Baseado no exposto acima, podemos estabelecer um critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.

Teorema 3.1. *Consideremos o sistema (3.2), com a matriz C dada por (3.5) ou (3.6), f uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ invariante com relação a medida natural ρ e $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função de classe C^1 . Então o número de Lyapunov transversal L_\perp do atrator sincronizado é dado pelo produto $L\Lambda$, onde L é dado por (3.15) e Λ por (3.17). Além disso, se $L_\perp < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.*

4 ESTABILIDADE DO ESTADO SÍNCRONO

No presente capítulo, abordaremos o modelo metapopulacional (3.2) para diferentes funções $g(x)$. Estudaremos a estabilidade do estado síncrono e através de simulações numéricas observaremos o comportamento do número de Lyapunov transversal conforme a taxa de migração e o parâmetro r variam. Analisaremos também a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações, através de gráficos espaço \times tempo.

4.1 O caso em que $g(x) = x$

Consideremos a função de agregação $g(x) = x$ no sistema (3.2). Obtemos assim o modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{f(x_t^i)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} f(x_t^k)} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Para esta escolha de função $g(x)$, temos que (3.18) transforma-se em

$$\begin{aligned} \lambda_k^t = \lambda_k = & \left\{ 2\varrho_t^2 + (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right\} + \\ & \left\{ 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} - \varrho_t + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \varrho_t^2 + 2c_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ 4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\|^{1/\tau} &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu \lambda_i^t| \right)^{1/\tau} \\
&= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} (|1 - \mu \lambda_i|)^\tau)^{1/\tau} \\
&= \max_{1 \leq i \leq n-1} \{ |1 - \mu \lambda_i| \}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, segue que Λ é o raio espectral de $(I_{n-1} - \mu \bar{D})$, ou seja,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{ |1 - \mu \lambda_i| \}, \quad (4.3)$$

onde $\bar{D} = \bar{D}_t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

Portanto, o número de Lyapunov transversal $L_\perp(x_0) = L(x_0)\Lambda$ tem número de Lyapunov dado por (3.15) e o quantificador Λ dado por (4.3).

Na Figura 4.1, podemos observar o comportamento de Λ conforme μ varia.

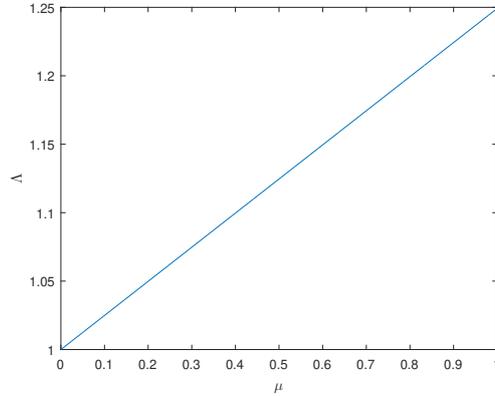


Figura 4.1: Λ em função de μ , com $\alpha_0 = 0,5$ e $n = 30$.

4.1.1 Simulações Numéricas

4.1.1.1 Número de Lyapunov transversal

Neste espaço estudaremos a variação do número de Lyapunov transversal em função da taxa de migração μ e do parâmetro r . Como função responsável

pela dinâmica local consideramos a função exponencial logística. Examinaremos o comportamento de L_{\perp} para $r = 2,5$ (quando f possui oscilações periódicas) e $r = 2,8$ (onde f comporta-se de forma caótica). Já a taxa de migração assumirá os valores $\mu = 0,1$, $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$, ou seja, uma taxa de migração baixa, uma intermediária e uma alta, respectivamente. Apresentaremos os resultados para a matriz de conexão C dada por (3.5) e (3.6). Para a combinação convexa simples usaremos $\alpha = 0,5$ e para a combinação convexa dinâmica, para determinar α_t , utilizaremos a função logística num comportamento caótico, isto é, $\alpha_{t+1} = 4\alpha_t(1 - \alpha_t)$, com $\alpha_0 = 0,5$. Calculamos o número de Lyapunov transversal utilizando 1.000 iterações, após descarte de 10.000 iterações transientes na órbita.

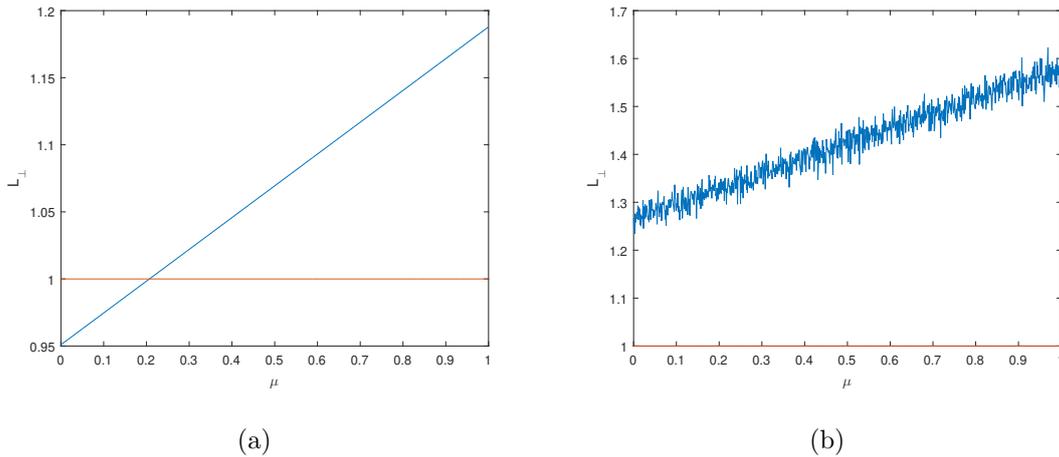


Figura 4.2: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

Analisando a Figura 4.2, vemos que quando $r = 2,5$ vale $L_{\perp} < 1$ para $\mu \in [0; 0,2064)$ e $L_{\perp} \geq 1$ para $\mu \geq 0,2064$. No caso de $r = 2,8$ temos $L_{\perp} > 1$ para qualquer valor de μ . Portanto, a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ . Neste trabalho, quando falarmos sobre a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ , estamos nos referindo a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação a taxa de migração μ) onde o número de Lyapunov

transversal é menor que 1. Se falarmos sobre a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ , queremos nos reportar a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação a taxa de migração μ) onde $L_{\perp} > 1$.

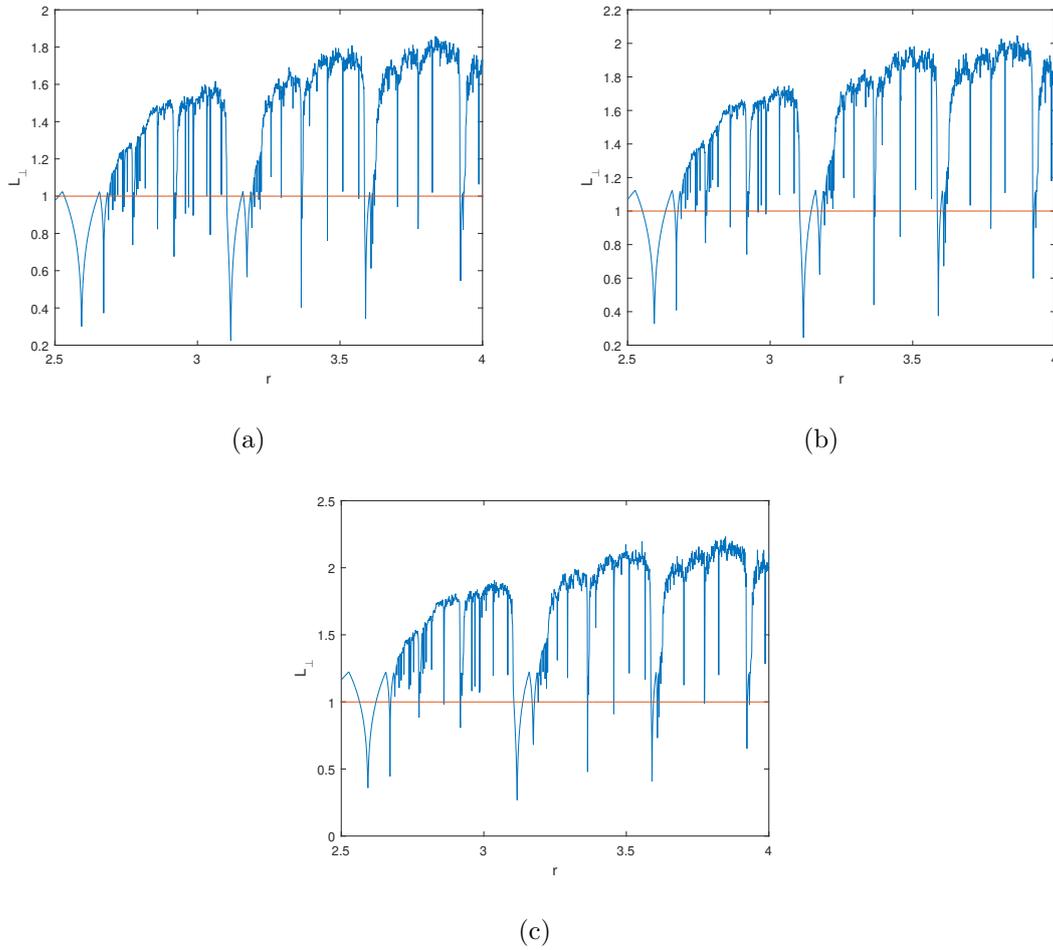


Figura 4.3: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

No caso da Figura 4.3, para a maioria dos valores de r o número de Lyapunov transversal é superior a 1, ou seja, a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r é maior que a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r . Neste trabalho, quando falarmos sobre a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r , estamos nos referindo a região formada pelo intervalo

ou união de intervalos (com relação ao parâmetro r) onde o número de Lyapunov transversal é menor que 1. Se falarmos sobre a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r , queremos nos reportar a região formada pelo intervalo ou união de intervalos (com relação ao parâmetro r) onde $L_{\perp} > 1$.

4.1.1.2 Espaço \times tempo

Apresentaremos aqui gráficos do tipo espaço \times tempo, com o intuito de analisar a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações.

Para dinâmica local utilizaremos a função exponencial logística. Já sabemos que a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado. Como estamos preocupados com a extinção da metapopulação, que está relacionada com a sincronização de órbitas caóticas, e como queremos saber como a migração interfere no comportamento da dinâmica local, utilizaremos os valores $r = 2,5$ e $r = 2,8$.

Nos gráficos espaço \times tempo colocaremos no eixo vertical os sítios numerados de 1 até 30 e no eixo horizontal os últimos 40 passos de tempo, após um descarte de 9.960 transientes. Cada célula (t, i) representa a densidade de um sítio i no tempo t . As células serão pintadas em tons de branco, amarelo, vermelho e preto conforme a densidade aumenta. As condições iniciais são tomadas próximo ao estado sincronizado, isto é,

$$X_0 = (x_0 + \epsilon_1, x_0 + \epsilon_2, \dots, x_0 + \epsilon_n),$$

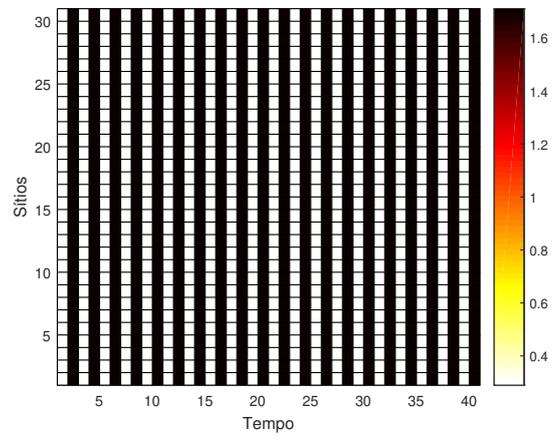
sendo $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ uma pequena perturbação da órbita sincronizada, com $\epsilon_i \in (0; 0,01), i = 1, \dots, n$, escolhidos aleatoriamente.

Para a combinação convexa simples usaremos $\alpha = 0,5$ e para a combinação convexa dinâmica, para determinar α_t , utilizaremos a função logística num comportamento caótico, isto é, $\alpha_{t+1} = 4\alpha_t(1 - \alpha_t)$, com $\alpha_0 = 0,5$.

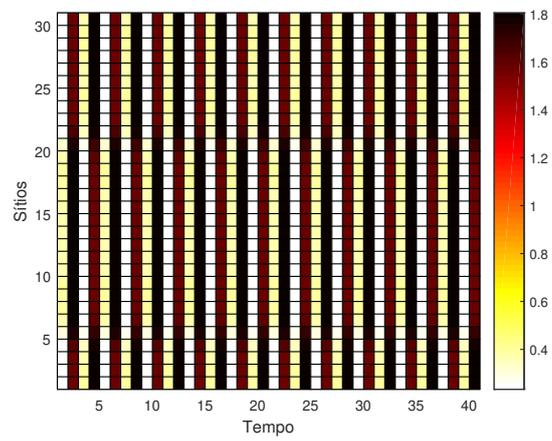
Analisamos agora o caso em que $r = 2,5$. Nas Figuras 4.4 e 4.5, temos para $\mu = 0,1$ sincronização. Para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$ não temos sincronização.

Para $r = 2,8$, analisando as Figuras 4.6 e 4.7 percebemos que para todas as conexões e valores da taxa de migração não ocorre sincronia.

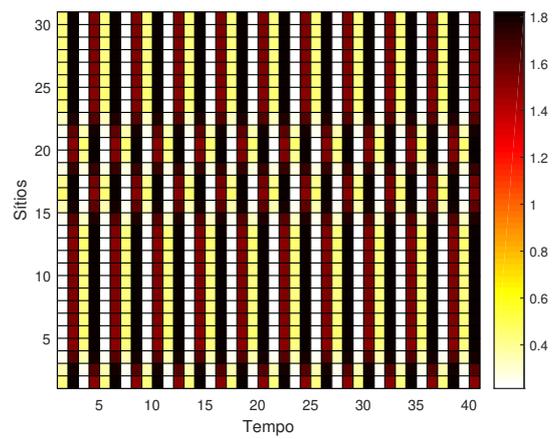
Examinando os gráficos espaço \times tempo, notamos que os valores da taxa de reprodução intrínseca e da taxa de migração para os quais mais ocorreu sincronização foram, respectivamente, $r = 2,5$ e $\mu = 0,1$. Ambas as redes apresentam o mesmo número de sincronizações, não sendo possível, assim, dizer qual que mais favorece a ocorrência de sincronia.



(a)

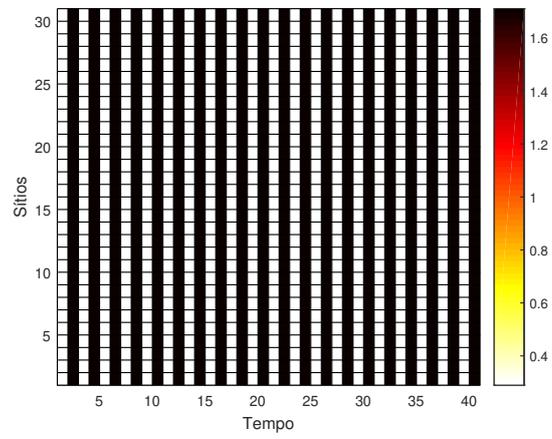


(b)

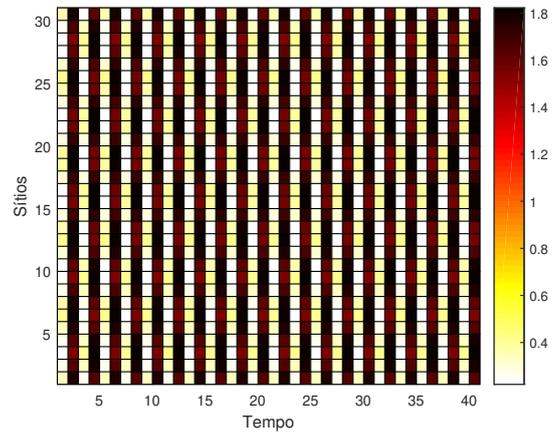


(c)

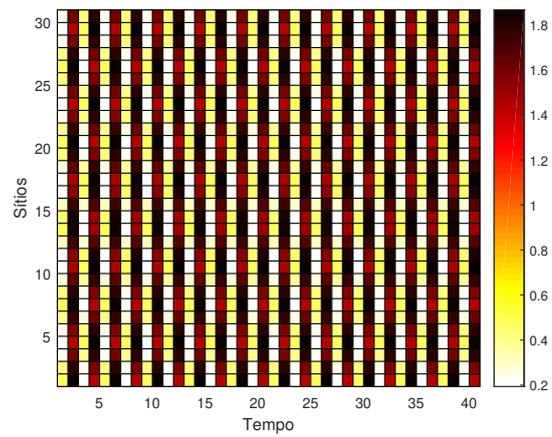
Figura 4.4: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

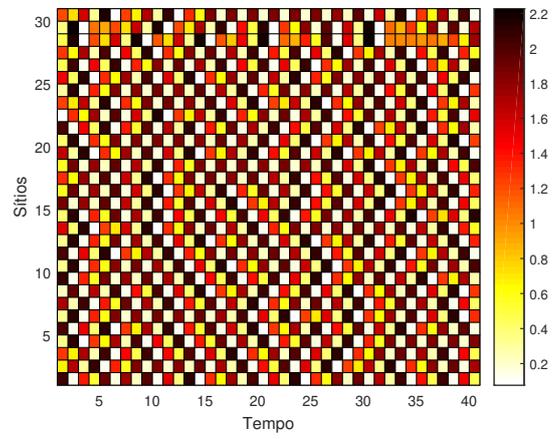


(b)

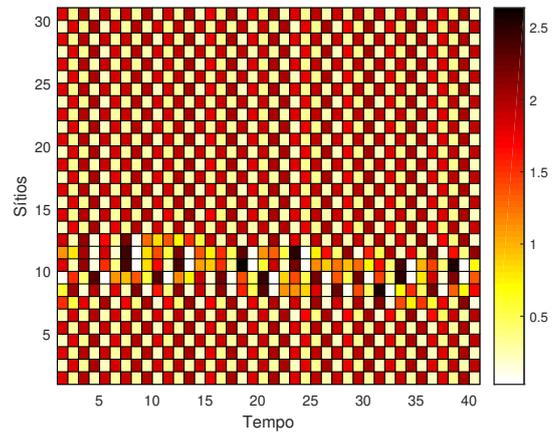


(c)

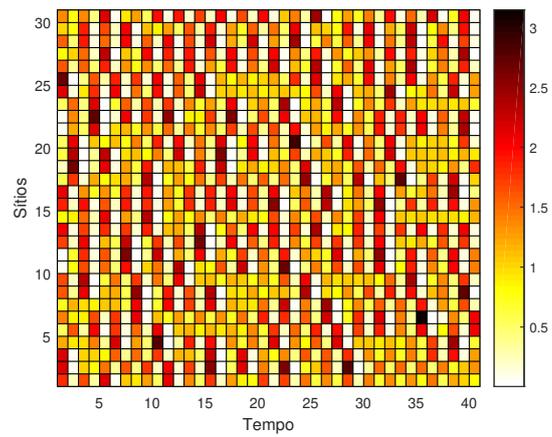
Figura 4.5: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

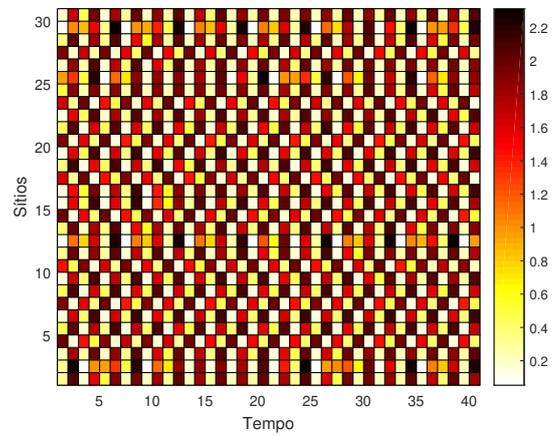


(b)

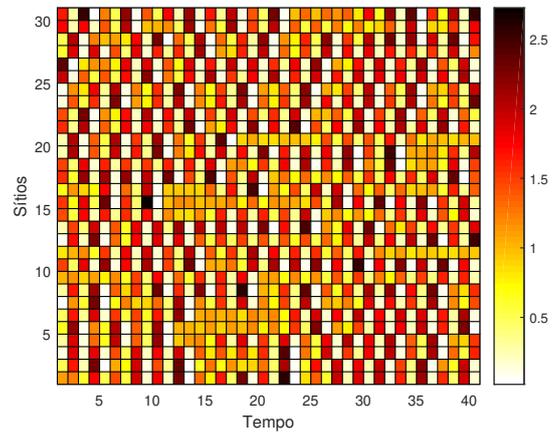


(c)

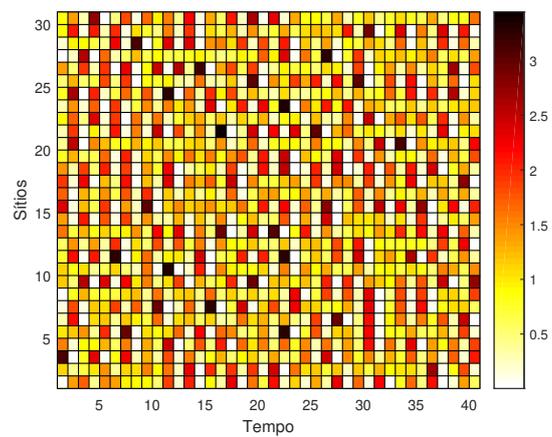
Figura 4.6: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

4.2 O caso em que $g(x) = 1/x$

Trabalharemos agora com a função de antiagregação $g(x) = 1/x$. Escolhemos esta função por ter um comportamento inverso ao da função de agregação $g(x) = x$ (trabalhada na seção anterior). Para esta escolha de função $g(x)$, o sistema (3.2), torna-se o modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\frac{1}{f(x_t^i)}}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \frac{1}{f(x_t^k)}} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Para esta escolha de função $g(x)$, temos que (3.18) converte-se em

$$\begin{aligned} \lambda_k^t = \lambda_k = & \left\{ 2 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right\} + \\ & \left\{ -2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} - \varrho_t - (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ -\varrho_t^2 - 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} - (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ -4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} - (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{D}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{D}_0)\|^{1/\tau} &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu \lambda_i^t| \right)^{1/\tau} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} (|1 - \mu \lambda_i|)^\tau)^{1/\tau} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n-1} \{|1 - \mu \lambda_i|\}. \end{aligned}$$

Logo, Λ é o raio espectral de $(I_{n-1} - \mu \bar{D})$, ou seja,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{|1 - \mu \lambda_i|\}, \quad (4.6)$$

onde $\bar{D} = \bar{D}_t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

Portanto, o número de Lyapunov transversal $L_\perp(x_0) = L(x_0)\Lambda$ tem número de Lyapunov dado por (3.15) e o quantificador Λ dado por (4.6).

Na Figura 4.8, podemos observar o comportamento de Λ conforme μ varia.

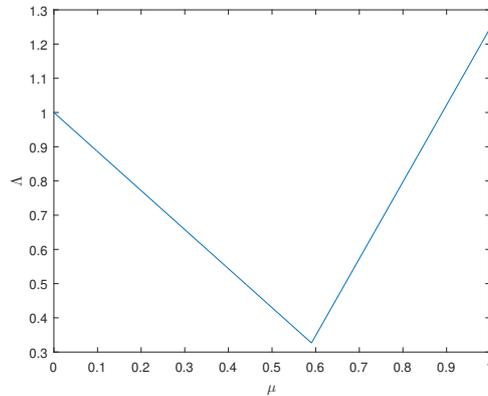


Figura 4.8: Λ em função de μ , com $\alpha_0 = 0,5$ e $n = 30$.

4.2.1 Simulações Numéricas

4.2.1.1 Número de Lyapunov transversal

Nas mesmas condições da primeira parte da Subseção 4.1.1, abordaremos aqui a variação do número de Lyapunov transversal em função da taxa de migração μ e do parâmetro r , utilizando a função exponencial logística, para a dinâmica local e a matriz de conexão C dada por (3.5) e (3.6) com α e α_0 intermediários.

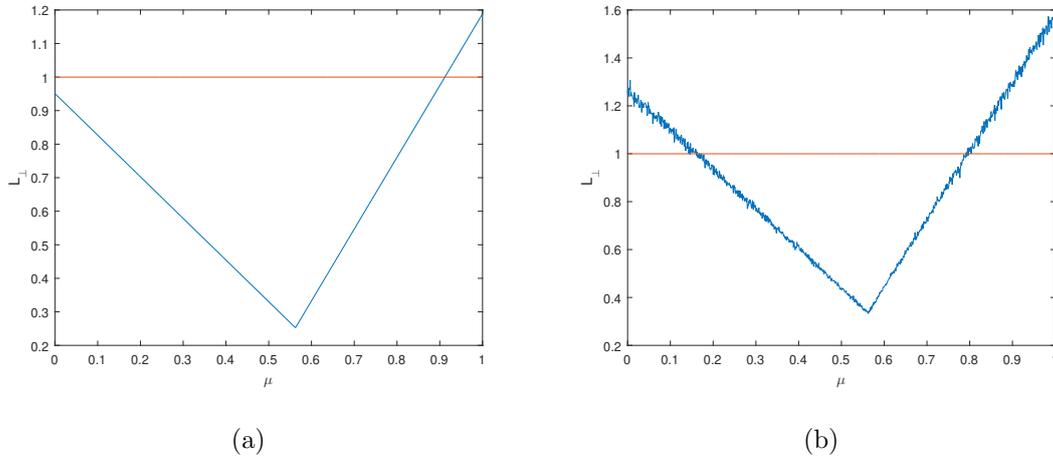


Figura 4.9: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

Analisando a Figura 4.9, temos que se $r = 2,5$ então $L_{\perp} < 1$ para $\mu \in [0; 0,912)$ e $L_{\perp} \geq 1$ se $\mu \geq 0,912$. No caso de $r = 2,8$ vale $L_{\perp} < 1$ para $\mu \in (0,162; 0,79)$, mais os valores de $\mu = 0,792$, $\mu = 0,794$, $\mu = 0,798$ e $\mu = 0,802$. Caso contrário, $L_{\perp} \geq 1$. Dessa forma, a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ .

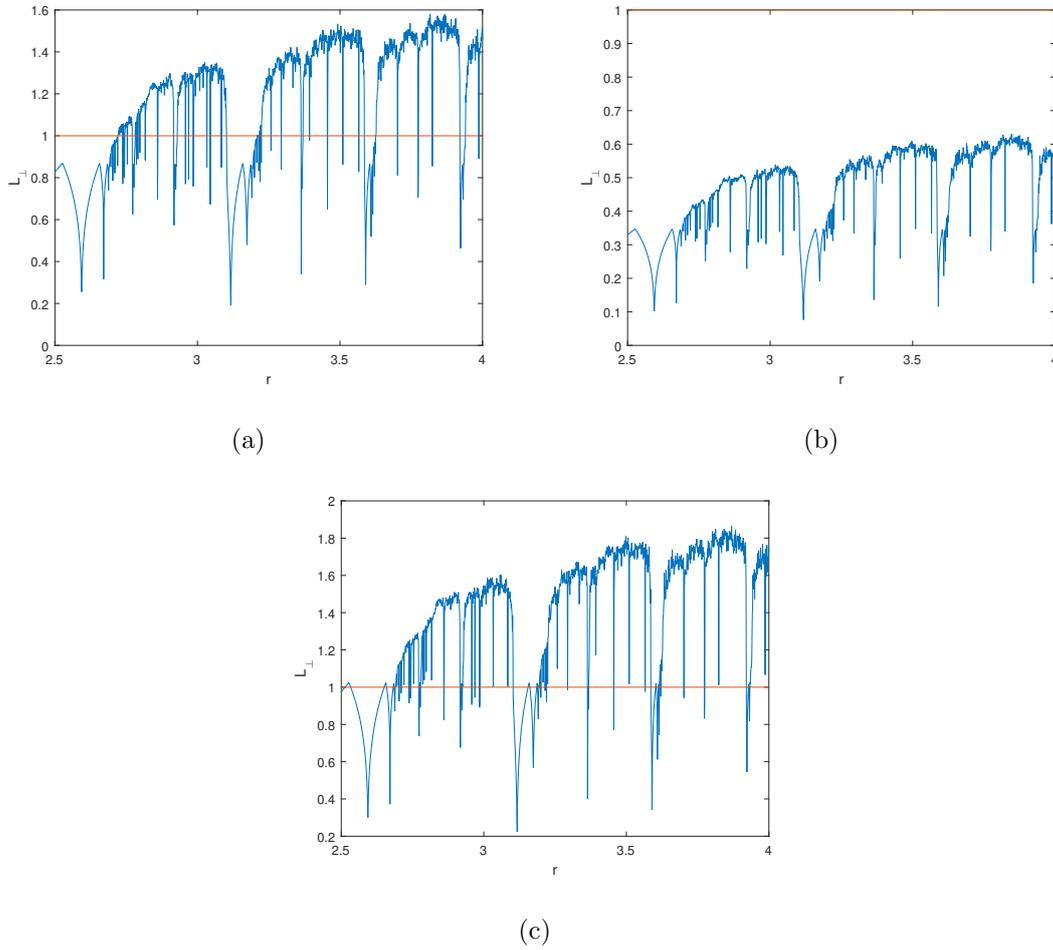


Figura 4.10: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Na Figura 4.10, para $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,9$ temos que para a maioria dos valores de r que $L_{\perp} > 1$. Entretanto, para $\mu = 0,5$ temos que $L_{\perp} < 1$, para todo valor de $r \in [2,5;4]$. Não conseguimos precisar, visualmente, qual das regiões é a maior, se é a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r ou a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r .

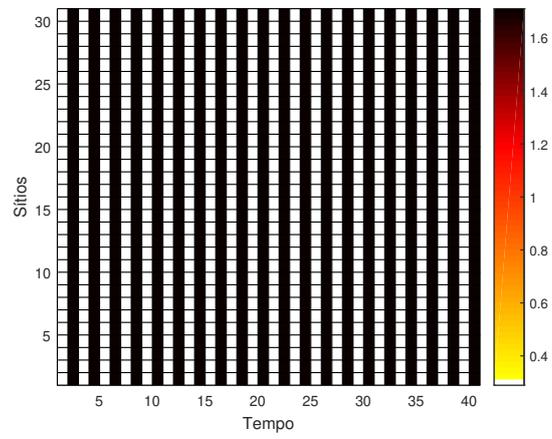
4.2.1.2 Espaço \times tempo

Neste lugar faremos gráficos do tipo espaço \times tempo com os mesmos objetivos e condições apresentados na segunda ramificação da Subseção 4.1.1.

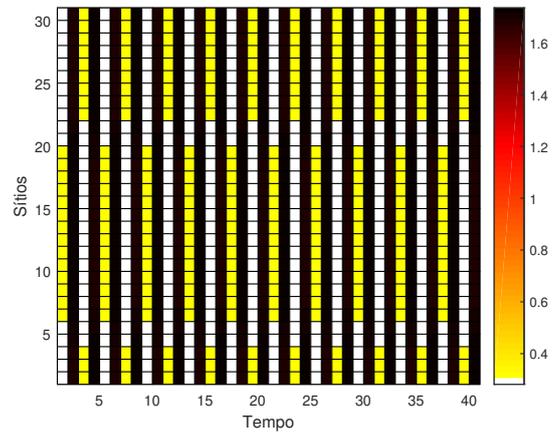
Podemos observar nas Figuras 4.11 e 4.12, onde $r = 2,5$, que ocorre sincronização somente para $\mu = 0,1$ em todas as conexões.

Para $r = 2,8$, analisando as Figuras 4.13 e 4.14, percebemos que não ocorre sincronização, para todas as conexões e valores da taxa de migração.

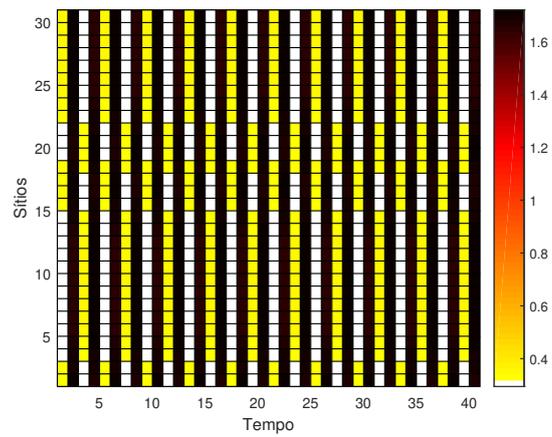
Ao analisar os gráficos espaço \times tempo, percebemos que o valor de r para o qual mais ocorre sincronização é $r = 2,5$ e o valor da taxa de migração é $\mu = 0,1$. Entretanto, todos os acoplamentos possuem a mesma ocorrência de sincronia.



(a)

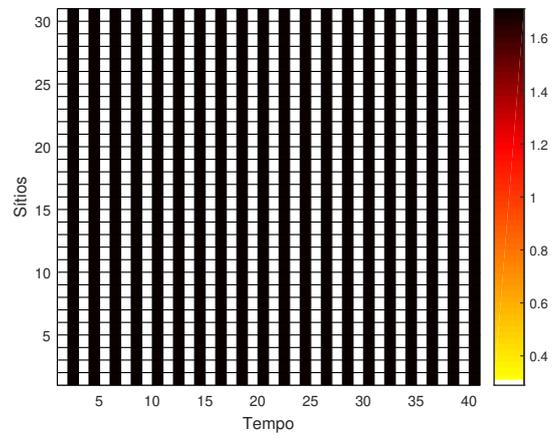


(b)

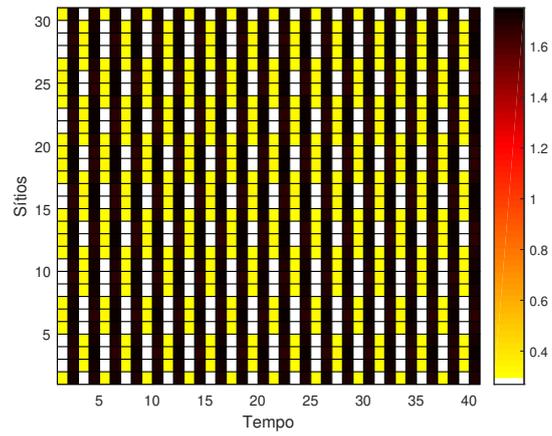


(c)

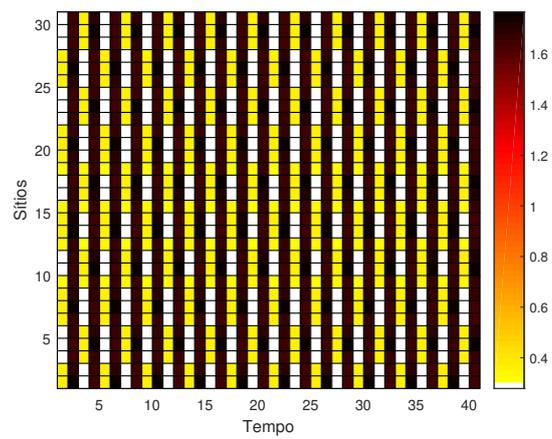
Figura 4.11: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

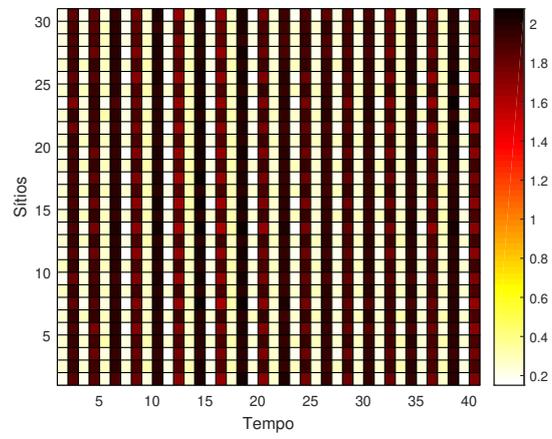


(b)

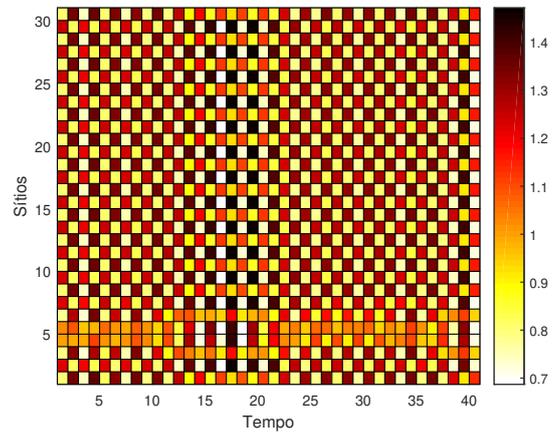


(c)

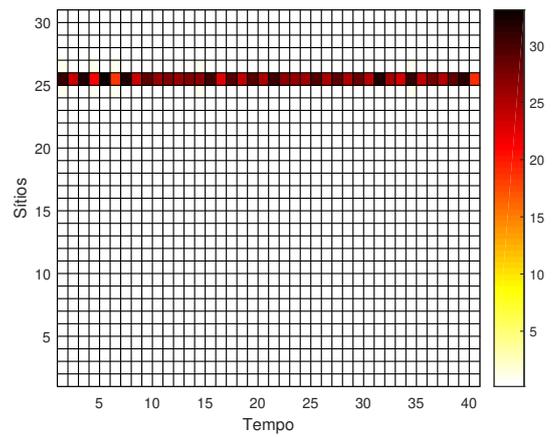
Figura 4.12: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

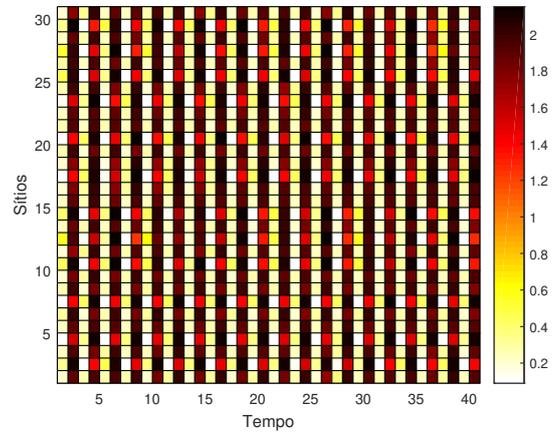


(b)

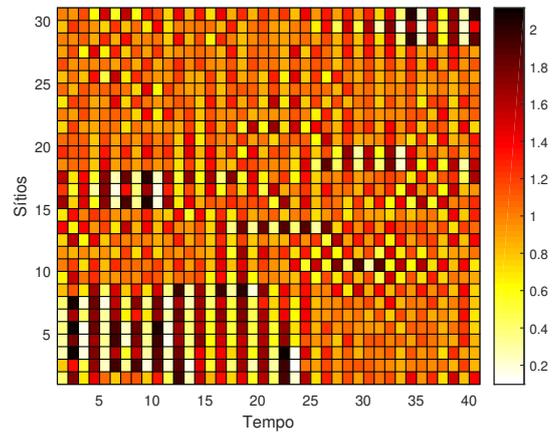


(c)

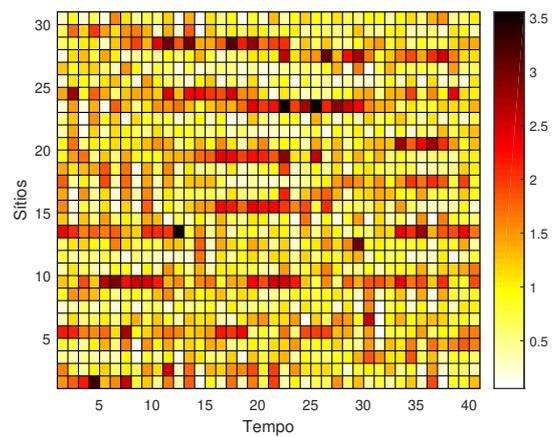
Figura 4.13: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.14: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

4.3 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$

Utilizaremos agora a função de agregação $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$, retirada do trabalho de Ylikarjula et al. [37]. O comportamento desta função $g(x)$, conforme x varia, pode ser observado na figura abaixo.

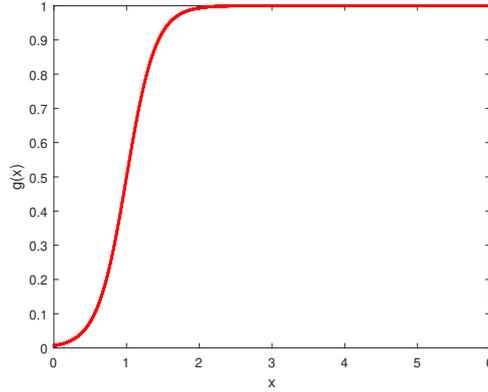


Figura 4.15: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$.

Para esta função $g(x)$ o sistema (3.2) torna-se o modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1 + e^{5(1-f(x_t^i))}} \right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1 + e^{5(1-f(x_t^k))}} \right)} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Os autovalores, dados por (3.18), transformam-se em

$$\begin{aligned} \lambda_k^t = & \left\{ 1 - \frac{5f(x_t)e^{5(1-f(x_t))}}{1+e^{5(1-f(x_t))}} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{5(1-f(x_t))}}{1+e^{5(1-f(x_t))}} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{5(1-f(x_t))}}{1+e^{5(1-f(x_t))}} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{5(1-f(x_t))}}{1+e^{5(1-f(x_t))}} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Logo, o quantificador $\Lambda(x_0)$ representado por (3.17) tem λ_i^t dado por (4.8).

Na Figura 4.16 podemos observar o comportamento de Λ , conforme μ varia, para diferentes valores de r .

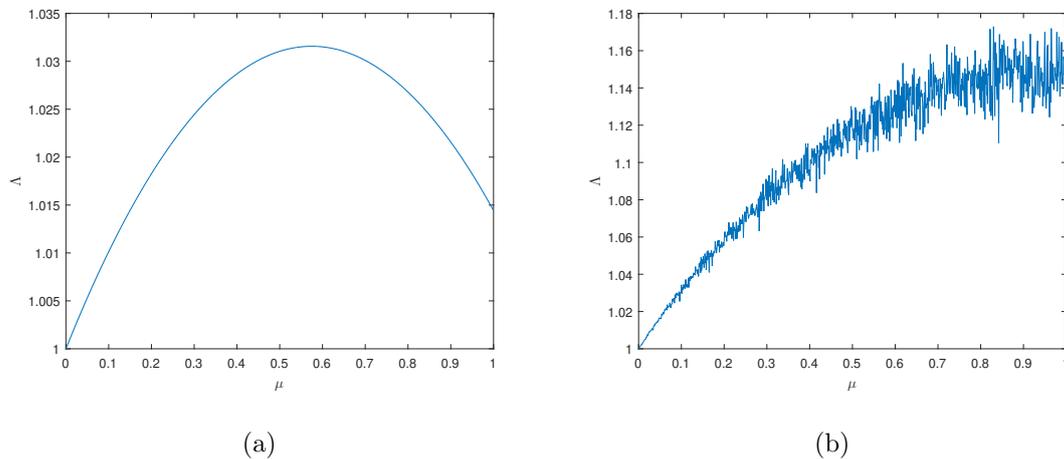
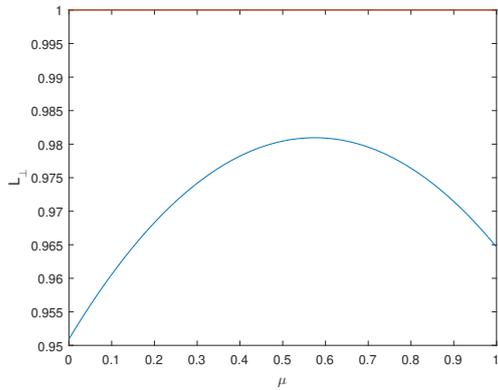


Figura 4.16: $\Lambda \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

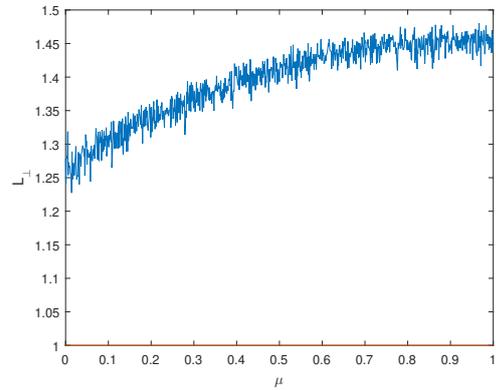
4.3.1 Simulações Numéricas

4.3.1.1 Número de Lyapunov transversal

Trabalharemos aqui a variação do número de Lyapunov transversal em função da taxa de migração μ e do parâmetro r , nas mesmas hipóteses e objetivos da primeira ramificação da Subseção 4.1.1.



(a)



(b)

Figura 4.17: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2, 5$;
 (b) $r = 2, 8$.

Observando a Figura 4.17, vemos que o número de Lyapunov transversal é menor que 1 para todo valor de μ se $r = 2, 5$. Quando $r = 2, 8$, L_{\perp} é sempre maior que 1, para todo valor da taxa de migração. Ambas as regiões de possível sincronia com relação a taxa de migração μ e impossível sincronia com relação a taxa de migração μ tem o mesmo tamanho.

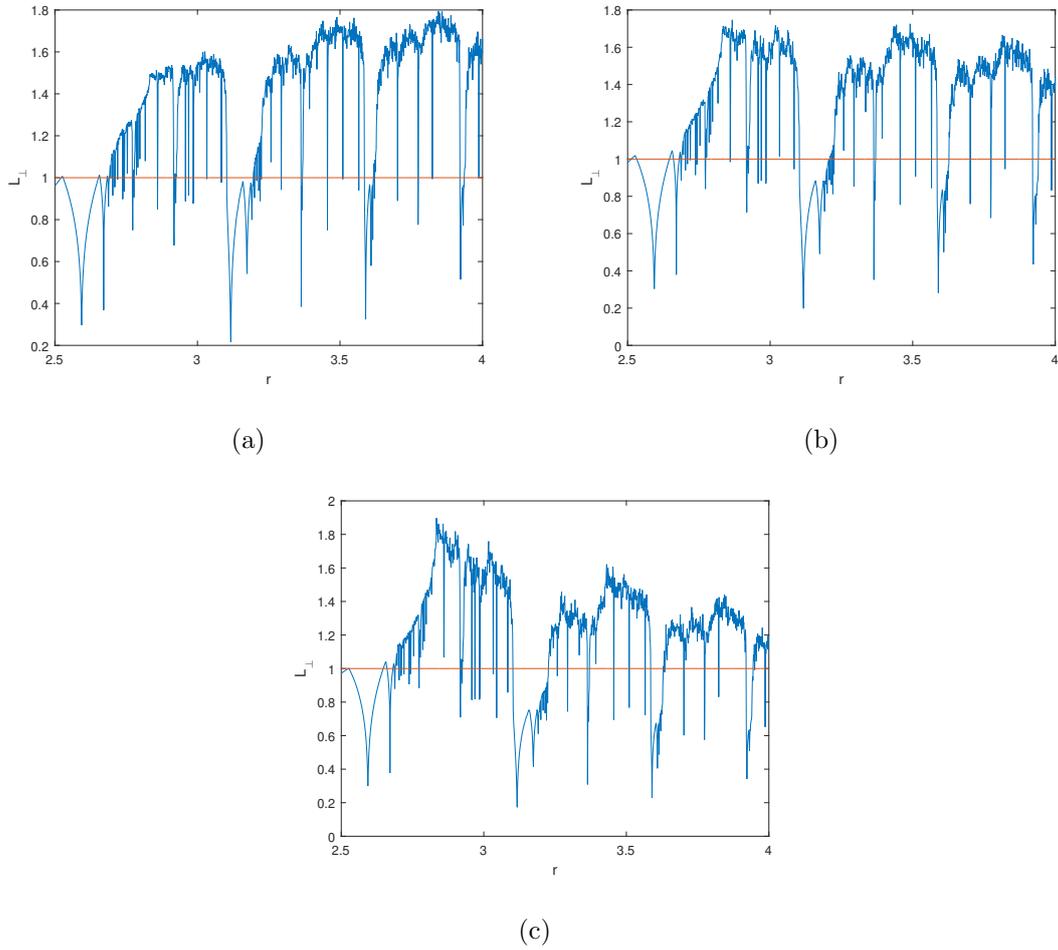


Figura 4.18: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Examinando a Figura 4.18, notamos que existem menos valores de r para os quais o número de Lyapunov transversal é menor do que 1. Constatamos, que a região de impossibilidade de sincronização com relação ao parâmetro r é maior que a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r .

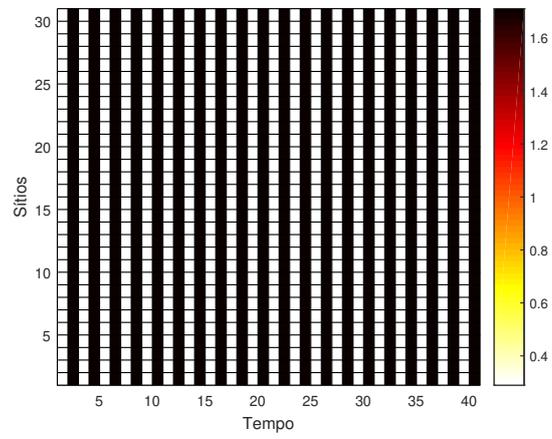
4.3.1.2 Espaço \times tempo

Faremos aqui gráficos do tipo espaço \times tempo com os mesmos objetivos e condições apresentados na segunda parte da Subseção 4.1.1.

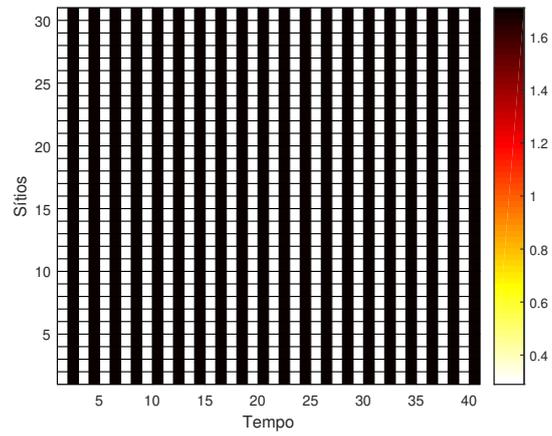
Começamos nossa análise para o caso em que o parâmetro $r = 2,5$. No caso da conexão ser a convexa simples, como na Figura 4.19, ocorre sincronização para todos os valores das taxas de migração considerados. Por sua vez para a rede convexa dinâmica, que é o caso da Figura 4.20, ocorreu sincronização só para $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,5$.

Para $r = 2,8$ observamos nas Figuras 4.21 e 4.22 que se a rede for convexa, não acontece sincronização para todos os valores de μ .

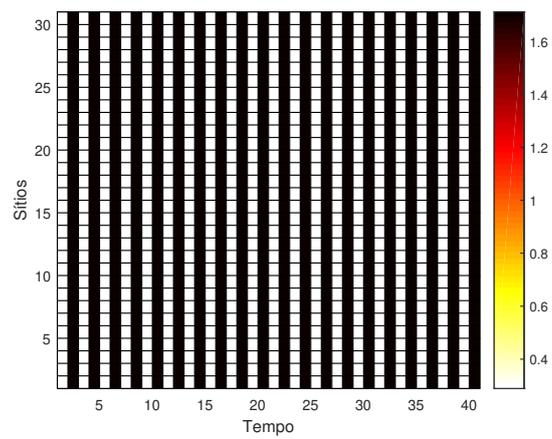
Observando os gráficos espaço \times tempo, constatamos que o valor da taxa de reprodução intrínseca, para o qual mais acontece sincronização é $r = 2,5$, enquanto os valores da taxa de migração são $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,5$. A conexão para a qual mais ocorreu sincronia foi a rede convexa simples.



(a)

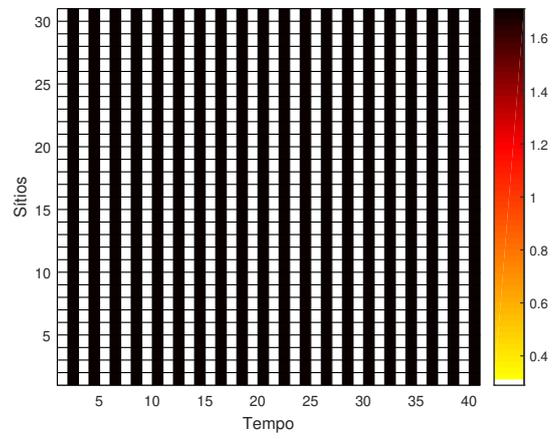


(b)

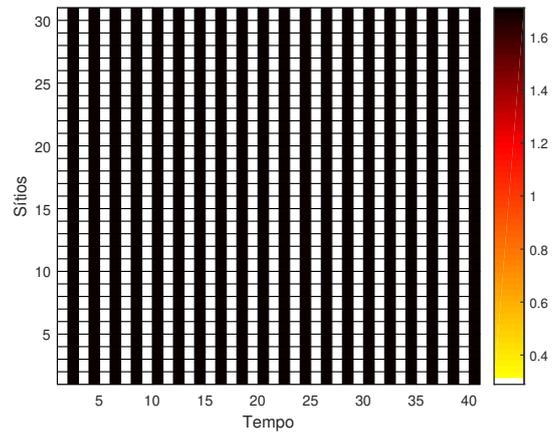


(c)

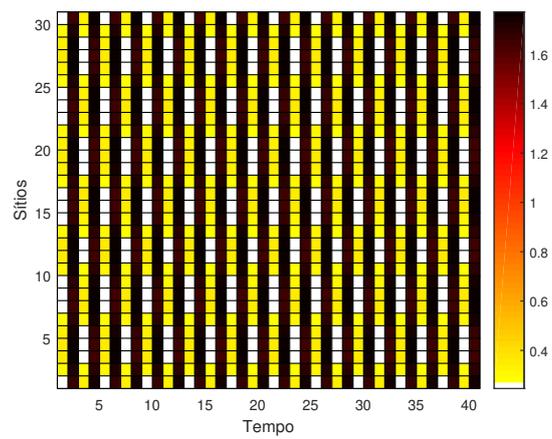
Figura 4.19: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

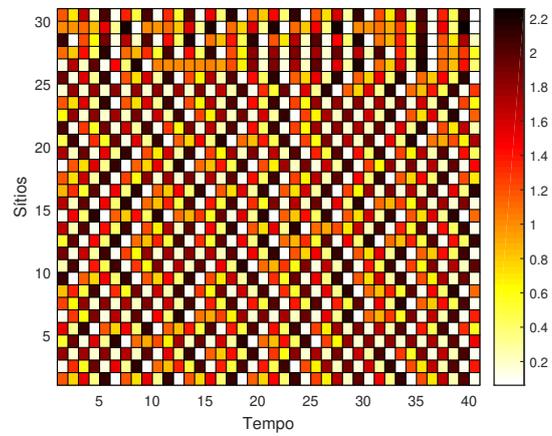


(b)

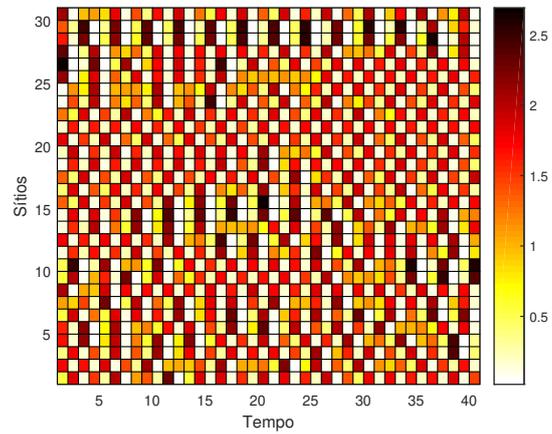


(c)

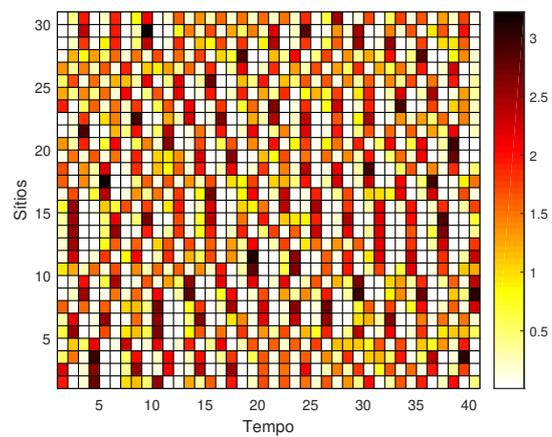
Figura 4.20: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

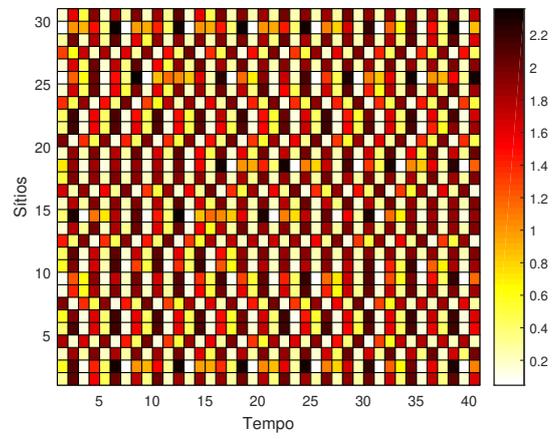


(b)

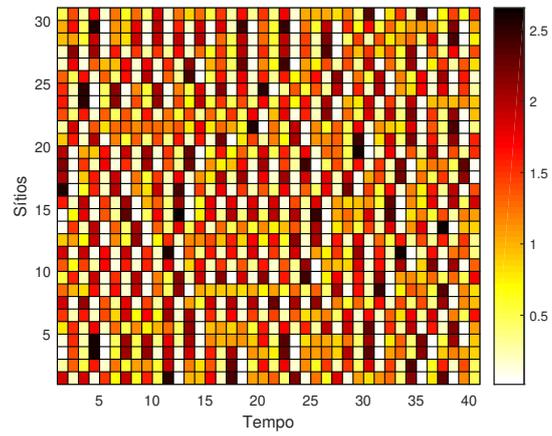


(c)

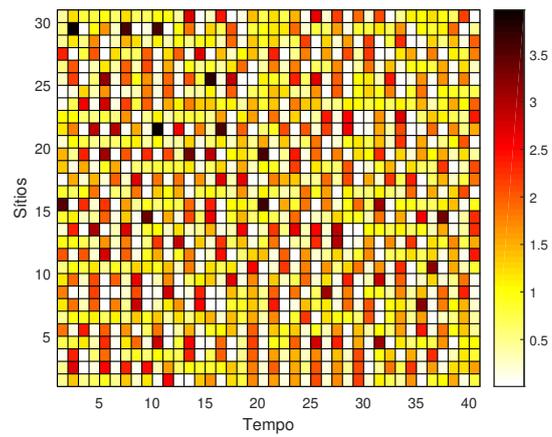
Figura 4.21: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.22: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

4.4 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$

Buscando um comportamento contrário ao da função $g(x)$ da seção anterior, consideremos aqui a função de antiagregação $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$, cujo comportamento pode ser observado, na figura a seguir, conforme x varia.

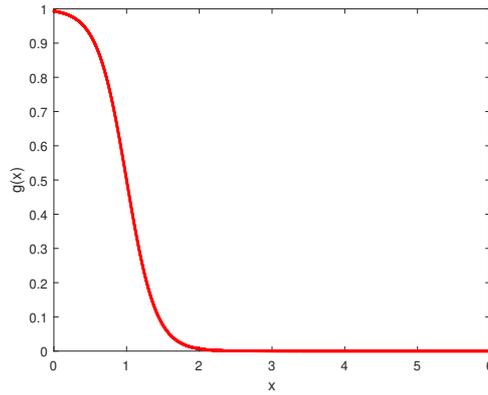


Figura 4.23: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$.

Para esta escolha da função $g(x)$ o sistema (3.2) converte-se no modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1-\mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1+e^{-5(1-f(x_t^i))}}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1+e^{-5(1-f(x_t^k))}}\right)} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Os autovalores, dados por (3.18), tomam a forma

$$\begin{aligned} \lambda_k^t = & \left\{ 1 - \frac{5f(x_t)e^{-5(1-f(x_t))}}{1+e^{-5(1-f(x_t))}} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{-5(1-f(x_t))}}{1+e^{-5(1-f(x_t))}} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{-5(1-f(x_t))}}{1+e^{-5(1-f(x_t))}} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ \frac{5f(x_t)e^{-5(1-f(x_t))}}{1+e^{-5(1-f(x_t))}} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1}\right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Assim, o quantificador $\Lambda(x_0)$ descrito por (3.17) tem λ_i^t dado por (4.10).

Na Figura 4.24 podemos observar o comportamento de Λ , conforme μ varia, para diferentes valores de r .

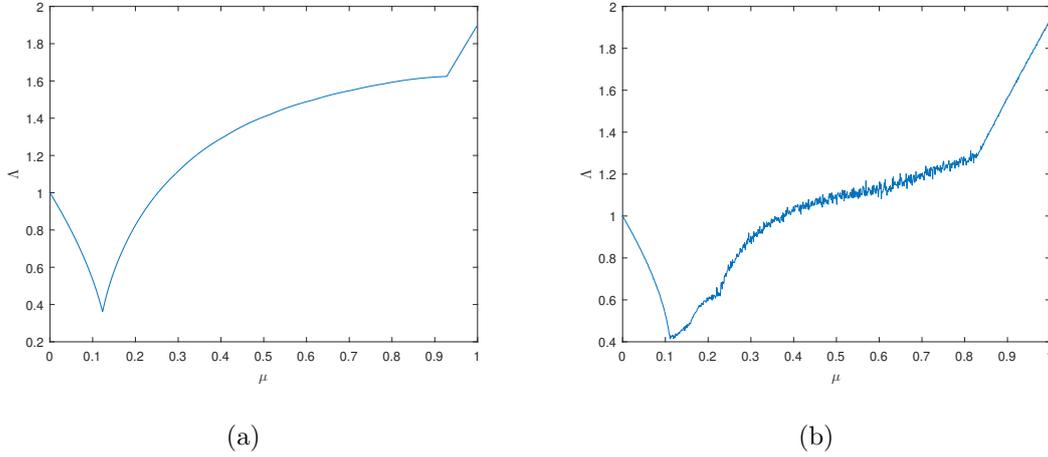


Figura 4.24: $\Lambda \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$;
(b) $r = 2,8$.

4.4.1 Simulações Numéricas

4.4.1.1 Número de Lyapunov transversal

Será trabalhado nesta parte o comportamento do número de Lyapunov transversal quando a taxa de migração μ e o parâmetro r variam. As hipóteses e objetivos são os mesmos da primeira ramificação da Subseção 4.1.1.

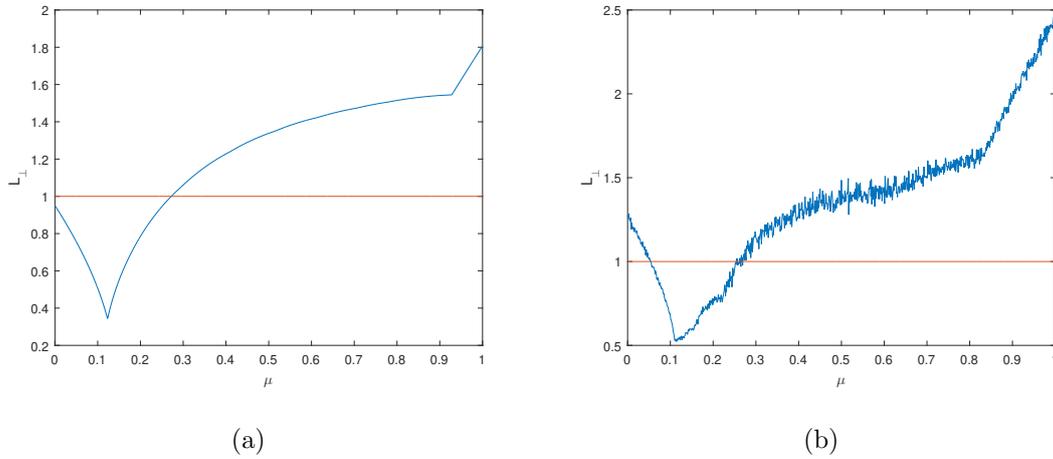


Figura 4.25: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

Examinando a Figura 4.25, temos quando $r = 2,5$ que $L_{\perp} < 1$ para $\mu < 0,2721$. Se $\mu \geq 0,2721$, então $L_{\perp} \geq 1$. Ao passo que para $r = 2,8$ obtemos que o número de Lyapunov transversal é menor que 1 no intervalo $[0,055; 0,258]$ e para $\mu = 0,262$, $\mu = 0,264$, $\mu = 0,265$ e $\mu = 0,266$. Caso contrário, $L_{\perp} \geq 1$. A região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ .

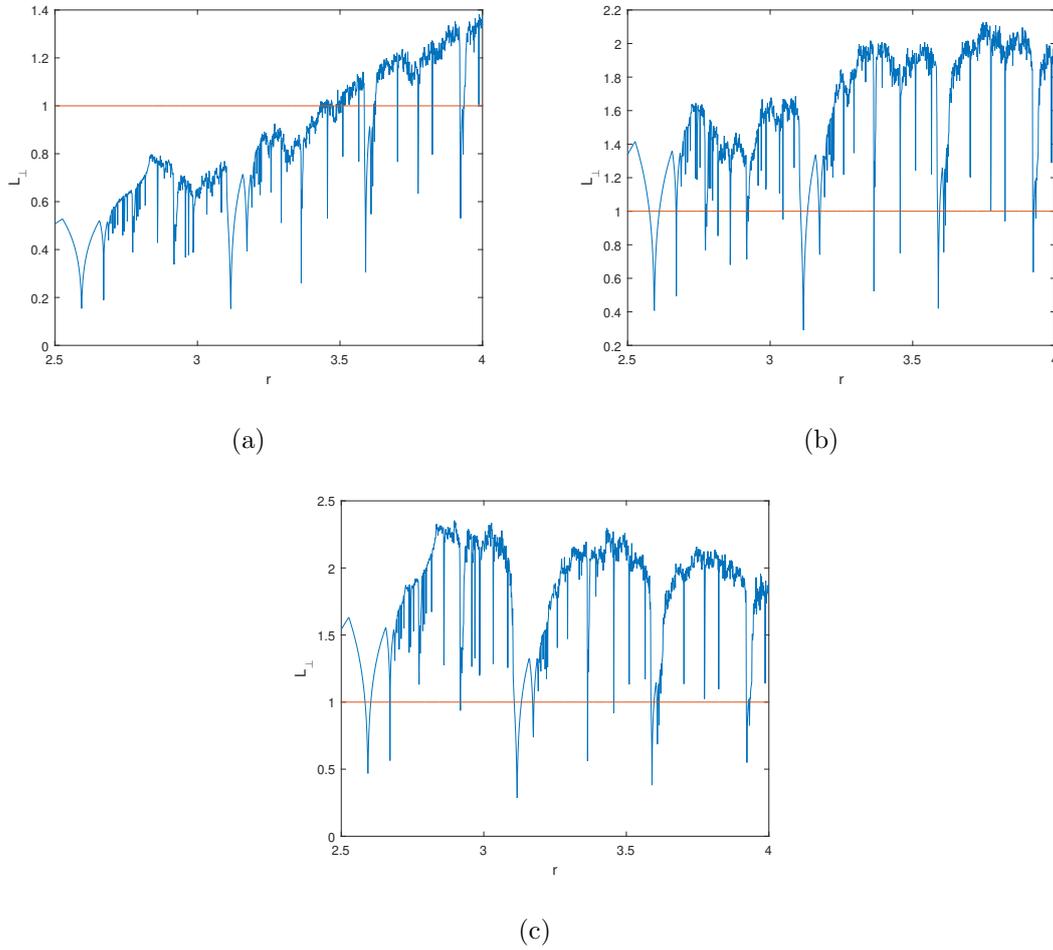


Figura 4.26: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

Explorando a Figura 4.26, notamos que existem mais valores de r para os quais o número de Lyapunov transversal está acima de 1 do que abaixo de 1. A maior região de possível sincronia entre as taxas de migrações, conforme o parâmetro r varia é $\mu = 0, 1$. Visualmente, a região onde não há possibilidade de sincronia com relação ao parâmetro r é maior que a região onde pode ocorrer sincronia com relação ao parâmetro r .

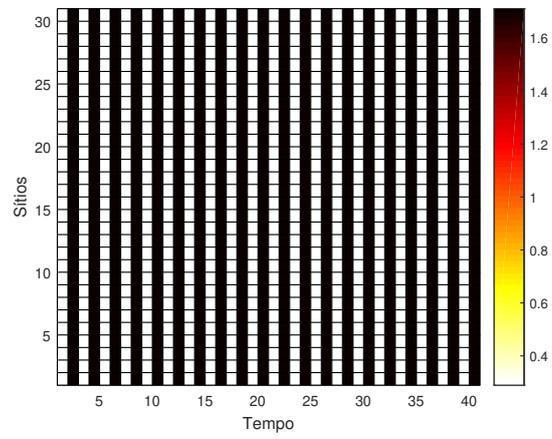
4.4.1.2 Espaço \times tempo

Apresentaremos aqui nesta ramificação gráficos do tipo espaço \times tempo. Os objetivos e condições são os mesmos apresentados na segunda parte da Subseção 4.1.1.

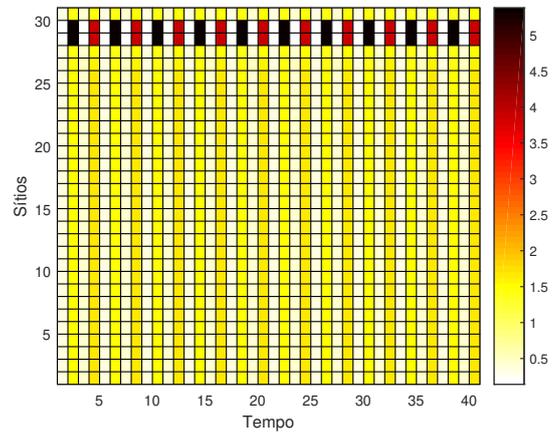
Iniciamos nossa análise para o caso em que $r = 2, 5$. Quando a conexão é convexa simples, Figura 4.27, acontece sincronização apenas para $\mu = 0, 1$. Quanto à sincronização, as mesmas conclusões em relação a rede convexa simples podem ser aplicadas a rede convexa dinâmica (Figura 4.28).

Observamos agora o cenário em que $r = 2, 8$. Na Figura 4.29 (conexão convexa simples), ocorre sincronização de órbita caótica apenas para $\mu = 0, 1$. Não existe sincronia para o acoplamento convexo dinâmico (Figura 4.30).

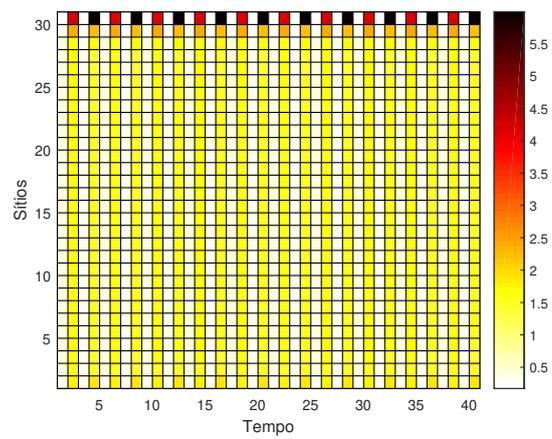
Verificando os gráficos espaço \times tempo, identificamos que o valor de r para o qual mais ocorre sincronização é $r = 2, 5$. O valor de μ para o qual mais aconteceu sincronia foi $\mu = 0, 1$ e a rede foi a rede convexa simples.



(a)

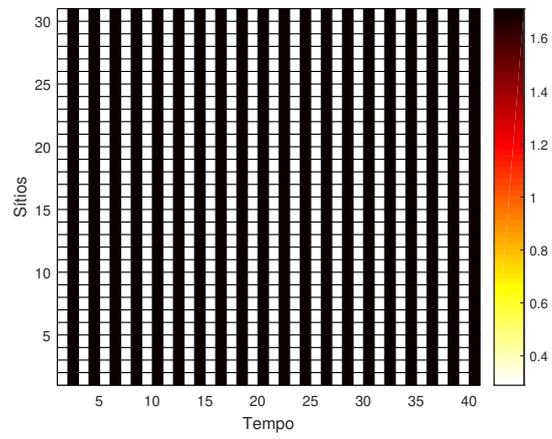


(b)

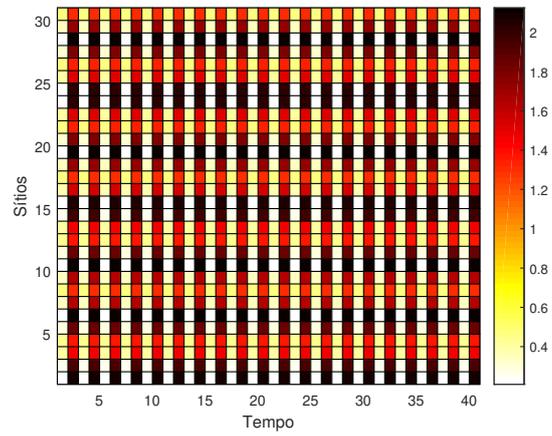


(c)

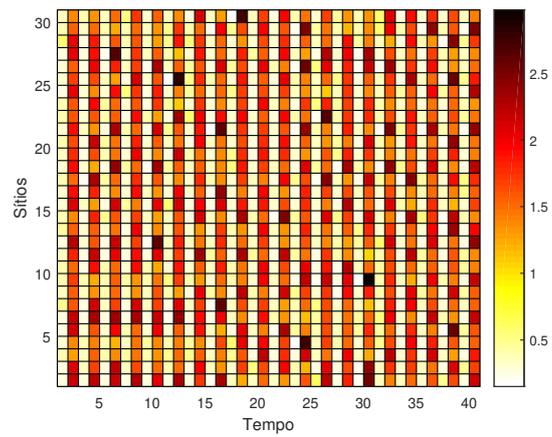
Figura 4.27: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

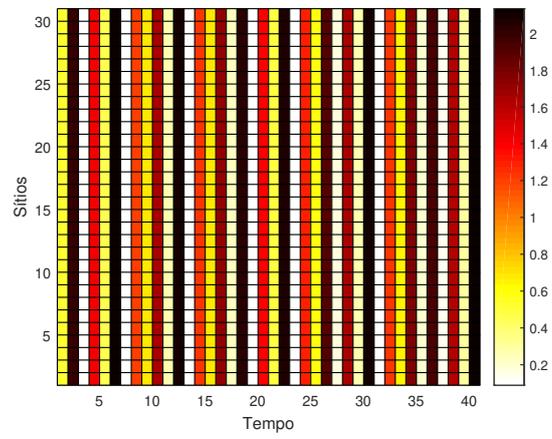


(b)

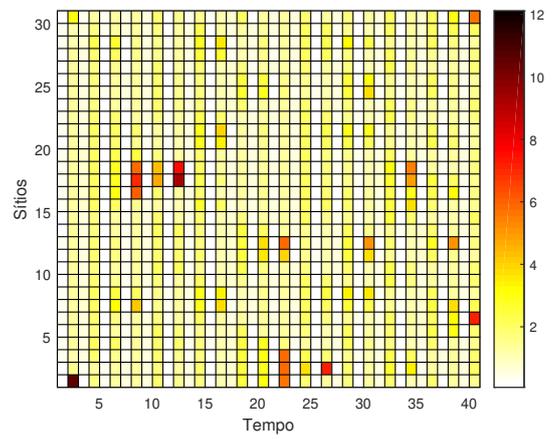


(c)

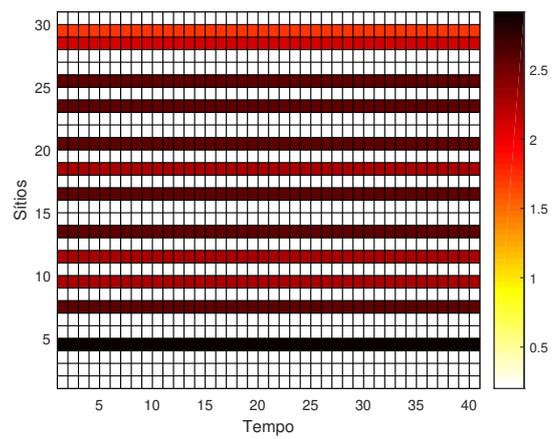
Figura 4.28: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

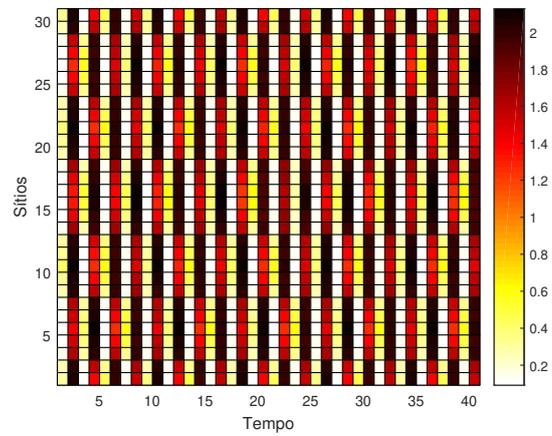


(b)

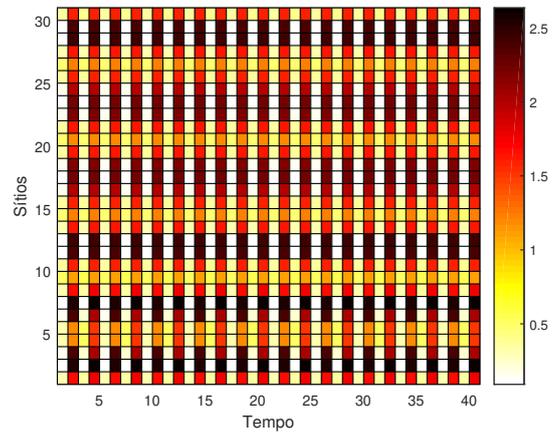


(c)

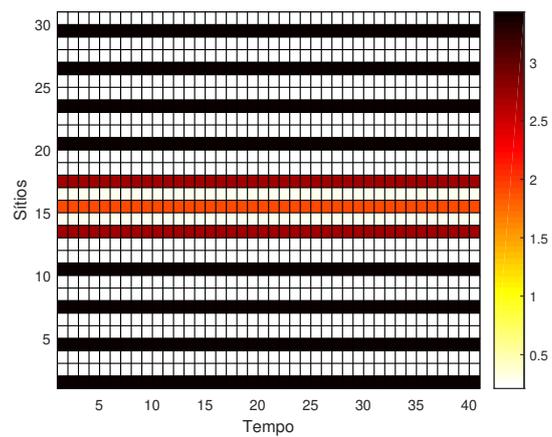
Figura 4.29: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.30: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

5 MODELO METAPOPOPULACIONAL COM MOVIMENTAÇÃO DEPENDENTE DA DIFERENÇA DE DENSIDADE

Trabalharemos neste capítulo o modelo metapopulacional com movimentação dependente da diferença de densidade. Estudaremos como o modelo é composto e a estabilidade do estado síncrono. Através de simulações numéricas observaremos o comportamento do número de Lyapunov transversal conforme a taxa de migração e o parâmetro r variam e ainda analisaremos a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações através de gráficos espaço \times tempo.

5.1 O modelo

Consideremos uma metapopulação homogênea formada por n sítios enumerados de 1 até n , assim como na Seção 3.1. Seja $x_t^i \in \mathbb{R}$ a densidade de indivíduos do sítio i no instante de tempo t e f uma função, suave, que descreve o processo de dinâmica local. Portanto, na ausência de migração entre os sítios, a dinâmica de um sítio isolado é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Quando se inicia o processo de migração, a cada instante de tempo, uma fração μ de indivíduos, $\mu \in [0, 1]$, deixa um dado sítio j e migra para outros sítios mais próximos i e uma fração c_{ij} chegará ao sítio i . Supomos que não existe perdas durante essa movimentação, isto é, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, e que $c_{ii} = 0$. Os elementos c_{ij} formam a matriz de conexão $C = [c_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, dada num primeiro momento, por uma combinação convexa simples (matriz (3.5)) e em um segundo momento por uma matriz convexa dinâmica (matriz (3.6)).

Com o intuito de montar um sistema de equações que descreve a dinâmica metapopulacional, consideremos os operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} (definidos na Seção 3.1) e definimos o operador dispersão com diferença de densidade:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (MD_1(x^1, \dots, x^n), \dots, MD_n(x^1, \dots, x^n)),$$

onde

$$MD_i(x^1, \dots, x^n) = (1 - \mu)x^i + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{(x^i - x^j)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} (x^k - x^j)} x^j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O operador dispersão com diferença de densidade é constituído de duas partes. A primeira é a densidade de indivíduos que permanece no sítio i e a segunda é uma soma. Essa soma é formada pelos imigrantes que chegam no sítio i multiplicados pelo quociente da diferença de densidade entre os sítios i e j pela média ponderada do conjunto das diferenças de densidades $\{x^1 - x^j, x^2 - x^j, \dots, x^n - x^j\}$ com pesos $\{c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\}$, respectivamente.

Como o processo de migração ocorre depois de terminado o processo de dinâmica local, podemos aplicar a composição $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \mathcal{G} \circ \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F}$, no vetor populacional, $X_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)$, para encontrarmos o vetor X_{t+1} , ou seja, $X_{t+1} = \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(X_t)$.

Desse modo,

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} (1 - \mu)f(x_t^1) + \sum_{j=1}^n \mu c_{1j} \frac{g(f(x_t^1) - f(x_t^j))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k) - f(x_t^j))} f(x_t^j) \\ (1 - \mu)f(x_t^2) + \sum_{j=1}^n \mu c_{2j} \frac{g(f(x_t^2) - f(x_t^j))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k) - f(x_t^j))} f(x_t^j) \\ \vdots \\ (1 - \mu)f(x_t^n) + \sum_{j=1}^n \mu c_{nj} \frac{g(f(x_t^n) - f(x_t^j))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k) - f(x_t^j))} f(x_t^j) \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{g(f(x_t^i) - f(x_t^j))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k) - f(x_t^j))} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Na equação acima, o primeiro termo no lado direito representa os indivíduos que permanecem no sítio i no instante de tempo t , enquanto o segundo termo descreve os indivíduos que partem dos sítios vizinhos e chegam no sítio i , levando em consideração a diferença de densidade entre o sítio de destino e o de origem e uma média ponderada das diferenças de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho.

Assim como para o modelo metapopulacional (3.2), vale aqui que para uma função $g(x)$ crescente teremos uma função de agregação e para uma função $g(x)$ decrescente uma antiagregação. Este modelo metapopulacional apresenta restrições quanto a escolha da função $g(x)$, pois a função g aplicada na diferença de densidade em (5.2) deve resultar em um valor positivo.

5.2 Sincronização

Por definição a sincronização do sistema (5.2) acontece quando $x_t^i = x_t$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Sendo assim, utilizando essa condição em (5.2), obtemos

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{g(0) \sum_{j=1}^n c_{ij}}{g(0) \sum_{k=1}^n c_{kj}} f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Por hipótese $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$. Acrescentando a essa hipótese a suposição de que

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

a matriz C torna-se duplamente estocástica, e assim

$$x_{t+1}^i = f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado. Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Vamos agora linearizar o sistema (5.2) em torno de uma órbita sincronizada $z_t = (x_t, x_t, \dots, x_t)$ desse sistema. Tomemos X_t uma perturbação do estado sincronizado ($X_t = z_t + \Delta_t$, onde Δ_t é uma pequena perturbação). Logo,

$$X_{t+1} = \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(X_t) = \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(z_t + \Delta_t).$$

Expandindo em série de Taylor, segue que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(z_t + \Delta_t) = \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(z_t) + J(z_t)\Delta_t + O(\Delta_t^2), \quad (5.3)$$

onde $J(z_t)$ é a matriz Jacobiana de $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ aplicada na órbita sincronizada, dada por

$$J(z_t) = f'(x_t) \begin{cases} (1 - \mu) + \frac{\mu g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^n c_{ik}^2\right), & \text{para } i = j, \\ \mu \left[\frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \sum_{k=1}^n c_{ik}(-c_{jk}) + c_{ij} \right], & \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (5.4)$$

Procedendo como na Seção 3.3, decorre que a linearização do sistema (5.2) em torno da órbita sincronizada é dada por

$$\Delta_{t+1} = J(z_t)\Delta_t, \quad (5.5)$$

onde $J(z_t)$ é dado por (5.4).

5.3 Estabilidade do Estado Síncrono

Assim como no capítulo anterior, queremos determinar se as órbitas que iniciam próximas do estado sincronizado, serão atraídas para este estado. Para isso, linearizamos o sistema (5.2) em torno da órbita sincronizada z_t e obtemos de acordo com (5.5)

$$\Delta_{t+1} = J(z_t)\Delta_t, \quad (5.6)$$

com $J(z_t)$ dado por

$$J(z_t) = \Phi_t f'(x_t), \quad (5.7)$$

onde $\Phi_t = I_n - \mu M_t$, I_n é a matriz identidade de ordem n e $M_t = \text{circ}(m_0^t, m_1^t, \dots, m_{n-1}^t)$, com $m_3^t = m_4^t = \dots = m_{n-3}^t$, $m_{n-2}^t = m_2^t$, $m_{n-1}^t = m_1^t$,

$$\begin{aligned} m_0^t &= 1 - \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[1 - 2\varrho^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right], \\ m_1^t &= \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t, \\ m_2^t &= \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \\ m_3^t &= \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1}, \end{aligned}$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$.

Sendo a matriz M_t circulante, existe uma matriz F que diagonaliza a matriz M , ou seja, $M = FEF^{-1}$, onde $F = [f_{ij}]$ é a matriz de Fourier, definida em

(2.4) e $E_t = \text{diag}(\beta_0, \beta_1^t, \dots, \beta_{n-1}^t)$, sendo $\beta_0, \beta_1^t, \dots, \beta_{n-1}^t$, os autovalores da matriz M_t .

Posto que $\sum_{j=0}^{n-1} m_j^t = 0$, resulta que $\beta_0 = 0$ é um autovalor simples da matriz M_t associado ao autovetor $v = (1, 1, \dots, 1)^T$, pois

$$\begin{aligned} M_t v &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} m_j^t, \sum_{j=0}^{n-1} m_j^t, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} m_j^t \right)^T \\ &= (0, 0, \dots, 0)^T \\ &= 0v. \end{aligned}$$

Desta maneira, a matriz Φ_t toma a configuração

$$\Phi_t = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} - \mu \bar{E}_t & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \quad (5.8)$$

onde $\bar{E}_t = \text{diag}(\beta_1^t, \beta_2^t, \dots, \beta_{n-1}^t)$.

Observemos que $\phi = 1$ é um autovalor simples de Φ_t e seu correspondente autoespaço é exatamente a diagonal do espaço de fase. Esta, por sua vez, é propriamente o estado sincronizado. Isto significa, que as perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. Por outro lado, as perturbações no espaço gerado pelos autovalores de $(I_{n-1} - \mu \bar{E}_t)$ são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade assintótica. Logo, precisamos dedicar a nossa atenção a elas. Assim, basta considerarmos

$$J(z_t) = F[(I_{n-1} - \mu \bar{E}_t) f'(x_t)] F^{-1},$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu \bar{E}_t) f'(x_t) \Delta_t.$$

Tomando uma perturbação inicial Δ_0 qualquer, obtemos

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu \bar{E}_{t-1})f'(x_{t-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{E}_1)f'(x_1)(I_{n-1} - \mu \bar{E}_0)f'(x_0)\Delta_0.$$

Sendo assim, a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| O_{\tau-1} \cdots O_1 O_0 \|^{1/\tau} < 1, \quad (5.9)$$

onde $O_t = (I_{n-1} - \mu \bar{E}_t)f'(x_t)$, com $t = 0, 1, 2, \dots$

Podemos escrever,

$$\| O_{\tau-1} \cdots O_1 O_0 \| = \|(I_{n-1} - \mu \bar{E}_t)^\tau \| \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|.$$

Sendo assim, temos que

$$L_\perp(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| O_{\tau-1} \cdots O_1 O_0 \|^{1/\tau} = L(x_0)\Gamma(x_0), \quad (5.10)$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}, \quad (5.11)$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em x_0 e

$$\Gamma(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{E}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{E}_0)\|^{1/\tau}. \quad (5.12)$$

Do mesmo modo que no Capítulo 3, denominaremos $L_\perp(x_0)$ de número de Lyapunov transversal, com órbita iniciando em x_0 .

Supondo que a função f preserva a medida natural ρ e também que $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$ pelo Teorema de Birkoff (Proposição 2.1) obtemos que (5.11) existe para quase todo x_0 e é independente de x_0 .

Se acrescentarmos a hipótese de que $\ln^+ \|(I_{n-1} - \mu \bar{E}_t)\| \in L^1(\rho)$, segue do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec (Proposição 2.2) que o limite (5.12), a menos de um conjunto de medida ρ nula, existe para todo x_0 , independe de x_0 e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(I_{n-1} - \mu \bar{E}_{\tau-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu \bar{E}_0)\|^{1/\tau} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |1 - \mu \beta_i^t| \right)^{1/\tau} \quad (5.13)$$

Analogamente ao Capítulo 3, através de (2.5) podemos encontrar uma forma para (5.13):

$$\begin{aligned} \beta_k^t = & \left\{ 1 - \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ \frac{g'(0)f(x_t)}{g(0)} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Portanto, $\Gamma(x_0)$ representado por (5.13) tem β_i^t dado por (5.14).

Baseado no exposto acima, podemos estabelecer um critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.

Teorema 5.1. *Consideremos o sistema (5.2), com a matriz C dada por (3.5) ou (3.6) e f uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ invariante com relação a medida natural ρ e $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função de classe C^1 . Então o número de Lyapunov transversal L_\perp do atrator sincronizado é dado pelo produto $L\Gamma$, onde L é dado por (5.11) e Γ por (5.13). Além disso, se $L_\perp < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.*

5.4 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$

Para esta função de agregação $g(x)$, o sistema (5.2) torna-se o modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1 + e^{5[1-(f(x_t^i)-f(x_t^j))]} \right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1 + e^{5[1-(f(x_t^k)-f(x_t^j))]} \right)} \right)}{f(x_t^j)}, \quad (5.15)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Os autovalores, dados por (5.14), alteram-se para

$$\begin{aligned} \beta_k^t = & \left\{ 1 - \frac{5e^5}{1+e^5} f(x_t) \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} f(x_t) \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} f(x_t) \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} f(x_t) \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Logo, o quantificador $\Gamma(x_0)$ representado por (5.13) tem β_i^t dado por (5.16).

O comportamento de Γ , conforme μ varia, para diferentes valores de r pode ser visto na Figura 5.1.

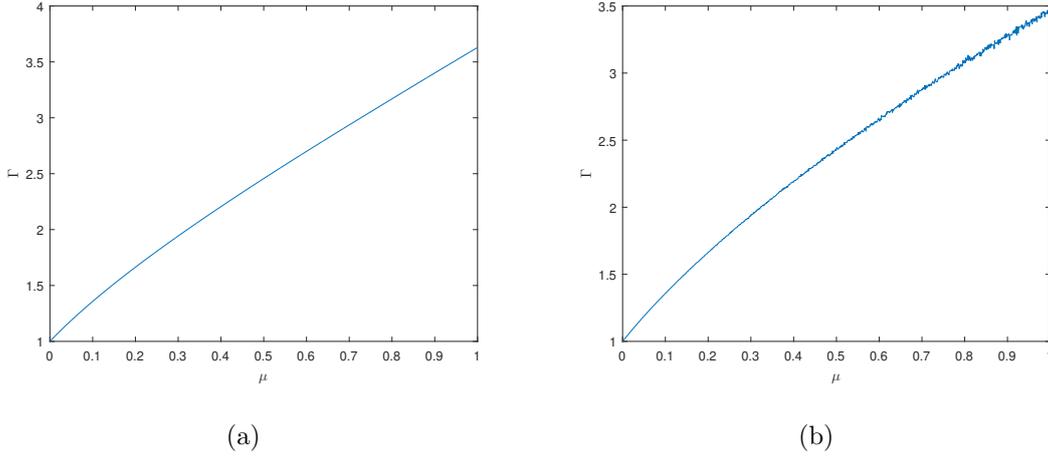


Figura 5.1: $\Gamma \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

5.4.1 Simulações Numéricas

5.4.1.1 Número de Lyapunov transversal

Procederemos nesta ramificação análise do número de Lyapunov transversal quando a taxa de migração μ e o parâmetro r variam. A função de dinâmica local será a função exponencial logística e a matriz de conexão C será a matriz

convexa simples (com $\alpha = 0,5$) e a matriz convexa dinâmica (com $\alpha_0 = 0,5$). As condições em que ocorrem as simulações são as mesmas da primeira parte da Subseção 4.1.1.

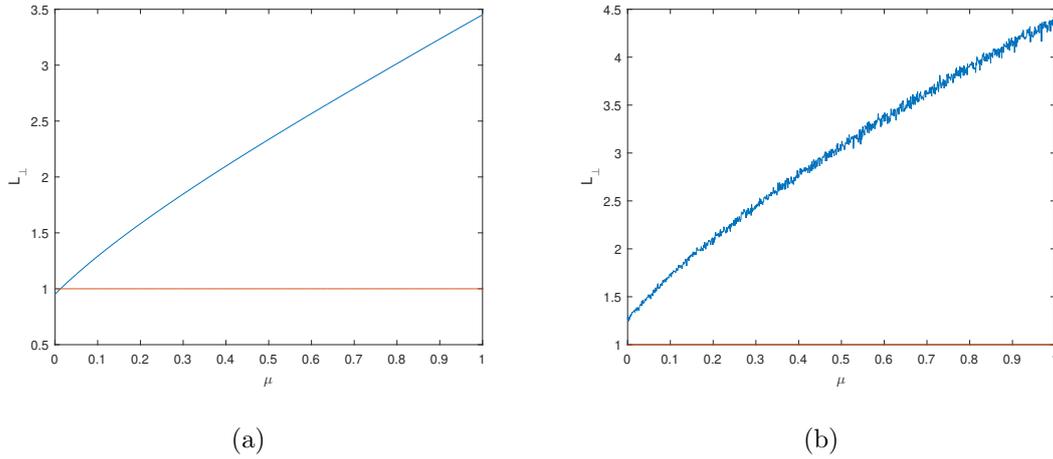


Figura 5.2: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

Examinando a Figura 5.2, observamos que para $r = 2,5$ o número de Lyapunov transversal está abaixo de 1 somente se $\mu < 0,0013$. Caso contrário, $L_{\perp} \geq 1$. Quando $r = 2,8$ o número de Lyapunov transversal é superior a 1 para toda taxa de migração. Claramente a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ .

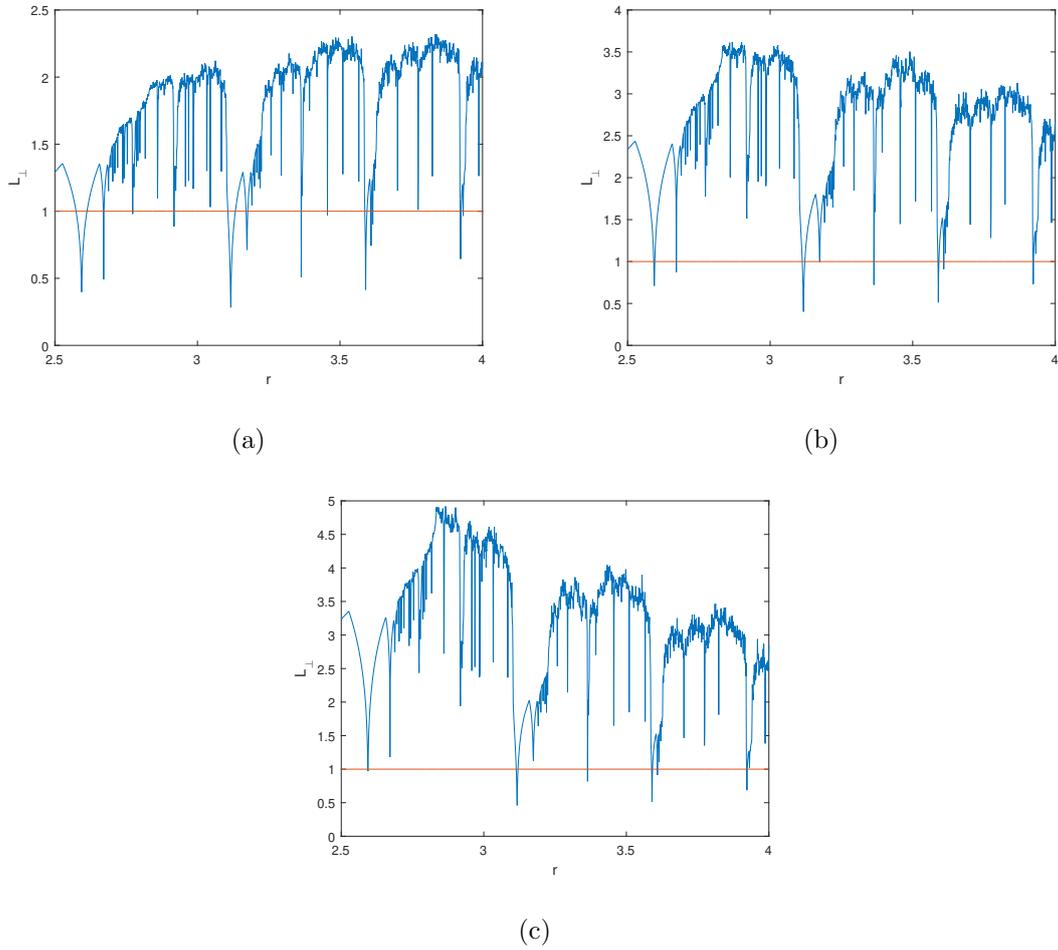


Figura 5.3: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Verificamos através da Figura 5.3, que para a maioria dos valores de r o número de Lyapunov transversal está acima de 1. A maior região de possível sincronia entre as taxas de migrações, conforme o parâmetro r varia é $\mu = 0,1$. Além disso, a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r é menor que a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r .

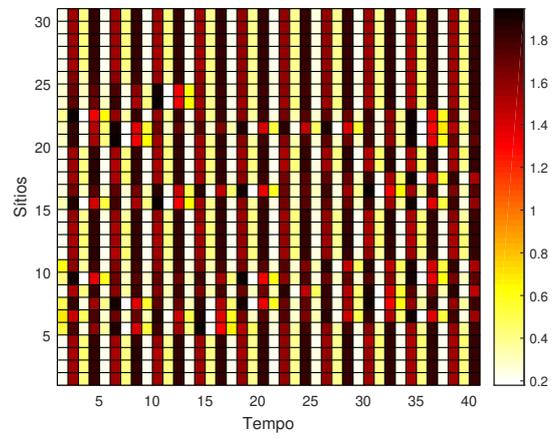
5.4.1.2 Espaço \times tempo

A seguir apresentamos gráficos do tipo espaço \times tempo, com o objetivo de analisar a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações. As condições são as mesmas apresentadas na segunda parte da Subseção 4.1.1.

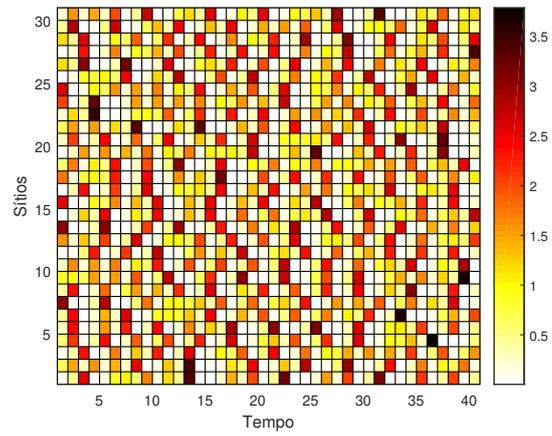
Observamos nas Figuras 5.4 e 5.5, onde $r = 2, 5$, que não ocorre sincronização para nenhuma taxa de migração.

Novamente não existe sincronia para nenhum valor de μ nas Figuras 5.6 e 5.7, em que o parâmetro r é igual a 2, 8.

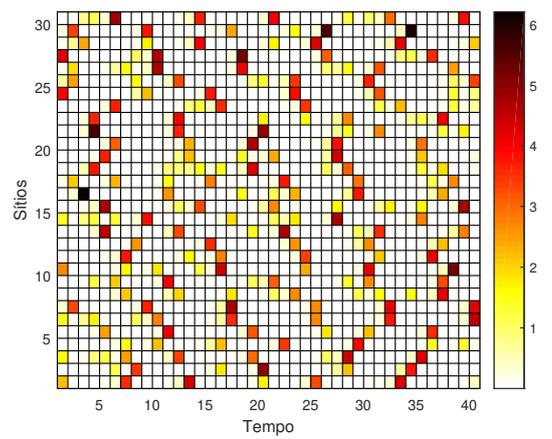
À medida que observamos os gráficos espaço \times tempo, constatamos que quanto ao valor da taxa de reprodução intrínseca, ao valor da taxa de dispersão e ao acoplamento, todos se comportaram igualmente em relação à ocorrência de sincronização.



(a)

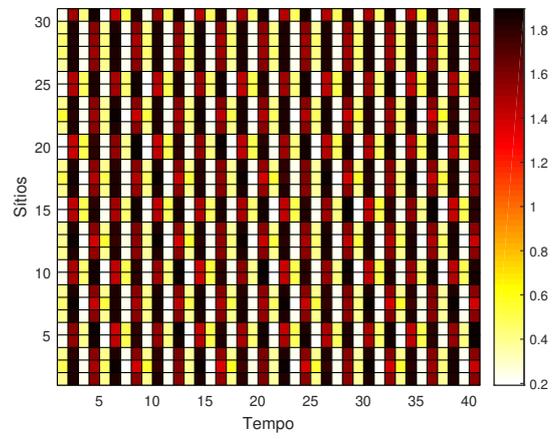


(b)

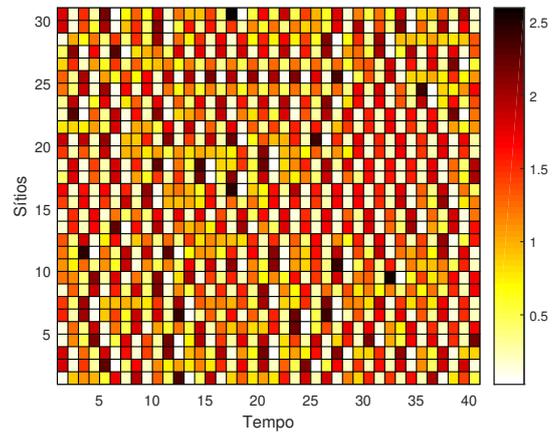


(c)

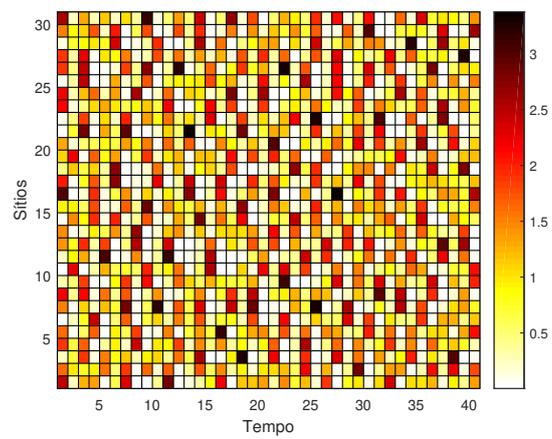
Figura 5.4: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

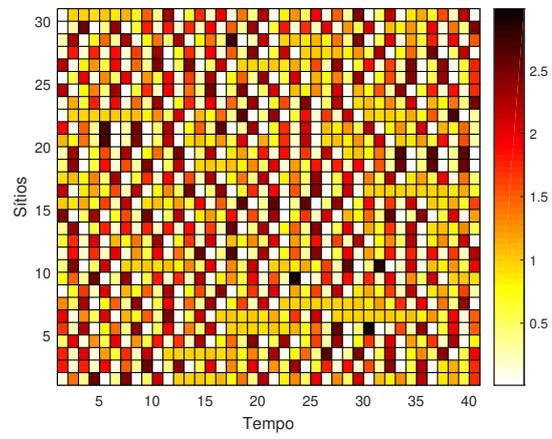


(b)

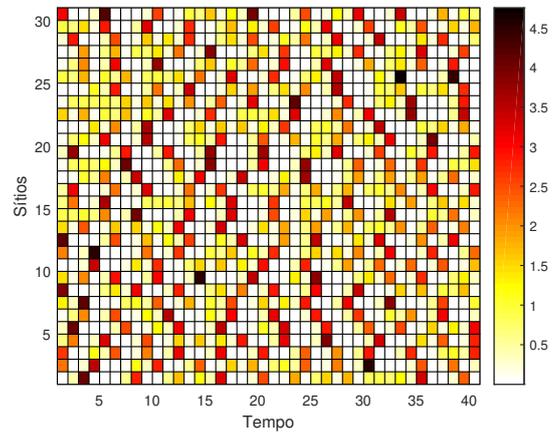


(c)

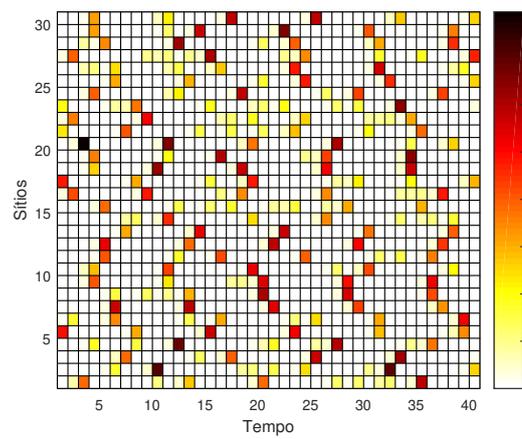
Figura 5.5: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

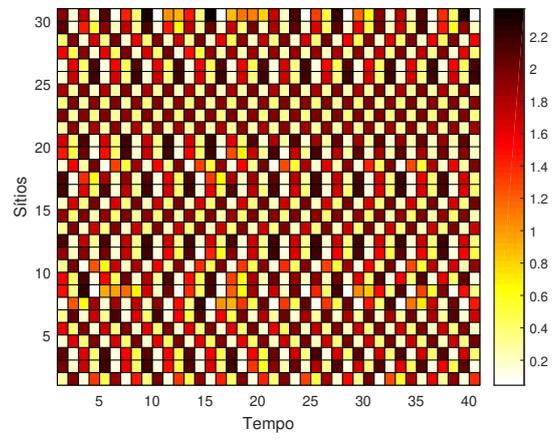


(b)

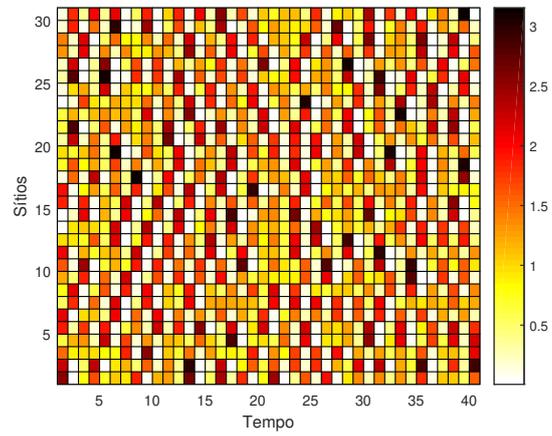


(c)

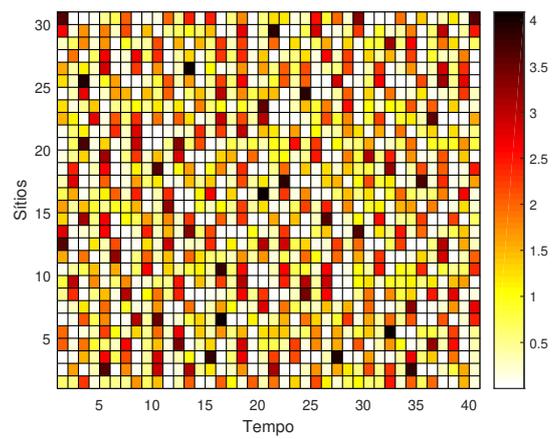
Figura 5.6: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.7: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

5.5 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$

Considerando a função de antiagregação $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$, o sistema (5.2) transforma-se no modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1 + e^{-5[1-(f(x_t^i)-f(x_t^j))]} \right)}{n \sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1 + e^{-5[1-(f(x_t^k)-f(x_t^j))]} \right)} f(x_t^j), \quad (5.17)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

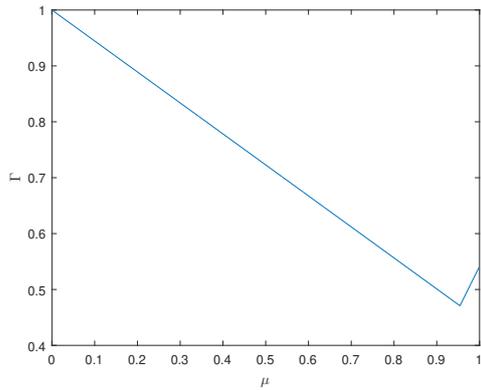
Os autovalores, dados por (5.14), modificam-se para

$$\begin{aligned} \beta_k^t = & \left\{ 1 + \frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} f(x_t) \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} f(x_t) \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} f(x_t) \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} f(x_t) \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

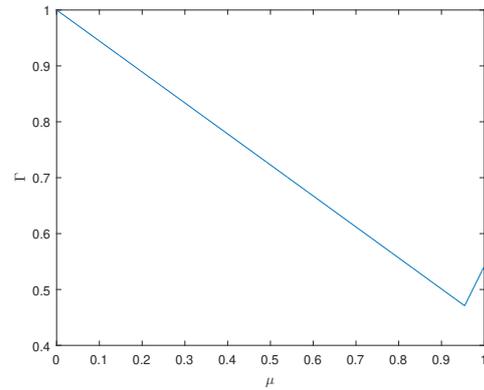
onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Portanto, o quantificador $\Gamma(x_0)$ representado por (5.13) tem β_i^t dado por (5.18).

A variação de Γ em função de μ para alguns valores de r pode ser visualizada na Figura 5.8.



(a)



(b)

Figura 5.8: $\Gamma \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2, 5$;
 (b) $r = 2, 8$.

5.5.1 Simulações Numéricas

5.5.1.1 Número de Lyapunov transversal

Examinaremos aqui o número de Lyapunov transversal, num primeiro momento em função de μ e posteriormente em função do parâmetro r . As hipóteses sobre as simulações são as mesmas descritas anteriormente.

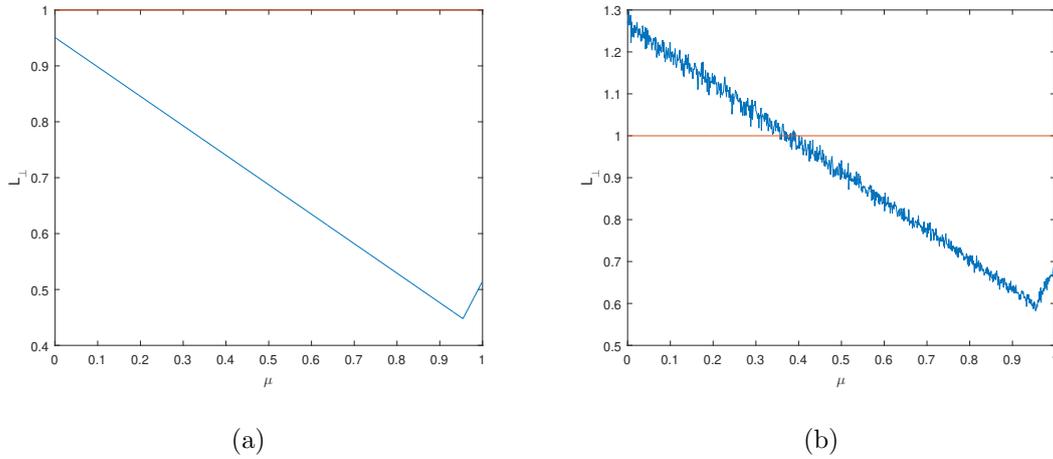


Figura 5.9: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2,5$; (b) $r = 2,8$.

Analisando a Figura 5.9, percebemos que o número de Lyapunov transversal é inferior a 1 para todo valor da taxa de migração se $r = 2,5$. Ele continua menor que 1 se $r = 2,8$ para $\mu \in (0,404; 1]$ e para alguns outros valores de μ na vizinhança de $\mu = 0,38$. Para os outros valores da taxa de migração $L_{\perp} \geq 1$. Portanto, a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ .

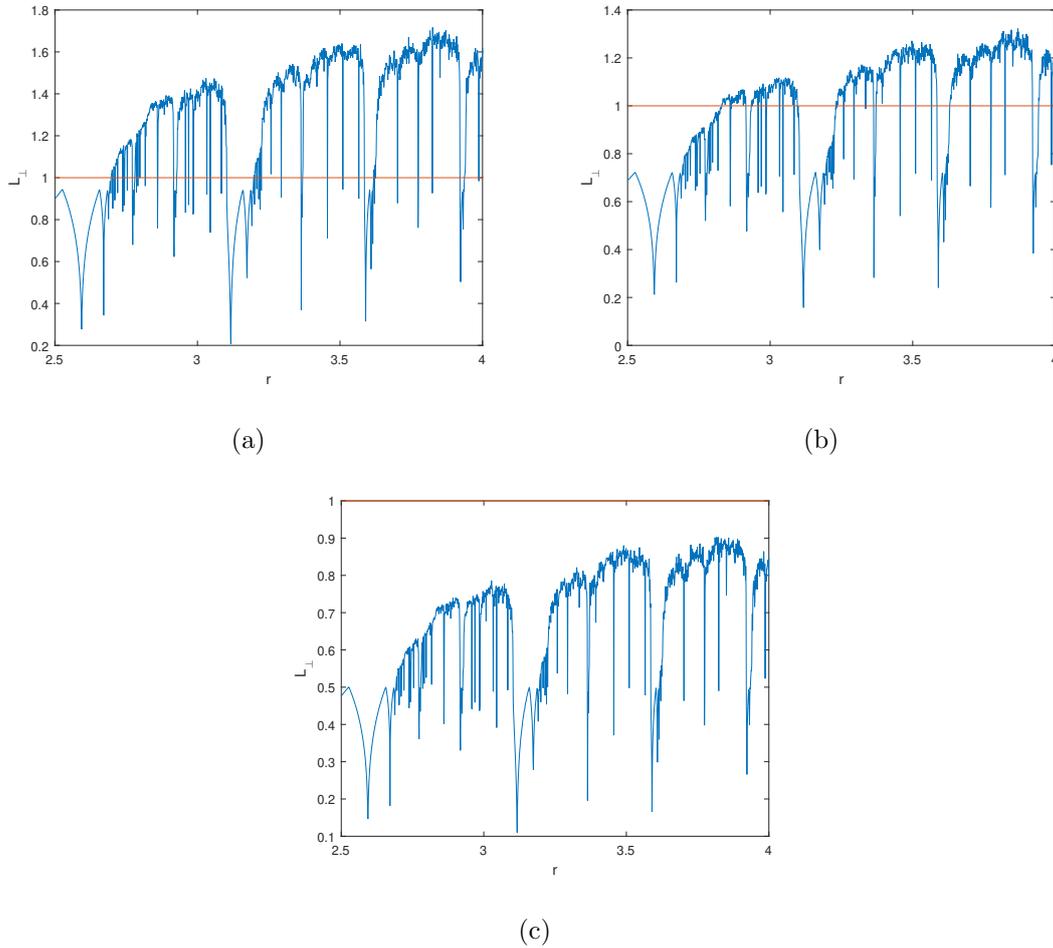


Figura 5.10: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Na Figura 5.10 para $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,5$ notamos que a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r é maior que a de possível sincronia com relação ao parâmetro r . O contrário, ocorre quando $\mu = 0,9$ pois para todo $r \in [2,5; 4]$ temos o número de Lyapunov transversal menor que 1. Quanto maior a taxa de migração, maior a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r . Logo, a taxa de migração que mais favorece a sincronização é $\mu = 0,9$.

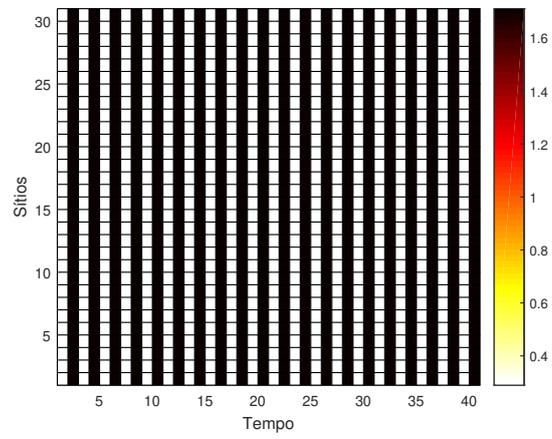
5.5.1.2 Espaço \times tempo

Nesta parte faremos gráficos do tipo espaço \times tempo com os mesmos objetivos e condições apresentados na segunda ramificação da Subseção 4.1.1.

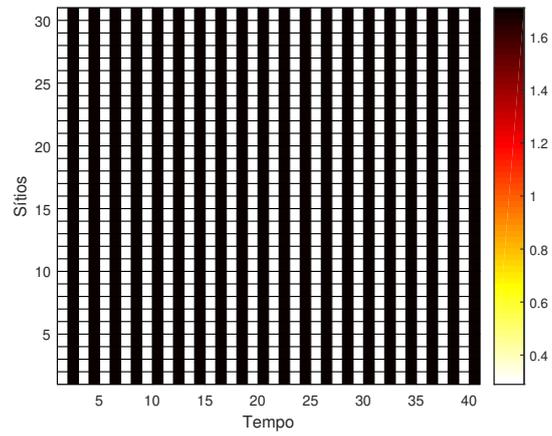
Considerando $r = 2,5$ como nas Figuras 5.11 e 5.12 acontece sincronização para todas as conexões e valores da taxa de migração.

Com $r = 2,8$, na Figura 5.13, conexão convexa simples, não há sincronia se $\mu = 0,1$. Para as demais taxas de migração, ocorre sincronização de órbitas caóticas. Não ocorre sincronização, para todos os valores de μ , na rede convexa dinâmica (Figura 5.14).

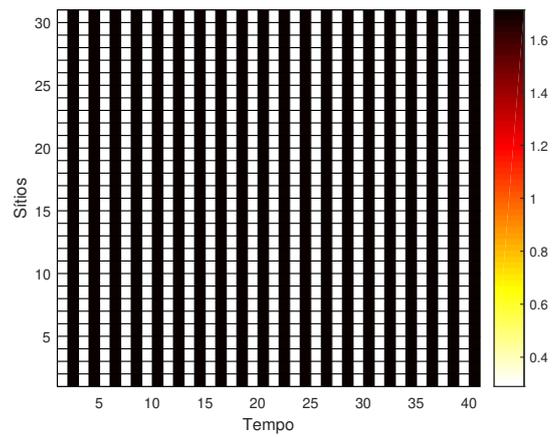
Analisando os gráficos espaço \times tempo, percebemos que o valor de r para o qual mais ocorre sincronização é $r = 2,5$, enquanto que os valores da taxa de migração são $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$. A conexão para a qual mais ocorreu sincronia foi a rede convexa simples.



(a)

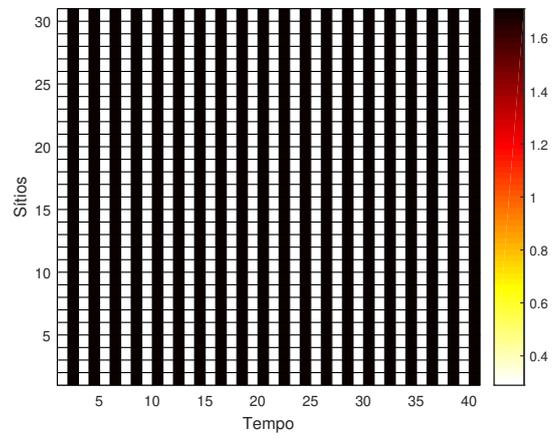


(b)

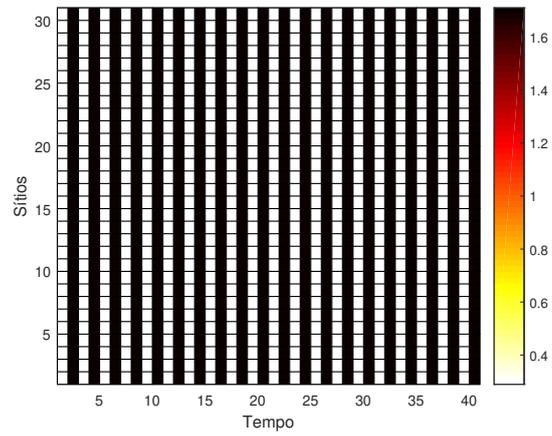


(c)

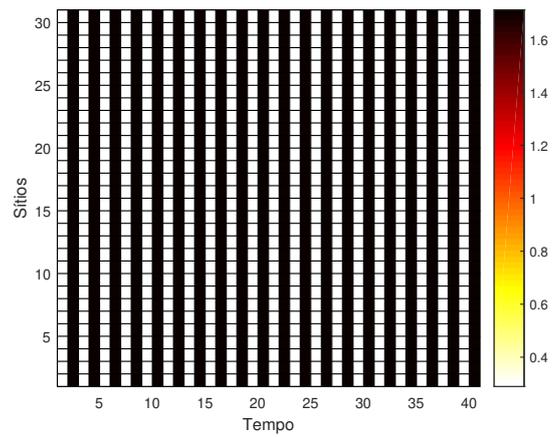
Figura 5.11: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

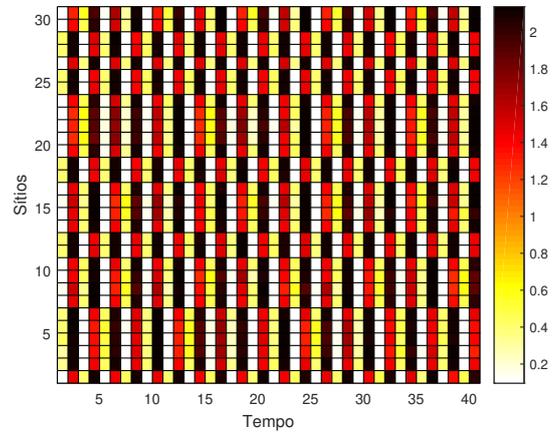


(b)

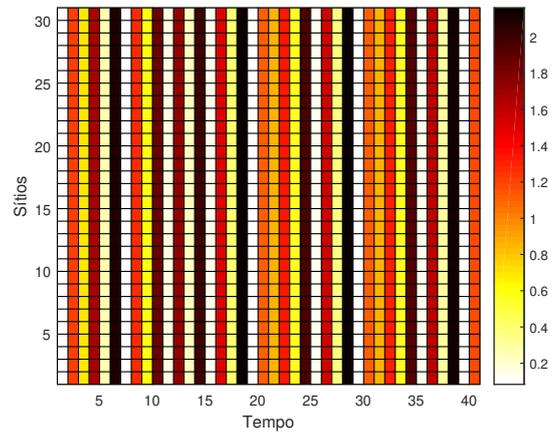


(c)

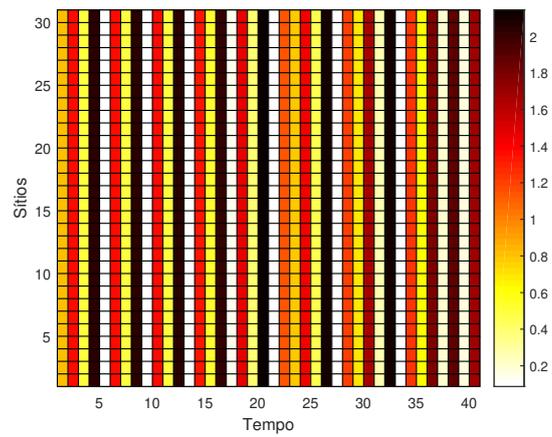
Figura 5.12: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

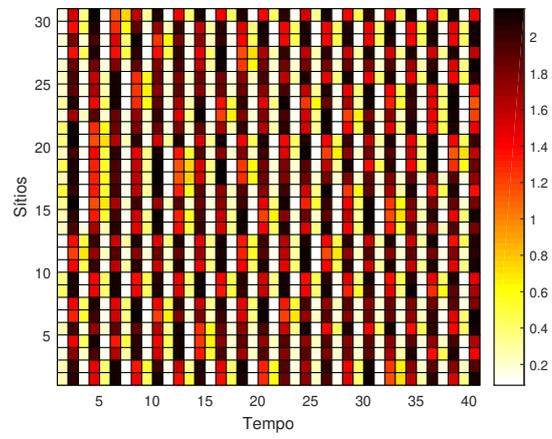


(b)

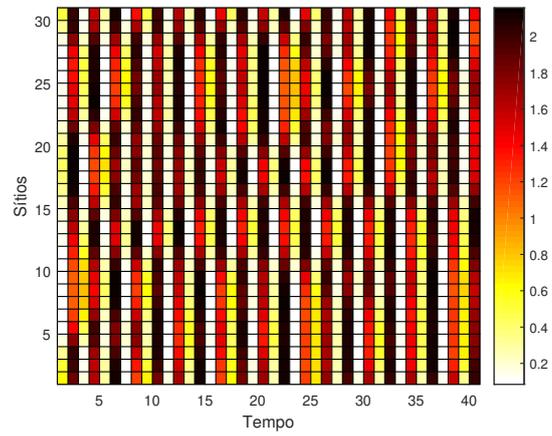


(c)

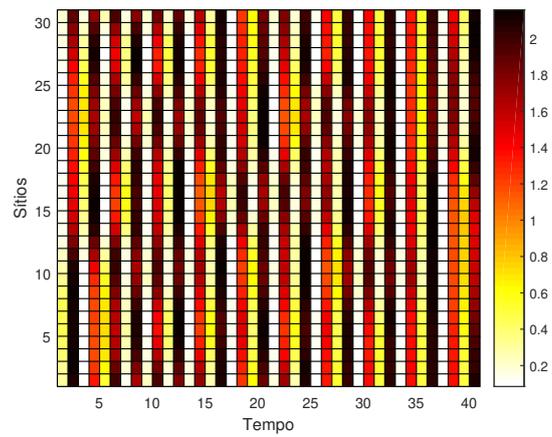
Figura 5.13: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.14: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

6 MODELO METAPOPOPULACIONAL COM MOVIMENTAÇÃO DEPENDENTE DA DIFERENÇA RELATIVA DE DENSIDADE

Abordaremos neste capítulo o modelo metapopulacional com movimentação dependente da diferença relativa de densidade. Investigaremos como o modelo é composto e a estabilidade do estado síncrono. Por meio de simulações numéricas analisaremos o comportamento do número de Lyapunov transversal conforme a taxa de dispersão e o parâmetro r variam e ainda através de gráficos espaço \times tempo, examinaremos a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações.

6.1 O modelo

Da mesma forma que nos Capítulos 3 e 5 pressupomos uma metapopulação homogênea formada por n sítios enumerados de 1 até n . Sejam $x_t^i \in \mathbb{R}$ a densidade de indivíduos do sítio i no instante de tempo t e f uma função, suave, que descreve o processo de dinâmica local. Logo, a dinâmica de um sítio isolado é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Terminado o processo de dinâmica local, se inicia o processo de migração. A cada passo de tempo, uma fração μ de indivíduos, $\mu \in [0, 1]$, deixa um dado sítio j e migra para outros sítios mais próximos i . Desses, uma fração c_{ij} chegará ao sítio i . Além disso, suponhamos que $c_{ii} = 0$ e que não há perdas durante essa movimentação, ou seja, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Os elementos c_{ij} formam a matriz de conexão $C = [c_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, que num primeiro momento, será

uma combinação convexa simples (matriz (3.5)) e depois considerada uma matriz convexa dinâmica (matriz (3.6)).

Vamos agora elaborar um sistema de equações que descreve a dinâmica da metapopulação. Para isso, consideremos os operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} (definidos na Seção 3.1) e definimos o operador dispersão com diferença relativa de densidade:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (MR_1(x^1, \dots, x^n), \dots, MR_n(x^1, \dots, x^n)),$$

onde

$$MR_i(x^1, \dots, x^n) = (1 - \mu)x^i + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{x^i - x^j}{x^j}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{x^k - x^j}{x^j}\right)} x^j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Notemos que o operador dispersão com diferença relativa de densidade é formado de duas partes. A primeira parte é a densidade de indivíduos que permanece no sítio i e a segunda parte é uma soma, formada pelos imigrantes que chegam no sítio i multiplicados pelo quociente da diferença relativa de densidade entre os sítios i e j pela média ponderada do conjunto das diferenças relativas de densidades $\left\{ \frac{x^1 - x^j}{x^j}, \frac{x^2 - x^j}{x^j}, \dots, \frac{x^n - x^j}{x^j} \right\}$ com pesos $\{c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\}$, respectivamente.

Como o processo de dinâmica local ocorre antes da migração, podemos aplicar a composição $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G} \circ \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \circ \mathcal{F}$, no vetor populacional, $X_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)$, para encontrarmos o vetor X_{t+1} , isto é, $X_{t+1} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}}(X_t)$.

Desse modo,

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} (1 - \mu)f(x_t^1) + \sum_{j=1}^n \mu c_{1j} \frac{g\left(\frac{f(x_t^1) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g\left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)} f(x_t^j) \\ (1 - \mu)f(x_t^2) + \sum_{j=1}^n \mu c_{2j} \frac{g\left(\frac{f(x_t^2) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g\left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)} f(x_t^j) \\ \vdots \\ (1 - \mu)f(x_t^n) + \sum_{j=1}^n \mu c_{nj} \frac{g\left(\frac{f(x_t^n) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g\left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)} f(x_t^j) \end{bmatrix},$$

que é o mesmo que

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{g\left(\frac{f(x_t^i) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g\left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)} f(x_t^j), \quad (6.2)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Na equação anterior, o primeiro termo no lado direito representa os indivíduos que permanecem no sítio i no instante de tempo t , enquanto o segundo termo descreve os indivíduos que partem dos sítios vizinhos e chegam no sítio i , levando em consideração a diferença relativa de densidade entre o sítio de destino e o de origem e uma média ponderada das diferenças relativas de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho.

Analogamente ao modelo metapopulacional (5.2), o modelo proposto neste capítulo, apresenta restrições quanto a escolha da função $g(x)$, pois a função

g aplicada na diferença relativa de densidade em (6.2) deve resultar em um valor positivo. Além disso, uma função $g(x)$ crescente representa uma função de agregação e uma função $g(x)$ decrescente representa uma função de antiagregação.

6.2 Sincronização

Quando $x_t^i = x_t$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, ocorre a sincronização do sistema (6.2). Utilizando isso em (6.2), obtemos

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{g(0) \sum_{j=1}^n c_{ij}}{g(0) \sum_{k=1}^n c_{kj}} f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como não há perdas durante o processo de migração, já vale que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Adicionalmente, se supormos que

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

a matriz C transforma-se em duplamente estocástica, e então

$$x_{t+1}^i = f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Seja $y_t = (x_t, x_t, \dots, x_t)$ uma órbita sincronizada do sistema (6.2). Nosso intuito é linearizar (6.2) em torno de y_t . Consideremos Δ_t uma pequena perturbação e $X_t = y_t + \Delta_t$ uma perturbação do estado sincronizado. Logo,

$$X_{t+1} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}}(X_t) = \mathcal{H}_{\mathcal{R}}(y_t + \Delta_t).$$

Expandindo em série de Taylor, segue que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}(y_t + \Delta_t) = \mathcal{H}_{\mathcal{R}}(y_t) + J(y_t)\Delta_t + O(\Delta_t^2), \quad (6.3)$$

onde $J(y_t)$ a matriz Jacobiana de $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ aplicada na órbita sincronizada, dada por

$$J(y_t) = f'(x_t) \begin{cases} (1 - \mu) + \mu \frac{g'(0)}{g(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^n c_{ik}^2 \right), & \text{para } i = j, \\ \mu \left[\frac{g'(0)}{g(0)} \sum_{k=1}^n c_{ik} (-c_{jk}) + c_{ij} \right], & \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (6.4)$$

Assim como nos capítulos anteriores, obtemos que a linearização do sistema (6.2) em torno da órbita sincronizada é

$$\Delta_{t+1} = J(y_t) \Delta_t, \quad (6.5)$$

com $J(y_t)$ dado por (6.4).

6.3 Estabilidade do Estado Síncrono

Queremos determinar agora se as órbitas que iniciam próximas do estado sincronizado, serão atraídas para este estado. Para isso, consideremos a equação de perturbação

$$\Delta_{t+1} = J(y_t) \Delta_t, \quad (6.6)$$

com $J(y_t)$ dado por

$$J(y_t) = \Xi f'(x_t), \quad (6.7)$$

onde $\Xi = I_n - \mu U$, I_n é a matriz identidade de ordem n e $U = \text{circ}(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, com $u_3 = u_4 = \dots = u_{n-3}$, $u_{n-2} = u_2$, $u_{n-1} = u_1$,

$$u_0 = 1 - \frac{g'(0)}{g(0)} \left[1 - 2\varrho^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right],$$

$$u_1 = \frac{g'(0)}{g(0)} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t,$$

$$u_2 = \frac{g'(0)}{g(0)} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1},$$

$$u_3 = \frac{g'(0)}{g(0)} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1},$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$.

Temos que $U = FVF^{-1}$, pois U é uma matriz circulante, onde F é a matriz de Fourier (veja (2.4)) e $V = \text{diag}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, sendo v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , os autovalores da matriz U .

A matriz circulante U tem um autovalor nulo v_0 , associado ao autovetor $v = (1, 1, \dots, 1)^T$, visto que $\sum_{j=0}^{n-1} u_j = 0$ e

$$\begin{aligned} Uv &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j, \sum_{j=0}^{n-1} u_j, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} u_j \right)^T \\ &= (0, 0, \dots, 0)^T \\ &= 0v. \end{aligned}$$

Uma consequência imediata é que a matriz Ξ admite a forma

$$\Xi = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} - \mu \bar{V} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \quad (6.8)$$

onde $\bar{V} = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$.

Visivelmente a matriz Ξ tem um autovalor simples $\iota = 1$ com autoespaço associado igual a diagonal do espaço de fase. Mas este é exatamente o estado sincronizado e dessa forma as perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. Mas as perturbações no espaço gerado pelos autovalores de $(I_{n-1} - \mu \bar{V})$ são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade

assintótica. Como nosso objetivo é verificar o crescimento destas últimas, basta considerar

$$J(y_t) = F[(I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_t)]F^{-1},$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_t)\Delta_t.$$

Tomando uma perturbação inicial Δ_0 qualquer, obtemos

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_{t-1}) \cdots (I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_1)(I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_0)\Delta_0.$$

Logo, a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|W_{\tau-1} \cdots W_1 W_0\|^{1/\tau} < 1, \quad (6.9)$$

onde $W_t = (I_{n-1} - \mu\bar{V})f'(x_t)$, com $t = 0, 1, 2, \dots$

A norma ainda pode ser escrita como

$$\|W_{\tau-1} \cdots W_1 W_0\| = \|(I_{n-1} - \mu\bar{V})^\tau\| \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|.$$

Obtemos assim que

$$L_\perp(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|W_{\tau-1} \cdots W_1 W_0\|^{1/\tau} = L(x_0)\Upsilon, \quad (6.10)$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}, \quad (6.11)$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em x_0 e Υ é o raio espectral de $(I_{n-1} - \mu\bar{V})$, ou seja,

$$\Upsilon = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{1 - \mu v_i\}. \quad (6.12)$$

Do mesmo modo que nos Capítulos 3 e 5, denominaremos $L_\perp(x_0)$ de número de Lyapunov transversal, com órbita iniciando em x_0 .

Se a função f preserva a medida natural ρ , e $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$ pelo Teorema de Birkoff (Proposição 2.1) obtemos que (6.11) existe para quase todo x_0 , e é independente de x_0 .

Similarmente aos Capítulos 3 e 5, através de (2.5) podemos encontrar uma forma para (6.12):

$$\begin{aligned}
v_k = & \left\{ 1 - \frac{g'(0)}{g(0)} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\
& \left\{ \frac{g'(0)}{g(0)} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\
& \left\{ \frac{g'(0)}{g(0)} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\
& \left\{ \frac{g'(0)}{g(0)} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)},
\end{aligned} \tag{6.13}$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Portanto, Υ representado por (6.12) tem v_i dado por (6.13).

Podemos agora, estabelecer um critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.

Teorema 6.1. *Consideremos o sistema (6.2), com a matriz C dada por (3.5) ou (3.6), f uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ invariante com relação a medida natural ρ e $e, g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função diferenciável. Então o número de Lyapunov transversal L_\perp do atrator sincronizado é dado pelo produto $L\Upsilon$, onde L é dado por (6.11) e Υ por (6.12). Além disso, se $L_\perp < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.*

6.4 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$

Consideremos nesta seção a função de agregação $g(x) = \frac{1}{1+e^{5(1-x)}}$. Dessa forma o sistema (6.2) torna-se o modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1 + e^{5 \left[1 - \left(\frac{f(x_t^i) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)} \right) \right]}} \right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1 + e^{5 \left[1 - \left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)} \right) \right]}} \right)} f(x_t^j), \quad (6.14)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Os autovalores, dados por (6.13), alteram-se para

$$\begin{aligned} v_k = & \left\{ 1 - \frac{5e^5}{1+e^5} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ \frac{5e^5}{1+e^5} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Sendo assim, o raio espectral Υ descrito por (6.12) tem v_i dado por (6.15).

O comportamento de Υ , conforme a taxa de migração varia pode ser apreciado na Figura 6.1.

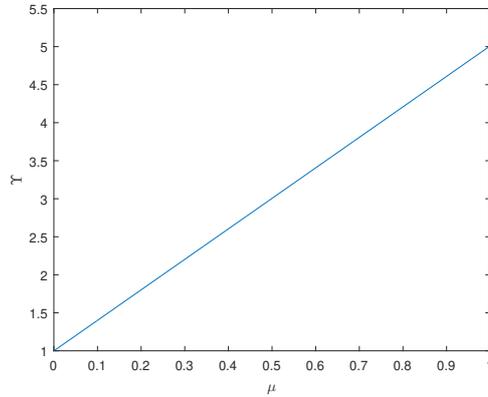


Figura 6.1: $\Upsilon \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$.

6.4.1 Simulações Numéricas

6.4.1.1 Número de Lyapunov transversal

Faremos aqui um exame do número de Lyapunov transversal em função da taxa de migração μ e do parâmetro r . As condições em que ocorrem as simulações e os objetivos são os mesmos da primeira ramificação da Subseção 4.1.1.

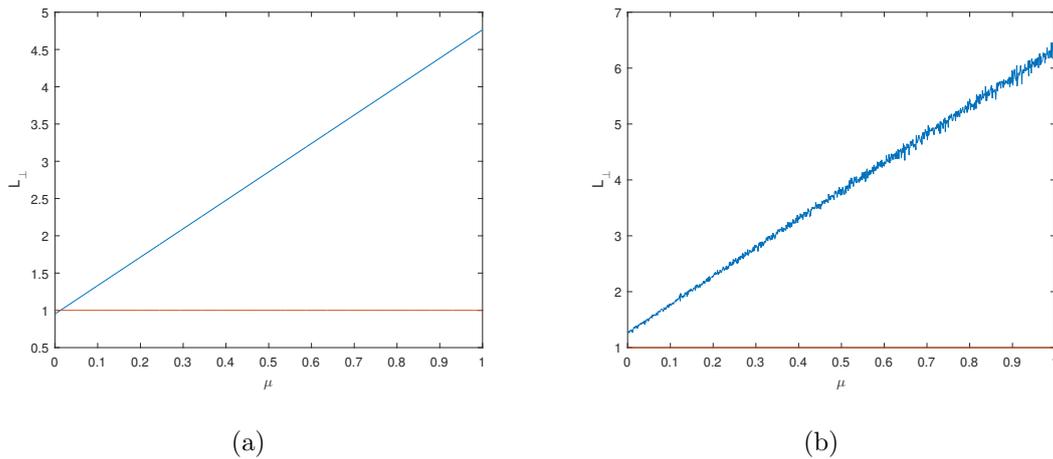


Figura 6.2: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

Verificando a Figura 6.2, quando $r = 2,5$ vemos que o número de Lyapunov transversal é menor que 1 somente para μ no intervalo $[0; 0,0128)$. Ao passo que $r = 2,8$ então $L_{\perp} > 1$ para todo valor da taxa de migração. Logo, a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de possível sincronização com relação a taxa de migração μ .

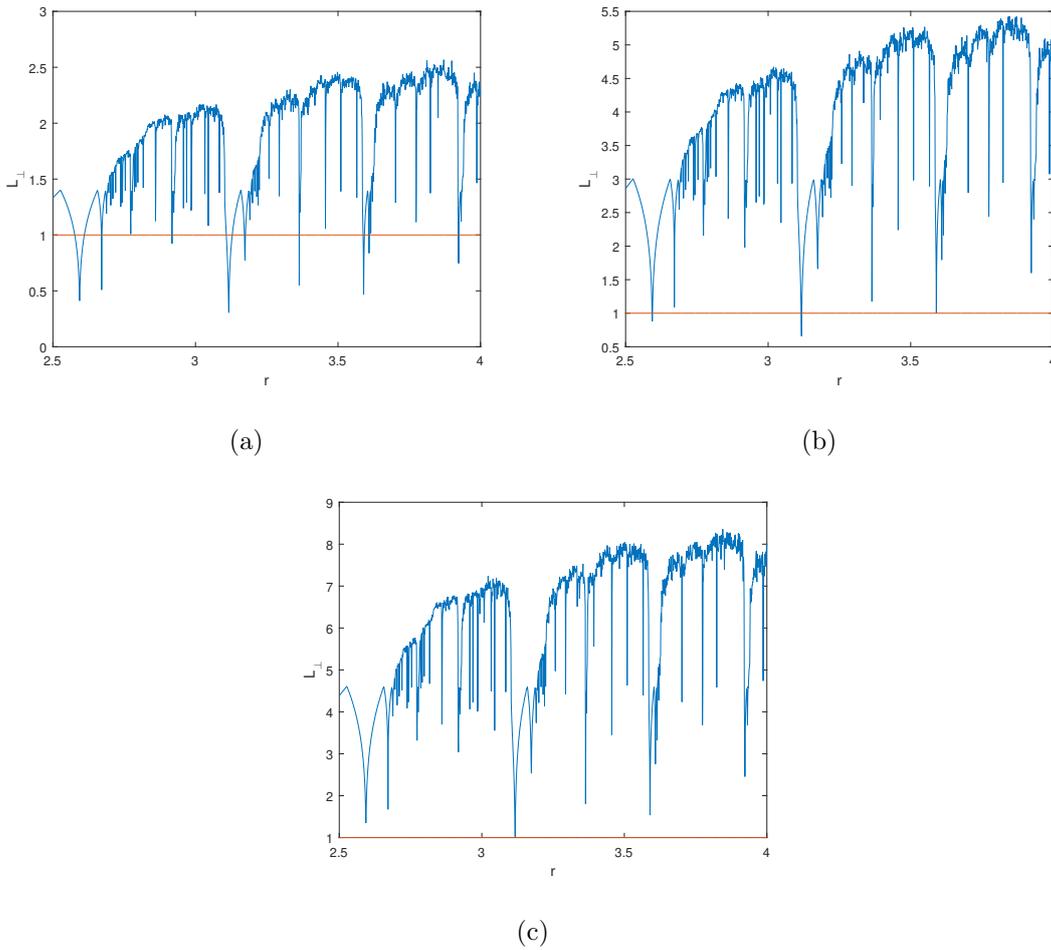


Figura 6.3: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $\mu = 0,1$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Percebemos na Figura 6.3, um predomínio de valores de r nos quais o número de Lyapunov transversal é superior a 1. A maior região de possível sincronia com relação ao parâmetro r entre as taxas de migrações é $\mu = 0,1$ e a medida que

a taxa de migração aumenta, diminui a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r .

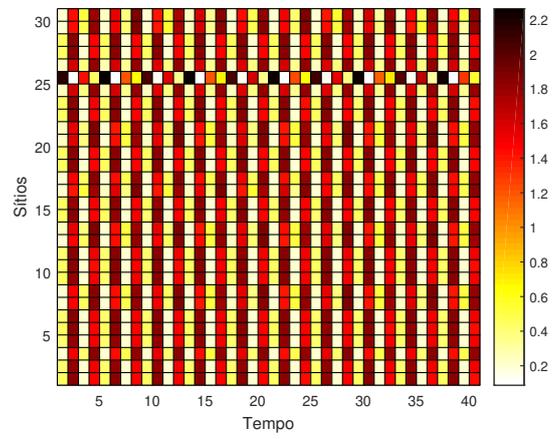
6.4.1.2 Espaço \times tempo

Queremos aqui, analisar a sensibilidade da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações através de gráficos do tipo espaço \times tempo. As hipóteses são as mesmas da segunda ramificação da Subseção 4.1.1.

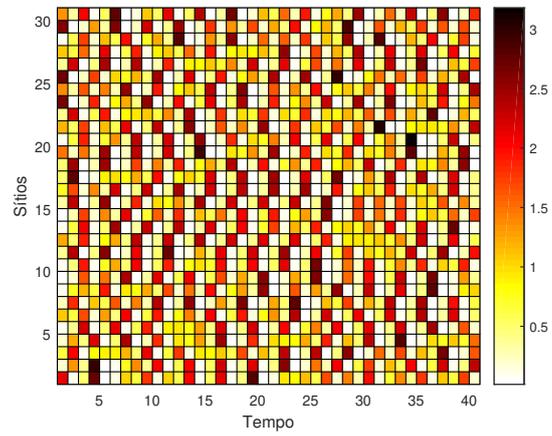
Analisando as Figuras 6.4 e 6.5, vemos que não existe sincronização para quaisquer taxa de migração e conexão, quando $r = 2, 5$.

Quanto a sincronização, as mesmas conclusões do caso em que $r = 2, 5$ valem para $r = 2, 8$ (Figuras 6.6 e 6.7).

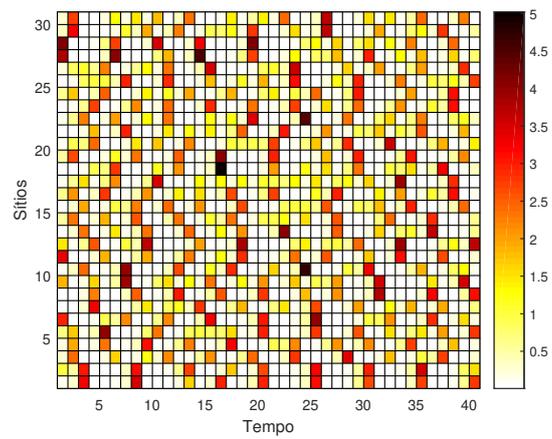
Como vimos nos gráficos espaço \times tempo, não existe taxa de reprodução intrínseca, taxa de migração ou rede para os quais mais acontece sincronização.



(a)

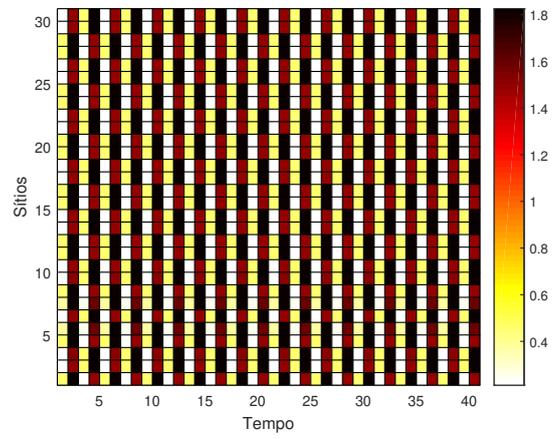


(b)

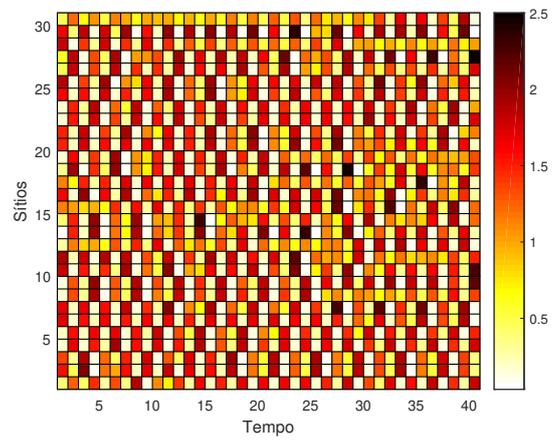


(c)

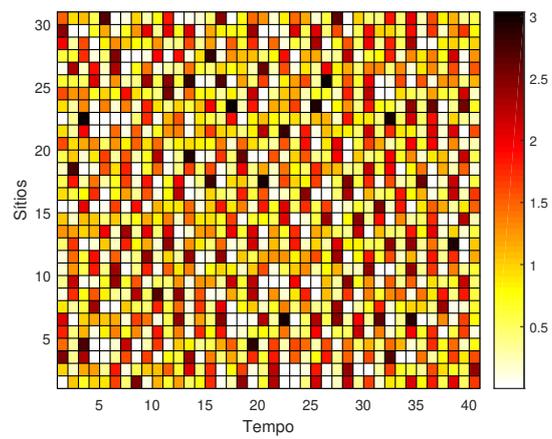
Figura 6.4: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

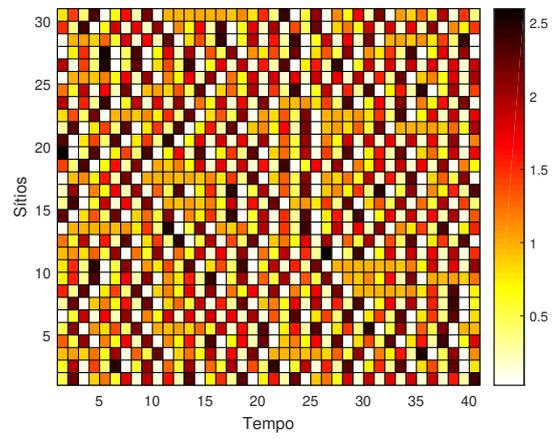


(b)

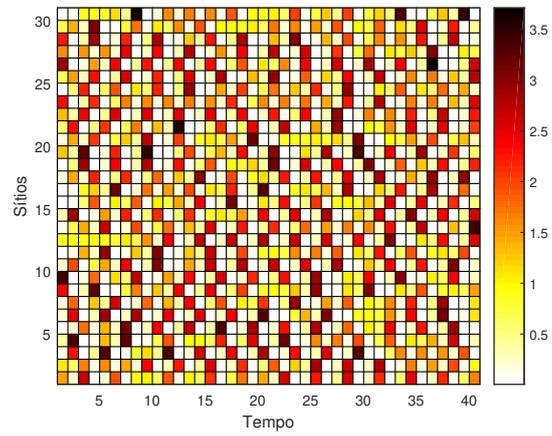


(c)

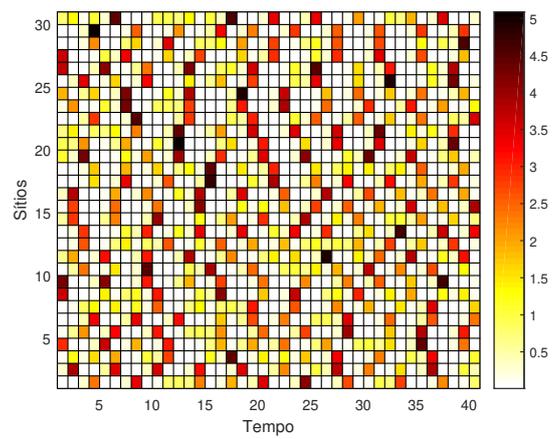
Figura 6.5: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

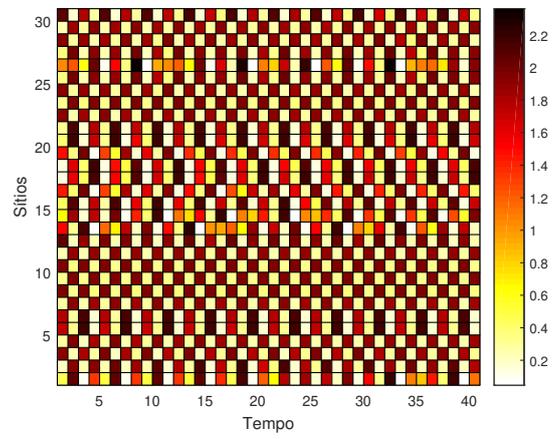


(b)

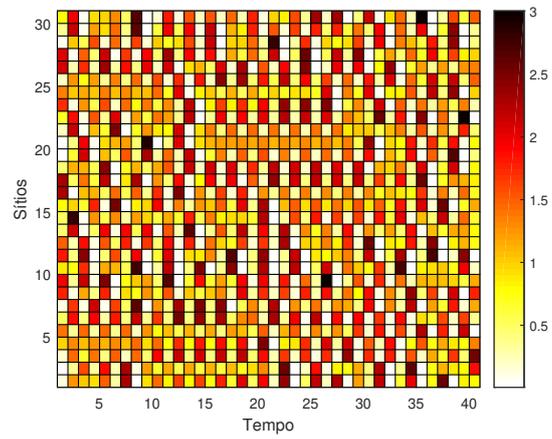


(c)

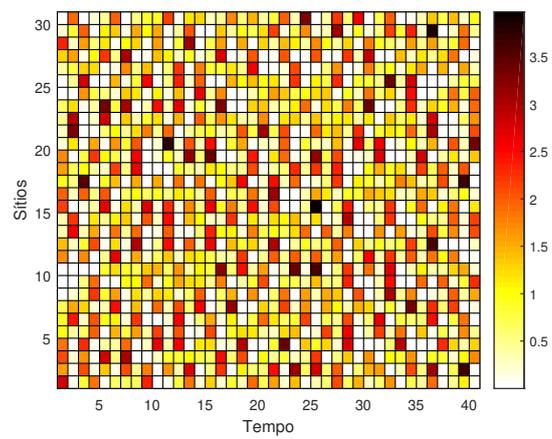
Figura 6.6: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.7: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

6.5 O caso em que $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$

Utilizamos nesta seção a função de antiagregação $g(x) = \frac{1}{1+e^{-5(1-x)}}$. Com esta função, o sistema (6.2) transforma-se no modelo metapopulacional

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} \frac{\left(\frac{1}{1 + e^{-5 \left[1 - \left(\frac{f(x_t^i) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)} \right) \right]}} \right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} \left(\frac{1}{1 + e^{-5 \left[1 - \left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)} \right) \right]}} \right)} f(x_t^j), \quad (6.16)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Os autovalores, descritos por (6.13), convertem-se para

$$\begin{aligned} v_k = & \left\{ 1 + \frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} \left[1 - 2\varrho_t^2 - (n-3) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} \left[2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-4) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \varrho_t \right\} (2 \cos \theta) + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} \left[\varrho_t^2 + 2\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-5) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} (4 \cos^2 \theta - 2) + \\ & \left\{ -\frac{5e^{-5}}{1+e^{-5}} \left[4\varrho_t \frac{\alpha_t}{n-1} + (n-6) \left(\frac{\alpha_t}{n-1} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_t}{n-1} \right\} \frac{(8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 2)}{(2 - 2 \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $\varrho_t = \left[\frac{(1-\alpha_t)}{2} + \frac{\alpha_t}{n-1} \right]$ e $\theta = \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$.

Portanto, o raio espectral Υ representado por (6.12) tem v_i dado por (6.17).

A variação de Υ em função de μ pode ser visualizada na Figura 6.8.

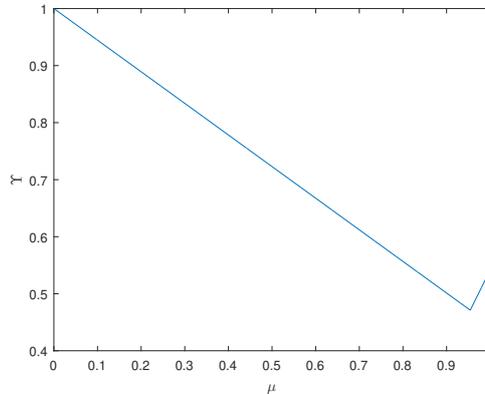


Figura 6.8: $\Upsilon \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$.

6.5.1 Simulações Numéricas

6.5.1.1 Número de Lyapunov transversal

Analisaremos neste espaço o número de Lyapunov transversal, primeiramente em função da taxa de migração e posteriormente em função do parâmetro r . As hipóteses sobre as simulações são as mesmas descritas anteriormente.

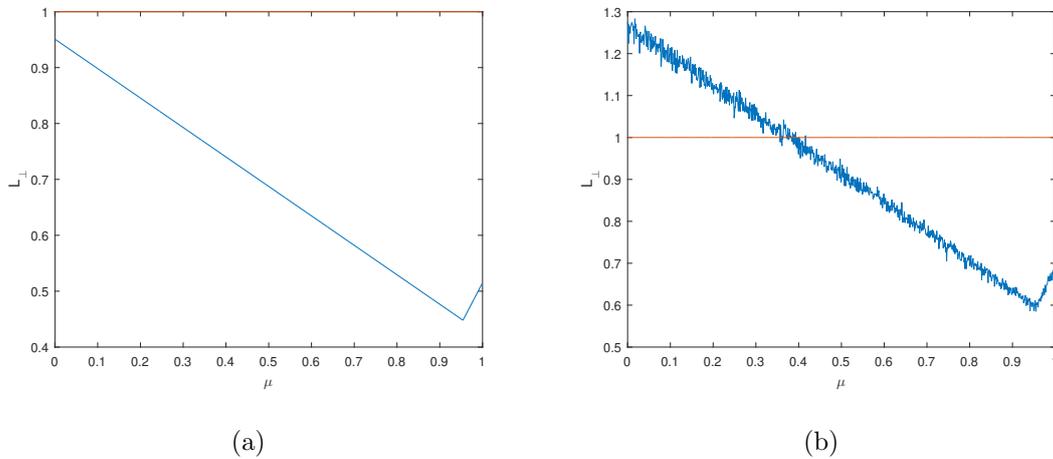


Figura 6.9: $L_{\perp} \times \mu$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0,5$: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

Na Figura 6.9, notamos que o número de Lyapunov transversal é inferior a 1 para todo valor da taxa de migração se $r = 2, 5$. Ele continua menor que 1 se $r = 2, 8$ para $\mu \in (0, 404; 1]$ e para alguns outros valores de μ na vizinhança de $\mu = 0,38$. Para os outros valores da taxa de migração $L_{\perp} \geq 1$. Logo, a região de possível sincronia com relação a taxa de migração μ é maior que a região de impossível sincronia com relação a taxa de migração μ .

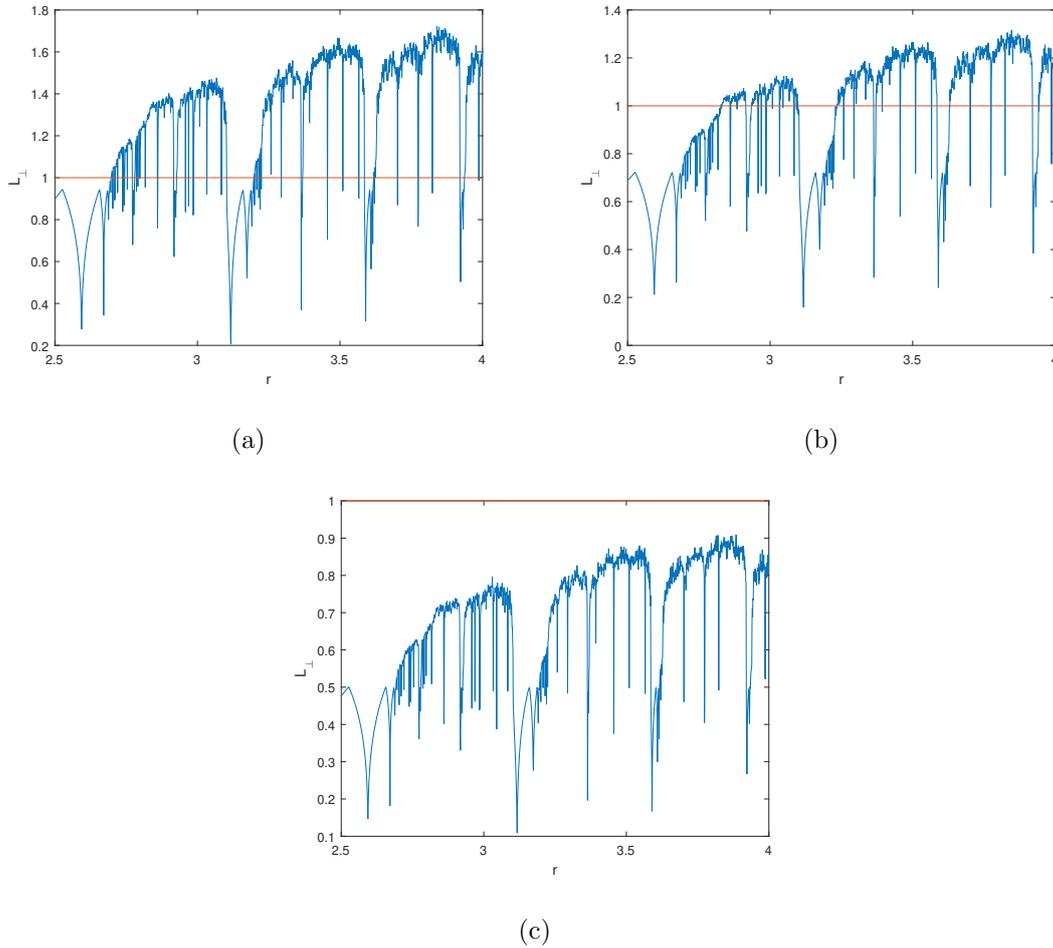


Figura 6.10: $L_{\perp} \times r$, com acoplamento convexo, $n = 30$ e $\alpha = \alpha_0 = 0, 5$: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

No caso da Figura 6.10, temos que a região de impossível sincronia com relação ao parâmetro r é maior que a de possível sincronia com relação ao parâmetro r para $\mu = 0, 1$ e $\mu = 0, 5$. O oposto, ocorre com $\mu = 0, 9$ pois para todo $r \in [2, 5; 4]$ temos o número de Lyapunov transversal menor que 1. A medida que aumenta a taxa de migração, aumenta também a região de possível sincronia com relação ao parâmetro r . Logo, a taxa de migração que mais favorece a sincronização é $\mu = 0, 9$.

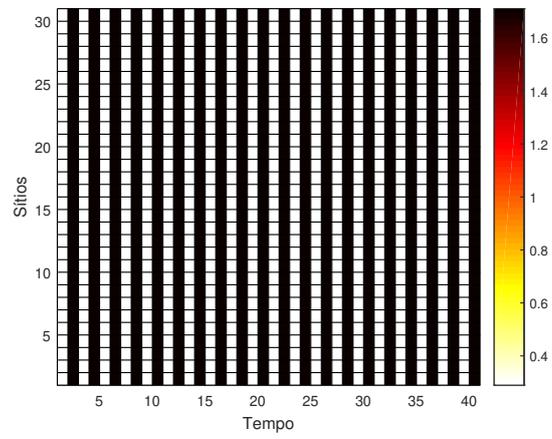
6.5.1.2 Espaço \times tempo

Neste espaço faremos gráficos do tipo espaço \times tempo com os mesmos objetivos e condições apresentados na segunda ramificação da Subseção 4.1.1.

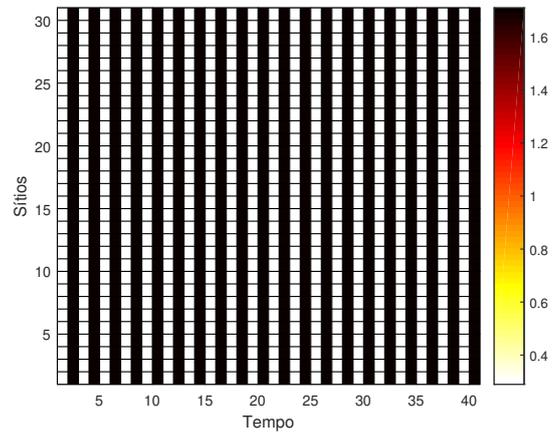
Ao passo que $r = 2,5$ como nas Figuras 6.11 e 6.12 ocorre sincronização para todas as conexões e valores da taxa de migração.

Analisamos agora o caso em que $r = 2,8$. Na conexão convexa simples, Figura 6.13, não existe sincronia se $\mu = 0,1$. Por outro lado, para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$ temos sincronização de órbitas caóticas. Não ocorre sincronização, para todos os valores de μ , na rede convexa dinâmica (Figura 6.14).

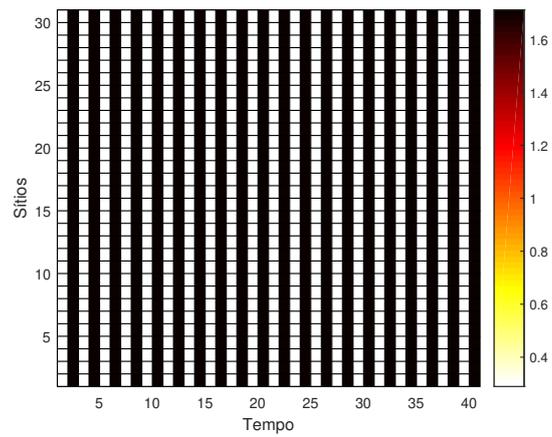
Confrontando os gráficos espaço \times tempo, percebemos que o valor de r para o qual mais ocorre sincronia é $r = 2,5$. Já os valores da taxa de migração e a conexão que mais favorecem a sincronia são $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$ e rede convexa simples, respectivamente.



(a)

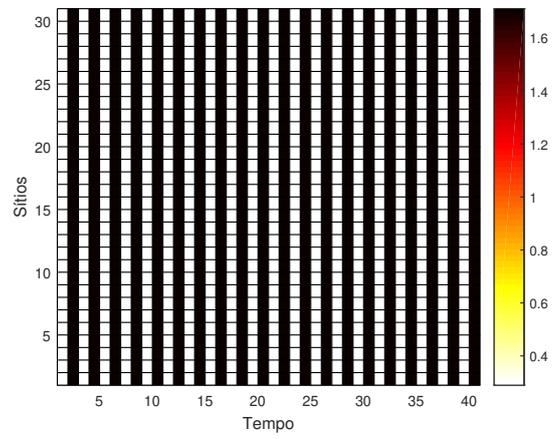


(b)

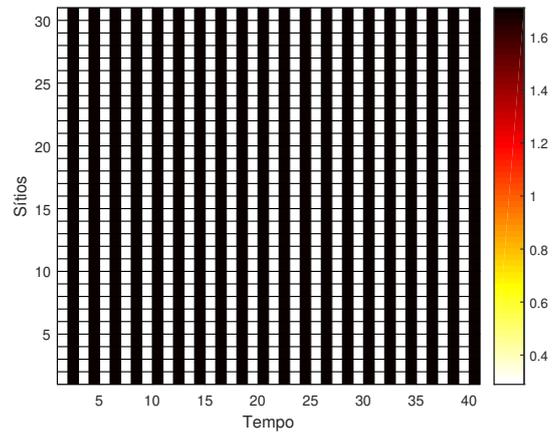


(c)

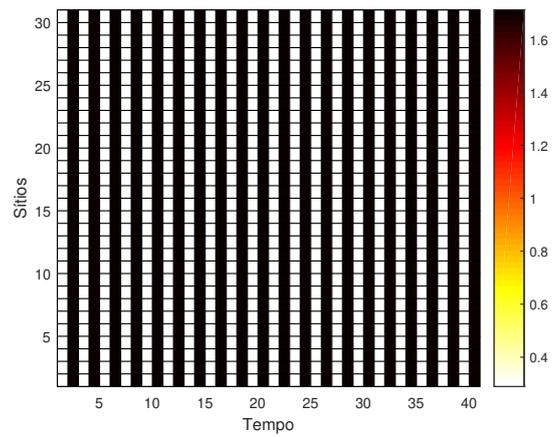
Figura 6.11: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

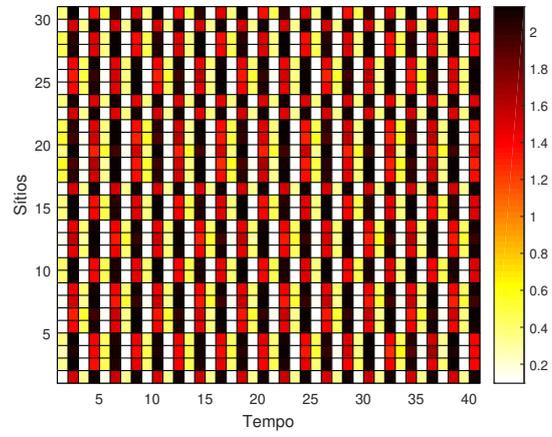


(b)

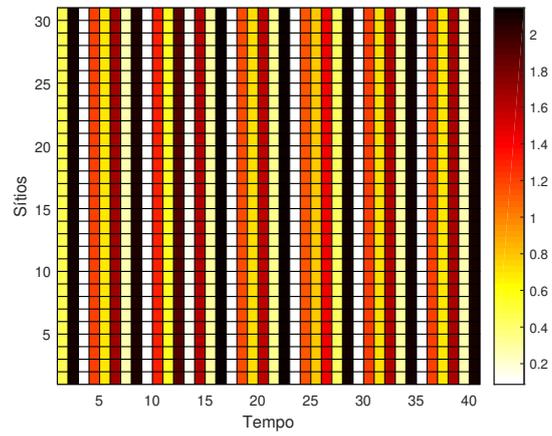


(c)

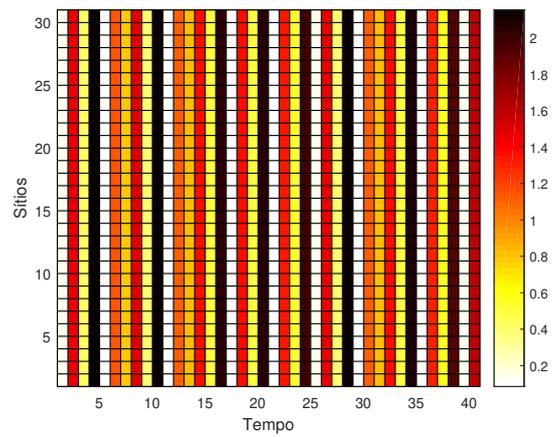
Figura 6.12: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

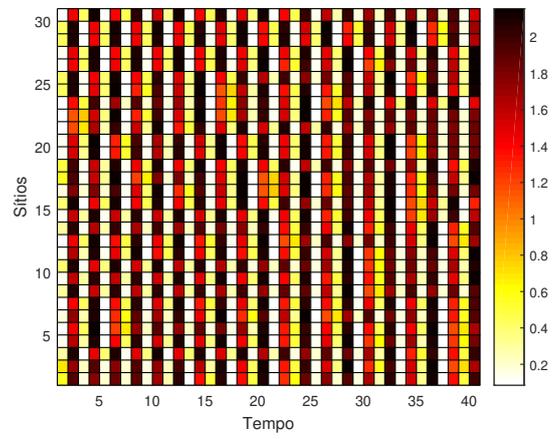


(b)

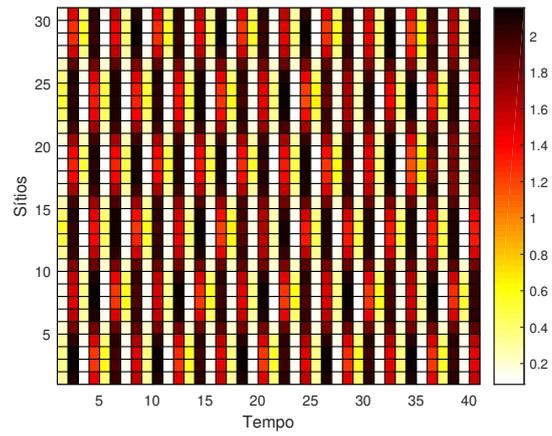


(c)

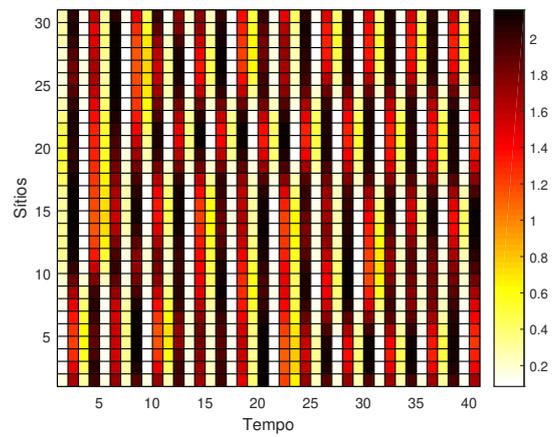
Figura 6.13: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.14: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

7 COMPARAÇÃO DE MODELOS

Neste capítulo, faremos a comparação dos nossos modelos metapopulacionais (entre si) e com outro modelo bastante utilizado na literatura, através de gráficos densidade \times tempo para ver o comportamento da densidade dos sítios ao longo do tempo. Também, confrontamos todos os modelos metapopulacionais, conexões, taxas de reprodução intrínseca e as taxas de migração quanto à ocorrência da sincronização.

7.1 Evolução da densidade ao longo do tempo

Começamos esta seção reescrevendo os modelos metapopulacionais que trabalhamos até agora. Podemos reformular o modelo metapopulacional (3.2) (Capítulo 3) da seguinte forma

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} Q_{ij} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.1)$$

onde

$$Q_{ij} = \frac{g(f(x_t^i))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k))}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Da mesma forma, escrevemos o modelo metapopulacional com movimentação dependente da diferença de densidade (Capítulo 5) na forma

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} Q_{ij}^D f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.2)$$

onde

$$Q_{ij}^D = \frac{g(f(x_t^i) - f(x_t^j))}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g(f(x_t^k) - f(x_t^j))}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Analogamente, reescrevemos o modelo metapopulacional com movimentação dependente da diferença relativa de densidade (Capítulo 6) como

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} Q_{ij}^R f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.3)$$

com

$$Q_{ij}^R = \frac{g\left(\frac{f(x_t^i) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} g\left(\frac{f(x_t^k) - f(x_t^j)}{f(x_t^j)}\right)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Consideremos agora o modelo metapopulacional utilizado por Silva [31], a saber,

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n \mu c_{ij} f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

Fica claro assim, que os modelos metapopulacionais (3.2), (5.2) e (6.2) são o modelo metapopulacional (7.4) com a inclusão dos quocientes Q_{ij} , Q_{ij}^D e Q_{ij}^R , respectivamente.

Vamos agora investigar a evolução da densidade ao longo do tempo, com o objetivo de visualizar no que a inclusão dos quocientes no modelo metapopulacional (7.4) interferem na evolução da densidade no tempo. Faremos isso, através de simulações numéricas da evolução da densidade ao longo tempo de 30 sítios nos últimos 40 passos de tempo, após um descarte de 9.960 transientes. Nos gráficos densidade \times tempo, colocaremos no eixo vertical os sítios numerados de 1 até 30 e no eixo horizontal os últimos 40 passos de tempo. Cada célula (t, i) representa a densidade de um sítio i no tempo t . As células serão pintadas em seis tons de cinza que vão de branco até preto conforme a densidade aumenta. Para dinâmica local utilizaremos a função exponencial logística, com $r = 2, 5$ e $r = 2, 8$. Para a combinação convexa simples usaremos $\alpha = 0, 5$ e para a combinação convexa dinâmica, para determinar o coeficiente α_t , utilizaremos a função logística num comportamento caótico, isto é, $\alpha_{t+1} = 4\alpha_t(1 - \alpha_t)$, com $\alpha_0 = 0, 5$. As condições iniciais são esco-

lhidas aleatoriamente, mas são as mesmas para todos os modelos. Para a fração de migração, consideraremos o valor $\mu = 0,5$.

Começamos nossa análise pelo caso em que $r = 2,5$ e a conexão é a convexa simples, como nas Figuras 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.9, 7.11, 7.13, 7.15 e 7.17. O modelo metapopulacional que apresentou o maior valor para a densidade máxima foi o modelo (4.9), enquanto que o menor valor para a densidade máxima foi o do modelo (4.4). O maior valor para a densidade mínima ocorreu para o modelo (4.4) e a menor densidade mínima foi apresentado pelo modelo (5.15). Os modelos (4.7), (5.17) e (6.16) apesar de terem um acréscimo de um quociente em relação ao modelo (7.4), se comportaram da mesma forma que este último, com relação às densidades máximas e mínimas. A Tabela 7.1, contém todas as informações de densidades máximas e mínimas.

Tabela 7.1: Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,5$ e Rede Convexa simples.

Modelo	Densidade máxima	Densidade mínima
(7.4)	1,7104	0,2896
(4.1)	2,1245	0,1024
(4.4)	1,6773	0,3985
(4.7)	1,7104	0,2896
(4.9)	5,3801	0,1413
(5.15)	4,0549	0,0014
(5.17)	1,7104	0,2896
(6.14)	3,1534	0,0117
(6.16)	1,7104	0,2896

Continuamos na rede convexa simples (Figuras 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.9, 7.11, 7.13, 7.15 e 7.17), mas agora para $r = 2,8$. O valor mais elevado da densidade máxima ocorreu para o modelo (4.9), ao passo que o mais baixo valor da densidade

máxima aconteceu para o modelo (4.4). O modelo (4.4) demonstrou o valor mais elevado para a densidade mínima. Em contrapartida o valor mais baixo da densidade mínima foi o modelo (5.15). Embora os modelos (5.17) e (6.16) apresentem um quociente na sua configuração a mais que o modelo (7.4), as densidades ficaram muito próximas umas das outras. Na Tabela 7.2 apresentamos todas as informações.

Tabela 7.2: Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,8$ e Rede Convexa simples.

Modelo	Densidade máxima	Densidade mínima
(7.4)	2,1589	0,0841
(4.1)	2,7011	0,022
(4.4)	1,4545	0,6953
(4.7)	2,9899	0,0109
(4.9)	16,1763	0,068
(5.15)	4,9302	0,0004
(5.17)	2,16	0,0839
(6.14)	4,8783	0,0036
(6.16)	2,159	0,0841

Examinamos agora o acoplamento convexo dinâmico, que é o caso das Figuras 7.2, 7.4, 7.6, 7.8, 7.10, 7.12, 7.14, 7.16 e 7.18. Quando $r = 2,5$, a densidade máxima mais elevada ocorre para o modelo (5.15) e a densidade máxima mais baixa verifica-se para o modelos (7.4), (5.17) e (6.16). Sucede aos modelos (7.4), (5.17) e (6.16) a densidade mínima mais elevada, equanto que a densidade mínima mais baixa é a do modelo (5.15). Mais uma vez, os modelos (5.17) e (6.16), que apresentam um quociente em sua formação, portaram-se de maneira igual ao modelo (7.4). As demais informações, estão na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,5$ e Rede Convexa dinâmica.

Modelo	Densidade máxima	Densidade mínima
(7.4)	1,7104	0,2896
(4.1)	2,0032	0,1334
(4.4)	1,7563	0,2658
(4.7)	2,1607	0,0952
(4.9)	2,1074	0,2039
(5.15)	2,6043	0,0267
(5.17)	1,7104	0,2896
(6.14)	2,5124	0,0287
(6.16)	1,7104	0,2896

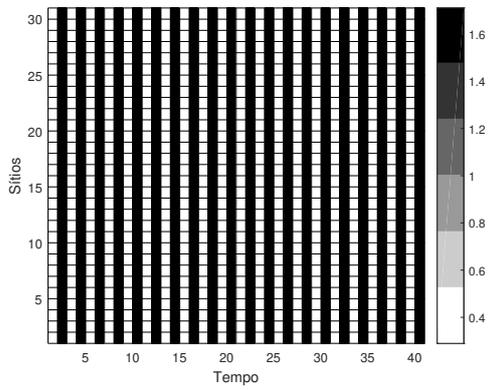
Ainda na conexão convexa dinâmica (Figuras 7.2, 7.4, 7.6, 7.8, 7.10, 7.12, 7.14, 7.16 e 7.18), passamos para o caso em que $r = 2,8$. As densidades máximas mais alta e mais baixa, são, respectivamente, as dos modelos (5.15) e (4.4). Quanto a densidade mínima, compete ao modelo (4.4), a mais elevada e, ao modelo (6.14), a menos elevada. Outra vez, os modelos (5.17) e (6.16) (que possuem um quociente em sua composição) tiveram um comportamento muito próximo do modelo (7.4). Na Tabela 7.4, encontram-se o resto das informações.

Tabela 7.4: Densidade máxima \times Densidade mínima: $r = 2,8$ e Rede Convexa dinâmica.

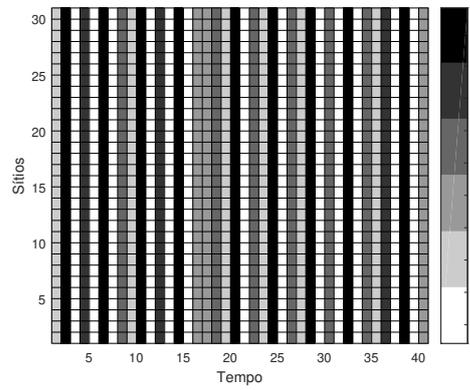
Modelo	Densidade máxima	Densidade mínima
(7.4)	2,159	0,0841
(4.1)	2,6573	0,0167
(4.4)	2,0145	0,1512
(4.7)	2,9582	0,0076
(4.9)	2,4199	0,0905
(5.15)	3,2039	0,0052
(5.17)	2,1571	0,0847
(6.14)	3,0576	0,0048
(6.16)	2,1542	0,0897

De um modo geral, podemos afirmar que entre as densidades máximas mais elevadas e as densidade mínimas mais baixas sempre está o modelo (5.15). Um comportamento intermediário das densidades é apresentado pelo modelo (4.1). Por sua vez, nas densidades mínimas mais altas e densidades máximas mais baixas está o modelo (4.4). Também é uma constante o comportamento muito próximo (e por vezes igual) dos modelos (5.17) e (6.16) (que possuem um quociente em sua composição) com o modelo (7.4).

A seguir apresentamos os gráficos densidade \times tempo dos modelos metapopulacionais (7.4), (4.1), (4.4), (4.7), (4.9), (5.15), (5.17), (6.14) e (6.16), respectivamente.

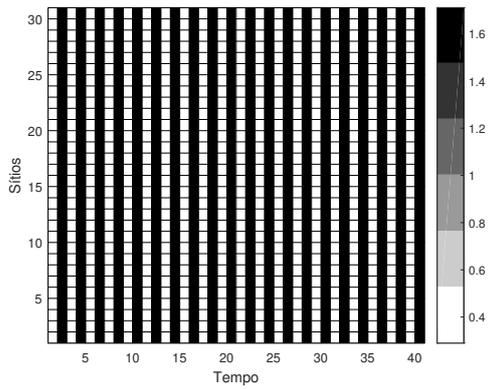


(a)

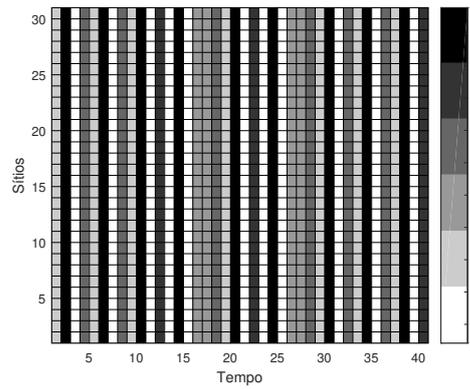


(b)

Figura 7.1: Densidade \times tempo, modelo (7.4) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

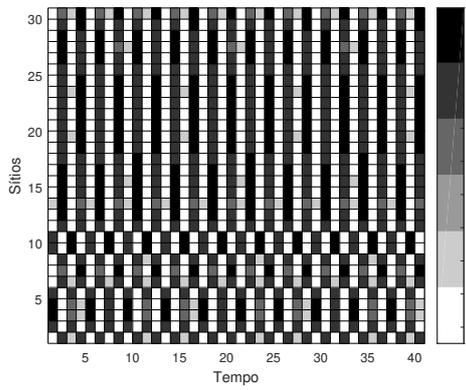


(a)

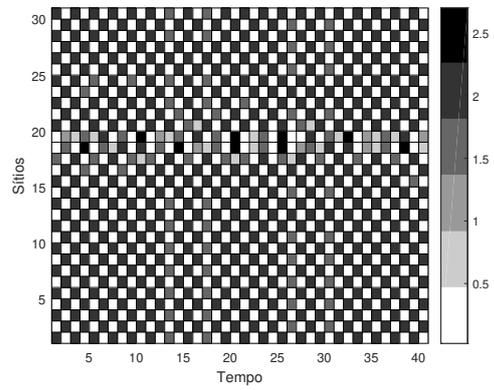


(b)

Figura 7.2: Densidade \times tempo, modelo (7.4) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

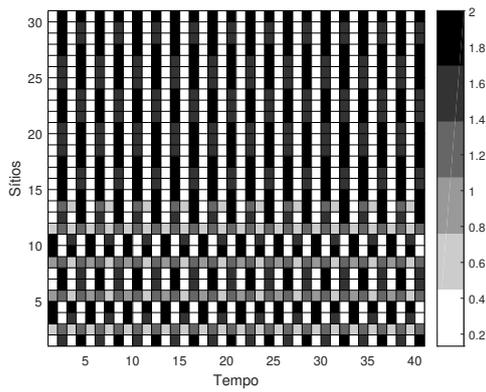


(a)

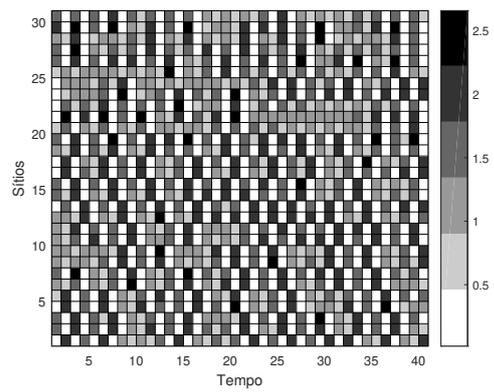


(b)

Figura 7.3: Densidade \times tempo, modelo (4.1) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

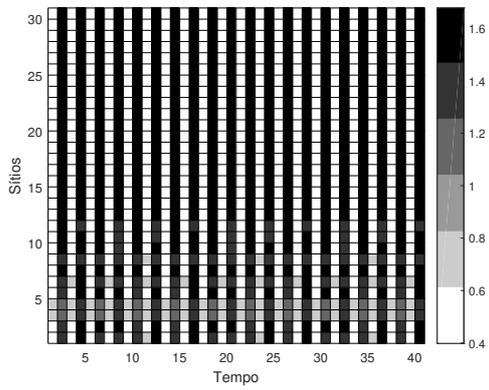


(a)

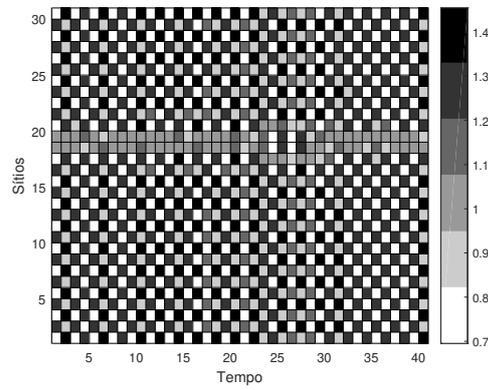


(b)

Figura 7.4: Densidade \times tempo, modelo (4.1) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

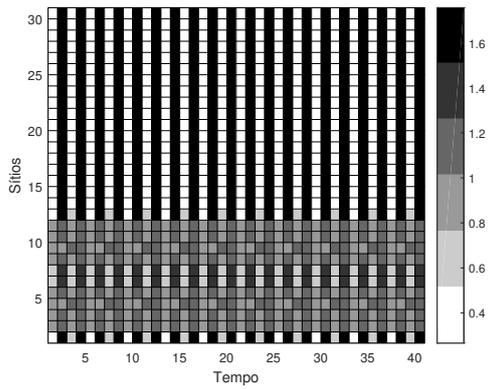


(a)

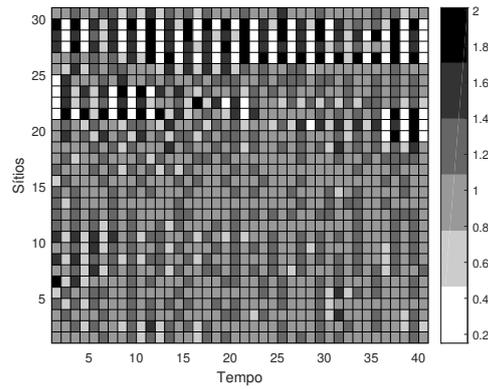


(b)

Figura 7.5: Densidade \times tempo, modelo (4.4) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

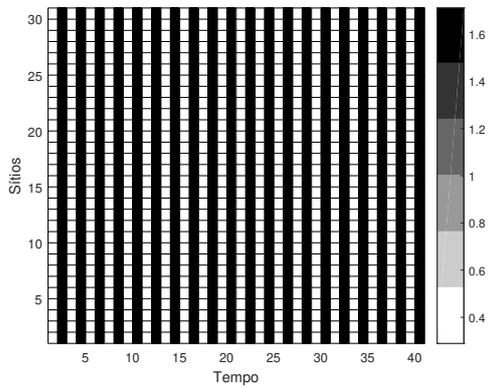


(a)

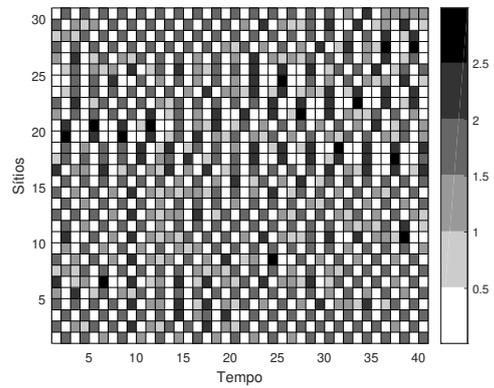


(b)

Figura 7.6: Densidade \times tempo, modelo (4.4) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

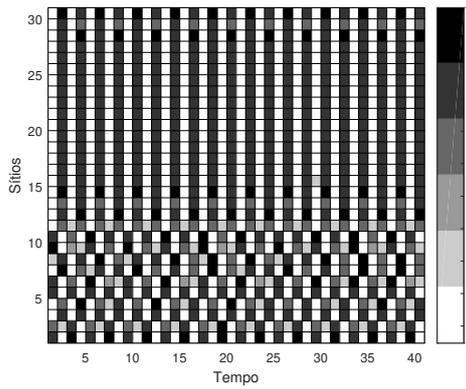


(a)

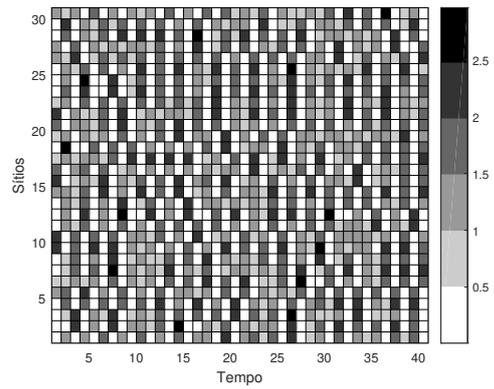


(b)

Figura 7.7: Densidade \times tempo, modelo (4.7) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

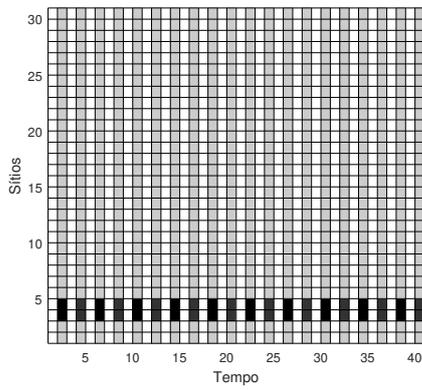


(a)

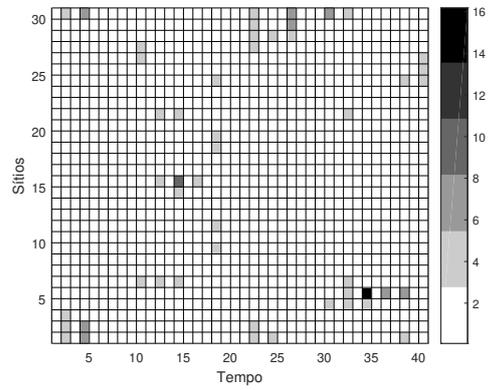


(b)

Figura 7.8: Densidade \times tempo, modelo (4.7) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

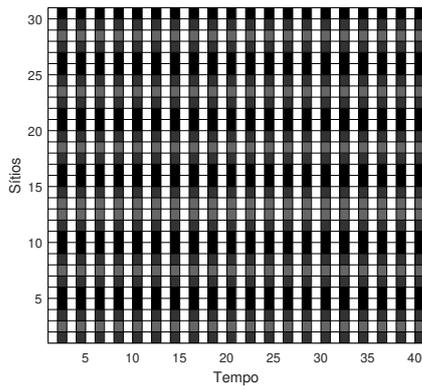


(a)

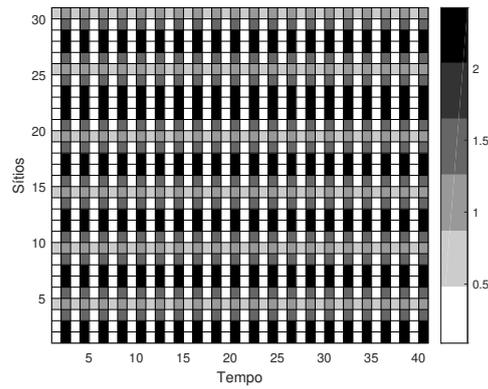


(b)

Figura 7.9: Densidade \times tempo, modelo (4.9) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

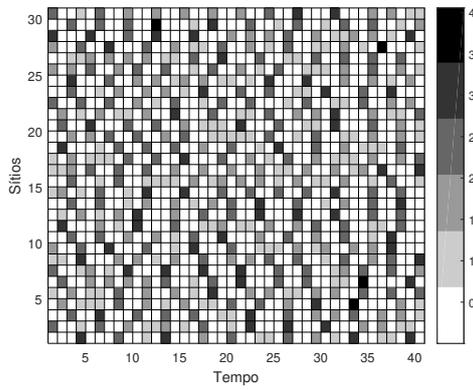


(a)

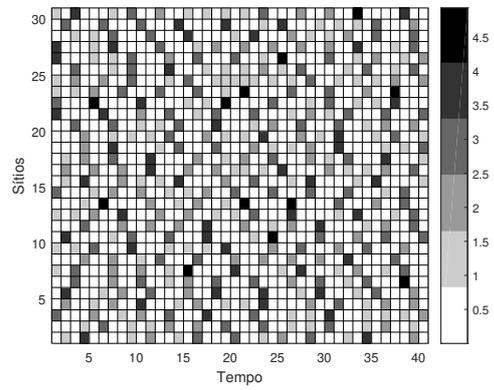


(b)

Figura 7.10: Densidade \times tempo, modelo (4.9) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

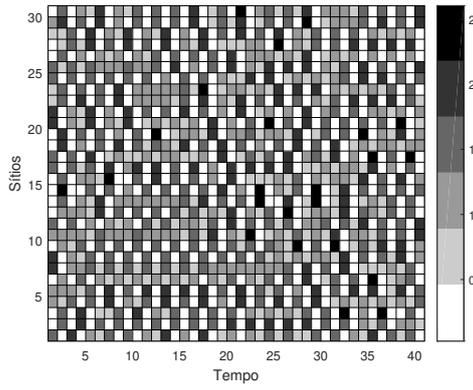


(a)

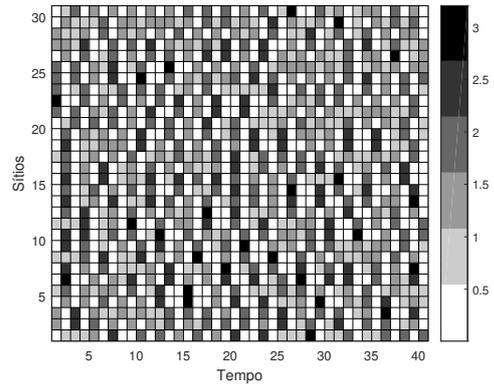


(b)

Figura 7.11: Densidade \times tempo, modelo (5.15) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

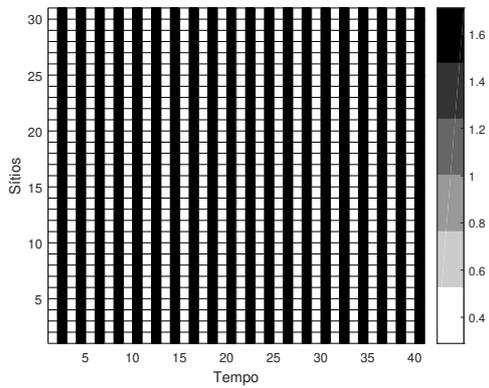


(a)

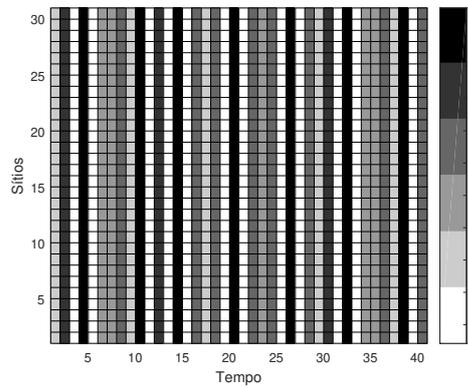


(b)

Figura 7.12: Densidade \times tempo, modelo (5.15) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

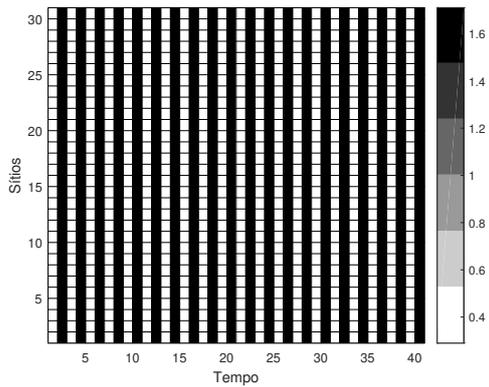


(a)

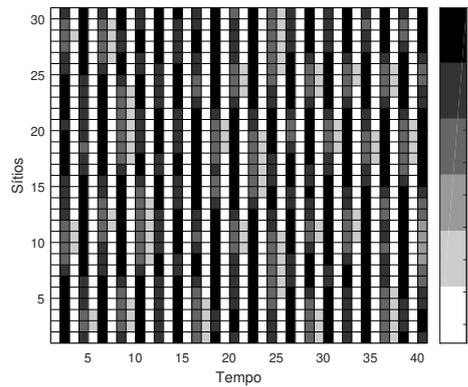


(b)

Figura 7.13: Densidade \times tempo, modelo (5.17) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

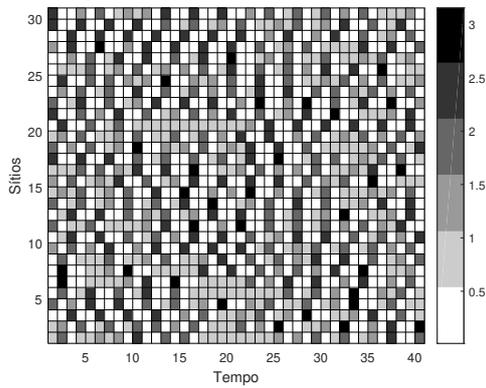


(a)

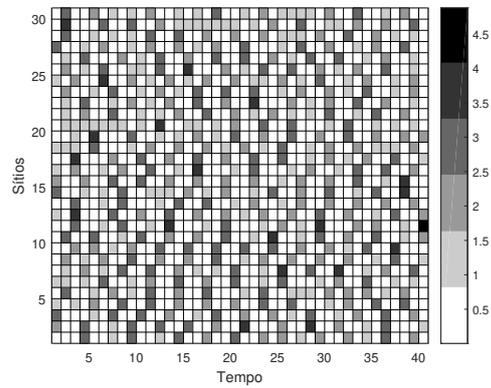


(b)

Figura 7.14: Densidade \times tempo, modelo (5.17) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

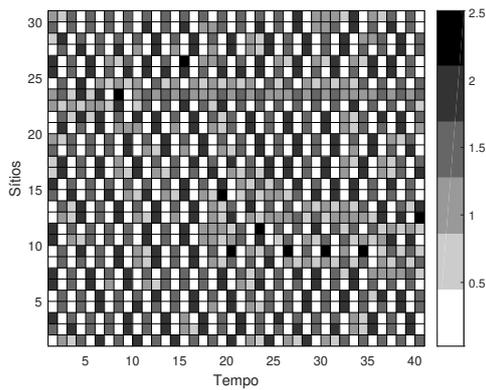


(a)

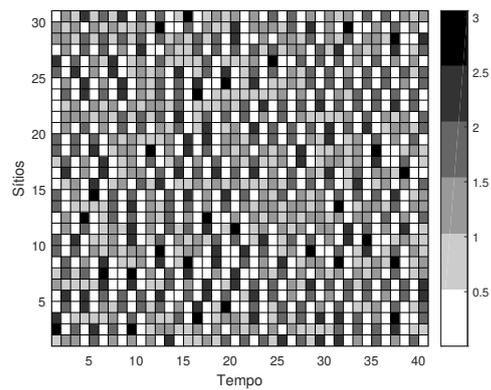


(b)

Figura 7.15: Densidade \times tempo, modelo (6.14) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

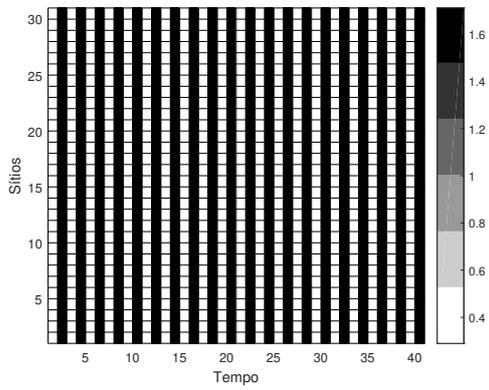


(a)

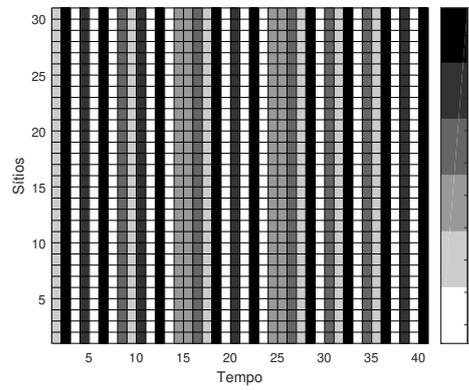


(b)

Figura 7.16: Densidade \times tempo, modelo (6.14) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

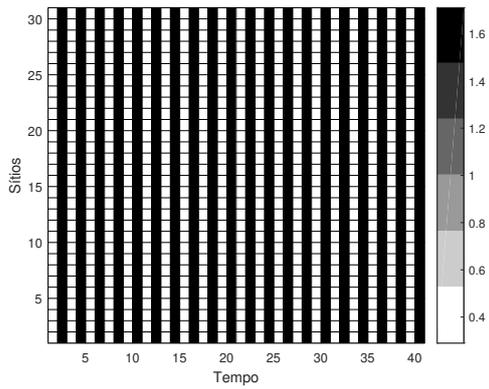


(a)

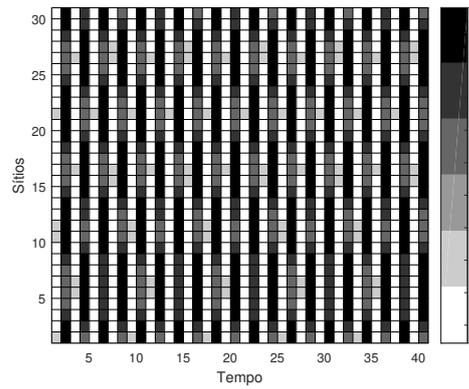


(b)

Figura 7.17: Densidade \times tempo, modelo (6.16) com Conexão Convexa simples: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.



(a)



(b)

Figura 7.18: Densidade \times tempo, modelo (6.16) com Conexão Convexa dinâmica: (a) $r = 2, 5$; (b) $r = 2, 8$.

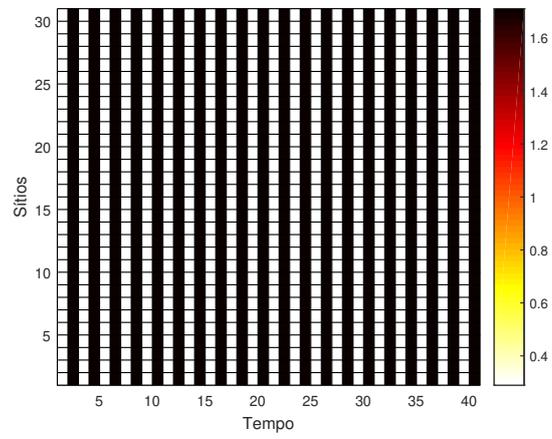
7.2 Sincronização

O objetivo desta seção é comparar todos os modelos metapopulacionais aqui apresentados com relação a sincronização. Para isso, começamos exibindo os gráficos espaço \times tempo para o modelo (7.4), para ver como este se comporta com relação a sincronização. As hipóteses são as mesmas da segunda parte da Subseção 4.1.1.

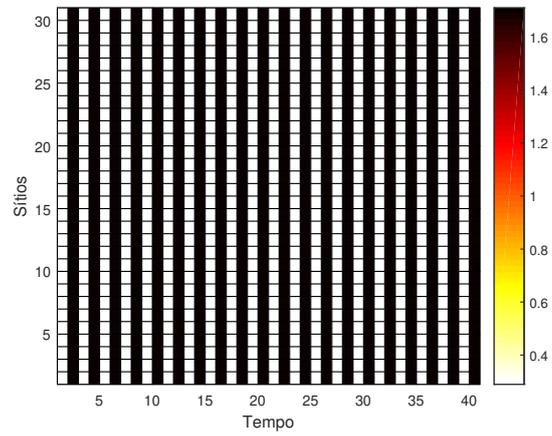
Explorando as Figuras 7.19 e 7.20, percebemos que existe sincronização para quaisquer taxa de migração e conexão, quando $r = 2, 5$.

Por sua vez, para $r = 2, 8$, quando a conexão é convexa simples (Figura 7.21) ocorre sincronização somente para $\mu = 0, 5$ e $\mu = 0, 9$. Temos assim, a sincronização de órbitas caóticas. Para a rede convexa dinâmica (Figura 7.22) não ocorre sincronização.

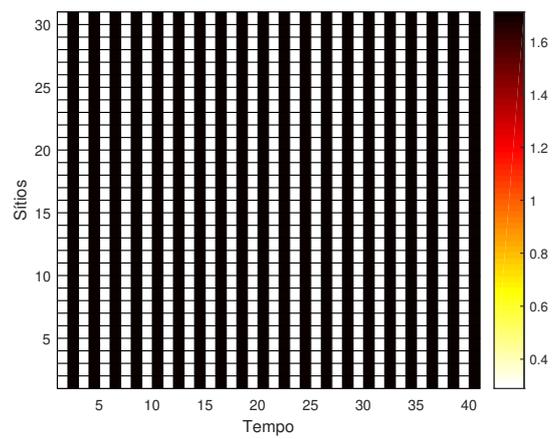
Como vimos nos gráficos espaço \times tempo, $r = 2, 5$, as taxas de migração $\mu = 0, 5$ e $\mu = 0, 9$ e a rede convexa simples favorecem mais o acontecimento de sincronização.



(a)

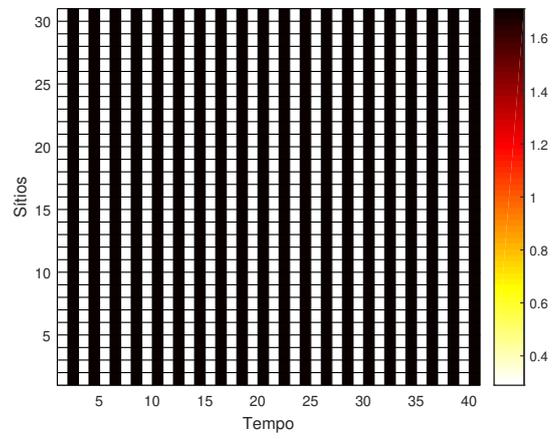


(b)

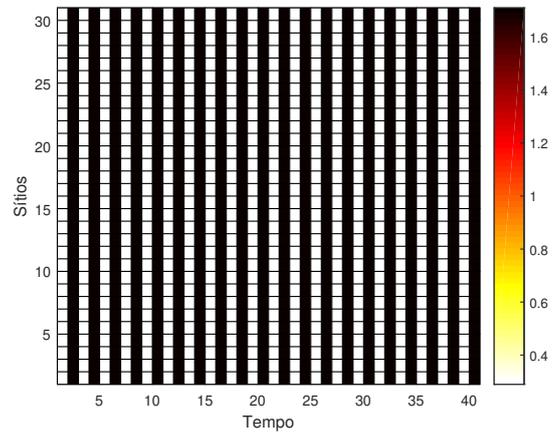


(c)

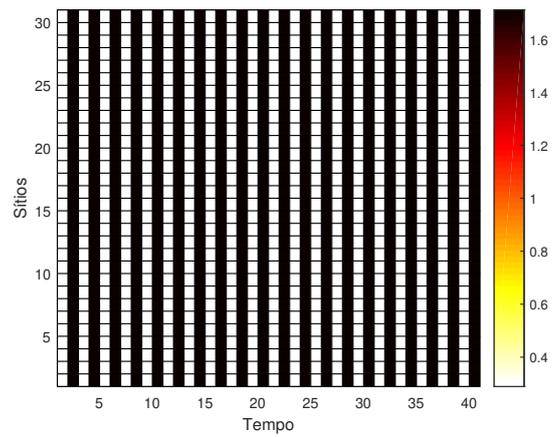
Figura 7.19: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

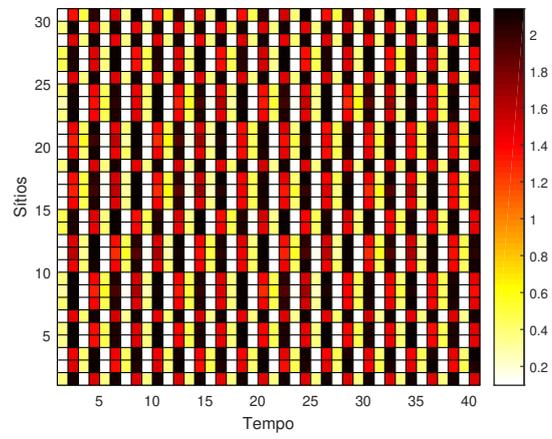


(b)

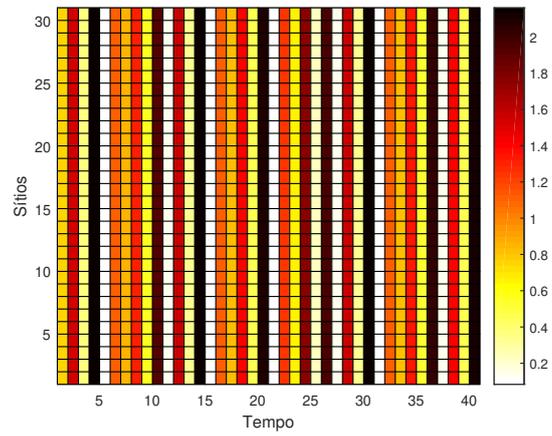


(c)

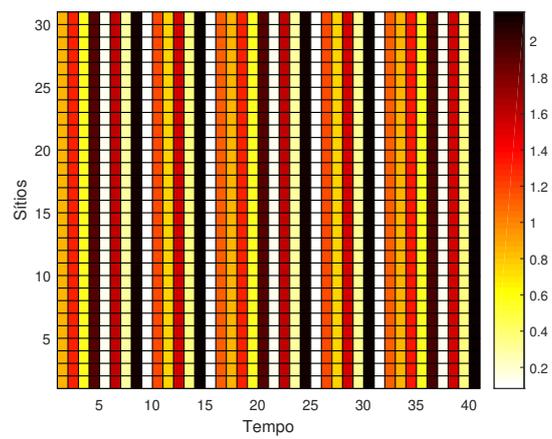
Figura 7.20: Espaço \times tempo, $r = 2, 5$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)

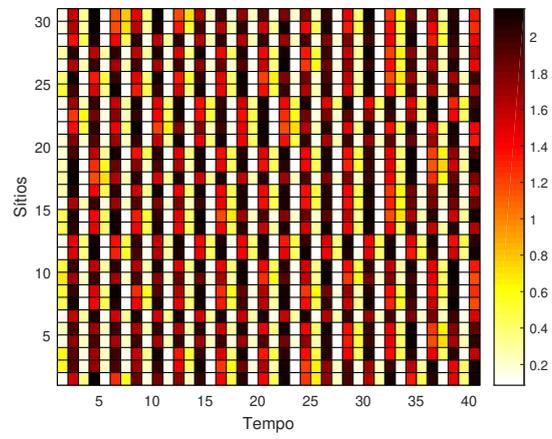


(b)

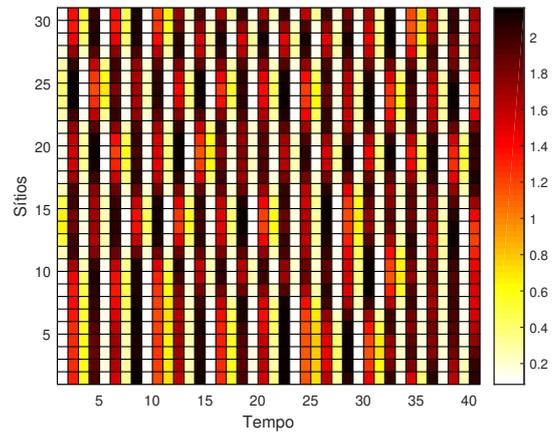


(c)

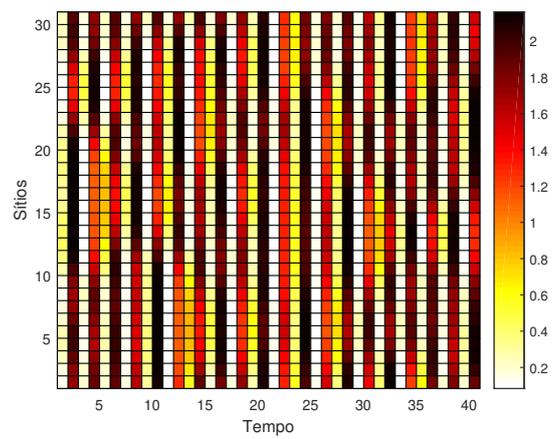
Figura 7.21: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa simples: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.22: Espaço \times tempo, $r = 2, 8$ e Rede Convexa dinâmica: (a) $\mu = 0, 1$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

Passamos agora à análise da sincronização de todos os modelos metapopulacionais aqui apresentados. O modelo (7.4) sincronizou, um total de 8 vezes (das 12 possíveis). Dos modelos propostos aqui neste trabalho, os modelos que mais sincronizaram foram o (5.17) e (6.16), sincronizando um total de 8 vezes. Seguem eles, o modelo (4.7) (sincronizou 5 vezes), o modelo (4.9) com 3 sincronizações e os modelos (4.1) e (4.4) apresentando 2 sincronias. Já os modelos (5.15) e (6.14) não sincronizaram nenhuma vez. Apesar da inclusão dos quocientes nos modelos (5.17) e (6.16), eles se comportaram da mesma maneira que o modelo (7.4).

Quanto à sincronização de órbitas caóticas, que podem levar a extinção da metapopulação, dos modelos propostos neste trabalho, os modelos (5.17) e (6.16) apresentaram 2 sincronizações de órbitas caóticas. Após esses, o modelo (4.9) exibiu 1 sincronização de órbita caótica. Nos demais modelos, não ocorreu nenhuma sincronização de órbitas caóticas. O modelo (7.4), apresentou 2 sincronizações de órbitas caóticas.

Quando nos reportamos à conexão para a qual mais ocorreu sincronização, das 54 possíveis sincronizações, aconteceram na rede convexa simples 22 sincronizações, ao passo que a rede convexa dinâmica exibiu 14 sincronias.

As taxas de migração $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$, se comportaram de forma muito parecida. Das 36 possíveis sincronizações, as taxas de migração $\mu = 0,1$, $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$ favoreceram a sincronia, respectivamente, em 15, 11 e 10 vezes.

Por fim, a taxa de reprodução intrínseca que mais possibilitou a ocorrência de sincronização foi $r = 2,5$ com um total de 29 vezes (das 54 possíveis). Já o valor $r = 2,8$, proporcionou o acontecimento de 7 sincronizações.

8 CONCLUSÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho construímos três modelos metapopulacionais com taxa de migração independente da densidade e acoplamento formado por uma rede convexa simples e por uma rede convexa dinâmica. Todos os modelos foram elaborados a partir do modelo metapopulacional utilizado por Silva [31] através da inclusão de quocientes.

O primeiro modelo que aqui apresentamos inclui na sua formação o quociente entre a densidade do sítio de destino e uma média ponderada das densidades dos sítios, com pesos iguais às frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. Com isso, obtemos um modelo que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a sua densidade.

O segundo modelo foi estruturado com um quociente da diferença de densidade entre o sítio de destino e o de origem por uma média ponderada das diferenças de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. Temos assim um modelo que permite a escolha do sítio de destino de acordo com a diferença de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem.

Já o terceiro modelo aqui trabalhado é sistematizado com um quociente da diferença relativa de densidade entre o sítio de destino e o de origem por uma média ponderada das diferenças relativas de densidades dos sítios com o sítio de origem, com pesos iguais as frações de indivíduos oriundos do sítio de origem que chegam no respectivo sítio vizinho. Este modelo permite a escolha do sítio de destino de acordo com a diferença relativa de densidade entre o sítio de destino e o sítio de origem.

Para todos os modelos obtemos analiticamente um resultado que garante a estabilidade assintótica do atrator sincronizado (Teoremas 3.1, 5.1 e 6.1). O número de Lyapunov transversal L_{\perp} do atrator sincronizado é dado pelo produto do número de Lyapunov da órbita por um quantificador que depende da taxa de migração e dos autovalores de uma matriz oriunda da matriz de conexão. Além disso, se $L_{\perp} < 1$ o atrator sincronizado é assintoticamente estável.

À medida que estudamos os modelos de uma forma geral, passamos para uma análise particular de cada modelo considerando funções de agregação e antiagregação. Por meio de simulações numéricas obtemos a variação do número de Lyapunov transversal em relação à taxa de migração e a taxa de reprodução intrínseca da função que descreve a dinâmica local. Os modelos com funções de antiagregação apresentaram maior região de possível sincronia (com relação a taxa de migração μ e com relação ao parâmetro r) que os modelos com funções de agregação.

Com as simulações numéricas da órbita sincronizada com relação a pequenas perturbações (gráficos espaço \times tempo) concluímos que os modelos com movimentação dependente da diferença de densidade e com movimentação dependente da diferença relativa de densidade com funções de antiagregação sincronizaram mais vezes que todos os modelos. Também a estes, coube o maior número de sincronizações de órbitas caóticas.

Na comparação entre modelos feita no Capítulo 7, constatamos que entre as densidades máximas mais elevadas e as densidade mínimas mais baixas sempre está o modelo com movimentação dependente da diferença de densidade com função de agregação. Um comportamento intermediário das densidades é apresentado pelo modelo com função de agregação dada pela função identidade. Por sua vez, nas densidades mínimas mais altas e densidades máximas mais baixas está o modelo com função de antiagregação igual ao inverso da identidade.

Tanto quanto a evolução da densidade ao longo do tempo, quanto à sincronização, os modelos com movimentação dependente da diferença de densidade e com movimentação dependente da diferença relativa de densidade com funções de antiagregação se comportaram da mesma forma que o modelo utilizado por Silva [31].

Quando nos reportamos a conexão, taxa de migração e valor da taxa de reprodução intrínseca da função que descreve a dinâmica local que mais favorecem a ocorrência de sincronização são a conexão convexa simples, $\mu = 0,1$ e $r = 2,5$, respectivamente.

Apresentamos agora a proposta de continuidade do presente trabalho. Até aqui consideramos a matriz de conexão C como uma combinação convexa de uma matriz de conexão local e uma matriz de conexão global. Uma proposta de continuidade é considerar agora uma matriz de conexão qualquer. No presente trabalho, consideramos os modelos com migração independente da densidade. Outra proposta é considerar a migração dependente da densidade, isto é, $0 < \mu(x) < 1$, para todo x .

Referências Bibliográficas

- [1] ALLEN, J. C., SCHAFFER, W., AND ROSKO, D. Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise. *Nature* 364 (1993), 229–232.
- [2] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., AND YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [3] BARRIONUEVO, J. A., AND SILVA, J. A. Stability and synchronism of certain coupled dynamical systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 40, 3 (2008), 939–951.
- [4] BRITTON, N. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50, 6 (1990), 1663–1688.
- [5] DAMSCHEN, E. I., BRUDVIG, L. A., HADDAD, N. M., LEVEY, D. J., ORROCK, J. L., AND TEWKSBURY, J. J. The movement ecology and dynamics of plant communities in fragmented landscapes. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105, 49 (2008), 19078–19083.
- [6] DAVIS, P. J. *Circulant Matrices*. John Wiley & Sons Inc, 1979.
- [7] DIAZ, L., AND JORGE, D. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*. IMPA, 2007.
- [8] EARN, D. J. D., LEVIN, S. A., AND ROHANI, P. Coherence and conservation. *Science* 290 (2000), 1360–1364.
- [9] ECKMANN, J. P., AND RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *The American Physical Society* 57 (1985), 617–656.
- [10] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.

- [11] FALCY, M. R., AND ESTADES, C. F. Effectiveness of corridors relative to enlargement of habitat patches. *Conservation Biology* 21, 5 (2007), 1341–1346.
- [12] GIORDANI, F. T., AND SILVA, J. A. L. Asymptotic transversal stability for synchronized attractors in a metapopulation model. *Methods in the Applied Sciences* 38 (2015).
- [13] GONG, Y., AND SMALL, M. Epidemic spreading on metapopulation networks including migration and demographics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28 (2018), 1–9.
- [14] HADDAD, N. M., BOWNE, D. R., CUNNINGHAM, A., DANIELSON, B. J., LEVEY, D. J., SARGENT, S., AND SPIRA, T. Corridor use by diverse taxa. *Ecology* 84, 3 (2003), 609–615.
- [15] HANSKI, I. Metapopulation dynamics. *Nature* 396 (1998), 41–49.
- [16] HANSKI, I., AND ZHANG, D. Migration, metapopulation dynamics and fugitive co-existence. *Journal of Theoretical Biology* 163, 4 (1993), 491–504.
- [17] HASSELL, M. P. Density-dependence in single-species populations. *J. Anim. Ecology* 44 (1975), 283–295.
- [18] HASSELL, M. P., COMINS, H. N., AND MAY, R. M. Spatial structure and chaos in insect population dynamics. *Nature* 353 (1991), 255–258.
- [19] HASSELL, M. P., LAWTON, J. H., AND MAY, R. Patterns of dynamical behaviour in single-species populations. *The Journal of Animal Ecology* (1976), 471–486.
- [20] HASSELL, M. P., MIRAMONTES, O., ROHANI, P., AND MAY, R. M. Spatial structure and chaos in insect population dynamics. *Journal of Animal Ecology* 64, 5 (1995), 662–664.

- [21] HESS, G. R. Conservation corridors and contagious disease: a cautionary note. *Conservation Biology* 8, 1 (1994), 256–262.
- [22] JANSEN, V. A. A., AND LLOYD, A. L. Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems. *Journal of Mathematical Biology* 41, 3 (2000), 232–252.
- [23] KAHILAINEN, A., NOUHUYS, S., SCHULZ, T., AND SAASTAMOINEN, M. Metapopulation dynamics in a changing climate: Increasing spatial synchrony in weather conditions drives metapopulation synchrony of a butterfly inhabiting a fragmented landscape. *Global Change Biology* 24 (2018), 4316–4329.
- [24] LANCASTER, P., AND TISMENETSKY, M. *The theory of matrices: with applications*. Academic Press, 1985.
- [25] LEVINS, R. Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. *Bulletin of Entomological Society of America* 15, 3 (1969), 237–240.
- [26] LIEBHOLD, A., KOENIG, W. D., AND BJORNSTAD, O. N. Spatial synchrony in population. *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics* 35 (2004), 467–490.
- [27] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. Springer, 1996.
- [28] OLIVEIRA, K. *Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações*. IMPA, 2005.
- [29] ROHANI, P., MAY, R. M., AND HASSELL, M. P. Metapopulation and equilibrium stability: the effects of spatial structure. *Journal of Theoretical Biology* 181 (1996), 97–109.

- [30] ROHANI, P., AND RUXTON, G. D. Dispersal-induced instabilities in host–parasitoid metapopulations. *Theoretical Population Biology* 55 (1999), 23–36.
- [31] SILVA, J. A. Cluster formation in a heterogeneous metapopulation model. *Journal of Mathematical Biology* 72, 6 (2016), 1531–1553.
- [32] SILVA, J. A., BARRIONUEVO, J. A., AND GIORDANI, F. Synchronism in population networks with non linear coupling. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11, 2 (2010), 1005–1016.
- [33] SIMBERLOFF, D., FARR, J. A., COX, J., AND MEHLMAN, D. W. Movement corridors: conservation bargains or poor investments? *Conservation Biology* 6, 4 (1992), 493–504.
- [34] THUNBERG, H. Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics. *SIAM review* 43, 1 (2001), 3–30.
- [35] UCHMAŃSKI, J. Individual variability and metapopulation dynamics: An individual-based model. *Ecological Modelling* 334 (2016), 8–18.
- [36] WOOD, C. M., WITHMORE, S. A., GUTIÉRREZ, P., SAWYER, S. C., KEANE, J. J., AND PEERY, M. Z. Using metapopulation models to assess species conservation-ecosystem restoration trade-offs. *Biological Conservation* 224 (2018), 248–257.
- [37] YLIKARJULA, J., ALAJA, S., LAAKSO, J., AND TESAR, D. Effects of patch number and dispersal patterns on population dynamics and synchrony. *Journal Theoretical Biology* 207 (2000), 377–387.