

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA TRIDIMENSIONAL PARA MAXIMIZAÇÃO DE FREQUÊNCIAS  
NATURAIS

por

André Vinicius Brizio da Silva

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2018.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA TRIDIMENSIONAL PARA MAXIMIZAÇÃO DE FREQUÊNCIAS  
NATURAIS

por

André Vinicius Brizio da Silva

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Herbert Martins Gomes

Prof. Ignacio Iturrioz

Prof. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, dezembro de 2018.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais pelo incentivo em minha jornada estudantil. Pelo suporte em momentos de dificuldade e pela calma que me transmitiram, essencial para que meus objetivos fossem atingidos nesta etapa de minha vida. Agradeço também a meu irmão e irmãs pelo auxílio emocional ao longo destes anos. Aos meus amigos pelos momentos de descontração e suporte que compartilhamos nesta caminhada rumo à graduação. Ao meu professor orientador Herbert Martins Gomes pelos ensinamentos com os quais tornou possível realizar este trabalho.

Da Silva, A. V. B. **Otimização topológica tridimensional para maximização de frequências naturais**. 2018. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

## RESUMO

A utilização de algoritmos de otimização é historicamente empregada na área estrutural com o objetivo de redução de massa, proporcionando um projeto com menor custo e bem dimensionado para as cargas aplicadas nas regiões de maior solicitação. Com o avanço das técnicas de fabricação surgiu a oportunidade de implementar a otimização topológica, cuja liberdade na modelagem proporciona a capacidade de obter um ótimo com grande redução de massa sem comprometer a rigidez da estrutura. Recentemente, esta otimização vem sendo expandida além da metodologia clássica de maximização da rigidez estrutural para cargas estáticas. Visando a utilização em estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos tais como área aeroespacial e automotiva, o presente trabalho tem como objetivo implementar um algoritmo para a maximização da frequência natural, submetido à restrição de volume. A otimização é realizada via software Matlab e corresponde ao método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*). É realizado um estudo comparando os resultados obtidos utilizando o método soft-kill com os encontrados na literatura. Se discute a possibilidade de evolução do algoritmo com a avaliação da resposta estática da estrutura de maneira a garantir que a retirada de volume ocorra até que seja atingida uma tensão limite estipulada. Um exemplo desta aplicação é apresentado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização topológica, frequências naturais, BESO.

Da Silva, A. V. B. **Tridimensional topology optimization for maximization of natural frequencies**. 2018. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

## **ABSTRACT**

The application of optimization algorithms is historically employed on the structural field with the intention of reducing total mass, allowing the execution of a lower cost project and appropriate design, ensuring the required resistance is met on the most stressed region. With the advance of manufacturing techniques, the opportunity to implement the topological optimization emerged, whose designing freedom allows obtaining a structural optimum with substantial mass reduction, without compromising the stiffness. Recently, this optimization has been expanded beyond the classical methodology of stiffness maximization submitted to static forces. With the purpose of applying the optimization on structures submitted to dynamic loads such as those in the aerospace and vehicle industries, the present work has the objective to implement an algorithm for the maximization of the natural frequency with a final volume constraint. The optimization is carried out on the Matlab software corresponding to the BESO method (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization). A study is performed to compare the results obtained using the soft-kill method with those available in the literature. The possibility of further development of the algorithm is discussed with the implementation of static analysis. By setting a maximum stress as a constraint it is viable to ensure that the structure will endure the applied static loads while the natural frequency is maximized. An example of this application is demonstrated.

**KEYWORDS:** Topology optimization, natural frequencies, BESO.

<b>ÍNDICE</b>	<b>Pág.</b>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
ÍNDICE .....	vi
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos .....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
3.1 Métodos de otimização SIMP, ESO e BESO.....	2
3.2 Sensibilidade do elemento .....	3
3.3 Pós-processamento .....	3
4. MODELAGEM NUMÉRICA .....	4
4.1 Elemento finito hexaédrico de 8 nós utilizado.....	4
5. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	5
5.1 Sensibilidade para a frequência natural.....	6
5.2 Filtragem da sensibilidade.....	6
5.3 Processo evolutivo e estabilização.....	7
6. SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	8
6.1 Validação do algoritmo.....	8
6.1.1 Exemplos bidimensionais.....	8
6.1.2 Exemplo tridimensional .....	10
6.2 Consideração de cargas e tensões na estrutura otimizada para frequência.....	11
7. CONCLUSÕES .....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
APÊNDICES .....	16
ANEXOS.....	18

## LISTA DE FIGURAS

Figura 6.1 – Viga simplesmente apoiada.....	8
Figura 6.2 – Convergência para exemplo de viga simplesmente apoiada: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang <i>et al.</i> (2010).....	9
Figura 6.3 – Estrutura ótima para exemplo de viga simplesmente apoiada: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang <i>et al.</i> (2010).....	9
Figura 6.4 – Placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural no centro. ....	10
Figura 6.5 – Estrutura ótima para exemplo de placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang <i>et al.</i> (2010)...	10
Figura 6.6 – Sólido simplesmente apoiado com massa não-estrutural concentrada na face inferior. ....	10
Figura 6.7 – Estrutura ótima para exemplo de sólido simplesmente apoiado com massa não-estrutural: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang <i>et al.</i> (2010).....	11
Figura 6.8 – Viga bi engastada com placas engastadas nas extremidades superior e inferior..	12
Figura 6.9 – Variação da fração volumétrica e tensão máxima ao longo das iterações para o caso da viga bi engastada.....	12
Figura 6.10 – Variação da fração volumétrica e das três primeiras frequências naturais para o caso da viga bi engastada.....	13
Figura 6.11 – Estrutura final para a otimização de viga engastada: (a) Deslocamentos totais (b) tensões de von Mises.....	14
Figura A1 – Representação do elemento hexaédrico de 8 nós utilizado na análise de elementos finitos, com as coordenadas globais e naturais. ....	16
Figura A2 – Representação 2D do subdomínio de raio $r_{min}$ com $K = 12$ nós contribuindo para a filtragem da sensibilidade do elemento $n$ .....	16
Figura A3 – Fluxograma do processo iterativo para o método BESO. ....	17
Figura A4 – Convergência para exemplo de placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural no centro. ....	17
Figura A5 – Exemplo de estrutura com padrão de tabuleiro ( <i>checkerboard pattern</i> ). (Huang et al.,2010) .....	18
Figura A6 – Exemplo de modelagem em CAD para resultado de otimização de sólido simplesmente apoiado. (Huang et al.,2010) .....	18

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Parâmetros de otimização utilizados nas validações. ....	11
---	----



## 1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o avanço tecnológico vem proporcionando a expansão de algoritmos de otimização em diferentes áreas da engenharia. Com isto, surgem diversas abordagens com relação à otimização estrutural, cujo objetivo fundamental está na busca de um ótimo que apresente menor utilização de material, baixo custo de fabricação e alto desempenho para resistir às cargas aplicadas.

Ao se falar de otimização estrutural, a abordagem pode ser caracterizada em três categorias: otimização dimensional, de forma, e topológica. A otimização dimensional baseia-se na busca pelo valor ótimo das características geométricas da peça, como por exemplo o diâmetro de um furo. Neste mesmo exemplo, otimizar a forma significaria encontrar o contorno ideal para este furo. Quando nos referimos à otimização topológica, é possível partir apenas da aplicação de cargas e imposição de restrições em um volume. O material é então livremente distribuído no domínio, para atender aos requisitos da função objetivo. Esta liberdade com relação à busca pelo ótimo é capaz de obter maior eficiência com relação às demais técnicas de otimização, seja o objetivo a minimização do deslocamento total, maximização da frequência natural ou outra condição requerida para a estrutura.

O método de otimização topológica BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization Method*), permite que material seja removido e adicionado simultaneamente durante a otimização. Isto, aliado a utilização de filtros na otimização, proporciona um resultado que independe da condição inicial e torna este um método robusto para solução de problemas de otimização topológicos. Inicialmente aplicado com o objetivo de maximizar a rigidez estrutural, o BESO foi expandido para lidar com aplicações de estruturas em meios dinâmicos. Neste caso, a maximização da frequência natural busca afastar frequências naturais de uma estrutura de uma frequência de excitação externa e impedir que a estrutura entre em ressonância com a vibração à qual está submetida.

O presente trabalho foca na implementação do algoritmo BESO voltado à maximização da frequência natural no software Matlab (2012) para estruturas tridimensionais de maneira a possibilitar uma análise eficiente e sem a necessidade de programas externos para o cálculo de elementos finitos. Resultados são comparados com exemplos da literatura.

### 1.1 Motivação

Algoritmos de otimização estão em crescente desenvolvimento e aplicação na área estrutural. A metodologia de otimização topológica permite atingir ótimos com maior eficiência dada a liberdade com a qual o material é distribuído no domínio. A busca por estruturas otimizadas tem grande importância em campos de aplicação tais como automotivo e aeroespacial, onde a redução de peso estrutural é essencial. Deste modo, é necessário dimensionar as estruturas com relação à frequência natural, tendo em vista o impacto das vibrações externas e o fenômeno de ressonância.

### 1.2 Objetivos

O trabalho tem como objetivo a implementação do método BESO voltado para maximização da frequência natural no software Matlab (2012), possibilitando que o programa seja aplicado a diversas configurações de restrições em três dimensões empregando-se elementos finitos hexaédricos de 8 nós. Para tal, um novo código será desenvolvido pelo autor, partindo das equações referentes ao algoritmo BESO disponíveis na literatura. A rotina de cálculo de elementos finitos utilizada está adaptada do trabalho desenvolvido por Kwon *et al.*, 1997. Serão otimizadas estruturas para casos clássicos e comparadas com exemplos na literatura.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Huang *et al.*, 2006, propõem um novo algoritmo de otimização topológica bidirecional (BESO) com maximização de rigidez estrutural para uma dada restrição de volume. De acordo com os autores o método é mais robusto se comparado com o ESO pela capacidade

de obter uma estrutura ótima que independe de *design* inicial. O algoritmo utiliza valores de sensibilidade para cada elemento, definidos a partir da influência do elemento na matriz de rigidez global, possibilitando assim uma tomada de decisões com relação aos elementos a serem adicionados ou retirados da estrutura. Utilizando malha binária (elementos sólidos ou vazios) observa-se maior eficiência computacional na análise de elementos finitos ao utilizar um volume inicial equivalente ao volume objetivo. Desta maneira, ao longo das iterações o número de elementos cheios não sofre grande variação e sim há uma alternância entre quais elementos são considerados cheios ou vazios.

Com o objetivo de expandir o método BESO, Huang *et al.*, 2010, publicaram um trabalho extenso no âmbito da otimização topológica. Foi desenvolvida uma metodologia de filtragem para os valores de sensibilidade, garantindo a obtenção de uma estrutura bem definida com maior potencial de fabricação. Diferentes abordagens foram estudadas para utilização de tensão ou frequência natural na função objetivo do algoritmo. Além disso, casos com múltiplas restrições foram implementados. Os autores destacam a importância da aplicação do método de maximização da frequência natural na indústria aeronáutica e automotiva e demonstram a utilização em materiais compósitos.

De acordo com Picelli *et al.*, 2015, algoritmos de otimização topológica vêm sendo expandidos para novas aplicações nos anos recentes. De acordo com os autores a resolução de problemas com o objetivo de maximizar a rigidez ou frequência natural estrutural já apresentam avançado grau de amadurecimento e aponta a necessidade da implementação do método em modelos multifísicos. Contribuindo com a ampliação no campo de análise da interação acústico-estrutural são apresentados resultados para a otimização de uma cavidade acústica com maximização da primeira frequência natural. Também é realizada modelagem da parede de um tanque de água para maximizar primeira e segunda frequências naturais, demonstrando a utilidade da metodologia em aplicações industriais.

Uma abordagem diferenciada é investigada com a utilização de otimização topológica para minimização da frequência natural estrutural. Deng *et al.*, 2015 propõe a aplicação de algoritmo para obter design eficiente de microdispositivos voltados à captura de energia a partir de vibrações mecânicas presentes no meio ambiente. Para prevenir que a estrutura final se deteriore e assegurar que seja fabricável, a resistência estática à deformação lateral é incluída na função objetivo. Para validar o design obtido, o dispositivo polimérico é fabricado por impressão 3D e testado experimentalmente. O resultado comprova um pico de excitação muito próximo à frequência obtida no algoritmo. De acordo com os autores, melhorias devem ser investigadas quanto à formulação de elementos finitos para a dinâmica não linear de materiais poliméricos.

Algoritmos de otimização topológica do tipo ESO ou BESO em sua grande maioria lidam apenas com a restrição de volume. Para expandir sua utilização, Zuo *et al.*, 2012, propõem implementação de restrições de volume, frequência e deslocamento. Os autores enfatizam a importância da restrição de frequência para garantia de que a estrutura não tenha deformações acentuadas quando esta encontra-se submetida a excitações externas como vento, tremores e vibração de máquinas. De maneira semelhante, a restrição de deslocamento assegura-se que determinados pontos da estrutura não deformem além de um limite prescrito por motivos de funcionalidade. Utiliza-se o método *soft-kill* onde o elemento vazio é substituído por elemento de densidade muito baixa e assim não é desconsiderado na análise de elementos finitos, o que é necessário para aplicação das restrições adicionais. Resultados convergentes são apresentados para diversos carregamentos, incluindo a modelagem da estrutura de um edifício submetido à pressão do vento de modo a comprovar a eficácia da abordagem.

### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 Métodos de otimização SIMP, ESO e BESO

Dentre as diversas metodologias de otimização topológica desenvolvidas, pode-se citar três cuja aplicação se destacam: SIMP, ESO e BESO. A metodologia SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) introduzida por Bendsoe em 1989 sugere a utilização de

variável contínua para descrever a densidade do material e possibilitar a resolução do problema de otimização com matemática contínua. Desta maneira, a otimização baseia-se na minimização da densidade de elementos em áreas de baixa solicitação, reduzindo a massa da estrutura. Tendo em vista a aplicação dos resultados na prática, é necessário obter soluções discretas (vazio/cheio) para a densidade dos elementos. Em 2001, Reitz demonstrou como a utilização da função de penalidade do método SIMP é capaz de gerar resultados discretos em certas condições. Além disso, filtros podem ser empregados para auxiliar na discretização da estrutura otimizada.

O método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) foi inicialmente desenvolvido por Xie e Steven em 1992. A partir do cálculo estrutural pelo método de elementos finitos, o ESO baseia-se na remoção gradual de elementos para tornar a estrutura mais eficiente. Duas abordagens clássicas podem ser utilizadas. Uma utiliza a remoção de elementos com menor valor de tensão até atingir uma razão entre volume final e volume do domínio (fração volumétrica) predeterminada, obtendo assim o design ótimo. Outra abordagem utiliza a avaliação da energia de deformação em cada elemento de modo a remover os elementos que menos contribuem para a rigidez da estrutura e assim minimizar o deslocamento total. A principal vantagem do método está na obtenção de uma estrutura discreta sem regiões intermediárias, porém diversos problemas numéricos como a dependência na malha, ótimos locais e padrão de tabuleiro de xadrez surgiram.

Com a evolução do método ESO, surgiu o método BESO. Como principal diferença está a possibilidade de remoção e adição de material simultaneamente. Isto solucionou uma problemática envolvida na remoção precoce de elementos críticos para a solução ótima em iterações iniciais no método ESO. Neste método, uma técnica de filtragem foi introduzida para eliminar a dependência na malha, que pode ser descrita como a tendência à aparição de um maior número de espaços vazios ao refinar utilizar uma malha cada vez mais refinada. A técnica de filtragem também foi capaz de remover a tendência o surgimento do padrão de tabuleiro de xadrez, assim como promover soluções convergentes.

O BESO foi inicialmente desenvolvido com a mesma abordagem do método ESO para classificar quais elementos deveriam ser removidos ou adicionados a cada iteração. Para atender a necessidades de aplicação em meios dinâmicos, uma nova abordagem foi desenvolvida na qual o cálculo de elementos finitos é realizado para obter a frequência natural da estrutura e o auto vetor correspondente ao modo de vibração. Estes são então utilizados para o cálculo da sensibilidade de cada elemento, na qual a classificação deste novo método se baseia.

### 3.2 Sensibilidade do elemento

Como descrito na seção anterior, o método BESO utiliza uma classificação dos elementos no domínio para executar a tomada de decisões com relação à adição ou remoção de cada elemento da estrutura ao longo da otimização. Para o caso de otimização com o objetivo de maximizar a frequência natural, é fácil compreender a necessidade de avaliar a taxa de variação da frequência ao longo do domínio, isto é, a derivada da frequência natural com relação a cada elemento. A partir deste valor, se obtém a influência de cada elemento na frequência natural da estrutura. De acordo com a matemática do problema, esta influência é resultante direta dos valores presentes no autovetor relacionado ao modo de vibração. Ponderando esta influência de acordo com um fator de penalidade para elementos considerados vazios, pode-se obter a sensibilidade.

### 3.3 Pós-processamento

Partindo do valor de sensibilidade de cada elemento, uma filtragem é aplicada para lidar com problemas de convergência e tornar a estrutura ótima mais bem definida. O filtro proposto com a metodologia BESO está fundamentado na definição de um subdomínio de raio constante ao redor de cada elemento. Realiza-se então uma ponderação com relação à distância de cada nó neste subdomínio centrado no elemento em questão, de modo a suavizar a

sensibilidade do elemento de acordo com a sensibilidade de seus elementos vizinhos. Apesar de ser puramente heurístico o filtro desenvolvido para este método é eficiente e permite a aplicação em elementos cheios e vazios, facilitando a classificação posterior dos elementos para a adição ou remoção de material.

#### 4. MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem é realizada através do método de elementos finitos. De acordo com o formato do domínio utilizado na otimização, opta-se por discretizar a estrutura utilizando elementos hexaédricos de 8 nós de mesmas dimensões. Para simplificar a análise e reduzir o custo computacional, ignora-se a rotação e considera-se 3 graus de liberdade por nó referentes às translações no espaço tridimensional. Obtém-se uma matriz de rigidez local  $[K_l]$  (de dimensões 24x24), e utiliza-se a matriz de conectividade para encontrar a matriz de rigidez global da estrutura  $[K]$ . Calcula-se a matriz de massa consistente de um elemento através da utilização de funções de forma para o tipo de elemento utilizado. Com o mesmo procedimento adotado à matriz de rigidez, obtém-se a matriz de massa global  $[M]$ .

Na análise de elementos finitos, o comportamento dinâmico de uma estrutura em vibração livre pode ser representado pela equação (4.1), onde  $\omega_i$  denota a frequência natural da estrutura para o modo de vibração  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\varphi_i$  representa o autovetor associado a esta frequência natural.

$$([K] - \omega_i^2 [M])\varphi_i = 0 \quad (4.1)$$

Aplicando as condições de restrição na matriz de rigidez e de cargas concentradas na matriz de massa, é possível resolver o problema de autovalores e autovetores da equação (4.1), obtendo as informações que descrevem a resposta dinâmica da estrutura em termos de seus modos. A partir destas informações será possível quantificar a influência de cada elemento na frequência natural da estrutura e assim maximizá-la através da otimização BESO. Nas definições que se seguem, considera-se que o vetor  $\varphi_i$  será ortonormalizado pela matriz de massa de forma que  $\varphi_i^T [M] \varphi_i = [I]$ .

Neste trabalho o método de solução de autovalores e autovetores implementado no Matlab(2012) para matrizes esparsas é empregado de forma que se pode avaliar apenas algumas das primeiras frequências naturais com um menor esforço computacional possível tirando proveito da esparsidade das matrizes  $[M]$  e  $[K]$ .

##### 4.1 Elemento finito hexaédrico de 8 nós utilizado

Neste trabalho o elemento finito hexaédrico de 8 nós foi empregado na implementação numérica (Figura A1). Ele contém funções de forma para cada um dos nós do tipo:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) \\ (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) \\ (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\ (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A matriz constitutiva tridimensional para elementos elástico lineares é da forma como indicado por Kwon e Bang, 1997:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material do elemento. Definindo a matriz de deformação-deslocamentos  $[B]$  com  $\varepsilon_i = [B]u_i$ , e  $[B] = \partial N_i / \partial x_i$ , a montagem da matriz de rigidez e massa ficam então definidas por:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad \text{e} \quad (4.4)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [N]^T [N] \det(J) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

onde  $\rho$  é a densidade do elemento e  $\det(J)$  o determinante do Jacobiano da transformação entre  $x,y,z$  e  $\xi_1\xi_2\xi_3$ . A integração de Gauss de  $2 \times 2 \times 2$  pontos de integração é utilizada neste trabalho. Para avaliar a tensão de von Mises na estrutura, utilizam-se as equações (4.5). Toda a implementação está em código Matlab (2012).

$$[\sigma] = [D][B]u_i \quad (4.5)$$

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23})^2]}$$

onde  $\sigma_{ij}$  para  $i = 1,2,3$  e  $j = 1,2,3$  são as tensões cartesianas no ponto de integração do elemento.

Para o cálculo dos deslocamentos e das tensões emprega-se a solução com pré condicionador com matrizes esparsas do Matlab(2012) o que permite a diminuição do esforço e do tempo computacional para a solução do sistema de equações e para as avaliações do estado de tensões no elemento finito.

## 5. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Ao realizar a otimização de uma estrutura, procura-se minimizar ou maximizar uma função objetivo cujo valor é influenciado pelas variáveis de projeto. Quando tratamos de otimizações do tipo BESO para maximizar a frequência natural estrutural, o problema pode ser definido pela equação (5.1).

$$\begin{aligned} \text{Maximize:} & \quad \omega_i \\ \text{Sujeito a:} & \quad V^* - \sum_{n=1}^N V_n x_n = 0 \quad \text{e} \quad ([K] - \omega_i^2 [M])\varphi_i = 0 \\ \text{No qual:} & \quad x = x_{\min} \quad \text{ou} \quad 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $N$  é o número total de elementos,  $V^*$  é o volume prescrito para a estrutura ótima (volume final),  $V_n$  é o volume de um elemento e  $x_n$  significa a condição deste elemento, isto é, esta variável pode assumir valor  $x_{min}$  (elemento vazio) ou 1 (elemento cheio) . O valor de  $x_n$  influencia diretamente na resolução por elementos finitos visto que os valores para módulo de elasticidade e densidade do elemento são dadas pela equação (5.2). A razão pela qual um valor  $x = x_{min}$  é adotado para o elemento vazio em vez de zero, reside em evitar que o elemento vazio seja retirado completamente do cálculo de elementos finitos (método *soft-kill*). Embora esta aproximação ocasione um valor residual no volume pelos elementos vazios, a influência não é expressiva dado que o valor usual de  $x_{min}$  adotado no trabalho é de  $10^{-6}$ .

$$\begin{aligned} E(x_n) &= x_n E \\ \rho(x_n) &= x_n \rho \end{aligned} \quad x_n = x_{min} \text{ ou } 1 \quad (5.2)$$

### 5.1 Sensibilidade para a frequência natural

A sensibilidade de um elemento ( $\alpha_n$ ) é diretamente proporcional à variação da frequência natural da estrutura com relação a este elemento, logo temos que  $\alpha_n \propto \frac{d\omega_i}{dx_n}$ . De acordo com a equação (4.1), ao isolar a frequência natural obtemos a equação (5.3).

$$\omega_i^2 = \frac{\varphi_i^T [K] \varphi_i}{\varphi_i^T [M] \varphi_i} \quad (5.3)$$

Aplicando a derivada na equação (5.3) e introduzindo um termo de penalidade ( $p$ ), obtemos a sensibilidade de um elemento de acordo com a equação (5.4).

$$\alpha_n = \frac{1}{p} \frac{d\omega_i}{dx_n} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_i} \varphi_{i,n}^T \left( \frac{1-x_{min}}{1-x_{min}^p} [K_L] - \frac{\omega_i^2}{p} [M_L] \right) \varphi_{i,n} & x_n = 1 \\ \frac{1}{2\omega_i} \varphi_{i,n}^T \left( \frac{x_{min}^{p-1} - x_{min}^p}{1-x_{min}^p} [K_L] - \frac{\omega_i^2}{p} [M_L] \right) \varphi_{i,n} & x_n = x_{min} \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $\varphi_{i,n}$  é o vetor reduzido proveniente do autovetor correspondente ao modo de frequência  $i$ . Isto é, contém apenas os componentes do autovetor  $\varphi_i$  que estão relacionados aos nós que compõem o elemento  $n$ .

### 5.2 Filtragem da sensibilidade

A importância do filtro aplicado à sensibilidade do elemento à variação da frequência natural reside no fato de que este procedimento alivia os problemas associados à formação de padrões de tabuleiro (*checkerboard pattern*), Figura A5. Para aplicar o filtro, primeiro é necessário definir a sensibilidade de um nó. Esta variável não é fundamentada fisicamente e é encontrada a partir de uma média da sensibilidade dos elementos que contém (compartilham) o nó em questão, de acordo com a equação (5.5).

$$\alpha_j = \sum_{m=1}^M \omega_m \alpha_m^e = 0 \quad (5.5)$$

onde  $M$  significa o número total de elementos conectados ao nó  $j$  e  $\omega_m$  é um fator de escala definido pela equação (5.6).

$$\omega_m = \frac{1}{M-1} \left( 1 - \frac{r_{mj}}{\sum_{m=1}^M r_{mj}} \right) \quad (5.6)$$

onde  $r_{mj}$  é a distância entre o centro do elemento  $m$  e o nó  $j$ . O fator de escala serve para garantir que a influência da sensibilidade de um certo elemento na sensibilidade do nó é maior quando a distância entre eles diminui.

Uma vez definida a sensibilidade do nó, para obter a sensibilidade filtrada do elemento introduz-se um raio  $r_{min}$  (Figura A2). Este raio delimita o subdomínio ao redor de cada elemento no qual os nós que se encontram dentro no mesmo influenciam na obtenção desta sensibilidade filtrada. Esta nova sensibilidade é calculada com a equação (5.7).

$$\alpha_n = \frac{\sum_{j=1}^K \omega(r_{nj}) \alpha_j}{\sum_{j=1}^K \omega(r_{nj})} \quad (5.7)$$

onde  $K$  é o número total de nós no subdomínio definido por  $r_{min}$  e  $\omega(r_{nj})$  é um fator de escala definido pela equação (5.8).

$$\omega(r_{nj}) = r_{min} - r_{nj} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (5.8)$$

Pode-se perceber que o processo de filtragem suaviza a sensibilidade através do domínio. Pela metodologia aplicada, elementos vazios obtêm valores de sensibilidade após a filtragem que podem ser classificados juntamente com elementos cheios mesmo em casos no qual  $x_{min}$  é zero (método *hardkill*). Isto possibilita que elementos vazios possam se transformar em elementos cheios nas iterações subsequentes, característica que contribui para a convergência do método BESO. Detalhes do filtro podem ser encontrados em Liu e Tovar, 2014 e também em Huang e Xie, 2010.

### 5.3 Processo evolutivo e estabilização

A adição e remoção de elementos ocorre após a etapa de filtragem. Define-se o volume objetivo  $V_k$  a partir das razões de evolução  $ER$  e adição  $AR$ . Uma porção do volume de elementos cheios é transformada em elementos vazios ( $V_{1 \rightarrow x_{min}}$ ) e vice-versa ( $V_{x_{min} \rightarrow 1}$ ). Logo,  $V_k$  representa o volume resultante após a alternância entre estados de elementos de acordo com o ordenamento de sensibilidade. Para cada iteração  $k = 2, 3, 4, \dots, etc.$  as equações (5.9) são satisfeitas até que o volume final ( $V^*$ ) seja obtido, para uma fração volumétrica  $V_f$  associada a um volume total do domínio  $V_T$ .

$$V_k = V_{k-1}(1 - ER) \quad \text{dado que} \quad \begin{cases} V_{1 \rightarrow x_{min}} = V_{k-1}(ER + AR) \\ V_{x_{min} \rightarrow 1} = V_{k-1}(AR) \end{cases} \quad V_k \geq V^* = V_f V_T \quad (5.9)$$

Pela natureza binária do valor assumido pelo elemento ao longo do processo evolutivo, ocorrem variações bruscas no valor da sensibilidade. Para possibilitar a convergência da estrutura, a sensibilidade do elemento é suavizada com relação ao seu histórico ao realizar a média entre o valor obtido na iteração atual e o obtido na iteração anterior. A equação (5.10) descreve este cálculo.

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_{n,k} + \alpha_{n,k-1}) \quad (5.10)$$

Um critério simples de convergência é aplicado para verificar a estabilização da otimização a partir da variação total dos valores de sensibilidade. A equação (5.11) é aplicada para as iterações  $k = 10, 11, 12, \dots, etc.$  Neste trabalho, considera-se que ao atingir um valor de  $conv \leq 10^{-4}$  o processo está estabilizado.

$$conv = \frac{|\sum_{k=9}^{k-5} \sum_1^N \alpha_n - \sum_{k-4}^k \sum_1^N \alpha_n|}{\sum_{k-4}^k \sum_1^N \alpha_n} \quad (5.11)$$

Um fluxograma resumido do processo iterativo como um todo pode ser visto na Figura A3.

## 6. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

### 6.1 Validação do algoritmo

Para validar a eficácia do algoritmo implementado, inicia-se pela comparação com resultados disponíveis na bibliografia desenvolvida por Huang *et al.* (2010). São solucionados casos bidimensionais e tridimensionais utilizando os mesmos parâmetros de Huang *et al.* (2010).

#### 6.1.1 Exemplos bidimensionais

Para os exemplos bidimensionais, há uma diferença na comparação com relação à resolução de elementos finitos. Deve-se salientar que elementos tridimensionais de 8 nós são utilizados pelo autor enquanto que os modelos de comparação da literatura geralmente empregam elementos bidimensionais de 4 nós. O primeiro caso investigado é a otimização de uma viga simplesmente apoiada nas extremidades e sem massas concentradas, de acordo com a Figura 6.1.

Observou-se que, apesar de obter estrutura final semelhante à obtida por Huang *et al.* 2010, a frequência natural ficou abaixo do valor de comparação (aproximadamente 6%). Considera-se que isto se deve às diferenças na resolução de elementos finitos visto que o restante do processo evolutivo utiliza as mesmas equações e parâmetros. Analisando o processo de convergência das três primeiras frequências naturais é possível notar uma variação dos valores iniciais, porém há um comportamento similar de aproximação dos valores para as diferentes frequências de vibração ao longo da evolução das iterações.

O autor realiza a otimização em três dimensões e utiliza um valor arbitrário para a espessura da viga (1 metro) já que o mesmo não é divulgado por Huang *et al.* 2010 em seu trabalho. Desta maneira, têm-se que a segunda e terceira frequências naturais obtidas estão relacionadas a diferentes modos de vibração se comparados aos de Huang, onde a vibração está restrita ao plano 2D (elementos de estado plano de tensão). Logo, os valores finais para essas frequências não devem ser comparados.

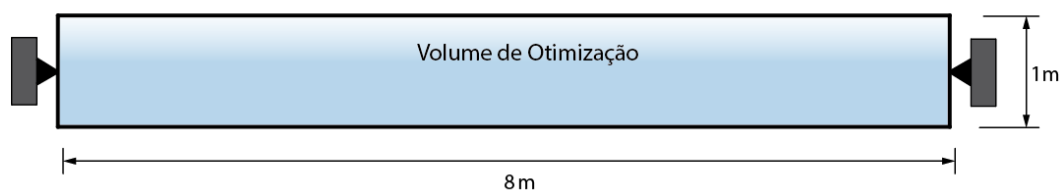


Figura 6.1 – Viga simplesmente apoiada.

A Figura 6.2 ilustra a convergência da otimização, onde é possível perceber o aumento da primeira frequência natural à medida que volume é reduzido. Esta característica está relacionada às condições de fixação da estrutura de maneira que o ganho com a redução de massa supera a perda em rigidez com a retirada de material. Este comportamento é progressivo até que o material restante na otimização seja insuficiente para manter uma estrutura contínua. Quanto maior o refino da malha, um menor volume pode ser obtido até que o rompimento da estrutura ocorra.



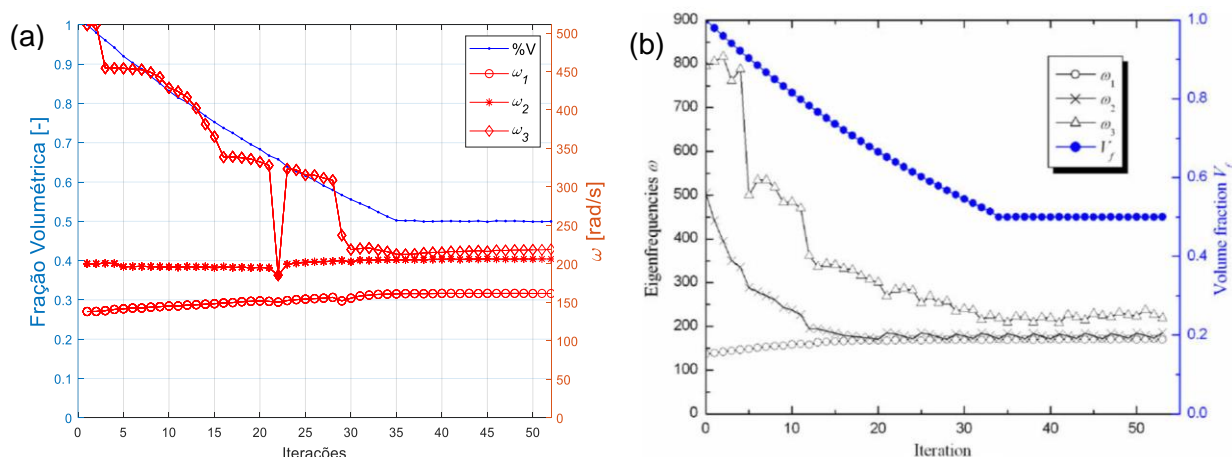


Figura 6.2 – Convergência para exemplo de viga simplesmente apoiada: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang *et al.* (2010).

A Figura 6.3 ilustra a estrutura ótima, onde as cores estão relacionadas à amplitude normalizada do deslocamento para o modo de vibração otimizado (1<sup>o</sup>. Modo).

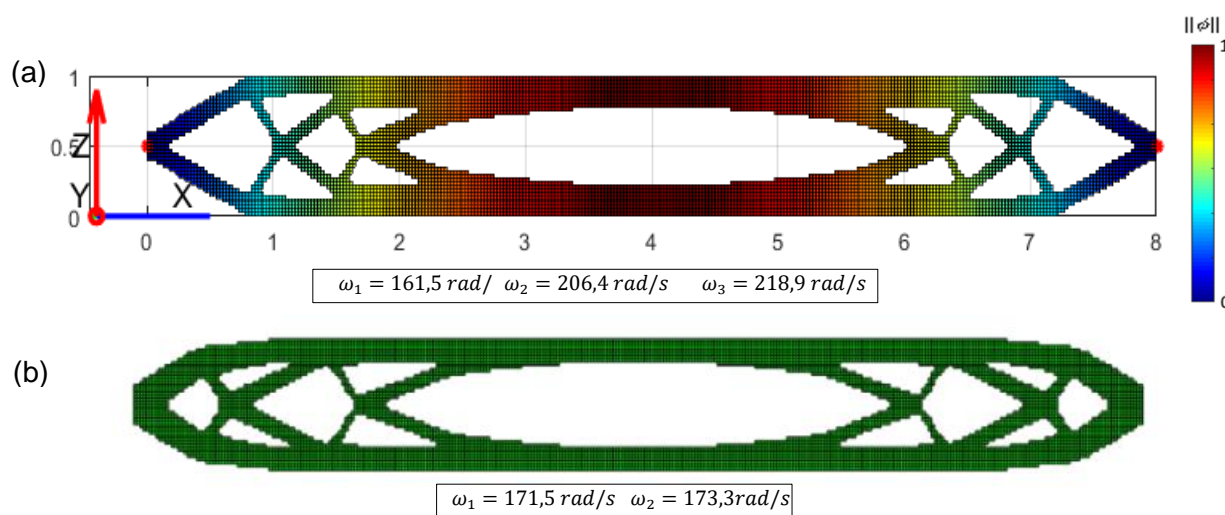


Figura 6.3 – Estrutura ótima para exemplo de viga simplesmente apoiada: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang *et al.* (2010).

Um segundo caso a ser validado consiste de uma placa engastada com adição de massa não-estrutural em seu centro. Neste exemplo, a solução tridimensional do autor é comparada a uma solução utilizando elementos finitos 2D do tipo casca. As condições de contorno estão ilustradas na Figura 6.4. A solução ótima obtida também assemelha-se à estrutura de comparação, apesar de ser encontrado menor valor para a primeira frequência natural (7% de diferença). A otimização do autor obtém maior valor para a segunda e terceira frequências naturais (iguais) quando comparado ao encontrado por Huang *et al.* (2010). A Figura 6.5 ilustra os resultados obtidos. Para este caso, a evolução da otimização (Figura A4) indica a

redução da primeira frequência natural com a retirada de volume, em contraste com o obtido para o exemplo da viga simplesmente apoiada.

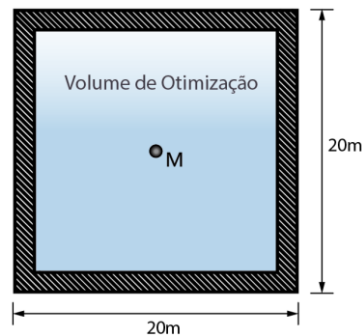


Figura 6.4 – Placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural no centro.

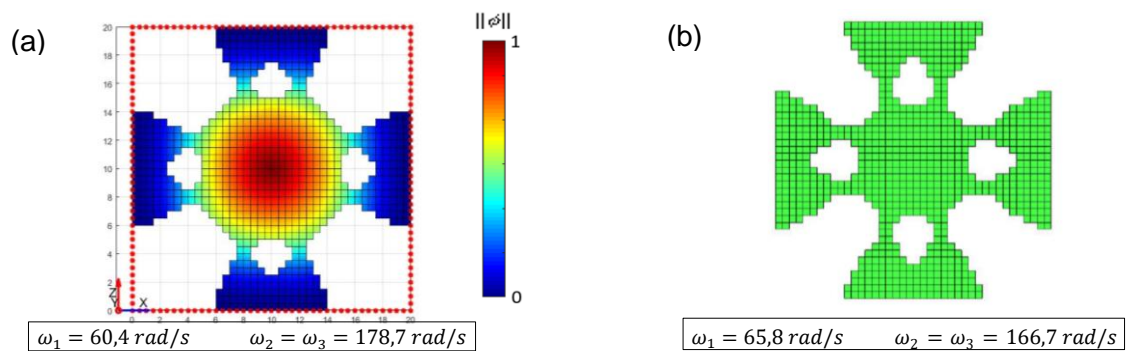


Figura 6.5 – Estrutura ótima para exemplo de placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang *et al.* (2010).

### 6.1.2 Exemplo tridimensional

Para expandir a validação da otimização implementada neste trabalho, um exemplo tridimensional é realizado. Consiste de um sólido simplesmente apoiado nas extremidades de sua base, contando com uma massa concentrada na face inferior. As condições de contorno estão ilustradas na Figura 6.6. Observando o resultado, a estrutura final (Figura 6.7) tem geometria equivalente à utilizada na comparação, obtida por Huang *et al.*, 2010. A otimização da primeira frequência natural proporcionou valor 8% abaixo do valor de comparação apesar de utilizar os mesmos parâmetros. Neste caso também há diferenças com relação à resolução de elementos finitos visto que o autor considera apenas as translações no modelo e Huang *et al.* (2010) leva em consideração translações e rotações. A estrutura obtida está ilustrada na Figura 6.7 e a Figura A6 demonstra um exemplo de geometria equivalente gerada em modelo CAD.

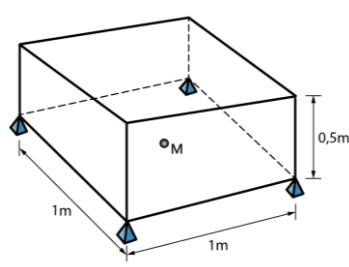


Figura 6.6 – Sólido simplesmente apoiado com massa não-estrutural concentrada na face inferior.

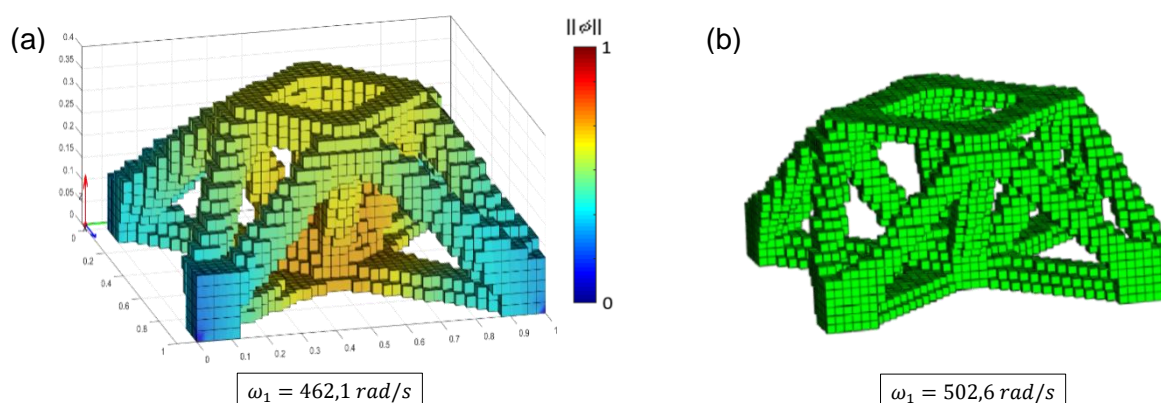


Figura 6.7 – Estrutura ótima para exemplo de sólido simplesmente apoiado com massa não-estrutural: (a) resultado obtido pelo autor e (b) resultado obtido por Huang *et al.* (2010).

Os parâmetros utilizados nas validações deste capítulo estão expostos na Tabela 6.1. Considera-se que os resultados obtidos são satisfatórios dado que a otimização implementada foi capaz de consistentemente gerar geometrias bem definidas para a maximização das frequências. Pequenas divergências provenientes do cálculo de elementos finitos foram observadas e sugerem que modelos com um maior número de graus de liberdade seja utilizado após a otimização para obter um valor mais próximo da realidade apenas para a estrutura final.

Desta maneira, um modelo mais simplificado pode ser utilizado no processo evolutivo de otimização topológica, possibilitando a implementação de uma malha mais refinada para as estruturas 3D e resolução do problema de maneira integral no software Matlab (2012), sem o auxílio de *softwares* externos de elementos finitos.

Tabela 6.1 – Parâmetros de otimização utilizados nas validações.

Parâmetros	Valores			Descrição
	Viga 2D	Plano 2D	Sólido 3D	
Dimensões	8x1x1 m	20x20x1 m	1x1x0,5 m	Dimensões do domínio
Malha	320x40x1	40x40x1	40x40x20	Número de elementos
$V_f$	0,5	0,5	0,15	Fração Volumétrica
$E$	10 MPa	100 GPa	200 GPa	Módulo de Elasticidade
$\nu$	0,3	0,3	0,3	Coefficiente de Poisson
$\rho$	1 kg/m <sup>3</sup>	7.800 kg/m <sup>3</sup>	7.800 kg/m <sup>3</sup>	Densidade
$M$	-	3,12x10 <sup>5</sup>	5x10 <sup>3</sup>	Massa não-estrutural
$ER$	0,02	0,02	0,02	Razão de evolução
$AR$	0,02	0,02	0,02	Razão de adição
$r_{min}$	0,075 m	1,5 m	0,075 m	Raio mínimo de filtragem
$x_{min}$	1x10 <sup>-6</sup>	1x10 <sup>-6</sup>	1x10 <sup>-6</sup>	Definição de elemento vazio
$p$	3	3	3	Penalização

## 6.2 Consideração de cargas e tensões na estrutura otimizada para frequência.

As otimizações realizadas neste trabalho baseiam-se em reduzir o volume à uma fração do valor inicial, maximizando a frequência natural. Ao aplicar massas concentradas, ignora-se o efeito do peso e análise de tensões na estrutura. Porém, desenvolvendo o modelo de elementos finitos para calcular o estado de tensões ao longo da otimização é possível monitorar seu valor máximo e auxiliar na tomada de decisões com relação à escolha da estrutura ótima que não ultrapasse um valor de tensão pré-estabelecido.

Consideremos a otimização da viga ilustrada na Figura 6.8. Neste caso, duas placas, uma superior e outra inferior, são engastadas nas extremidades e unidas pelo volume de otimização, onde a distribuição de elementos se dará para maximizar a frequência natural.

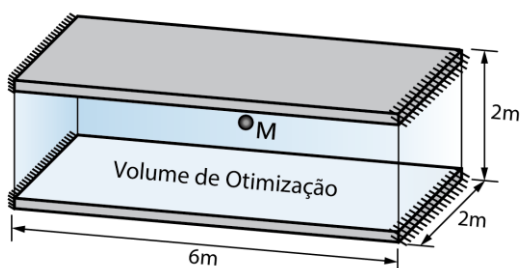


Figura 6.8 – Viga bi engastada com placas engastadas nas extremidades superior e inferior.

No centro deste volume há uma massa concentrada de  $5 \times 10^4 \text{kg}$ . Aplica-se ao modelo da estrutura uma força vertical equivalente ao peso da massa concentrada e o peso da massa de cada elemento cheio. A modelagem é realizada com uma malha de  $66 \times 22 \times 22$  elementos. Um  $r_{min} = 0,091$  (equivalente a 1 elemento) é utilizado e como critério de parada considera-se uma tensão limite de von Mises de 4MPa. Os demais parâmetros da otimização e propriedades do material são mantidos iguais às do exemplo tridimensional do capítulo 6.1.2. A Figura 6.9 indica a variação da tensão máxima de von Mises à medida que o volume é reduzido. Para suavizar o valor da tensão, o mesmo filtro aplicado à sensibilidade é utilizado. A evolução das três primeiras frequências naturais da estrutura está ilustrada na Figura 6.10.

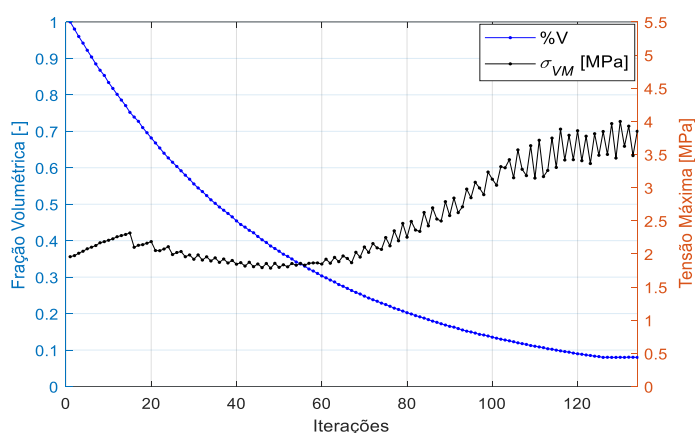


Figura 6.9 – Variação da fração volumétrica e tensão máxima ao longo das iterações para o caso da viga bi engastada.

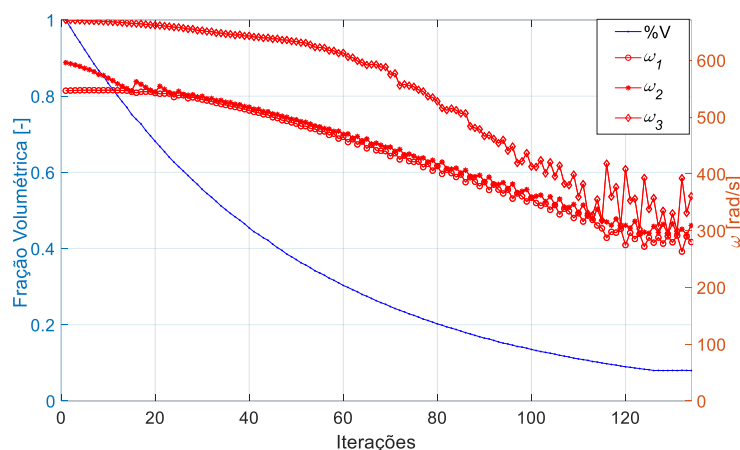


Figura 6.10 – Variação da fração volumétrica e das três primeiras frequências naturais para o caso da viga bi engastada.

Analisando o comportamento das frequências naturais, têm-se que os modos de vibração nas direções transversais à viga ( $\omega_2$  e  $\omega_3$ ) são mais afetados pela redução de material e tendem a igualar-se ao longo da otimização à primeira frequência natural ( $\omega_1$ ). A ausência de uma convergência suave para as frequências e tensão máxima no final da otimização se deve à falta de refino na malha utilizada, já que ao modificar um pequeno número de elementos ocasiona em uma grande variação no comportamento das tensões da estrutura.

Uma vantagem perceptível em avaliar a tensão em estruturas com elevada massa é a possibilidade de identificar uma fração volumétrica que representa um ponto ótimo para a utilização de material. Observando a Figura 6.9 há um intervalo no qual a tensão máxima é reduzida ao longo das iterações. Isto é, a retirada de volume durante esse intervalo ocorre em regiões na qual o ganho em redução de carga estrutural é mais expressivo do que a perda de resistência nos pontos mais solicitados. Desta maneira, observando a resistência estática pode-se afirmar que a estrutura obtida aproximadamente na iteração 50 tem uma utilização ótima de material com uma fração volumétrica de 0,37 e pequena redução da frequência natural de 546 para 490 rad/s (11%).

De maneira similar, pode-se simplesmente fazer uso do valor de tensão como critério mais adequado de parada da otimização. Suponhamos que não seja interessante otimizar a frequência natural e reduzir simultaneamente a tensão máxima ou que a estrutura seja tal que qualquer redução de material ocasione crescente aumento da tensão máxima. Nestes casos, utilizando uma malha refinada para caracterizar a estrutura com maior precisão pode-se adaptar o algoritmo utilizado neste trabalho para efetuar a remoção de material até obter uma tensão limite. Ao atingir esse valor, a fração volumétrica da iteração é mantida até o final da otimização. Para a estrutura da Figura 6.8, por exemplo, utilizando como critério de parada uma tensão de 4MPa, resulta em uma fração volumétrica de aproximadamente 0,08 e a topologia final está ilustrada na Figura 6.11.

Salienta-se que para o exemplo aqui realizado, os valores de tensão máxima obtidos não devem ser comparados aos do limite de escoamento de materiais como aço. Percebe-se oscilações na tensão de von Mises da estrutura e que ocorre pela falta de refino na malha, onde cada elemento tem uma dimensão considerável o que ocasiona variações discretas nas tensões limites de forma que se torna impossível obter exatamente a tensão máxima igual ao limite imposto, sem antes romper a estrutura. É reportado na literatura que os pontos de aplicação de cargas assim como as regiões de vinculação da estrutura são, em geral pontos críticos para o surgimento das tensões limite, como encontrado neste trabalho. Uma melhor distribuição das cargas e pontos de vinculação poderiam trazer benefícios à otimização, com um melhor aproveitamento do material estrutural o qual trabalharia mais próximo ao seu limite máximo admissível.



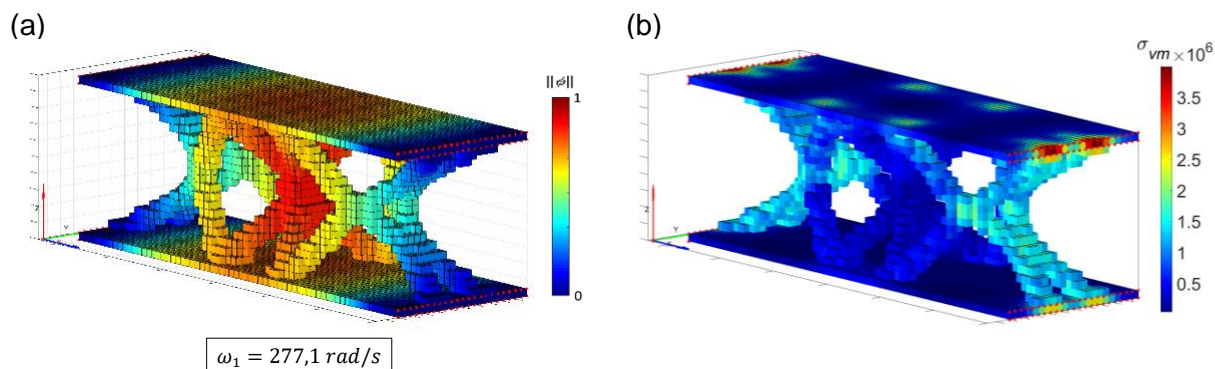


Figura 6.11 – Estrutura final para a otimização de viga engastada: (a) Deslocamentos totais (b) tensões de von Mises.

## 7. CONCLUSÕES

O trabalho desenvolvido implementou uma metodologia de otimização de estruturas 3D no software Matlab(2012). O algoritmo utiliza a resolução por elementos finitos com elementos de 8 nós, contemplando as translações nos eixos x, y e z. Realiza-se a resolução de um problema de autovalores e autovetores para obter a resposta dinâmica da estrutura e quantificar a influência de cada elemento nos modos de vibração avaliados. Com o objetivo de reduzir a quantidade de material utilizado, elementos são retirados do volume através da rotina de otimização BESO *softkill*, cuja função objetivo é a maximização da primeira frequência natural.

Nos três problemas iniciais apresentados, através da comparação com resultados da bibliografia, foi possível validar o algoritmo para diferentes condições de contorno. Fixando o valor final de fração volumétrica, observou-se a evolução, por exemplo, das três primeiras frequências naturais ao longo das iterações até a convergência. Esta evolução indicou a aproximação da segunda e terceira frequências à primeira, confirmando a eficácia do algoritmo em distribuir o material de modo a maximizar o primeiro modo de vibração.

Expandindo a metodologia, realizou-se a introdução de cargas estruturais ao modelo proporcionando a possibilidade de avaliar a resposta estática na otimização. Foi demonstrado assim que é possível utilizar uma tensão limite como critério de parada visto que esta forma é de maior interesse quando comparado apenas à imposição de uma fração volumétrica final. Observou-se, porém, que uma malha mais refinada é necessária para expandir esta aplicação o que implicaria em problemas de tempo de processamento e tamanho de espaço em memória para acomodar os problemas. Isto também justifica a necessidade de encontrar valores de tensão máxima mais próximos aos limites de escoamento do material em todo o material restante, tornando mais eficaz este critério.

Para trabalhos futuros, sugere-se a melhoria na implementação do código afim de possibilitar a utilização de um maior número de elementos com resolução da otimização em tempo computacional razoável. Uma maior versatilidade pode ser obtida ao se empregar diferentes tipos de elementos finitos, assim como a possibilidade de importar arquivos de softwares CAD. Além disto, resultados com a utilização de métodos *hardkill* para este tipo de otimização deve ser estudada, diminuindo a complexidade da otimização e tempo computacional.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bendsøe, M.P. “Optimal shape design as a material distribution problem”. Structural Optimization, p.193-202. 1989.

Deng, J., Rorschach, K., Baker, E., Sun, C., Chen, W. "**Topology optimization and fabrication of low frequency vibration energy harvesting micro devices**", Smart Materials and Structures, V.24, N<sup>o</sup>.2, I.025005, 2014.

Huang, X., Zuo, Z.H., Xie, Y.M. "**Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies**". Computers and Structures, V. 88, pp.357-364. 2010. doi:10.1016/j.compstruc.2009.11.011

Huang, X., Xie, Y.M. "**Evolutionary topology optimization of continuum structures**". Wiley, 2010. ISBN: 978-0-470-74653-0

Kwon, Y. W., Bang, H. "**The finite element method using MATLAB**", CRC Mechanical Engineering Series, 1997.

Liu, K., Tovar, A. "**An efficient 3D topology optimization code written in Matlab**". Structural and Multidisciplinary Optimization, V. 50, Issue 6, pp 1175–1196. 2014.

Matlab, "**MATrix LABORatory, R2012a**". The MathWorks Inc., Natick, MA, 2000. <www.mathworks.com/>. Acessado em 01/09/2016.

Picelli, R., Vicente, W. M., Pavanello, R., Xie, Y. M. "**Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic-structure interaction**", Finite Element in Analysis and Design, V.106, p.56-64, 2015.

Reitz, A. "**Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods**". Struct Multidisc Optim 21:159–163, 2001.

Xie, Y. M., Steven, G. P. "**Evolutionary Structural optimization**", Springer Ed.,188p., 1992.

Zuo, Z. H., Xie, Y. M., Huang, X. "**Evolutionary topology optimization of structures with multiple displacement and frequency constraints**", Advances in Structural Engineering, V.15, No.2, p.359-372, 2012.

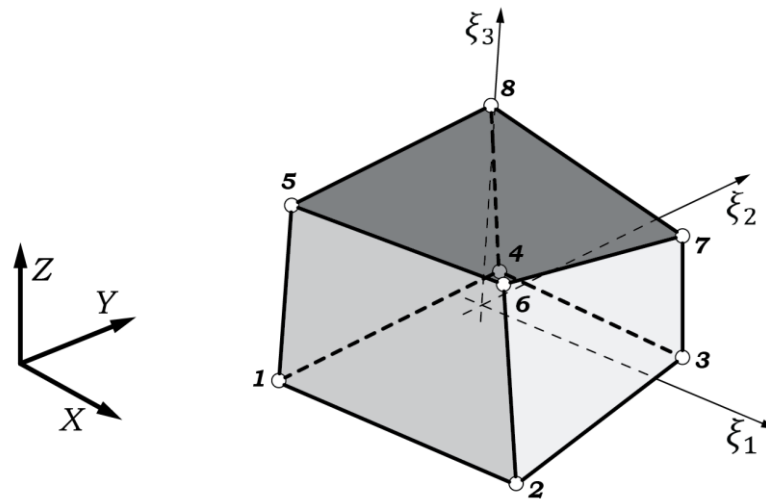


Figura A1 – Representação do elemento hexaédrico de 8 nós utilizado na análise de elementos finitos, com as coordenadas globais e naturais.

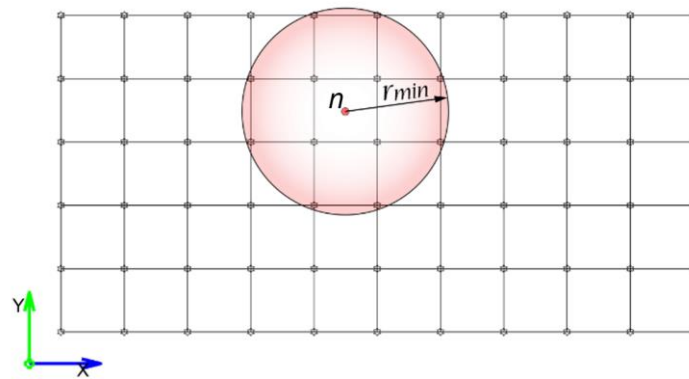


Figura A2 – Representação 2D do subdomínio de raio  $r_{min}$  com  $K = 12$  nós contribuindo para a filtragem da sensibilidade do elemento  $n$ .



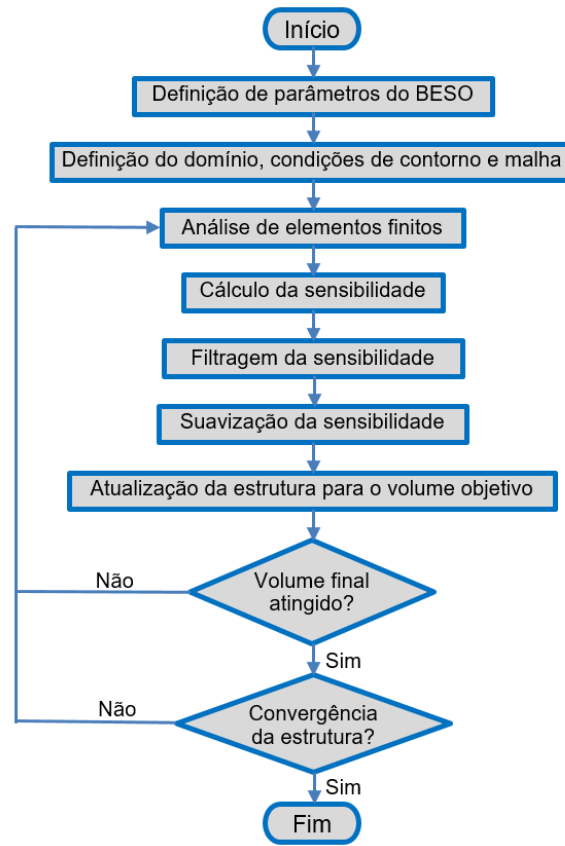


Figura A3 – Fluxograma do processo iterativo para o método BESO.

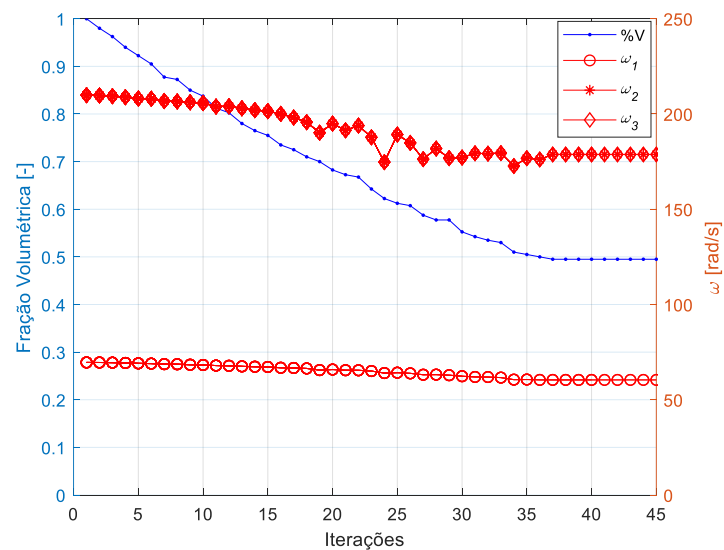


Figura A4 – Convergência para exemplo de placa engastada nos quatro bordos e com massa não-estrutural no centro.

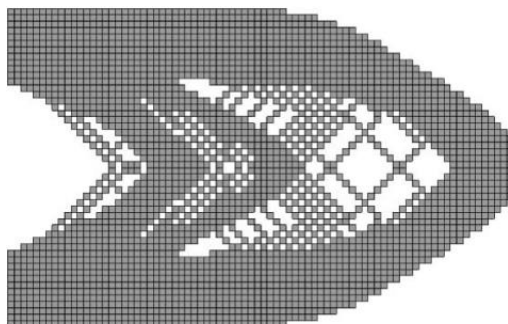


Figura A5 – Exemplo de estrutura com padrão de tabuleiro (*checkerboard pattern*). (Huang et al.,2010)

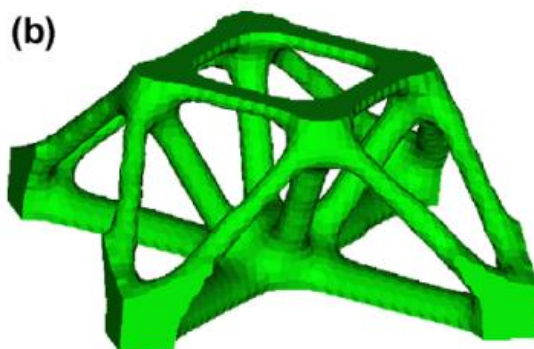


Figura A6 – Exemplo de modelagem em CAD para resultado de otimização de sólido simplesmente apoiado. (Huang et al.,2010)