SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA O PROBLEMA NÃO LINEAR ACOPLADO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO

Rubem Mário Figueiró Vargas – rvargas@eq.pucrs.br
PUCRS – FENG - DEQ
Porto Alegre – RS – Av Ipiranga 6681 CEP 90619.900 – Prédio 30 Bloco 6 Sala 216
Marco Tullio de Vilhena – vilhena@cesup.ufrgs.br
UFRGS - PROMEC
Jacques Brancher
UFRGS - PROMEC

Resumo. *Neste trabalho uma solução analítica é proposta para o problema não linear acoplado de transmissão de calor por condução e radiação simultâneas. A solução é obtida através do uso do método da decomposição, este constitui-se em uma ferramenta potente para a solução de problemas não lineares. Resultados são obtidos, tanto para o meio isotrópico como para o anisotrópico, e comparados com resultados disponíveis na literatura. Uma análise comparativa entre o uso de técnicas numéricas e analíticas é então abordada ao final do trabalho.*

Palavras-chave: *Transferência de calor não linear, condução e radiação acoplada, solução analítica.*

1. INTRODUÇÃO

A classe de problemas de transferência simultânea por condução e radiação tem como característica a não linearidade, e esta é a causa de baixa existência de soluções analíticas, mesmo que aproximadas para tal problema. De qualquer forma técnicas numéricas têm sido apresentadas na literatura. Siewert e Thomas (1991) apresentaram uma solução construída a partir do uso do método dos esféricos harmônicos junto com splines cúbicas de Hermite para definição de uma técnica iterativa. Siewert (1995) apresenta outra técnica numérica baseada na aproximação P_N da equação do transporte junto com o método de Newton para definir as iterações do método. No grupo de soluções analíticas Vargas e Vilhena (1999) apresentam uma solução baseada no método de decomposição proposto por Adomian (1988), esta solução é aplicada a um problema de transporte, expresso pela aproximação S_N com apenas dois pontos de quadratura. Tal técnica é no trabalho atual utilizada para a solução do problema acoplado de transferência de calor por condução e radiação isotrópico e anisotrópico com condições de contorno reflexivas (tanto especular como difusa) ou não reflexivas. A aproximação S_N utilizada é de 30 pontos de quadratura, a fim de gerar soluções numéricas para os problemas. Os resultados são confrontados com os obtidos por Siewert e Thomas (1991).

2. DESENVOLVIMENTO

A formulação desenvolvida por Ozisik (1973) é utilizada neste trabalho para representar o problema físico conforme segue:

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}I(\tau,\mu)+I(\tau,\mu)=\frac{\varpi}{2}\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}P_l(\mu')I(\tau,\mu')d\mu'+(1-\varpi)\frac{\sigma n^2}{\pi}T^4(\tau) \tag{1}$$

para $\tau\in(0,\tau_0)$ e $\mu\in[-1,1]$; e as seguintes condições de contorno:

$$I(0,\mu)=\varepsilon_1\frac{\sigma n^2}{\pi}T_1^4+\rho_1^s I(0,-\mu)+2\rho_1^d\int_0^1 I(0,-\mu)\mu d\mu \tag{1.a}$$

$$I(\tau_0,-\mu)=\varepsilon_2\frac{\sigma n^2}{\pi}T_2^4+\rho_2^s I(\tau_0,\mu)+2\rho_2^d\int_0^1 I(\tau_0,\mu)\mu d\mu\ , \tag{1.b}$$

para $\mu\in[0,1]$. Aqui $\tau\in(0,\tau_0)$ é a variável ótica, μ é a direção do co-seno medido a partir do eixo positivo τ e ϖ é o albedo para o espalhamento simples. Além disso, assume-se que a lei de espalhamento $p(\theta)$ pode ser expressa através de uma expansão de Legendre finita em termos dos cossenos do ângulo de espalhamento, θ , ou seja,

$$p(\theta)=\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\cos\theta),\quad \text{onde } \beta_0=1 \text{ e } |\beta_l|<2l+1 \text{ para } l\geq 1. \tag{2}$$

Para as condições de contorno, adotamos a seguinte simbologia : ρ_α^s e ρ_α^d , para $\alpha=1$ e 2 , são os coeficientes para reflexão especular e difusa, e que $\varepsilon_\alpha=1-\rho_\alpha^s-\rho_\alpha^d$, com $\alpha=1$ e 2 , são as emissividades para as duas superfícies. Além disso, n é o índice de refração e σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

O aspecto não linear deste problema vêm do fato que a distribuição de temperatura $T(\tau)$ envolve a intensidade de radiação e comparece elevada à quarta potência na equação para a intensidade de radiação. A distribuição de temperatura, por sua vez, deve satisfazer a equação da condução do calor

$$k\beta\frac{d^2}{d\tau^2}T(\tau)=\frac{d}{d\tau}q_r(\tau) \tag{3.a}$$

sujeita às condições de contorno:

$$T(0)=T_1 \text{ e } T(\tau_0)=T_2\ . \tag{3.b}$$

Em adição a isso, k é a condutividade térmica do meio, β é o coeficiente de extinção e $q_r(\tau)$ é o fluxo de calor radiativo dado por:

$$q_r(\tau)=2\pi\int_{-1}^{1}I(\tau,\mu)\mu d\mu. \tag{4}$$

Para seguir a tradição na literatura de transferência de calor, normalizar-se-á o problema considerado, introduzindo-se uma temperatura de referência T_r e usando-se as seguintes definições :

$$I(\tau,\mu) = \left(\frac{\sigma n^2}{\pi} T_r^4\right) I^*(\tau,\mu), \tag{5.a}$$

$$q_r(\tau) = \left(\frac{\sigma n^2}{\pi} T_r^4\right) q_r^*(\tau), \tag{5.b}$$

e $$T(\tau) = T_r \Theta(\tau) \ . \tag{5.c}$$

Então o problema normalizado é escrito como segue :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I^*(\tau,\mu) + I^*(\tau,\mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^{1} P_l(\mu') I^*(\tau,\mu') d\mu' + (1-\varpi)\Theta^4(\tau) \tag{6.a}$$

para $\tau \in (0,\tau_0)$ e $\mu \in [-1,1]$,

$$I^*(0,\mu) = \varepsilon_1 \Theta_1^4 + \rho_1^s I^*(0,-\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I^*(0,-\mu')\mu' d\mu' \quad \text{e} \tag{6.b}$$

$$I^*(\tau_0,-\mu) = \varepsilon_2 \Theta_2^4 + \rho_2^s I^*(\tau_0,\mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I^*(\tau_0,\mu')\mu' d\mu' \ . \tag{6.c}$$

A equação para a temperatura resulta :

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Theta(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c} \frac{d}{d\tau} q^*_r(\tau) \ , \tag{7.a}$$

com

$$\Theta(0) = \Theta_1 = \frac{T_1}{T_r} \ , \ \Theta(\tau_0) = \Theta_2 = \frac{T_2}{T_r} \tag{7.b}$$

e $$q^*_r(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{1} I^*(\tau,\mu')\mu' d\mu' \ . \tag{8}$$

Aqui, $$N_c = \frac{k\beta}{4\sigma n^2 T_r^3} \tag{9}$$

é chamado parâmetro de conjugação condução-radiação.

Pretende-se resolver o problema acoplado de transferência de calor descrito anteriormente, utilizando-se a aproximação S_N e o método da decomposição, Adomian (1985) e (1988); assim sendo o mesmo é escrito como segue:

$$\mu_k \frac{d}{d\tau} I_k^*(\tau) + I_k^*(\tau) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_{lk} \sum_{i=1}^{N} \omega_i P_{li} I_i^*(\tau) + (1-\varpi)\Theta^4(\tau) \tag{10}$$

$$I_i^*(0) = \varepsilon_1 \Theta_1^4 + \rho_1^s I_{N-i+1}^*(0) + 2\rho_1^d \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \mu_j I_{N-j+1}^*(0) \tag{10.a}$$

e

$$I_{N-i+1}^*(\tau_0) = \varepsilon_2 \Theta_2^4 + \rho_2^s I_i^*(\tau_0) + 2\rho_2^d \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \mu_j I_j^*(\tau_0) \ , \tag{10.b}$$

onde $k = 1{:}N$; $P_{lk} = P_l(\mu_k)$, N é par e i = 1 : N/2.

A Eq. (10) pode ser dividida por μ_k e então ser escrita como:

$$\frac{d}{d\tau} I_k^*(\tau) + \frac{1}{\mu_k} \sum_{i=1}^{N} (\delta_{ki} - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_{lk} \omega_i P_{li}) I_i^*(\tau) = \frac{(1-\varpi)}{\mu_k} \Theta^4(\tau), \tag{11}$$

em notação matricial teria-se:

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{I}^*(\tau) + \tilde{O}\tilde{I}^*(\tau) = \tilde{D}\Theta^4(\tau) \tag{12}$$

sendo

$$\tilde{I}*(\tau) = \left[I_1^*(\tau) \quad I_2^*(\tau) \quad \ldots \quad I_N^*(\tau) \right]^T ; \tag{13}$$

$\tilde{O}$, uma matriz NxN, com elementos o_{ki} , representados por

$$o_{ki} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{i=1}^{N} (\delta_{ki} - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_{lk} \omega_i P_{li}) \tag{14}$$

onde δ_{ki} é a delta de Kroenecker, e

$$\tilde{D} = \left[\frac{1-\varpi}{\mu_1} \quad \frac{1-\varpi}{\mu_2} \quad \ldots \quad \frac{1-\varpi}{\mu_N} \right]^T . \tag{15}$$

Tendo-se como objetivo a aplicação do método da decomposição vai-se escrever o termo não linear da equação em função dos polinômios especiais de Adomian,

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{I}^{*}(\tau)+\tilde{O}\tilde{I}^{*}(\tau)=\tilde{D}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\,. \tag{16}$$

A equação acima é uma diferencial de primeira ordem, por isso sua solução pode ser construída a partir da solução do problema homogêneo, Kreider et all (1966),

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{I}_h^{*}(\tau)+\tilde{O}\tilde{I}_h^{*}(\tau)=0\ . \tag{17}$$

Pode solucionar-se este problema empregando-se o método LTS_N , Barichello (1992). Sendo assim a solução é expressa como:

$$\tilde{I}_h^{*}(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{F}e^{s_k\tau}\ , \tag{18}$$

onde as matrizes $\tilde{P}_k$ são definidas por Vilhena e Barichello (1991) e a matriz $\tilde{F}$ tem a forma

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}I_1^{*}(0) & I_2^{*}(0) & \ldots & I_N^{*}(0)\end{bmatrix}^T. \tag{19}$$

Assim sendo, a solução da Eq.(16) é dada pela soma da homogênea mais a particular,

$$\tilde{I}*(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{F}e^{s_k\tau}+\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{D}e^{s_k\tau}\otimes\sum_{n=0}^{\infty}A_n\ , \tag{20}$$

onde o símbolo $\otimes$, significa a convolução da solução homogênea com o termo representativo da não linearidade. Neste ponto, se está preparado para aplicar o método da decomposição. Para tanto considera-se a expansão:

$$\tilde{I}*=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{u}_n\ . \tag{21}$$

Substituindo-se a Eq.(21) em (20) obtem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{u}_n(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{F}e^{s_k\tau}+\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{D}e^{s_k\tau}\otimes\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\,. \tag{22}$$

A Eq.(22) é satisfeita se as seguintes identidades verificarem-se

$$\tilde{u}_0(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{F}e^{s_k\tau} \tag{23}$$

$$\tilde{u}_1(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}_k\tilde{D}e^{s_k\tau}\otimes A_0(\tau) \tag{24}$$

então, para um termo genérico n

$$\tilde{u}_n(\tau) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{P}_k \tilde{D} e^{s_k \tau} \otimes A_{n-1}(\tau). \tag{25}$$

Aqui os polinômios An são expressos por, Adomian (1988) :

$$A_0(\tau) = t_0^{\ 4} \ , \ A_1(\tau) = 4t_0^{\ 3} t_1 \ , \ A_2(\tau) = 4t_0^{\ 3} t_2 + 6t_0^2 t_1^2 \tag{26}$$

e assim por diante. Os coeficientes t_n são originários da solução da equação para temperatura, que por sua vez é lograda a partir da integração da equação do calor resultando

$$\Theta(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{4\pi N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} q*_r(\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi N_c}\int_0^{\tau} q*_r(\tau) d\tau . \tag{27}$$

Agora supondo que $\Theta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(\tau)$ e lembrando-se que

$$q_r^*(\tau) = 2\pi \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i I_i^*(\tau) \tag{28}$$

tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau_0}\sum_{n=0}^{\infty} u_{ni}(\tau')d\tau' + \frac{1}{2N_c}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} u_{ni}(\tau')d\tau' \tag{29}$$

onde u_{ni} é a i$^{\text{ésima}}$ componente da matriz $\tilde{u}_n$. Da mesma forma que para a intensidade de radiação as seguintes identidades são alcançadas para as parcelas da temperatura,

$$t_0(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} \tag{30}$$

$$t_1(\tau) = -\frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau_0} u_{0i}(\tau')d\tau' + \frac{1}{2N_c}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau} u_{0i}(\tau')d\tau' \tag{31}$$

e para um termo genérico (n+1)

$$t_{n+1}(\tau) = -\frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau_0} u_{ni}(\tau')d\tau' + \frac{1}{2N_c}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\mu_i\int_0^{\tau} u_{ni}(\tau')d\tau' . \tag{32}$$

Estas relações são fórmulas de recorrência que permitirão a determinação das incógnitas t_n , e conseqüentemente dos polinômios A_n. Estabelecida a formulação vai-se explicitar as equações utilizadas dentro do grau de aproximação empregado. Para isso, reescreveu-se

$$A_0(\tau) = t_0{}^4 = (\Theta_1 + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\tau_0}\tau)^4 \ , \tag{33}$$

como

$$A_0(\tau) = (a\tau + b)^4 \ , \tag{34}$$

onde $a = \dfrac{\Theta_2 - \Theta_1}{\tau_0}$ e $b = \Theta_1$ (35)

com o objetivo de simplificar-se a notação. Observe que conhecido $A_0(\tau)$ procede-se a determinação de $\tilde{u}_1(\tau)$, bastando para isso a avaliação da integral de convolução. Executados os cálculos devidos temos as seguintes expressões paras os componentes das matrizes colunas $\tilde{u}_0(\tau)$ e $\tilde{u}_1(\tau)$;

$$u_{0i}(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} I_k{}^*(0)\, p_{ik}^m e^{s_m \tau} \ , \tag{36.a}$$

$$u_{1i}(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} d_k\, p_{ik}^m g_{1m}(\tau) \tag{36.b}$$

onde, p_{ik}^m é o elemento da i ésima linha e k ésima coluna da matriz P_m ;

$$g_{1m}(\tau) = \frac{1}{s_m}\left[e^{s_m\tau}\left(b^4 + \frac{4ab^3}{s_m} + \frac{12a^2b^2}{s_m{}^2} + \frac{24a^3b}{s_m{}^3} + \frac{24a^4}{s_m{}^4}\right)\right] -$$

$$\frac{1}{s_m}\left((a\tau+b)^4 + \frac{4a(a\tau+b)^3}{s_m} + \frac{12a^2(a\tau+b)^2}{s_m{}^2} + \frac{24a^3(a\tau+b)^3}{s_m{}^3} + \frac{24a^4}{s_m{}^4}\right), \tag{36.c}$$

e

$$d_k = \frac{(1-\varpi)}{\mu_k} \ . \tag{36.d}$$

Remetendo-se agora às Eq.(32), determina-se as que já são possíveis, tendo em vista o que já está estipulado em termos de $\tilde{u}_n$. Sendo assim as componentes t_i factíveis de determinação até este ponto são

$$t_0(\tau) = (a\tau + b) \ , \tag{37.a}$$

$$t_1(\tau) = -\frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i t_{1i}(\tau_0) + \frac{1}{2N_c}\sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i t_{1i}(\tau), \tag{37.b}$$

onde a função

$$t_{1i}(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} I_k^{*}(0)\, p_{ik}^{m}\frac{(e^{s_m\tau}-1)}{s_m}\ ; \tag{37.c}$$

$$t_2(\tau) = -\frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\sum_{i=1}^{N} \omega_i\mu_i t_{2i}(\tau_0) + \frac{1}{2N_c}\sum_{i=1}^{N} \omega_i\mu_i t_{2i}(\tau), \tag{37.d}$$

onde a função

$$t_{2i}(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} d_k\, p_{ik}^{m}\int_0^{\tau} g_{1m}(\tau')d\tau'. \tag{37.e}$$

Observe que as expressões para u_{0i} e t_{1i} envolvem o fluxo angular na fronteira $\tau = 0$. Este valor não é conhecido e para ser determinado resolve-se um sistema de equações constituído pelas condições de contorno juntamente com as expressões para o fluxo angular, em suas N direções discretas, avaliado em $\tau = \tau_0$. Desta maneira, obtém-se um sistema de 2N equações e 2N incógnitas; solucionando-o, então consegue-se os valores para os componentes do fluxo angular junto à fronteira $\tau = 0$, facultando assim a determinação de todas as parcelas constituintes das expressões para o fluxo angular e para a temperatura em qualquer posição τ do domínio.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Desejando-se obter resultados numéricos através da formulação desenvolvida considerou-se três problemas testes, cujos dados físicos estão apresentados na tabela 1.

Tabela 1: Dados físicos para diferentes problemas

Problema	ε_1	ε_2	ρ_1^s	ρ_2^s	ϖ	Θ_1	Θ_2	ρ_1^d	ρ_2^d	τ_0
1	1.0	1.0	0.0	0.0	0.9	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0
2	1.0	1.0	0.0	0.0	0.95	1.0	0.5	0.0	0.0	1.0
3	0.6	0.4	0.1	0.2	0.95	1.0	0.5	0.3	0.4	1.0

Os resultados numéricos foram obtidos para a distribuição de temperatura normalizada, fluxos de calor condutivo, radiativo e total normalizados , Siewert e Thomas (1991):

$$Q_c(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\Theta(\tau), \quad Q_r(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c}q_r^{*}(\tau), \quad Q(\tau) = Q_c(\tau) + Q_r(\tau). \tag{38}$$

sendo $\Theta(\tau)$ definido pela Eq.(27) e $q_r^{*}(\tau)$ pela Eq.(28).

Nas tabelas seguintes os resultados obtidos através do método da decomposição são mostrados seguidos dos resultados numéricos obtidos através do método P_N , Siewert e Thomas (1991), a fim de comparação. Em todos os problemas resolvidos $N_c = 0.05$.

Tabela 2: Comparação entre o método da decomposição e P_N -Problema 1

Posicao	Temperatura	Fluxo Radiativo	Fluxo Condutivo	Fluxo Total
Método da decomposição N=30 - L=0				
0.00	1.000000	2.999547	0.793380	3.792926
0.20	0.844603	3.001867	0.791059	3.792926
0.40	0.675557	2.882191	0.910736	3.792926
0.60	0.478246	2.730109	1.062817	3.792926
0.80	0.251413	2.591834	1.201093	3.792926
1.00	0.000000	2.486352	1.306575	3.792926
Método P_N N=300 e L=0				
0.00	1.000000	2.96126	0.837894	3.79915
0.20	0.836956	2.98131	0.817843	3.79915
0.40	0.665558	2.89062	0.908530	3.79915
0.60	0.470505	2.75387	1.04528	3.79915
0.80	0.247544	2.61795	1.18120	3.79915
1.00	0.000000	2.51121	1.28795	3.79915

Tabela 3: Comparação entre o método da decomposição e Pn -Problema 2

Posicao	Temperatura	Fluxo Radiativo	Fluxo Condutivo	Fluxo Total
Método da decomposição N=30 - L=29				
0.00	1.000000	4.249963	0.502842	4.752805
0.20	0.904929	4.295533	0.457272	4.752805
0.40	0.813902	4.293249	0.459556	4.752805
0.60	0.718995	4.259192	0.493613	4.752805
0.80	0.615226	4.206585	0.546219	4.752805
1.00	0.500000	4.146404	0.606401	4.752805
Método P_N N=300 e L=299				
0.0	1.000000	4.46433	0.506896	4.97123
0.2	0.904648	4.51471	0.456516	4.97123
0.4	0.814121	4.51568	0.455549	4.97123
0.6	0.720124	4.48194	0.489290	4.97123
0.8	0.616765	4.42356	0.547669	4.97123
1.0	0.500000	4.34940	0.621826	4.97123

Tabela 4: Comparação entre o método da decomposição e P_N -Problema 3

Posicao	Temperatura	Fluxo Radiativo	Fluxo Condutivo	Fluxo Total
Método da decomposição N=30 e L=29				
0.0	1.00000	1.606926	0.466854	2.073778
0.2	0.911458	1.644665	0.429115	2.073778
0.4	0.824776	1.628620	0.445160	2.073778
0.6	0.730937	1.575591	0.498188	2.073778
0.8	0.623918	1.498725	0.575055	2.073778
1.0	0.500000	1.408072	0.665707	2.073778
Método P_N N=300 e L=299				
0.0	1.00000	1.57059	0.473502	2.04409
0.2	0.910237	1.61004	0.434047	2.04409
0.4	0.823037	1.59900	0.445092	2.04409
0.6	0.729706	1.55041	0.493675	2.04409
0.8	0.623661	1.47323	0.570858	2.04409
1.0	0.500000	1.37563	0.668457	2.04409

Os resultados obtidos através do método da decomposição para o problema 1 apresentam em relação aos resultados de Siewert e Thomas um erro máximo em torno de 5% e uma concordância entre 1 e 3 algarismos significativos.

Nas tabelas 3 e 4 foram apresentados resultados com L=299 apenas para verificar-se o comportamento da solução obtida através do método aqui proposto para problemas de L=29, visto que não trata-se de problemas iguais. Observa-se apesar de serem problemas diferentes, em termos da lei de espalhamento, que o comportamento da solução obtida pelo método da decomposição demonstra comportamento semelhante aos resultados apresentados por Siewert, inclusive em termos de coincidência de algarismos significativos.

4. CONCLUSÕES

A partir da análise dos resultados numéricos e gráficos com relação a comparação entre os métodos da decomposição e a técnica numérica desenvolvida por Siewert constata-se que a solução analítica apesar de aproximada, por ter-se truncado as séries em seus termos iniciais, apresenta excelente concordância com os resultados antecedentes na literatura. Além disso, cabe ressaltar que a aproximação da equação do transporte feita por Siewert é P_{300} e na técnica desenvolvida neste trabalho é S_{30}.

O método da decomposição de Adomian figura como uma ferramenta forte para a solução de problemas não lineares analiticamente. Quando aplicou-se tal método ao problema acoplado de transferência de calor por condução e radiação simultâneas junto com os resultados oriundos do método LTS_N, método em que aplica-se transformada de Laplace a aproximação S_N da equação da equação do transporte, construiu-se uma técnica híbrida de solução bastante viável. O caráter analítico da solução, a facilidade de sua implementação e o baixo esforço computacional para que as respostas sejam atingidas faz com que a técnica aqui proposta torne-se atraente para cálculos de engenharia.

REFERÊNCIAS

Adomian, G.; Rach, R., 1985, Coupled Differential Equations and Coupled Boundary Conditions, J.Math. Anal.Appl., 112 (1) .

Adomian, G., 1988, A Review of the Decompostion Method in Applied Mathematics, J.Math.Anal.Appl., vol. 1, 135 .

Barichello, L.B., 1992, Analytical Formulations for the Solution of One -Dimensional Discrete Ordinates Problem, , PhD Thesis - Graduate Program in Mechanical Engineering - Federal University of Rio Grande do Sul - PROMEC - UFRGS, Porto Alegre ,RS, Brazil.

Kreider, D.L.; Kuller,R.G.; Ostberg, D.R.; Perkins,F.W., 1966, An Introduction to Linear Analysis.Addison -Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts.

Ozisik, M. N., 1973, Radiative Transfer and Interaction with Conduction and Convection, J. Wiley, NY.

Siewert,C.E.; Thomas, 1991, A Computational Method for Solving a Class of Coupled Conductive-Radiative Heat Transfer Problems, J. Quant.Spectrosc.Radiat. Transfer , vol.45, n. 5, pp.273-281.

Siewert,C.E., 1995, An Improved Iterative Method for Solving a Class of Coupled Condutive- Radiative Heat-Transfer Problems, J. Quant.Spectrosc.Radiat. Transfer , vol. 54, n. 4, pp. 599-605.

Vargas, R.M.F., Vilhena, M.T.M.B.,1999, A Closed Form Solution for the One-Dimensional Radiative Conductive Problem by the Decomposition and LTS_N Methods, Journal Quantitative Spectrocscopy and Radiative Transfer, vol.61, n.3, pp. 303-308.

Vilhena, M.T.; Barichello, L.B., 1991, A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation, Kerntechnik vol. 56 334-336.

AN ANALYTICAL APPROXIMATED SOLUTION FOR THE NONLINEAR COUPLED CONDUCTIVE-RADIATIVE HEAT TRANSFER PROBLEM

Abstract - *In this work is proposed an analytical solution for the nonlinear coupled conductive-radiative heat problem. The solution is obtained using the decomposition method. This method is a powerful tool to solve nonlinear problems. Numerical results are attained as for isotropic medium as anisotropic medium. These ones are compared with results encountered in the literature. An analyses is made comparing numerical and analytical solutions.*