REP's - Revista Even. Pedagóg.
Edição Especial Temática: História, Filosofia e Educação Matemática
Sinop, v. 9, n. 2 (24. ed.), p. 743-766, ago./out. 2018
ISSN 2236-3165
http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/index
DOI: 10.30681/2236-3165

AS FOTOGRAFIAS NA OBRA "A GEOMETRIA PELAS TRANSFORMAÇÕES" EM TEMPOS DE MATEMÁTICA MODERNA: diálogos possíveis

THE PHOTOGRAPHS IN THE WORK GEOMETRY FOR TRANSFORMATIONS IN MODERN MATHEMATICS TIMES: possible dialogues

Andréia Dalcin
Rute da Cunha

RESUMO

O artigo apresenta uma reflexão sobre o potencial, como documento histórico, das fotografias impressas nos três volumes de **A Geometria pelas Transformações** de Zoltan Paul Dienes e Edward William Golding. A leitura das imagens apontou para o papel das fotografias como complemento ao texto escrito. As cenas retratadas dão indicações ao professor de como proceder na prática pedagógica e enfatizam a necessidade da ação da criança na execução das atividades propostas, que buscam explorar conceitos geométricos essenciais para a compreensão da moderna matemática na década de 70 do século XX.

Palavras-chave: História da Educação Matemática. Movimento da Matemática Moderna. Fotografia.

ABSTRACT

The article presents a reflection on the potential, as a historical document, of the photographs printed in the three volumes of A Geometry by the Transformations of Zoltan Paul Dienes and Edward William Golding. The reading of the images pointed to the role of photographs as a complement to the written text. The scenes portrayed give indications to the teacher about how to proceed in pedagogical practice and emphasize the need of the child's action in solving the proposed activities, which sought to explore geometric concepts essential for the understanding of modern mathematics in the 70's of the twentieth century.

Keywords: History of Education Mathematics. Movement of Modern Mathematics. Photography.

Correspondência:
Andréia Dalcin. Doutora em Educação pela Universidade de Campinas (UNICAMP). Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), campus Porto Alegre, Faculdade de Educação e Instituto de Matemática e Estatística, curso de Licenciatura em Matemática. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: andreia.dalcin@ufrgs.br

Rute da Cunha. Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Professora da Universidade Federal de Mato Grosso, Campus Cuiabá, Instituo de Ciências Exatas e da Terra, curso de Licenciatura em Matemática. Cuiabá, Mato Grosso, Brasil. E-mail: rutecunha@ufmt.br

Recebido em: 29 de maio de 2018.
Aprovado em: 27 de agosto de 2018.
Link: http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/view/3205/2355

1 INTRODUÇÃO

O propósito deste artigo é discutir a fotografia como documento histórico em pesquisas no campo da História da Educação Matemática a partir da experiência de “leitura” das fotografias impressas nos três volumes de **A Geometria pelas Transformações** de Zoltan P. Dienes e Edward W. Golding. Traz como pano de fundo o Movimento da Matemática Moderna e a apropriação das ideias deste movimento no Brasil na década de 1970. As obras de Zoltan Dienes são citadas quando se estuda a circulação do movimento, e sua presença nos cursos de formação para professores primários em diversos lugares do país.

Ao olhar para a fotografia como imagem e documento histórico, trazemos para o debate um tipo de fonte que vem ganhando espaço nos estudos históricos.

Segundo Burke (2004, p. 15) “as atas de uma conferência de historiadores americanos, realizada em 1985, e voltada para ‘a arte como evidência’, comprovam que os anos 80 significaram uma virada a respeito deste assunto”, neste sentido, a década de 1980 é considerada o marco para a efetivação da “virada pictórica”, que teria iniciado ainda na década de 1960, momento em que se percebe o valor das fotografias como evidência da história social do século XIX. As fotografias, assim como a oralidade, possibilitam a construção de “uma história a partir de baixo”, focalizando o cotidiano e as experiências de pessoas comuns” (BURKE, 2004, p. 15). Nesta perspectiva é preciso que se definam métodos, modos de olhar e abordar as fotografias, com o intuito de potencializar sua função para além da mera ilustração (DALCIN, 2018).

No entanto, os procedimentos de leitura da fotografia, como documento histórico, se diferenciam em função do tipo e intencionalidade do suporte no qual a fotografia está inserida. Uma fotografia em um álbum de família ou de uma escola, solta em uma caixa ou arquivo ou mesmo integrando uma narrativa visual em um acervo, tem intencionalidade distinta daquela impressa em um suporte pedagógico.

2 FOTOGRAFIA IMPRESSA EM SUPORTE PEDAGÓGICO

As fotografias podem estar impressas em suportes pedagógicos a exemplo de livros e manuais didáticos, livros paradidáticos, anuários escolares, revistas pedagógicas, jornais, boletins e provas. Dividem o espaço físico com o texto escrito e com ele interagem com maior ou menor articulação. Nesta perspectiva, a fotografia, outrora pertencente ao fotógrafo, passa a existir em outro espaço/lugar e interage com leitores com os mais diversos interesses, dentre os quais os pesquisadores que tomam a cultura escolar como objeto de estudo. Cada pesquisador traz suas questões de pesquisa que irão nortear o processo de diálogo com a fotografia.

Neste sentido, Mauad (1996) chama atenção para o cuidado que o pesquisador precisa ter ao interrogar as fotografias/imagens.

> No processo de constante vir a ser recuperam o seu caráter de presença, num novo lugar, num outro contexto e com uma função diferente. Da mesma forma que seus antigos donos, o historiador entra em contato com

> este presente/passado e o investe de sentido, um sentido diverso daquele dado pelos contemporâneos da imagem, mas próprio à problemática ser estudada. Aí reside a competência daquele que analisa imagens do passado: no problema proposto e na construção do objeto de estudo. A imagem não fala por si só; é necessário que as perguntas sejam feitas. (MAUAD, 1996, p. 10).

Inicialmente busca-se respostas para as questões usuais: qual o nome do fotógrafo/autor, data da fotografia, intencionalidade da fotografia e contexto em que foi produzida. Lembrando que em muitos casos esbarramos na primeira questão, pois o anonimato da autoria é a regra e não a exceção. Nestes casos, uma alternativa é analisarmos o conjunto das fotografias e ver se em alguma delas temos a evidência da autoria, ou, se existe algum padrão quanto a técnica e estilo que possam nos revelar algo sobre a autoria.

As fotografias presentes nos jornais, anuários, revistas pedagógicas ou livros destinados aos professores, e outros suportes impressos precisam ser lidas considerando o tempo histórico, contexto e lugar de onde se produz tal dispositivo, bem como considerar a que público tais textos imagéticos impressos se destinam. Como nos coloca Chartier (1998, p. 16),

> A imagem é muitas vezes uma proposta ou protocolo de leitura, sugerindo ao leitor a correta compreensão do texto, o seu justo significado. Neste papel – que ela desempenha mesmo sendo reutilizada e não tendo sido gravada expressamente para este texto onde se insere (...), ela pode constituir-se num lugar de memória que cristaliza, numa representação única, uma história, uma propaganda, um ensinamento, ou ser então construída como figura moral, simbólica, analógica, que fornece sentido global do texto, que uma leitura descontínua e vagabunda poderia fazer perder.

Fotografias podem servir de chave de leitura para o exercício de compreensão de algo mais, pois corporificam “o quanto a imagem não se limita a ilustrar ou tentar reproduzir uma realidade, mas é construtora, por meio de uma linguagem própria, do que é pensado, construído, elaborado e processado numa determinada época e para um determinado público” (FERRAZ; BASTOS, 2017, p. 255). Neste sentido, as fotografias impressas em suportes pedagógicos são permeadas por ideologias, podendo reforçar ou problematizar modos e estilos de vida, ideias preconcebidas sobre hábitos, e costumes de um determinado grupo e cultura escolar.

Considerando os pressupostos mencionados, nos propomos a analisar as fotografias presentes na obra de Zoltan Dienes e Edward W. Golding, **A Geometria pelas Transformações**, lembrando que ela se insere em um momento histórico pontual, em que uma "moderna matemática" se constitui, legitima e adentra o Brasil, como veremos na sequência. Uma matemática centrada no estudo das estruturas e no pensamento dedutivo, que problematiza o conceito de espaço em geometria.

3 A GEOMETRIA E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Em 1945, a matemática contemporânea do grupo Nicolas Bourbaki[1] faz sua entrada no Departamento de Matemática da Universidade de São Paulo pela contratação do professor André Weil, membro do grupo. A matemática de todo pensamento autenticamente científico, axiomático, estruturalista, triunfante, era apresentada e influenciaria os então professores do departamento citado. Embora provocasse resistências, nos anos 1960 já adentrava as aulas do ensino primário e secundário. ***L'Architecture des Mathématiques**,* texto de Bourbaki, de 1947, tinha mostrado a importância das estruturas-mães, dos fundamentos estruturantes da matemática. Segundo Bkouche (1980) a ideia era que toda ciência devia reduzir a realidade a modelos, por uma reflexão puramente dedutiva e dominar esta mesma realidade. Os estudos de Dieudonné (1990, p. 118 apud PIRES, 2006, p.114) nos colocam que

> Pouco a pouco, desenha se uma ideia geral que será precisada no século XX, a de estrutura na base de uma teoria matemática; é a consequência da constatação de que aquilo que desempenha o papel primordial numa teoria são as relações entre os objetos matemáticos que aí figuram, antes da natureza desses objetos, e que, em duas teorias diferentes, pode acontecer que haja relações que se exprimem da mesma maneira nas duas teorias; o sistema destas relações e as suas "correspondências" é uma estrutura "subjacente" às duas teorias.

Neste contexto, segundo Bkouche (1980), para o campo do ensino restaria ser o catecismo do verdadeiro discurso, sendo para os alunos suficiente repeti-lo (o

[1] Nícolas Bourbaki, grupo de matemáticos franceses, criado em 1934, e que tinha como objetivo reorganizar os conhecimentos matemáticos. Para tal, retoma os trabalhos de Galois (estruturas algébricas), Cantor/Dedekind (teoria dos conjuntos) e Hilbert (axiomática), tentando obter a inteligibilidade da Matemática.

discurso) e aplicar as boas regras. De qualquer maneira, as estruturas-mães de Bourbaki estão presentes, pois elas são o fundamento da matemática. “Este retraimento da história, esta recusa de partir da produção dos conceitos e dos métodos reduzem o ensino a ser senão o discurso descritivo do estado atual da Ciência” (BKOUCHE, 1980, p. 3).

Como desdobramento, a geometria euclidiana é subtraída do currículo do então ensino secundário em benefício da aplicação da álgebra linear. Dieudonné, membro do grupo Bourbaki, havia declarado em algumas ocasiões, inclusive no Seminário de Royamount (1959): “Abaixo Euclides!”; isso porque a geometria euclidiana nada mais seria do que o estudo de um espaço afim associado a um espaço vetorial real de duas dimensões, munido de um produto escalar positivo.

Segundo Bkouche (1980), todas as declarações dos Bourbaki se embasam na história da geometria a partir do século XIX. Tudo se desenrola pela discussão de espaço. Para Riemann e Klein, ele não é senão o lugar dos fenômenos geométricos. Com a formalização das geometrias não euclidianas há de se fazer a distinção entre espaço matemático e espaço físico. Riemann, em 1854, introduz a noção de espaço (grandeza multidimensional), mas é em Félix Klein, no **Programa de *Erlanger*** (1872), que o conceito de espaço sob o ponto de vista de conjunto vai funcionar em direção às transformações. As transformações em Klein, não são sobre as figuras geométricas, mas sobre o espaço concebido matematicamente, fazendo aparecer explicitamente o espaço como o conjunto de pontos munido de certa estrutura (grupo de transformações, em Klein) evidenciando a noção de equivalência das estruturas, libertando o raciocínio geométrico da intuição espacial.

As geometrias não euclidianas, por outro lado, evidenciam teorias geométricas não contraditórias, independentes do espaço físico, contemplando as construções axiomáticas de Hilbert, onde os objetos não têm sentido senão pertinentes aos axiomas que se relacionam, o que leva à exclusão do espaço físico.

Klein, com seu Programa, muito contribuiu para o conceito matemático de espaço. Neste Programa, Klein apresenta uma análise das relações entre propriedades projetivas e propriedades métricas das figuras, e é em torno da noção de grupo das transformações que ele se constitui.

Segundo Bkouche (1980), três são as ideias fundamentais:

> a) As transformações não agem sobre as figuras do espaço mas sobre o espaço, isto permite por em evidência ao mesmo tempo a noção dos grupos de transformações e a noção de espaço.
> b) Uma geometria é um par (G,E): um grupo G operando sobre um conjunto E, e as propriedades geométricas de E invariantes por G; uma geometria subordinada é definida por um sub-grupo H de G, que faz surgirem novas propriedades de invariância [...].
> c) É a estrutura do grupo que caracteriza a geometria e, por consequência, duas geometrias tendo o mesmo grupo terão as propriedades análogas; isto põe em evidência a noção de geometrias equivalentes, o que vai permitir eliminar a intuição geométrica (ou primeiramente que a vá transformar) visto que não é a especificação do modelo que intervém no estudo de uma geometria, mas a estrutura do par (G, E): a demonstração de uma propriedade geométrica não depende da visão que se tem de um modelo particular mas da estrutura do par (G, E). (BKOUCHE, 1980, p. 6-7)

Para Bkouche (1980), a formalização está estabelecida à geometria e à teoria dos grupos (em direção à teoria dos invariantes). Para ele, além de Klein desembaraçar a geometria de toda intuição física, vai permitir enriquecê-la com a noção de equivalência, que permite transportar a dedução de um domínio a outro, e, neste sentido,

> vai permitir desenvolver uma noção heurística de equivalência permitindo transportar a indução (que permanece o fundamento da atividade da descoberta em matemática como nas outras ciências experimentais) e "metaforizar" as novas construções da geometria dita "abstrata". (BKOUCHE, 1980, p. 7).

Ainda, para Bkouche (1980), a 'intuição do espaço', expressão de Klein, faz parte da compreensão da geometria, também "abstrata" propriamente dita, mas ignorá-la pode fazer com que o ensino de geometria seja gramaticalmente correto, mas sem sentido.

Ao encontro dessas ideias, foram escritos os três volumes por Zoltan Paul Dienes e Edward W. Golding, intitulados **A Geometria pelas Transformações**: volume I: **Topologia, Geometria Projetiva e Afim**; volume 2: **Geometria Euclidiana**; volume 3: **Grupos e Coordenadas**; além, de um volume na coleção **Primeiros Passos em Matemática**: volume 3: **Exploração do Espaço e Prática da Medição.**

Neste texto analisamos as edições de 1971 dos volumes 1 e 2, de 1971 e de 1972 do volume 3, publicadas pela editora Herder de São Paulo. São traduções da edição francesa publicada em 1967 pela O.C.D.L de Paris. Os tradutores foram

Maria Pinto Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier, sob a supervisão do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática- de São Paulo.

Figura 1 – Capas de **A Geometria pelas Transformações**

Fonte: acervo das autoras

O Volume I contempla a Topologia, a Geometria Projetiva e Afim. Para tal apresenta jogos que vão desde o estudo de fronteiras, regiões, interior e exterior ao estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes por transformações topológicas, como deformações que não produzem nenhum tipo de ruptura da figura. Em relação à Geometria Projetiva propõem o estudo das propriedades descritivas das figuras que permanecem invariantes por projeções obtidas por fontes puntiformes, particularmente, o estudo da perspectiva. A Geometria Afim é abordada pelo estudo das propriedades invariantes por projeções a partir do infinito (projeções paralelas), particularmente, o estudo das semelhanças.

O volume II é totalmente dedicado à Geometria Euclidiana. Trata das propriedades invariantes de figuras cujo deslocamento no espaço conservam as posições relativas dos pontos, linhas e superfícies das figuras. Nesse volume são estudadas as transformações euclidianas que são de três tipos: as rotações, as simetrias e as translações. (DIENES; GOLDING, 1971b, p. 16).

O volume III é dedicado à noção de grupo, utilizado para descrever as relações entre as diversas transformações geométricas. São estudados até os grupos de ordem 8. São empregadas coordenadas para estudar os deslocamentos considerados como vetores, a adição e subtração de vetores, as transformações afins, entre outros conceitos, chegando à noção de vetores próprios e valores próprios.

4 ZOLTAN PAUL DIENES, EDWARD WILLIAM GOLDING E O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Zoltán Pál Dienes (anglicanizado Zoltan Paul Dienes) nasceu em 1916 em Budapeste. Seu pai, Pál Dienes, era um conhecido professor de matemática que depois de algumas fugas, fixa residência na Inglaterra após a queda da República Soviética da Hungria. Sua mãe, Valeria Dienes, foi uma filósofa, coreógrafa, professora de dança e criadora da teoria da dança *orkesztika* (orquestra). Desde pequeno, Dienes se interessava por Matemática. Quando do divórcio de seus pais, foi morar com sua mãe e seu irmão em Nice, na França. Na adolescência volta para Inglaterra. Casa-se com Tessa Cooke, em 1938. Eles tiveram cinco filhos e permaneceram casados por 68 anos, até sua morte em 11 de janeiro de 2014, em Kentville, New Scotia, após sofrer um ataque cardíaco com 97 anos (SRIRAMAN; LESH, 2007).

Formado em matemática na Universidade de Londres, Inglaterra, em 1939, Dienes interessou-se pelo ensino da matemática. Como professor de matemática na Inglaterra, ele notou que muitos de seus alunos não gostavam do assunto. Querendo entender o porquê, ele voltou a estudar psicologia em 1950. Interessado na psicologia da aprendizagem da matemática, atuou como professor nas Universidades de *Southampton, Sheffield, Manchester e Leicester*, na Inglaterra, professor de psicologia em Universidade em Adelaide, de 1961 a 1966. Imigra para o Canadá em 1966. Foi diretor do *Centre de Recherche en Psychomathématiques-Université de Sherbrooke*, em Quebec, até 1975. Ele viajou pela Europa, Austrália, América do Sul e na selva da Papua Nova Guiné, dando palestras, cursos e assessorias para professores e foi o autor de vários artigos, materiais educativos e mais de 30 livros (SRIRAMAN, 2007).

Dienes dedicou-se ao estudo da formação dos conceitos matemáticos e processos de abstração, generalização na aprendizagem em matemática, produzindo inovações e valiosa contribuição para a Educação Matemática. Trabalhando em todo o mundo, sua paixão era espalhar sua visão de aprender matemática através do jogo. Seu livro, **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática** (DIENES, 1975b), contempla o processo: 1-jogo livre (adaptação a um meio artificial), 2-jogos estruturados e as regras do jogo, 3-semelhança nas estruturas dos jogos – estrutura comum, 4-processo de representação, 5-descrição das representações- linguagem, 6-sistema formal: axiomas, demonstrações, teoremas.

Dienes acreditava no uso de jogos, músicas e dança no aprendizado de matemática para torná-lo mais divertido para as crianças. "Dê-me uma estrutura matemática e vou transformá-lo em um jogo", ele gostava de dizer (LAWLOR, 2017, s/p).

Sua teoria defendia que, usando materiais manipulativos, jogos e histórias, nas escolas, as crianças poderiam aprender a matemática mais complicada em uma idade mais jovem do que se pensava anteriormente. Dienes criou uma série de materiais didáticos a exemplo dos blocos lógicos e do material Multibase plana e espacial, que trabalha com bases diferentes da base 10 e possibilita que a criança perceba o conceito de base de um sistema de numeração, compreenda o sistema decimal e o valor relativo de um número. “Como uma criança pode aprender o que é a base 10", dizia Dienes, "se ele não estiver familiarizado com outros sistemas numéricos?” (LAWLOR, 2017, s/p).

Enfatizava Dienes “lembremo-nos sempre de que os conceitos não se ensinam - tudo o que se pode fazer é criar, apresentar as situações e as ocorrências que ajudarão as crianças a formá-los” (DIENES, 1975, p. 1).

Dienes, em entrevista a Sriraman e Lesh (2007), afirma que, sendo a matemática caracterizada por estruturas, é importante expor os alunos a essas estruturas o mais cedo possível. Isso não significa dizer a eles diretamente o que essas estruturas são, mas sim criar situações com jogos matemáticos e outros materiais estruturados de modo a potencializar o aprendizado, descobrir e entender essas estruturas.

O jogo, para Dienes (1967), nunca era competitivo, era sempre realizado em grupos, isto porque o jogo constitui-se na operação que a criança realiza, seguindo regras previamente definidas, que se complexificam ao longo do processo de descoberta, de modo que “joga-se com essas regras; o pensamento torna-se mais consciente, mais dirigido” (DIENES, 1967, p. 11) e assim espera-se chegar “ao momento da descoberta, momento em que o esquema diretivo surge, bruscamente, como um todo organizado" (Dienes, 1967, p. 11).

Ressalta Dienes (1967, p. 13),

> Uma série de experiências bem encadeadas, seguida pela introdução de símbolos, é, indubitavelmente, mais eficaz que uma trama de incessantes tentativas para, e por meio de "explicações", associar símbolos às respectivas "significações". Aprende-se mais com uma sequência de acontecimentos" que com uma série de "explicações".

Os volumes de **A Geometria pelas Transformações,** por meio de suas propostas de atividades, materializam o modo como Dienes teoriza os processos de ensino e aprendizagem da matemática e sugerem 'sequências de acontecimentos' a serem orientadas pelo professor com o intuito de que os alunos experienciem o processo de descoberta.

É bom lembrar que Dienes escreve os referidos livros em coautoria com Edward William Golding. Na Ficha Catalográfica dos livros citados, encontramos que Golding nasceu em 1902 e faleceu em 1965. Com base nesse dado, encontramos seu obituário (GOLDING,1965) e na ***Revista The New Scientist*,** o perfil de Edward William Golding (GOLDING, 1956) sintetizado na sequência.

Edward nasceu em *Northwich, Cheshire*, em 1902. Formou-se em Engenharia Elétrica no *Manchester College of Technology* e logo em seguida fez parte de um grupo de pesquisa do mesmo. Começou a lecionar, em 1926, no *Nottingham University College* até 1945. Foi responsável em pesquisa de energia eólica e Eletrificação Rural na *Eletrical Research Association* (E.R.A.), por mais de 20 anos, mas nos últimos anos exercia a função de Oficial de Ligação no Exterior e Chefe de Departamento de Relações com Membros. Além de seu interesse por fontes alternativas de energia elétrica e eletrificação rural, se preocupou com os benefícios da eletricidade à horticultura e agricultura. Através de missões da UNESCO deu assessoria a países como: Israel, Haiti, Brasil, Somália, entre outros. Afirmava que gostava tanto de seu trabalho que não conseguia distinguir trabalho de *hobby*. Na área de energia elétrica, publicou alguns livros, dos quais destacamos dois: **The Generation of Eletricity by Wind Power**, 1955 e **Electrical Measurements and Measuring Instruments**, 1935. Em Matemática, destacamos: **Elementary Practical Mathematics: A Textbook Covering the Syllabuses of Examinations in Practical**

Mathematics for the National Certificate em 3 volumes, com coautoria de H.G.Green, de 1938. Faleceu em 2 de junho de 1965.

A pesquisa não nos esclareceu sua relação com Dienes, mas nos parece se deu nos anos finais da vida, considerando que os livros franceses, dos quais se deu a tradução brasileira, foram publicados em 1967, após sua morte.

Ao analisarmos as atividades propostas em tais obras nos perguntamos sobre o papel que as fotografias exercem naquele contexto e é neste sentido que direcionamos nosso olhar.

5 AS FOTOGRAFIAS EM "A GEOMETRIA PELAS TRANSFORMAÇÕES"

Primeiramente, a autoria das fotografias presentes nos volumes de **A Geometria pelas Transformações** é atribuída a Jan Dalman. Uma pesquisa em vários sites da Internet nos possibilitou localizar algumas informações sobre Jan Dalman que era holandês, fotógrafo e tem seu nome ligado ao *The Australian Dance Theatre* (ADT)[2]. Dalman trabalhara como fotógrafo em Amsterdã e se sentia atraído pelas possibilidades da fotografia quanto pela ciência. Amigo do famoso artista mímico francês Marcel Marceau, por 40 anos, que conheceu em Amsterdã em 1960 e que, em 1965, se encontraram em Adelaide. Dalman fotografou Marceu de 1965-2003. Um livro foi produzido por Andreas Dalman, filho de Jan e Elizabeth Dalman: ***Out of silence: Marcel Marceau in Australia 1965 – 2003**,* by Jan Dalman. (BREYNARD, 2015).

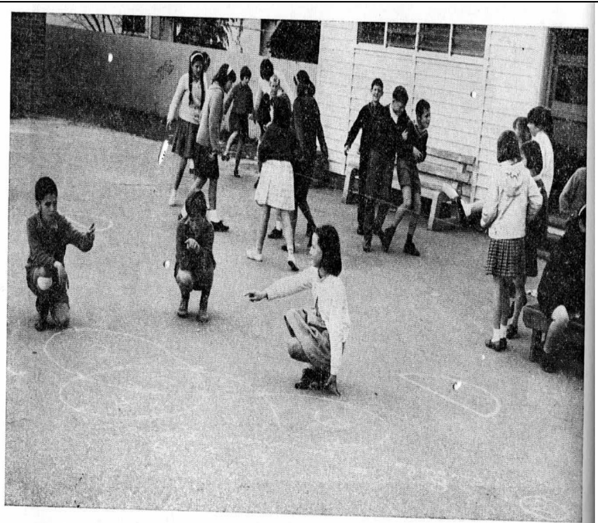
Embora Dienes tenha residido por um tempo em Adelaide, não conseguimos identificar como se deu a conexão com Dalman, mas é uma possibilidade que conviveram durante este período, que o interesse pelas artes e as ciências os aproximou. Jan Dalman assina as fotos e respectivas legendas nos livros.

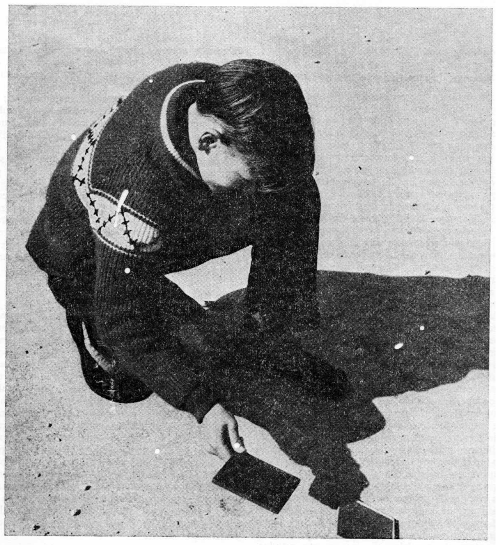
Ao todo são 9 fotografias presentes nos livros em questão. Os quadros 1, 2 e 3 apresentam as fotografias, sendo que GT corresponde a **Geometria pelas Transformações**, o primeiro número ao volume e o segundo à ordem em que a

[2] O ADT foi uma criação de Elizabeth Cameron Dalman que deixou a Austrália, em 1957, para seguir carreira na Europa, e voltou sete anos depois, casada com o fotógrafo holandês Jan Dalman. Cameron Dalman fundou a ADT, em Adelaide, em 10 de junho de 1965 junto com Leslie White, ex-solista da Royal Ballet. Em Adelaide, Jan Dalman fotografou as apresentações do ADT (BREYNARD, 2015).

fotografia aparece no livro, assim GT11 corresponde a primeira fotografia do volume 1 de **A Geometria pelas Transformações: Topologia, Geometria Projetiva e Afim**.

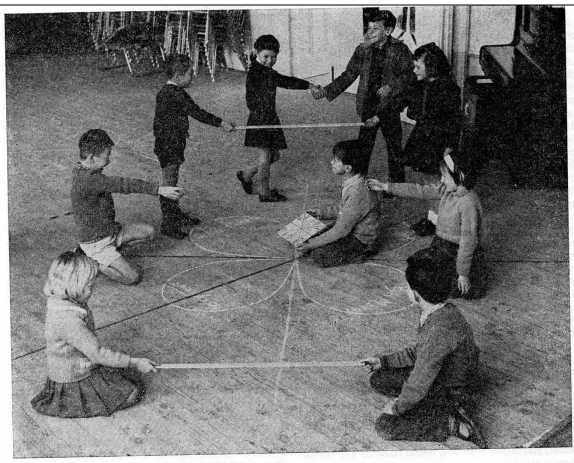
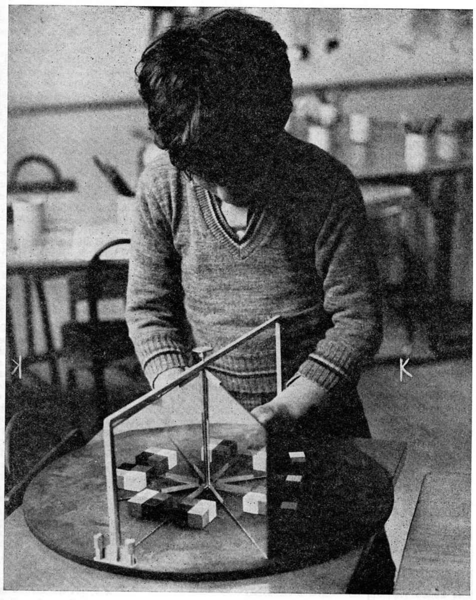
Quadro 1 - Fotografias Volume 1: Topologia, Geometria Projetiva e Afim

GT11	GT12
 Esticar: o ponto interior permanece interior, e o exterior permanece exterior. (Foto Jan Dalman)	 O ângulo considerado como mudança de direção, deslocando-se ao longo dos lados de um polígono. (Foto Jan Dalman)
GT13	GT14
 Descobrir as noções de interior e exterior. (Foto Jan Dalman)	 Aprender as relações existentes entre o número de regiões, intersecções, segmentos. (Foto Jan Dalman)

GT15
 A sombra de um quadrado é projetada sôbre um losango, ilustrando a classe de eqüivalência afim das duas figuras. (Foto Jan Dalman)

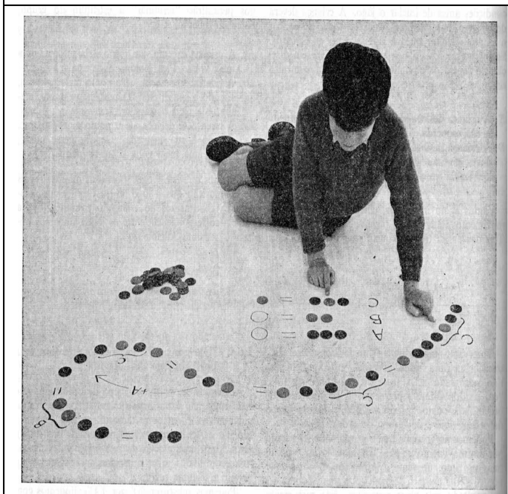
Fonte: Geometria pelas Transformações: Topologia, Geometria Projetiva e Afim, p.5, 15,21,22 e 26 respectivamente, 1971

Quadro 2 - Fotografias Volume 2: Geometria Euclidiana

GT21	GT22
 A simetria do trevo de quatro fôlhas é estudada por mudanças de posição ao longo de uma linha de simetria. (Foto Jan Dalman)	 Quatro simetrias materializadas por dois espelhos dispostos verticalmente a 45°, um em relação ao outro. A criança constrói, "nos" espelhos, figuras simétricas com objetos. (Foto Jan Dalman)

Fonte: Geometria Pelas Transformações: Geometria Euclidiana, p. 8, 18 respectivamente, 1971.

Quadro 3 - Fotografias Volume 3: Grupos e Coordenadas

GT31	GT32
 O grupo de ordem 6 é estudado como um "jôgo de palavras", utilizando fichas pretas e cinzentas como letras, a partir das quais serão contruídas as palavras. (Foto Jan Dalman)	 Uma transformação simétrica "leste por norte, norte por leste", em um jôgo feito pelas crianças sôbre uma grade desenhada no pátio de recreio. (Foto Jan Dalman)

Fonte: Geometria Pelas Transformações: Grupos e Coordenada, p.18 e 39 respectivamente, 1972.

Um primeiro olhar para as fotografias nos possibilita identificar alguns elementos sobre os alunos retratados, que provavelmente cursam o ensino primário, de então. As fotografias retratam turmas de crianças distintas que estudam em escola(s), cuja arquitetura não nos parece ser de escolas brasileiras. Além disso, não usam uniforme escolar, as roupas são na maioria de lã, mesmo quando com calças curtas ou saias até os joelhos, vestem blusões e ou casacos de manga comprida, remetendo ao clima e estilo de roupa talvez de Adelaide – Austrália, onde Dalman residia e Dienes lecionava, no período que antecedeu a publicação dos livros. Usam sapatos e meias soquete. Este primeiro olhar já nos permite inferir que a tradução destes livros se deu somente no campo do texto escrito, não sendo produzidas fotografias específicas para a tradução brasileira, o que nos faz pensar, seria apenas uma opção da editora ou haveria algum outro motivo? Não sabemos!

As crianças praticamente não se repetem, com exceção do volume 2 no qual encontramos um menino que aparece nas duas fotografias, em GT22 como protagonista e, em GT21 sentado no canto direito abaixo. A quantidade de meninos e meninas parece ser proporcional, todas com tom de pele claro, não encontramos crianças negras nas fotografias.

Interessante que os autores não conversam com as fotografias, não as referenciam no texto escrito, então porque estão lá? Qual a função das fotografias nestes livros? Neste sentido é que avançamos no processo de leitura das fotografias considerando que estas constituem-se em testemunhas ocultas de momentos que foram registrados, congelados, e que no tempo presente, no diálogo com outras fontes, nos permitem identificar situações, circunstâncias, modos de pensar e organizar o ensino, o espaço e as práticas escolares de um outro tempo.

As fotografias mostram as crianças em situações de ensino e aprendizado variados, mas atentemos ao fato de que não estão sentadas em mesas individuais com lápis e caderno, como usualmente associamos a uma situação de sala de aula. As crianças estão, na maioria dos casos, em pátios de escolas, em lugares abertos. Mesmo quando em lugares fechados, estes são amplos e o mobiliário (mesas em GT22) possibilita o trabalho em grupos de crianças.

As crianças estão sentadas no chão, em pé, em círculos, em linhas, em diversas posições que denotam atitudes de ação e interação. Ou seja, não são passivas, estão em atividade. No entanto, como colocam os autores com relação as atividades, exercícios, jogos, as crianças "não deverão ser obrigadas a fazê-los" (DIENES; GOLDING, 1971 a, p.8).

Dienes e Golding (1975) enfatizam que as atividades que envolvem as propriedades topológicas sejam executadas no chão de modo a contornar figuras, andar sobre linhas, traçar formas, linhas, fronteiras e regiões pois "não estão ainda mentalmente preparadas aos desenhos geométricos de formato pequeno realizados sôbre uma fôlha de papel, e é preciso não lhos impor demasiadamente cedo" (p. 7).

É pela atividade, pela ação, que as possíveis descobertas vão se revelando, como podemos perceber pela citação a seguir.

> Devemos levar as crianças a considerar diferentes trajetos, retilíneos ou curvos, que elas poderão traçar no assoalho ou no pátio. Descobrirão depressa que, partindo de um ponto qualquer caminhando ao longo das linhas dessa "rêde", elas limitarão uma certa região, se voltarem ao ponto de partida. Poderão assim, considerando diferentes pontos de partida e diferentes trajetos, delimitar muitas regiões. Talvez descubram então a relação entre o numero de pontos de intersecção, o número de regiões e o número de segmentos que ligam os pontos de interseção. (DIENES; GOLDING, 1971a, p. 14-16).

As fotografias orientam o professor, por exemplo, com relação ao tamanho com que as figuras precisam ser desenhadas no chão (GT12, GT13, GT14, GT21 e GT32) de modo que as crianças circulem com facilidade; observamos um rigor nos traçados dos desenhos, curvas, linhas e ângulos, que são feitos com giz, provavelmente, com régua e esquadros, o que denota um cuidado com tais desenhos que não é expresso no texto escrito.

As fotografias parecem dizer aos professores: é preciso que as crianças se movimentem, “experimentem” a atividade, que não é aleatória, tem uma intencionalidade e regras a serem seguidas.

Este processo não é sempre solitário, como nas fotos GT31, GT22, GT15; as crianças trocam ideias, observam o outro, precisam se organizar para desenvolver atividades que são conjuntas, como podemos perceber em GT11, GT12, GT21 e GT32. Neste sentido, o aprendizado, embora seja um processo interno, se dá na relação com o outro, na socialização, de modo que se intensifique a experiência com o espaço, para a construção das estruturas matemáticas.

Dienes e Golding inicialmente priorizam as propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas. Avançam para o estudo das isometrias (rotação e translação) em que transformações são feitas mantendo-se as distâncias e os ângulos. Objetivam chegar à noção de grupo. Para os autores,

> É de fato difícil imaginar que alguém faça matemática moderna sem empregar a estrutura de grupo. Um grupo é essencialmente constituído de um conjunto cujos elementos podem ser de qualquer natureza, desde que exista, definida entre seus elementos, uma operação. Dados dois elementos desse conjunto, essa operação deverá determinar um elemento particular do conjunto. (DIENES; GOLDING, 1972, p.7).

Neste percurso, o conceito de transformação é essencial e vai sendo explorado ao longo das atividades e das fotografias.

Inicialmente, conceitos topológicos como fronteira e região vão sendo apresentados e trabalhados, como podemos observar na fotografia GT11, cuja legenda enuncia “Esticar: o ponto interior, permanece interior, e o exterior permanece exterior” (DIENES; GOLDING, 1971a, p. 5). Para Dienes e Golding (1971a), as crianças deveriam estudar inicialmente transformações mais gerais, que não conservam as distâncias e nem os ângulos.

A fotografia GT11 nos mostra uma atividade de topologia num pátio de escola. Os alunos esticam o material e observam a conservação do ponto interior e do ponto exterior. Depois não o esticam mais, voltando à sua forma anterior. Nessa transformação inversa, pontos vizinhos permanecem pontos vizinhos. Sem atravessar a fronteira não é possível ligar os dois pontos. Conservam-se o mesmo interior e exterior. Atividades semelhantes a essa eram realizadas para que houvesse apropriação da noção de transformações topológicas.

Na fotografia GT13, que traz como legenda "Descobrir as noções de interior e exterior" (DIENES; GOLDING, 1971a, p. 21) a proposta é: Estaria o círculo na mesma região do X? A criança caminha na região determinada pelo círculo e a partir dele para verificar se leva ao X. Essa atividade explora o reconhecimento de dois pontos situados na mesma região ou não. São explorados os conceitos de exterior e interior, pela criança que caminha numa região e das demais que observam, interagem e tiram suas conclusões. Também GT 14, como a legenda "aprender as relações existentes entre o número de regiões, intersecções, segmente." explora os conceitos de região e possíveis intersecções. Atentemos para as crianças que parecem estar dialogando e interagindo, enquanto apontam para as interseções das regiões desenhadas no chão.

A fotografia GT12, com a legenda "O ângulo considerado como mudança de direção, deslocando-se ao longo dos lados de um polígono" contempla a mudança de direção. A imagem mostra crianças percorrendo um polígono côncavo. Atividade necessária para outras atividades, bem como na introdução de vetores, posteriormente.

Na fotografia GT15, toma-se um quadrado (seja de papel cartão, madeira ou outro material). Uma criança segura o quadrado sob o sol, sem mexer, enquanto outra criança desenha a sombra projetada numa cartolina. Desloca-se o quadrado, de todos os modos possíveis e desenha-se as diferentes sombras obtidas. A fotografia remete a Geometria Afim. A legenda "A sombra de um quadrado é projetada sobre um losango, ilustrando a classe de equivalência afim das duas figuras" (DIENES; GOLDING, 1971a, p. 26), referenda a atividade.

Na fotografia GT21, com legenda "A simetria do trevo de quatro folhas é estudada por mudanças de posição ao longo de uma linha de simetria" temos uma atividade em que os alunos precisam identificar o centro da figura, girar a figura de modo a ocupar o mesmo espaço que ocupava antes do movimento, determinando o ângulo que a figura deve girar. A criança poderá verificar o número de rotações possíveis. Uma vez que as crianças estejam familiarizadas com as mudanças de estado (as rotações mudam a posição de um objeto ou de uma figura), poderão determinar a rotação equivalente a duas rotações dadas. Os autores atribuem a dificuldade nessas atividades à falta de compreensão da equivalência e apropriação da independência entre operadores e estados.

Em GT22 temos a legenda "Quatro simetrias materializadas por dois espelhos, dispostos verticalmente a 45º, um em relação ao outro. A criança constrói, 'nos' espelhos, figuras simétricas com objetos." Com essa atividade, os autores, propõem estudar as reflexões nesses espelhos e as reflexões dessas reflexões. Num segundo momento, as figuras serão o estado e as reflexões e rotações serão os operadores em um jogo estado-operador. Posteriormente, uma dada composição de operadores deve ser substituída por um operador único, de mesmo efeito da sucessão. A simetria é apresentada por Dienes e Golding como uma operação ou transformação e não como uma propriedade. Pela fotografia é possível identificar a processo de reflexão e rotação e a legenda enfatiza o ângulo de 45º entre os espelhos, o que é possível pois temos um objeto pedagógico que permite a mobilidade de um dos espelhos.

As fichas enunciam atividades com espelhos, mas não explicitam como seriam estes espelhos. Nesta perspectiva é a fotografia que orienta o professor/leitor pois ela mostra os espelhos dispostos sobre um círculo, sendo que um dos espelhos é fixo e o outro é móvel, com um mecanismo de ajuste, daí a possibilidade de trabalhar com diferentes ângulos. Este objeto pedagógico não é citado nas fichas e nem no corpo do texto, não se sabe seu nome, mas o fato é que sem a fotografia as informações apresentadas nos enunciados das fichas ficam incompletas. Esta fotografia não é mencionada em nenhuma das atividades das fichas de trabalho propostas, mas esclarece o proposto em várias fichas pois auxilia na visualização prévia do que poderá ser visto pelas crianças.

Ressaltamos a fotografia GT31, pois é nela que é possível visualizar como as atividades vão se complexificando e as operações, embora sejam produto de ações sobre os objetos, no caso as fichas pretas e cinzas, exigem cada vez mais abstração por parte da criança. A legenda na fotografia de Jan Dalman diz "O grupo de ordem

6 é estudado como um 'jogo de palavras', utilizando fichas pretas e cinzentas como letras, a partir das quais serão construídas as palavras" (DIENES; GOLDING, 1972, p. 18). Para tanto é preciso seguir as regras previamente apresentadas na página que precede a fotografia.

Para os autores, pode-se inventar uma língua artificial, na qual se emprega um número de letras reduzido. Uma palavra será, então, considerada como uma sucessão das letras escolhidas, escritas em qualquer ordem. As palavras poderão comportar um número qualquer de letras ou nenhuma. Pode-se estabelecer algumas regras, como que AB pode ser substituída por BA. Quantas classes de palavras podemos encontrar nessa nova língua? Dependendo das regras podemos distribuir as palavras em classes e determinar as leis de composição que constituirão a gramática dessa nova língua. Uma das letras pode ser ficha branca e a outra ficha preta ou quaisquer outras cores.

Por fim, a fotografia G32, com a legenda "Uma transformação simétrica 'leste por norte, norte por leste', em um jôgo feito pelas crianças sobre uma grade desenhada no pátio do recreio" introduz o estudo das coordenadas no plano cartesiano, por meio da ideia de deslocamento. Novamente vemos a ideia de que a atividade é feita fora da sala de aula, no pátio do recreio, o nos faz pensar sobre a persistência da proposta de que as crianças se movimentam pelos diferentes espaços da escola e aprendam matemática em ações articuladas e coletivas, regradas pelo jogo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em tempos de Movimento da Matemática Moderna, o estruturalismo matemático de Nicolas Bourbaki provocou paixões e resistências. Bourbaki insiste que os matemáticos não estudam os objetos, mas as relações entre objetos, relações das estruturas e além delas, os morfismos. Deu à axiomática relevância na construção da matemática. Com a expressão "Abaixo Euclides", mostra que com a descoberta das geometrias não euclidianas, há vários constructos geométricos logicamente possíveis (não contraditórios), independentes do espaço físico; o que está contemplado em Hilbert. A Geometria Euclidiana, sacralizada por séculos, só é uma das possíveis, é denominada como geometria sintética.

Dienes e Golding são originais. Aceitam o ideário do estruturalismo bourbakista. Por meio de objetos experimentais num espaço físico, de atividades de deslocamentos do corpo, de jogo de palavras, de sombras, entre outras atividades, possibilitam aos alunos meios para que façam relações, se apropriem das propriedades invariantes, das transformações e morfismos, das estruturas, reconhecendo as estruturas equivalentes no espaço geométrico. Tudo isso está presente nos estudos e propostas de atividades de Dienes, sintetizado nas seis etapas da aprendizagem por ele definidas na época, que contemplam as representações, a linguagem e o sistema formal. As atividades propostas podem propiciar a redescoberta dos conhecimentos matemáticos, sob o ponto de vista estruturalista dos Bourbaki.

Ainda restam alguns questionamentos sem respostas. Dienes, Golding e Dalman juntos em uma obra de natureza didática densa e original. Mas como ligá-los? Não o sabemos. São frágeis os indícios que os aproximam. Dienes e Dalman, talvez se encontraram em Adelaide em 1965, ano em que faleceu Golding. Como pode um psicólogo matemático, um engenheiro elétrico e um fotógrafo, com perspectivas de atuação totalmente distintas estarem numa mesma obra? Repetimos: não o sabemos. O fato é que a aproximação se deu e nos deixou uma obra de referência, testemunho de um período importante da História da Educação Matemática.

O propósito deste texto foi trazer uma reflexão sobre o potencial, como documento histórico e elemento de análise, das fotografias impressas nos três volumes da obra **A Geometria pelas Transformações** de Dienes e Golding. Neste sentido, as fotografias têm a dizer sobre a obra e seus autores, sobre o modo como o conteúdo deveria ser abordado e as intenções pedagógicas direta ou indiretamente explicitadas no contexto da moderna matemática que se legitimava.

Um primeiro olhar sobre as fotografias parece nos dizer que estão lá sem um propósito específico, apenas ilustram o texto, que, por sua vez não interage diretamente com as cenas, nem mesmo as referenciam. No entanto, uma leitura mais atenta, no diálogo com o escrito e com outras obras dos autores, nos permite fazer algumas conjecturas e constatações interessantes.

As fotografias mais do que ilustrar, mostram momentos congelados de atividades propostas. Podem apontar aos professores, caminhos metodológicos e reforçar pressupostos sobre os processos de ensinar e aprender. Na perspectiva dos autores, o aprendizado se dá por meio da descoberta das estruturas matemáticas ao longo do processo de desenvolvimento das atividades propostas pelo professor e que envolvem em sua grande maioria o manuseio de materiais manipuláveis, fichas, deslocamentos, desenhos, entre outros. Ainda, é muito presente a ideia de jogo, entendido como a ação do aluno, que precisa ser estruturada e dirigida pelo professor.

Embora as atividades, jogos, sejam descritas nas fichas de trabalho, em alguns momentos, são as fotografias que mostram como fazer, e esclarecem o leitor/professor.

É bom lembrar que o aqui apresentado é fruto de uma leitura de duas pesquisadoras que vem estudando há algum tempo o Movimento da Matemática Moderna, logo são estabelecidos alguns diálogos produtos destas vivências. O que vemos é uma leitura nos termos de nossa própria experiência, isso porque, "só podemos ver as coisas com a quais já possuímos imagens identificáveis, assim como só podemos ler em uma língua cuja sintaxe, gramática e vocabulário já conhecemos" (MENGEL, 2001, p.27).

Outras leituras poderão ser feitas, e esperamos que sejam feitas, considerando-se outros referenciais. A natureza polissêmica, provocativa e subjetiva da fotografia possibilita diversas interpretações, considerando os diversos percursos metodológicos possíveis. O aqui apresentado é um dentre tantos diálogos possíveis entre leitor e obra, entre fotografia e texto escrito, entre o passado e o presente.

REFERÊNCIAS

BREYNARD, Shane. **Jan Dalman's photographs of mime Marcel Marceau on show at Alliance Francaise Canberra**. Austrália: The Canberra Times, 24 de fevereiro de 2015. Disponível em: <https://www.canberratimes.com.au/national/act/jan-dalmans-photographs-of-mime-marcel-marceau-on-show-at-alliance-francaise-canberra-20150224-13n7j5.html>. Acesso em: 15 abr. 2018.

BKOUCHE, Rudolph. Prefácio: A noção de espaço. In: SÉNÉCHAL, Brigitte. **Grupo de Geometria**. Trad. Anna Franchi. Paris: Hermann, 1980. p. 1-9. (xérox).

BURKE, Peter. **Testemunha Ocular**: história e imagem. Bauru: Educs, 2004.

CHARTIER, Roger. **As utilizações do objecto impresso**. Portugal: DIFEL, 1998.

DALCIN, Andréia. Fotografia, História e Educação Matemática: Apontamentos para pesquisas sobre a cultura escolar. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 1, p. 20- 38, jan. 2018. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/195>. Acesso em: 29 maio 2018.

DIENEZ, Zoltan Paul. **A Matemática Moderna no Ensino Primário**. Lisboa: Livros horizontes, 1967.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edward William. **Exploração do Espaço e Prática de Medição**. São Paulo: E. P.U.,1975.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edward William. **A Geometria pelas Transformações**: I. Topologia, Geometria Projetiva e Afim. São Paulo: Herder, 1971a.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edward William. **A Geometria pelas Transformações**: II. Geometria Euclidiana. São Paulo: Herder,1971b.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edward William. **A Geometria pelas Transformações**: III. Grupos e Coordenadas. São Paulo: Herder,1972.

DIENES, Zoltan Paul. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática**. São Paulo: E.P.U., Brasília: I.N.I.,1975.

FERRAZ, Luiz Henrique Pereira; VASCONCELOS, Maria Helena Câmara. O ensino da matemática em imagens: os suplementos didáticos encartados na Revista do Ensino/RS (1951-1978). **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 3, p. 226-260, set. 2017. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/182>. Acesso em: 29 maio 2018.

GOLDING, Edward William. Profile: He wants us to harness the winds. **The New Scientist**, v. 2, n. 35, 18 jul. p. 21-22, 1956. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=R0Yy19eXEWAC>. Acesso em: 05 maio 2018.

GOLDING, Edward William. **Obituary**. 1965. Disponível em: <https://www.gracesguide.co.uk/E._W._Golding>. Acesso em: 05 maio 2018.

LAWLOR, Allison. Obituary Zoltan Paul Dienes. **O Globe and Mail**, 4 fev. 2014. Disponível em: <http://www.zoltandienes.com/obituary/>. Acesso em: 15 abr. 2018.

MANGUEL, Alberto. **Lendo imagens**: uma história de amor e ódio. São Paulo: Companhia das letras, 2001.

MAUAD, Ana Maria. Através da Imagem: Fotografia e história – Interfaces. **Revista Tempo**, Rio de Janeiro, Universidade Federal Fluminense, v. 1, n. 2, p. 73-98, 1996.

PIRES, Rute. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SRIRAMAN, Bharath. Editorial: The legacy of Zoltan Paul Dienes, In: ______ (Org.). **Zoltan Paul Dienes and the dynamics of mathematical learning**. EUA: The University of Montana Press, 2007. p. i-ii.

______; LESH, Richard. A conversation with Zoltan P. Dienes. In: SRIRAMAN, Bharath (Org.). **Zoltan Paul Dienes and the dynamics of mathematical learning.** EUA: The University of Montana Press, 2007. p. 151-167.