

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Bruno Valadão Cunha

**FERRAMENTA GRÁFICO-INTERATIVO-DIDÁTICA PARA
O ENSINO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM
ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS**

Porto Alegre

julho 2018

BRUNO VALADÃO CUNHA

**FERRAMENTA GRÁFICO-INTERATIVO-DIDÁTICA PARA
O ENSINO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM
ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientador: João Ricardo Masuero

Porto Alegre

julho 2018

BRUNO VALADÃO CUNHA

**FERRAMENTA GRÁFICO-INTERATIVO-DIDÁTICA PARA
O ENSINO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM
ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado pela banca examinadora e, em sua forma final, pelo Professor Orientador.

Porto Alegre, 11 de julho de 2018

Prof. João Ricardo Masuero
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. Ronald José Ellwanger
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro
Relator

BANCA EXAMINADORA

Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Ronald José Ellwanger (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)
PhD pela North Carolina State University, EUA

Dedico este trabalho aos meus pais, Darci e Elizabete, e aos meus irmãos, Betina e Endrigo, que construíram o meu ser e sempre me apoiaram nesta caminhada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. João Ricardo Masuero, pela empolgação com este trabalho, pelas valiosas contribuições para o desenvolvimento do programa, pela paciência comigo nesta trajetória, e por ser um exemplo de professor e amigo para mim e todos os alunos da Engenharia Civil.

Agradeço à minha família, pelo incentivo, desde cedo, ao meu gosto pelas Engenharias, pelos exemplos de bondade, respeito, paciência e união, e pelo apoio durante os anos escolares e estes de Graduação.

Agradeço aos meus colegas da Engenharia Civil, em especial Estéfano, Germano e Juliana, por permitirem que eu dividisse minha luta com eles, e por permitirem igualmente que eu os ajudasse nesta caminhada.

Agradeço à minha namorada, Nicole, pelo amor, pelo carinho, por me apoiar nas minhas ideias e projetos de vida e permitir que eu faça o mesmo, e pela imensurável paciência nesta fase final da Graduação.

Agradeço aos demais amigos, por, durante toda minha vida, temperarem meus gostos, meus desejos e minhas conquistas, por garantirem o riso, o choro, o abraço e o brinde, e por me incentivarem nesta etapa definitiva.

Agradeço, finalmente, ao amigo Rodrigo, pelo constante apoio no meu aprendizado da linguagem de programação Lua, imprescindível para a realização deste trabalho.

Quando dizemos que algo é impossível, estamos apenas afirmando que nossa imaginação ainda não chegou lá.

Darci Cunha

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta didática para a aplicação e o ensino do Método dos Deslocamentos em estruturas bidimensionais simples. O Método dos Deslocamentos, também chamado de Método da Rigidez Direta, é um dos métodos mais utilizados na Análise Estrutural em estruturas hiperestáticas, ou seja, quando as condições de equilíbrio não são suficientes para solucionar as mesmas, sendo necessário fazer uma superposição de configurações deformadas. O Método consiste na construção das matrizes de rigidez das barras, cujos elementos são os coeficientes de rigidez, e dos vetores de cargas nodais equivalentes, tanto em coordenadas locais quanto em globais. Com as matrizes e vetores das barras, é possível montar a matriz de rigidez da estrutura, assim como seu vetor de cargas nodais equivalentes. Com a aplicação das condições de contorno impostas pelos vínculos, se obtém um sistema de equações cujas incógnitas são os deslocamentos nodais da estrutura. Por ter um roteiro de metodologia bem definido e fórmulas tabeladas para os coeficientes de rigidez, o Método dos Deslocamentos pode ser facilmente implementado num programa de computador. Para isto, foi utilizada a linguagem de programação Lua, que, em conjunto com bibliotecas externas, propicia o desenvolvimento de programas com grande simplicidade e leveza. O programa, batizado de DESLOCA, foi desenvolvido priorizando o ensino do Método sob uma ótica computacional, se utilizando de uma interface gráfica interativa que apresenta não somente resultados numéricos como também os diversos elementos que compõem o sistema de equações do Método.

Palavras-chave: Análise Estrutural. Deslocamentos. Rigidez. Programação. *Software*. Lua.

ABSTRACT

This paper presents the development of a didactic tool for the application and teaching of the Displacement Method in simple two-dimensional structures. The Displacement Method, also called Direct Stiffness Method, is one of the most used in Structural Analysis for hyperstatic structures, i.e., when the equilibrium conditions are not enough to solve them, and it's necessary to overlap deformed configurations. The Method consists in the construction of the stiffness matrices of the bars, whose elements are the stiffness coefficients, and the vectors of equivalent nodal loads, both in local and global coordinates. With the matrices and vector of the bars, it's possible to assemble the stiffness matrix of the structure and its vector of equivalent nodal loads as well. With the application of the boundary conditions imposed by the supports, a system of equations is obtained, whose variables are the nodal displacements of the structure. By having a well-defined and well-ordered methodology and tabulated formulas for stiffness coefficients, the Displacement Method can be easily implemented in a computer program. For this, the Lua programming language was used, which, together with external libraries, allows the development of programs with great simplicity and lightness. The program, called DESLOCA, was developed prioritizing the teaching of the Method from a computational approach, using an interactive graphical interface that presents not only numerical results but also the various elements that make up the system of equations of the Method.

Key-words: Structural Analysis. Displacements. Stiffness. Programming. Software. Lua.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de configuração deformada de um pórtico plano formado pela superposição de casos básicos.....	4
Figura 2 – Sistema Hipergeométrico da estrutura exemplo da Figura 1.	5
Figura 3 – Estrutura exemplo para a explicação da metodologia de análise e cálculo.....	6
Figura 4 – Deslocabilidades da estrutura exemplo.....	7
Figura 5 – Matriz de rigidez em coordenadas globais dividida em “supercélulas” de uma barra.	11
Figura 6 – Caso 0 para o Sistema Hipergeométrico da estrutura exemplo.....	13
Figura 7 – Forças de engastamento perfeito para a estrutura exemplo.	13
Figura 8 – Forças nodais equivalentes para a estrutura exemplo.	14
Figura 9 – Forças resultantes nas extremidades em coordenadas globais das barras da estrutura exemplo.	18
Figura 10 – Forças resultantes nas extremidades em coordenadas locais das barras da estrutura exemplo.	19
Figura 11 – Resultado do STRIAN para a estrutura exemplo.....	20
Figura 12 – Interface do programa Ftool.....	24
Figura 13 – Interface do programa <i>online</i> STRIAN.....	25
Figura 14 – Interface da ferramenta eMetDes.....	26
Figura 15 – 1º protótipo de interface da ferramenta DESLOCA.....	28
Figura 16 – 2º protótipo de interface da ferramenta DESLOCA.....	29
Figura 17 – Interface final do DESLOCA.....	31
Figura 18 – Painel de visualização e edição de barra do DESLOCA.....	32
Figura 19 – Painel de matrizes e vetores da barra no DESLOCA.....	33
Figura 20 – Painel de forças nas extremidades da barra no DESLOCA.	34
Figura 21 – Janela de visualização da estrutura para cada opção de visualização no DESLOCA.	35
Figura 22 – Painel da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura no DESLOCA.....	36
Figura 23 – Matriz de rigidez da estrutura e vetor de cargas nodais equivalentes sob condições de contorno no DESLOCA.....	37

Figura 24 – Painel de resultados dos DESLOCA.....	38
Figura 25 – Painel de visualização e edição de barra em um novo projeto.....	40
Figura 26 – Visualização da barra 1 na vertical.	41
Figura 27 – Painel de cargas da barra 1.....	42
Figura 28 – Diferentes opções de carga distribuída para uma barra genérica.	43
Figura 29 – Diferentes opções de carregamento nodal para uma barra genérica.	44
Figura 30 – Barra 1 com cargas inseridas e vinculações aplicadas.	45
Figura 31 – Painel de informações calculadas da barra 1, mostrando matrizes e vetores.....	46
Figura 32 – Painel de informações calculadas da barra 1, mostrando forças nas extremidades.	48
Figura 33 – Nova barra criada.	49
Figura 34 – Janela de aviso de limite de barras.....	50
Figura 35 – Janela de aviso de proibição de exclusão da última barra.....	50
Figura 36 – Barra 2 com suas características.	51
Figura 37 – Janela de visualização da estrutura, com cargas e vinculações.....	52
Figura 38 – Janela de visualização da estrutura, com reações.....	53
Figura 39 – Janela de visualização da estrutura mostrando a configuração deformada, em diferentes escalas.	53
Figura 40 – Janela de visualização da estrutura mostrando os diagramas de esforços internos.	54
Figura 41 - Painel da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura.	55
Figura 42 – Vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, com as diferentes opções selecionadas.	56
Figura 43 – Matriz de rigidez da estrutura e vetor de cargas nodais equivalentes sob restrições vinculares.....	57
Figura 44 – Painel de resultados dos DESLOCA.....	58
Figura 45 – Aviso de estrutura estaticamente indeterminada.....	59
Figura 46 – Configurações das três barras do pórtico proposto.	60
Figura 47 – Visualização do pórtico proposto com cargas e sua configuração deformada.....	61
Figura 48 – Matriz de rigidez da estrutura para o pórtico proposto, com a barra 2 selecionada.	61
Figura 49 – Deslocamentos calculados para o pórtico proposto.	62

Figura 50 – Deslocamentos calculados para o pórtico proposto simulando abordagem manual.	63
Figura 51 – Esquema de simplificações da abordagem manual para o pórtico proposto.....	64
Figura 52 – Visualização da treliça proposta com cargas e dimensões.....	65
Figura 53 – Visualização da treliça proposta com reações.....	67
Figura 54 – Esforços axiais calculados para a treliça proposta.	67
Figura 55 – Forças nas extremidades de todas as barras da treliça proposta.....	68
Figura 56 – Diagramas de momento fletor da treliça proposta.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades geométricas e coeficientes de rigidez da estrutura exemplo.....	6
Tabela 2 – Resultado das deslocabilidades da estrutura exemplo.	17
Tabela 3 – Resultado das deslocabilidades para o pórtico proposto.	65
Tabela 4 – Resultado das reações para a treliça proposta.....	66
Tabela 5 – Resultado dos esforços axiais para a treliça proposta.....	69

LISTA DE SIGLAS

SH – Sistema Hipergeométrico

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

A – Área da seção transversal

D – Deslocabilidade

$\{D\}$ – Vetor das deslocabilidades

E – Módulo de elasticidade

EA – Coeficiente de rigidez axial

EI – Coeficiente de rigidez por flexão

$\{f\}^L$ – Vetor de forças nas extremidades de uma barra em coordenadas locais;

$\{f_{ep}\}^L$ – Vetor de forças de engastamento perfeito de uma barra em coordenadas locais

$\{f_{ne}\}$ – Vetor de forças nodais equivalentes

I – Momento de inércia

K_{if}^k – Supercélula da matriz de rigidez de uma barra k em coordenadas globais que relaciona as forças do nó i inicial com as deslocabilidades do nó f final

$[K]$ – Matriz de rigidez de uma barra em coordenadas globais

$[K]^L$ – Matriz de rigidez de uma barra em coordenadas locais

P – Carga pontual

q – Carga distribuída

$[R]$ – Matriz de rotação de uma barra

$\{u\}$ – Vetor de deslocamentos nodais da barra em coordenadas globais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	DIRETRIZES E DELIMITAÇÕES	2
3	O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS	3
3.1	DESLOCABILIDADES DA ESTRUTURA	3
3.2	METODOLOGIA DE ANÁLISE E CÁLCULO	5
3.2.1	Matrizes de Rigidez	8
3.2.2	Forças Nodais Equivalentes	12
3.2.3	Sistema de Equações de Equilíbrio	15
3.2.4	Forças nas extremidades das barras e reações nos vínculos	17
3.3	COMPARATIVO ENTRE ABORDAGEM MANUAL E COMPUTACIONAL	21
4	DESENVOLVIMENTO DA FERRAMENTA	23
4.1	FUNCIONALIDADES	23
4.2	LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO	26
4.3	DESENVOLVIMENTO DA INTERFACE	27
4.4	RESULTADO FINAL DA INTERFACE	31
4.4.1	Visualização da barra e suas informações	32
4.4.2	Visualização da estrutura e suas informações	34
4.4.3	Visualização dos resultados calculados	37
5	MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO DESLOCA	39
5.1	INICIALIZAÇÃO	39
5.2	EDIÇÃO DE BARRAS	40
5.2.1	Dimensões e propriedades	40
5.2.2	Cargas	42
5.2.3	Vinculações	44
5.3	INFORMAÇÕES CALCULADAS DA BARRA	45
5.3.1	Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes	46
5.3.2	Forças nas extremidades da barra	47
5.4	CRIAÇÃO E EXCLUSÃO DE NOVAS BARRAS	49
5.5	VISUALIZAÇÃO DA ESTRUTURA	52
5.6	INFORMAÇÕES CALCULADAS DA ESTRUTURA	54

5.6.1 Matriz de rigidez e vetor de cargas nodais equivalentes	55
5.6.2 Deslocamentos e Reações	57
5.6.3 Indeterminação estática.....	58
6 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	60
6.1 PÓRTICO PLANO.....	60
6.2 TRELIÇA PLANA.....	65
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
8 REFERÊNCIAS.....	72
APÊNDICE A – Interface final do DESLOCA.....	73
ANEXO A – Reações de Engastamento Perfeito	75
ANEXO B – Coeficientes de Rigidez	77
ANEXO C – Casos Básicos da Estrutura Exemplo.....	79

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como meta o desenvolvimento de uma ferramenta digital para o ensino do Método dos Deslocamentos, que é um dos métodos mais utilizados na Análise Estrutural para equacionar e solucionar computacionalmente estruturas hiperestáticas. Atualmente o Método é abordado no curso de Engenharia Civil da UFRGS nas aulas das disciplinas de Mecânica Estrutural II e Análise Estrutural por Computador, e seus respectivos alunos e professores serão os principais usuários da nova ferramenta.

O Método dos Deslocamentos é versátil por permitir tanto uma resolução manual, baseada em simplificações, quanto uma computacional, exposta neste trabalho e aplicada no desenvolvimento da ferramenta. As diferenças entre as duas abordagens serão igualmente abordadas neste trabalho.

Após a apropriação da teoria do Método dos Deslocamentos, é feito o desenvolvimento da ferramenta. Este processo, que ocorreu na segunda etapa do Trabalho de Conclusão de Curso, tem fases distintas. Primeiramente, ambientar-se com as ferramentas utilizadas para desenvolver o programa, depois explorar ao máximo estes recursos para construir os elementos interessantes ao Método, e, finalmente, consolidar o propósito didático do resultado.

A motivação para propor este trabalho começou ainda durante as aulas de Mecânica Estrutural II, onde se ressaltou a viabilidade de aplicação de Método utilizando algoritmos de programação. Depois, a crescente familiarização com a linguagem de programação Lua¹ fez com que o conceito “aplicação computacional” sempre estivesse presente. Finalmente, os relatos de colegas sobre as dificuldades na disciplina fizeram com que estas motivações fossem usadas para desenvolver uma ferramenta voltada para a comunidade acadêmica.

¹ Disponível em: <<https://www.lua.org>>. Acesso em: 10 out. 2017.

2 DIRETRIZES E DELIMITAÇÕES

O programa desenvolvido visa fazer a conexão entre a teoria, exposta em livros e aulas, e a aplicação numérica, presente em programas de análise estrutural. Esta conexão é fundamental para o sucesso da ferramenta, já que será utilizada pelos alunos de Engenharia Civil da UFRGS. Ela foi otimizada para uso didático, de modo que a obtenção dos resultados numéricos seja uma funcionalidade secundária, acarretando na limitação no tamanho e complexidade das estruturas.

O Método dos Deslocamentos pode ser aplicado em estruturas tridimensionais, como pórticos espaciais e grelhas. No entanto, este trabalho focará apenas na metodologia voltada para estruturas bidimensionais, como vigas, pórticos planos e treliças planas. Também, não serão abordados os conceitos e detalhes de outros métodos de análise estrutural, como o Método das Forças, e não serão consideradas as deformações de corte na formulação.

O desenvolvimento do programa se deu num ambiente de computador pessoal, pensado para abranger a maior quantidade de usuários, mas sem propósito de garantir seu funcionamento em todas as plataformas usuais.

Ainda, não serão abordadas as características e convenções da linguagem de programação adotada, visto que é um Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Civil. Trechos do código feito serão mostrados, mas não serão discutidas otimizações (ou a falta delas), tampouco particularidades das demais ferramentas utilizadas.

3 O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

O Método dos Deslocamentos consiste em solucionar estruturas bidimensionais ou tridimensionais através da análise dos deslocamentos em cada elemento utilizando uma superposição de configurações deformadas mais simples (MASUERO, 2015). Estas configurações, também chamadas de casos básicos, satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura, mas não as condições de equilíbrio da mesma. Neste método, também chamado de Método da Rigidez Direta, o equilíbrio é então atingido quando é feita a superposição destes casos (MARTHA, 2004).

Este capítulo demonstra o roteiro de solução computacional de estruturas bidimensionais pelo Método dos Deslocamentos:

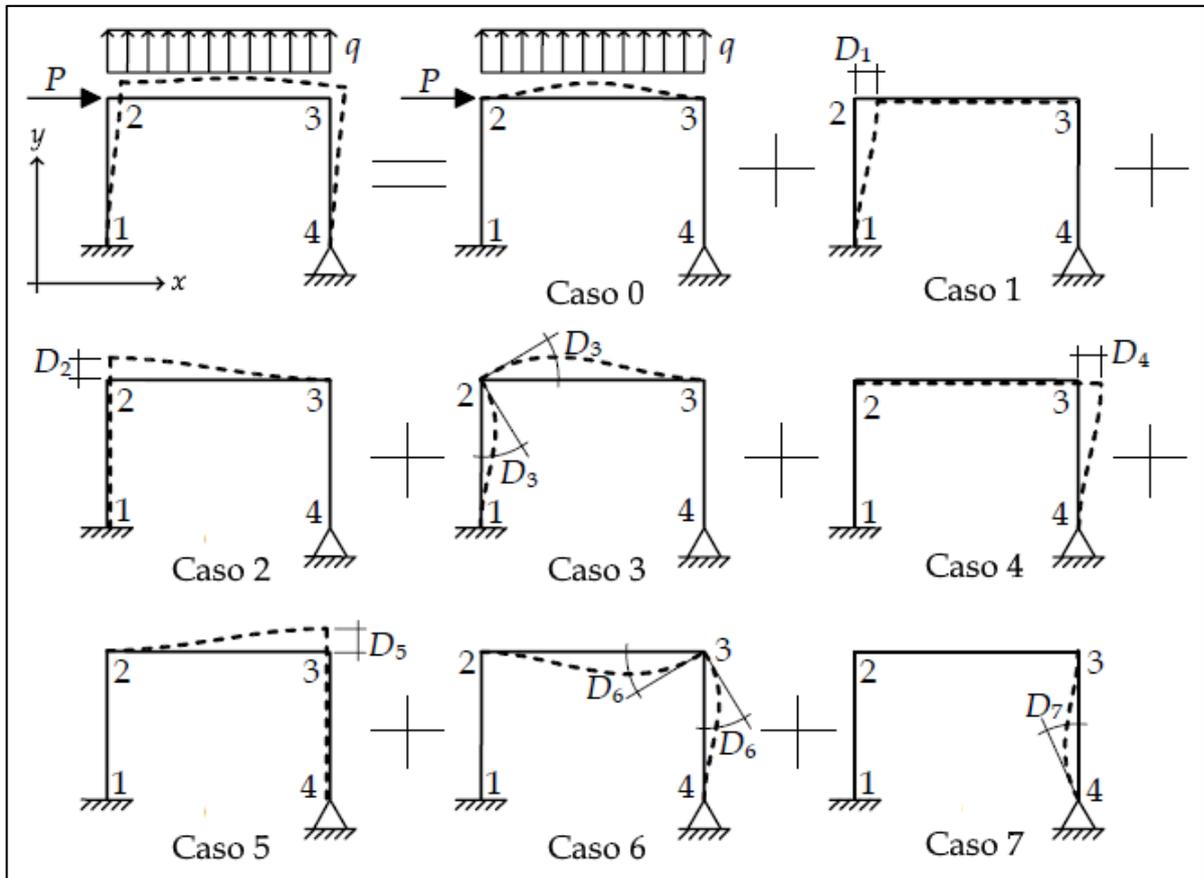
- a) Identificação das deslocabilidades da estrutura, detalhado na seção 3.1;
- b) Montagem das matrizes de rigidez em coordenadas locais e globais de cada barra da estrutura para então montar a matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais, disponível na seção 3.2.1;
- c) Cálculo das forças nodais equivalentes de cada nó da estrutura, descrito na seção 3.2.2;
- d) Montagem e resolução do sistema de equações de equilíbrio, visto na seção 3.2.3; e
- e) Cálculo das reações nos vínculos após obtidas as deslocabilidades da estrutura, presente na seção 3.2.4.

3.1 DESLOCABILIDADES DA ESTRUTURA

As deslocabilidades são deslocamentos ou rotações nodais livres que definem a configuração deformada da estrutura. Representadas pela notação D_i , as deslocabilidades são as incógnitas do sistema de equações gerado pelo Método dos Deslocamentos. Os valores das deslocabilidades são usados para obter a configuração deformada da estrutura, além de possibilitarem o cálculo dos esforços internos e das reações dos vínculos da mesma.

Utilizando uma estrutura de pórtico como exemplo, podemos analisar como são identificadas as deslocabilidades em cada nó da estrutura, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de configuração deformada de um pórtico plano formado pela superposição de casos básicos.



(fonte: adaptado de MARTHA, 2004, p. 194)

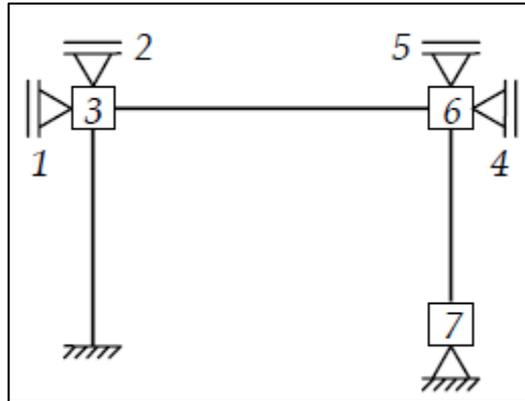
Na Figura 1, é possível perceber as diferentes deslocabilidades de cada nó (numerados de 1 a 4) do pórtico. Para o nó 2, por exemplo, nota-se que é possível deslocá-lo tanto na direção “x” (Caso 1) quanto na direção “y” (Caso 2), e também rotacioná-lo (Caso 3). Cada deslocabilidade define um caso elementar cinematicamente determinado, ou seja, um modelo onde a configuração deformada é conhecida. Ainda, nota-se a configuração deformada da estrutura, sempre representada pelas linhas tracejadas.

Na definição das deslocabilidades, considera-se a hipótese de nós rígidos, ou seja, a rotação das extremidades coincidentes com o nó de todas as barras conectadas a esse nó é única. Isto é equivalente a dizer que os ângulos relativos das barras concorrentes a um dado nó não se alteram com a deformação da estrutura.

O modelo onde todas as deslocabilidades são restringidas é chamado de Sistema Hipergeométrico (SH) (MARTHA, 2004) ou Sistema Principal (SÜSSEKIND, 1987), que

serve de base para analisar o efeito isolado dos carregamentos externos no Caso 0 e o efeito isolado de cada deslocabilidade nos demais casos (neste exemplo, do 1 ao 7), expostos na seção 3.2.1.1. Na Figura 2 é possível observar o SH referente à estrutura exemplo da Figura 1.

Figura 2 – Sistema Hipergeométrico da estrutura exemplo da Figura 1.



(fonte: MARTHA, 2004, p. 195)

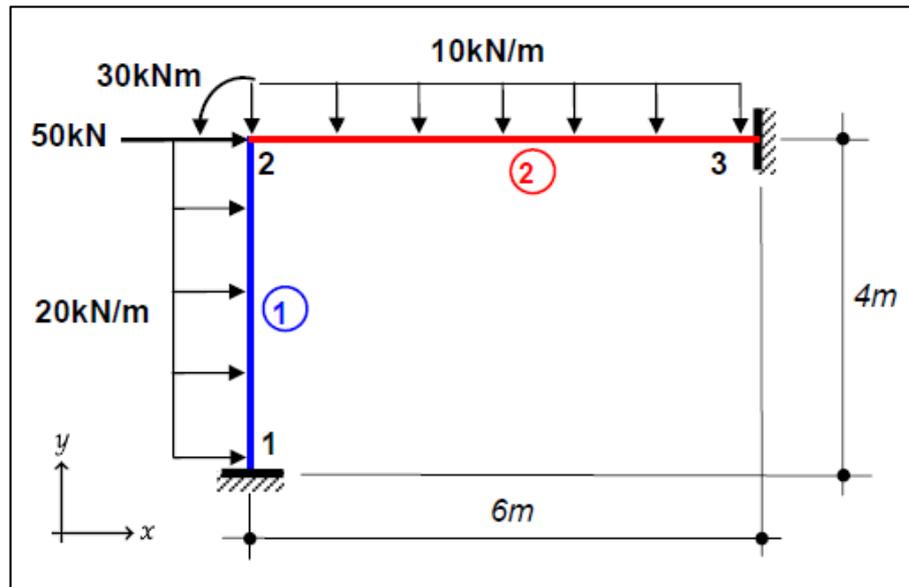
Na Figura 2, cada vínculo fictício imposto na estrutura foi numerado, de modo a identificar qual vínculo fictício está relacionado com qual deslocabilidade e seu respectivo caso. Os vínculos de 1ª ordem fictícios representam impedimentos aos deslocamentos lineares, enquanto que os quadrados nos nós representam os impedimentos aos deslocamentos angulares (rotações).

Importante ressaltar que a abordagem apresentada nesta seção foi a manual, onde se assume que não há deslocabilidades nos vínculos nas direções em que eles atuam, ou seja, num engaste, não há deslocamentos nas direções “x” e “y” e não há rotações. Em uma abordagem computacional, considera-se que todos os nós são deslocáveis nas três direções possíveis, ou seja, possuem três graus de liberdade (MARTHA, 2016; MASUERO, 2015), conforme abordado na seção 3.2 e aplicado na ferramenta de desenvolvida.

3.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE E CÁLCULO

Nesta seção é exposta a metodologia computacional do Método dos Deslocamentos, usando como exemplo uma estrutura em pórtico simples utilizada por Masuero (2015) no ensino da metodologia, como consta na Figura 3.

Figura 3 – Estrutura exemplo para a explicação da metodologia de análise e cálculo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 14)

As duas barras desta estrutura possuem o mesmo módulo de elasticidade $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$, mas cada uma possui diferentes áreas de seção transversal A , momentos de inércia I , coeficientes de rigidez axial EA e coeficientes de rigidez por flexão EI , presentes na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades geométricas e coeficientes de rigidez da estrutura exemplo.

Barra	$A \text{ (cm}^2\text{)}$	$I \text{ (cm}^4\text{)}$	$EA \text{ (kN)}$	$EI \text{ (kNcm}^2\text{)}$
1	60	8.000	1.200.000	160.000.000
2	80	16.000	1.600.000	320.000.000

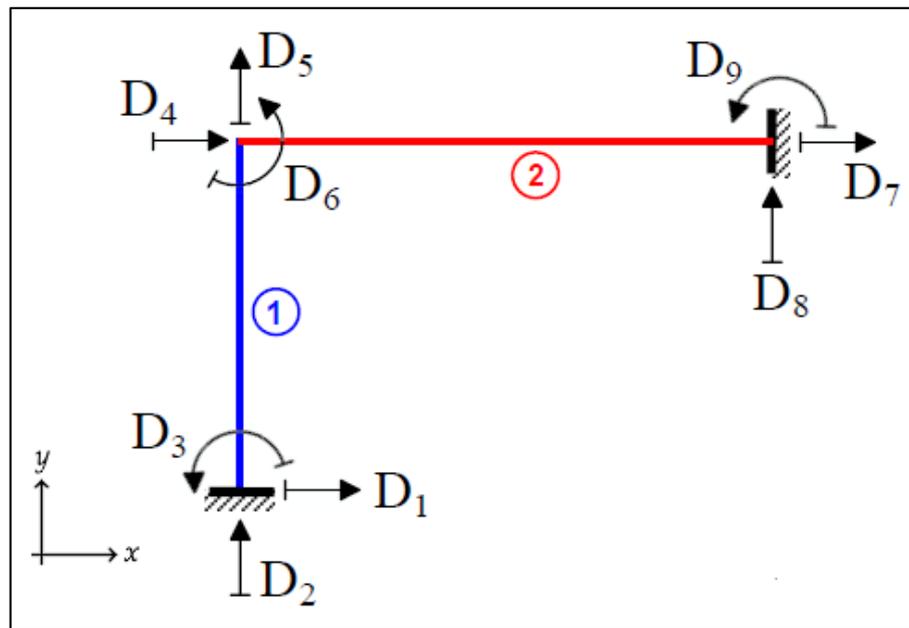
(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 14)

Para a correta aplicação do Método, é preciso utilizar um sistema coerente de unidades, com uma única unidade de comprimento e uma única unidade de força. Para o exemplo, foram escolhidas o cm e o kN.

Assumindo que o nó 1 da estrutura está na origem do plano de cartesiano (x, y) , suas coordenadas são $(0, 0)$. Com isso, é possível calcular as coordenadas para o nó 2, $(0, 400)$, e as para o nó 3 $(600, 400)$. Com estas coordenadas, é possível obter a inclinação das barras, que neste exemplo é trivial: a barra 1 está a 90° , e a barra 2 está a 0° . Esta inclinação será utilizada na matriz de rotação ao transformar as matrizes de rigidez locais em globais.

De início, é possível identificar as deslocabilidades da estrutura exemplo, presentes na Figura 4. Aqui, deslocamentos e rotações são representados com setas retas e curvas, respectivamente, com traços perpendiculares na base. Essa notação, utilizada por Martha (2004), é recomendada nos casos em que a estrutura é complexa o suficiente para a configuração deformada ser difícil de prever ou esboçar.

Figura 4 – Deslocabilidades da estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 14)

Computacionalmente, considera-se que todos os nós são deslocáveis em todas as direções, visto que essa consideração é mais fácil de ser aplicada com algoritmos de programação do que identificar quantos deslocamentos efetivamente são possíveis com a vinculação existente. A consideração de que todos os nós têm, independentemente da vinculação, 3 deslocamentos possíveis, elimina a complexidade da identificação dos graus de liberdade associados a cada nó pelo programa.

Dadas as condições de contorno definidas pelos vínculos, algumas deslocabilidades serão anuladas no sistema de equações de equilíbrio. Isto é abordado na seção 3.2.3 na montagem do sistema, assim como na seção 3.3 ao se expor as simplificações na abordagem manual.

3.2.1 Matrizes de Rigidez

Utilizando os coeficientes de rigidez do Anexo B assumindo 3 deslocabilidades possíveis em cada nó de uma barra, é possível montar a matriz de rigidez de uma barra de pórtico plano em coordenadas locais, como visto na equação 1. A matriz de rigidez de uma barra em coordenadas locais representa a rigidez de uma barra no espaço, não importando a posição ou orientação da mesma. Nota-se que esta matriz é simétrica em relação à diagonal principal, ou seja, o elemento a_{ij} é igual ao elemento a_{ji} .

$$[\mathbf{K}]^L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 1})$$

Onde:

$[\mathbf{K}]^L$ = matriz de rigidez de uma barra em coordenadas locais;

EA = coeficiente de rigidez axial da barra;

EI = coeficiente de rigidez por flexão da barra; e

L = comprimento da barra.

Para aplicar o Método dos Deslocamentos, a equação de equilíbrio (seção 3.2.3) deve conter a matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais, que representa a rigidez da mesma frente à interação entre as barras que compõem a estrutura. Ela é composta pelas matrizes de rigidez de cada barra em coordenadas globais (equação 4), que representam a rigidez de cada barra levando em conta sua orientação no eixo de coordenadas global. Estas são obtidas através da multiplicação entre a matriz de rotação transposta (equação 3), a matriz de rigidez da barra em coordenadas locais (equação 1) e a matriz de rotação (equação 2). As matrizes de rigidez em coordenadas globais das barras e da estrutura também são simétricas em relação às suas diagonais principais.

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2})$$

$$[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 3})$$

Onde:

$[\mathbf{R}]$ = matriz de rotação de uma barra;

$[\mathbf{R}]^T$ = matriz de rotação transposta da barra;

c = cosseno do ângulo de inclinação da barra; e

s = seno do ângulo de inclinação da barra.

(equação 4)

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}]^L [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} Bc^2 + Ds^2 & (B-D)cs & -Hs & -Bc^2 - Ds^2 & (D-B)cs & -Hs \\ (B-D)cs & Bs^2 + Dc^2 & Hc & (D-B)cs & -Bs^2 - Dc^2 & Hc \\ -Hs & Hc & J & Hs & -Hc & T \\ -Bc^2 - Ds^2 & (D-B)cs & Hs & Bc^2 + Ds^2 & (B-D)cs & Hs \\ (D-B)cs & -Bs^2 - Dc^2 & -Hc & (B-D)cs & Bs^2 + Dc^2 & -Hc \\ -Hs & Hc & T & Hs & -Hc & J \end{bmatrix}$$

Onde:

$[\mathbf{K}]$ = matriz de rigidez de uma barra em coordenadas globais;

$[\mathbf{K}]^L$ = matriz de rigidez da barra em coordenadas locais;

$[\mathbf{R}]$ = matriz de rotação da barra;

$[\mathbf{R}]^T$ = matriz de rotação transposta da barra;

$B = EA/L$;

$D = 12 EI/L^3$;

$$H = 6 EI/L^3;$$

$$J = 4 EI/L;$$

$$T = 2 EI/L;$$

c = cosseno do ângulo de inclinação da barra; e

s = seno do ângulo de inclinação da barra.

Deste modo, é possível montar a matriz de rigidez em coordenadas locais da barra 1 do exemplo (equação 5), sua respectiva matriz de rigidez em coordenadas globais (equação 6), a matriz de rigidez em coordenadas locais da barra 2 e sua respectiva matriz de rigidez em coordenadas globais (equação 7), que no caso desta barra é idêntica à em coordenadas locais, por ter angulação 0° . Os valores presentes nas equações seguintes podem ser analisados visualmente no Anexo C, onde são expostos os casos elementares para este exemplo.

$$[\mathbf{K}]_1^L = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6000 & 0 & -30 & 6000 \\ 0 & 6000 & 1600000 & 0 & -6000 & 800000 \\ -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -6000 & 0 & 30 & -6000 \\ 0 & 6000 & 800000 & 0 & -6000 & 1600000 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 5})$$

$$[\mathbf{K}]_1 = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -6000 & -30 & 0 & -6000 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 \\ -6000 & 0 & 1600000 & 6000 & 0 & 800000 \\ -30 & 0 & 6000 & 30 & 0 & 6000 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ -6000 & 0 & 800000 & 6000 & 0 & 1600000 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 6})$$

$$[\mathbf{K}]_2 = [\mathbf{K}]_2^L = \begin{bmatrix} 2667 & 0 & 0 & -2667 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 5333 & 0 & -18 & 5333 \\ 0 & 5333 & 2133333 & 0 & -5333 & 1066667 \\ -2667 & 0 & 0 & 2667 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -5333 & 0 & 18 & -5333 \\ 0 & 5333 & 1066667 & 0 & -5333 & 2133333 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 7})$$

Onde:

$[\mathbf{K}]_1^L$ = matriz de rigidez da barra 1 em coordenadas locais;

$[K]_1$ = matriz de rigidez da barra 1 em coordenadas globais;
 $[K]_2^L$ = matriz de rigidez da barra 2 em coordenadas locais; e
 $[K]_2$ = matriz de rigidez da barra 2 em coordenadas globais.

Masuero (2015) sugere que a matriz de rigidez de uma barra em coordenadas globais pode ser entendida como sendo formada por duas “superlinhas” e duas “supercolunas” que compõem quatro “supercélulas”, conforme visto na Figura 5.

Figura 5 – Matriz de rigidez em coordenadas globais dividida em “supercélulas” de uma barra.

$$[K] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} Bc^2 + Ds^2 & (B-D)cs & -Hs \\ (B-D)cs & Bs^2 + Dc^2 & Hc \\ -Hs & Hc & J \end{matrix} & \begin{matrix} -Bc^2 - Ds^2 & (D-B)cs & -Hs \\ (D-B)cs & -Bs^2 - Dc^2 & Hc \\ Hs & -Hc & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} -Bc^2 - Ds^2 & (D-B)cs & Hs \\ (D-B)cs & -Bs^2 - Dc^2 & -Hc \\ -Hs & Hc & T \end{matrix} & \begin{matrix} Bc^2 + Ds^2 & (B-D)cs & Hs \\ (B-D)cs & Bs^2 + Dc^2 & -Hc \\ Hs & -Hc & J \end{matrix} \end{bmatrix}$$

(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 13)

A primeira “supercélula”, K_{ii} , demonstra a relação entre as forças (e momentos) do nó “i” inicial da barra e as deslocabilidades desse mesmo nó. K_{if} relaciona as forças do nó inicial com as deslocabilidades do nó “f” final. K_{fi} demonstra a relação entre as forças do nó final e as deslocabilidades do nó inicial. Por fim, K_{ff} relaciona as forças do nó final com as deslocabilidades do nó final.

Visualizar as matrizes de rigidez de cada barra em coordenadas globais deste modo facilita a superposição das mesmas em uma única configuração: a matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais. Esta superposição evidencia a interação entre as barras, e esta se dá pela soma das “supercélulas” dos nós concorrentes entre as barras, conforme as equações 8 (forma condensada) e 9 (forma estendida).

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 8})$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -6000 & -30 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6000 & 0 & 1600000 & 6000 & 0 & 800000 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 6000 & 2697 & 0 & 6000 & -2667 & 0 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3018 & 5333 & 0 & -18 & 5333 \\ -6000 & 0 & 800000 & 6000 & 5333 & 3733333 & 0 & -5333 & 1066667 \\ 0 & 0 & 0 & -2667 & 0 & 0 & 2667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & -5333 & 0 & 18 & -5333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5333 & 1066667 & 0 & -5333 & 2133333 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 9})$$

Onde:

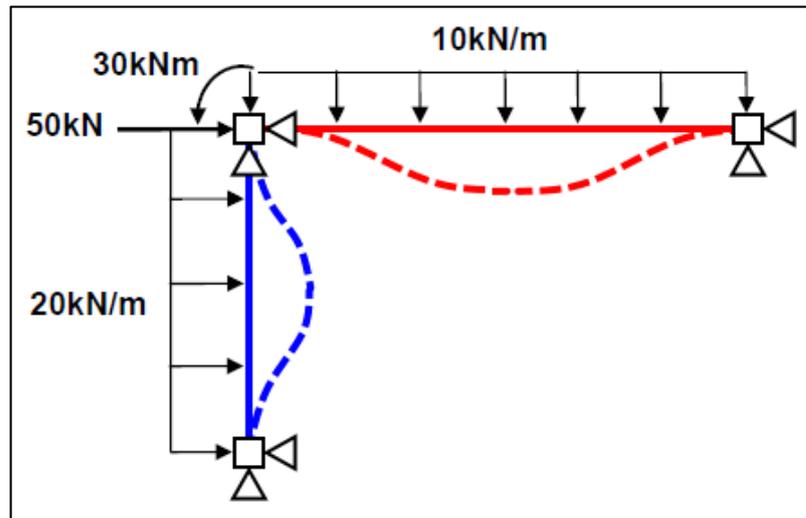
$[\mathbf{K}]$ = matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais; e

\mathbf{K}_{if}^k = supercélula da matriz de rigidez da barra k em coordenadas globais que relaciona as forças do nó i inicial com as deslocabilidades do nó f final.

3.2.2 Forças Nodais Equivalentes

A etapa seguinte do Método dos Deslocamentos é calcular as forças nodais equivalentes, através da análise do Caso 0. Este caso consiste no cálculo do efeito do carregamento externo no Sistema Hipergeométrico da estrutura, impondo restrições em cada nó nas direções atuantes de cada deslocabilidade. O SH da estrutura estudada dentro do Caso 0 é mostrado na Figura 6.

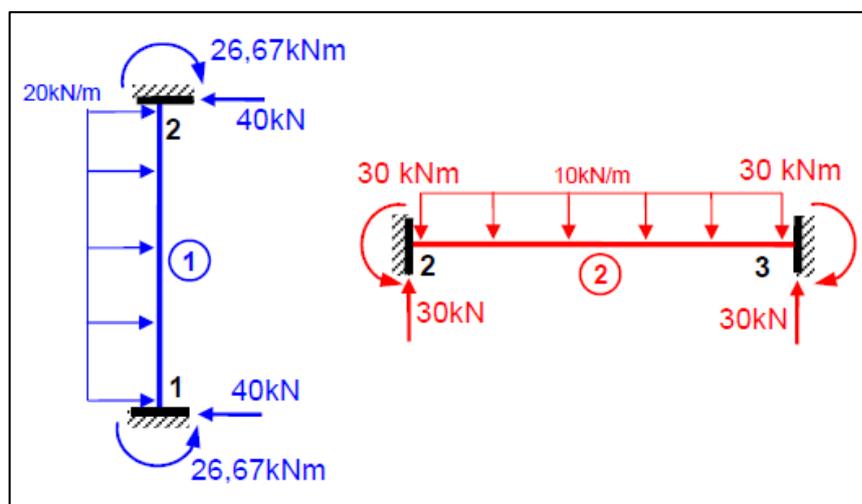
Figura 6 – Caso 0 para o Sistema Hipergeométrico da estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 14)

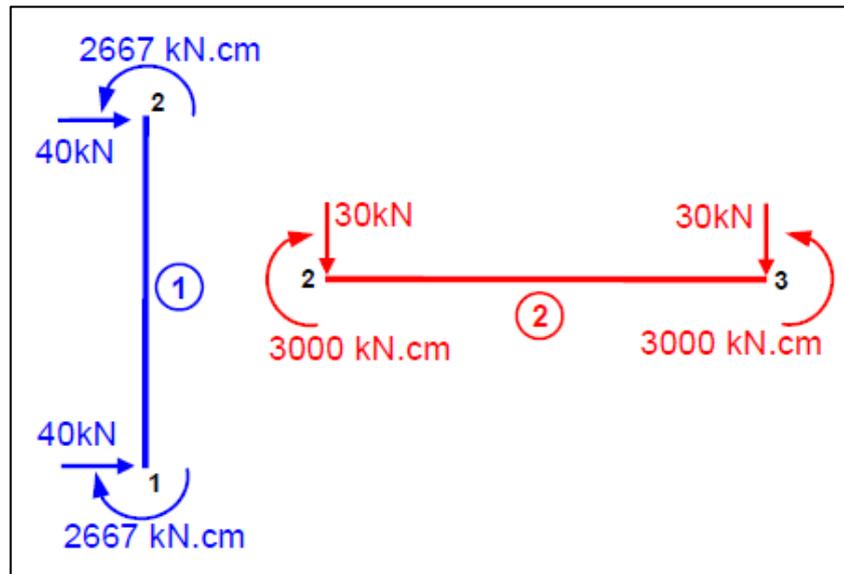
Com esta configuração, é possível calcular as forças de engastamento perfeito para cada barra, como visto na Figura 7. Estas forças são reações que surgem nos engastes impostos que impedem os deslocamentos ou rotações em cada nó das extremidades (MASUERO, 2015), calculadas através dos valores tabelados no Anexo A. Tais forças são calculadas a partir somente das cargas aplicadas ao longo do comprimento das barras, sem levar em conta as forças aplicadas nos nós, chamadas de cargas nodais. As forças nodais equivalentes são reações opostas a estas forças de engastamento perfeito, conforme visto na Figura 8 para a estrutura exemplo.

Figura 7 – Forças de engastamento perfeito para a estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 16)

Figura 8 – Forças nodais equivalentes para a estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 16)

Em posse destes valores, é possível montar o vetor de forças nodais equivalentes da estrutura (equação 10), levando em conta as forças nodais encontrada de cada barra junto com os carregamentos nodais presentes na estrutura.

$$\{f_{ne}\} = \begin{bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Mz_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Mz_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Mz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^* + 40 \\ V_1^* + 0 \\ M_1^* + -2667 \\ 50 + 40 + 0 \\ 0 + 0 - 30 \\ 3000 + 2667 - 3000 \\ H_3^* + 0 \\ V_3^* + -30 \\ M_3^* + 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 90 \\ -30 \\ 2667 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

$\{f_{ne}\}$ = Vetor de forças nodais equivalentes da estrutura;

Fx_i = Força na direção x no nó i;

Fy_i = Força na direção y no nó i;

Mz_i = Momento na direção z no nó i;

H_i^* = Reação horizontal no nó i causada pelas demais cargas aplicadas sobre a estrutura;

V_i^* = Reação vertical no nó i causada pelas demais cargas aplicadas sobre a estrutura;

M_i^* = Reação de momento no nó i causada pelas demais cargas aplicadas sobre a estrutura;

H_i = Reação horizontal no nó i;

V_i = Reação vertical no nó i; e

M_i = Reação de momento no nó i.

3.2.3 Sistema de Equações de Equilíbrio

Agora com o vetor de forças nodais equivalentes estruturado, é possível usá-lo em conjunto com a matriz de rigidez global da estrutura, para montar o sistema de equações de equilíbrio do problema, mostrado na equação 11.

$$\begin{matrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 90 \\ -30 \\ 2667 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -6000 & -30 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6000 & 0 & 1600000 & 6000 & 0 & 800000 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 6000 & 2697 & 0 & 6000 & -2667 & 0 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3018 & 5333 & 0 & -18 & 5333 \\ -6000 & 0 & 800000 & 6000 & 5333 & 3733333 & 0 & -5333 & 1066667 \\ 0 & 0 & 0 & -2667 & 0 & 0 & 2667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & -5333 & 0 & 18 & -5333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5333 & 1066667 & 0 & -5333 & 2133333 \end{bmatrix} \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{matrix} \quad \text{(equação 11)}$$

Onde:

H_i = Reação horizontal no nó i;

V_i = Reação vertical no nó i;

M_i = Reação de momento no nó i; e

D_j = Deslocabilidade j (ver Figura 4).

Nota-se que este sistema de equações não contempla as condições de contorno do problema, que são a influência dos vínculos na estrutura (MCGUIRE et al., 2000). Para isto, considera-se que os vínculos anulam as deslocabilidades nos nós e direções em que eles atuam.

O sistema da equação 11 é cinematicamente indeterminado, uma vez que infinitos deslocamentos de corpo rígidos somados a deslocamentos relativos (configurações deformadas) geram deslocamentos nodais que satisfazem ao sistema de equações. Para que o sistema possa ser resolvido, um único conjunto de deslocamentos nodais deve ser imposto aos nós da estrutura. Com isso, as incógnitas do problema passam a ser as forças reativas atuantes nos nós e direções dos deslocamentos impostos e os deslocamentos nodais nos demais nós.

Para que o sistema tenha apenas incógnitas nos deslocamentos nodais, altera-se o sistema de equações, subtraindo-se de cada força nodal equivalente o termo $K_{ij}D_j^0$, onde D_j^0 é o deslocamento nodal conhecido imposto, e alterando-se a equação correspondente para $1.D_j = D_j^0$. Quando o deslocamento imposto é nulo, como é o caso de vínculos perfeitos, o procedimento indicado torna-se equivalente a preencher linha e coluna correspondente ao deslocamento D_i com zeros e a diagonal principal com 1, colocando-se o valor zero na posição correspondente das forças nodais equivalentes.

No pórtico exemplo, os engastes nos nós 1 e 3 fazem com que as deslocabilidades D_1, D_2, D_3, D_7, D_8 e D_9 se tornem nulas, gerando a equação 12, que é o sistema de equações de equilíbrio final da estrutura.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 90 \\ -30 \\ 2667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2697 & 0 & 6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3018 & 5333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6000 & 5333 & 3733333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 12})$$

Onde:

D_j = Deslocabilidade j (ver Figura 4).

A solução deste sistema é obtida facilmente por qualquer sistema de solução direta, como a Eliminação de Gauss ou a Regra de Cramer, ou método iterativo, como o dos Gradientes

Conjugados (MCGUIRE et al., 2000). No programa desenvolvido, foi aplicada a Regra de Cramer, por ser de fácil implementação e por resolver rapidamente sistemas não muito grandes, visto que o foco da ferramenta é o ensino do Método dos Deslocamentos em estruturas simples – haverá limitação no tamanho da estrutura.

No entanto, em uma abordagem manual, sistemas deste tamanho ou maiores são complicados de serem resolvidos, por isso são feitas as simplificações expostas na seção 3.3. A Tabela 2 mostra o resultado para a estrutura exemplo estudada.

Tabela 2 – Resultado das deslocabilidades da estrutura exemplo.

D ₄	0,03186 cm
D ₅	- 0,01114 cm
D ₆	6,7909*10 ⁻⁴ rad

(fonte: MASUERO, 2015, p. 16)

3.2.4 Forças nas extremidades das barras e reações nos vínculos

As reações nos vínculos da estrutura podem ser calculadas através do cálculo das forças nas extremidades das barras em coordenadas globais, as quais, segundo Masuero (2015), “[...] podem ser obtidas somando-se as forças de engastamento perfeito da barra com o produto da matriz de rigidez da barra em coordenadas globais pelo vetor de deslocamentos nodais da barra em coordenadas globais [...]”. Estas forças nas extremidades foram calculadas para a barra 1 na equação 13 e para a barra 2 na equação 14.

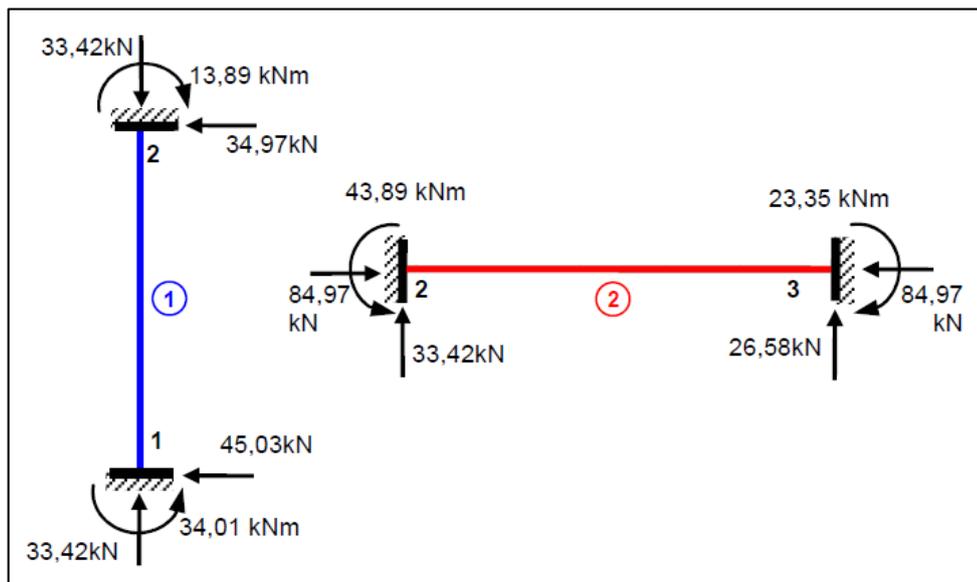
$$\begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 2667 \\ -40 \\ 0 \\ -2667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 & -6000 & -30 & 0 & -6000 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 \\ -6000 & 0 & 1600000 & 6000 & 0 & 800000 \\ -30 & 0 & 6000 & 30 & 0 & 6000 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ -6000 & 0 & 800000 & 6000 & 0 & 1600000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,03186 \\ -0,01114 \\ 6,7909 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,03kN \\ 33,42kN \\ 3401kNcm \\ -34,97kN \\ -33,42kN \\ -1389kNcm \end{bmatrix} \quad (\text{equação 13})$$

(equação 14)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 3000 \\ 0 \\ 30 \\ -3000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2667 & 0 & 0 & -2667 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 5333 & 0 & -18 & 5333 \\ 0 & 5333 & 2133333 & 0 & -5333 & 1066667 \\ -2667 & 0 & 0 & 2667 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -5333 & 0 & 18 & -5333 \\ 0 & 5333 & 1066667 & 0 & -5333 & 2133333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,03186 \\ -0,0114 \\ 6,7909 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,97kN \\ 33,42kN \\ 4389kNcm \\ -84,97kN \\ 26,58kN \\ -2335kNcm \end{bmatrix}$$

Estes resultados podem ser mostrados na estrutura, conforme a Figura 9. A soma dos valores das diversas barras concorrentes a um nó correspondentes aos nós que possuem vínculos são as reações dos mesmos.

Figura 9 – Forças resultantes nas extremidades em coordenadas globais das barras da estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 16 e 17)

Já as forças nas extremidades da barra em coordenadas locais são obtidas com a equação 15, cuja aplicação no exemplo pode ser vista nas equações 16 e 17, para as barras 1 e 2, respectivamente.

$$\{f\}^L = \{f_{ep}\}^L + [K]^L * [R] * \{u\} \quad \text{(equação 15)}$$

Onde:

$\{f\}^L$ = vetor de forças nas extremidades da barra em coordenadas locais;

$\{f_{ep}\}^L$ = vetor de forças de engastamento perfeito da barra em coordenadas locais;

$[K]^L$ = matriz de rigidez da barra em coordenadas locais;

$[R]$ = matriz de rotação da barra;

$\{u\}$ = vetor de deslocamentos nodais da barra em coordenadas globais.

(equação 16)

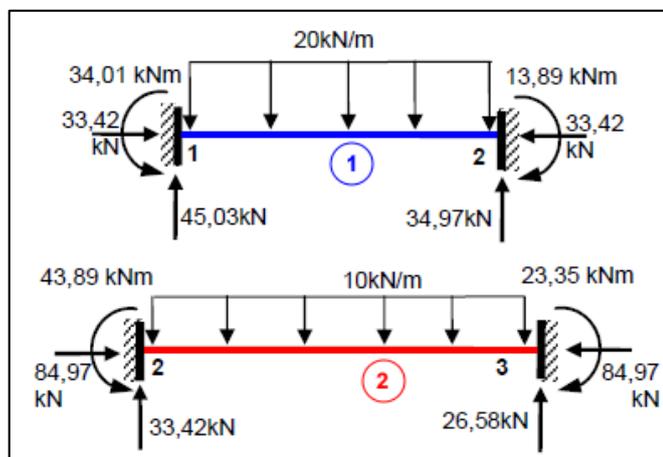
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 2667 \\ 0 \\ 40 \\ -2667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 \\ -30 & 0 & 6000 & 30 & 0 & 6000 \\ -6000 & 0 & 1600000 & 6000 & 0 & 800000 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 30 & 0 & -6000 & -30 & 0 & -6000 \\ -6000 & 0 & 800000 & 6000 & 0 & 1600000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,03186 \\ -0,01114 \\ 6,7909 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,42kN \\ 45,03kN \\ 3401kNcm \\ -33,42kN \\ 34,97kN \\ -1389kNcm \end{bmatrix}$$

(equação 17)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 3000 \\ 0 \\ 30 \\ -3000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2667 & 0 & 0 & -2667 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 5333 & 0 & -18 & 5333 \\ 0 & 5333 & 2133333 & 0 & -5333 & 1066667 \\ -2667 & 0 & 0 & 2667 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -5333 & 0 & 18 & -5333 \\ 0 & 5333 & 1066667 & 0 & -5333 & 2133333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,03186 \\ -0,0114 \\ 6,7909 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,97kN \\ 33,42kN \\ 4389kNcm \\ -84,97kN \\ 26,58kN \\ -2335kNcm \end{bmatrix}$$

As forças nas extremidades em coordenadas locais de qualquer barra (sumarizados na Figura 10), juntamente com o carregamento externo ao longo da mesma, podem ser utilizadas para se calcular os diagramas de esforços internos da estrutura.

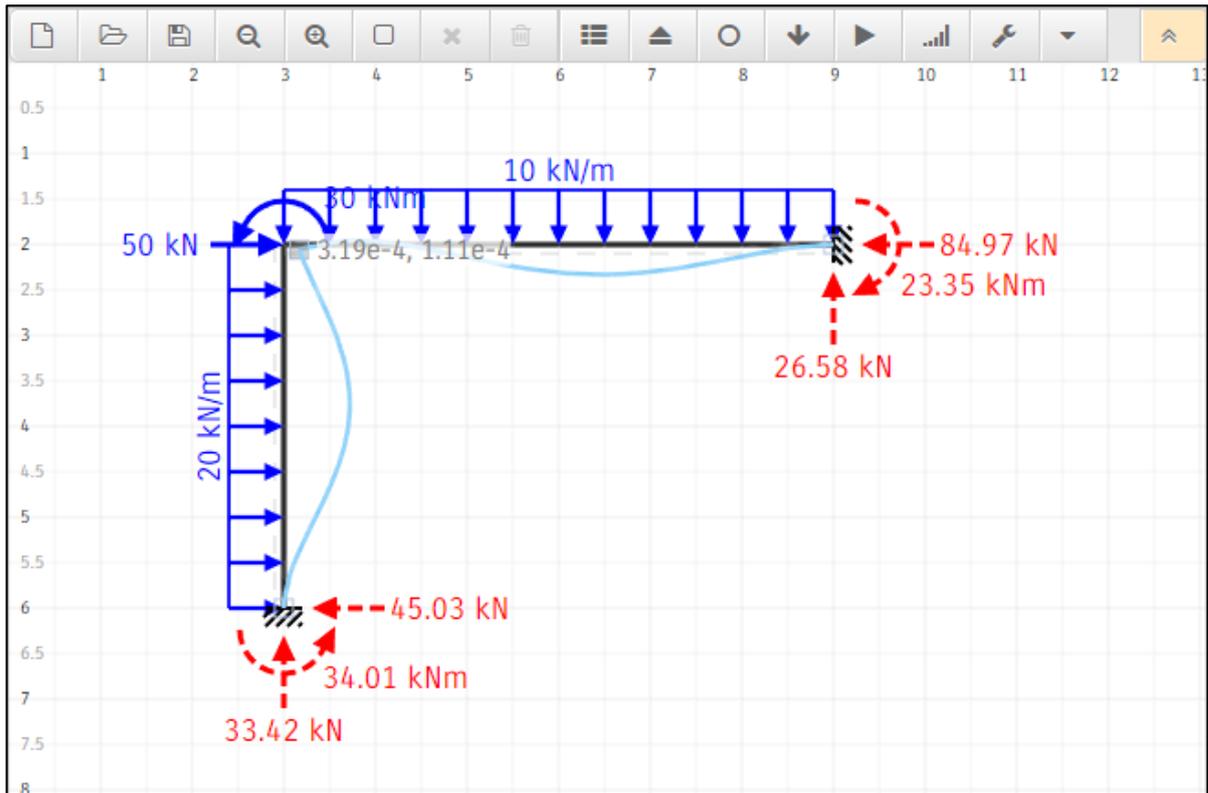
Figura 10 – Forças resultantes nas extremidades em coordenadas locais das barras da estrutura exemplo.



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 17)

Assim, a estrutura exemplo foi integralmente solucionada. Os valores calculados podem ser validados em *softwares* de cálculo estrutural. Para este estudo, verificou-se a estrutura dentro do programa *online* STRIAN (STIBOR; FRANTÍK, 2015), inserindo como entrada os mesmos valores de coordenadas, áreas, momentos de inércia e módulo de elasticidade, além dos mesmos carregamentos, como visto na Figura 11.

Figura 11 – Resultado do STRIAN para a estrutura exemplo.



(fonte: elaborado pelo autor)

Nota-se, em vermelho, as reações nos vínculos da estrutura, cujos valores coincidem com os encontrados no anteriormente. Além disso, é possível ver os valores dos deslocamentos horizontal e vertical² no nó 2, coincidindo com os calculados na seção 3.2.3.

² O STRIAN adota um eixo de coordenadas diferente do escolhido neste estudo. Nele, o sentido do eixo y é contrário ao mostrado ao longo deste capítulo. Além disso, o programa não mostra valores de rotação dos nós.

3.3 COMPARATIVO ENTRE ABORDAGEM MANUAL E COMPUTACIONAL

Manualmente, o Método dos Deslocamentos divide espaço com outros métodos, como o Método das Forças (MARTHA, 2004) e o Método de Cross (SÜSSEKIND, 1987). No entanto, estes métodos são complicados de serem aplicados num programa de computador, pois envolvem escolhas e outras complexidades. Ainda, o Método dos Deslocamentos tem duas principais vantagens sobre o Método das Forças quando aplicado computacionalmente: a estrutura básica da metodologia do primeiro – Sistema Hipergeométrico – é única para a estrutura, enquanto que o segundo possui diversos Sistemas Principais, e os coeficientes de rigidez são obtidos através de poucos valores tabelados, diferentemente dos coeficientes de flexibilidade do Método das Forças, que são obtidos através de uma extensa lista de diferentes combinações de diagramas. O Método das Forças se torna facilmente programável apenas quando a tipologia da estrutura sobre a qual ele é aplicado é fixada, como na Equação dos Três Momentos para vigas contínuas.

Neste trabalho, foi abordada a metodologia geral do Método dos Deslocamentos, onde todos os nós da estrutura são deslocáveis em todas as direções. Já em uma abordagem manual, Martha (2004) e Masuero (2015) sugerem algumas simplificações do Método:

- a) Não incluir no sistema de equações deslocamentos referentes a nós com vínculos perfeitos nas direções correspondentes;
- b) Desprezar deformações axiais, considerando que todas as barras são infinitamente rígidas na direção axial de cada uma; e
- c) Simplificar a estrutura reduzindo partes da estrutura nas quais a totalidade das forças ativas e reativas são conhecidas através do equilíbrio isostático (por exemplo, em balanços) a resultantes de forças e momentos no ponto de conexão dessa parte com o restante da estrutura.

No exemplo estudado na seção 3.2, é possível aplicar a duas primeiras simplificações. Ambos os nós 1 e 3 são engastados, então pode-se considerar que estes nós são indeslocáveis nas três direções, eliminando as deslocabilidades D_1 , D_2 , D_3 , D_7 , D_8 e D_9 e por consequência eliminando os respectivos casos (vistos nos Anexo C). Este processo é feito na abordagem computacional, visto como condições de contorno, mas apenas no final da metodologia para garantir as

condições de equilíbrio e resolver o sistema gerado. Também, a segunda simplificação sugere desprezar as deslocabilidades D_4 e D_5 , visto que estas acarretam na deformação axial das barras 2 e 1, respectivamente.

Após estas simplificações, resta apenas uma deslocabilidade, a rotação no nó 2 (D_6), e por consequência apenas o Caso 2 é analisado além do Caso 0. Este, por sua vez, nunca é alterado por simplificações, visto que depende exclusivamente do carregamento e da geometria da estrutura. Sendo assim, o sistema de equações de equilíbrio é reduzido a apenas uma incógnita, o que é facilmente calculado manualmente, como visto na equação 18 (MASUERO, 2015).

$$[3000] = [-2667 + 3000] + [3733333] [D_6] \quad (\text{equação 18})$$

Onde:

D_6 = Deslocabilidade de rotação no ponto 2 (ver Figura 4).

Resolvendo esta equação, obtém-se $D_6 = 7,1437 \cdot 10^{-4}$ rad, que é um valor bem próximo ao encontrado anteriormente na abordagem computacional e é razoável num cenário didático manual.

Finalmente, estruturas muito complexas, como o modelo matemático de um edifício de diversos andares, são impraticáveis manualmente. Operações repetitivas são facilmente implementadas em programas de cálculo estrutural, fazendo com que dezenas, centenas ou milhares de deslocabilidades sejam obtidas com o mesmo grau de esforço em termos de implementação computacional, embora o esforço computacional para a solução do problema obviamente cresça com o tamanho da estrutura em número de nós e barras.

4 DESENVOLVIMENTO DA FERRAMENTA

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem um enfoque didático, cujo resultado é um programa que irá mostrar e ensinar o Método dos Deslocamentos. Sendo assim, decidiu-se que o nome dele será DESLOCA, e assim será chamado no decorrer deste trabalho. A meta desta ferramenta é expor, de maneira didática, os conceitos do Método, usando, ao máximo, recursos gráficos e de manipulação do usuário, além de calcular estruturas bidimensionais simples.

O DESLOCA foi desenvolvido pensando nos principais usuários: alunos e professores das disciplinas de Mecânica Estrutural II e Análise Estrutural por Computador, da UFRGS, os quais o usarão durante aulas e acompanhamentos de trabalhos. Espera-se que a ferramenta seja intuitiva e explicativa o suficiente, de modo que se preencha o “vazio” entre aulas expositivas e *softwares* de cálculo estrutural que apenas fornecem resultados numéricos.

Neste capítulo será abordado o processo de desenvolvimento do programa, propondo as funcionalidades básicas na seção 4.1, analisando as ferramentas de desenvolvimento e a linguagem de programação adotada na seção 4.2, expondo a construção de uma interface com viés didático na seção 4.3, e mostrando o resultado final na seção 4.4.

Além disso, todo o desenvolvimento dela foi realizado em um computador desktop com sistema operacional Windows 10 de 64 bits, processador AMD Ryzen 5 1400 Quad-Core de 3.2Ghz, 8Gb de memória RAM e placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti com 4Gb de memória. Para a programação, foi utilizado o *software* de edição de texto gratuito Notepad++³, e para a interpretação e *debug* do código foi utilizado o interpretador wxLuaEdit⁴.

4.1 FUNCIONALIDADES

O DESLOCA expõe a metodologia do Método dos Deslocamentos, num formato de aprendizado linear próximo do exposto neste trabalho. Paralelo a isso, o usuário pode criar e manipular estruturas bidimensionais, nas quais o Método vai sendo exposto e ensinado. Assim como outros programas de análise estrutural, o DESLOCA calcula os deslocamentos, reações

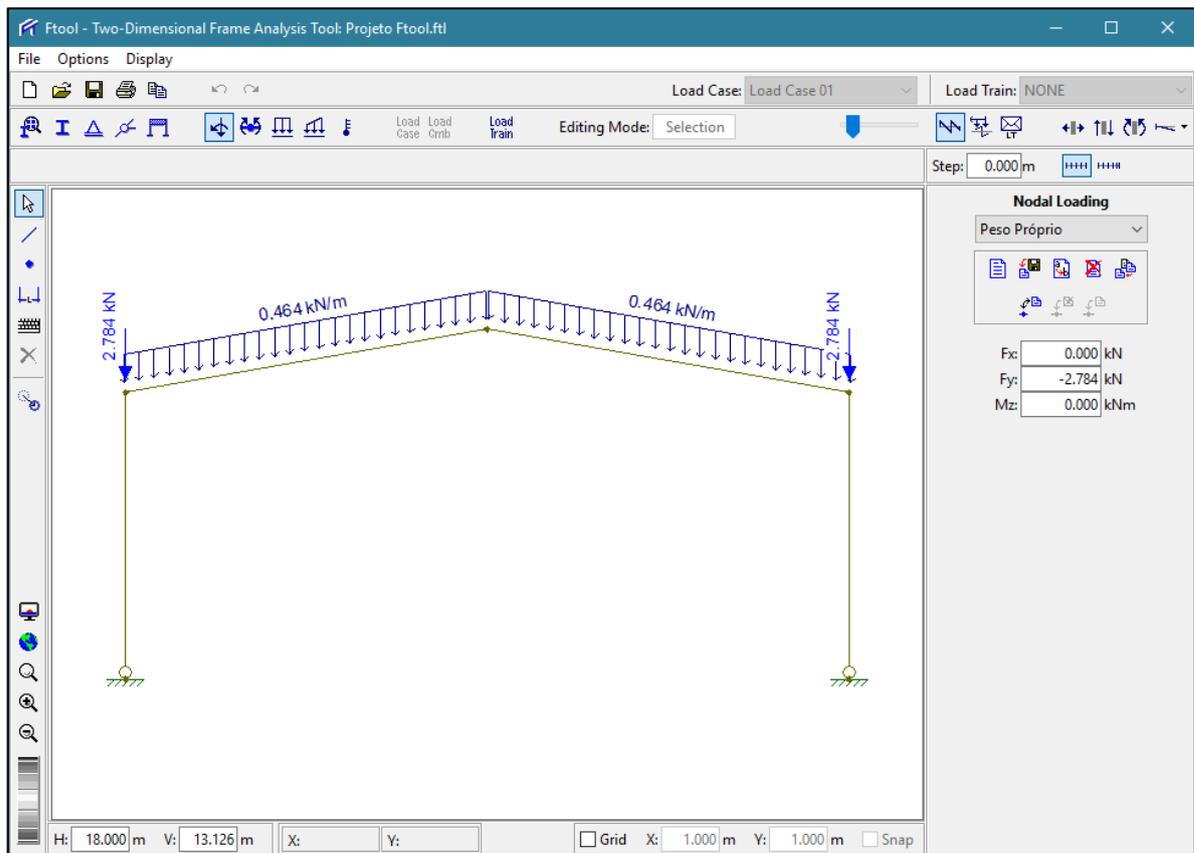
³ Disponível em: <<https://notepad-plus-plus.org>>. Acesso em: 11 abr. 2018.

⁴ Disponível em: <<http://wxlua.sourceforge.net>>. Acesso em: 16 abr. 2018.

e solicitações internas da estrutura. O programa também expõe as matrizes de rigidez de cada barra ao serem selecionadas, e simultaneamente mostrar a matrizes de rigidez da estrutura.

Buscou-se implementar as principais funcionalidades de construção e visualização da estrutura presentes no *software* Ftool⁵, desenvolvido por Martha (2002), que cumpre seu papel de ferramenta de cálculo estrutural bidimensional, com certa facilidade na criação de estruturas e na obtenção dos resultados. Sua interface é simples e direta, como visto na Figura 12.

Figura 12 – Interface do programa Ftool.



(fonte: elaborado pelo autor)

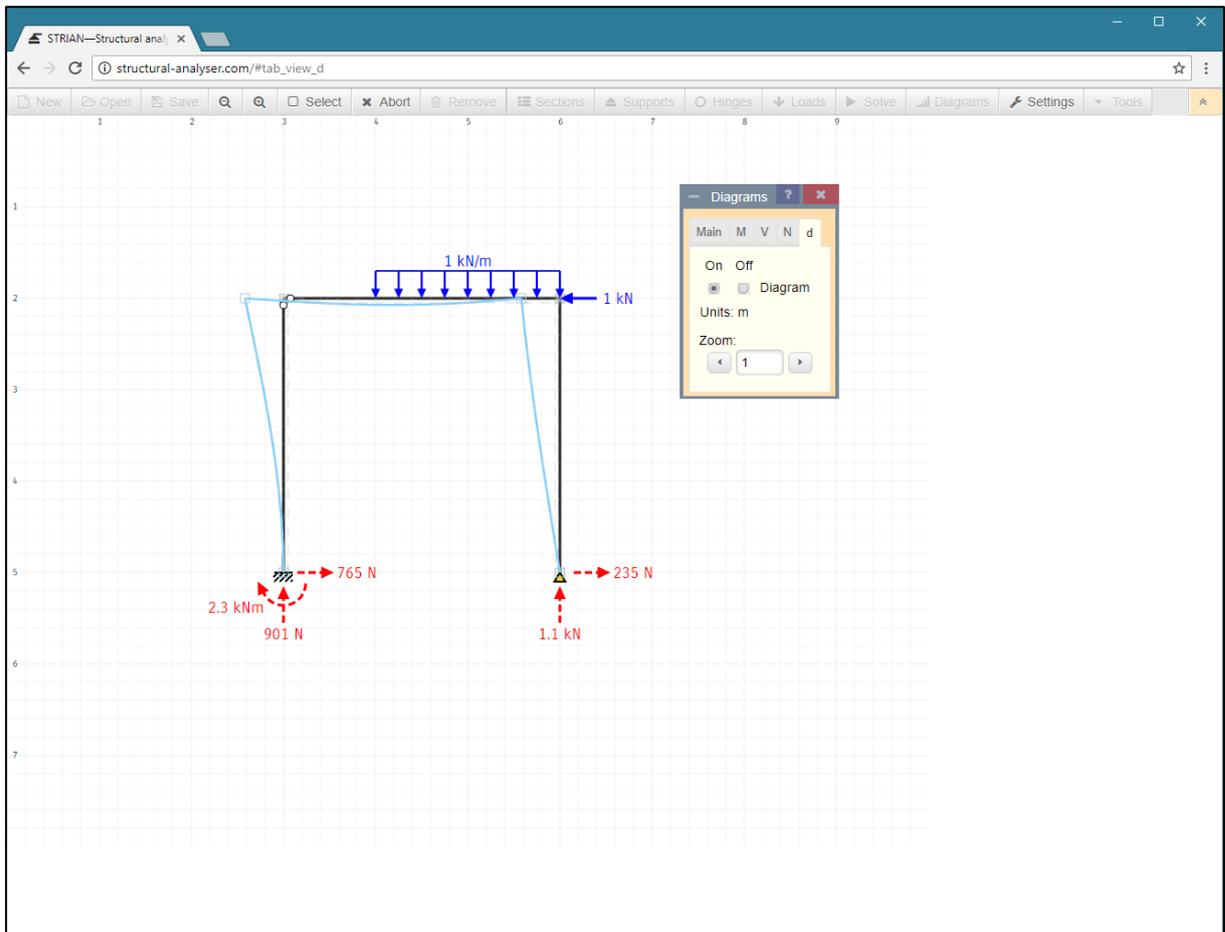
No entanto, o Ftool apenas dá resultados, não explicando o processo por trás do cálculo. Então, trabalhou-se para que o DESLOCA tenha as mesmas funcionalidades dele, mas ensinando o Método dos Deslocamentos ao passo que o usuário cria e manipula a estrutura.

Outro exemplo de programa existente utilizado como inspiração é a ferramenta *online* STRIAN, desenvolvido por Stibor e Frantík (2015). Sob a forma de site, cuja interface pode ser vista na

⁵ Disponível em: <<https://www.alis-sol.com.br/Ftool>>. Acesso em: 10 out. 2017.

Figura 13, o programa conta com criação e edição de estruturas bidimensionais, com resultados em forma de diagramas de tensões, configuração deformada e valores numéricos, sob uma interface limpa e amigável para novos usuários, além de mostrar um tutorial guiado ao acessar.

Figura 13 – Interface do programa *online* STRIAN.

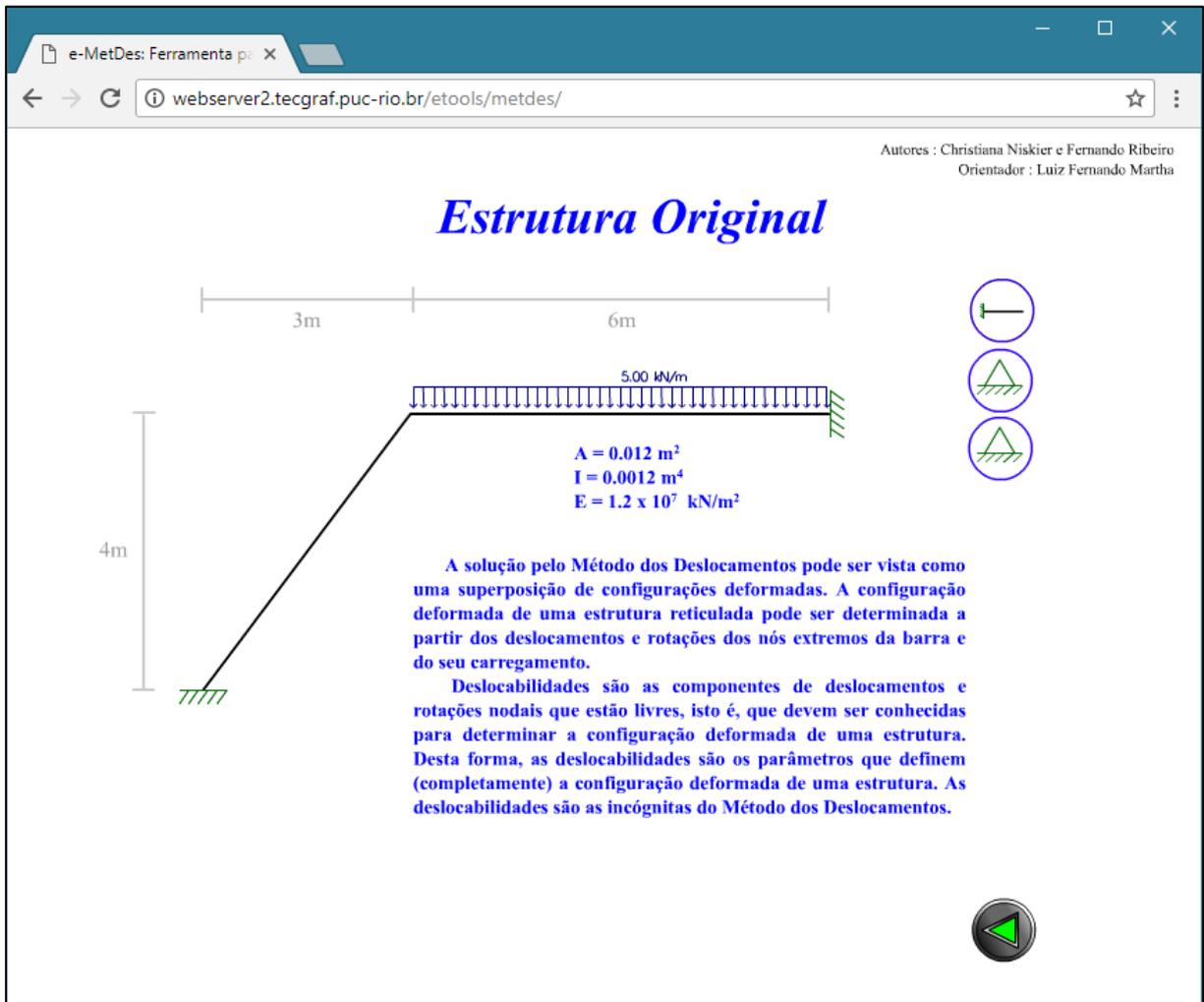


(fonte: elaborado pelo autor)

No entanto, ele tem as mesmas limitações do Ftool no que se refere ao viés didático. Os resultados são obtidos com rapidez, mas não são expostos os procedimentos que o programa utilizou para obtê-los – se usa o Método dos Deslocamentos ou algum outro método para o cálculo interno.

Outras ferramentas *online*, como o eMetDes, desenvolvido por Niskier e Ribeiro (sem data), adotam outro caminho: apenas ensinam o Método, utilizando recursos gráficos e modelos e valores pré-existent, como visto na Figura 14.

Figura 14 – Interface da ferramenta eMetDes.



(fonte: elaborado pelo autor)

O eMetDes expõe os conceitos básicos do Método dos Deslocamentos sob uma abordagem manual, utilizando uma estrutura simples como exemplo. No entanto, a interação do usuário é limitada, impossibilitando a edição da estrutura e a visualização de outros casos. O DESLOCA, por outro lado, contemplará o ensino expositivo do Método sob uma abordagem computacional, junto com a possibilidade de manipulação da estrutura.

4.2 LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO

Durante o desenvolvimento do DESLOCA, foi utilizada uma única linguagem de programação: Lua, criada em 1993 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro por Roberto Ierusalimschy, Luiz Henrique de Figueiredo, e Waldemar Celes. Assim como outras linguagens

de *script*, como Python⁶, Lua possui sintaxe amigável, códigos e ferramentas leves, ampla diversidade de bibliotecas e módulos externos disponíveis, e portabilidade entre diversas plataformas (IERUSALIMSKY, 2016). Ela foi escolhida pelo conhecimento prévio por parte do autor, além das vantagens citadas.

Além da linguagem, foi utilizado a versão 2.8.12.3 da biblioteca de interface gráfica wxLua, que é uma versão para Lua da biblioteca wxWidgets⁷ (para linguagem C). Esta biblioteca permite a criação de interfaces com janelas, botões, tabelas, textos, imagens, manipulação de arquivos, dentre outras funções (WINWOOD; LABENSKI, 2013). Estas funcionalidades são necessárias e suficientes para cumprir o propósito da ferramenta desenvolvida, dentro de certas adaptações e limitações.

4.3 DESENVOLVIMENTO DA INTERFACE

Sob um enfoque didático, o DESLOCA teve como metas de desenvolvimento os seguintes princípios:

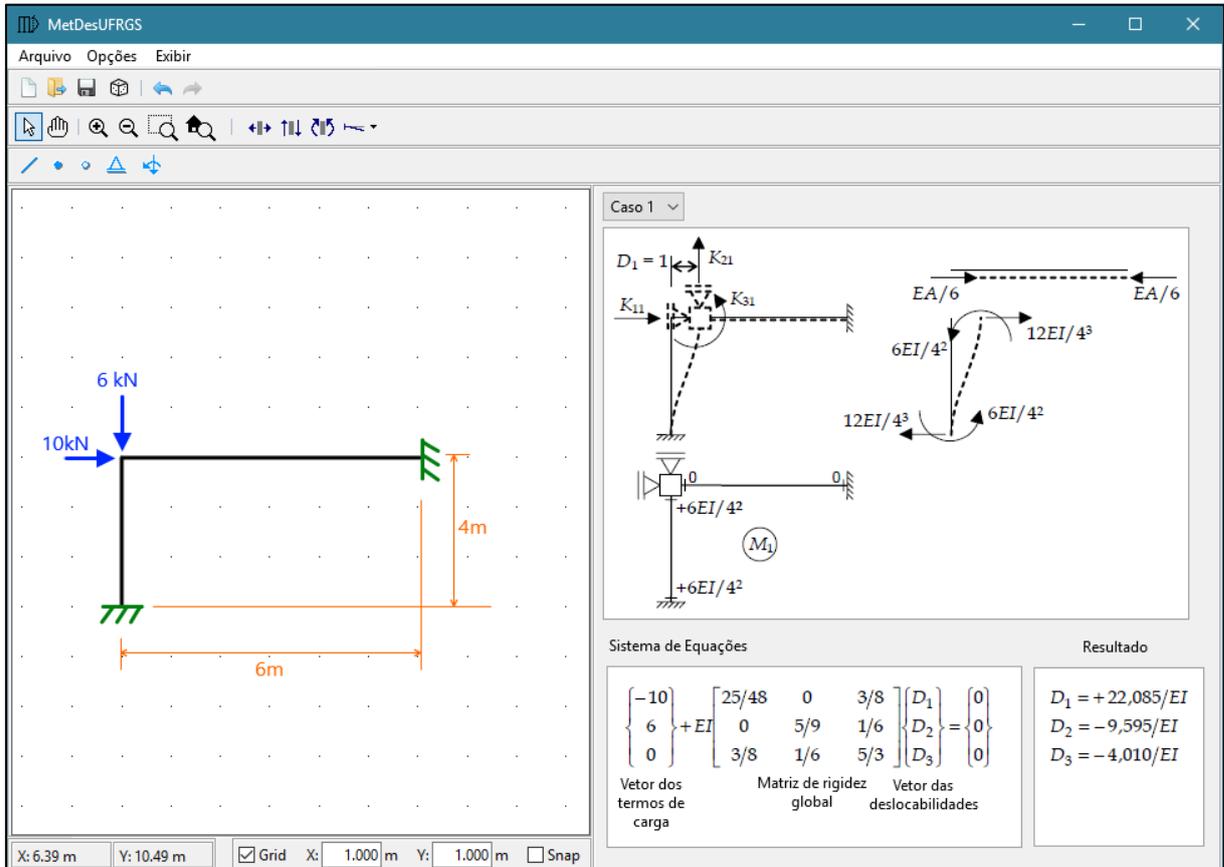
- a) usabilidade intuitiva, para que o usuário entenda as capacidades do programa sem dificuldades, através da familiaridade com outros programas existentes;
- b) didática linear, seguindo, na medida do possível, o roteiro de entendimento e cálculo do Método dos Deslocamentos exposto na seção 3.2, para transmitir adequadamente os conceitos do Método para o usuário e sanar dúvidas quanto o mesmo; e
- c) responsividade, de modo que o programa funcione rápida e corretamente frente a um máximo de variabilidade de estruturas e carregamentos possível.

Para sanar as desvantagens dos programas existentes citados na seção 4.1, criou-se um protótipo gráfico da interface esperada do programa dentro dos 3 princípios supracitados, como visto na Figura 15.

⁶ Disponível em: <<https://www.python.org>>. Acesso em: 02 de jun. 2018.

⁷ Disponível em: <<http://www.wxwidgets.org>>. Acesso em: 16 abr. 2018.

Figura 15 – 1º protótipo de interface da ferramenta DESLOCA.



(fonte: elaborado pelo autor)

Este protótipo de interface do programa representa uma primeira idealização do DESLOCA, que serviu de base para as escolhas que resultaram na interface final (presente na seção 4.4). A semelhança com o Ftool se dá pelo princípio da usabilidade intuitiva, visto que o Ftool é uma ferramenta de cálculo – e algumas vezes didática – ainda amplamente utilizada em aulas e projetos. A naturalidade do usuário que já experimentou o Ftool é valorizada neste protótipo. É possível notar as partes relevantes a esse desenvolvimento:

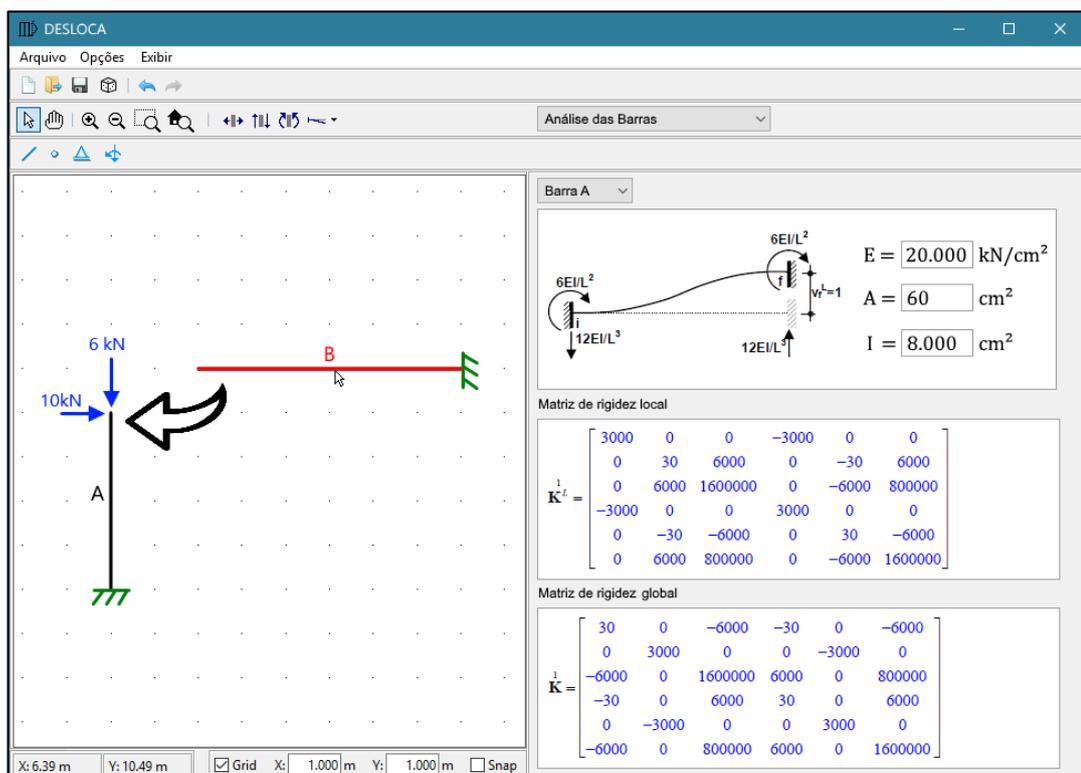
- Na parte superior, um menu que possibilita criar uma estrutura do zero, abrir uma existente, salvar o trabalho, desfazer ou refazer edições, desenhar barras e nós, aplicar vinculações e cargas, e exibir os diagramas de solicitações e configuração deformada (de modo que o usuário possa ativar ou desativar estes diagramas);
- Na parte esquerda, um editor de estruturas com funcionalidades mistas entre Ftool e STRIAN;

- À direita, uma janela dos casos elementares, de modo que o usuário possa escolher qual caso observar e ele ser calculado automaticamente. Ainda, o sistema de equações gerado pelos casos, que também será exposto automaticamente enquanto o usuário monta ou abre uma estrutura. Por fim, uma janela com o valor das deslocabilidades, que juntamente com a deformada da estrutura (que o usuário pode ativar/desativar), serve de resultado final do programa.

Embora o protótipo tenha seguido o princípio da usabilidade, ele peca na didática, por dar enfoque à estrutura completa e não às barras isoladamente, e na responsividade, pois a exibição dos casos e da equação está sob a ótica da aplicação manual do método (que usa simplificações para diminuir a complexidade de cálculo manual), o que é desfavorável computacionalmente.

Tendo em vista estes pontos, pensou-se num segundo protótipo da interface do DESLOCA, priorizando a demonstração das barras isoladamente, e com um novo procedimento de geração de estruturas, conforme a Figura 16.

Figura 16 – 2º protótipo de interface da ferramenta DESLOCA.



(fonte: elaborado pelo autor)

Nesta nova proposição de interface, priorizou-se o detalhamento do comportamento das barras, podendo analisar cada uma individualmente. Utilizou-se, para fins de exemplificação, a mesma estrutura proposta por Masuero (2015) abordada na exposição da metodologia na seção 3.2. Os pontos importantes desta nova ideia de interface são:

- Na parte superior, à direita, é possível escolher qual campo da metodologia de análise do Método dos Deslocamentos será contemplada pelo painel à direita. Propõe-se que estas etapas sejam: Análise das Barras (explicada a seguir), Análise dos Casos (similar ao 1º protótipo), Equação de Equilíbrio da Estrutura (com a matriz de rigidez global da estrutura e os resultados). Ainda no menu superior, foi removido o botão de criação de nós, já que o método de construção da estrutura mudou;
- No campo à esquerda, é possível perceber a inversão do modo de construir a estrutura: primeiro são feitas as barras, com um tamanho e orientação padrão, depois se altera a orientação e/ou o tamanho da barra arrastando os nós, para então definir se haverá nós com vínculos e quais, para finalmente arrastar a barra até a estrutura (na Figura 16, por exemplo, a estrutura é por padrão a primeira barra colocada) e ela acoplar automaticamente em algum nó. Aqui se pretende permitir clicar com o botão direito do mouse em alguma barra para acessar informações ou mudar opções dela.
- À direita, consta o painel de Análise das Barras (selecionado automaticamente ao criar uma nova barra), que mostra as condições da barra selecionada. Primeiramente, são expostas as configurações deformadas para cada deslocabilidade (todas em sequência em uma animação). Ao lado, constam o módulo de elasticidade E , a área A e a inércia I do material, de modo que o usuário possa alterar os valores a qualquer momento. Abaixo, são exibidas as matrizes de rigidez local e global da barra, calculadas automaticamente na criação ou modificação da mesma.

Após estas ponderações sobre as prioridades da interface do DESLOCA, iniciou-se a programação propriamente dita. Na seção 4.4 é possível observar cada elemento construído na interface, além de limitações encontradas no processo.

4.4 RESULTADO FINAL DA INTERFACE

A biblioteca wxLua foi intensamente explorada para tentar tornar real a interface proposta. No entanto, a biblioteca tem suas limitações, então algumas funcionalidades tiveram que ser reestudadas e aplicadas de maneira diferente, como a de construção e visualização da estrutura. Não foi possível aplicar o sistema de arrastar uma barra para a estrutura, então a solução foi colocar a barra criada na estrutura automaticamente.

Além disso, para priorizar a função didática do programa, sempre foi privilegiada a visualização e edição de barras, fazendo, assim, com que o limitado espaço do programa – foi estipulado um tamanho de janela de 1280x720 pixels – fosse estudado diversas vezes até obter o resultado final visto na Figura 17. Uma versão maior desta figura pode ser vista no Apêndice A.

Ainda, no capítulo 5 é apresentado um manual para utilização correta do DESLOCA, onde se explica com detalhes o uso de cada item da interface mostrado a seguir.

Figura 17 – Interface final do DESLOCA.

The screenshot displays the DESLOCA software interface. It features a central workspace with a 2D structural model of a frame. The interface is divided into several panels:

- Top Left:** File menu (Arquivo) and Help menu (Ajuda). A dropdown menu shows 'Barra 1' with options 'Criar barra' and 'Excluir barra'.
- Top Center:** 'Carga distribuída' section with a value of $q = -0.2$ kN/cm. Radio buttons for 'local', 'global em x', and 'global em y' are present.
- Top Right:** 'Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes' section. It includes a 'Matriz de Rigidez' table and a 'Vetor de cargas nodais equiv.' table.
- Middle Left:** 'Carga nodal' section with input fields for F_x , F_y , and M_z in kN and kNcm. Radio buttons for 'local' and 'global' are included.
- Middle Right:** 'Vinculações' section with radio buttons for 'livre' and 'fixo' for nodes 1 and 2 in X, Y, and Z directions.
- Bottom Left:** 'Estrutura com cargas' section showing a 2D view of the structure with a grid of 100cm.
- Bottom Center:** 'Matriz de Rigidez da estrutura' table, which is a 15x15 matrix. The first few rows are highlighted in red.
- Bottom Right:** 'Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura' table, showing nodal load vectors for nodes 1 through 15.

At the bottom of the window, the text 'Bem-vindo(a) ao DESLOCA v0.28' is visible.

(fonte: elaborado pelo autor)

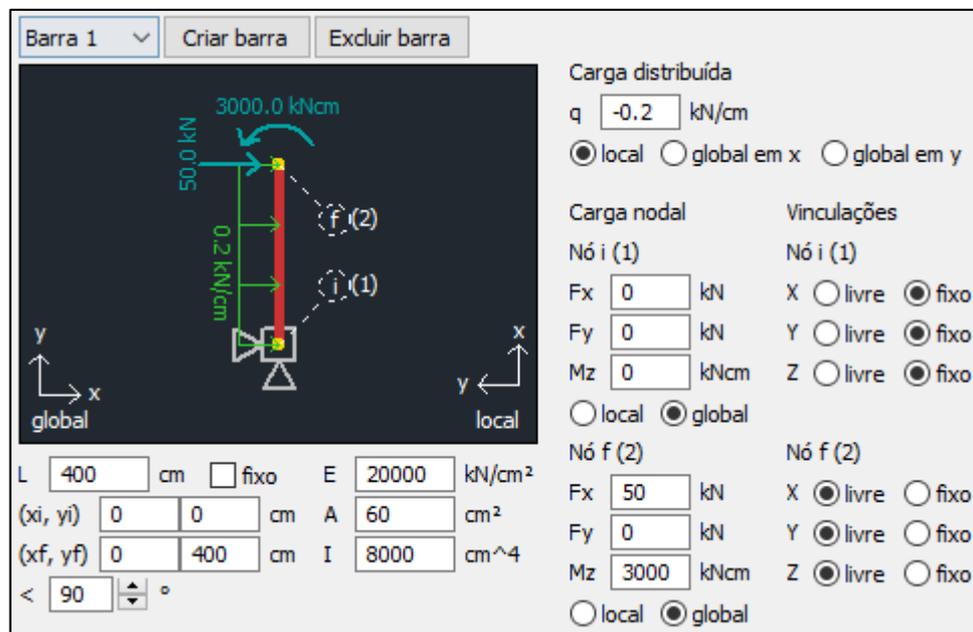
Esta interface final apresenta as principais funcionalidades básicas propostas neste trabalho: criação e edição de barras (que automaticamente manipula a estrutura), visualização de todas as informações da barra (matrizes de rigidez, vetores de cargas nodais equivalentes, etc),

visualização das informações da estrutura, e o cálculo e demonstração dos resultados (deslocamentos nodais, reações e diagramas de esforços internos).

4.4.1 Visualização da barra e suas informações

A parte superior da interface do DESLOCA foi reservada para a criação, edição, e exclusão de barras, visto na Figura 18, assim como a visualização de suas propriedades geradas sob o Método dos Deslocamentos, visto na Figura 19.

Figura 18 – Painel de visualização e edição de barra do DESLOCA.



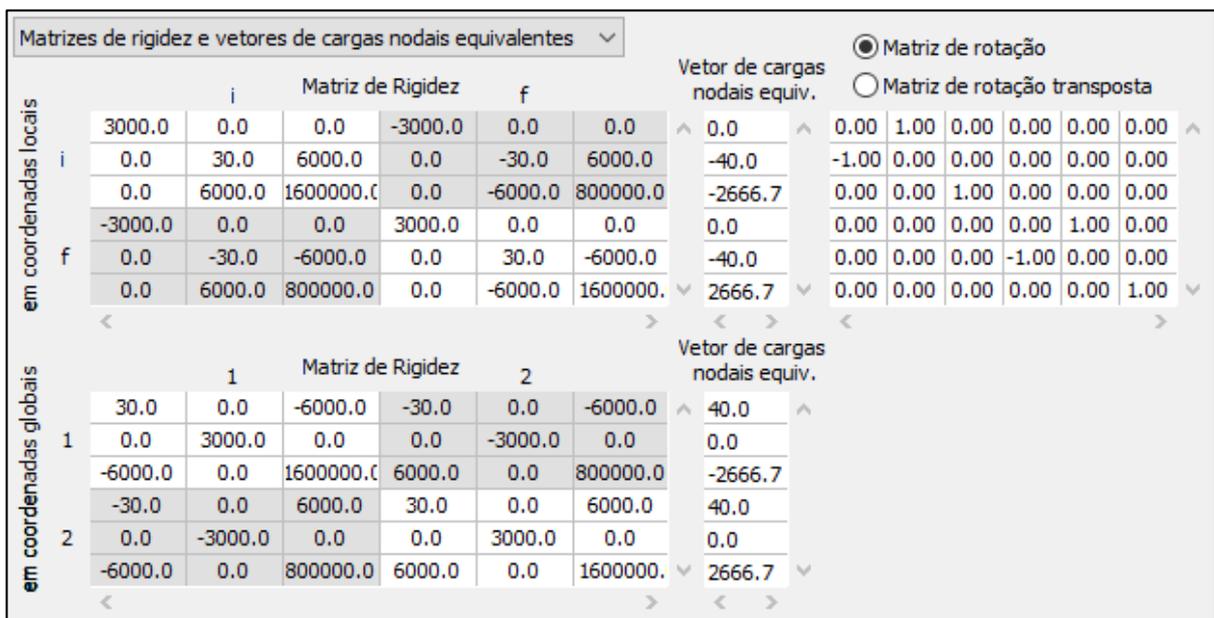
(fonte: elaborado pelo autor)

Na Figura 18 é possível perceber a visualização de uma barra, assim como diversos controladores para a manipulação da mesma. No canto superior esquerdo é possível selecionar a visualização de cada uma das barras presentes na estrutura, criar uma barra nova, e excluir a barra atualmente selecionada. Abaixo à esquerda, o usuário pode alterar as dimensões e propriedades da barra, que são utilizadas nos cálculos dos coeficientes de rigidez da mesma (ver seção 3.2.1). Por fim, à direita é possível definir os carregamentos distribuídos e nodais da barra, tanto em coordenadas locais como globais, além de aplicar as restrições vinculares. Estas configurações da barra podem ser vistas na janela de visualização, com a barra na sua posição relativa em coordenadas globais, e com um tamanho fictício fixo apenas para não extrapolar os limites da janela.

Nota-se que a inserção de cargas nodais e vinculações são feitas barra a barra, mesmo estas informações sendo aplicadas em nós. Decidiu-se desenvolver a interface desta maneira para ressaltar o princípio básico de criação e manipulação de barras do programa, e não de criação e manipulação de nós, como outros programas fazem.

A edição da barra selecionada neste painel resulta na construção das matrizes de rigidez da mesma, assim como os vetores de cargas nodais equivalentes. Estes valores são apresentados no espaço superior da interface do DESLOCA, visto na Figura 19.

Figura 19 – Painel de matrizes e vetores da barra no DESLOCA.

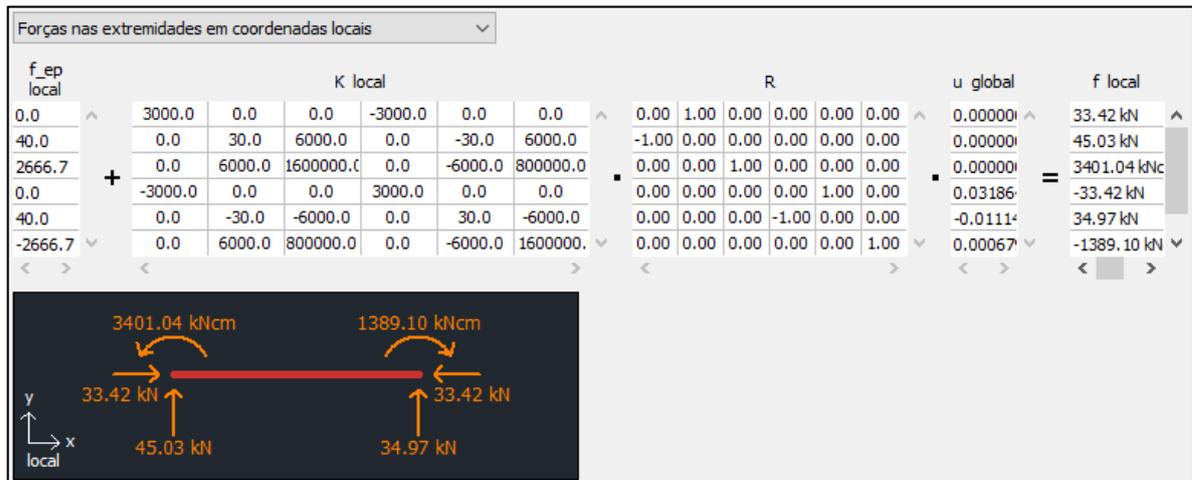


(fonte: elaborado pelo autor)

Este painel contempla as matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes da barra selecionada em forma de tabelas, tanto em coordenadas locais (superior) quanto em globais (inferior). Também, à direita são expostas as matrizes de rotação e de rotação transposta, de modo que o usuário alterne entre as duas ao clicar nas opções. A atualização dos elementos que compõem estas matrizes e vetores é feito automaticamente enquanto o usuário edita a barra, e estes cálculos seguem as fórmulas apresentadas nas seções 3.2.1 e 3.2.2.

Neste painel também é possível perceber um botão de escolha em lista na parte superior, que contém as opções “Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalente” e “Forças nas extremidades em coordenadas locais”. A primeira é a configuração apresentada na Figura 19, a segunda pode ser vista na Figura 20.

Figura 20 – Pannel de forças nas extremidades da barra no DESLOCA.



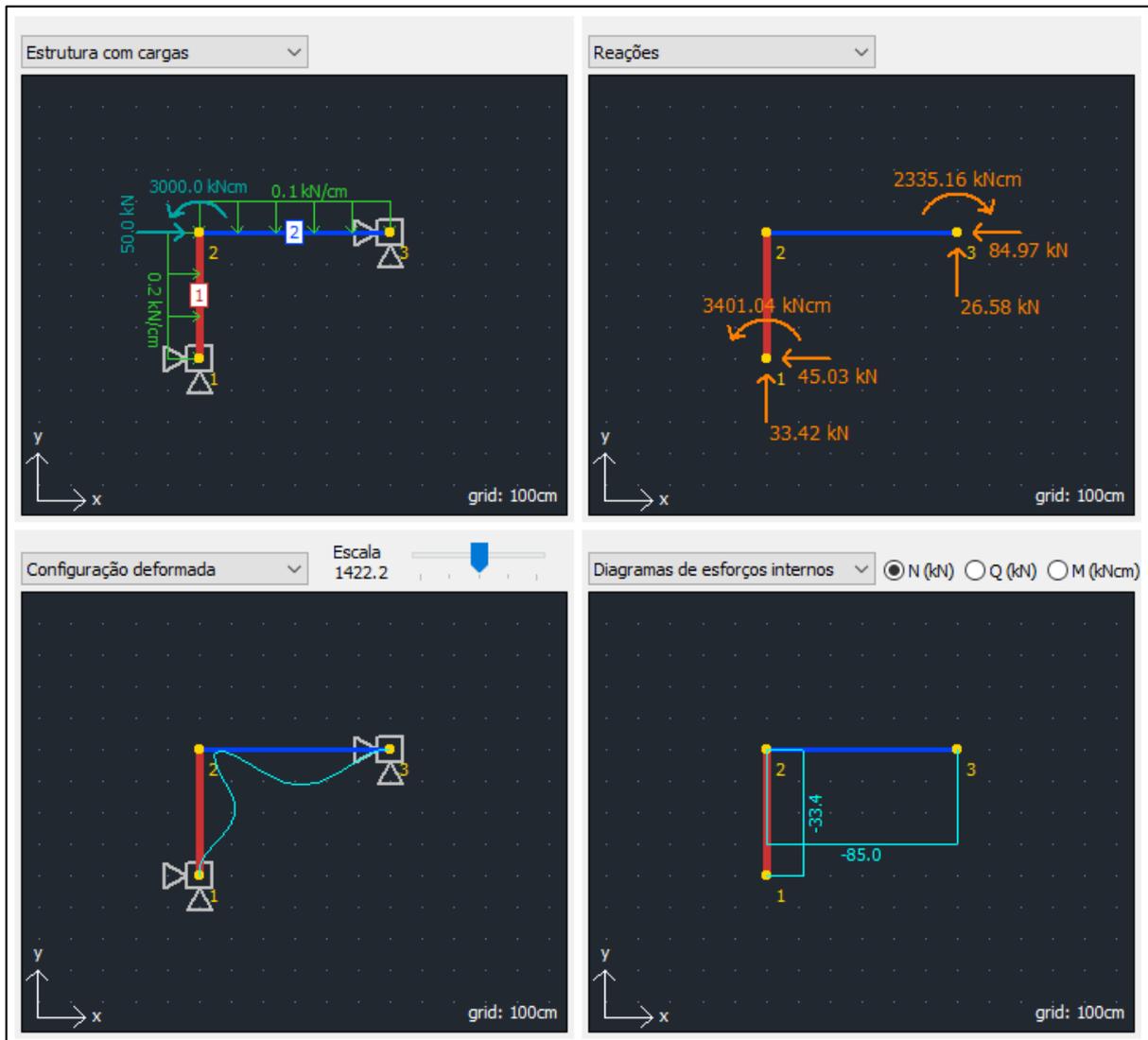
(fonte: elaborado pelo autor)

Ocupando o mesmo espaço do painel anterior, este modo contempla a equação 15 da seção 3.2.4, que é o cálculo das forças nas extremidades em coordenadas locais de uma barra. O resultado desta equação pode ser visto tanto em forma de tabela à direita (“f local”), quanto na forma gráfica na parte inferior, que mostra a barra em posição local.

4.4.2 Visualização da estrutura e suas informações

Além de visualizar cada barra separadamente, o DESLOCA permite visualizar a estrutura inteira, suas propriedades e os resultados finais do Método dos Deslocamentos na parte inferior do programa. A janela de visualização da estrutura, com seus diferentes modos de visualização, está presente na Figura 21.

Figura 21 – Janela de visualização da estrutura para cada opção de visualização no DESLOCA.



(fonte: elaborado pelo autor)

Esta janela mostra a visualização da estrutura, onde o usuário pode escolher, através do botão de escolha em lista, entre as quatro opções de visualização disponíveis no DESLOCA:

- “Estrutura com cargas”: mostra-se a estrutura com os carregamentos e vinculações de cada barra, indicando a numeração das barras e nós;
- “Reações”: as cargas e vinculações são ocultadas, para então se exibir as reações calculadas pelo programa, nos nós onde há restrições vinculares;
- “Configuração deformada”: mostra-se a configuração deformada da estrutura, sob uma escala que o usuário pode mudar no controle deslizante acima; e

- “Diagramas de esforços internos”: onde exibe-se os 3 tipos de diagramas para as barras (esforço axial, esforço cortante e momento fletor), de modo que o usuário possa escolher entre eles usando os botões de escolha acima.

Em todas estas opções de visualização da estrutura, o DESLOCA realça em vermelho a barra atualmente selecionada. Também, o desenho é apresentado sempre centralizado, e em uma malha de 100cm x 100cm.

À direita da janela de visualização da estrutura, o DESLOCA apresenta a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, em coordenadas globais, mostrados na Figura 22.

Figura 22 – Painel da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura no DESLOCA.

Matriz de Rigidez da estrutura													Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura		
													<input checked="" type="radio"/> Resultante <input type="radio"/> Parcela cargas distr. <input type="radio"/> Parcela cargas nodais		
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)	1:		
1 (1)	30.0	0.0	-6000.0	-30.0	0.0	-6000.0	0.0	0.0	0.0					1	40.0
2 (1)	0.0	3000.0	0.0	0.0	-3000.0	0.0	0.0	0.0	0.0					2	0.0
3 (1)	-6000.0	0.0	1600000.0	6000.0	0.0	800000.0	0.0	0.0	0.0					3	-2666.7
4 (2)	-30.0	0.0	6000.0	2696.7	0.0	6000.0	-2666.7	0.0	0.0					4	90.0
5 (2)	0.0	-3000.0	0.0	0.0	3017.8	5333.3	0.0	-17.8	5333.3					5	-30.0
6 (2)	-6000.0	0.0	800000.0	6000.0	5333.3	3733333.3	0.0	-5333.3	1066666.7					6	2666.7
7 (3)	0.0	0.0	0.0	-2666.7	0.0	0.0	2666.7	0.0	0.0					7	0.0
8 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	-17.8	-5333.3	0.0	17.8	-5333.3					8	-30.0
9 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	5333.3	1066666.7	0.0	-5333.3	2133333.3					9	3000.0
10 (4)														10	
11 (4)														11	
12 (4)														12	
13 (5)														13	
14 (5)														14	
15 (5)														15	

(fonte: elaborado pelo autor)

Este painel expõe a matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais, construída através dos procedimentos mostrados na seção 3.2.1. À direita, é exibido o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, conforme explanado na seção 3.2.2. O usuário pode selecionar nas opções acima à direita entre ver o vetor resultante, a parcela responsável pelas cargas distribuídas, ou a parcela responsável pelas cargas nodais. Assim como nos desenhos, o DESLOCA realça em vermelho os coeficientes responsáveis pela barra atualmente selecionada.

Acima, há uma opção “Aplicar condições de contorno”, que, ao marcada, preenche a matriz e o vetor com valores unitários (nas diagonais da matriz) ou nulos nas células em que há restrições vinculares nas respectivas direções, como visto na Figura 23.

Figura 23 – Matriz de rigidez da estrutura e vetor de cargas nodais equivalentes sob condições de contorno no DESLOCA.

Matriz de Rigidez da estrutura														Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura			
														<input checked="" type="radio"/> Resultante <input type="radio"/> Parcela cargas distr. <input type="radio"/> Parcela cargas nodais			
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)	13 (5)	14 (5)	15 (5)		
1 (1)	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							1	0.0
2 (1)	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							2	0.0
3 (1)	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							3	0.0
4 (2)	0.0	0.0	0.0	2696.7	0.0	6000.0	0.0	0.0	0.0							4	90.0
5 (2)	0.0	0.0	0.0	0.0	3017.8	5333.3	0.0	0.0	0.0							5	-30.0
6 (2)	0.0	0.0	0.0	6000.0	5333.3	3733333.3	0.0	0.0	0.0							6	2666.7
7 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0							7	0.0
8 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0							8	0.0
9 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0							9	0.0
10 (4)																10	
11 (4)																11	
12 (4)																12	
13 (5)																13	
14 (5)																14	
15 (5)																15	

(fonte: elaborado pelo autor)

Esta configuração é o sistema de equações final apresentado na seção 3.2.3, e é utilizada internamente no cálculo das deslocabilidades, apresentadas na próxima seção.

4.4.3 Visualização dos resultados calculados

O *output* numérico do DESLOCA é composto pelos deslocamentos nodais e reações calculadas utilizando o Método dos Deslocamentos. Eles são apresentados em forma de uma única tabela, com opção para alternar entre as duas informações, como visto na Figura 24.

Figura 24 – Painel de resultados dos DESLOCA.

<input checked="" type="radio"/> Deslocamentos <input type="radio"/> Reações		<input type="radio"/> Deslocamentos <input checked="" type="radio"/> Reações	
D1	x1 = 0.000000 cm	R1	H1 = -45.03 kN
D2	y1 = 0.000000 cm	R2	V1 = 33.42 kN
D3	z1 = 0.000000 rad	R3	M1 = 3401.04 kNcm
D4	x2 = 0.031864 cm	R4	-----
D5	y2 = -0.011141 cm	R5	-----
D6	z2 = 0.000679 rad	R6	-----
D7	x3 = 0.000000 cm	R7	H3 = -84.97 kN
D8	y3 = 0.000000 cm	R8	V3 = 26.58 kN
D9	z3 = 0.000000 rad	R9	M3 = -2335.16 kNcm

(fonte: elaborado pelo autor)

Além desses dois resultados citados, frisa-se que o DESLOCA possui como resultado as forças nas extremidades da barra em coordenadas locais, como visto na seção 4.4.1, e a visualização das reações, da configuração deformada e dos diagramas de esforços internos, como mostrado na seção 4.4.2.

5 MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO DESLOCA

O DESLOCA é uma ferramenta leve e portátil, que, no momento da publicação deste trabalho, utiliza apenas três arquivos para seu funcionamento:

- DESLOCA.lua: o código do programa inteiro, escrito em Lua;
- matrix.lua⁸: módulo com diversas funções de operações com matrizes, também escrito em Lua; e
- wxLua.exe: executável que funciona tanto como interpretador quanto editor de código, e que contém todos os requisitos necessários para o funcionamento do DESLOCA.

5.1 INICIALIZAÇÃO

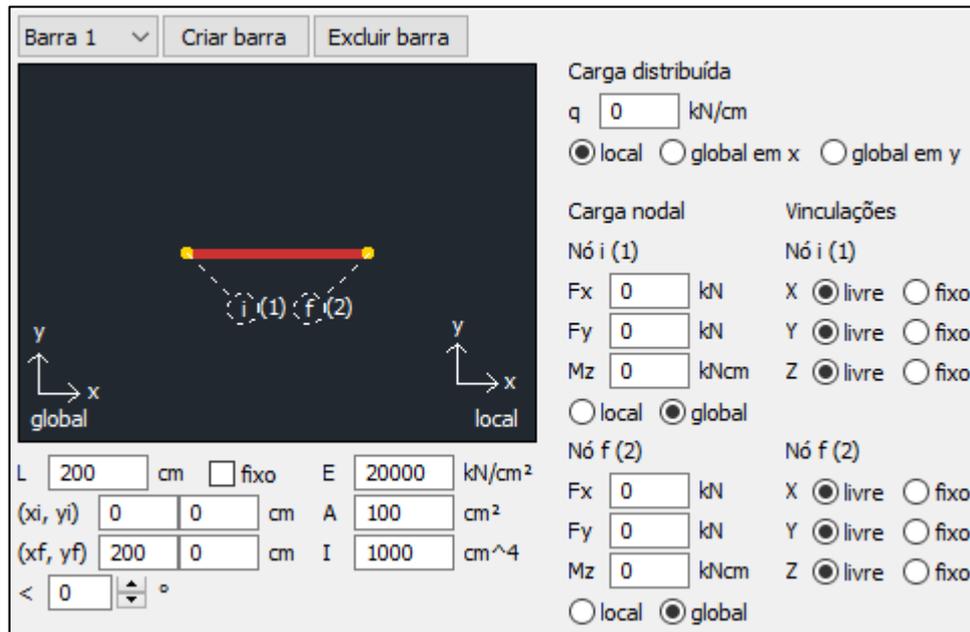
Para executar o DESLOCA, o usuário deve primeiramente se certificar que estes três arquivos estão em um mesmo diretório em seu computador⁹. Então, o usuário pode arrastar o código do programa para cima do executável wxLua e, assim, o DESLOCA é iniciado, mostrando a interface vista na Figura 17 da seção 4.4 ou em maior resolução no Apêndice A.

O DESLOCA abre com uma estrutura padrão pré-programada, que é a mesma proposta por Masuero (2015) utilizada como exemplo na seção 3.2. Então, neste manual será proposto trabalhar com uma estrutura “em branco” tentando replicar aquela exemplificada, de modo que o usuário contemple todas as funcionalidades do programa. Para isto, deve-se clicar no menu superior em “Arquivo” e então em “Novo projeto”, fazendo com que o DESLOCA mostre apenas uma barra padrão, como visto na Figura 25.

⁸ Disponível em: <<https://github.com/davidm/luas-matrix>>. Acesso em: 31 mai. 2018.

⁹ O DESLOCA foi testado no sistema operacional Windows, nas versões XP, 7, 8 e 10.

Figura 25 – Painel de visualização e edição de barra em um novo projeto.



(fonte: elaborado pelo autor)

A estrutura original foi completamente apagada, e agora o painel de visualização e edição de barra mostra uma com dimensões e propriedades padrões, sem carregamento ou vinculações. A janela de visualização indica qual é o nó inicial “i” e o nó final “f”, além de mostrar qual número de identificação estes nós têm, respectivamente na estrutura. Como no momento a estrutura possui unicamente esta barra, os nós inicial e final desta são os nós 1 e 2 respectivamente.

5.2 EDIÇÃO DE BARRAS

A primeira etapa para reproduzir a estrutura exemplo apagada anteriormente é a edição das barras da estrutura. Neste manual, começar-se-á pela barra 1, utilizando o painel de visualização e edição de barras visto na Figura 25.

5.2.1 Dimensões e propriedades

Na parte inferior do painel de edição e visualização da barra selecionada, é possível editar as dimensões e propriedades da mesma. Aqui, o DESLOCA oferece diversos campos de inserção de texto – apenas valores numéricos são aceitos, permitindo-se o uso de ponto para indicar casa

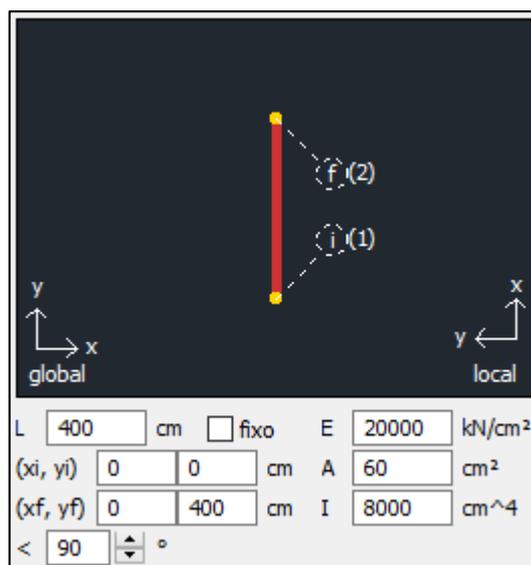
decimais e o traço para indicar valores negativos – para definir as características da barra selecionada.

A barra 1 da estrutura exemplo é vertical, para isso basta mudar as coordenadas “(xi, yi)” do nó inicial e “(xf, yf)” do nó final de modo que ela fique na vertical, ou então alterar o ângulo “<” colocando-o em 90°. O ângulo é medido a partir do nó inicial no sentido anti-horário, e para o funcionamento correto da inserção do mesmo, o usuário pode clicar nas setas para aumentá-lo ou diminuí-lo, ou escrever um valor entre 0 e 359 graus e clicar em alguma das setas logo em seguida.

Além do ângulo, o comprimento da barra está com um valor padrão de 200 cm. Para colocar o valor de 400 cm (conforme a estrutura exemplo), basta digitar este valor no campo “L”, ou ainda digitar coordenadas iniciais e finais cuja distância entre si dê 400 cm. No DESLOCA, o comprimento é interpretado como a distância entre os nós inicial e final. A opção “fixo” faz com que o comprimento permaneça fixado ao se alterar as coordenadas. Por exemplo, com comprimento fixo de 200 cm, ao incrementar a coordenada “xf” em 100 cm, a coordenada “xi” também aumenta em 100 cm para respeitar o “L” fixado. Este procedimento é similar a transladar a barra em uma direção.

Após a inserção correta dos valores, a barra está na vertical e com o comprimento igual ao da estrutura exemplo, como visto na Figura 26.

Figura 26 – Visualização da barra 1 na vertical.



(fonte: elaborado pelo autor)

Na Figura 26 é possível ver a barra em sua posição global, e com os valores de dimensões corretas – o desenho da barra utiliza um comprimento limitado padrão para que ele não ultrapasse os limites da janela. Também, o sistema de eixos local está à direita indicando a configuração local da barra. Além disso, foram inseridos os valores de módulo de elasticidade “E”, área “A” e momento de inércia “I”, conforme os originais da estrutura exemplo.

5.2.2 Cargas

O usuário também pode alterar o carregamento da barra, inserindo valores de carga distribuída ao longo de todo o comprimento da barra, e de cargas nodais no nó inicial e final da mesma. Nota-se que não importa a ordem dos procedimentos de edição de barra, ou seja, as cargas poderiam ter sido colocadas antes de alterar a posição da mesma. Após inserir o carregamento da estrutura exemplo, o painel de cargas se fica como o visto na Figura 27.

Figura 27 – Painel de cargas da barra 1.

The image shows a software interface for defining loads on a bar. It is divided into two main sections: 'Carga distribuída' (Distributed Load) and 'Carga nodal' (Nodal Load).

Carga distribuída:

- Input field for q : kN/cm
- Radio buttons for coordinate system: local, global em x, global em y

Carga nodal:

Nó i (1):

- F_x : kN
- F_y : kN
- M_z : kNcm
- Radio buttons: local, global

Nó f (2):

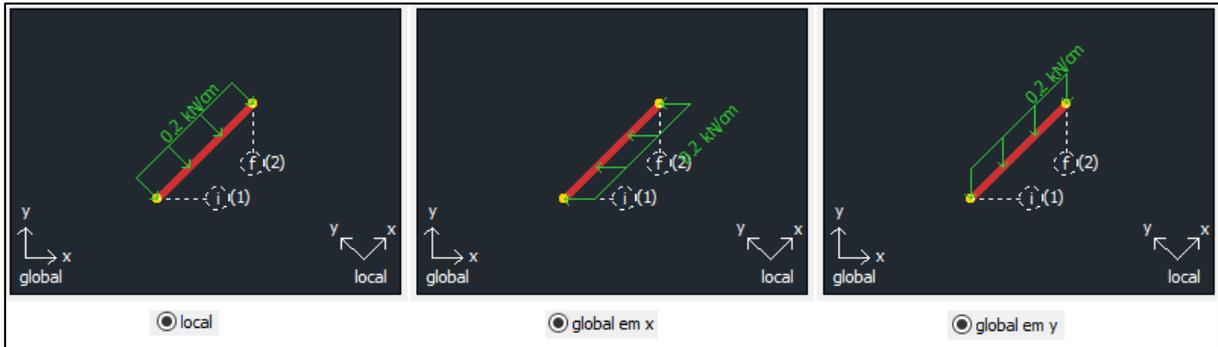
- F_x : kN
- F_y : kN
- M_z : kNcm
- Radio buttons: local, global

(fonte: elaborado pelo autor)

O DESLOCA aceita valores com casas decimais e negativos nos campos de edição da barra. Aqui, a carga distribuída foi colocada negativa, o que nos cálculos e no desenho representa uma carga na direção oposta ao eixo y local da barra. Nota-se que o DESLOCA apenas contempla cargas distribuídas uniformes e que começam no nó inicial da barra e terminam no nó final.

As diferentes opções “local”, “global em x” e “global em y” fazem com que o valor numérico inserido tenha diferentes interpretações, como pode ser visto para uma outra barra qualquer na Figura 28.

Figura 28 – Diferentes opções de carga distribuída para uma barra genérica.

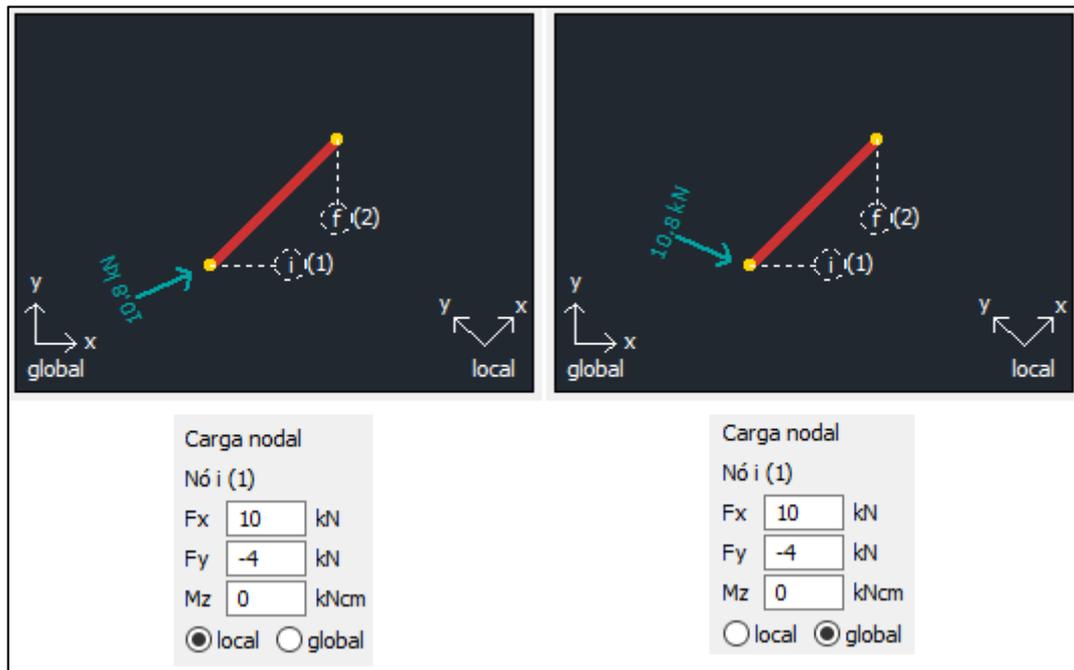


(fonte: elaborado pelo autor)

Na figura 28 é possível ver claramente a diferença entre as opções de carregamento distribuído. Com a opção “local”, a carga age na direção “y” do eixo de coordenadas locais da barra, por ser uma direção usual em modelos de estruturas e situações reais. Com as opções “global em x” e “global em y”, a carga tem as mesmas direções x e y, respectivamente, do eixo de coordenadas globais da barra/estrutura.

Além da carga distribuída, as cargas nodais – forças F_x e F_y e momento M_z – podem ser inseridas pelo usuário, tanto no nó inicial quanto no final. As opções “local” e “global” agem da mesma maneira que na carga distribuída, sendo que o programa inicia com a opção “global” marcada por padrão. No entanto, com apenas uma única opção “global”, a direção é obtida pela resultante entre F_x e F_y – o momento M_z , por ser na direção z, não é afetado por estas opções. Esta diferença entre as opções pode ser vista em uma barra qualquer na Figura 29.

Figura 29 – Diferentes opções de carregamento nodal para uma barra genérica.



(fonte: elaborado pelo autor)

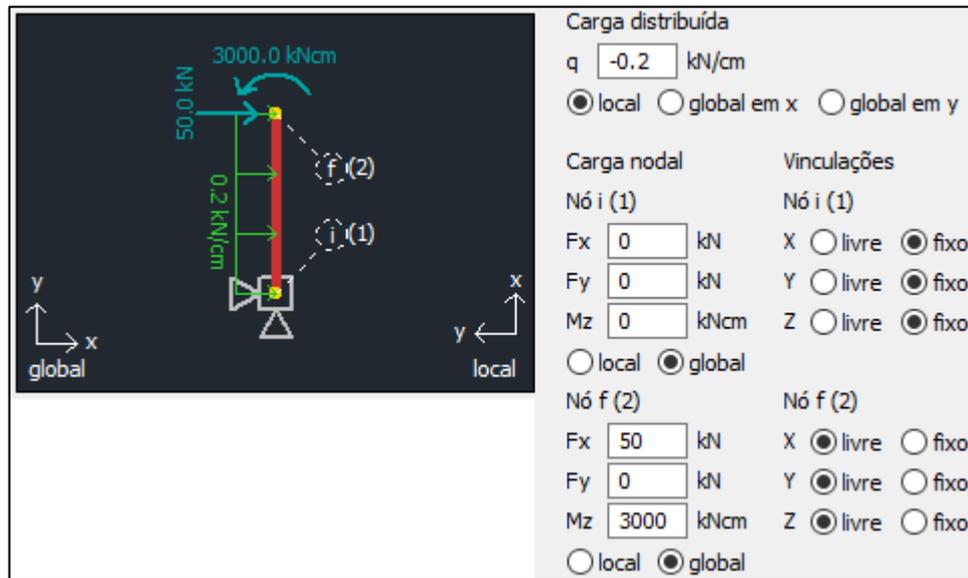
A diferença entre as opções “local” e “global” pode ser facilmente percebida ao inserir uma carga, e girar a barra continuamente com os botões do ângulo “<”. Com a opção “local” selecionada, a carga irá “girar” concomitantemente à barra. Já ao marcar a opção “global”, a carga irá manter sua direção independentemente da barra. Esse teste pode ser feito também com a carga distribuída, que irá se comportar da mesma maneira.

Ainda na Figura 27, pode-se perceber que ao lado dos rótulos “Nó i” e “Nó f” há um número, que indica qual o índice deste nó na estrutura global, da mesma maneira que na janela de visualização da barra. Também, os valores inseridos na carga distribuída e nas cargas nodais do nó final são os da estrutura exemplo.

5.2.3 Vinculações

O usuário pode aplicar restrições vinculares nos nós inicial e final da barra utilizando as opções à direita no painel de edição da barra, conforme Figura 30.

Figura 30 – Barra 1 com cargas inseridas e vinculações aplicadas.



(fonte: elaborado pelo autor)

No painel das vinculações, à direita, é possível restringir deslocamentos nas 3 direções: “X” e “Y” para deslocamentos lineares, e “Z” para deslocamentos angulares (rotações). Ao selecionar “fixo” para uma direção, o deslocamento nela será restringido, e automaticamente o desenho da barra é atualizado com a simbologia de vinculação utilizada por Martha (2004), como foi visto na Figura 2 na seção 3.1. Além disso, a convenção adotada pelo DESLOCA é de vinculações sempre nas direções do eixo de coordenadas global.

5.3 INFORMAÇÕES CALCULADAS DA BARRA

À direita do painel de visualização e edição da barra, o DESLOCA oferece o painel de informações calculadas da barra. Os valores mostrados são calculados automaticamente durante a edição das barras, e são mostrados apenas as informações da barra atualmente selecionada. Este campo possui dois conjuntos de informações: matrizes de rigidez com vetores de cargas nodais equivalente, e forças nas extremidades da barra. O usuário pode selecionar entre os dois modos com o botão de lista acima neste painel.

5.3.1 Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes

Ao seleccionar “Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalente” no botão de lista acima (já seleccionado por padrão ao iniciar o DESLOCA), o painel apresenta, em forma de tabelas, matrizes e vetores com informações da barra, como visto na Figura 31 para a barra 1 que foi configurada anteriormente.

Figura 31 – Painel de informações calculadas da barra 1, mostrando matrizes e vetores.

The screenshot displays a software interface with the following data:

Matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes

Matriz de rotação
 Matriz de rotação transposta

em coordenadas locais

	Matriz de Rigidez						Vetor de cargas nodais equiv.							
	i			f										
	3000.0	0.0	0.0	-3000.0	0.0	0.0	0.0	40.0	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
i	0.0	30.0	6000.0	0.0	-30.0	6000.0	-40.0	0.0	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.0	6000.0	1600000.0	0.0	-6000.0	800000.0	-2666.7	0.0	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
f	-3000.0	0.0	0.0	3000.0	0.0	0.0	0.0	40.0	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	0.0	-30.0	-6000.0	0.0	30.0	-6000.0	-40.0	0.0	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00
	0.0	6000.0	800000.0	0.0	-6000.0	1600000.0	2666.7	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

em coordenadas globais

	Matriz de Rigidez						Vetor de cargas nodais equiv.							
	1			2										
	30.0	0.0	-6000.0	-30.0	0.0	-6000.0	40.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.0	3000.0	0.0	0.0	-3000.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	-6000.0	0.0	1600000.0	6000.0	0.0	800000.0	-2666.7	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	-30.0	0.0	6000.0	30.0	0.0	6000.0	40.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.0	-3000.0	0.0	0.0	3000.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	-6000.0	0.0	800000.0	6000.0	0.0	1600000.0	2666.7	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(fonte: elaborado pelo autor)

Este painel mostra as principais informações da barra seleccionada calculadas sob o Método dos Deslocamentos. Acima, é possível perceber a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes, ambos em coordenadas locais; abaixo, os mesmos são mostrados em coordenadas globais.

Os valores apresentados são calculados internamente utilizando as fórmulas dos coeficientes da matriz de rigidez em coordenadas locais apresentados no Anexo B, e as fórmulas das forças de engastamento perfeito usados no vetor de cargas nodais equivalente em coordenadas locais apresentados no Anexo A. Já a matriz e o vetor em coordenadas globais são calculados pelas equações vistas nas seções 3.2.1 e 3.2.2. Importante ressaltar que nestes vetores de cargas nodais equivalentes não são levadas em conta as cargas nodais, apenas as distribuídas. As cargas nodais apenas interferem no vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, como visto na seção 5.6.1.

Um detalhe que o DESLOCA apresenta é a indicação das “super-células” das matrizes de rigidez (ver Figura 5, seção 3.2.1) da barra, pintando a tabela num padrão xadrez. Na matriz em coordenadas locais, acima e à esquerda são indicados os nós “i” e “f”, de modo que, por exemplo, a primeira super-célula seja a K_{ii} , ou seja, a demonstração da relação entre as cargas do nó “i” inicial da barra e as deslocabilidades desse mesmo nó. O mesmo é apresentado para a matriz em coordenadas globais, com a numeração dos nós globais da estrutura. Por exemplo, a super-célula acima à direita (em cor cinza) é a K_{12} , que representa a relação entre as cargas aplicadas no nó 1 e os deslocamentos nodais do nó 2.

Ainda, à direita, o usuário pode ver a matriz de rotação e sua versão transposta, ambas utilizadas nas operações para converter coordenadas locais em globais e vice-versa. Para “economizar” espaço na interface, elas ocupam a mesma tabela, então basta o usuário selecionar qual deseja ver nas opções acima dela.

Como os valores nestas tabelas são calculados dinamicamente, o usuário pode experimentar editar a barra e ver quais características dela alteram quais campos das matrizes e vetores. Por exemplo, ao girar a barra com as setas do ângulo “<”, as alterações acontecem na matriz de rotação e sua transposta (por serem construídas simplesmente pelo seno e cosseno do ângulo da barra) e, por consequência, na matriz de rigidez e no vetor de cargas nodais equivalentes em coordenadas globais.

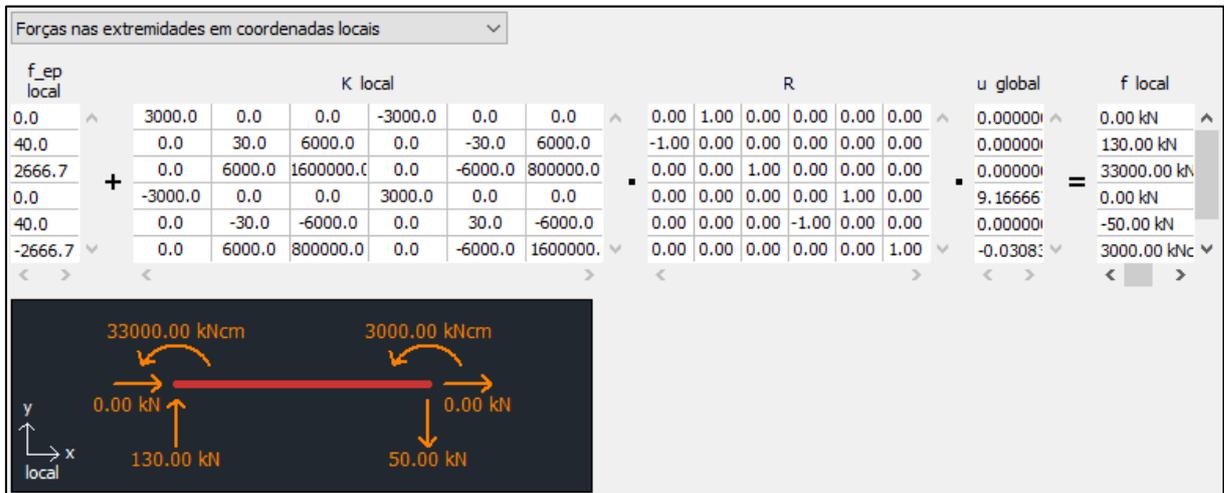
Por conta das limitações da interface, os valores calculados presentes nestas tabelas (e nas demais mostradas ao longo deste manual) podem ficar grandes demais a ponto de dificultar a visualização correta dos mesmos. Para contornar isso, o usuário pode clicar na célula que desejar, e então este valor é apresentado integralmente na parte inferior do programa na barra de mensagens. Ainda, para auxiliar em cálculos adicionais que o usuário queira fazer, ao clicar em uma célula o valor é automaticamente copiado para a área de transferência do computador, que poderá então ser colado em outros programas.

5.3.2 Forças nas extremidades da barra

Ao selecionar “Forças nas extremidades em coordenadas locais” no botão de lista acima no painel de informações calculadas da barra, o DESLOCA apresenta, em forma de tabelas, matrizes e vetores compondo a equação responsável pelas forças nas extremidades da barra em

coordenadas locais e uma nova janela com o desenho destas forças na barra selecionada, como visto na Figura 32 para a barra 1.

Figura 32 – Painel de informações calculadas da barra 1, mostrando forças nas extremidades.



(fonte: elaborado pelo autor)

Este modo do painel apresenta tabelas dinâmicas com os vetores e matrizes utilizadas na formulação das forças nas extremidades da barra em coordenadas locais, vista na seção 3.2.4, onde:

f_{ep} local = vetor de forças de engastamento perfeito da barra atual em coordenadas locais;

K local = matriz de rigidez da barra em coordenadas locais;

R = matriz de rotação da barra;

u global = vetor de deslocamentos nodais da barra em coordenadas globais (obtido após a solução do sistema de equações da estrutura, visto na seção 5.6);

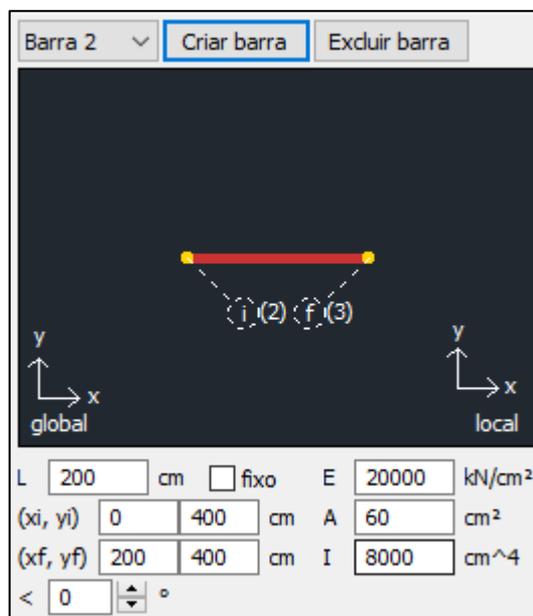
f local = vetor de forças nas extremidades da barra em coordenadas locais, que são um dos resultados finais (*output*) do DESLOCA.

O painel também apresenta uma janela de visualização da barra com suas forças nas extremidades inicial e final, numa configuração em coordenadas locais. Nota-se que o tamanho da barra desenhada é fictício e fixo, apenas para fins gráficos do programa.

5.4 CRIAÇÃO E EXCLUSÃO DE NOVAS BARRAS

Para seguir seu propósito didático, o DESLOCA possibilita a criação e manipulação de diversas barras em uma mesma estrutura. Assim, na parte superior à esquerda do programa ele fornece os botões “Criar barra” e “Excluir barra”. Ao clicar para criar uma nova barra, o programa gera uma barra com comprimento padrão (200 cm), utilizando as coordenadas do nó final da última barra selecionada como coordenadas do nó inicial desta nova barra, de modo que as duas já permaneçam conectadas. Também, o programa automaticamente coloca a nova barra como visível, conforme a Figura 33.

Figura 33 – Nova barra criada.

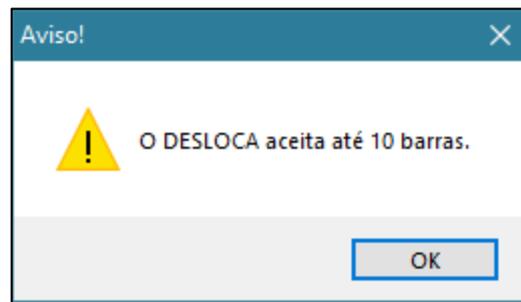


(fonte: elaborado pelo autor)

Na figura é possível ver a barra nova, 2, com suas coordenadas (definidas no processo dito anteriormente), e suas propriedades, cujos valores são os mesmos da barra selecionada previamente – o que facilita a criação de uma estrutura inteira de barras já conectadas e com a mesma área de seção, momento de inércia e módulo de elasticidade. Além disso, a barra é criada sem cargas e sem restrições vinculares, para que o usuário decida os valores e opções que preferir, respectivamente.

O usuário pode criar até 10 barras no DESLOCA, pois estruturas maiores não poderiam ser perfeitamente visualizadas na janela de desenho da estrutura. Caso tente criar mais, uma janela de erro, como a da Figura 34, aparecerá.

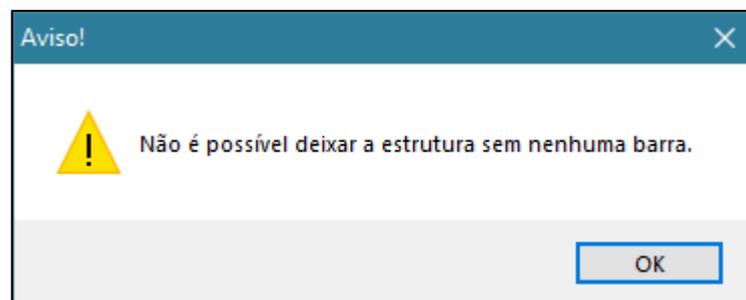
Figura 34 – Janela de aviso de limite de barras.



(fonte: elaborado pelo autor)

Além de criar barras novas, o DESLOCA permite excluir barras existentes. Basta o usuário selecionar qual barra quer eliminar, utilizando o botão de seleção de barra no canto superior esquerdo, e então clicar “Excluir barra”. Isto faz com que o número de identificação das barras seguintes diminua em 1, por exemplo, ao excluir a barra 2, a barra 3 se torna a nova barra 2, a barra 4 se torna a nova barra 3, etc. No entanto, o DESLOCA proíbe a exclusão da barra caso ela seja a única da estrutura, e caso o usuário tente o fazer, uma janela de aviso, como a da Figura 35, abrirá.

Figura 35 – Janela de aviso de proibição de exclusão da última barra



(fonte: elaborado pelo autor)

Assim, é possível continuar o procedimento deste capítulo, de replicar a estrutura exemplo proposta. Então se cria uma barra 2, e se edita suas dimensões e propriedades, como visto na Figura 36, ficando, assim, com a estrutura idêntica à do exemplo estudado.

Figura 36 – Barra 2 com suas características.

Barra 2

Carga distribuída
 q kN/cm
 local global em x global em y

Carga nodal
 Nó i (2)
 F_x kN
 F_y kN
 M_z kNcm
 local global

Vinculações
 Nó i (2)
 X livre fixo
 Y livre fixo
 Z livre fixo

Nó f (3)
 F_x kN
 F_y kN
 M_z kNcm
 local global

L cm fixo E kN/cm²
 (xi, yi) cm A cm²
 (xf, yf) cm I cm⁴
 < °

(fonte: elaborado pelo autor)

Para garantir a conexão entre as barras, o usuário deve inserir nas coordenadas da segunda barra (seja no nó inicial ou no final) as mesmas coordenadas do nó da primeira barra em que se deseja fazer a conexão. Neste exemplo, quer-se conectar o nó inicial (poderia ser o final) da barra 2 ao nó final da barra 1, então ambos devem ter os mesmos valores de coordenadas. O DESLOCA utiliza um arredondamento na casa das unidades para checar se existe esta superposição de nós, por exemplo, uma barra com x_i de 0 cm e y_i de 0 cm se conecta com uma outra barra que tenha x_i de 0,4 cm e y_i de 0,4 cm.

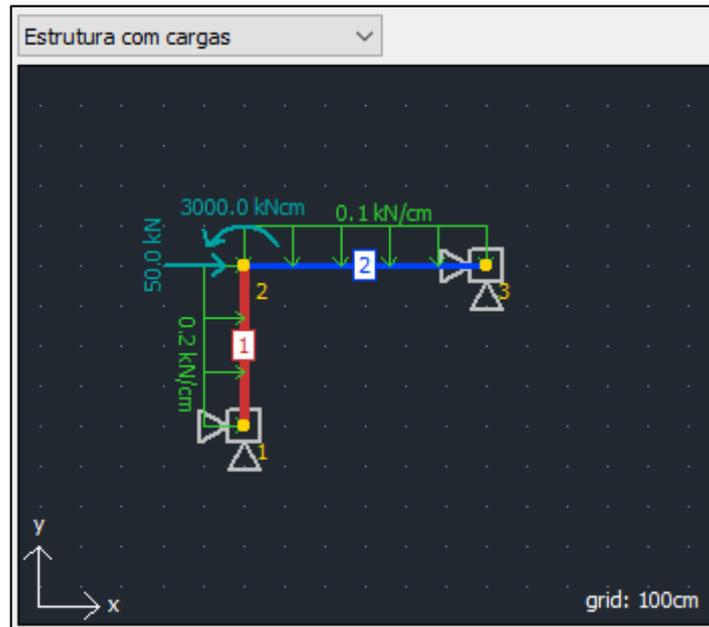
Nota-se que o DESLOCA permite a inserção de cargas nodais somente referenciadas a uma barra, como foi visto na seção 5.2.2. No entanto, para o Método dos Deslocamentos, as cargas nodais são sempre referenciadas aos nós da estrutura. Portanto, não há diferença nos cálculos internos entre inserir as cargas nodais no nó f da barra 1 ou no nó i da barra 2 neste exemplo. No entanto, se forem inseridas cargas em ambos os nós, o DESLOCA calcula uma resultante para o nó global e a mostra na janela de visualização da estrutura, como visto na seção 5.5.

O mesmo acontece para as restrições vinculares. Por exemplo, se a barra 1 tiver restrição em x e y no nó final e a barra 2 tiver restrição em z no nó inicial, e estes nós estiverem conectados, para o nó global resultante desta conexão existe a informação de que todas as direções estão restringidas com vínculos.

5.5 VISUALIZAÇÃO DA ESTRUTURA

A metade inferior da interface do DESLOCA contempla a visualização da estrutura com suas informações calculadas. A primeira é feita com uma janela de desenho similar à de visualização de barras, na parte inferior esquerda do programa, como visto na Figura 37.

Figura 37 – Janela de visualização da estrutura, com cargas e vinculações.

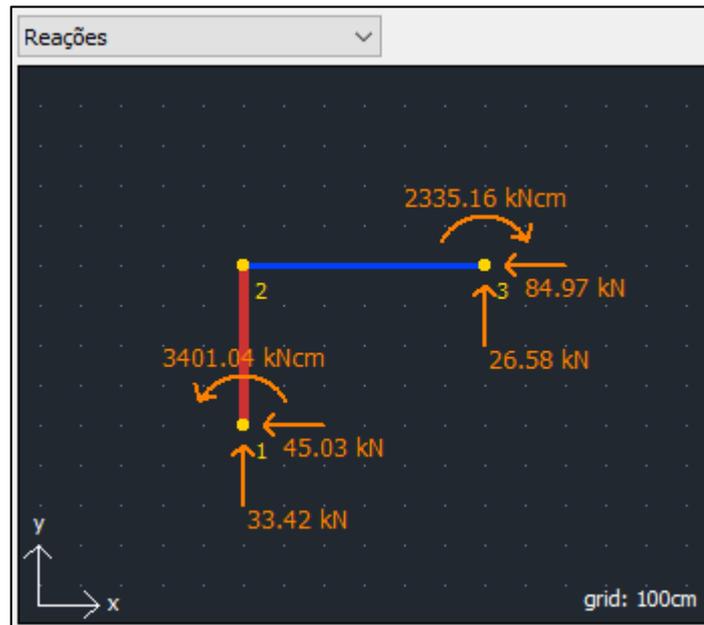


(fonte: elaborado pelo autor)

O painel de visualização da estrutura contempla quatro modos de visualização. O primeiro, “Estrutura com cargas”, selecionado por padrão e visto na figura acima, mostra a estrutura completa, com cargas nodais, distribuídas, vinculações e identificação dos nós e das barras. Estas, estão desenhadas em escala em uma malha de 100 cm x 100 cm – conforme indicado no canto inferior direito. Nota-se também que, tanto para a estrutura completa quanto para as demais opções de visualização, o DESLOCA realça em vermelho a barra atualmente selecionada.

O segundo modo, “Reações”, mostra as reações calculadas após a resolução do sistema de equações da estrutura, indicando apenas nos nós onde há restrições vinculares, como pode ser visto na Figura 38.

Figura 38 – Janela de visualização da estrutura, com reações.

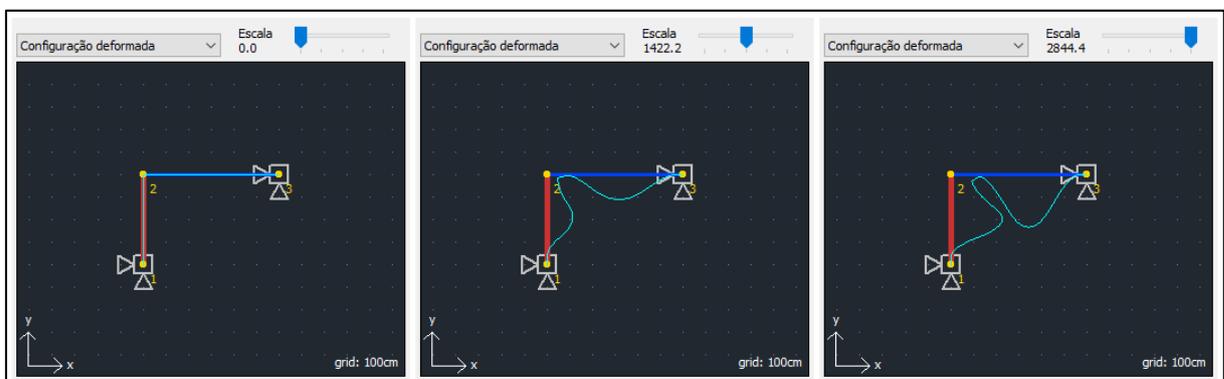


(fonte: elaborado pelo autor)

As reações são indicadas em relação aos eixos da estrutura (coordenadas globais), de modo que uma reação calculada de $-45,03$ kN em x , por exemplo, seja desenhada com uma seta na direção x mas com sentido contrário ao eixo, e mostrando o valor absoluto da reação.

A terceira opção, “Configuração deformada”, mostra a possível linha de deformação da estrutura, através de uma *spline*. Acima da janela aparece um controle deslizante, que permite o usuário alterar a escala da visualização da deformação, como visto na Figura 39 para diferentes escalas.

Figura 39 – Janela de visualização da estrutura mostrando a configuração deformada, em diferentes escalas.

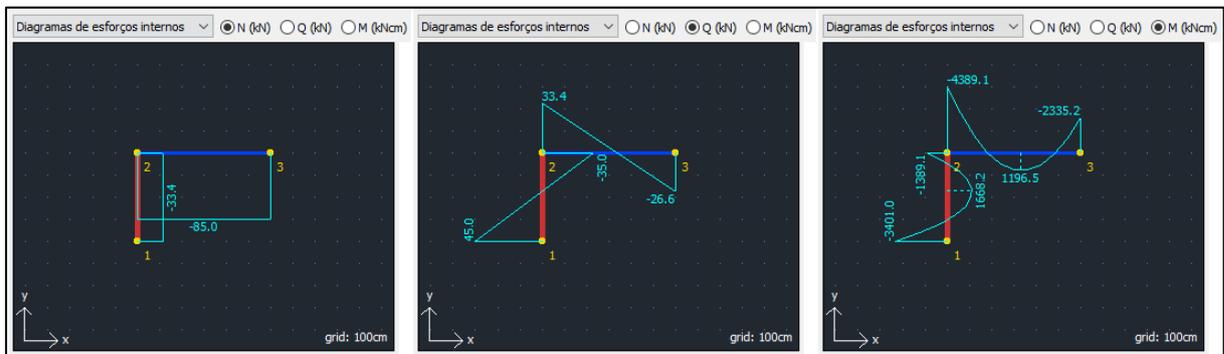


(fonte: elaborado pelo autor)

O usuário pode alternar entre 5 valores de escala: 0, máx/4, máx/2, 3*máx/4 e máx, sendo máx a escala máxima. Esta escala máxima é calculada pelo programa de forma que a maior deformação linear da estrutura fique visível dentro da janela num tamanho adequado, e então as demais deformações são ajustadas proporcionalmente. Neste exemplo, a escala de 2844,4 indica que os deslocamentos calculados estão sendo multiplicados por este valor e só então desenhados na estrutura.

Por fim, o modo de visualização “Diagramas de esforços internos” apresenta os três diferentes diagramas que o DESLOCA calcula, conforme a Figura 40 para as diferentes opções.

Figura 40 – Janela de visualização da estrutura mostrando os diagramas de esforços internos.



(fonte: elaborado pelo autor)

O usuário pode escolher, utilizando os botões de opção acima da janela, entre os três tipos de esforços usualmente calculados para estruturas bidimensionais: “N” para esforço axial em kN, “Q” para esforço cortante em kN, e “M” para momento fletor em kNcm. Nota-se que a convenção de sinais para os diagramas leva em conta o sentido da barra, ou seja, inverter o nó inicial com o nó final faz com os sinais dos diagramas nesta barra também invertam.

5.6 INFORMAÇÕES CALCULADAS DA ESTRUTURA

Ao lado do painel de visualização da estrutura, o DESLOCA apresenta todas as informações calculadas da estrutura. Estes cálculos também são feitos automaticamente durante a edição das barras e montagem da estrutura. Ao centro, é exibida sua matriz de rigidez e, à direita, é mostrada seu vetor de cargas nodais equivalentes e, as deslocabilidades e reações calculadas.

5.6.1 Matriz de rigidez e vetor de cargas nodais equivalentes

A grande tabela mostrada ao centro na parte inferior da interface é o espaço reservado para a matriz de rigidez da estrutura, em coordenadas globais. Ela vem acompanhada de outra tabela, contendo o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, como visto na Figura 41.

Figura 41 - Painel da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura.

Matriz de Rigidez da estrutura														Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura			
														<input checked="" type="radio"/> Resultante <input type="radio"/> Parcela cargas distr. <input type="radio"/> Parcela cargas nodais			
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)	13 (5)	14 (5)	15 (5)		
1 (1)	30,0	0,0	-6000,0	-30,0	0,0	-6000,0	0,0	0,0	0,0							1	40,0
2 (1)	0,0	3000,0	0,0	0,0	-3000,0	0,0	0,0	0,0	0,0							2	0,0
3 (1)	-6000,0	0,0	1600000,0	6000,0	0,0	800000,0	0,0	0,0	0,0							3	-2666,7
4 (2)	-30,0	0,0	6000,0	2696,7	0,0	6000,0	-2666,7	0,0	0,0							4	90,0
5 (2)	0,0	-3000,0	0,0	0,0	3017,8	5333,3	0,0	-17,8	5333,3							5	-30,0
6 (2)	-6000,0	0,0	800000,0	6000,0	5333,3	3733333,3	0,0	-5333,3	1066666,7							6	2666,7
7 (3)	0,0	0,0	0,0	-2666,7	0,0	0,0	2666,7	0,0	0,0							7	0,0
8 (3)	0,0	0,0	0,0	0,0	-17,8	-5333,3	0,0	17,8	-5333,3							8	-30,0
9 (3)	0,0	0,0	0,0	0,0	5333,3	1066666,7	0,0	-5333,3	2133333,3							9	3000,0
10 (4)																10	
11 (4)																11	
12 (4)																12	
13 (5)																13	
14 (5)																14	
15 (5)																15	

(fonte: elaborado pelo autor)

A matriz de rigidez da estrutura é mostrada da mesma maneira que as matrizes das barras: o realce da divisão em “super-células” com um padrão de cores em xadrez, além de realçar em vermelho as super-células em que a barra atua. Esta atuação da barra pode ser vista nos rótulos das linhas e colunas desta tabela sob o seguinte formato: “j (k)”, sendo j o índice da deslocabilidade (ver seção 3.1) e k o respectivo nó. Assim, o nó 1, por exemplo, possui as deslocabilidades 1, 2 e 3 (direções x, y e z, respectivamente), o nó 2 possui as deslocabilidades 4, 5, 6, e assim por diante.

Para a barra 1, seguindo o exemplo, estão realçadas as células das deslocabilidades 1 a 6, logo, os nós 1 e 2. Outra maneira de observar isto é enxergar as super-células K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22} . Já ao selecionar a barra 2, estariam realçadas as super-células K_{22} , K_{23} , K_{32} e K_{33} . Note que ambas as barras “dividem” a super-célula K_{22} da estrutura. Isto significa que esta super-célula está sendo composta (por soma direta, simplesmente) pelas super-células K_{22} de cada barra, vistas no painel de informações calculadas da barra. Esta superposição de super-células é a

representação matemática da conexão entre as barras, necessário para a construção e solução do sistema de equações.

À direita na figura, apresenta-se o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, que é construído com a mesma análise de superposição (soma) de células que representem nós compartilhados entre diferentes barras, como visto na seção 3.2.2. Os rótulos das linhas desta tabela seguem a mesma ordem da matriz, com o formato “j”, sendo j o índice da deslocabilidade.

Neste vetor, são levadas em conta as cargas nodais, que são somadas diretamente nas células que representam o nó onde a carga é aplicada e a direção da força. Por exemplo, aquela carga horizontal de 50 kN aplicada no nó 2 da estrutura foi somada diretamente na célula deste nó nesta direção, logo a célula 4 (nó 2 na direção x ou 1). A consideração das cargas nodais pode ser vista explicitamente selecionando a opção “Parcela cargas nodais”. A Figura 42 mostra as diferentes parcelas que compõem o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura.

Figura 42 – Vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, com as diferentes opções selecionadas.

Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura		Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura		Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura	
<input checked="" type="radio"/> Resultante		<input type="radio"/> Resultante		<input type="radio"/> Resultante	
<input type="radio"/> Parcela cargas distr.		<input checked="" type="radio"/> Parcela cargas distr.		<input type="radio"/> Parcela cargas distr.	
<input type="radio"/> Parcela cargas nodais		<input type="radio"/> Parcela cargas nodais		<input checked="" type="radio"/> Parcela cargas nodais	
1	40.0	1	40.0	1	0.0
2	0.0	2	0.0	2	0.0
3	-2666.7	3	-2666.7	3	0.0
4	90.0	4	40.0	4	50.0
5	-30.0	5	-30.0	5	0.0
6	2666.7	6	-333.3	6	3000.0
7	0.0	7	0.0	7	0.0
8	-30.0	8	-30.0	8	0.0
9	3000.0	9	3000.0	9	0.0
10		10		10	
11		11		11	
12		12		12	
13		13		13	
14		14		14	
15		15		15	

(fonte: elaborado pelo autor)

A opção “Parcela cargas distr.” mostra a parcela responsável unicamente pelas cargas distribuídas, ou seja, é simplesmente a superposição dos vetores de cargas nodais equivalentes

das barras; a opção “Parcela cargas nodais” mostra o valor explícito das cargas nodais, nos nós e direções em que atuam; e a opção “Resultante” mostra a soma das duas parcelas.

A matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura compõem o sistema de equações de equilíbrio da mesma. No entanto, como foi visto na seção 3.2.3, este sistema possui infinitas soluções, então, para se obter as deslocabilidades, são zeradas as linhas e colunas onde as restrições vinculares agem (respeitando o nó onde elas estão aplicadas e a direção delas). Para visualizar o efeito dos vínculos na equação, o usuário deve clicar na caixa “Aplicar condições de contorno”, deixando as tabelas com o formato presente na Figura 43.

Figura 43 – Matriz de rigidez da estrutura e vetor de cargas nodais equivalentes sob restrições vinculares.

Matriz de Rigidez da estrutura														Vetor de cargas nodais equiv. da estrutura			
														<input checked="" type="checkbox"/> Aplicar condições de contorno <input checked="" type="radio"/> Resultante <input type="radio"/> Parcela cargas distr. <input type="radio"/> Parcela cargas nodais			
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)	13 (5)	14 (5)	15 (5)		
1 (1)	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							1	0.0
2 (1)	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							2	0.0
3 (1)	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							3	0.0
4 (2)	0.0	0.0	0.0	2696.7	0.0	6000.0	0.0	0.0	0.0							4	90.0
5 (2)	0.0	0.0	0.0	0.0	3017.8	5333.3	0.0	0.0	0.0							5	-30.0
6 (2)	0.0	0.0	0.0	6000.0	5333.3	3733333.3	0.0	0.0	0.0							6	2666.7
7 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0							7	0.0
8 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0							8	0.0
9 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0							9	0.0
10 (4)																10	
11 (4)																11	
12 (4)																12	
13 (5)																13	
14 (5)																14	
15 (5)																15	

(fonte: elaborado pelo autor)

Com esta configuração, o DESLOCA consegue resolver o sistema de equações, que resulta no valor das deslocabilidades, utilizadas para se obter as reações e as forças nas extremidades das barras em coordenadas locais.

5.6.2 Deslocamentos e Reações

À direita na parte inferior da interface do DESLOCA, estão presentes os resultados numéricos finais do programa: os deslocamentos nodais e as reações calculadas, como visto na Figura 44. Por conta de limitações no espaço do programa, elas dividem a mesma tabela, com o usuário podendo escolher entre as duas marcando a opção desejada acima da tabela.

Figura 44 – Painel de resultados dos DESLOCA.

<input checked="" type="radio"/> Deslocamentos <input type="radio"/> Reações		<input type="radio"/> Deslocamentos <input checked="" type="radio"/> Reações	
D1	x1 = 0.000000 cm	R1	H1 = -45.03 kN
D2	y1 = 0.000000 cm	R2	V1 = 33.42 kN
D3	z1 = 0.000000 rad	R3	M1 = 3401.04 kNcm
D4	x2 = 0.031864 cm	R4	-----
D5	y2 = -0.011141 cm	R5	-----
D6	z2 = 0.000679 rad	R6	-----
D7	x3 = 0.000000 cm	R7	H3 = -84.97 kN
D8	y3 = 0.000000 cm	R8	V3 = 26.58 kN
D9	z3 = 0.000000 rad	R9	M3 = -2335.16 kNcm

(fonte: elaborado pelo autor)

Os deslocamentos nodais – aqui chamados simplesmente de “Deslocamentos” – são apresentados com seus índices, direções, respectivos nós e unidades. Ao marcar a opção “Reações”, elas são as mostradas nesta tabela, seguindo a mesma formatação dos deslocamentos. Tanto os deslocamentos quanto as reações podem ser vistos graficamente na janela de visualização da estrutura, como visto na seção 5.5.

5.6.3 Indeterminação estática

Ao construir uma estrutura no DESLOCA, muitas vezes pode aparecer um aviso de “Estrutura estaticamente indeterminada” na barra de mensagens no extremo inferior do programa, além da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura ficarem vazios, como visto na Figura 45.

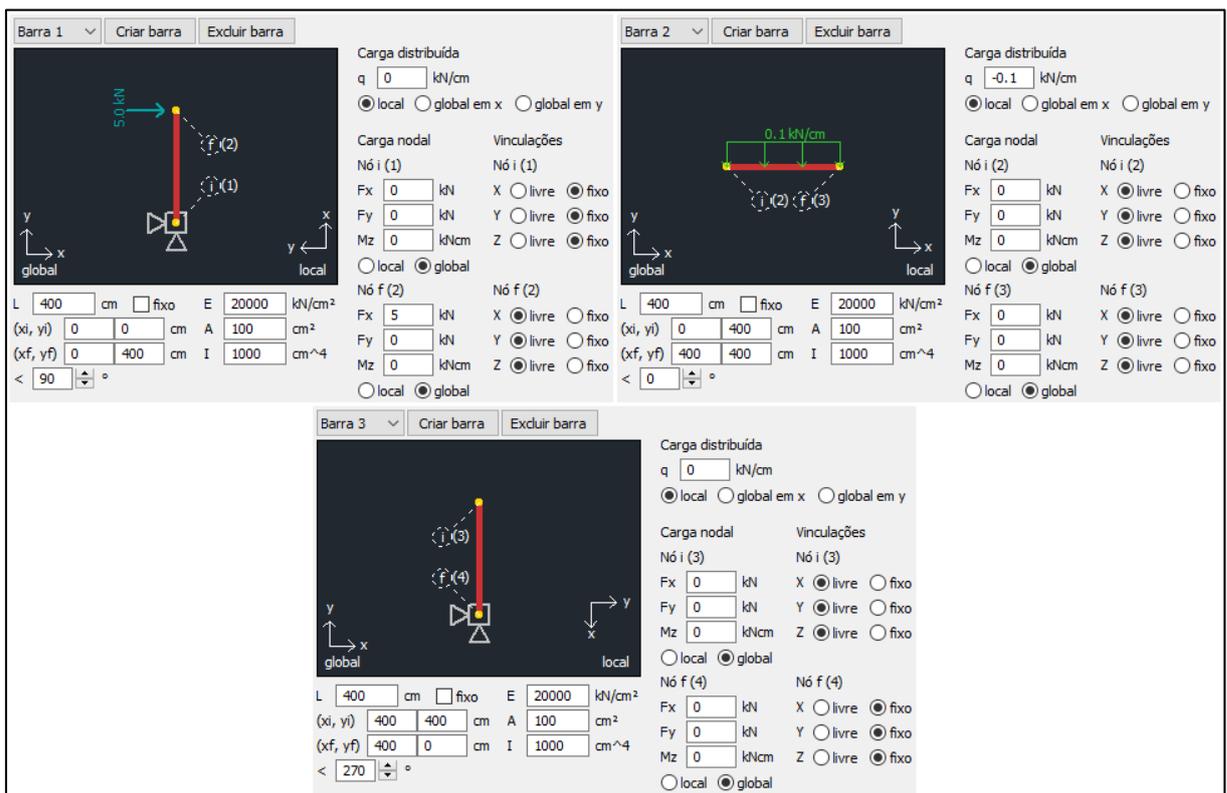
6 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O DESLOCA mostrou-se capaz de manipular barras facilmente para a construção de estruturas bidimensionais simples. Neste capítulo, serão construídas e discutidas duas estruturas comuns: um pórtico simples, e uma treliça pequena.

6.1 PÓRTICO PLANO

Neste exemplo, propõe-se uma estrutura em pórtico plano simples, bi-engastado, com formato quadrado e poucos carregamentos, para então se comparar a aplicação completa (computacional) e a aplicação manual do Método dos Deslocamentos. As configurações das barras deste pórtico proposto podem ser vistas na Figura 46.

Figura 46 – Configurações das três barras do pórtico proposto.

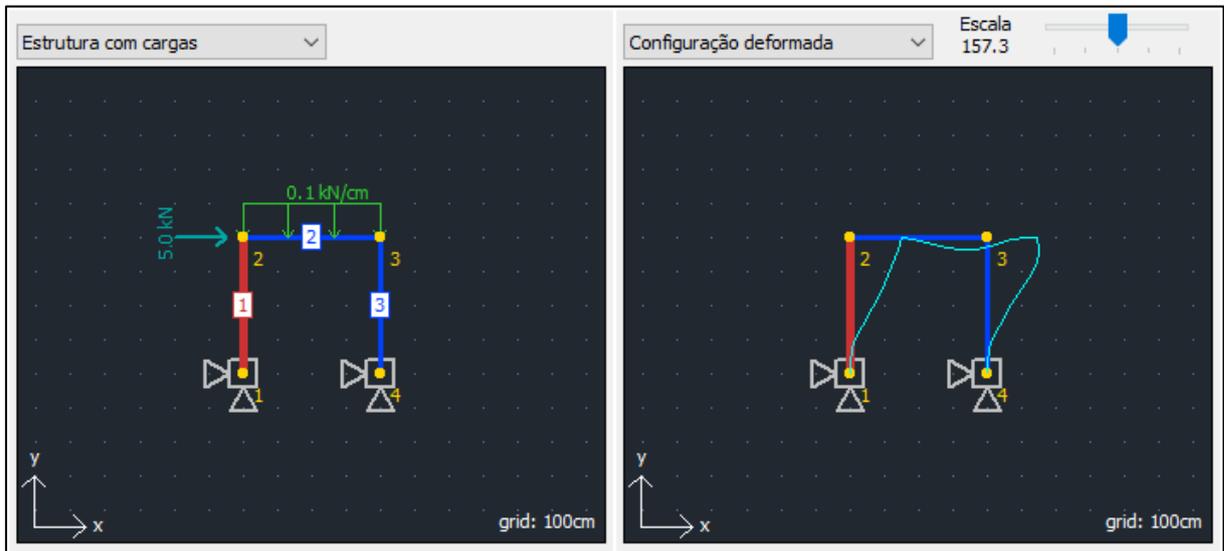


(fonte: elaborado pelo autor)

Nota-se na figura acima a inserção de uma carga nodal de 5 kN no nó final da barra 1 – que poderia também ter sido feito aplicando a carga no nó inicial da barra 2 – e uma carga distribuída

de $-0,1 \text{ kN/cm}$ ao longo da barra 2. A estrutura resultante destas configurações e sua deformada podem ser vistos na Figura 47.

Figura 47 – Visualização do pórtico proposto com cargas e sua configuração deformada.



(fonte: elaborado pelo autor)

Com esta configuração, o DESLOCA calcula os coeficientes de rigidez que compõem as matrizes de rigidez das barras, e por consequência, a matriz de rigidez da estrutura, esta sendo vista na Figura 48.

Figura 48 – Matriz de rigidez da estrutura para o pórtico proposto, com a barra 2 selecionada.

Matriz de Rigidez da estrutura													<input type="checkbox"/> Aplicar condições de contorno
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)	1:
1 (1)	3.8	0.0	-750.0	-3.8	0.0	-750.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
2 (1)	0.0	5000.0	0.0	0.0	-5000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
3 (1)	-750.0	0.0	200000.0	750.0	0.0	100000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
4 (2)	-3.8	0.0	750.0	5003.8	0.0	750.0	-5000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
5 (2)	0.0	-5000.0	0.0	0.0	5003.8	750.0	0.0	-3.8	750.0	0.0	0.0	0.0	
6 (2)	-750.0	0.0	100000.0	750.0	750.0	400000.0	0.0	-750.0	100000.0	0.0	0.0	0.0	
7 (3)	0.0	0.0	0.0	-5000.0	0.0	0.0	5003.8	0.0	750.0	-3.8	0.0	750.0	
8 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.8	-750.0	0.0	5003.8	-750.0	0.0	-5000.0	0.0	
9 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	750.0	100000.0	750.0	-750.0	400000.0	-750.0	0.0	100000.0	
10 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.8	0.0	-750.0	3.8	0.0	-750.0	
11 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-5000.0	0.0	0.0	5000.0	0.0	
12 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	750.0	0.0	100000.0	-750.0	0.0	200000.0	
13 (5)													
14 (5)													
15 (5)													

(fonte: elaborado pelo autor)

Com esta matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, o DESLOCA calcula os deslocamentos para este exemplo, como visto na Figura 49, com a barra 2 selecionada e realçada.

Figura 49 – Deslocamentos calculados para o pórtico proposto.

<input checked="" type="radio"/> Deslocamentos <input type="radio"/> Reações	
D1	x1 = 0.000000 cm
D2	y1 = 0.000000 cm
D3	z1 = 0.000000 rad
D4	x2 = 0.953331 cm
D5	y2 = -0.003572 cm
D6	z2 = -0.005876 rad
D7	x3 = 0.952165 cm
D8	y3 = -0.004428 cm
D9	z3 = 0.003015 rad
D10	x4 = 0.000000 cm
D11	y4 = 0.000000 cm
D12	z4 = 0.000000 rad

(fonte: elaborado pelo autor)

Em uma abordagem manual, as deformações axiais originadas de esforços normais são desprezadas, ou seja, as barras são consideradas como infinitamente rígidas na direção axial. Isso possibilita a redução das deslocabilidades possíveis da estrutura e, por conseguinte, reduz a complexidade do sistema de equações (MASUERO, 2015).

Neste exemplo, a abordagem manual para a barra 2 é de considerar que ela se desloca inteiramente na direção x sem alterar seu comprimento. Para isto, considera-se que os deslocamentos em x do nó 2 e do nó 3 tem o mesmo valor. Para simular isto no DESLOCA, basta inserir um valor alto para as áreas das barras, por exemplo, 1000000 cm². O novo vetor de deslocamentos calculado pode ser visto na Figura 50, com a barra 2 selecionada e realçada.

Figura 50 – Deslocamentos calculados para o pórtico proposto simulando abordagem manual.

<input checked="" type="radio"/> Deslocamentos <input type="radio"/> Reações	
D1	x1 = 0.000000 cm
D2	y1 = 0.000000 cm
D3	z1 = 0.000000 rad
D4	x2 = 0.952381 cm
D5	y2 = -0.000000 cm
D6	z2 = -0.005873 rad
D7	x3 = 0.952381 cm
D8	y3 = -0.000000 cm
D9	z3 = 0.003016 rad
D10	x4 = 0.000000 cm
D11	y4 = 0.000000 cm
D12	z4 = 0.000000 rad

(fonte: elaborado pelo autor)

Nota-se que os deslocamentos D4 e D7, respectivamente os deslocamentos em x do nó 2 e do nó 3, possuem o mesmo valor. Além disso, o deslocamento em y para estes nós resultaram em zero, já que as barras 1 e 3 também são indeformáveis axialmente. Ainda, percebe-se que as rotações nos nós 2 e 3 permaneceram praticamente iguais às da configuração anterior.

Manualmente, a construção da matriz de rigidez da estrutura é mais simples, considerando esta indeformabilidade axial das barras e já desprezando as deformações impedidas pelos vínculos. Assim, a matriz de rigidez resultante, nesta abordagem, fica consideravelmente menor, como visto no esquema da Figura 51.

Figura 51 – Esquema de simplificações da abordagem manual para o pórtico proposto.

	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)	10 (4)	11 (4)	12 (4)
1 (1)	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2 (1)	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3 (1)	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4 (2)	0.0	0.0	0.0	50000003,4	0.0	750.0	50000000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5 (2)	0.0	0.0	0.0	0.0	50000003,4	750.0	0.0	-3.8	750.0	0.0	0.0	0.0
6 (2)	0.0	0.0	0.0	750.0	750.0	400000.0	0.0	-750.0	100000.0	0.0	0.0	0.0
7 (3)	0.0	0.0	0.0	50000000.0	0.0	0.0	50000003,4	0.0	750.0	0.0	0.0	0.0
8 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.8	-750.0	0.0	50000003,4	-750.0	0.0	0.0	0.0
9 (3)	0.0	0.0	0.0	0.0	750.0	100000.0	750.0	-750.0	400000.0	0.0	0.0	0.0
10 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
11 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
12 (4)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

↓

	4 (2)	5 (2)	6 (2)	7 (3)	8 (3)	9 (3)
4 (2)	50000003,75	0	750	-50000000	0	0
5 (2)	0	50000003,75	750	0	-3,75	750
6 (2)	750	750	400000	0	-750	100000
7 (3)	-50000000	0	0	50000003,75	0	750
8 (3)	0	-3,75	-750	0	50000003,75	-750
9 (3)	0	750	100000	750	-750	400000

↓

	4 (2)	6 (2)	7 (3)	9 (3)
4 (2)	50000003,75	750	-50000000	0
6 (2)	750	400000	0	100000
7 (3)	-50000000	0	50000003,75	750
9 (3)	0	100000	750	400000

→

	4 (2) / 7 (3)	6 (2)	9 (3)
4 (2) / 7 (3)	7,5	750	750
6 (2)	750	400000	100000
9 (3)	750	100000	400000

(fonte: elaborado pelo autor)

Este esquema demonstra a sequência de simplificações feitas em uma abordagem manual. Percebe-se na última tabela do esquema que os coeficientes das deslocabilidades 4 e 7 (ou seja, direção x dos nós 2 e 3) foram aglutinados via soma, para simular a indeformabilidade axial da barra 2. O mesmo procedimento é feito com o vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura, o que resulta num sistema de equações de equilíbrio como visto na equação 19.

$$\begin{bmatrix} 7,5 & 750 & 750 \\ 750 & 400000 & 100000 \\ 750 & 100000 & 400000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} D_{4/7} \\ D_6 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1333,3 \\ 1333,3 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 19})$$

Onde:

D_i = Deslocabilidade i (ver Figura 4).

Este sistema de equações pode ser calculado manualmente sem muito esforço. Seu resultado – as deslocabilidades para o pórtico proposto – é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultado das deslocabilidades para o pórtico proposto.

$D_{4/7}$	0,952381 cm
D_6	- 0,005873 rad
D_9	0,003016 rad

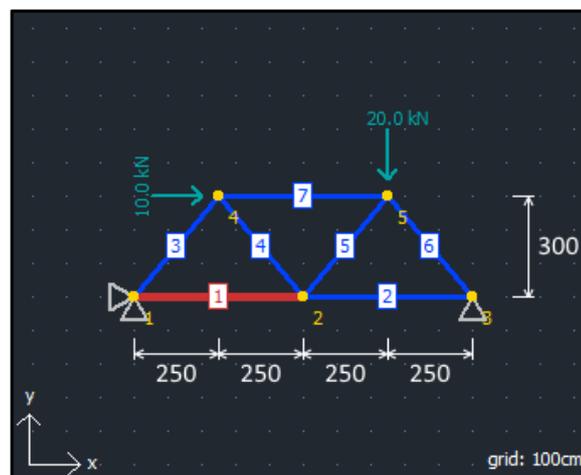
(fonte: elaborado pelo autor)

Nota-se que estes valores são os mesmos encontrados no DESLOCA ao se aplicar áreas de seção grandes, como foi visto na Figura 50. O erro máximo para a abordagem manual nesta estrutura proposta é de aproximadamente 0,10%, o que indica que para estruturas simples como esta a abordagem manual é válida e confiável.

6.2 TRELIÇA PLANA

Neste exemplo, é proposto uma estrutura em pórtico treliçado, para simular uma treliça plana isostática, e então se comparar o resultado de esforços axiais entre o DESLOCA e uma abordagem manual. Para esta aplicação, deve-se inserir cargas apenas nos nós, sem cargas distribuídas ao longo das barras. Além disso, considera-se que apenas há deslocamentos lineares, ou seja, as rotações dos nós são desprezadas (MASUERO, 2015). A treliça proposta pode ser vista na Figura 52, com a indicação das dimensões da estrutura.

Figura 52 – Visualização da treliça proposta com cargas e dimensões.



(fonte: elaborado pelo autor)

Nesta estrutura, foram criadas barras com módulo de elasticidade $E = 20000 \text{ cm}^2$, área de seção $A = 10 \text{ cm}^2$ e momento de inércia $I = 1000 \text{ cm}^4$. Por ser uma estrutura isostática, esta treliça pode ser facilmente resolvida com as equações de equilíbrio 20, 21 e 22.

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{equação 20})$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{equação 21})$$

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{equação 22})$$

Onde:

F_x = forças na direção x;

F_y = forças na direção y; e

M_z = momentos na direção z.

Ao aplicar estas equações de equilíbrio, obtém-se as reações nos nós onde há restrições vinculares, como visto na Tabela 4. Estas equações também são utilizadas no Método dos Nós, utilizado em treliças para se calcular o esforço axial das barras.

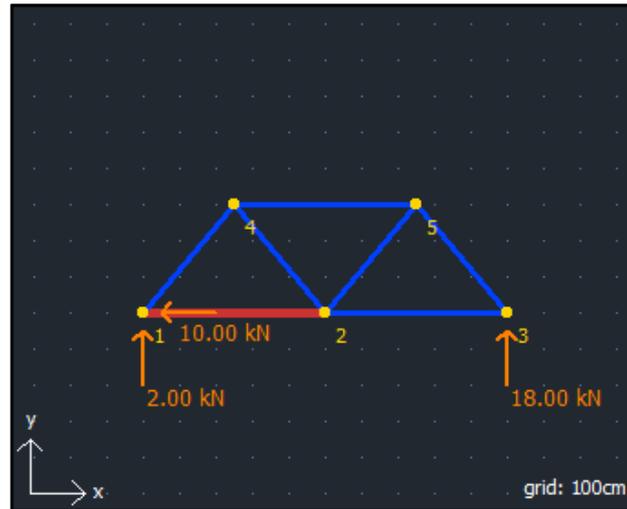
Tabela 4 – Resultado das reações para a treliça proposta.

H_1	-10 kN
V_1	2 kN
V_3	18 kN

(fonte: elaborado pelo autor)

O DESLOCA aplica o Método dos Deslocamentos em um pórtico treliçado da mesma maneira que em outras estruturas. Assim, o programa calcula deslocamentos e reações, estas vistas na Figura 53 para a treliça proposta.

Figura 53 – Visualização da treliça proposta com reações.

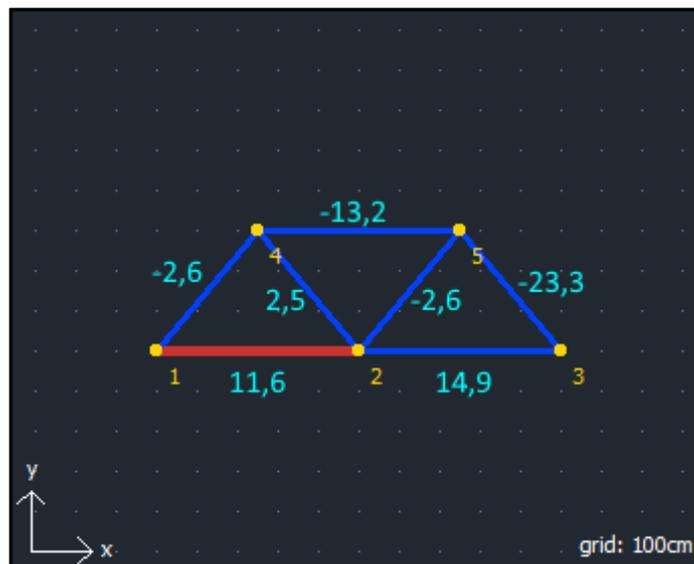


(fonte: elaborado pelo autor)

Nota-se que os valores mostrados são os mesmos calculados através das equações de equilíbrio convencionais, como foi visto na Tabela 4. Estes valores podem ser vistos também na tabela de resultados, à direita na interface do programa.

Além disso, o DESLOCA calcula o esforço axial para cada barra, que é o resultado geralmente buscado na análise estrutural de treliças. Na Figura 54 é possível ver os valores de esforço axial na janela de visualização da estrutura – a imagem foi manipulada para a melhor visualização dos valores.

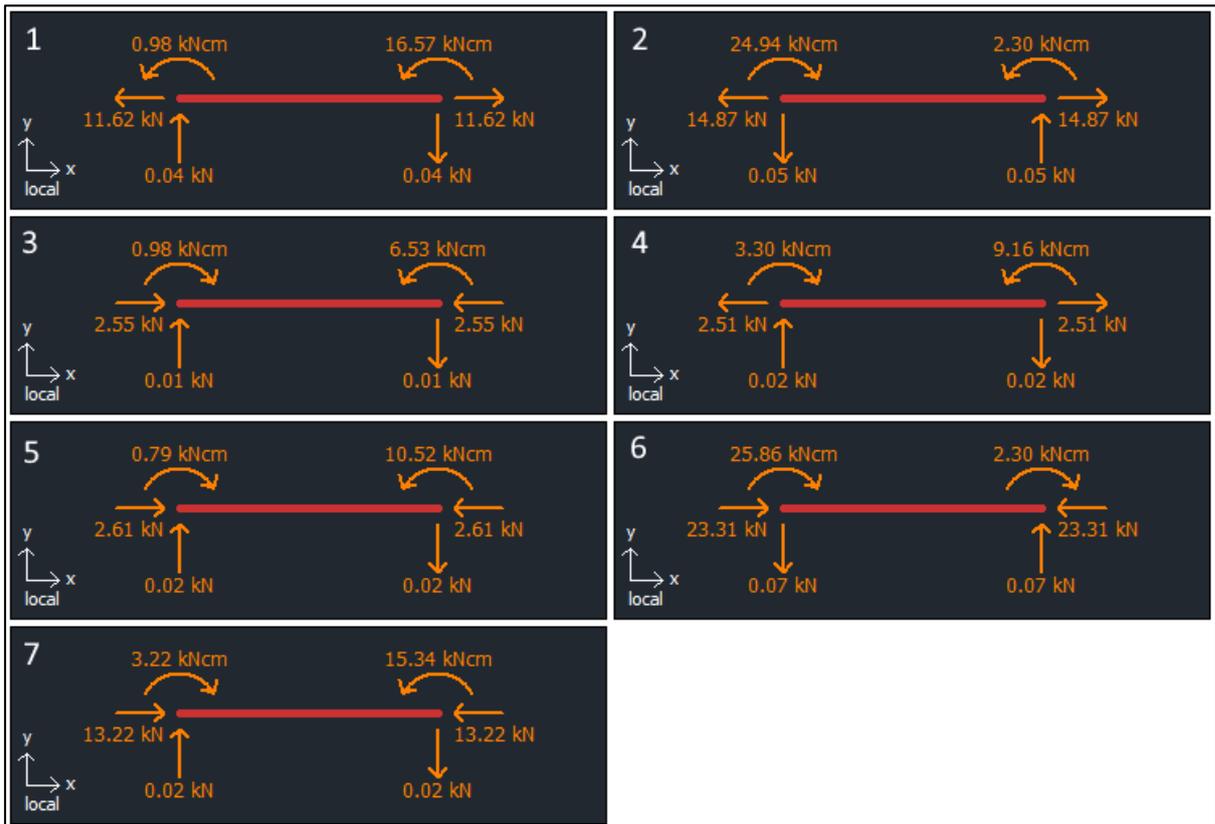
Figura 54 – Esforços axiais calculados para a treliça proposta.



(fonte: elaborado pelo autor)

Outra maneira de visualizar estes esforços axiais é selecionar a opção “Forças nas extremidades em coordenadas locais” na parte superior da interface do DESLOCA. Assim, ao passo que o usuário seleciona as barras, ele pode ver as forças nas extremidades da mesma em coordenadas locais, atentando para a força na direção x, que representa o esforço axial, como visto na Figura 55.

Figura 55 – Forças nas extremidades de todas as barras da treliça proposta.



(fonte: elaborado pelo autor)

Esta visualização auxilia na análise se as barras estão comprimidas (setas em x no sentido interno da barra) ou tracionadas (setas em x no sentido externo da barra). Estes valores de esforço axial podem ser comparados com uma abordagem manual de análise estrutural de treliças, onde se aplica o Método dos Nós, chamado também de Método de Cremona (SÜSSEKIND, 1987). Os resultados para esta aplicação manual podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultado dos esforços axiais para a treliça proposta.

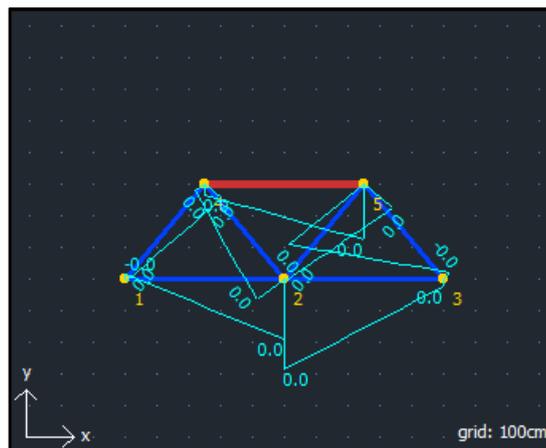
N ₁	11,66 kN
N ₂	14,96 kN
N ₃	-2,60 kN
N ₄	2,58 kN
N ₅	-2,58 kN
N ₆	-23,38 kN
N ₇	-13,32 kN

(fonte: elaborado pelo autor)

Ao se comparar estes valores calculados manualmente com os valores calculados pelo DESLOCA, nota-se que o programa consegue simular uma treliça plana sem dificuldade e com resultados bem próximos do esperado.

No entanto, para simular com mais precisão uma treliça plana, é interessante inserir um momento de inércia irrisório para todas as barras, para garantir que as mesmas não tenham solicitações de momento fletor. Ao fazer este procedimento, é possível ver os diagramas de momento fletor das barras no painel de visualização da estrutura, como visto na Figura 56.

Figura 56 – Diagramas de momento fletor da treliça proposta.



(fonte: elaborado pelo autor)

Os valores mostrados para momento fletor de cada barra no desenho são ínfimos, simulando, portanto, o comportamento esperado de treliças planas, ressaltando o sucesso do DESLOCA frente a variados tipos de estrutura

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho expôs os conceitos principais do Método dos Deslocamentos com um enfoque computacional, para embasar o desenvolvimento do DESLOCA, uma ferramenta didática voltada para o ensino e a aplicação do mesmo. Pôde-se observar a simplicidade do Método, visto que a construção da matriz de rigidez para uma barra é um processo padronizado, além dos coeficientes de rigidez e reações de engastamento serem tabelados.

Foi exposto o comparativo entre a abordagem computacional – a que vai ser utilizada no programa – e a manual, mostrando que a diferença está em simplificações que reduzem drasticamente o número de incógnitas (deslocabilidades), simplificando a resolução manual. Além disso, dentre os diversos métodos de análise estrutural, o Método dos Deslocamentos é o mais adequado para a abordagem computacional, pela sua simplicidade de implementação em códigos de programação.

O DESLOCA atingiu um resultado satisfatório, por seguir os princípios que moldaram os protótipos iniciais e que definiram o formato e interface do programa. O foco do desenvolvimento dele foi na missão didática que se propôs, sendo de uso intuitivo e natural pelo usuário, seguindo os conceitos do Método dos Deslocamentos e atendendo as necessidades e criatividade dos usuários. Além disso, a maioria das funcionalidades propostas no período de elaboração e prototipagem da interface foram desenvolvidas com sucesso. Ainda, o programa permitiu a simulação da abordagem manual do Método, dentro de algumas limitações.

Finalmente, o DESLOCA abre margem para diversas melhorias e trabalhos futuros. As principais funcionalidades que o programa poderia ter são:

- Botões de ajuda para mostrar explicitamente os cálculos que o programa faz sob o Método dos Deslocamentos, por exemplo o cálculo de cada coeficiente de rigidez das matrizes;
- Manipulação das barras e da estrutura diretamente na janela de visualização delas, que facilita imensamente a construção da estrutura, da mesma maneira que ocorre no Ftool e no STRIAN;
- Possibilidade de ampliar ou diminuir a visualização da estrutura (função zoom), permitindo um número maior de barras que podem ser trabalhadas e estruturas com dimensões mais variadas;

- Opção para salvar o projeto em um arquivo, para poder ser reaberto no programa em outro momento;
- Opção para salvar uma imagem da estrutura construída, que pode ser utilizada em aulas e trabalhos;
- Opção de exportar/importar a estrutura para/de um arquivo no formato do Ftool, para permitir a comunicação entre os dois programas;
- Mais artifícios didáticos para expor os conceitos do Método dos Deslocamentos;
- Mostrar ao usuário as diferenças entre abordagem computacional e manual para a estrutura montada, explicando que tipos de simplificações são feitas;
- Incluir uma opção “Como utilizar”, que mostrará um manual do programa similar ao apresentado no capítulo 5;
- Um método mais simples para a execução do programa; e
- Possibilidade de interface 3D, permitindo a criação de estruturas tridimensionais, como grelhas, pórticos espaciais, etc.

8 REFERÊNCIAS

IERUSALIMSKY, R. **Programming in Lua**, 4 ed, Lua.org [s. l.], 2016.

WINWOOD, P.; LABENSKI, J. **wxLua: wxWidgets bindings for Lua**, 2013. Disponível em: <<http://wxlua.sourceforge.net>>. Acesso em: 16 abr. 2018.

MARTHA, L. F. **Métodos Básicos de Análise de Estruturas**, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.

_____. (em preparação) **Análise Matricial de Estruturas: Aplicada a Modelos Lineares**, Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.

_____. **Ftool: Two-Dimensional Frame Analysis Tool**, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Tecgraf, 2002. Disponível em: <<https://www.alis-sol.com.br/Ftool>>. Acesso em: 10 out. 2017.

MASUERO, J. R. **Método dos Deslocamentos: Abordagem Computacional e Manual**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, mar./jul. 2015. 21 p. Notas de Aula.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**, 2. ed. 2000. Disponível em: <<http://digitalcommons.bucknell.edu/books/7>>. Acesso em: 2 nov. 2017.

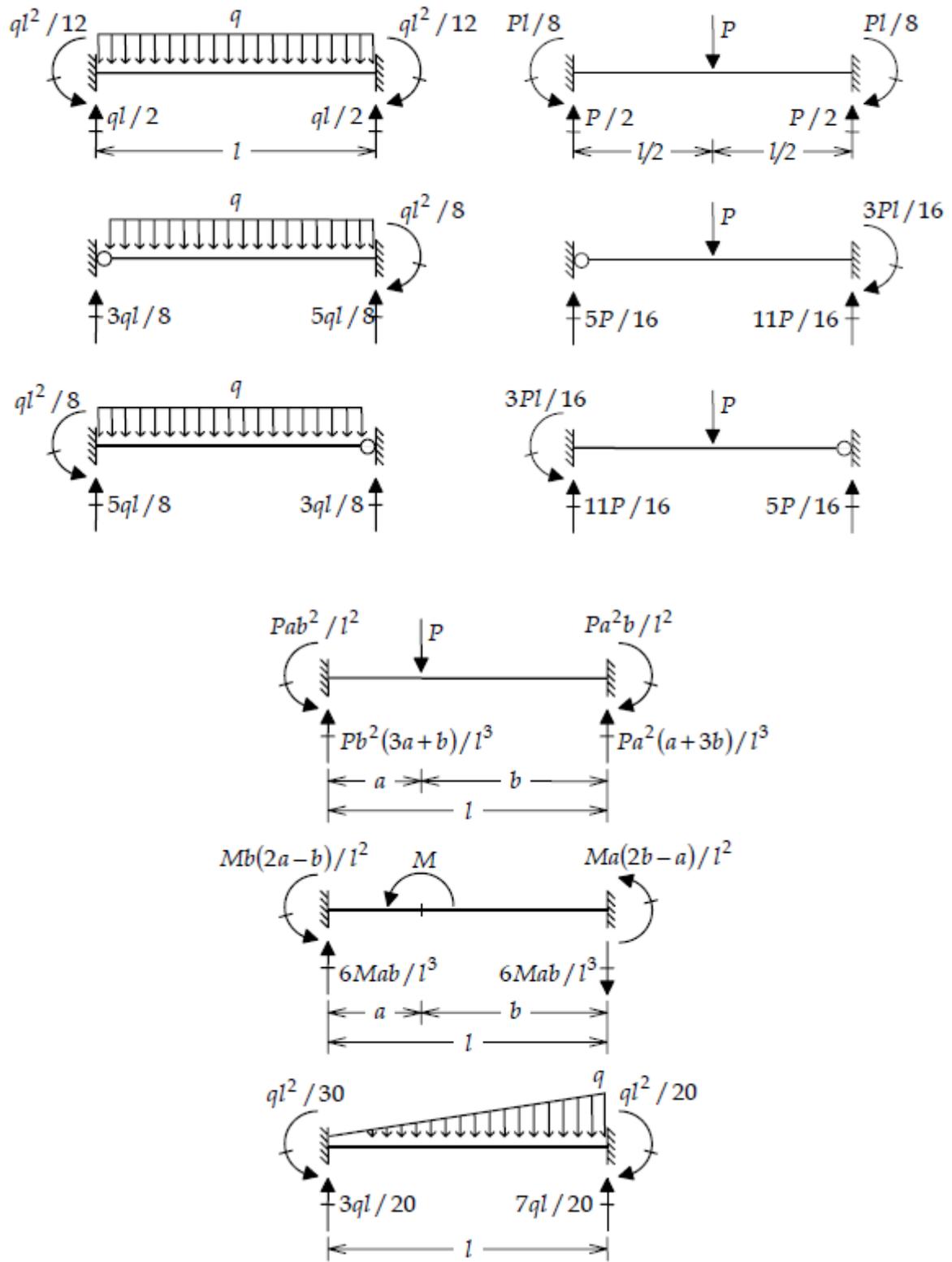
NISKIER, C. M.; RIBEIRO, F. S. de M. **eMetDes: Ferramenta para o Ensino do Método dos Deslocamentos**, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/etools/metdes>>. Acesso em: 18 out. 2017.

STIBOR, M.; FRANTÍK, P. **STRAN: Online Structural Analyser**, 2015. Disponível em: <<http://structural-analyser.com/>>. Acesso em: 8 nov. 2017.

SÜSSEKIND, L. C. **Curso de análise estrutural**, 7. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987. v. 1 e 3.

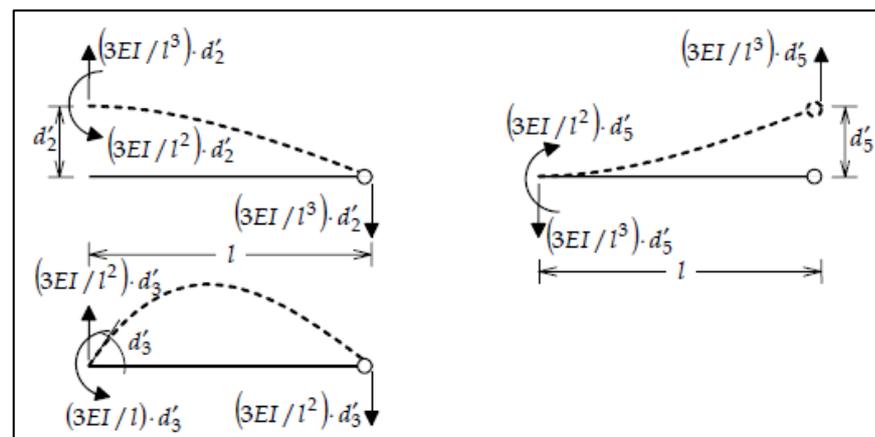
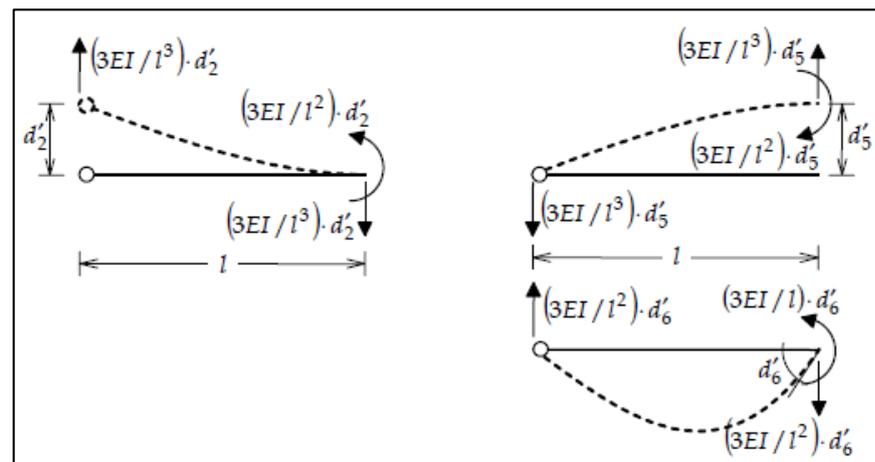
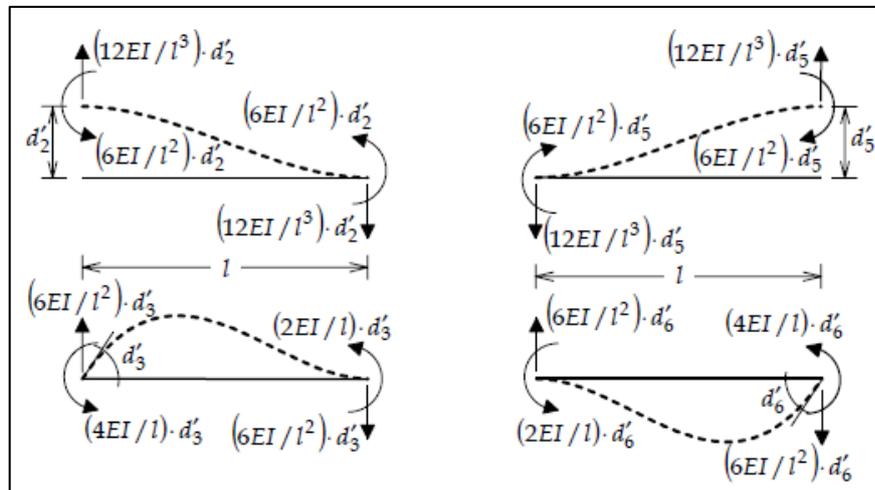
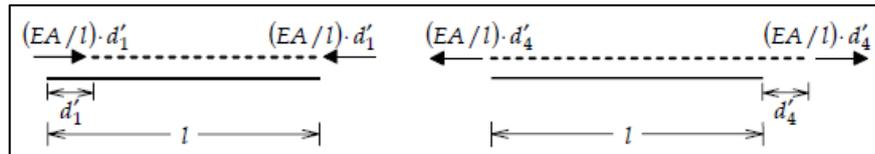
APÊNDICE A – Interface final do DESLOCA

ANEXO A – Reações de Engastamento Perfeito

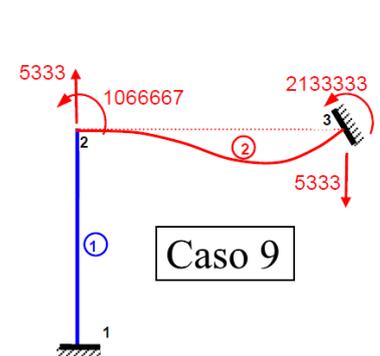
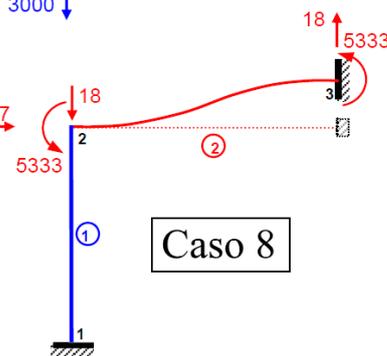
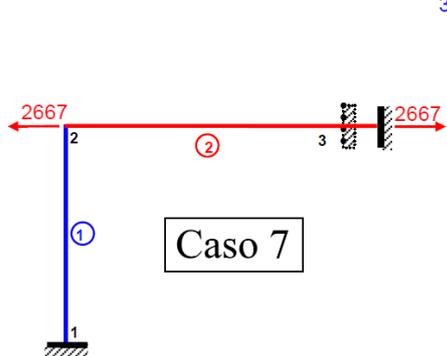
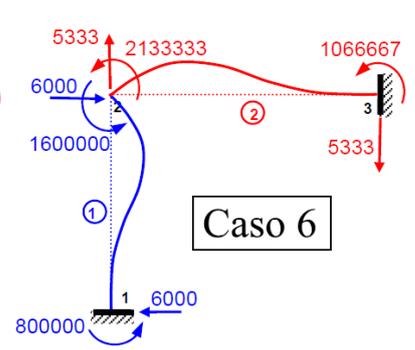
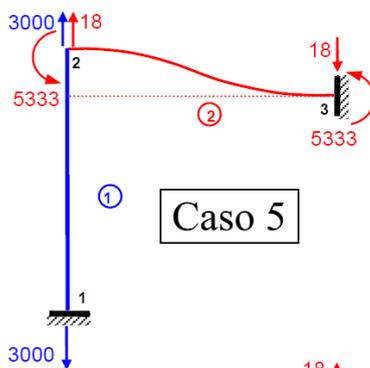
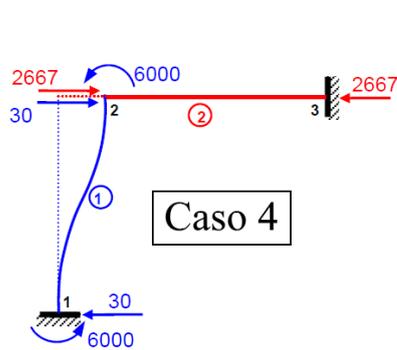
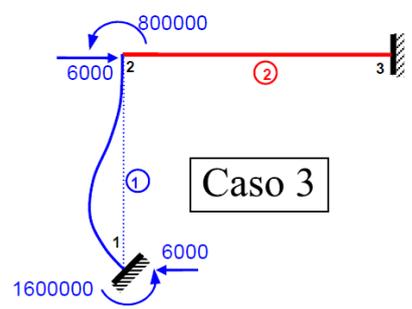
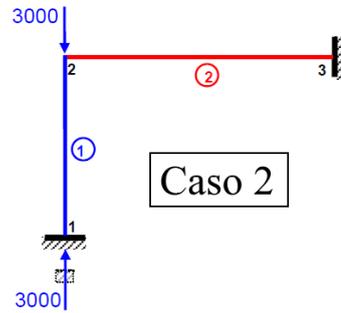
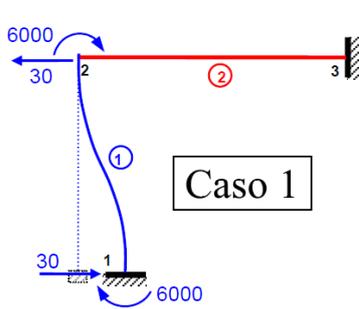
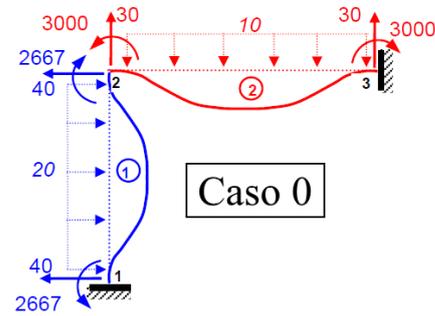
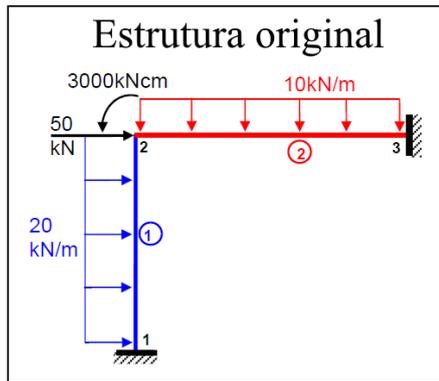


(fonte: MARTHA, 2004, p. 128, 129)

ANEXO B – Coeficientes de Rigidez



ANEXO C – Casos Básicos da Estrutura Exemplo



(fonte: adaptado de MASUERO, 2015, p. 18)