

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS,  
METALÚRGICA E DE MATERIAIS**

**GUSTAVO ALEXANDRE SILVA**

**MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE TERRAS-  
RARAS (MCRM-TR) E ESTUDO DE CASO BRASIL**

Porto Alegre

2018

**GUSTAVO ALEXANDRE SILVA**

**MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE TERRAS-  
RARAS (MCRM-TR) E ESTUDO DE CASO BRASIL**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração: Tecnologia Mineral

Subárea: Economia Mineral

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Otávio Petter**

**Coorientador: Prof. Dr. Nelson Rodrigues de Albuquerque**

Porto Alegre

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Carlos Alexandre Netto

Vice-Reitor: Rui Vicente Oppermann

ESCOLA DE ENGENHARIA

Diretora: Denise Carpena Dal Molin

Vice-Diretor: Carlos Eduardo Pereira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Coordenador: Prof. Dr. Carlos Pérez Bergmann

Vice-Coordenador: Prof. Dr. Afonso Reguly

### CIP - Catalogação na Publicação

Silva , Gustavo Alexandre

MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE  
TERRAS RARAS (MCRM-TR) E ESTUDO DE CASO BRASIL /  
Gustavo Alexandre Silva . -- 2018.

403 f.

Orientador: Carlos Otávio Petter.

Coorientador: Nelson Rodrigues Albuquerque.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de  
Materiais, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Competitiveness model. 2. Competitiveness  
factors. 3. Mining of rare earths. 4. Simulation of  
Monte Carlo. 5. Risk. I. Petter, Carlos Otávio,  
orient. II. Albuquerque, Nelson Rodrigues,  
coorient. III. Título.

**GUSTAVO ALEXANDRE SILVA**

**MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE TERRAS-  
RARAS (MCRM-TR) E ESTUDO DE CASO BRASIL**

Esta tese foi analisada e julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

---

**Prof. Dr. Carlos Otávio Petter (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Nelson Rodrigues de Albuquerque (Coorientador)**

Aprovado em: 25/04/2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Dr. Gérson Luis Miltzarek – UFRGS

---

Prof. Dr. Jorge Dariano Gavronski – Dep. Eng. de Minas – UFRGS

---

Prof. PhD. Paulo Nunes Conceição – PPGE3M – UFRGS

Dedico esta tese  
a Deus, a minha mãe Dulcineia Cajazeira,  
a minha família, a todos os que me apoiaram e,  
em memória, a meu pai Mário Apolônio e a minha tia Maria Iva!

## **AGRADECIMENTOS**

À minha mãe Dulcineia, à minha tia Iva e a meu pai Mário (em memória), por terem me fornecido o subsídio para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

À minha família, pelo apoio e incentivo.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Carlos Otávio Petter e Prof. Dr. Nelson Rodrigues de Albuquerque, pela forma gentil, disponível, parceira e hábil de me conduzir neste desafio.

Aos colegas do doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais da UFRGS, que sempre me apoiaram.

À banca examinadora, pela contribuição para o aperfeiçoamento deste trabalho.

À CPRM, por ter me dado todo apoio necessário para o desenvolvimento dos trabalhos teóricos e de campo, em especial José Wilson de C. Temoteo, Adeilson Alves Wanderley, Ruben Sardou Filho, Dr. Francisco Valdir da Silveira, Dr. Roberto Ventura Santos e Dra. Ana Claudia Accioly.

Aos demais colegas de trabalho da CPRM, pelo incentivo e apoio técnico e camarada oferecido nos momentos de dúvidas.

Por fim, de forma igualmente importante, a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

“Quem quer passar além do Bojador  
Tem que passar além da dor”

*Fernando Pessoa*

## RESUMO

Tendo em vista que a China domina o mercado das terras-raras e impõe restrições na produção e exportação sempre que surge a oportunidade, torna-se cada vez mais desafiador o desenvolvimento de empreendimentos nesse setor. No entanto, várias iniciativas foram tomadas nos últimos cinco anos no sentido de prospectar novos recursos e desenvolver a cadeia produtiva, inclusive a mineração, desses bens minerais ao redor do mundo. Porém, alguns fatores de incerteza já influenciaram ou vêm influenciando o futuro de alguns projetos em desenvolvimento, tais como o potencial de remuneração do depósito, a infraestrutura local existente, as expectativas de margens operacionais do empreendimento, as implicações dos elementos radioativos presentes nos depósitos, as expectativas potenciais de mercado com os elementos de terras-raras (ETR) produzidos e os fatores político-econômicos, conjunturais e de logística. Então, este trabalho introduz uma nova metodologia dinâmica de análise de competitividade (o modelo de competitividade e risco na mineração de terras-raras – MCRM-TR), na qual se consideram as variáveis/os fatores tidos como principais influências na *performance* de um empreendimento de mineração destinado ao aproveitamento dos ETR. Para o desenvolvimento do modelo, foram realizadas pesquisas nos âmbitos nacional e internacional, consultando empresas e instituições de pesquisa relacionadas com o setor de terras-raras. Por fim, com os dados obtidos nas pesquisas para cada fator dos respectivos depósitos, foram realizadas simulações por meio da geração de números aleatórios, utilizando-se para isso o método de Monte Carlo. A combinação dos principais resultados gerados produziu um índice de competitividade e risco na mineração de terras-raras ( $I_{\text{CRM-TR}}$ ). Com a aplicação dessa nova metodologia, foi possível constatar algumas realidades, como por exemplo o fato de o Projeto Mount Weld CLD – (AUS) da Lynas ter apresentado bons resultados no modelo e, no mundo real, ainda se manter resiliente diante das incertezas do setor de terras-raras, ao mesmo tempo em que o projeto da Molycorp apresentou resultados não tão satisfatórios e, no mundo real, passa por grandes dificuldades financeiras (em recuperação judicial). Também foi possível constatar que o Projeto Araxá da CBMM no Brasil está entre os mais competitivos do país.

Palavras-chave: Modelo de competitividade. Fatores de competitividade. Mineração de terras-raras. Simulação de Monte Carlo. Risco.



## ABSTRACT

It is known that China dominates the rare earth market and imposes constraints on production and export whenever the opportunity arises, so that it always becomes more and more challenging to develop enterprises in the sector. However, several initiatives have been taken in the last five years to explore new resources and develop the production chain, including mining, of these mineral assets around the world. However, some factors of uncertainty have already influenced or are still influencing the future of some projects under development, such as reservoir remuneration potential, existing local infrastructure, expectations of operating margins of the enterprise, implications of the radioactive elements present in the deposits, the potential market expectations with the rare earth elements (REE) produced and the political-economic, conjuncture and logistics factors. So, this work introduces a new dynamic methodology for competitiveness analysis (the competitiveness and risk model in rare earth mining – MCRM-TR or CRM-REM), in which the variables/factors considered as main influences in the performance of a mining for the use of REEs are taken into account. In the development of the model, research was carried out at both national and international levels, consulting companies and research institutions related to the rare earth sector. Finally, with the data obtained in the surveys for each factor of the respective deposits, simulations were performed through the generation of random numbers, using the Monte Carlo method. The combination of the main results generated produced an index of competitiveness and risk in the rare earth mining (ICRM-TR or ICM-TRM). With the application of this new methodology, it was possible to verify some realities, such as the fact that the Mount Weld CLD Project (AUS) from Lynas had good results in the model and, in the real world, still remain resilient in the face of the uncertainties of the sector at the same time the Molycorp project presented less than satisfactory results and, in the real world, undergoing major financial difficulties (in judicial recovery). It was also possible to verify that the Araxá Project of CBMM in Brazil is among the most competitive in the country.

Keywords: Competitiveness model. Competitiveness factors. Mining of rare earths. Simulation of Monte Carlo. Risk.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –Tabela periódica dos elementos com destaque para os 17 ETR.....	29
Figura 2 – Ilustração de alguns dos principais usos e aplicações dos ETR.....	40
Figura 3 – Desenho esquemático simplificado das principais etapas envolvidas no processo produtivo de ETR (para os depósitos de rochas duras).....	42
Figura 4 – Frente de lavra de terras-raras (método a céu aberto) em Chengdu, .....	46
Figura 5 – Fluxograma de concentração e de tratamento do concentrado usados no projeto da mineração da Molycorp Inc. na Unocal Plant, Mountain Pass, Califórnia – EUA.....	52
Figura 6 – Fluxograma simplificado da concentração de monazita (proveniente de depósito de placer marinho) da usina de São João da Barra (RJ) – Brasil .....	53
Figura 7 – Tratamento do concentrado de minério proveniente de depósito de monazita/xenotímio .....	54
Figura 8 – Evolução da produção mundial de OTR dos principais produtores.....	60
Figura 9 – Principais regiões produtoras de OTR na China .....	62
Figura 10 – Histórico de cotas de exportação para produtores nacionais e <i>joint</i> .....	63
Figura 11 – Matriz de criticidade de elementos estratégicos, incluindo ETR .....	71
Figura 12 – Cenário “B”: evolução do mercado (distribuição da demanda por ETR) .....	75
Figura 13 – Cenário “C”, a fatia de mercado (1) e a distribuição de ETR (2) .....	75
Figura 14 – Cenários “D” (1) e “E” (2) – projeção da quota de mercado com base na demanda do setor industrial .....	75
Figura 15 – Cenário “D” – (1) evolução da distribuição da demanda por ETR projetada com base no conteúdo ETR relatado por estimativa de aplicação; (2) zoom do intervalo: 0,9–1,0 do eixo y .....	76
Figura 16 – Preço das cestas de OTR dos principais depósitos em estágio de desenvolvimento avançado (dados relativos a dezembro de 2014, preços FOB-China).....	79
Figura 17 – Margem operacional aproximada de alguns depósitos de ETR em estágio avançado de desenvolvimento .....	80
Figura 18 – Determinação do fator $F_{PPCS}$ , etapas 1,2 e 3, exemplo: depósito/projeto Bokan (EUA).....	133

Figura 19 – Determinação do fator $F_{PPCS}$ , etapas 4, exemplo: depósito/projeto Bokan (EUA).....	134
Figura 20 – Comprimento de ciclo, cauda e período de gerador de números aleatórios.....	140
Figura 21 – Exemplo simplificado das etapas principais da cadeia produtiva dos OTR que serão consideradas no MCRM-TR .....	144
Figura 22 – Obtenção da distribuição de probabilidade do nível de competitividade e risco.....	146
Figura 23 – Obtenção da distribuição de probabilidade do nível de competitividade e risco do depósito D1, em análise (PNFCRDA), após simulação (método de Monte Carlo), com intervalo de confiança 95% .....	146
Figura 24 – Diagrama de dispersão para variáveis hipotéticas Y e X e ajuste através de “linha de tendência” obtendo-se o coeficiente de determinação $R^2$ .....	149
Figura 25 – Diagrama de dispersão para as variáveis das resultantes $PN_{FCRDCM} = Y$ e $PN_{FCRDA} = X$ e ajuste através de “linha de tendência” obtendo-se GCR (= $R^2 \times 100$ ).....	149
Figura 26 – Esquema do MCRM-TR .....	151
Figura 27 – Histograma e estatísticas geradas após execução de simulação/previsão nos depósitos analisados: exemplo do PDCM (Portfólio de Depósitos de Classe Mundial).....	155
Figura 28 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 1 (TM).....	165
Figura 29 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 2 (TM).....	165
Figura 30 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 3 (TM).....	165
Figura 31 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 4 (TM).....	165
Figura 32 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).....	166
Figura 33 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 6 (TM).....	166
Figura 34 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).....	166
Figura 35 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).....	166
Figura 36 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 1 (BR).....	167
Figura 37 – Visualização gráfica - GCR – Depósito 2 (BR).....	167
Figura 38 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 3 (BR).....	167
Figura 39 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 4 (BR).....	167
Figura 40 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (BR).....	168
Figura 41 – Visualização gráfica espacial do nível de Competitividade X Risco, todos os depósitos .....	169

Figura 42 – <i>Graphic View</i> (GV, %): fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM .....	171
Figura 43 – <i>Graphic View</i> (GV, %): fatores e variáveis (continuação) críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM .....	172

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Seleção de minerais de terras-raras, por ordem decrescente de teor ....	30
Quadro 2 – Tipos de depósitos de terras-raras, número de ocorrências registradas, características e principais exemplos pelo mundo .....	33
Quadro 3 – Classificação dos depósitos brasileiros de ETR.....	35
Quadro 4 – Principais características individuais dos ETR .....	38
Quadro 5 – Alguns usos e aplicações industriais dos ETR e suas funcionalidades ..	41
Quadro 6 – Métodos de extração de terras-raras.....	50
Quadro 7 – Elementos de terras-raras: propriedades, aplicações e taxas estimadas .....	72
Quadro 8 – Cenários e taxas de crescimentos utilizados nas projeções de demanda para os ETR e setores industriais de consumo .....	74
Quadro 9 – Exemplo de cálculo do <i>Market Share</i> = $F_{EPM}$ , projeto/depósito Bokan (EUA).....	131
Quadro 10 – Dados da pesquisa (Fundação <i>Henritage</i> , 2016) para Jurisdição EUA.....	136
Quadro 11 – Dados da Jurisdição (USA), em 2016 (ano-base 2015).....	137
Quadro 12 – Classificação relativa inicial/preliminar .....	157
Quadro 13 – Grau da competitividade e risco - GCR (em relação ao PDCM/ <i>benchmark</i> ).....	162
Quadro 14 – Classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GRC e o CV) e o ranking de competitividade e risco, por meio do $I_{CRM-TR}$ .....	170

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição de OTR nos principais depósitos de ETR chineses .....	61
Tabela 2 – Produção mundial de óxidos de terras-raras (2011–2016) e reservas ....	68
Tabela 3 – Evolução dos preços dos principais óxidos de terras-raras entre 2002 e 2016 (média anual, pureza mínima 99%).....	70

## LISTA DE ABREVIATURAS

BENCHMARK	Referência (referência de mercado)
CAPEX	Capital de Investimento ( <i>Capital Expenditure</i> )
CBMM	Companhia Brasileira de Metalurgia e Mineração
CPRM	Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais
CV	Coefficiente de Variação
DA	Depósito em Análise
DPCM	Depósitos do Portfólio de classe mundial
DP	Desvio Padrão
ETR	Elementos Terras-Raras
ETRAI	Elementos Terras-Raras Utilizados em Ímãs (Nd, Pr, Tb, Dy)
ETRC	Elementos Terras-Raras Críticos (Nd, Eu, Tb, Dy e Y)
ETRL	Elementos Terras-Raras Leves (La, Ce, Pr, Nd, Sm e Eu)
ETRMP	Elementos Terras-Raras Médios e Pesados (Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y)
ETRP	Elementos Terras-Raras Pesados (Ga, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y)
FVCCR	Fatores e Variáveis Críticos de Competitividade e Risco
F <sub>VPD</sub>	Fator valor potencial do depósito
F <sub>QIL</sub>	Fator qualidade da infraestrutura local
F <sub>EMO</sub>	Fator expectativa de margem operacional (relativo a mineração: lavra e beneficiamento + processamento: separação e extração de OTR);
F <sub>IER</sub>	Fator implicações dos elementos radioativos
F <sub>EPM</sub>	Fator expectativa potencial de mercado
F <sub>PPCS</sub>	Fator percepção política conjuntural do setor de mineração (da província/da jurisdição/do país)
F <sub>PPEG</sub>	Fator percepção política econômica global (do país);
F <sub>PQLG</sub>	Fator percepção da qualidade logística global (do país).
GCR	Grau de Competitividade e Risco
I <sub>CRM-TR</sub>	Índice de competitividade e Risco na Mineração de Terras-Raras
I.C.	Intervalo de Confiança
INB	Indústrias Nucleares do Brasil
IPT	Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo

MCRM-TR	Modelo de Competitividade e Risco na Mineração de Terras-Raras
MCTIC	Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
METR	Metais de Elementos Terras-Raras (METR)
MME	Ministério de Minas e Energia
N <sub>FCRDA</sub>	Nível médio dos fatores de Competitividade e Risco do Depósito em Análise
N <sub>FCRDCM</sub>	Nível dos Fatores de Competitividade e Risco dos Depósitos de Classe Mundial
OMC	Organização Mundial do Comércio
OPEX	Custo Operacional ( <i>Operational Expenditure</i> )
OTR	Óxidos de Terras-Raras
PDCM	Portfólio de Depósitos de Classe Mundial
PN <sub>FCRDA</sub>	Probabilidade do Nível Médio dos Fatores de Competitividade e Risco do Depósito em Análise
PDCM	Portfólio de depósitos de classe mundial
PN <sub>FCRPDCM</sub>	Probabilidade do Nível Médio dos Fatores de Competitividade e Risco dos Depósitos do Portfólio de Classe Mundial
Th	Tório (ThO <sub>2</sub> )
TR	Terras-Raras
U	Urânio (U <sub>3</sub> O <sub>8</sub> )
USGS	Serviço Geológico dos Estados Unidos

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>MOTIVAÇÃO</b>	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>24</b>
1.2.1	GERAL	24
1.2.2	ESPECÍFICO	24
<b>1.3</b>	<b>ORGANIZAÇÃO DA TESE</b>	<b>26</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>CONCEITUAÇÃO</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>MINERAIS DE TERRAS-RARAS E OS TIPOS DE DEPÓSITOS</b>	<b>30</b>
2.2.1	Minerais de terras-raras	30
2.2.2	Tipos de depósitos	32
<b>2.3</b>	<b>USOS E APLICAÇÕES</b>	<b>36</b>
<b>2.4</b>	<b>ASPECTOS TÉCNICO-ECONÔMICOS, CONJUNTURAIS E GEOPOLÍTICOS DO SETOR DE TERRAS-RARAS</b>	<b>42</b>
2.4.1	Cadeia produtiva dos ETR	42
2.4.2	Visão analítica do processamento do concentrado de ETR	47
2.4.2.1	Extração por solvente	48
2.4.2.2	Considerações gerais de separação dos ETR	49
2.4.2.3	Processo de redução	50
2.4.3	Implicações ambientais	55
2.4.4	Análise econômica do setor de terras-raras	57
2.4.5	A estrutura produtiva do setor de terras-raras	59
2.4.5.1	Movimentações fora da China	65
2.4.6	Situação atual: produção e reservas conhecidas	67
2.4.7	Preços e perspectivas de mercado	68
2.4.7.1	Preços	68
2.4.7.2	Perspectivas de mercado	71
2.4.8	Projetos de mineração em desenvolvimento	77
2.4.9	Conjuntura e geopolítica	81
2.4.9.1	Conjuntura	81
2.4.9.2	Geopolítica	85



<b>2.5</b>	<b>MODELOS DE ANÁLISE DE COMPETITIVIDADE .....</b>	<b>88</b>
2.5.1	Competitividade e seus fundamentos conceituais .....	89
2.5.2	Enfoque dos modelos de análise .....	94
2.5.2.1	Enfoque empírico .....	94
2.5.2.2	Enfoque pontual .....	94
2.5.2.3	Enfoque sistêmico .....	96
2.5.3	Trabalhos de referência sobre análise de competitividade .....	96
<b>3</b>	<b>FATORES DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE TERRAS- RARAS .....</b>	<b>98</b>
<b>3.1</b>	<b>Fatores de competitividade e risco .....</b>	<b>98</b>
3.1.2	Descrição dos fatores.....	99
3.1.2.1	Potencial de remuneração do depósito ou valor potencial do depósito ....	99
3.1.2.2	Infraestrutura local .....	101
3.1.2.3	Expectativas de margens operacionais.....	101
3.1.2.4	Implicações dos elementos radioativos presentes nos depósitos .....	103
3.1.2.5	Perspectivas potenciais de mercado.....	104
3.1.2.6	Aspectos conjunturais .....	104
<b>4</b>	<b>O MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO (MODELO MCRM-TR) .....</b>	<b>115</b>
<b>4.1</b>	<b>Seleção dos depósitos para o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM) .....</b>	<b>116</b>
4.1.1	Seleção dos depósitos do PDCM .....	116
<b>4.2</b>	<b>Sobre os códigos (NI 43-101, Código JORC e Código SAMREC) .....</b>	<b>117</b>
<b>4.3</b>	<b>Premissas utilizadas na seleção dos depósitos do PDCM.....</b>	<b>119</b>
<b>4.4</b>	<b>Fatores de competitividade e risco na mineração das terras-raras (ETR) .....</b>	<b>122</b>
<b>4.5</b>	<b>Números aleatórios e Simulação de Monte Carlo.....</b>	<b>138</b>
4.5.1	Propriedades desejadas aos geradores de números aleatórios.....	138
4.5.2	Simulação de Monte Carlo.....	138
<b>4.6</b>	<b>Desenvolvimento do modelo (MCRM-TR) .....</b>	<b>142</b>
<b>4.7</b>	<b>Resultados esperados .....</b>	<b>152</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO E TESTE DO MODELO .....</b>	<b>153</b>
<b>5.1</b>	<b>Análise e discussão dos resultados.....</b>	<b>154</b>

5.1.1	Análise dos depósitos/projetos: teste do modelo (TM) e estudo e caso Brasil (BR) .....	155
5.1.2	Discussão dos resultados: teste do modelo (TM) e estudo e caso Brasil (BR) .....	156
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>178</b>
<b>7</b>	<b>RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>180</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>182</b>

**APÊNDICE A** – Procedimentos para seleção dos depósitos do portfólio de depósitos de classe mundial–PDCM

**APÊNDICE B** – Procedimentos de simulação no MCRM-TR e alimentação da planilha de resultados

**APÊNDICE C** – Visualização gráfica dos fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR

**ANEXO A** – Histórico e geoquímica dos elementos terras-raras

**ANEXO B** – Conceitos importantes da estatística (dividido em duas partes: parte 1 - noções básicas de estatística e parte 2 - análise de correlação, regressão, linear, medidas de associação, distribuição amostral, estimativas e intervalo de confiança)

**ANEXO C** – Dividido em três partes: parte 1 – introdução aos métodos de geração de números e variáveis aleatórias para aplicações em simuladores, parte 2 – método de Monte Carlo/simulação Monte Carlo; parte 3 - simulação Monte Carlo e análises de resultados com software *risk simulator* (Rov Inc.)

## 1 INTRODUÇÃO

Os elementos terras-raras (ETR) são matérias de uso indispensável para uma infinidade de produtos que incorporam tecnologia de ponta. Suas aplicações abrangem de telas de cristal líquido a fertilizantes agrícolas, de baterias elétricas a vidros de alta refração, de superímãs usados em carros elétricos e usinas eólicas a catalisadores para o refino de petróleo, passando por chips de memória, inúmeras ligas metálicas e muitos outros usos. Estratégicos como matéria-prima para a indústria do futuro, esses metais alimentam um mercado global que agrega valor a produtos tecnológicos que movimentam cerca de US\$ 5 trilhões ao ano (SCHUESSLER, 2014). As terras-raras compreendem um grupo de 17 elementos químicos de ampla distribuição na crosta terrestre, porém a baixas concentrações. Desse grupo, 15 pertencem ao grupo dos lantanídeos — estes com número atômico (Z) entre 57 e 71, indo do lantânio (La) ao lutécio (Lu). A esses 15 elementos se somam o escândio (Z = 21) e o ítrio (Z = 39) pelo fato de possuírem propriedades físico-químicas semelhantes, formando um grupo de 17 elementos metálicos.

A demanda nacional e internacional por esses metais estratégicos fez com que o Ministério de Minas e Energia (MME) e o Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC), em esforço conjunto, instituíssem um Grupo de Trabalho Interministerial sobre Minerais Estratégicos (GTI-ME), a partir da Portaria Interministerial Nº 614 de 30 de junho de 2010 (BRASIL, 2010). O GTI-ME tem como finalidade a elaboração de propostas de integração, coordenação e aprimoramento das políticas, diretrizes e ações voltadas para minerais estratégicos. Um dos projetos desenvolvidos nesse sentido foi a “Avaliação do Potencial dos Minerais Estratégicos do Brasil”, realizada pela Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais (CPRM)/Serviço Geológico do Brasil, que produziu um diagnóstico do potencial brasileiro (iniciado em 2011 e concluído em 2015) para os bens minerais de terras-raras (TAKEHARA, 2015).

Considerados elementos do futuro, os ETR são essenciais para o desenvolvimento industrial de um país. Um dos fatores relevantes responsáveis pela retomada desse setor em vários países do mundo foi a diminuição de cotas de exportação da China, o que acentuou-se no final de 2010, provocando a elevação dos preços internacionais durante todo o ano de 2011 e, por conseguinte, maior interesse na atividade de exploração mineral e produção de terras-raras em outros

países como Estados Unidos, Canadá, Austrália, Vietnã, África do Sul, Brasil e outros.

O aumento dos preços internacionais das terras-raras, a partir da diminuição das cotas de exportação da China, também provocou no Brasil um retorno à discussão sobre projetos de mineração de terras-raras paralisados nos anos 1990, tanto por parte do governo federal quanto da iniciativa privada. Em 2011, foi realizado o 1º Seminário Brasileiro de Terras-raras, no Rio de Janeiro, promovido pelo governo federal, no qual foram apresentados os usos das terras-raras (TR) e a discussão sobre sua cadeia produtiva. Após esse seminário, empresas como Cia. Brasileira de Metalurgia e Mineração (CBMM), Vale e outras se mostraram interessadas em estudar a viabilidade financeira de projetos de mineração de terras-raras (SEMINÁRIO DE TERRAS-RARAS, 2011).

Em 2013, ocorreu 2º Seminário Brasileiro de Terras-raras, evento que contou com a participação de representantes do governo federal, do Poder Legislativo, de universidades, de centros de pesquisa e setores da iniciativa privada interessados no tema. Na segunda edição do seminário, buscou-se dar continuidade aos esforços nos âmbitos governamental, acadêmico e do setor industrial para se criarem condições para construir as bases para o desenvolvimento de uma cadeia de terras-raras no Brasil (SEMINÁRIO DE TERRAS-RARAS, 2013).

No 3º Seminário Brasileiro de Terras-raras, nos mesmos moldes do primeiro e do segundo seminários, foram apresentados trabalhos de pesquisa em andamento ou concluídos, como por exemplo a “Avaliação do Potencial de Terras-raras no Brasil” (os resultados deste projetos foram apresentados pela equipe de pesquisadores da CPRM); também foram apresentadas algumas alternativas para o desenvolvimento da cadeia produtiva no Brasil, projetos de empresas de mineração, dificuldades e perspectivas, avaliações econômicas preliminares de projetos potencias (desenvolvidas pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul) e outras pesquisas importantes relacionadas ao tema (SEMINÁRIO DE TERRAS-RARAS, 2015).

Entre os dias 17 e 18 de outubro de 2017, ocorreu 4º Seminário Brasileiro de Terras-raras. Dessa vez, o evento foi promovido pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) e pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, em São Paulo. Entre outros, foram apresentados e debatidos trabalhos de pesquisa relacionados a articulações no âmbito da cadeia produtiva, projetos de empresas

envolvidas com o início da cadeia produtiva, o panorama atual sobre as estratégias de mercado das TR e de seus produtos, o beneficiamento e a extração mineral, seus usos, suas aplicações e a reciclagem.

Na conjuntura atual, de mercado monopolizado, os chineses conseguem manipular não somente a oferta mundial de ETR, como também os preços desses metais. Essa elevada dependência em relação à produção chinesa preocupa principalmente os países com plataformas industriais avançadas, intensivas no uso de alta tecnologia — especialmente o Japão, que em 2011 importou 82% de suas terras-raras da China, o equivalente a cerca de 40% das exportações chinesas. Em seguida vêm os Estados Unidos, que importaram outros 18% do que os chineses produziram.

As preocupações por conta dessa dependência levaram muitos países a incentivar grupos de pesquisa nacionais no intuito de reduzir as importações ou até mesmo de alcançar a autossustentabilidade em relação às TR. Ainda tomando o Japão como exemplo, as empresas japonesas tomaram diversas medidas para diminuir ou eliminar sua dependência de fornecedores chineses ou de recursos minerais inteiramente após 2010. A primeira medida envolveu a diversificação do fornecimento de ETR para incluir importações de uma ampla gama de países. Como resultado, o Japão, que costumava importar mais de 80% de suas terras-raras da China, em 2016 reduziu esse índice para 50%. No entanto, a proporção de importações da China para o Japão de disprósio, um dos ETR mais escassos, é de quase 98%. Alguns especialistas estimam que a indústria japonesa em 2017 tenha reduzido sua dependência de ETRL em 50% e a de ETRP em de 20% a 30%. Outros países têm se destacado nos últimos anos na importação desses bens minerais, como Alemanha, França, Áustria, Estônia, China, Coreia do Sul, Rússia e o próprio Brasil.

Diante da crescente dependência por esses bens minerais, esses países e suas respectivas indústrias tomaram algumas iniciativas que começam a apresentar uma evolução na busca do desenvolvimento de suas próprias cadeias produtivas de TR. No Brasil, por exemplo, em setembro de 2017 foi anunciada a implantação de um laboratório-fábrica de ímãs de terras-raras da Companhia de Desenvolvimento Econômico de Minas Gerais (CODEMIG). O laboratório será implantado no município de Lagoa Santa (Região Metropolitana de Belo Horizonte, Brasil). Esse projeto conta com a participação da Universidade Federal de Santa Catarina

(UFSC), do Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo (IPT), da Fundação CERTI, do Centro de desenvolvimento de tecnologia nuclear (CDTN) e das empresas Imag e Brast, além da Companhia Brasileira de Metalurgia e Mineração (CBMM).

Em 2013, o Brasil exportou 600 toneladas de concentrado de ETR para a China, a partir dos estoques das Indústrias Nucleares do Brasil (INB) no município de São Francisco do Itabapoana, no estado do Rio de Janeiro (em 2012, foram 2.700 toneladas para o mesmo destino). Nesse município, as reservas de monazita provavelmente estão esgotadas, restando somente o estoque estimado em 10.000 toneladas de concentrado desse mineral (ANDRADE, 2014).

As principais indústrias nacionais consumidoras diretas de produtos de terras-raras são as fabricantes de catalisadores, vidros e cerâmicas; e as consumidoras indiretas são as fabricantes de motores e turbinas eólicas. A demanda brasileira de terras-raras é incipiente, correspondendo a cerca de 1% da demanda mundial estimada. O consumo de produtos de ETR na forma de compostos químicos e manufaturados no Brasil em 2014 foi de 1.600 toneladas. A demanda global está estimada entre 170 mil e 190 mil toneladas, com um crescimento de 8 a 11% ao ano entre 2011 e 2015. As maiores taxas de crescimento referem-se a ímãs e ligas metálicas, que são utilizados em veículos híbridos e elétricos: em ambos os casos, as taxas são superiores a 10% ao ano.

Segundo um estudo da consultoria *Hexa Research* (2015), a alta demanda por metais de terras-raras, como cério e lantânio, em aplicações como automóveis, metalurgia, fósforos, vidro etc. conduzirá ao crescimento do mercado global. A crescente demanda por ímãs permanentes para aplicações como turbinas eólicas, eletrônicos e o setor automotivo (principalmente os elétricos) vai se configurar em demanda alta e crescente por neodímio. O fosforo é essencial para a fabricação de componentes eletrônicos de alta demanda, como telas de LCD. E elementos como térbio, európio e ítrio são utilizados na indústria de fósforos.

Embora existam muitas pesquisas sobre o assunto, não há substitutos para os diversos usos dos 17 elementos de terras-raras: lantânio, neodímio, cério, praseodímio, promécio, samário, európio, gadolínio, térbio, disprósio, hólmio, érbio, túlio, itérbio, escândio, lutécio e ítrio. Os principais minerais portadores de terras-raras são grupos da bastnaesita (Ce, La)CO<sub>3</sub>F, monazita (Ce, La)<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>, argilas iônicas e xenotímio (YPO<sub>4</sub>). Contudo, os diversos projetos destinados ao

aproveitamento comercial das terras-raras, que se encontram em desenvolvimento ao redor do mundo, só terão êxito se apresentarem bons níveis de competitividade em relação aos seus concorrentes. Devido às variáveis técnicas, econômicas e geopolíticas, além da volatilidade dos preços, muitos desses projetos serão postergados ou abandonados. Assim, os projetos que apresentarem melhores condições no que toca às variáveis e aos fatores de competitividade e risco serão os mais promissores. Essas variáveis e fatores de competitividade e risco serão explanados nesta tese.

## **1.1 MOTIVAÇÃO**

Diversas análises sobre mensuração e determinação dos fatores de competitividade foram realizadas e publicadas nos últimos anos para diversos setores econômicos, tais como: a competitividade da indústria de minerais e metais dos Estados Unidos (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1990), um modelo dinâmico de análise competitiva para mineração global (BRUMMER, 2005), a posição competitiva do Brasil na exploração e mineração do ouro (ARANTES, MACKENZIE, 1995), uma análise da competitividade do Brasil em relação à África do Sul, à Austrália, ao Canadá e aos Estados Unidos (CALAES, 1998), um modelo de avaliação da competitividade na exploração mineral (tese de doutorado, ANDRADE, 2001), um estudo comparativo sobre a competitividade da indústria mineira de Xinjiang na China (JINGHUA et al., 2011), a análise da competitividade da indústria do carvão na China, com o estudo do modelo de diamante (WU et al, 2017) e os determinantes da competitividade dos países na atração de investimentos em mineração (JARA, 2017).

No entanto, esses estudos ou modelos propostos produzem resultados determinísticos, ou seja, não consideram a dinâmica ou variabilidade dos fatores de competitividade e risco no horizonte de tempo. Quando se analisam trabalhos voltados para o setor mineral, esse fato é fortemente constatado; a totalidade dos estudos é teórica, empírica e/ou pontual, resultando em respostas determinísticas que não levam em conta a variação dos fatores de competitividade e risco ao longo do tempo. Assim, o modelo proposto de análise de competitividade e risco, nesta tese de doutorado, incorpora conceitos e metodologias quantitativas e qualitativas aplicadas ao processamento e à interpretação dos fatores estruturais e sistêmicos

da competitividade; além disso, inclui uma nova ferramenta poderosa de análise estatística e matemática: a análise probabilística dos fatores de competitividade e os riscos a eles relacionados.

Nesse contexto, a construção de um modelo que permita uma análise probabilística dos fatores de competitividade e risco selecionados é algo raro e bastante inovador; em se tratando de uma aplicação à mineração de terras-raras, até então não há relatos na literatura.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 GERAL**

É propósito deste trabalho suprir a carência de informações sobre o setor de terras-raras do ponto de vista da economia mineral, especialmente no que toca à análise de fatores de competitividade e dos riscos relacionados com a mineração desses bens minerais, tendo como ênfase os aspectos tecnológicos, técnico-econômicos e políticos-conjunturais relacionados.

A presente tese tem o objetivo geral de avançar no conhecimento desse tema, por isso será desenvolvida uma pesquisa nos âmbitos nacional e internacional, consultando empresas e instituições de pesquisa relacionadas com o setor de terras-raras, compilando, validando e interpretando os dados adquiridos. Por conseguinte, busca identificar e analisar os fatores favoráveis e desfavoráveis no que toca à competitividade global nesse setor e aos riscos econômicos envolvidos no desenvolvimento de um empreendimento mineiro, destinado à produção de terras-raras. E, com os conhecimentos adquiridos, objetiva-se modelar os fatores de competitividade e risco relacionados com a mineração das terras-raras (TR).

### **1.2.2 ESPECÍFICO**

A partir do cumprimento do objetivo geral, especificamente será construído um modelo probabilístico de análise da competitividade e do risco de investimento envolvido no desenvolvimento de um depósito mineral. Serão analisados projetos/depósitos que inicialmente tenham sido considerados potenciais para a mineração de terras-raras, estejam eles em fase preliminar ou avançada de



avaliação – projetos em estágio de estudo de avaliação econômica preliminar (AEP), pré-viabilidade econômica ou viabilidade econômica.

Assim, com o auxílio do modelo proposto, será possível, mesmo que em uma fase inicial: no caso dos governos, decidir sobre a necessidade ou não de fornecer estímulos ou até subsídios a projetos específicos de mineração e/ou segmento produtivo, cujos depósitos minerais potenciais tenham sido avaliados positivamente do ponto de vista da competitividade e do risco envolvido; e, no caso do setor privado, decidir sobre a possibilidade de investir ou não valores vultosos em determinado seguimento ou projeto/depósito de terras-raras, levando em conta a existência de alternativas de projetos/depósitos com resultados mais atrativos para o sucesso do empreendimento de mineração. Este modelo também poderá auxiliar, de forma comparativa, a identificação das variáveis/dos fatores favoráveis e desfavoráveis ao projeto, e assim subsidiar a tomada de decisão.

O produto deste trabalho (modelo de competitividade e risco na mineração de terras-raras – MCRM-TR) permitirá gerar, pelo menos, cinco resultados:

a) determinação do nível médio probabilístico dos fatores de competitividade e risco dos depósitos ( $PN_{FCRPDCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ ), ou seja, a competitividade relativa (em relação ao portfólio de depósitos de classe mundial – PDCM ou *benchmark*) dos depósitos, sem levar em conta as incertezas, produzindo uma classificação inicial/preliminar;

b) determinação da intensidade ou do grau de competitividade relativa (GCR) em relação ao PDCM/*benchmark* dos depósitos, isto é, o grau de associação entre os fatores pertencentes aos depósitos do PDCM/*benchmark* e o depósito em análise (DA);

c) visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco (coeficiente de variação) das respectivas resultantes  $PN_{FCRPDCM}$  (dos depósitos do PDCM) e  $PN_{FCRDA}$  (depósitos em análise) e do coeficiente de variação (CV) – risco;

d) classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GCR e o CV) e gerando um índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ ), além de uma classificação final com base nesse índice;

e) identificação por análise gráfica de fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR) dos depósitos em análise, tendo como referência o  $PN_{FCRPDCM} = PDCM/benchmark$  dos depósitos/projetos do setor de TR em desenvolvimento.

Após a construção do modelo, será realizado teste com alguns depósitos/projetos em estágio avançado de desenvolvimento, pertencentes a diferentes regiões e países. Também será realizado teste com depósitos/projetos brasileiros, isto é, estudo de caso de alguns projetos/depósitos considerados potenciais no Brasil.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

No intuito de organizar a apresentação do trabalho realizado, esta tese foi dividida em cinco capítulos, descritos a seguir.

O **capítulo 1** (introdução) apresenta uma visão panorâmica do setor de terras-raras; no **capítulo 2** é feita uma revisão da literatura envolvendo a conceituação, os tipos de depósitos, seus usos e aplicações, e os aspectos técnico-econômicos, conjunturais e políticos desse setor. Também são abordados nesse capítulo os fundamentos da análise de competitividade, o enfoque dos modelos apresentados até então, e são destacados alguns trabalhos como referência.

O **capítulo 3** apresenta os fatores de competitividade e risco na mineração de terras-raras defendidos neste trabalho de tese, como os principais fatores que podem afetar de forma considerável o desempenho de um empreendimento destinado ao aproveitamento das terras-raras. As implicações positivas e negativas desses fatores também são destacadas.

No **capítulo 4** é apresentado com detalhes o modelo de competitividade e risco na mineração de terras-raras (MCRM-TR). No **capítulo 5**, são feitas aplicações e testes com o modelo em depósitos/projetos pertencentes a diferentes regiões do planeta e também depósitos/projetos potenciais do Brasil, como estudo de caso. No capítulo também são feitas as análises e discussões dos resultados.

No **capítulo 6**, são apresentadas as conclusões e no **capítulo 7** as recomendações. Por fim, é listada toda bibliografia utilizada como referência.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo são explicados os tipos de depósitos, seus usos e as aplicações, e os aspectos técnico-econômicos, conjunturais e políticos desse setor. Também são abordados os fundamentos da análise de competitividade e o enfoque dos modelos desenvolvidos até então, e são destacados alguns trabalhos como referência.

### 2.1 CONCEITUAÇÃO

De acordo com as recomendações da International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), o grupo de elementos conhecido como terras-raras compreende os metais lantanídeos – elementos com número atômico entre  $Z = 57$  e  $Z = 71$ : lantânio (La), cério (Ce), praseodímio (Pr), neodímio (Nd), promécio (Pm), samário (Sm), európio (Eu), gadolínio (Gd), térbio (Tb), disprósio (Dy), hólmio (Ho), érbio (Er), túlio (Tm), itérbio (Yb) e lutécio (Lu) –, além de escândio (Sc) e ítrio (Y) (CONNELLY et al., 2005). É sabido que, mesmo com a recomendação da IUPAC, o termo “terras-raras” para a classificação desses elementos não é tão correto. A denominação está ligada a uma questão histórica; o termo “terras” se deve ao fato de que, ao longo dos séculos XVIII e XIX, tais elementos foram isolados, a partir de seus minerais, na forma de óxidos, já que a palavra “terra” era, à época, uma designação geral para óxidos metálicos, assim como em “terras alcalinas” ou “metais alcalino-terrosos” (SERRA; SOUSA, 2014). A concentração desse grupo de elementos metálicos na crosta terrestre é, ao contrário do que se pode pensar, consideravelmente alta. Cério, lantânio e neodímio são mais abundantes do que cobalto, níquel e chumbo; já os mais raros, túlio e lutécio, possuem ocorrência maior do que a da prata e dos metais do grupo da platina (SERRA; SOUSA, 2014).

Os 17 ETR pertencem ao grupo III da tabela periódica (metais de transição). Quanto ao número atômico destes metais, vai, em ordem crescente, do Lantânio (La) ao Lutécio (Lu). O fato de o Sc possui raio iônico menor e poder ser facilmente substituído por Mg,  $\text{Fe}^{2+}$ , Zr, e Sn, há casos em que são excluídos da família dos ETR por alguns cientistas (CHAKHMOURADIAN E WALL, 2012). Embora o Y possua peso atômico relativamente baixo ainda é incluído no grupo do ETR (como ETR pesado, ETRP), isto se deve ao seu raio iônico e as suas propriedades serem muito semelhantes ao Hólmio (Ho), que é um ETR pesado, ETRP. Contudo, os demais 15 elementos ETR (lantanídeos) podem ser subdivididos em: ETR Leves (ETRL, que vai do La ao Eu e ETR pesados (ETRP, que vai do Gd ao Lu). Alguns especialistas também consideram a seguinte classificação: (ETRL, que vai do La ao Pm), ETR médios (ETRM, que vai do Sm ao Ga) e ETRP (do Tb ao Lu). Uma possível explicação para o uso destas duas subdivisões é que os elementos Sm, Eu, Ga, são mais transicionais e podem ser classificados como ETRL ou como ETRP. Os elementos promécio (número atômico 61) e escândio (número atômico 21), por serem considerados escassos, muitas vezes não são levados em consideração nessa classificação. A localização dos íons terras-raras na tabela periódica aconteceu entre 1913 e 1914, quando o físico britânico H. G. J. Moseley encontrou uma relação direta entre as frequências de raio-x e o número atômico dos elementos. Só após a década de 1950 foi possível obter os ETR na forma suficientemente pura e assim realizar pesquisas básicas sobre suas propriedades químicas, magnéticas, ópticas e outras (MAXWELL, 2016).

A Figura 1 apresenta a tabela periódica de acordo com as recomendações da IUPAC, com destaque para os 15 lantanídeos além do escândio (Sc) e do ítrio (Y), pertencentes à família dos ETR.

O histórico desde os primeiros registros até as descobertas mais recentes dos elementos de terras-raras e da geoquímica associada são detalhados no Anexo A.

Figura 1 – Tabela periódica dos elementos com destaque para os 17 ETR.

**Tabela Periódica dos Elementos**

1 IA 1A																	18 VIIIA 8A			
1 <b>H</b> Hydrogen 1.008													13 IIIA 3A	14 IVA 4A	15 VA 5A	16 VIA 6A	17 VIIA 7A	2 <b>He</b> Helium 4.003		
3 <b>Li</b> Lithium 6.941	4 <b>Be</b> Beryllium 9.012											5 <b>B</b> Boron 10.811	6 <b>C</b> Carbon 12.011	7 <b>N</b> Nitrogen 14.007	8 <b>O</b> Oxygen 15.999	9 <b>F</b> Fluorine 18.998	10 <b>Ne</b> Neon 20.180			
11 <b>Na</b> Sodium 22.990	12 <b>Mg</b> Magnesium 24.305				3 IIIB 3B	4 IVB 4B	5 VB 5B	6 VIB 6B	7 VIIB 7B	8 VIII 8	9 VIII 8	10 VIII 8	11 IB 1B	12 IIB 2B	13 <b>Al</b> Aluminum 26.982	14 <b>Si</b> Silicon 28.086	15 <b>P</b> Phosphorus 30.974	16 <b>S</b> Sulfur 32.066	17 <b>Cl</b> Chlorine 35.453	18 <b>Ar</b> Argon 39.948
19 <b>K</b> Potassium 39.098	20 <b>Ca</b> Calcium 40.078	21 <b>Sc</b> Scandium 44.956	22 <b>Ti</b> Titanium 47.867	23 <b>V</b> Vanadium 50.942	24 <b>Cr</b> Chromium 51.996	25 <b>Mn</b> Manganese 54.938	26 <b>Fe</b> Iron 55.845	27 <b>Co</b> Cobalt 58.933	28 <b>Ni</b> Nickel 58.693	29 <b>Cu</b> Copper 63.546	30 <b>Zn</b> Zinc 65.38	31 <b>Ga</b> Gallium 69.723	32 <b>Ge</b> Germanium 72.631	33 <b>As</b> Arsenic 74.922	34 <b>Se</b> Selenium 78.971	35 <b>Br</b> Bromine 79.904	36 <b>Kr</b> Krypton 84.798			
37 <b>Rb</b> Rubidium 84.468	38 <b>Sr</b> Strontium 87.62	39 <b>Y</b> Yttrium 88.906	40 <b>Zr</b> Zirconium 91.224	41 <b>Nb</b> Niobium 92.906	42 <b>Mo</b> Molybdenum 95.95	43 <b>Tc</b> Technetium 98.907	44 <b>Ru</b> Ruthenium 101.07	45 <b>Rh</b> Rhodium 102.906	46 <b>Pd</b> Palladium 106.42	47 <b>Ag</b> Silver 107.868	48 <b>Cd</b> Cadmium 112.414	49 <b>In</b> Indium 114.818	50 <b>Sn</b> Tin 118.711	51 <b>Sb</b> Antimony 121.760	52 <b>Te</b> Tellurium 127.6	53 <b>I</b> Iodine 126.904	54 <b>Xe</b> Xenon 131.294			
55 <b>Cs</b> Cesium 132.905	56 <b>Ba</b> Barium 137.328	57-71	72 <b>Hf</b> Hafnium 178.49	73 <b>Ta</b> Tantalum 180.948	74 <b>W</b> Tungsten 183.84	75 <b>Re</b> Rhenium 186.207	76 <b>Os</b> Osmium 190.23	77 <b>Ir</b> Iridium 192.217	78 <b>Pt</b> Platinum 195.085	79 <b>Au</b> Gold 196.967	80 <b>Hg</b> Mercury 200.592	81 <b>Tl</b> Thallium 204.383	82 <b>Pb</b> Lead 207.2	83 <b>Bi</b> Bismuth 208.980	84 <b>Po</b> Polonium [208.982]	85 <b>At</b> Astatine 209.987	86 <b>Rn</b> Radon 222.018			
87 <b>Fr</b> Francium 223.020	88 <b>Ra</b> Radium 226.025	89-103	104 <b>Rf</b> Rutherfordium [261]	105 <b>Db</b> Dubnium [262]	106 <b>Sg</b> Seaborgium [266]	107 <b>Bh</b> Bohrium [264]	108 <b>Hs</b> Hassium [269]	109 <b>Mt</b> Meitnerium [268]	110 <b>Ds</b> Darmstadtium [269]	111 <b>Rg</b> Roentgenium [272]	112 <b>Cn</b> Copernicium [277]	113 <b>Uut</b> Ununtrium unknown	114 <b>Fl</b> Flerovium [289]	115 <b>Uup</b> Ununpentium unknown	116 <b>Lv</b> Livermorium [298]	117 <b>Uus</b> Ununseptium unknown	118 <b>Uuo</b> Ununoctium unknown			
<b>ETR</b>	Série dos Lantanídeos		57 <b>La</b> Lanthanum 138.905	58 <b>Ce</b> Cerium 140.116	59 <b>Pr</b> Praseodymium 140.908	60 <b>Nd</b> Neodymium 144.243	61 <b>Pm</b> Promethium 144.913	62 <b>Sm</b> Samarium 150.36	63 <b>Eu</b> Europium 151.964	64 <b>Gd</b> Gadolinium 157.25	65 <b>Tb</b> Terbium 158.925	66 <b>Dy</b> Dysprosium 162.500	67 <b>Ho</b> Holmium 164.930	68 <b>Er</b> Erbium 167.259	69 <b>Tm</b> Thulium 168.934	70 <b>Yb</b> Ytterbium 173.055	71 <b>Lu</b> Lutetium 174.967			
	Série dos Actinídeos		89 <b>Ac</b> Actinium 227.028	90 <b>Th</b> Thorium 232.038	91 <b>Pa</b> Protactinium 231.036	92 <b>U</b> Uranium 238.029	93 <b>Np</b> Neptunium 237.048	94 <b>Pu</b> Plutonium 244.064	95 <b>Am</b> Americium 243.061	96 <b>Cm</b> Curium 247.070	97 <b>Bk</b> Berkelium 247.070	98 <b>Cf</b> Californium 251.080	99 <b>Es</b> Einsteinium [254]	100 <b>Fm</b> Fermium 257.095	101 <b>Md</b> Mendelevium 258.1	102 <b>No</b> Nobelium 259.101	103 <b>Lr</b> Lawrencium [262]			

Fontes: Modificado de Helmenstine, 2015.

## 2.2 MINERAIS DE TERRAS-RARAS E OS TIPOS DE DEPÓSITOS

### 2.2.1 Minerais de terras-raras

Existem mais de 250 minerais de terras-raras catalogados (SERRA, 2011). A grande maioria dos recursos de ETR está associada, predominantemente, a três minerais: bastnaesita e monazita, especialmente para os elementos de terras-raras leves (ETRL), e xenotímio, para os elementos de terras-raras pesadas (ETRP). Assim, a seguir será feita uma explanação sucinta desses três principais minerais de ETR. O Quadro 1 mostra uma seleção de minerais de terras-raras, por ordem decrescente de teor.

A bastnaesita, cujo nome vem do sueco *bastnas*, é um fluorcarbonato composto de aproximadamente 75% de ETR, constituído principalmente por Ce, La e Nd. Normalmente ocorre em quantidades econômicas nos carbonatitos. Esse mineral é a principal fonte de ETR nos depósitos Bayan Obo e Maoniuping (China) e no depósito de Mountain Pass (EUA), que são depósitos que iniciaram suas atividades de extração há muitas décadas.

Quadro 1 – Seleção de minerais de terras-raras, por ordem decrescente de teor.

Mineral	Química mineral	OTR (% em peso)
Bastnaesita-(Ce)	(Ce,La)(CO <sub>3</sub> )F	75
Monazita-(Ce)	(Ce,La,Nd,Th)PO <sub>4</sub>	65
Xenotímio	YPO <sub>4</sub>	61
Parisita-(Ce)	Ca(Ce,La) <sub>2</sub> (CO <sub>3</sub> )F <sub>2</sub>	61
Gadolinita-(Y)	(Ce,La,Nd,Y)Fe <sup>2+</sup> Be <sub>2</sub> Si <sub>2</sub> O <sub>10</sub>	60
Ytrocercita-(Y,Ce)	(Ca,Ce,Y,La)F <sub>3</sub> .nH <sub>2</sub> O	53
Fergusonita-(Ce)	(Ce,La,Nd)NbO <sub>4</sub>	53
Huanghoita-(Ce)	(Ba,Ce)(CO <sub>3</sub> )F	39
Allanita-(Ce)	(Ce,Ca,Y) <sub>2</sub> (Al,Fe <sup>3+</sup> ) <sub>3</sub> (SiO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> OH	38
Kainosita-(Y)	Ca <sub>2</sub> (Y,Ce) <sub>2</sub> Si <sub>4</sub> O <sub>12</sub> CO <sub>3</sub> .H <sub>2</sub> O	38
Aechynita-(Ce)	(Ce,Ca,Fe,Th)(Ti,Nb) <sub>2</sub> (O,OH) <sub>6</sub>	32
Britholita-(Ce)	(Ce,Ca) <sub>5</sub> (SiO <sub>4</sub> .PO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> (OH,F)	32
Florencita-(Ce)	CaAl <sub>3</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> (OH) <sub>6</sub>	32
Cebaita-(Ce)	Ba <sub>3</sub> Ce <sub>2</sub> (CO <sub>3</sub> ) <sub>5</sub> F <sub>2</sub>	32
Loparita	(Ce,La,Na,Ca,Sr)(Ti,Nb)O <sub>3</sub>	30
Euxenita-(Y)	(Y,Ca,Ce,U,Th)(Nb,Ta,Ti) <sub>2</sub> O <sub>6</sub>	24
Samarskita-(Y)	(Y,Ce,U,Fe <sup>3+</sup> ) <sub>3</sub> (Nb,Ta,Ti) <sub>5</sub> O <sub>16</sub>	24
Apatita	Ca <sub>5</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> (F,Cl,OH)	19
Eudialita	Na <sub>4</sub> (Ca,Ce) <sub>2</sub> (Fe <sup>2+</sup> ,Mn,Y)ZrSi <sub>8</sub> O <sub>22</sub> (OH,Cl <sub>2</sub> )	9
Brannerita	(U,Ca,Y,Ce)(Ti,Fe) <sub>2</sub> O <sub>6</sub>	9

Fonte: Lapido-Loureiro (2013) apud United Kingdom e Clark (2010).

A monazita, cujo nome tem origem no grego *mona`zein* – estar solitário, em alusão aos seus cristais isolados –, é um fosfato de ETR (principalmente lantânio e cério) e Th, encontrado em diversos tipos de rochas ígneas e metamórficas. Pode ocorrer em quantidades significativas em perfis intemperizados de carbonatitos, nos quais é concentrada facilmente por processos físicos, permitindo a formação de depósito de grande tonelagem e de alto teor. Esse tipo de monazita apresenta baixo teor de Th, geralmente < 1% em peso (LAPIDO-LOUREIRO, 1989). No entanto, as monazitas de *placers* apresentam alto teor de Th. Em alguns casos, esses teores são elevados e podem atingir 20% de Th.

O xenotímio, xenótimo ou xenotímia, do grego *xenos* – estranho –, e *time* – honra – é um fosfato de Y com teor médio de 30% em peso de Y, que geralmente ocorre associado com os ETRP, como Dy, Er, Yb e Lu. É um mineral acessório e comum em rochas graníticas diferenciadas e em rochas metamórficas. Há normalmente depósitos de dimensões relativamente pequenas, contendo conjuntamente monazita e xenotímio (depósitos tipo *placer*). Isso se deve ao intemperismo de rochas graníticas e pegmatitos. É fonte importante de ETRP e Y, porém não há registros de exploração econômica de ETR até então.

Diversos outros minerais também são fontes importantes de ETR, com destaque histórico para a loparita e a apatita (fontes de ETRL, Nb e Ta da indústria soviética), e a itriosinchisita, que foi um mineral explorado no depósito de Kutessay (República do Quirguistão) para suprir a deficiência de ETRP na Comunidade dos Estados Independentes (CEI).

A determinação da abundância relativa de ETR em um minério é de grande importância para o processo produtivo, já que um mesmo mineral pode conter concentrações e padrões de ETR diferentes, o que exige maior conhecimento de sua mineralização. Além de possuírem químicas e mineralogias complexas, geralmente os ETR estão associados a elementos radioativos como Th e U (LONG et al., 2010).

As fases minerais que requerem tecnologias de extrações distintas significam uma separação do minério que tem alto custo e baixo rendimento, reduzindo assim as margens de lucro do processo produtivo. A maior dificuldade do processo metalúrgico/hidrometalúrgico está relacionada às características particulares de cada mineral, não sendo possível usar o mesmo processo para minerais diferentes (LONG et al., 2010). As mesmas dificuldades se repetem na etapa de refino, que

também envolve diversas etapas de processamento químico, destinadas à remoção de impurezas. Assim, antes de iniciar a atividade produtiva propriamente dita do aproveitamento de terras-raras (abertura de mina), o material mineral contendo ETR deve ser ensaiado, analisado e testado por vários métodos de extração. Isso é feito, geralmente, em escala de laboratório (bancada) e, posteriormente, em planta piloto (planta de processamento industrial em uma escala reduzida) para se determinar o processo com melhor custo-benefício.

Contudo, os depósitos de ETR que possuem mineralogia mais simples e reduzida ou mesmo presença desprezível de elementos radioativos apresentam vantagens competitivas no que tange aos custos operacionais.

### **2.2.2 Tipos de depósitos**

Encontrar concentrações econômicas de ETR não é tarefa fácil, pois os depósitos desses elementos podem ser encontrados em distintos ambientes geológicos e associados a vários tipos rochas com diferentes propriedades e composições mineralógicas. Nesse contexto, torna-se imperioso o estudo dos tipos de depósitos formados pelos vários tipos de rochas, levando em conta suas características e particularidades. O Serviço Geológico Britânico publicou, em sua série *Commodity/Mineral Profiles*, um relatório sobre terras-raras, no qual foi considerada a existência de quatro tipos de depósitos primários e cinco secundários (UNITED KINGDOM, 2011).

O quadro 2 mostra os tipos de depósitos de terras-raras, número de ocorrências registradas, características e os principais exemplos pelo mundo.



Quadro 2 – Tipos de depósitos de terras-raras, número de ocorrências registradas, características e principais exemplos pelo mundo.

Associação	Nº de registros	Características	Reservas/Teores OTR	Principais exemplos
<b>Depósitos primários</b>				
Associados a carbonatitos	107	Complexos alcalinos/ zonas de falha	Dezenas de milhares a várias centenas de milhões de toneladas / 0,1-10%	Mountain Pass (EUA), Bayan Obo (China), Okorusu (Namíbia); Barra do Itapirapuã (Brasil); Iron Hill (USA)
Associados a rochas alcalinas	122	Rochas ricas de minerais alcalinos e enriquecimento em HFSE	Dezenas a mais de 1000 milhões de toneladas / <5%	Ilimaussak (Groenlândia), Khibiny e Lovozero (Rússia), Thor Lake e Strange Lake (Canadá), Weishn (China), Brockman (Austrália.), Pajarito Mountain (EUA)
Depósitos de Fe-TR (Óxi. de ferro-Cu-Au)	4	Depósitos de Cu-Au ricos de óxidos de Fe	Olympic Dam: 2000 milhões de toneladas / 0,3295%	Olympic Dam (Austrália), Pea Ridge (EUA)
Depósitos hidrotermais	63	Veios poliminerálicos de quartzo, fluorita e pegmatitos	Comum, < 1 milhão de toneladas, raramente até 50 milhões de toneladas / 0,5-4% (raramente até 12%)	Karonje (Burundi); Naboomspruit e Steenkampskraal (África do Sul); Lehmi Pass, Snowbird e Bea Lodge (EUA); Hoidas Lake (Canadá)
<b>Depósitos secundários</b>				
<i>Placers</i> marinhos	264	Acumulações de minerais pesados em areias de praia e cordões litorâneos	Reservas muito variáveis, de dezenas até 1-3 centenas de milhões de toneladas / < 1% de monazita	Eneaba, Jangarup, Capel, WIM 150 (Austrália); Green Cove Springs (EUA); Richards Bay (África do Sul); Chavara (Índia)

Quadro 2 (Continuação) – Tipos de depósitos de terras-raras/número de ocorrências registradas, características e principais exemplos pelo mundo.

<b>Associação</b>	<b>Nº de registros</b>	<b>Características</b>	<b>Reservas / Teores OTR</b>	<b>Principais exemplos</b>
<i>Placers</i> Aluvionares	78	Acumulações de minerais pesados em canais fluviais	Dezenas até <200 milhões de toneladas / < 0,1% de monazita	Perak (Malásia); Chavara (Índia); Carolina monazite belt e Horse Creek (EUA); Guangdong (China)
<i>Paleoplacers</i>	13	Antigos <i>placers</i> consolidados	Dezenas de milhões de toneladas até 100 milhões de toneladas / <0,1%	Elliot Lake (Canadá); Bald Mountain (USA)
Depósitos Lateríticos	2	Depósitos residuais formadas a partir de intemperismo químico intenso de rocha ígnea enriquecida com ETR	Dezenas de milhares a várias centenas de milhões de toneladas / 0,1-10%	Mount Weld (Austrália); Kangankunde (Malawi)
Argilas com íons adsorvidos	>100	Depósitos de argila residuais formados a partir do intemperismo de granitos enriquecidos com ETR	A maioria < 10.000 toneladas / 0,03 - 0,35%	Longnan e Xunwu (China)

Fonte: Adaptado de UNITED KINGDOM (2011).

Como se observa no Quadro 2, os depósitos de ETR podem ser encontrados em diferentes ambientes geológicos e associados a vários tipos de rochas. Considerando a divisão simplificada apresentada no Quadro 2, o Quadro 3 mostra uma classificação para os depósitos brasileiros de ETR.

Quadro 3 – Classificação dos depósitos brasileiros de ETR.

<b>Tipos</b>	<b>Associação</b>	<b>Tipos</b>	<b>Exemplos</b>
<i>Primários</i>	Carbonatito	Magmáticos/ Veios e <i>tockworks</i>	Araxá (MG), Catalão (GO), Seis Lagos (AM)
	Rochas peralcalinas subsaturadas em sílica	<i>Plutons/stocks</i> e diques	Repartimento (RR), Morro do Ferro (MG)
	Rochas Graníticas	Granitos diferenciados	Pitinga (AM), Serra Dourada (GO), Granitos Rondonianos (RO)
<i>Secundários</i>	<i>Placer</i> marinho	Sedimentar	Buena (RJ), Guarapari (ES), Cumuruxativa (BA)
	<i>Placer</i> fluvial	Sedimentar	São Gonçalo do Sapucaí (MG), Pitinga (AM)
	Argilas com íons de ETR adsorvidos	Perfil laterítico	Serra Dourada (GO)

Fonte: Adaptado de Takehara (2015).

A seguir será feita uma explanação sucinta dos tipos principais de depósitos de ETR e sua relevância para o processo produtivo, iniciando pelos depósitos classificados como primários (rochas alcalinas/carbonatíticas, rochas peralcalinas subsaturadas em sílica, rochas graníticas diferenciadas).

Os depósitos primários são constituídos de rochas ígneas e vêm tendo maior importância desde a década de 1960, em razão do aumento de sua participação na produção mundial de ETR (CHAKHMOURADIAN; ZAITSEV, 2012). Dos atuais 78 depósitos/ocorrências mais relevantes no mundo, incluindo os 58 projetos avançados de ETR (HATCH, 2015), a maioria é do tipo classificado como primário (72%), associado a rochas carbonáticas (34%) e rochas alcalinas (23%) (UNITED KINGDOM, 2011). No início da década de 1990, a produção total de ETR estava em torno de 50.000 toneladas e de 30 a 35% da produção vinham dos depósitos de Mountain Pass (EUA); de 5 a 10% dos depósitos vinham da China, todos associados a carbonatitos; além disso, de 10 a 15% eram provenientes das minas de Ioparita em nefelina sienitos de Lovozero na Rússia (CHAKHMOURADIAN; ZAITSEV, 2012).

Os depósitos secundários – *placers*, depósitos de intemperismo residual (supergênico) lateríticos – ocorrem sobre fontes primárias enriquecidas, que são rochas com alto teor desses elementos. No entanto, normalmente não apresentam

favorabilidade no seu aproveitamento econômico. São depósitos gerados por concentração associada aos processos de intemperismo, enriquecimento supergênico, como laterização, e também por processos de transporte e sedimentação. As argilas, por possuírem poder de adsorção de íons, vêm se tornando fontes importantes de ETR e representam a maior fonte de ETRP em produção atualmente, principalmente na Província de Jiangxi (China). Esse tipo de depósito ocorre em perfis de alteração sobre rochas graníticas, nos quais a acumulação de ETRP + Y é fortemente controlada pelos minerais acessórios ricos em ETR resistentes ao intemperismo (BAO; ZHAO, 2008; KYNICKY; SMITH; XU, 2012). Os depósitos classificados como secundário representam 28% dos atuais 78 depósitos/ocorrências mais relevantes no mundo, incluindo os 58 projetos avançados de ETR (HATCH, 2015). Esses depósitos estão associados principalmente a *placers* que representam 14% do total (UNITED KINGDOM, 2011).

### 2.3 USOS E APLICAÇÕES

Considerados elementos “portadores de futuro”, os ETR, com suas propriedades químicas e físicas particulares, podem ser utilizados numa grande variedade de aplicações tecnológicas. Até a década de 1950, com poucas exceções, as TR eram tidas como meras curiosidades de laboratório, sobretudo em virtude da grande dificuldade de obtenção de seus compostos puros. As principais aplicações dos ETR até essa época eram a fabricação de mantas para lâmpadas a gás e a manufatura de pedras para isqueiros – *mischmetal*, liga contendo 50% de Ce, 25% de La e diferentes quantidades de Pr, Nd, Fe e Mg (SERRA et al., 2015). A partir de 1964 até os anos 1980, o consumo de ETR cresceu cerca de 25% ao ano. Até 1972, o maior consumo era para ETR mistos (*mischmetal*), e apenas cerca de 1% era usado como ETR individual.










Segundo Serra et al. (2015), um dos fatores impulsionadores da obtenção de ETR puras foi o Projeto Manhattan (Molycorp, Inc., EUA), com o emprego de técnicas de cromatografia de troca iônica para a separação de lantanídeos como modelo para a separação de actinídeos. A utilização dessas técnicas e o desenvolvimento de outros processos (como a cromatografia de extração e extração com solventes) contribuíram imensamente para a evolução no aumento de volume recuperado de ETR e no nível de pureza deste, permitindo assim o desenvolvimento

das aplicações conhecidas até o momento. Atualmente, o uso dos ETR é mais distribuído em diversos setores industriais, já que esses elementos são indispensáveis em aplicações eletrônicas, ópticas e magnéticas, na indústria de catalisadores e em uma porção de outros equipamentos e dispositivos de alta tecnologia. À medida que avançam as pesquisas, outras aplicações para ETR vão sendo descobertas, especialmente nas áreas de conservação e eficiência energética, de proteção ao meio ambiente, de refrigeração magnética, de células de combustível, de tratamento de água, da biologia e de equipamentos para a área médica.

Vale destacar que os elementos escândio e ítrio são considerados ETR pelo fato de possuírem características físico-químicas similares aos elementos do grupo dos lantanídeos. O ítrio é comumente encontrado nos mesmos depósitos minerais onde se encontram os lantanídeos, o que raramente acontece com o escândio. O promécio é um elemento radioativo e raramente é encontrado na natureza (UNITED KINGDOM, 2011).

O Quadro 4 mostra as principais características individuais dos ETR e a Figura 2 ilustra alguns dos principais usos e aplicações dos ETR. E o Quadro 5 apresenta, resumidamente, informações adicionais sobre alguns usos e aplicações industriais dos ETR e suas funcionalidades.

Quadro 4 – Principais características individuais dos ETR.

 <p>La Lantânio</p>	<p>O metal lantânio é de cor branco-prateada, maleável, dúctil e mole o bastante para ser cortado com uma faca. É um dos ETR mais reativos, oxida rapidamente quando exposto ao ar. Reage exotermicamente com ácidos concentrados ou diluídos.</p>
 <p>Ce Cério</p>	<p>O cério é macio, maleável e dúctil, com brilho metálico e cor prateada. Perde o lustro rapidamente em presença do ar. O metal é rapidamente atacado em soluções alcalinas e os ácidos diluídos e concentrados. O cério reage lentamente em água fria e rapidamente em água quente. Queima espontaneamente em contato com o ar atmosférico, quando em pó ou se o metal sólido for arranhado com um objeto qualquer.</p>
 <p>Pr Praseodímio</p>	<p>O praseodímio é metal prateado, macio, dúctil, mais resistente a corrosão no ar do que európio, lantânio, cério ou neodímio. É muito reativo quando exposto ao ar, desenvolvendo uma cobertura de óxido verde que se fragmenta e expõe mais metal para oxidação. Por essa razão, o praseodímio deve ser armazenado imerso em óleo mineral ou selado em plástico ou vidro (guardado ao abrigo do ar); é medianamente tóxico.</p>
 <p>Nd Neodímio</p>	<p>O neodímio é um metal relativamente reativo, que deve ser guardado em recipiente fechado em virtude de reagir com o oxigênio vigorosamente. É um metal prateado que escurece no ar, formando óxido.</p>
 <p>Pm Promécio</p>	<p>O promécio não é encontrado de forma natural na terra. Apesar de pouco conhecimento das propriedades químicas do promécio, sabe-se que ele é um metal reativo que logo que exposto ao ar reage vigorosamente com o O<sub>2</sub>, formando óxido de promécio Pm<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. O promécio deve ser manuseado com extremo cuidado em virtude de sua alta temperatura, oriunda de sua alta taxa de decaimento e emissão radioativa.</p>
 <p>Sm Samário</p>	<p>O samário é um metal medianamente reativo, visto que é necessário que ocorra aumento de sua temperatura para observar as reações do metal. Quando o elemento atinge uma temperatura de 150°C, ele reage vigorosamente com o oxigênio do ar formando óxido de samário (SmO<sub>2</sub> e/ou SmO<sub>3</sub>), reage com ácidos fortes concentrados ou diluídos como HNO<sub>3</sub> e HCl principalmente, formando sais e hidrogênio. Porém, os sulfetos de samário apresentam melhor estabilidade em temperatura ambiente e temperaturas em torno de 1100°C, o que mostra ótima eficiência térmica.</p>
 <p>Eu Európio</p>	<p>O európio é o mais reativo dos ETR; oxida-se rapidamente ao ar e assemelha-se ao cálcio na sua reação com a água. Como outros ETR (com exceção do lantânio), o európio inflama-se com o ar entre 150°C e 180°C, aproximadamente. Apresenta uma ductilidade muito alta e é tão duro quanto o chumbo. Tem um magnetismo elevado em condições normais de temperatura e pressão. Esse elemento possui supercondutividade a baixas temperaturas de -271,35°C e a pressões de 80 (GPa).</p>
 <p>Ga Gadolínio</p>	<p>O gadolínio é branco-prateado, maleável, dúctil com um brilho metálico e é fortemente magnético à temperatura ambiente (possui dois elétrons desemparelhados). Ao contrário dos demais ETR, o gadolínio é relativamente estável no ar seco, porém perde o brilho rapidamente no ar úmido, formando um óxido que adere frouxamente à superfície que, se for retirado, expõe a superfície a uma oxidação adicional. O gadolínio reage lentamente com a água e é solúvel em ácido diluído.</p>
 <p>Tb Térbio</p>	<p>O térbio é um metal medianamente reativo, estável em contato com o ar em temperatura ambiente. Quando o metal é submetido a temperaturas superiores a 100°C, observa-se a formação de Tb<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, que apresenta uma coloração marrom-escuro semelhante ao chocolate em pó; em temperaturas superiores a 1200° C ocorre uma mudança na estrutura cristalina do metal.</p>

Quadro 4 (Continuação) – Principais características individuais dos ETR.

<p><b>Dy</b> Disprósio</p>	<p>O disprósio é um metal pouco reativo que apresenta estabilidade quando em contato com o oxigênio do ar em temperatura ambiente. Porém, é extremamente reativo quando aquecido, reagindo vigorosamente com o ar. É atacado lentamente por ácidos diluídos e/ou concentrados, formando sais e liberando hidrogênio e energia até a completa dissolução do metal. O disprósio apresenta brilho metálico prateado, é macio o bastante para ser cortado com uma faca e pode ser processado com máquinas sem emitir faíscas, evitando o superaquecimento. É um metal que sofre acentuada influência de impurezas, que acabam por afetar suas características físicas e químicas.</p>
<p><b>Ho</b> Hólmio</p>	<p>O hólmio é um metal relativamente estável quando exposto ao ar atmosférico, desde que o ar esteja seco e a temperatura de 25°C. Quando o metal é exposto a temperaturas superiores a 1000°C, ou ao ar úmido, observa-se a formação de uma película amarela em sua superfície de óxido de hólmio (Ho<sub>2</sub>O<sub>3</sub>). O hólmio reage lentamente com ácidos minerais ou orgânicos que podem estar concentrados ou diluídos, desprendendo hidrogênio e formando sais. É um metal macio, maleável, razoavelmente resistente à corrosão. Na forma pura, o hólmio apresenta um aspecto metálico, prateado e brilhante.</p>
<p><b>Er</b> Érbio</p>	<p>O érbio é um metal medianamente reativo, que não oxida em contato com ar atmosférico logo que é exposto como os outros metais. Porém, quando levado diante do aquecimento ou de atmosfera úmida, o érbio sofre oxidação, formando óxido de érbio, que apresenta uma coloração pastel. É um elemento metálico, que na forma pura é maleável, macio. Seus sais são coloridos (rosa) e o elemento tem faixas de absorção espectral no visível, ultravioleta e próximo do infravermelho, o que está associado com a sua configuração eletrônica.</p>
<p><b>Tm</b> Túlio</p>	<p>O túlio é um metal maleável que pode ser cortado com uma faca; possui cor cinza-prateada e tem boa ductilidade. Apresenta certa resistência a corrosão quando no ar seco. Nenhum dos compostos de túlio é comercialmente importante (o túlio tem pouca abundância no meio ambiente terrestre, por isso a sua utilização se tornou inviável pouco tempo depois de sua descoberta), mas uma aplicação fora de seu preço é a de produção dos raios X portáteis, sendo útil em consultórios odontológicos e médicos.</p>
<p><b>Yb</b> Ítérbio</p>	<p>O itérbio, apesar de ser estável, possui a necessidade de permanecer em um recipiente fechado livre de ar e umidade, pois reage com ambos. Ele é reativo com todos os elementos da família dos halogênios, formando haletos de itérbio, além de reagir lentamente com a água fria e rapidamente com a água quente, formando hidróxido de itérbio e hidrogênio gasoso. É um elemento macio, maleável e bastante dúctil que exibe um brilho prateado. O itérbio apresenta três alótropos, denominados de alfa, beta e gama, com pontos de transformação a -13°C e 795°C. A forma beta ocorre na temperatura ambiente e apresenta estrutura cristalina centrada nas faces; por outro lado, a forma gama ocorre em temperaturas elevadas e apresenta uma estrutura cristalina de corpo centrado. A forma beta tem condutividade elétrica similar à dos metais e se comporta como semicondutor em pressões próximas a 16.000 atm; a 39.000 atm sua resistência elétrica se multiplica por dez, porém a 40.000 atm cai bruscamente para próximo de 10% da sua resistividade à temperatura ambiente.</p>
<p><b>Lu</b> Lutécio</p>	<p>O lutécio é um metal de coloração branco-prateada, resistente à corrosão e relativamente estável em presença do ar e da umidade. É usado em tecnologias nucleares e na indústria do petróleo, tendo número atômico 71 e massa atômica 175, e características gerais comuns ao itérbio. É o elemento mais pesado e duro de todos os ETR. É o elemento mais difícil de se isolar, provocando assim sua valorização e, conseqüentemente, a redução de sua utilização pela indústria. Sua toxicidade iguala-se à dos demais de sua família (os lantanídeos).</p>

Fontes: Elaboração própria a partir de Los Alamos National Laboratory (2015) e Lira (2015).

Figura 2 – Ilustração de alguns dos principais usos e aplicações dos ETR.

**Proteção contra raios UV e tratamento de Água**  
 1; 2; 6; 12:

**Auto-falantes e Microfones**  
 3; 4; 6

**Lasers**  
 6; 7; 11; 14; 16

**Imagem em equipamento de Raio X**  
 3; 4; 9; 7; 10; 13; 16

**Composto para polimento de vidro**  
 - Componentes cerâmicos  
 - Capacitores cerâmicos

**Automóveis: Híbridos / Elétricos**  
 1; 2; 3; 4; 7; 9; 10; 14; 15; 16; 17

**Bateria (NIMH)**  
 - Catalisador (emissão)

**Vidro**  
 - com proteção UV  
**Liga de aço/metálica**  
 Aditivos para combustível  
 Tela de multimídia  
 Motor e gerador (híbrido/elétrico)  
 Sistema integrado automático de partida  
 E outros acessórios

**3; 4; 7; 8; 9; 10; 12; 16; 17**  
 Materiais e equipamentos com tecnologia de Supercondutores  
 - chips de memória

**1; 2; 4; 9; 10;**  
 Câmeras fotográficas e Lentes

**2; 3; 4; 7; 8; 9; 10; 12; 16; 17**  
 Estruturas de aeronaves e comunicação por satélite, tecnologia e aeronáutica aeroespacial

**1; 2; 3; 4; 9; 15; 17**  
 catalisadores automotivos e Refino de Petrólio

**1; 2**  
 Baterias de níquel-metal-hidreto (Ni-MH)

**1; 2; 3; 4; 7; 9; 16**  
 - Smartphone  
 - Tablet  
 - computadores  
 - disco-rigido  
 - Monitores de vídeo

**1; 2; 7; 9; 16**  
 Lâmpadas fluorescentes e diodo emissores de luz (LEDs)

**3; 4; 6; 8; 9; 10; 14**  
 Ímãs Permanentes:  
 - Para diversas aplicações  
 - Geradores para Energia Eólica

**1; 14; 12; 17;**  
 Ligas de aço

**7; 11; 12;**  
 Reator Nuclear

**1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 10; 11; 14; 15; 16; 17**  
 Uso militar:  
 - Drones  
 - Bombas inteligentes  
 - Missel tomahawk  
 - Equipamentos de visão noturna  
 - Caças de combate  
 - Tanque Bradley  
 - Colete à prova de bala  
 - Radar detectores  
 - Sistema de Orientação de mísseis e Anti-mísseis

**1** La Lantânio  
**2** Ce Cério  
**3** Pr Prascodímio  
**4** Nd Neodímio  
**5** Pm Promécio  
**6** Sm Samário  
**7** Eu Európio  
**8** Ga Gadolímio  
**9** Tb Térbio  
**10** Dy Disprósio  
**11** Ho Hólmio  
**12** Er Érbio  
**13** Tm Tálmio  
**14** Yb Itérbio  
**15** Lu Lutécio  
**16** Y Ítrio  
**17** Sc Escândio

Fonte: Elaboração própria, 2017.



Quadro 5 – Alguns usos e aplicações industriais dos ETR e suas funcionalidades.

Uso industrial	Aplicação	Funcionalidades	ETR
Motores elétricos em veículos convencionais e avançados	Ímãs permanentes de ETR	Redução de consumo de combustível pela diminuição do peso do veículo	Nd, Pr, Dy, Tb
Geração de energia eólica e hidrelétrica	Ímãs permanentes de ETR	Geradores sem engrenagem para maior confiabilidade e desempenho	Nd, Pr, Dy, Tb
Lâmpadas fluorescentes compactas e lineares, LEDs etc.	Fósforos	Redução de 70% no consumo de energia, mantendo características de cor e luminescência	Y, Eu, Tb
Baterias de níquel-metal-hidreto (Ni-MH)	Armazenamento de energia	Melhor custo-benefício em comparação com baterias de íons de lítio	La
Capacitores de elevada densidade de energia	Capacitores cerâmicos, de tântalo e de outros tipos dopados com ETR	Alta densidade energética em comparação com capacitores convencionais	La, Ce, Pr, Nd, Y, Eu, Gd, Lu, Dy
Sistema integrado automático de partida	Ímãs permanentes de ETR	Redução do consumo de combustível	Nd, Pr, Dy, Tb
Unidades de discos rígidos para computadores	Ímãs permanentes de ETR	Redução do tamanho de motores elétricos, que se tornam mais compactos, leves e potentes	Nd, Pr, Dy, Tb
Dispositivos pessoais móveis sem fio	Ímãs permanentes de ETR e fósforos	Miniaturização dos <i>displays</i> para uso em telas planas	Nd, Pr, Dy, Tb, Y, Eu, Gd, Ce
Fibras óticas	Amplificação de sinal	Ganhos na amplificação do sinal resultante da mistura química de ETR à sílica, matéria-prima das fibras óticas	Y, Eu, Tb, Er
Telas planas de TV e <i>displays</i>	Fósforos de ETR (excitados por UV em baixa pressão)	Propicia cores brilhantes em grandes telas planas	Y, Eu, Tb, Gd, Pr, Ce
Unidade de craqueamento catalítico em leito fluidizado	Catalisadores utilizados no refino de petróleo	Propiciam sítios ácidos para a matriz catalítica	La, Ce
Diagnóstico por imagem (MRI), imagem por raios X	Ímãs permanentes e mudanças no comprimento de onda	Geração de campo magnético e captura de luz por cintilação	Nd, Pr, Dy, Tb, Y, Eu
Produção de lâmpadas de vapor de mercúrio, ligas metálicas; indústria aeroespacial e nuclear e esportiva (por exemplo, fabricação de bastões de <i>baseball</i> )	Iluminação e supercondutores; a adição do metal alumínio aumenta o ponto de fusão, com aplicação nas indústrias aeroespacial e aeronáutica	Produção de lâmpadas de vapor de mercúrio, como óxido de escândio ( $Sc_2O_3$ ), obtendo-se luz artificial de mais alta qualidade; o iodeto de escândio ( $ScI_3$ ) gera fonte de luz parecida com a luz solar	Sc
Fonte de radiações beta para produzir medidores de espessuras muito finas; pode ser usado na fabricação de baterias muito pequenas que convertam a luz em corrente elétrica (por meio de fotocélulas)	Pode ser usada para produzir baterias muito pequenas que convertam a luz em corrente elétrica; também pode ser fonte de radiações beta para produzir medidores de espessuras muito finas	A radiação beta, ao incidir sobre o fósforo, gera luz. Seus sais luminescentes podem ser usados para a produção de ponteiros e mostradores de relógio	Pm

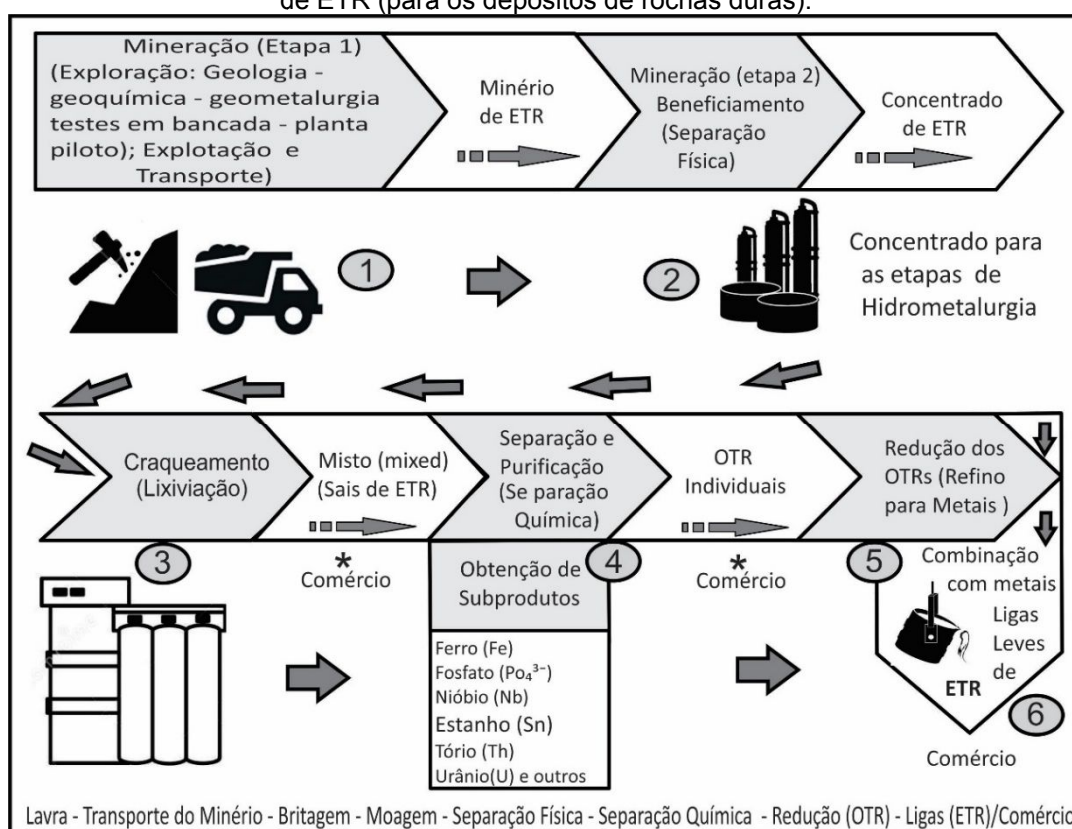
Fontes: Adaptado de CGEE (2013); Lapido-Loureiro (2013); United Kingdom (2011).

## 2.4 ASPECTOS TÉCNICO-ECONÔMICOS, CONJUNTURAIS E GEOPOLÍTICOS DO SETOR DE TERRAS-RARAS

### 2.4.1 Cadeia produtiva dos ETR

A cadeia produtiva dos ETR é constituída de várias etapas, que serão detalhadas nesta seção. A Figura 3 mostra de forma simplificada um desenho esquemático das principais etapas envolvidas no processo produtivo de ETR para depósitos de rochas duras (depósitos primários).

Figura 3 – Desenho esquemático simplificado das principais etapas envolvidas no processo produtivo de ETR (para os depósitos de rochas duras).



Fonte: Elaboração própria.

Nota: \* A comercialização de terras-raras pode ocorrer no estágio de produção "misto" ou no estágio dos óxidos separados, dependendo do objetivo do projeto.

① Sumariamente, o início da cadeia produtiva se dá com a exploração mineral (por meio de geologia, geoquímica/mineralogia e outra ferramenta de controle, muito importante, que vem sendo cada vez mais utilizada: a geometalurgia). Essas pesquisas, entre outras informações importantes, fornecem dados sobre a qualidade e tonelagem do depósito almejado. É iniciada a etapa de exploração do minério de

terras-raras. Porém, antes de se colocar uma jazida em lavra (mina), são necessários muitos estudos no que concerne ao tipo de depósito e a sua mineralogia/geoquímica, visando a determinar a melhor rota tecnológica de aproveitamento dos recursos com a melhor economicidade possível.

Os trabalhos geralmente são iniciados em bancadas (escala de laboratório) e depois evoluem para plantas-piloto. Essa etapa é indispensável na mineração em geral, especialmente no caso das terras-raras. Isso porque as concentrações e associações dos ETR individuais variam muito com o tipo de mineral e o depósito. Além disso, a mineralogia de alguns desses depósitos é tão complexa que pesquisas adicionais são necessárias para o desenvolvimento da tecnologia de processamento adequada para a viabilidade do empreendimento mineiro. Os principais fatores que afetam a seleção de processos de tratamento são listados abaixo (FERRON et al., 1991 apud UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2012):

- tipo e natureza do depósito (por exemplo, areia de praia, rochas ígneas, tipos de veios e minérios complexos) e sua complexidade;
- tipo e natureza de outros minerais valiosos presentes com óxido de terras-raras (OTR);
- tipo e natureza dos minerais ganga presentes no depósito (por exemplo, argila, ganga solúvel);
- tipo e composição dos minerais (óxidos de terras-raras individuais); e
- a aceitabilidade social e ambiental do processo.

As fontes minerais com rotas tecnológicas mais conhecidas atualmente para a produção de terras-raras são seis:

- bastnaesita [(Ce, La) (CO<sub>3</sub>) F];
- monazita [(Ce, La) PO<sub>4</sub>];
- xenotímio (YPO<sub>4</sub>);
- loparita [(Ce, Na, Ca) (Ti, Nb) O<sub>3</sub>];
- apatita [(Ca, ETR, Sr, Na, K)<sub>3</sub> Ca<sub>2</sub> (PO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> (F, OH)]; e
- argilas com íons adsorvidos.

Desses, os três primeiros minerais (bastnaesita, monazita e xenotímio) são de longe as mais importantes fontes de terras-raras (JORDENS et al., 2013). O aproveitamento de ETR proveniente de recursos de loparita, atualmente, ocorre

apenas na Rússia (VERESCHAGIN et al., 2006). Enquanto isso, os ETR provenientes de apatita são subprodutos de algumas operações de produção de fertilizantes fosfatados. Quanto aos depósitos de argilas com íons adsorvidos, no momento as únicas fontes de produção de ETR estão localizadas em algumas províncias no sul da China.

Não se pode deixar de destacar o fato de os minérios de terras-raras possuírem radionuclídeos (urânio e tório) em sua composição. A baixa concentração de ETR associada à presença de elementos radioativos pode dificultar consideravelmente o aproveitamento das terras-raras, já que a separação destes elementos por processos químicos complexos com várias etapas pode causar graves danos ao meio ambiente quando não são tomadas as devidas providências. Além disso, os elementos radioativos adicionam ao processo de aproveitamento mineral uma problemática, pois trazem consigo a necessidade de adequações a regras especiais de manuseio, armazenamento e licenciamento ambiental, além dos custos adicionais relacionados. Mas há casos em que os radionuclídeos não representam grandes problemas, quando o aproveitamento é realizado em depósitos que possuem concentrações consideradas normais para os padrões médios encontrados naturalmente na crosta terrestre. A abundância do urânio e do tório na crosta oscila entre 2–3 ppm e 8–12 ppm, respectivamente (INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, 2003).

Ao analisar os principais minerais de terras-raras (as principais fontes de produção de terras-raras pesadas no mundo), Jordens et al. (2013) concluíram que é comum encontrar até 5% de urânio no xenotímio, ao passo que raramente se encontra urânio na monazita, embora, ocasionalmente, isso possa ocorrer, e quando isso acontece é em elevada concentração (cerca de 16%).

Grandes proporções de tório, até 20%, são comumente encontradas na monazita. A bastnaesita geralmente hospeda pequena quantidade de urânio e, muitas vezes, determinada quantidade de tório. As argilas com íons adsorvidos (encontradas principalmente na China) contêm quantidades muito pequenas de urânio e tório: cerca de 20–30 ppm de  $\text{ThO}_2$  e  $\text{U}_3\text{O}_8$ , com base em óxidos totais de terras-raras (OTR) (WANG, 2006; WANG; TANG, 2007 apud ZHU et al., 2015).

Os recursos de argilas com íons adsorvidos encontrados no sul da China são ricos em ítrio e outras terras-raras pesadas. Nos depósitos dessa região não foram tomadas medidas para o controle da radiação de urânio e tório; a justificativa

principal para isso são as baixas concentrações destes elementos nos depósitos. É possível recuperar urânio economicamente como um subproduto, pois ele é vendável como combustível nuclear. No entanto, o tório tem apenas potencial futuro na indústria nuclear, uma vez que seu mercado atual é pequeno ou mesmo inexistente. Portanto, é geralmente o tório a principal preocupação em termos de implicações ambientais na produção de terras-raras (ZHU et al., 2015).

① ② Na etapa de mineração propriamente dita (exploração/lavra e beneficiamento), as operações são fortemente dependentes da natureza do depósito. Os resultados dos estudos de viabilidade econômica irão determinar, além do método de lavra (exploração), a rota tecnológica de aproveitamento do minério de TR mais adequada às informações obtidas na etapa de exploração. Uma das informações mais importantes para a viabilidade do empreendimento é se a lavra da futura mina será executada pelo método a céu aberto ou pelo subterrâneo, ou se serão utilizados os dois métodos durante a vida útil do empreendimento mineiro (o que vai depender da forma do corpo mineralizado e da espessura da camada de solo – capeamento – sobre o material de interesse: a relação estéril/minério). Contudo, a localização da jazida, a infraestrutura local (água, energia e acesso) e o método de exploração (a céu aberto ou subterrâneo) são variáveis que podem impactar muito o aumento dos custos e, conseqüentemente, a viabilidade do projeto, especialmente na etapa inicial da cadeia produtiva. A Figura 4 mostra uma frente de lavra de terras-raras (método a céu aberto) em uma área pertencente à companhia Jiangxi Copper Corp., em Chengdu, província de Sichuan, na China.

Figura 4 – Frente de lavra de TR (método a céu aberto) em Chengdu, província de Sichuan, China.



Fonte: Shutterstock.com (2011) apud Jamasmie, 2016.

Após a etapa de exploração (lavra do minério), inicia-se o beneficiamento do material mineral, que é fragmentado (britagem) e moído (no caso de depósitos de rochas duras). Em seguida, geralmente o material é submetido a uma separação física. Os métodos convencionais de separação física são: separação por gravidade, separação magnética, separação eletrostática e flotação. Mais recentemente, a classificação baseada em sensores tornou-se mais e mais estabelecida, e atualmente é amplamente utilizada no setor de mineração. Os benefícios da triagem automática usando sensores de cores, ou raios X ou infravermelhos próximos são cada vez mais conhecidos e, todavia, aceitos como um processo padrão de enriquecimento (TOMRA, 2017). Mais detalhes sobre essa técnica de beneficiamento podem ser obtidos nos trabalhos de Pires (2010), Veras et al. (2016), Nienhaus e Pretz (2014), e outros.

Os métodos de beneficiamento físico são métodos empregados para concentrar minérios de terras-raras, obtendo-se um concentrado que contém ETR com um teor econômico mínimo necessário para as etapas seguintes (JORDENS et al., 2013). O método de beneficiamento físico dependerá muito da mineralogia do depósito (GOLEV et al., 2013).

③ ④ ⑤ ⑥ O minério concentrado é subsequentemente lixiviado em solução química (obtendo um misto de ETR) num processo normalmente denominado de craqueamento. Os elementos individuais são seletivamente removidos da solução mista de ETR através de técnicas hidrometalúrgicas, como

por exemplo a extração com solvente e de troca iônica. Os produtos precipitados (na etapa de extração) podem ser comercializados na forma de óxidos de metais puros ou reduzidos a produtos de metal puro, ou seja, o produto dessa etapa primária de processamento é submetido à etapa de refino, na qual os óxidos de terras-raras, já separados, são refinados e convertidos em metais, que depois são combinados com outros metais para se produzirem as ligas contendo terras-raras (ligas leves de ETR).

O produto final do empreendimento vai depender do objetivo final almejado (o mercado para o qual o projeto de aproveitamento de depósito foi concebido).

Na etapa de mineração de depósitos secundários (etapa 2), há modificações nos métodos de exploração (lavra do minério) e também no processo de beneficiamento, já que esses são depósitos com características diferentes. Nesses depósitos, a etapa de beneficiamento, geralmente, não necessita de fragmentação com equipamento de britagem. Muitos dos processos industriais utilizam concentração gravítica, separação magnética e separação eletrostática como estágios de pré-concentração dos minerais portadores de terras-raras. Na prática industrial, esses métodos são frequentemente utilizados no beneficiamento de *placers* de origem marinha e fluvial (VIEIRA; LINS, 1997).

Nos depósitos de *placers*, a separação por gravidade (espirais) é tipicamente usada para remover a ganga de silicatos (GOLEV et al., 2013). A flotação seletiva é primariamente utilizada, sobretudo, no processamento de minérios de terras-raras de mineralogia mais complexa, como aqueles de origem hidrotermal ou magmáticos.

Os casos de destaque relatados na literatura nos quais se aplica a flotação seletiva em escala industrial para separação dos minerais de terras-raras são: o minério de ferro de Baiyun Obo, China, que contém bastnaesita e monazita; e o minério de Mountain Pass, EUA, que contém bastnaesita (VIEIRA, 1997). As argilas, devido a sua natureza, requerem pouco ou nenhum beneficiamento físico, sendo processadas diretamente usando métodos hidrometalúrgicos (CHI et al., 2001).

#### **2.4.2 Visão analítica do processamento do concentrado de ETR**

Após a obtenção do concentrado de ETR (após a etapa de beneficiamento do minério – separação física), o próximo passo é a dissolução, separação e purificação dos metais (separação química). Assim, os concentrados minerais são separados

em óxidos utilizáveis (misturas em metais de ETR de alta pureza). Para isso, tipicamente são utilizadas técnicas hidrometalúrgicas (por exemplo, lixiviação, extração, precipitação). A hidrometalurgia é uma das etapas mais importantes e caras da cadeia produtiva dos ETR (EURARE, 2016). Três operações unitárias devem ser consideradas:

- dissolução das terras-raras em ácido, por vezes a pressão e a temperatura elevadas;
- separação dos diferentes ETR em soluções puras e concentradas, com extração por solvente ou extração líquido iônico e troca iônica;
- geração de elementos de terras-raras individuais.

Há diversas alternativas para a realização de um processo de recuperação completa de metal, e para o desenvolvimento de tal processo é necessário combinar as distintas operações de forma única.

#### **2.4.2.1 Extração por solvente**

A extração por solvente é um procedimento de separação seletiva para isolar e concentrar substâncias a partir de soluções aquosas com o auxílio de um solvente orgânico imiscível. O procedimento rapidamente ganhou importância industrial na hidrometalurgia e tem sido amplamente adotado para a recuperação e separação das diferentes ETR em soluções puras e concentradas (EURARE, 2016).

Basicamente, a técnica de extração por solvente funciona da seguinte forma: uma solução de alimentação, aquosa, contendo ETR, é misturada com um solvente orgânico contendo um reagente. Os ETR reagem com o reagente para formar compostos que são mais solúveis no solvente orgânico e, conseqüentemente, são extraídos para este solvente. Uma etapa de lavagem poderá ser incluída no processo, a fim de limpar o solvente orgânico das substâncias coextraídas. Os ETR são, subseqüentemente, reextraídos a partir do solvente orgânico, misturando-o com uma “nova” solução aquosa na qual os ETR são novamente submetidos ao processo. Os ETR nessa solução encontram-se muitas vezes em concentrações de 10–100 vezes maiores do que a solução de alimentação original, o que é conseguido com ajustes de velocidade de fluxo no processo.



#### 2.4.2.2 Considerações gerais de separação dos ETR

A utilização de técnicas de extração conhecidas é possível graças às diferenças de basicidade (resultantes da diminuição do raio iônico do ETRL ao ETRP) entre as várias terras-raras, pois essa propriedade influencia a solubilidade dos sais, a hidrólise de íons e a formação de espécies complexas (GUPTA; KRISHNAMURTHY, 2004). Além de um estado de oxidação trivalente, o cério, o praseodímio e o térbio podem também ocorrer no estado tetravalente. E o európio, o samário e o itérbio, num estado divalente. Assim, a oxidação seletiva e a redução desses elementos de terras-raras são úteis num procedimento de separação eficaz, pois em estado divalente e tetravalente os ETR têm um comportamento físico químico diferente em comparação com o estado trivalente. Os ácidos organofósforos são os reagentes típicos de troca catiônica utilizados na separação dos ETR.

A reação de troca também depende do pH. Contudo, essas propriedades são a base das técnicas de separação (EURARE, 2016). As técnicas de extração, tais como a troca iônica, a cristalização fracionada e a extração líquido-líquido, foram desenvolvidas nas décadas de 1950 e 1960, após o entendimento da química dos lantanídeos, que foi a chave para a metalurgia dos actinídeos (CHAKHMOURADIAN; WALL, 2012).

Atualmente, vêm sendo desenvolvidas outras técnicas de extração, como eletroforese e bioextração, que podem vir a ser utilizadas como método industrial de separação de ETR. Embora os produtos resultantes desse processo já possuam valor de mercado, processamentos adicionais e refinação são necessários para se conseguirem produtos finais puros de metal de alta qualidade, maximizando assim seu valor econômico (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2012). Esses processos também são utilizados para recuperar ETR a partir de materiais reciclados (os processos de recuperação por reciclagem de ETR são relativamente incipientes). A escolha do método de extração de ETR depende da composição do material a ser processado. O Quadro 6 apresenta uma lista de métodos de extração de terras-raras.

Quadro 6 – Métodos de extração de terras-raras.

<b>Método</b>	<b>Tipo</b>	<b>Tratamento de extração</b>
<b>Extração líquido-líquido</b>	Hidrometalurgia	Solubilidade
<b>Extração sólido-líquido</b>	Hidrometalurgia	Solubilidade
<b>Fase sólida</b>	Hidrometalurgia	Solubilidade
<b>Troca iônica</b>	Hidrometalurgia	Afinidade Química
<b>Extração supercrítica</b>	Hidrometalurgia	Variação
<b><i>Electrowinning</i></b>	Eletrometalurgia	Eletronegatividade
<b>Eletrorrefino</b>	Eletrometalurgia	Eletronegatividade
<b>Refino <i>electroslag</i></b>	Pirometalurgia	Densidade

Fonte: Elaboração própria a partir de United States Environmental Protection Agency (2012) e Meyer e Bras (2011).

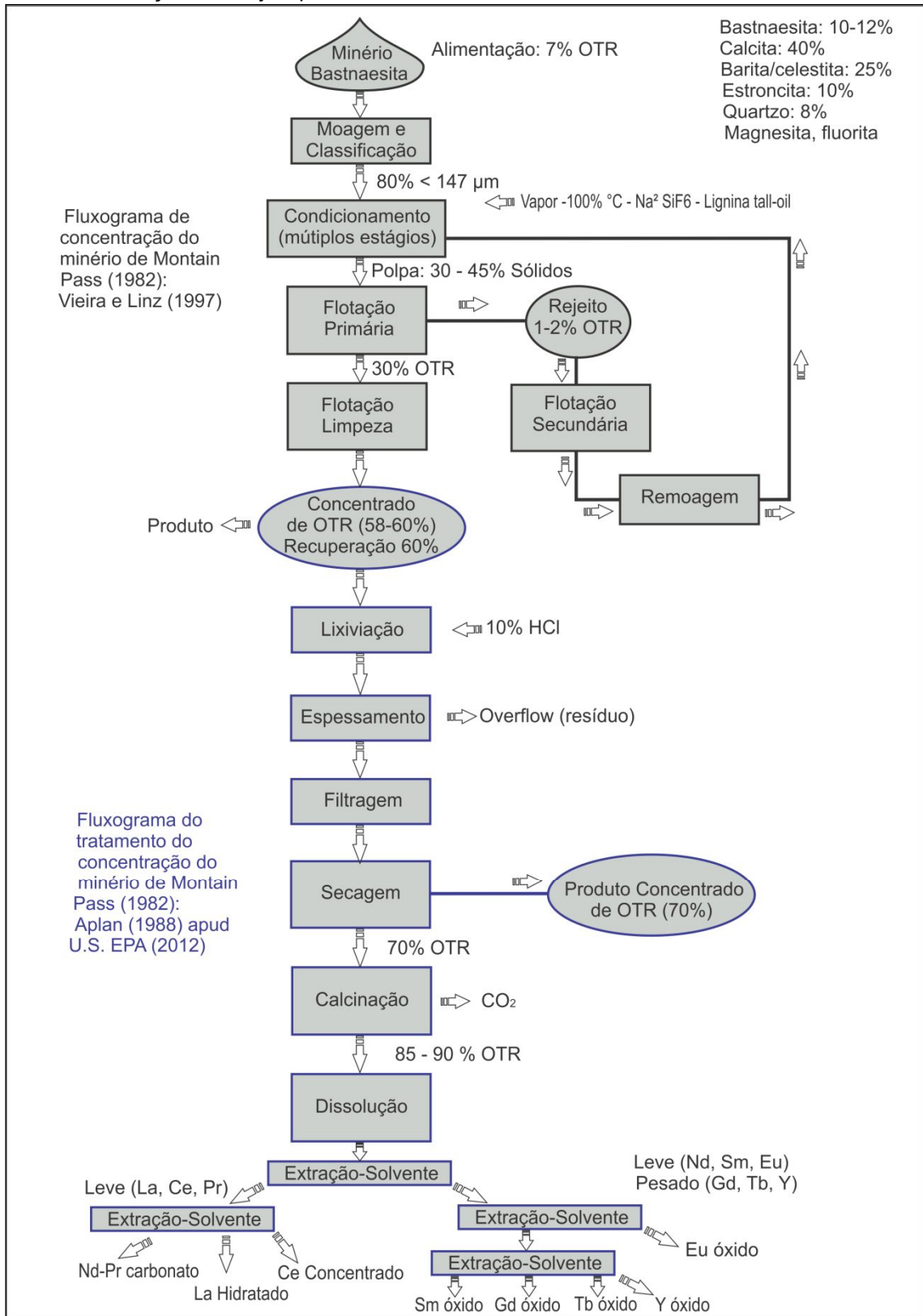
#### 2.4.2.3 Processo de redução

A libertação dos metais de elementos terras-raras (METR) a partir de compostos tais como os óxidos ou cloretos pode ser um processo muito difícil, devido à sua extrema estabilidade (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2012). Nesse contexto, vários métodos têm sido desenvolvidos para a resolução desse problema. No entanto, os três métodos principais utilizados para a obtenção de METR são: (1) redução de cloretos anidros ou fluoretos, (2) redução de óxidos de elementos de terras-raras e (3) eletrólise de sal fundido de cloretos de terras-raras ou misturas de óxido de flúor (GUPTA; KRISHNAMURTHY, 2004). Atualmente, apenas uma unidade produz ligas de terras-raras e metais de alta pureza nos Estados Unidos: em junho de 2016, a Molycorp Metals e Alloys, Inc. foi adquirida pela Eutectix LLC. A Molycorp Metals e Alloys, Inc. produz metais e ligas de terras-raras. A redução metalotérmica (fundição) é o método mais utilizado na obtenção de metais de terras-raras. Nesse processo, os redutores reagem no forno com oxidantes (por exemplo, oxigênio, sulfureto, carbonato) para separar e libertar o metal (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2012).

O processamento adicional por técnicas como a redução metalotérmica pode refinar os óxidos ou misturas de metal em metais de terras-raras de alta pureza. Alguns dos processos menos comuns que podem ser empregados na redução de compostos de terras-raras são eletrólise, redução gasosa, destilação a vácuo e cromatografia de partição centrífuga de alta *performance*.

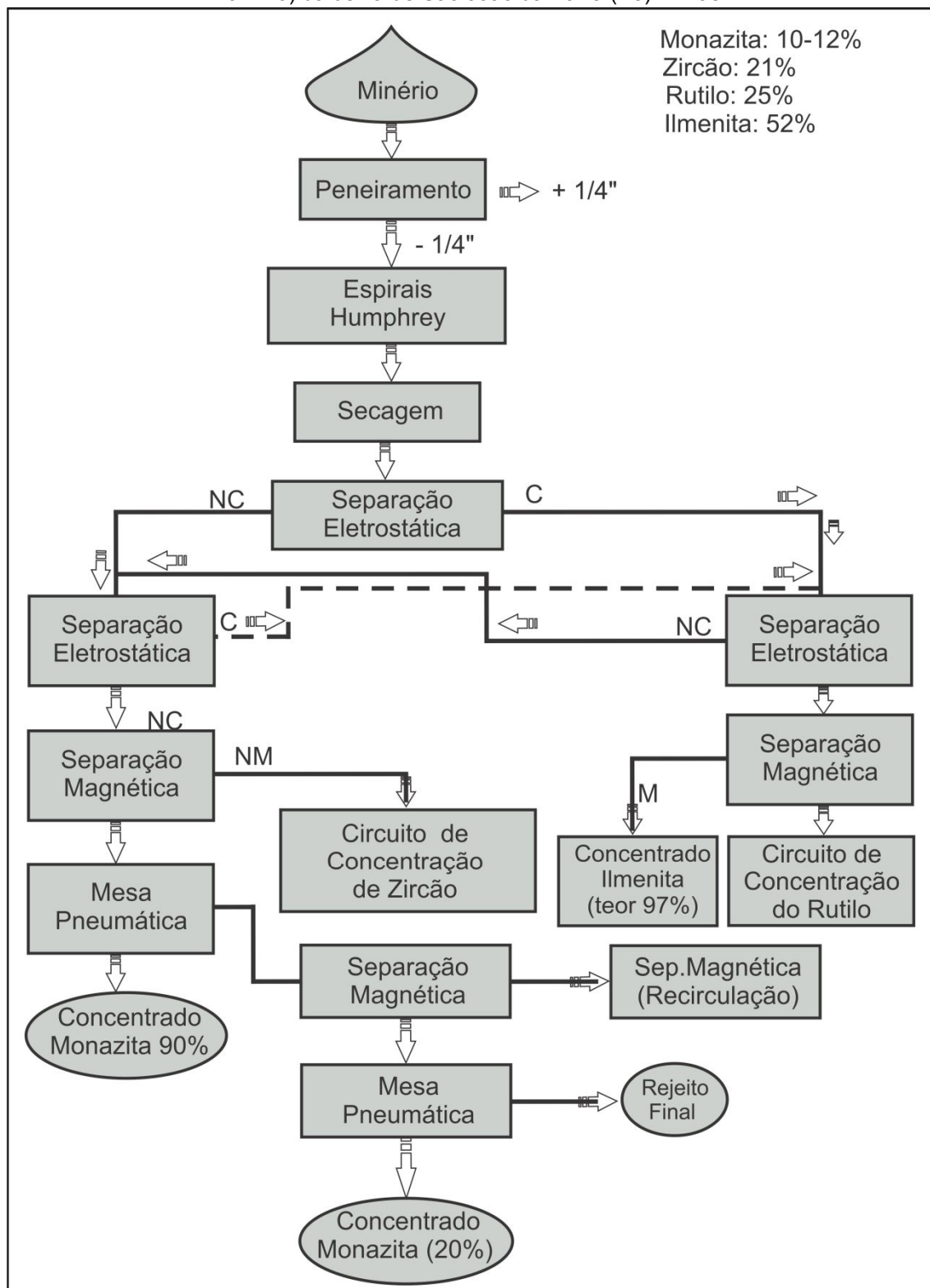
As Figuras 5, 6 e 7 mostram os fluxogramas de beneficiamento mineral (obtenção do concentrado) e processamento dos principais recursos de ETR: bastnaesita e monazita. O produto final desejado dita os passos de processamento subsequentes do concentrado de bastnaesita. Tipicamente, isso inclui processos de lixiviação, lavagem, filtração e secagem ou calcinação, dissolução e extração por solvente (em vários estágios), aumentando o teor de óxidos de terras-raras, que parte de 60% no concentrado até cerca de 90% após a etapa de separação/extração. Obtêm-se produtos com carbonato de neodímio-praseodímio, lantânio hidratado, cério concentrado, óxido de samário, dióxido de gadolínio, dióxido de térbio e óxido de európio (Figura 5 – ).

Figura 5 – Fluxograma de concentração e de tratamento do concentrado usados no projeto da mineração da Molycorp Inc. na *Unocal Plant*, Mountain Pass, Califórnia – EUA.



Fonte: Vieira; Lins (1997); Aplan (1988) apud United States Environmental Protection Agency (2012).

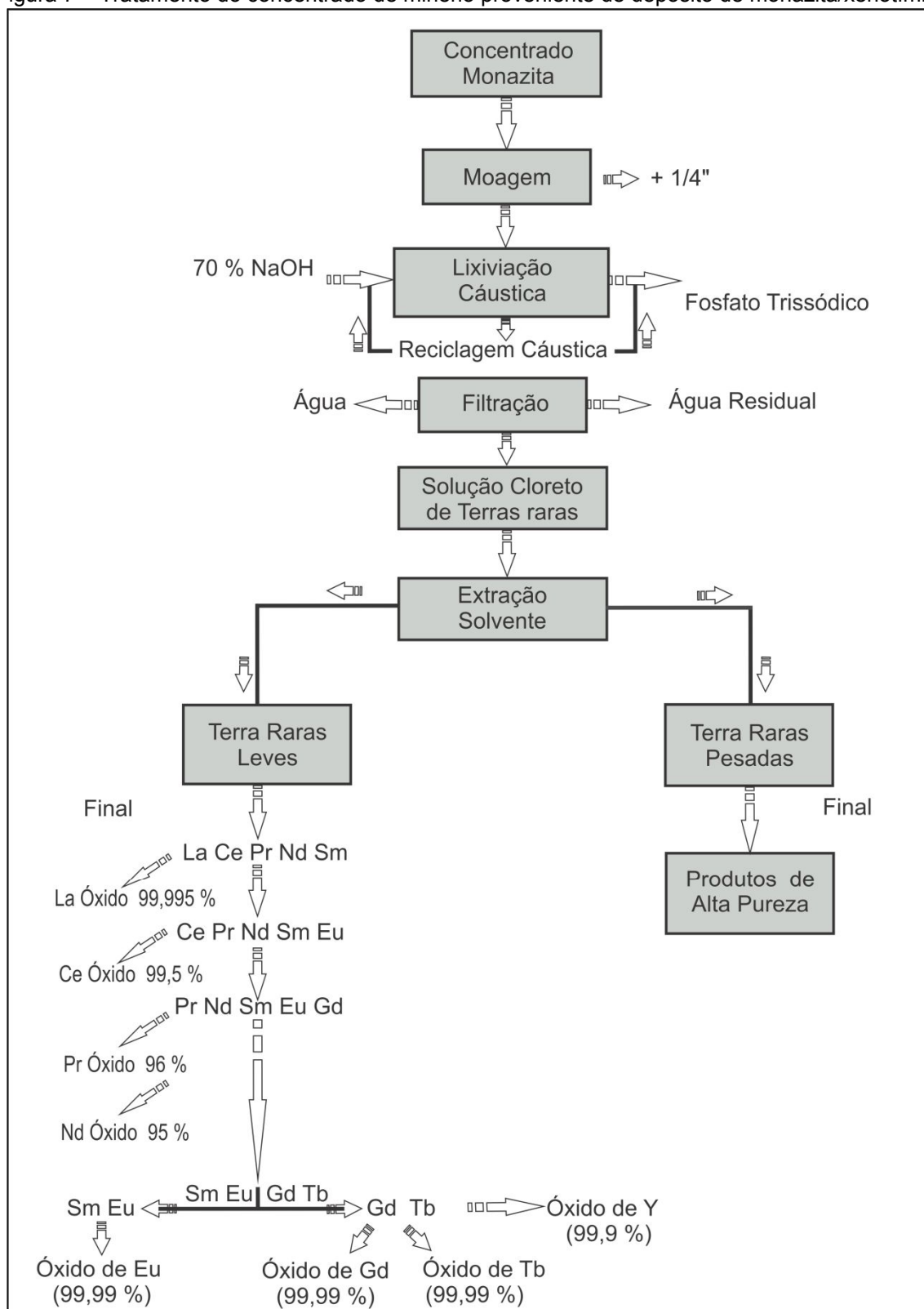
Figura 6 – Fluxograma simplificado da concentração de monazita (proveniente de depósito de *placer* marinho) da usina de São João da Barra (RJ) – Brasil.



Fonte: Adaptado de Vieira e Lins (1997).

Nota: C = condutores (ilmenita e rutilo); NC = não condutores (zircão, monazita e quartzo); M = concentrado magnético; NM = concentrado não magnético.

Figura 7 – Tratamento do concentrado de minério proveniente de depósito de monazita/xenotímio.



Fonte: Hart; Levins apud United States Environmental Protection Agency (2012).

Vale salientar que os equipamentos de processamento associados às etapas de extração da mina de Mountain Pass (*Molycorp Metals and Alloys*) encontram-se em atualização; dessa forma, o processo descrito aqui data de 1988, o que pode não refletir com precisão as práticas atuais. Importa destacar também que a Molycorp Inc. entrou como pedido de recuperação judicial em junho de 2015 com o intuito de reestruturar sua dívida com credores, por isso até o momento as atividades na mina de Mountain Pass encontram-se paralisadas.

A Figura 6 traz um fluxograma simplificado da concentração de monazita da usina de São João da Barra – RJ (Brasil), de concentrado proveniente de depósito secundário (*placer* marinho), com fluxograma datado de 1997. Atualmente, as atividades de lavra, beneficiamento e processamento de ETR provenientes de *placers* encontram-se paralisadas no Brasil (assunto tratado à frente na seção 2.4.5). Mais detalhes sobre o método de concentração da usina de São João da Barra podem ser obtidos no trabalho de Vieira e Lins (1997).

Um método comum de tratamento de concentrado de monazita/xenotímio será mostrado na figura 7. De forma resumida, primeiramente o concentrado proveniente da etapa de beneficiamento é digerido com 70% de hidróxido de sódio (NaOH), produzindo hidróxidos de terras-raras. Os hidróxidos de terras-raras são em seguida lixiviados com HCl para recuperar os cloretos de terras-raras solúveis. A solução de cloreto de terra-rara é então processada usando extração com solvente em vários estágios para a produção, individual, de óxidos de terras-raras de alta pureza 95–99,995% (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2012).

### **2.4.3 Implicações ambientais**

Por um lado, a produção de terras-raras indica a ampliação de uma grande e crescente variedade de tecnologias de ponta, incluindo aditivos e equipamentos destinados à minimização das emissões na indústria automotiva e em outros setores, além das tecnologias de energias renováveis – hoje as tecnologias de energia renovável respondem por cerca de 20% do consumo mundial de ETR. Por outro lado, há uma preocupação quanto ao processo produtivo dos ETR, uma vez que a demanda crescente por esses metais implica aumento de produção e, conseqüentemente, maiores possibilidades de impactos ambientais, especialmente

nas localidades e regiões próximas dos empreendimentos destinados ao seu aproveitamento. Nesse contexto, já é sabido que a cadeia produtiva dos ETR exige técnicas para separação dos metais a partir dos minerais que envolvem reagentes químicos com possibilidades de causar alto impacto ao meio ambiente. As tecnologias atuais para mineração e beneficiamento de terras-raras também produzem impactos ambientais consideráveis sobre o meio ambiente, como emissões para a atmosfera e infiltração de rejeitos para águas subterrâneas, tendo grande impacto social sobre os moradores locais. Essa “pegada ecológica”, muito distante dos usos finais “limpos”, tem crescido significativamente nos últimos anos com o aumento e a concentração da produção (GUIMARÃES, 2011).

Recentemente, o impacto ambiental dessa atividade tornou-se uma questão de comércio internacional. Com o aumento crescente das exigências estabelecidas pelos padrões internacionais de proteção ambiental, os chineses têm aumentado sua preocupação quanto a esse tema. Assim, passaram a gastar bilhões de dólares para mitigar os danos causados pelas atividades produtivas dos metais de terras-raras. No passado recente, a China (disparadamente a maior produtora de ETR do mundo) priorizou o desenvolvimento industrial e econômico e investiu nessa cadeia produtiva, o que resultou em um monopólio sobre a produção destes metais. Porém, essa concentração da produção, aliada a um controle ambiental baixo ou inexistente, teve como consequência grandes impactos ambientais de diversas naturezas e proporções. No norte da China, por exemplo, perto da fronteira com a Mongólia, vazamentos contaminados com a radioatividade de pelo menos duas décadas de refino dos metais de terras-raras vêm escorrendo lentamente para o solo em direção ao rio Amarelo, uma fonte vital para 150 milhões de pessoas. Na província de Jiangxi, no centro-sul da China, o governo assumiu o controle de mineração de terras-raras depois de descobrir o garimpo ilegal disseminado desses metais (BRADSHER, 2013).

A Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos (APA) identificou em 1991 os típicos fluxos de resíduos no processamento de terras-raras e avaliou o potencial de substâncias perigosas (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 1991). O trabalho identificou quatro fluxos de resíduos que provavelmente seriam classificados como perigosos: os resíduos de solvente, devido à inflamabilidade; os resíduos contendo chumbo, devido à toxicidade; os resíduos de zinco contaminados com mercúrio, também devido à toxicidade; e os solventes



brutos do processo de extração. O trabalho da APA também constatou que os rejeitos normalmente continham partículas de alta área superficial, águas residuais e produtos químicos de processo, que as áreas estavam expostas a condições de intempéries e que os represamentos do material possuíam grande potencial para contaminar o ar, o solo, a superfície e até as águas subterrâneas. Os poluentes típicos associados com rejeitos de terras-raras encontrados foram: metais associados de minério (por exemplo, alumínio, arsênio, bário, berílio, cádmio, cobre, chumbo, manganês, zinco); radionuclídeos; fluoretos; e poeiras fugitivas que, a partir do depósitos de rejeitos, podem contaminar o solo e o ar circundante.

Além disso, se as medidas de proteção das águas subterrâneas não forem usadas corretamente, existe o potencial de contaminação de recursos hídricos subterrâneos circundantes. Diante desses problemas, torna-se imperiosa a inclusão nos custos dos projetos destinados ao aproveitamento de ETR as despesas com instalações e processos de separação e disposição adequados para cada tipo de depósito conforme a rota tecnológica de aproveitamento estabelecida para a viabilidade do empreendimento.

Caso as operações da cadeia produtiva sejam realizadas em conformidade com as normas de controle ambientais, não haverá maiores problemas no que tange aos impactos ambientais relacionados com etapas necessárias para a obtenção dos ETR, mas, caso contrário, grandes problemas virão, o que pode inviabilizar economicamente os projetos irregulares ou até provocar seu encerramento por infringirem as normas ambientais locais.

#### **2.4.4 Análise econômica do setor de terras-raras**

As inovações tecnológicas experimentaram um rápido desenvolvimento nas últimas três décadas (MCKINSEY et al., 2013). Com essas inovações, as indústrias vêm diversificando suas linhas de produtos e serviços. Para 2025, prevê-se que o PIB global relacionado à “internet das coisas”<sup>1</sup> será da ordem de US\$ 36 trilhões. A vasta indústria crescente de alta tecnologia se reflete nos números de vendas de *smartphones* e *tablets*, que já aumentaram sete vezes nos últimos anos. No entanto,

---

<sup>1</sup> A Internet das Coisas (do inglês, *Internet of Things*, *IoT*), é uma rede de objetos físicos, veículos, prédios e outros que possuem tecnologia embarcada, sensores e conexão com rede capaz de coletar e transmitir dados.

os dispositivos móveis representam apenas uma fração das tecnologias que utilizam os potenciais dos ETR. Setores em forte expansão como os de energias verdes (exemplo: energia eólica), carros híbridos e elétricos, ímãs permanentes de alto rendimento, supercondutores e luminóforos devem alavancar o mercado de terras-raras (IDER, 2014). Esses metais alimentam um mercado global da ordem de R\$ 10 bilhões anuais e agregam valor a produtos que movimentam mais de US\$ 5 trilhões (SCHUESSLER, 2014). Isso equivale a cerca de 6% do PIB global divulgado em 2016 (STATISTA, 2017). Contudo, a escassez desses elementos afetará economias, empresas e consumidores ao redor do mundo.

De acordo com dados oficiais do ano-base 2016, as maiores reservas mundiais conhecidas, conforme as definições de recursos/reservas (*Appendix C* da US GEOLOGICAL SURVEY, 2017), encontram-se na China (36,7%), que é seguida pelo Brasil, que tem 22 milhões de toneladas (18,4%), pela Austrália, com 3,4 milhões de toneladas (2,8%) e pelos Estados Unidos, com 1,4 milhões de toneladas (1,2%). A China também é líder no comércio mundial, com 87,5% (105 mil toneladas métricas) dos óxidos de terras-raras produzidos em 2016, seguida pela Austrália com 14 mil toneladas (11,7%) e pela Rússia com 3 mil (2,5%). Os demais países, produtores com menores contribuições (Canadá, Malásia, Tailândia, Vietnã, Índia e Brasil), completaram as 126 mil toneladas comercializadas, conforme dados oficiais, no mundo em 2016 (US GEOLOGICAL SURVEY, 2017).

Em 2013, a China consumiu 64% da produção mundial, seguida pelo Japão (15%), pelos EUA (10%) e pela União Europeia (7%) (ANDRADE, 2014). De acordo com a Associação da Indústria de Terra-rara da China (ACREI), estima-se que o consumo de óxidos de terras-raras nesse país deve sair das 98 mil toneladas em 2015 para algo em torno de 149 mil toneladas em 2020 (US GEOLOGICAL SURVEY, 2016). Em 2015, o consumo da China foi conduzido por ímãs (35%), abrasivos (18%) e catalisadores (15%). Um dos motivos apontados para a queda dos preços foi a produção ilegal, que ainda está muito presente na China; estima-se que de 30 a 40 mil toneladas adicionais de óxidos de terras-raras tenham sido fornecidas ao mercado global por meio de mineração ilegal e contrabando para fora da China em 2014 (STANWAY, 2015). Mesmo com os esforços demonstrados pelo governo chinês recentemente, a produção ilegal de terras-raras ainda persiste.

#### 2.4.5 A estrutura produtiva do setor de terras-raras

Até 1915, graças às areias do litoral do norte do Rio de Janeiro até o sul da Bahia, o Brasil foi o maior fornecedor mundial de monazita, e até 1950 alternou-se na posição de maior produtor mundial com a Índia, à qual posteriormente se juntaram a África do Sul e a Austrália. Entre 1886 e 1950, a exportação global do Brasil foi da ordem de 95 mil toneladas de concentrado de monazita (MACIEL; CRUZ, 1973). Entre os anos de 1960 a 1980, os Estados Unidos foram o principal produtor de terras-raras. No entanto, nas décadas seguintes a produção foi deslocada para a China. A indústria de terras-raras na China começou na década de 1950.

Com o interesse estratégico do governo chinês de transformar o país numa liderança mundial (embora os recursos de terras-raras de Bayan Obo fossem conhecidos desde 1927) no campo da inovação em alta tecnologia, foram estabelecidos dois programas: o primeiro foi o Programa 863, com o objetivo de desenvolver o domínio da exploração das terras-raras, da extração à fabricação de produtos semiacabados, passando pela separação e transformação. Onze anos depois, em março de 1997, o Ministério da Ciência e Tecnologia da China anunciou o segundo, o Programa 973; um exemplo de pesquisa contemplada pelo segundo programa envolve o estudo para melhoramento do processo de refino dos ETR (HURST, 2010).

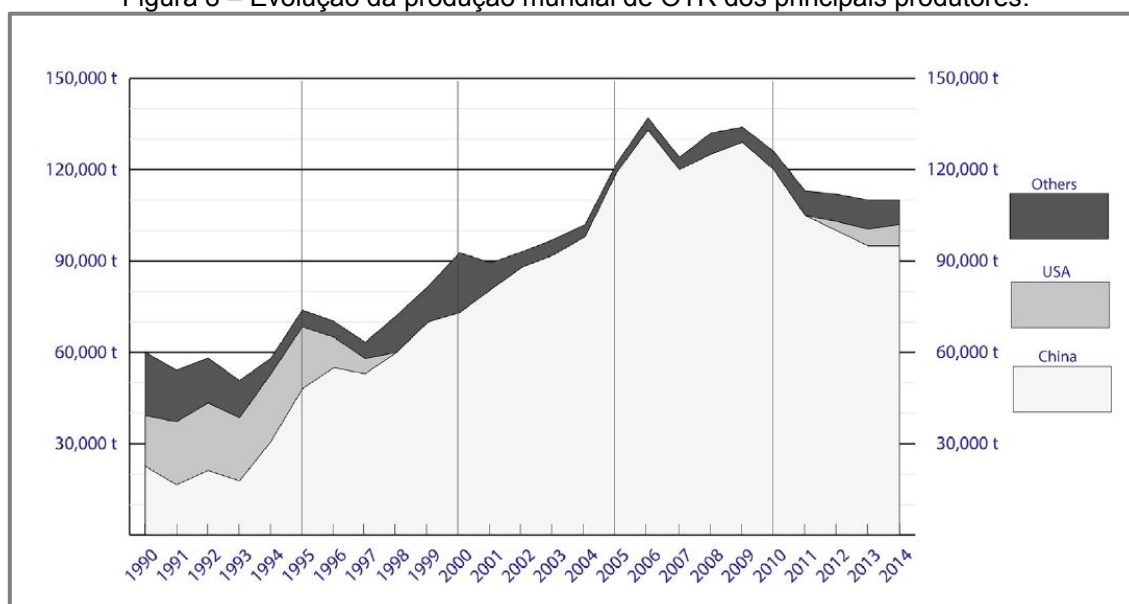
Em 1980 foi fundada a Chinese Society of Rare Earths (CSRE), uma organização de pesquisa científica e tecnológica com mais de 100.000 especialistas registrados. É a maior comunidade acadêmica de terras-raras no mundo (LAPIDO-LOUREIRO, 2013).

Após muitos anos de grande desenvolvimento, foram conseguidos resultados extraordinários nas áreas de pesquisa exploratórias e no domínio da cadeia produtiva dos ETR. Antes de 1990, a China era uma mera participante no que tange ao comércio exterior de ETR, porém já no final da década de 1990 e no início da década de 2000, a China se tornou o maior produtor e exportador mundial destes. Vale destacar que, com o intuito de dinamizar ainda mais a atuação no campo das terras-raras, o governo chinês criou, em 1995, a State Development Planning Commission e o Research Center for Rare Earth Materials (CREM). Em 1999, a atuação do CREM se deu pela criação de um novo núcleo de pesquisa,

desenvolvimento e inovação: o National Rare Earth Center for Agriculture Development.

A Figura 8 mostra a evolução da contribuição para a produção mundial de óxidos de terras-raras dos principais países produtores entre 1990 e 2014.

Figura 8 – Evolução da produção mundial de OTR dos principais produtores.



Fonte: Zepf (2015), modificado.

Nota: Não inclui a produção de ítrio e escândio. Os dados estão em toneladas (1 t = 1000 kg).

Embora a China se mantenha líder na produção mundial de ETR (em 2008 contribuiu com 98% do total), nos últimos anos tem apresentado sinais de desaceleração na exportação desses elementos (em 2015 contribuiu com 84,7% da produção mundial). Isso tem ocorrido por diversos motivos, entre eles estratégias de preservação das reservas minerais e da indústria de transformação mineral nacional.

Praticamente todos os ETR pesados (ETRP) comercializados no mundo vêm da China. A maior parte da produção de terras-raras é obtida como subproduto de fontes chinesas, como os depósitos polimetálicos (Fe-ETR-Nb) de Bayan Obo, na cidade de Baotou, com reservas de pelo menos 48 milhões de toneladas contendo óxidos de terras-raras totais da ordem de 6%, mas com predominância de ETR leves (ETRL). Existem também depósitos importantes de argila de íons adsorvidos no sul da China (WORLD NUCLEAR ASSOCIATION, 2015). Os recursos de terras-raras chinesas são divididos em quatro principais depósitos, que representam perto de 95% do total de recursos de terras-raras do país. Mas, no total, são oficialmente nove as regiões produtoras, a saber:

- depósito de Bayan Obo, na Mongólia Interior (*Inner Mongolia*);
- depósito de Mianning, na província de Sichuan;
- depósito Weishan, na província de Shandong;
- depósitos de argilas de íons de OTR adsorvidos, concentrados principalmente na província de Jiangxi, mas também distribuídos em Guangdong, Fujian e Guanxi (LING; YANG, 2015);
- depósitos de *placers*, no sudeste da China, que ocorrem ao longo da zona costeira do oeste de Guangdong e Yunnan (o teor médio de OTR nesse tipo de depósito na China é de 0,5–1,0% em peso).

Em Jianxi estão em atividade: Longnan, contendo principalmente ETRP, semelhante aos depósitos de xenotímio, e Xunwu, contendo essencialmente ETRL, particularmente lantânio e pouco cério (WORLD NUCLEAR ASSOCIATION, 2015).

A Tabela 1 mostra a distribuição de OTR nos principais depósitos da China e a Figura 9 ilustra as regiões produtoras.

Tabela 1 – Distribuição de OTR nos principais depósitos de ETR chineses.

Tipos de óxidos de terras-raras	Mongólia Interior Bayan Obo (OTR % em peso)	Sichuan Mianning (OTR % em peso)	Shandong Weishan (OTR % em peso)	Tipo íons de TR adsorvidos (OTR % em peso)	
				Tipo A	Tipo B
La <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	24-26	28-30	32	31-40	2-5
CeO <sub>2</sub>	50	45-50	48-50	3-7	1-2
Pr <sub>6</sub> O <sub>11</sub>	3-5	5	4	7-11	1-2
Nd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	16-18	12-14	11-12	26-35	3-5
Sm <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	1,5	1,5-2	1,0-1,8	4-6	2-4
Eu <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,2	0,4	0,1-0,2	0,5	0,12
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,4	0,8-1,0	0,3-0,5	4	6
(Tb-Lu) <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,2-0,3	1	0,4-0,6	4-5	2-12
Y <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,3	0,76	0,1-0,3	9-11	>60

Fonte: Ling e Yang (2015), modificado.

Figura 9 – Principais regiões produtoras de OTR na China.



Fonte: Google Earth, 2015.

Como mostrado na Tabela 1, os percentuais elevados de três principais terras-raras leves – lantânio (La), cério (Ce) e neodímio (Nd) – são encontrados nos depósitos de Bayan Obo, Mianning (Sichuan) e Weishan (Shandong). No entanto, nos depósitos de argilas de íons de terras-raras adsorvidos (especialmente do tipo B), existe um elevado conteúdo de ítrio (Y) e de outras terras-raras pesadas. Em resumo, nos três primeiros recursos (Bayan Obo, Mianning e Weishan) as minas são essencialmente produtoras de terras-raras leves e, nos depósitos de argilas de íons de terras-raras adsorvidos, há produtos tanto de terras-raras leves quanto de pesadas.

Na última década, entre 50 e 60% da produção de concentrado de ETR na China foi proveniente da Mongólia Interior, e outros 24 a 30%, nesse mesmo período, da Província de Sichuan (segunda maior produtora da China); o restante foi produzido, principalmente, nas províncias de Fujian, Guangdong e Jiangxi, que são importantes fontes de ETRP (TSE, 2011). A política chinesa de desenvolvimento, no que concerne ao setor de terras-raras, é vista como meios ou metodologias de controle ou restrições sobre a cadeia de abastecimento das terras-raras. A implementação dessas restrições tem se concretizado por meio de quotas de exportação e de produção, licenças de exportação, impostos e tarifas. Além disso, a China também tem aumentado o controle no fornecimento das terras-raras através da estocagem do material. A China, historicamente, impôs tarifas de exportação de

15% para os ETRL e de 25% para os ETRP (mais valiosos). Esse movimento fez com que a criação de *joint ventures*<sup>2</sup> na China se tornasse mais atraente para as indústrias estrangeiras, devido ao aumento dos custos de exportação da matéria-prima. Por exemplo, as políticas de terras-raras anteriores resultaram em situações em que fabricantes americanos chegaram a pagar até 300% a mais que os concorrentes chineses para o mesmo material (ARGUS, 2015). As cotas de exportação impostas pela China entre 2009 e 2014 (2015 foi ano de sua remoção) ficaram em torno de 30 mil toneladas (Figura 10).

Figura 10 – Histórico de cotas de exportação para produtores nacionais e *joint ventures* na China.



Fonte: Adaptado de Argus, 2015.

Essas quotas foram removidas em resposta a uma decisão da Organização Mundial do Comércio (OMC)<sup>3</sup> que concluiu que as restrições sobre as exportações de terras-raras violavam as regras do comércio internacional. Assim, o Ministério do Comércio da China (MOFCOM) aboliu o sistema de quota de exportação do país em janeiro de 2015. Isso foi acompanhado da confirmação oficial de que o regime de tarifas de exportação existente na China (15–25% para os minérios, óxidos e metais de terras-raras) seria removido em maio de 2015 (ARGUS, 2015). Como resultado dos obstáculos impostos pela política chinesa, empresas estrangeiras, com o intuito de garantir suas operações, foram encorajadas a realizar acordos de fornecimento

<sup>2</sup> *Joint venture* é uma expressão de origem inglesa, que significa a união de duas ou mais empresas já existentes com o objetivo de iniciar ou realizar uma atividade econômica comum, por um determinado período de tempo e visando, dentre outras motivações, ao lucro.

<sup>3</sup> A OMC é uma organização criada com o objetivo de supervisionar e liberalizar o comércio internacional.

com produtores chineses, criar *joint ventures*, migrar instalações de processamento para a China etc. Movimentos dessa natureza tornaram a China autossuficiente na cadeia produtiva de terras-raras. No entanto, ainda há muitos problemas de cunho ambiental e de produção ilegal (que em 2014 foi responsável por uma quantidade estimada de 40 mil toneladas de OTR). Nesse sentido, a indústria de terras-raras da China vem passando por um processo de reestruturação e consolidação, capitaneada pelo governo nacional, que pretende consolidar a cadeia produtiva dos metais de terras-raras (METR) em seis principais entidades industriais. No plano do governo chinês, as pequenas produções foram integradas em seis grandes empresas: Inner Mongolia Baotou Iron e Steel Group (Terras-raras do Norte), China Minmetals Corporation, Aluminum Corporation of China (Chinalco), Guangdong Rare Earth Group, Xiamen Tungsten e a Ganzhou Rare Earth Group.

Os principais efeitos dessa consolidação são: a preservação das reservas de terras-raras da China; o controle da produção ilegal e do contrabando (em meio à preocupação sobre a eficácia das novas políticas voltadas para a mineração ilegalmente generalizada no país); o apoio à indústria doméstica; a imposição do domínio de seis empresas, precavendo-se assim da entrada em operação de novos projetos (preservação da competitividade do país); e melhorias no desempenho operacional no que diz respeito aos impactos ambientais da indústria de terras-raras (ARGUS, 2015). Em 2015, a China oficializou oito portos para a emissão de certificado de exportação a partir do Ministério do Comércio Exterior chinês. Nos termos da emissão de certificado, é exigido no mínimo contrato de venda com um comprador internacional. Em 2015, as seis empresas estatais consolidadas já tinham o controle de cerca de 95% das quotas de produção da mineração e 93% das quotas da indústria de separação dos ETR. A quota de produção da mineração de terras-raras para 2015 e 2016 foi fixada em 105 mil toneladas, inalterada desde 2014. Com a extinção das cotas de exportação, o governo chinês impôs impostos sobre os recursos de terras-raras, com base no valor de venda e não na quantidade produzida. O imposto é diferente para ETRL e ETRP, e é aplicado aos metais na forma de concentrado.

As novas taxas fiscais aplicadas ao valor do concentrado produzido nas diferentes regiões da China são (ARGUS, 2015): 11,5% para ETRL provenientes da região da Mongólia Interior; 9,5% para ETRP provenientes da província de Sichuan;



7,5% para ETRL provenientes da província de Shandong; e 27% para o concentrado de argilas de íons adsorvidos (ricos em ETRL e ETRP).

#### **2.4.5.1 Movimentações fora da China**

Com o intuito de encontrar alternativas para os riscos decorrentes do desabastecimento de ETR, a empresa alemã Tantalus Rare Earths AG, de Düsseldorf, Alemanha, intensificou seus esforços na busca por identificar e desenvolver trabalhos de exploração e projetos mineiros fora da China, principalmente na África, no denominado *Tantalus Rare Earths Project* (TANTALUS RARE EARTHS AG, 2010).

Ao mesmo tempo, houve o recomissionamento da Molycorp, Inc. na operação de Mountain Pass (Califórnia, EUA) e maior interesse em colocar novas jazidas em produção, incluindo a Lynas Corp. na operação de Mount Weld (Austrália ocidental), de Nolans Bore (Austrália central) e de Kvanefjeld (Groenlândia), as duas últimas com teor de urânio significativo associado aos óxidos de terras-raras (WORLD NUCLEAR ASSOCIATION, 2015).

Com o surgimento de especulações em 2010 sobre a provável insuficiência de oferta de terras-raras no mundo, mesmo contando com as produções futuras da Lynas e da Molycorp, algumas empresas consumidoras de terras-raras, como por exemplo a Rhodia Electronics & Catalysis, assinaram contratos futuros com companhias de mineração (com a Lynas Corp., australiana); outras companhias, como a Toyota Tsusho Corp., se associaram, financiando e participando diretamente de projetos mineiros (com a Great Western Minerals Group Ltd., canadense).

Diversos outros acordos foram firmados ao redor do mundo por grandes empresas consumidoras de produtos à base de ETR. O objetivo comum foi se resguardar das restrições de fornecimento impostas pela China, de modo a tentar garantir o fornecimento alternativo futuro (LAPIDO-LOUREIRO, 2013). No campo da prospecção e das pesquisas minerais, a partir de 2010 elas se intensificaram em todo o mundo na busca por recursos de terras-raras, destacando-se nesse contexto: Estados Unidos, Austrália, Brasil, Canadá, Finlândia, Groenlândia, Índia, Quirguistão, Madagascar, Malawi, Moçambique, Namíbia, África do Sul, Suécia, Tanzânia, Turquia, Vietnã e Japão. Alguns resultados já começaram a ser

divulgados; por exemplo, uma equipe de geólogos da Universidade de Tóquio encontrou recentemente um depósito de terras-raras na região de Minami-Torishima, no Japão, que se estende do leito marinho até alguns metros de profundidade no Oceano Pacífico.

Os minerais identificados até agora são ricos em ETR, sobretudo em ítrio, com concentrações de até 6.600 ppm (partes por milhão) diluídas em uma espécie de lama. Essa condição de lama deverá facilitar o bombeamento do minério para a purificação em unidades flutuantes, similares às plataformas para a exploração de petróleo e gás natural; a estimativa é que sejam necessários, pelo menos, mais dois anos de pesquisas antes de começar a exploração mineral (INSTITUTO BRASILEIRO DE MINERAÇÃO, 2015). Um segundo exemplo, no Brasil, é a Companhia Brasileira de Metalurgia e Mineração (CBMM), que extrai nióbio – metal que eleva a qualidade do aço – de minas localizadas em Araxá (MG). Em 2012, a CBMM passou a fazer a separação de quatro terras-raras (cério, lantânio, neodímio e praseodímio) a partir do rejeito da planta de nióbio, por meio de uma planta-piloto construída para o aproveitamento dos ETR.

Atualmente, os maiores avanços na questão das terras-raras no Brasil vêm sendo protagonizados pela CBMM em parceria com instituições de pesquisas, governos (esferas federal, estadual e municipal) e diversas parcerias internacionais, uma delas com laboratórios japoneses. A CBMM pretende desenvolver produtos finais a partir das terras-raras, porém mantendo o negócio de nióbio como principal atividade econômica. Nesse sentido, o Brasil obteve, em fevereiro de 2016, por meio de processos metalúrgicos e químicos, seus primeiros 100 gramas de didímio metálico (que em março de 2016 já eram 500), elementos importantes para a fabricação de superímãs (o didímio = Nd + Pr, usualmente 75%Nd + 25% Pr).

, que são indispensáveis na construção de geradores eólicos, motores de carros elétricos, discos rígidos de computadores, *smartphones* e outras tecnologias. Esse representa um dos resultados das diversas parcerias feitas pela CBMM nos últimos 5 anos. Esse projeto específico iniciou-se em 2014, em uma parceria envolvendo a CBMM, o Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo (IPT) e a Empresa Brasileira de Pesquisa e Inovação Industrial (EMBRAPII). O didímio é uma liga de dois metais de terras-raras, o neodímio e o praseodímio, que são encontrados no rejeito da extração de nióbio (ROSSINI, 2016).

Outro avanço resultante de parcerias da CBMM no Brasil é que, até 2017, o país ganhará seu primeiro laboratório-fábrica de ímãs de terras-raras, que será implantado no estado de Minas Gerais. O projeto conta com o apoio do governo desse estado, por meio da Companhia de Desenvolvimento Econômico de Minas Gerais (CODEMIG), e será desenvolvido pela Fundação Centros de Referência em Tecnologias Inovadoras (CERTI), em parceria com a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e o Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT).

Uma grande vantagem competitiva é que os ETR produzidos na planta da CBMM são subproduto da produção do nióbio. Isso barateia o custo industrial tornando o processo produtivo mais competitivo, em termos de custos, se comparado com o de projetos que possuem as terras-raras como único produto (CODEMIG..., 2016). No momento, existem muitos exemplos de pesquisas em desenvolvimento em várias regiões do mundo, que brevemente virão a público.

#### **2.4.6 Situação atual: produção e reservas conhecidas**

De acordo com dados preliminares do Serviço Geológico dos Estados Unidos (USGS), a produção de óxidos de terras-raras, derivada da produção de mina australiana (pertencente à Lynas Corp.), foi de 7.750 toneladas até setembro de 2015 (UNITED STATES, 2016).

O consumo interno de compostos de terras-raras e metais nos EUA ficou quase inalterado em comparação com o de 2014. Vale destacar que, mesmo como suspensão das atividades, em outubro de 2015, nas operações de mineração e separação de Mountain Pass (Molycorp), nos EUA, a companhia garantiu que continuaria operando suas instalações de terras-raras na Estônia e na China, ratificando que os clientes de seus produtos de terras-raras não seriam afetados. Há previsões de que a Tailândia mantenha a média de exportação da ordem de 2.100 toneladas de óxidos de terras-raras para a China em 2017. A Índia deve manter sua média de produção (3.100 toneladas). A Malásia e a Rússia também devem repetir suas produções de 2016, produzindo respectivamente 240 e 2.500 toneladas em 2017. A Tabela 2 mostra a produção mundial de óxidos de terras-raras (entre 2011 e 2016), e as respectivas reservas oficialmente conhecidas, por país correspondente (ano 2016).

Tabela 2 – Produção mundial de OTR (2011–2016) e reservas minerais.

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	Reservas em
	Em (t)	Em (t)	Em (t)	Em (t)	Em (t)	Em (t)	2016 (10 <sup>3</sup> t)
<b>Brasil</b>	250	140	600 <sup>(1)</sup>	ND	880 <sup>(1)</sup>	1.100	22.000
<b>China</b>	105.000	100.000	95.000	105.000	105.000 <sup>(3)</sup>	105.000	55.000
<b>EUA</b>	0	800	5.500	5.400	5.900	-	1.400
<b>Austrália</b>	2.200	3.200	2.000	8.000	12.000	14.000	3.400
<b>Índia</b>	2.800	2.900	2.900	3.000	1.700	1.700	6.900
<b>Malásia</b>	280	100	180	240	500	300	30
<b>Rússia</b>	2.500	2.500	2.500	2500	2.800	3.000	18.000
<b>Outros países</b>	ND	ND	ND	ND	1.010	1.100	ND
<b>Total</b>	<b>113.030</b>	<b>108.600</b>	<b>105.400</b>	<b>123.900</b>	<b>129.790</b>	<b>126.200</b>	<b>120.000</b>

em (t)

Fontes: United Kingdom (2016-2017); Prices... (2015).

Nota: <sup>(1)</sup> Referente à produção de monazita, a partir do estoque da INB no município de São Francisco do Itabapoana - RJ; <sup>(2)</sup> Valores em toneladas (t = 1.000 kg); ND = dado não disponível; <sup>(3)</sup> A quota de produção não inclui a produção clandestina.

## 2.4.7 Preços e perspectivas de mercado

### 2.4.7.1 Preços

Em boa parte da década de 1990 e até meados da de 2000, os preços dos produtos de terras-raras tiveram comportamento horizontalizado. Com o início da interferência do governo chinês, com imposição de limites às exportações, como já citado neste capítulo, os preços aumentaram significativamente a partir do início de 2010. A combinação de restrições aplicadas pelas autoridades chinesas sobre os níveis de mineração, processamento e exportação, aliada ao contínuo aumento da demanda por produtos de terras-raras em nível global, provocou aumentos substanciais nos preços dos óxidos de terras-raras, e conseqüentemente seus produtos acabados atingiram o nível de pico em meados de 2011, antes de sofrer diminuição no início de 2012 e em 2013, acompanhando a desaceleração da economia global.

Em 2011, por exemplo, o preço do óxido de Nd atingiu o valor de 350 US\$/kg no segundo semestre contra 10 US\$/kg em 2001. Tendência semelhante foi seguida pelo preço do Dy, que em 2001 custava 100 US\$/kg chegou a custar 2.200 US\$/kg dez anos depois. A variação nos preços de cada ETR é diferente, e depende do

nível de criticidade particular dos ETR. O período de maior turbulência dos preços nos últimos dez anos ocorreu entre os anos de 2009 e 2011; nesse período, os preços dos seguintes óxidos de ETR sofreram grandes variações: La (359%), Ce (457%), Nd (159%), Pr (166%), Sm (73%), Dy (492%), Eu (101%) e Tb (324%). Os preços se estabilizaram em 2014, no entanto a consolidação crescente da cadeia produtiva na China irá ampliar as restrições de oferta de alguns ETR críticos, o que deve criar uma pressão ascendente sobre os preços no futuro. De qualquer forma, os preços futuros dependerão das influências provocadas pela lei da oferta e da procura (demanda), influenciadas pelas tendências globais e, principalmente, pela reestruturação da indústria de terras-raras da China.

A Tabela 3 apresenta a evolução dos preços de 2002 a 2016; a previsão é que os preços se mantenham estáveis no biênio 2017–2018 quando comparados ao ano de 2016.

Tabela 3 – Evolução dos preços dos principais óxidos de terras-raras entre 2002 e 2016 (média anual, pureza mínima 99%).

OTR	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016 <sup>(e)</sup>
	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)	(FOB China)
	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg	US\$/ kg
<b>La</b>	2,30	1,50	1,60	1,50	2,20	3,40	8,70	4,90	22,40	98,70	25,50	7,90	4,90	2,00	2,00
<b>Ce</b>	2,30	1,70	1,60	1,40	1,70	3,0	4,60	3,90	21,60	98,20	24,70	7,90	4,70	2,00	2,00
<b>Pr</b>	3,90	4,20	8,00	7,60	10,70	29,10	29,50	18,00	48,00	204,10	116,20	71,80	117,00	52,00	52,00
<b>Nd</b>	4,40	4,40	5,80	6,10	11,10	30,20	31,90	19,10	49,50	250,60	122,40	71,80	58,00	40,00	40,00
<b>Pm</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Sm</b>	3,00	2,70	2,70	2,60	2,40	3,60	5,20	3,40	14,40	104,80	58,00	13,30	5,20	5,20	1,97
<b>Eu</b>	240,00	235,40	310,50	286,20	240,00	323,90	481,90	492,90	559,80	2923,00	2596,00	1095,00	705,00	150	150,00
<b>Gd</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	62,70	24,20	24,00	46,50	46,50	44,00
<b>Tb</b>	170,00	170,00	398,00	300,00	434,00	590,40	720,80	361,70	557,80	2344,00	2026,00	920,00	615,00	450,00	417,25
<b>Dy</b>	20,00	14,60	30,30	36,40	70,40	89,10	118,50	115,70	231,60	1508,00	1190,00	550,00	340,00	230,00	230,00
<b>Ho</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	303,00	107,00	66,00	66,00	66,00	66,00
<b>Er</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	236,00	150,00	68,00	68,00	68,00	34,00
<b>Tm</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Yb</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	91,00	113,00	52,00	52,00	52,00	52,00
<b>Lu</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	827,00	1385,00	1201,00	1201,00	1201,00	1201,00
<b>Y</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	143,00	111,00	26,00	13,00	13,00	6,00
<b>Sc</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3150,00	4200,00	4200,00

Fontes: United States (2017); Prices... (2009-2013); MineralPrices (2017); United Kingdom (2011). Argusmedia (2017).

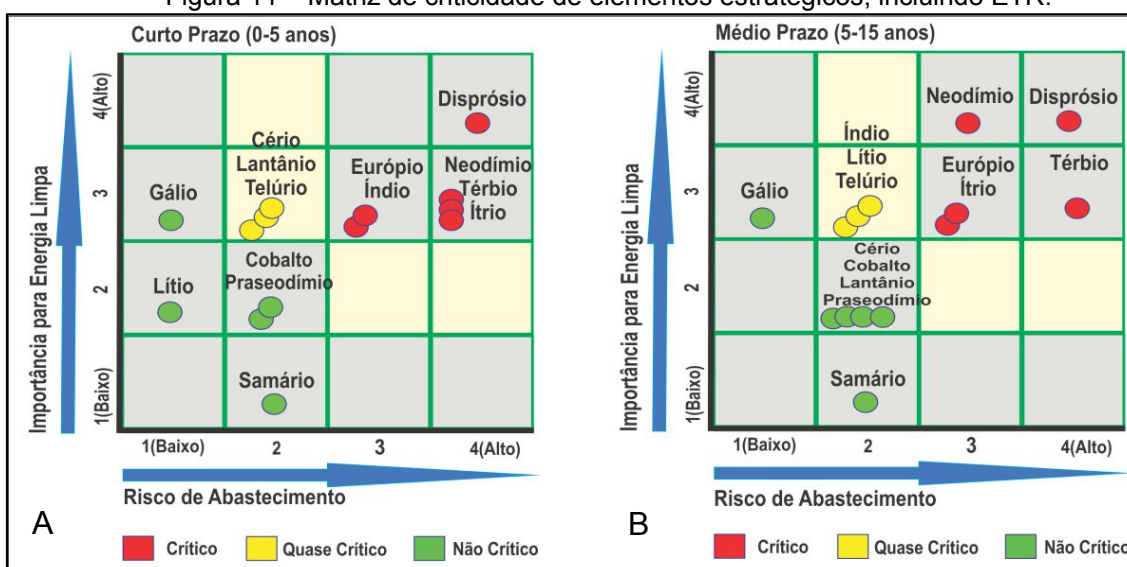
Nota: 0,0 = dado não disponível; <sup>(e)</sup> estimado.

### 2.4.7.2 Perspectivas de mercado

Provavelmente, o equilíbrio entre oferta e demanda deverá permanecer em variação considerável para os elementos individuais de ETRL e ETRP. Existem vários trabalhos sobre análises de mercado e/ou risco de oferta para os ETR; no entanto, destacam-se três estudos: o primeiro, publicado pelo Departamento de Energia dos EUA (*US Department of Energy*), em 2010; o segundo, pela Ernst & Young (2011); e o terceiro, por Alonso et al. (2012). O primeiro estudo se trata de uma análise de “criticidade”, tipo de estudo que tem crescido muito nos últimos anos, não somente para a análise dos de ETR, mas também para diversos outros metais.

No estudo realizado pelo *US Department of Energy* (UNITED STATES, 2010), foram usadas duas variáveis, ou seja, uma matriz de criticidade bidimensional (a primeira variável determina a importância do metal para uso em energia limpa e a segunda avalia os riscos de fornecimento do metal estudado). Concluiu-se que o disprósio figurava na classificação como um dos ETR mais críticos, tanto a curto prazo (0–5 anos) quanto no médio prazo (5–15 anos). O neodímio, o térbio e o ítrio também foram considerados críticos no curto prazo, seguidos pelo európio. No médio prazo, o neodímio e o térbio foram classificados como críticos abaixo do disprósio, seguidos por európio e ítrio. A Figura 11 (A e B) mostra a matriz de criticidade de elementos estratégicos incluindo os ETR, construída pelo Departamento de Energia dos EUA.

Figura 11 – Matriz de criticidade de elementos estratégicos, incluindo ETR.



Fonte: United States (2010), modificado.

Nota: A = Curto prazo e B = médio prazo.

No segundo estudo, publicado pela Ernst & Young (2011), foram identificadas as principais aplicações desses ETR críticos (com exceção do praseodímio) e em seguida foram feitas estimativas de crescimento anual das aplicações selecionadas para os períodos considerados (2010–2015 e 2015–2020). Dentre as aplicações, observa-se a predominância de ímãs permanentes, ligas metálicas, cerâmicas e fósforos (Quadro 7).

Quadro 7 – Elementos de terras-raras: propriedades, aplicações e taxas estimadas de crescimento anual de aplicações selecionadas nos períodos 2010–2015 e 2015–2020.

<b>ETR</b>	<b>Propriedades</b>	<b>Aplicações (Estimativa de uso)</b>
Neodímio	Catalíticas, magnéticas, ópticas e elétricas	Ímãs magnéticos (69,4%) Ligas metálicas (16,5 %) Cerâmicas (12 %) Outras (15 %)
Disprósio	Magnéticas e ópticas	Ímãs magnéticos (5%)
Európio	Ópticas	Fósforos (4,9%)
Térbio	Magnéticas e ópticas	Fósforos (4,6%)
Ítrio	Ópticas	Fósforos (69,2 %) Cerâmicas (53 %) Outras (19%)
<b>Previsões</b>		
<b>Aplicações</b>	<b>Crescimento anual (2010–2015)</b>	<b>Crescimento anual (2015–2020)</b>
Ímãs magnéticos	10–15%	10–15%
Ligas metálicas	8–12%	5–10%
Fósforos	6–10%	5–7%
Cerâmicas	6–8%	6–8%
Outras	6–8%	6–12%

Fontes: Elaborado a partir de Lynas Corporation (2010); Kingsnorth (2010); Ernst & Young (2011) apud Moraes et al. (2013).

O terceiro trabalho (dos três destacados aqui), Alonso et al. (2012) observaram que a condição de oferta monopolística atual, aliada às práticas ambientalmente insustentáveis na mineração, ao rápido crescimento da demanda e à busca por um futuro sustentável, incentivará as aplicações de ímãs permanentes em turbinas eólicas e em veículos elétricos, que demandam intensamente o uso de neodímio e de disprósio (como foi destacado também no trabalho realizado pelo Departamento de Energia Americano). Segundo os autores, isso poderia provocar aumentos consideráveis e desproporcionais na demanda por esses dois elementos. Dessa forma, nesse trabalho os autores também observaram a relevância do neodímio e do disprósio como os mais críticos ETR, porém foram também realizadas



projeções para os demais ETR mais comercializados atualmente no mercado mundial, ou seja, para os elementos com mercados estabelecidos.

Foram feitas projeções do ponto de vista da aplicação no setor industrial e dos ETR individuais. Basicamente, o estudo apresenta uma avaliação dos potenciais cenários de futura procura (demanda) por ETR. Muitas hipóteses foram feitas para simplificar a análise, mas, segundo os autores, os cenários identificam algumas variáveis-chave que podem afetar o mercado futuro de terras-raras. Consideram que a preocupação com a estabilização da concentração de CO<sub>2</sub> na atmosfera pode resultar em aumentos de até 700% no uso de neodímio e de até 2.600% na utilização de disprósio nos próximos 25 anos, caso não haja “reutilização/reciclagem eficiente ou o desenvolvimento de tecnologias que utilizem menores quantidades de disprósio e neodímio” (ALONSO et al, 2012, p.1-9).

As projeções foram feitas para o período de 25 anos (ano-base 2010), levando em conta cinco cenários (A, B, C, D e E), conforme descrito no quadro 8. As Figuras 12, 13, 14 e 15 apresentam graficamente as projeções dos respectivos cenários.

De acordo com o estudo de Alonso et al. (2012) no Cenário A, todas as indústrias manteriam a mesma participação de mercado ao longo do tempo, crescendo a uma taxa de 3,7% / ano. No Cenário B, como forma mostra a Figura 12(1 e 2), a demanda modelada por ETR cresce a uma taxa de 5,3% entre 2010 e 2035, o que corresponderia a uma duplicação aproximada da demanda entre 2010 e 2025. As quotas de mercado modeladas nesse cenário, o setor de ímãs e compostos de polimento crescem mais, enquanto os de catalisadores automotivos, catalisadores de petróleo e aditivos de vidro encolher. No entanto, conforme mostrado no painel à direita da figura 12(1), apesar dessas mudanças na demanda setorial subjacente, as alterações no portfólio da ETR são modestas, com pequenos aumentos em Nd, Pr e Dy e pequenas diminuições em Y, Sm e Gd.

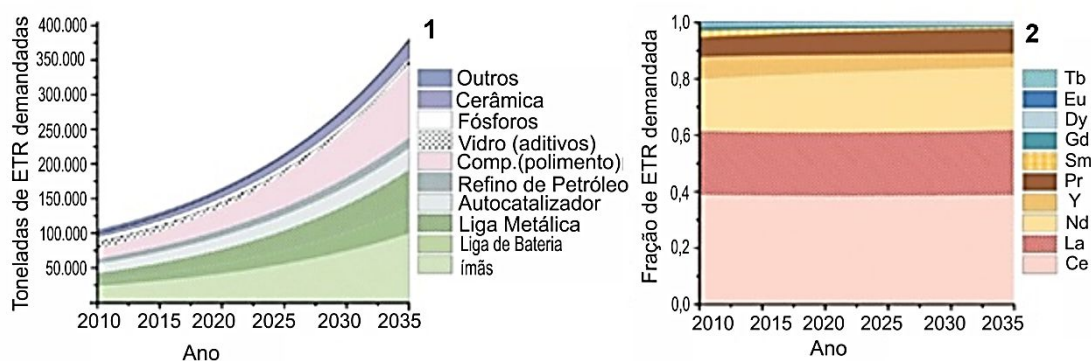
O cenário C, mostrado na Figura 13 (1 e 2), é baseado em previsões de especialistas do setor, implicitamente, tais previsões levam em conta mudanças na demanda para bens que usam ETRs de mercados em evolução, incluindo os efeitos da substituição tecnológica e de materiais. Em outras palavras, a demanda revolucionária é considerada implicitamente nos valores de crescimento relatados, mas não podem ser explicitamente delineadas.

Quadro 8 – Cenários e taxas de crescimentos utilizados nas projeções de demanda para os ETR e setores industriais de consumo.

<b>Cenários</b>	<b>Características dos cenários de evolução da demanda</b>	<b>Hipóteses assumidas</b>
A	Demanda evolutiva agregada: taxa global de crescimento da produção histórica (oferta), projetada para futuro.	Reprodução uniforme de toda a experiência de mercado com o crescimento da demanda a taxas históricas.
B	Demanda evolutiva desagregada: taxa de crescimento histórico da demanda individual no nível do setor industrial projetada para o futuro (cenários de demanda revolucionária + evolutiva).	Cada mercado consumidor de ETR experimenta sua taxa de crescimento histórico da demanda.
C	Demanda revolucionária implícita: expectativas de mercado relatadas para as taxas de crescimento no nível do setor industrial são projetadas para o futuro.	Cada mercado consumidor de ETR cresce a taxas previstas por especialistas da indústria.
D	Demanda revolucionária agressiva: a taxa de crescimento do cenário B é suplementada com o cenário considerado de eletrificação eólica e automotiva.	Na eletrificação automotiva agressiva, considera-se que todo setor eólico usa ímãs permanentes e a demanda do mercado dos outros ETR cresce a taxas históricas.
E	Demanda revolucionária moderada: a taxa de crescimento do cenário B é suplementada com 2–3% (Gruber et al. apud Alonso et al., 2012) de crescimento do cenário considerado para a eletrificação automotiva.	Eletrificação automotiva moderada, o setor eólico não faz uso de ímãs permanentes, a demanda do mercado de outros ETR cresce a taxas históricas.
<b>Cenários</b>	<b>Taxas de crescimento (%) por setor</b>	
A	Crescimento global histórico entre 2006 e 2010 (United States, 2011): todos os setores (3,7%)	
B	Histórico da indústria para 2006–2010 (Roskill, 2007; Kingsnorth, 2010 apud Alonso et al., 2012): ímãs (6,1%); ligas metálicas (6,7%); catalisadores (3,3%); polimento (7,9%); vidro (-4,1%); fósforo (0,0%); cerâmica (6,2%) e outros (-3,3%).	
C	Projeções utilizadas para 2010–2015 (Kingsnorth, 2010 apud Alonso et al., 2012): ímãs (12,5%); ligas metálicas (10%); catalisadores (4%); polimento (8,5%); vidro (0%); fósforo (8,0%); cerâmica (7,0%) e outros (7,0%).	
C	Projeções 2015–2035 (Kingsnorth, 2010 apud Alonso et al., 2012): ímãs (12,5%); ligas metálicas (6%); catalisadores (4%); polimento (10%); vidro (0); fósforo (4,5%); cerâmica (6,0%) e outros (6,0%).	

Fonte: Alonso et al (2012), modificado.

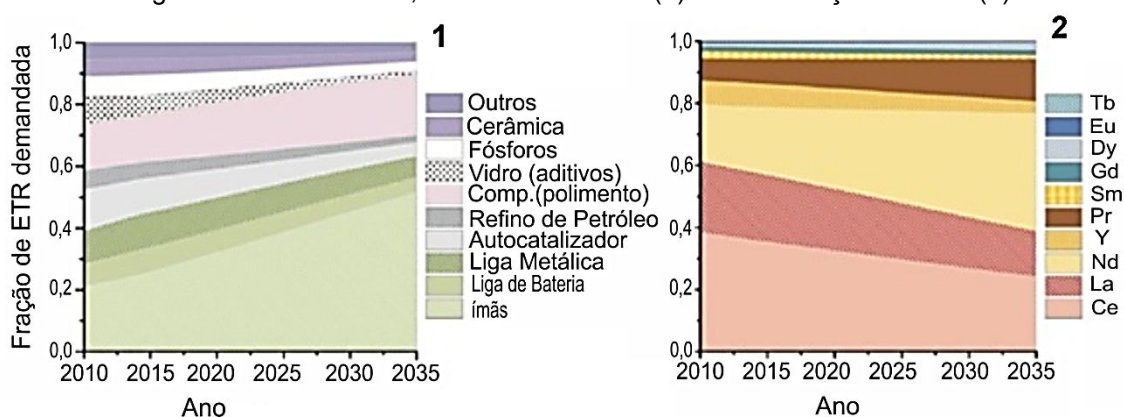
Figura 12 – Cenário “B”: evolução do mercado (distribuição da demanda por ETR).



Fonte: Alonso et al. (2012), modificado.

Nota: (1) os totais e a fatia de mercado (*market share*) dos ETR individuais; (2) o crescimento médio anual estimado entre 2010 e 2035 é de 5,3%.

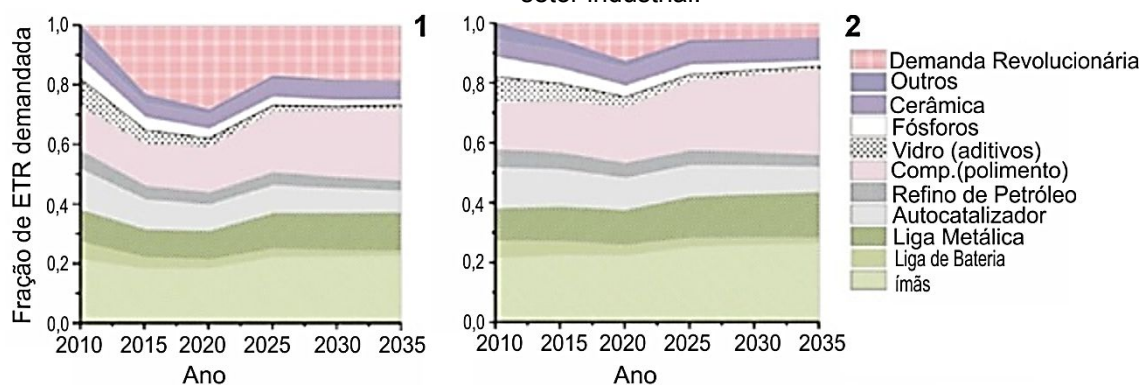
Figura 13 – Cenário “C”, a fatia de mercado (1) e a distribuição de ETR (2).



Fonte: Alonso et al. (2012), modificado.

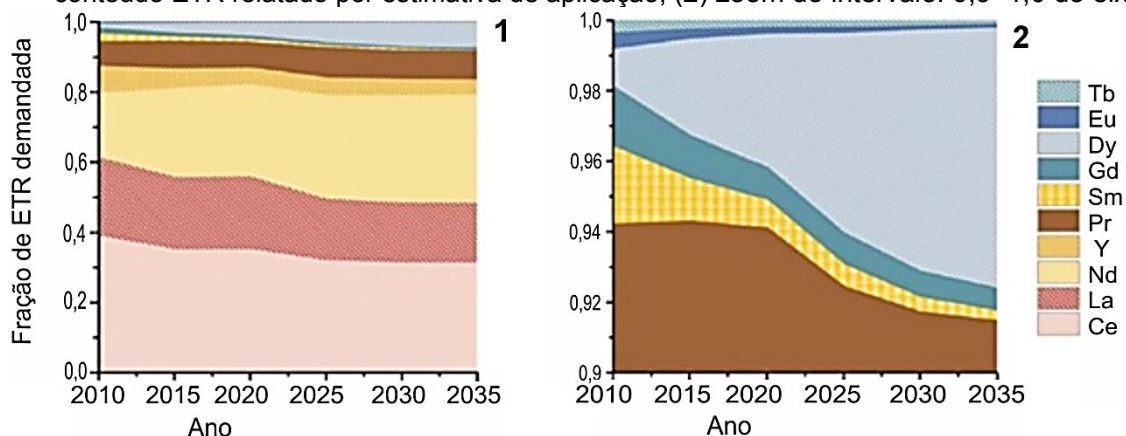
Nota: Médias de previsões de especialistas (Kingsnorth, 2010) foram usada para projetar as taxas de crescimento anuais futuras; a taxa de crescimento médio anual usada entre 2010 e 2035 foi de 8,6%.

Figura 14 – Cenários “D” (1) e “E” (2) – projeção da quota de mercado com base na demanda do setor industrial.



Fonte: Alonso et al. (2012), modificado.

Figura 15 – Cenário “D” – (1) evolução da distribuição da demanda por ETR projetada com base no conteúdo ETR relatado por estimativa de aplicação; (2) zoom do intervalo: 0,9–1,0 do eixo y.



Fonte: Alonso et al. (2012), modificado.

Conforme mostra a Figura 13 alguns especialistas dentro da indústria de ETR acreditam que o setor de ímãs pode crescer o suficiente para representar 50% do mercado de TR. Contudo, a demanda relativa modelada nesse cenário para Ce e Y diminui enquanto a demanda relativa de Dy, Nd e Pr deverá aumentar nos próximos 25 anos. O cenário D, representa uma estratégia de eletrificação para atingir metas de gases de efeito estufa de (CO<sub>2</sub>), uso de ETR visando este objetivo deve impulsionar a demanda por ETR no curto prazo (10 anos), essa demanda revolucionária de curto prazo é impulsionada pelo uso de ETRs em baterias NiMH (Bateria de níquel-hidreto metálico) para veículos elétricos híbridos (HEVs), esse cenário é modelado considerando a redução da demanda quando a tecnologia for eliminada em favor das baterias de íons de lítio. No entanto, no cenário E, a demanda revolucionária seria responsável por apenas uma pequena fração da demanda total de terras-raras, com um pico de 13% da demanda total antes que as baterias de NiMH sejam substituídas(Figura 14). Por fim, essas projeções produzem duas principais revelações, em primeiro lugar, que a demanda projetada de ETRs para energia eólica é pequena em comparação com a demanda projetada para aplicações em veículos, ou seja, espera-se que a indústria automotiva seja um condutor mais significativo da mudança na demanda de ETR do que a geração de energia por meio de ventos nos próximos 25 anos. Em segundo lugar, o aumento na demanda por ímãs desses produtos eólicos e automotivos, especialmente no caso do Cenário D, resulta na maior necessidade de Nd, Pr e, mais significativamente, Dy conforme mostrou a Figura 15.

#### 2.4.8 Projetos de mineração em desenvolvimento

A crescente demanda por ETR, motivada pelo uso também crescente de produtos de alta tecnologia, e a imposição de cotas de produção de óxidos e produtos de terras-raras na China – o governo chinês procura controlar a produção de ETR na tentativa de minimizar os danos ambientais provocados por sua extração, e além disso tenta resguardar suas reservas – provocou redução da oferta de ETR no mercado mundial. Essa diminuição fez com que os países consumidores retomassem as pesquisas desse bem mineral e incentivassem o desenvolvimento de novos projetos de mineração e processamento dos ETR, além da retomada de projetos desativados. Vale destacar que há estudos particularmente focados na reciclagem de ETR, mas ainda são incipientes.

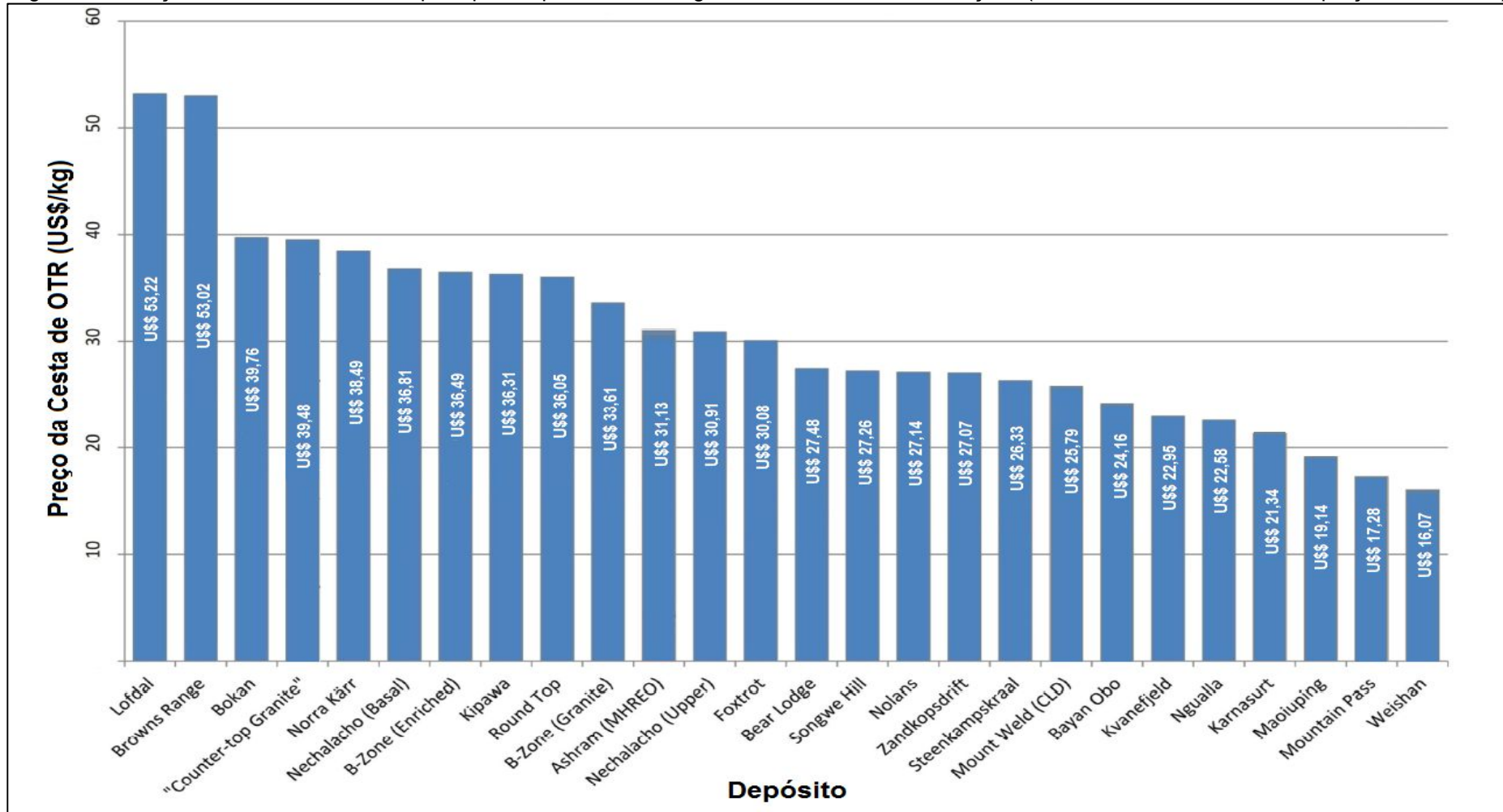
Em 2010, foram relatados mais de 200 projetos de exploração voltados para a mineração de ETR fora da China, desenvolvidos por cerca 165 empresas e 24 países (LUSTY, 2010). Boa parte desses projetos são desenvolvidos por pequenas e médias empresas, que muitas vezes não possuem capital próprio suficiente para tal desenvolvimento; dessa forma, só uma parcela pequena dos mais de 200 projetos em desenvolvimento deverá vir a se tornar mina, uma vez que, para se obter êxito nessa atividade, é necessário atender a alguns requisitos ou fatores que são imprescindíveis para o sucesso do empreendimento.

De acordo com Bogner (2014, 2015), existem fatores comparativos entre todos os projetos de mineração, mas há vários adicionais que são específicos para os ETR e que desempenham um papel dominante em uma avaliação comparativa. Ele cita alguns critérios básicos para a avaliação comparativa de um depósito qualquer de ETR, tanto para o investidor de varejo como para o institucional. Como acontece com qualquer empreendimento, existem critérios básicos para se avaliar o potencial de um projeto em comparação com seus pares. Em um projeto de ETR, é necessária uma avaliação comparativa inicial, por ordem decrescente de importância, conforme critérios os a seguir: mineralogia, metalurgia, tonelagem e teor, distribuição dos ETR – elementos terras-raras leves (ETRL): La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd; elementos terras-raras pesados (ETRP): Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu, Y; elementos terras leves e pesados (ETRMP): Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu, Y; elementos terras críticas (ETRC): Nd, Eu, Tb, Dy, Y; e elementos terras-raras utilizados em ímãs (ETRAI) –, economia (avaliação econômica, especialmente da

margem operacional e/ou dos custos operacionais), infraestrutura (energia, água e acesso rodoviário) e jurisdição favorável.

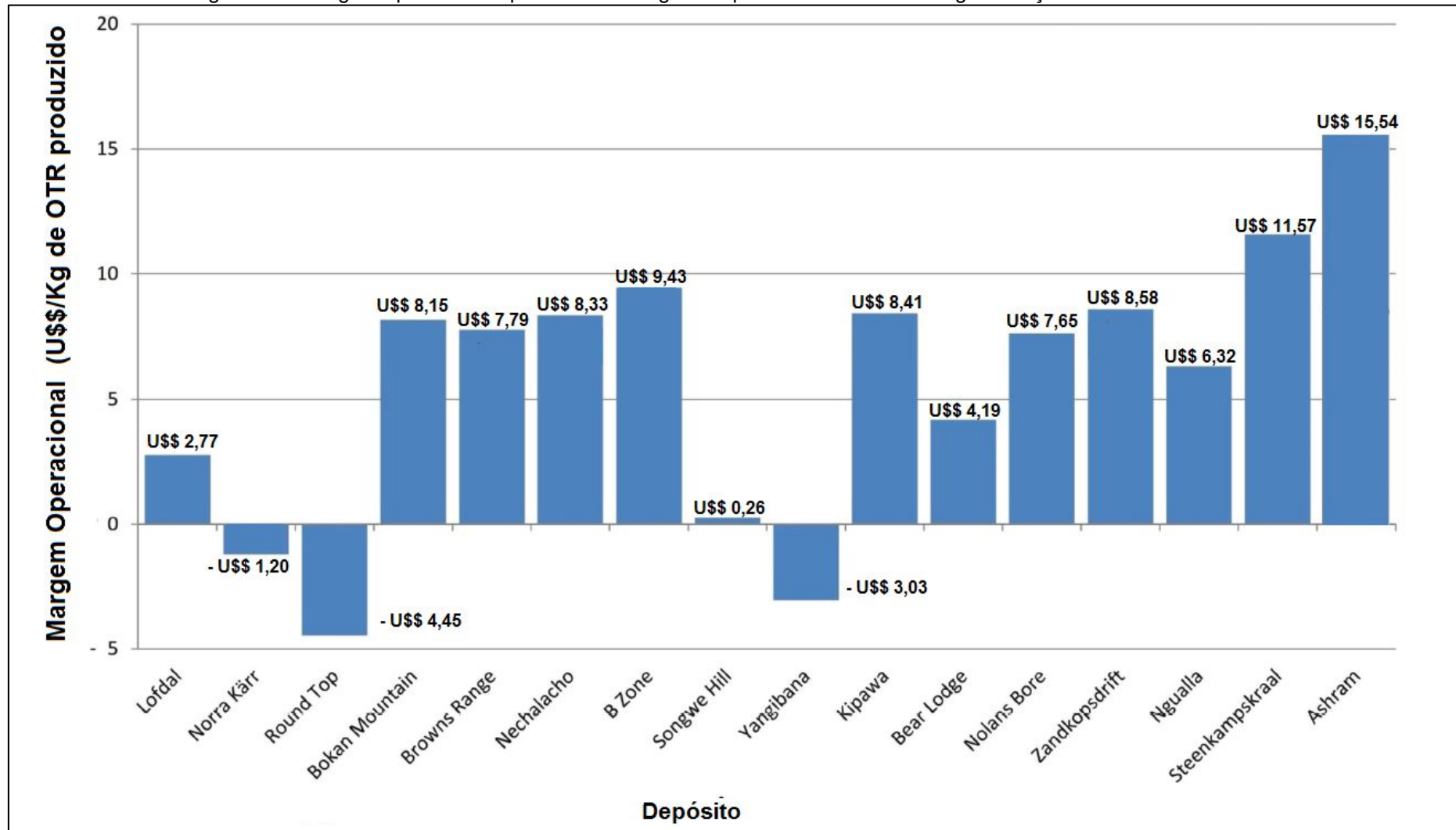
A implantação do processo global de produção de ETR pode levar de 5 a 12 anos, o que significa que os poucos projetos que preenchem todos os critérios necessários para entrar em operação podem ainda não estar em uma posição confortável. Contudo, a volatilidade dos preços de comercialização dos produtos de terras-raras e as margens operacionais menores de alguns projetos em desenvolvimento fora da China poderão provocar a desistência ou a paralisação de suas atividades. As Figuras 16 e 17 mostram os valores das cestas de óxidos de terras-raras (o que consiste da composição mineral do depósito em % ponderada pelo preço de venda do OTR em US\$/kg) e OPEX (custos operacionais estimados nos projetos) de alguns dos principais projetos em estágio avançado de desenvolvimento e seus respectivos depósitos minerais. Em 2015, existiam cerca de 53 projetos em fase avançada de desenvolvimento, pertencentes a 49 companhias e localizados em 35 regiões ou 16 países (TECHNOLOGY METALS RESEARCH, 2015). Nos capítulos 3 e 4 serão descritos os fatores de competitividade e risco considerados mais relevantes para o desenvolvimento desses projetos mineiros, os quais serão selecionados para a construção do modelo de competitividade e risco na mineração de terras-raras (MCRM-TR).

Figura 16 – Preço das cestas de OTR dos principais depósitos em estágio de desenvolvimento avançado (dados de dezembro de 2014, preços FOB-China).



Fonte: Bogner (2015), modificado.

Figura 17 – Margem operacional aproximada de alguns depósitos de ETR em estágio avançado de desenvolvimento.



Fonte: Bogner (2015), modificado.



## **2.4.9 Conjuntura e geopolítica**

### **2.4.9.1 Conjuntura**

O controle de recursos e reservas de minerais estratégicos e fontes de energia tem sido alvo de políticas desenvolvimentistas de diversos países ao redor do mundo há séculos, mais especificamente do século XVIII até metade do XIX. Com a Revolução Industrial, houve o desenvolvimento de novos meios de industrialização, de produção em massa e de processos de geração de energia, de modo que esse interesse estratégico teve um aumento considerável (HOBBSAWM, 1997). Nesse sentido, os países que possuem e administram seus recursos estratégicos detêm o controle das matérias-primas indispensáveis ao desenvolvimento da indústria moderna contemporânea.

Assim, países/jurisdições que possuem essa vantagem competitiva podem lograr grande poder de barganha nas negociações comerciais internacionais. Isso porque a dependência industrial de determinado produto, aliada ao monopólio comercial do produto final (produto acabado), culmina no controle dos preços e na circulação de produtos no mercado. Os ETR, que são considerados estratégicos para qualquer nação, especialmente as desenvolvidas e em desenvolvimento, vêm se tornando fonte de disputas comerciais e são pauta estratégica em muitos países. A crescente demanda por esses elementos provenientes de bens minerais estratégicos tem preocupado algumas nações no que toca à disponibilidade desses insumos no mercado, uma vez que a China figura como principal detentora de sua produção e tem tomado atitudes preocupantes no sentido de restringir o acesso das demais nações a essas matérias-primas, por meio da imposição de cotas, taxas de exportação e outros instrumentos de restrição no comércio internacional.

O expressivo aumento do consumo interno da China, decorrente do crescimento da economia do país, a necessidade emergente de energias limpas (fato que contribui muito para o aumento da demanda por produtos à base de ETR) e os impactos ambientais das atividades da cadeia produtiva dos ETR estão entre os motivos alegados pelo governo chinês para programar crescentes restrições, que começaram a ser impostas pela China em 2005. Esse fato provocou elevação dos preços internacionais de compostos de ETR. Entre 2005 e 2010, as quantidades autorizadas pelo Ministério do Comércio chinês para a exportação desses elementos

sofreram quedas expressivas. Entre 2009 e 2010, a queda foi de quase 40%, passando de 48.000 toneladas em 2009 para apenas 30.258 toneladas em 2010, quantidade mantida praticamente inalterada nos anos seguintes.

Além das cotas de exportação, as empresas mineradoras de terras-raras estão sujeitas a licenças para exportação expedidas pelo Ministério do Comércio chinês. Desde 2006, a China vem reduzindo o número de companhias licenciadas por meio da adoção de regras de licenciamento e de regulações ambientais mais duras. Segundo o Serviço de Pesquisa do Congresso norte-americano, em 2006, 47 empresas chinesas e 12 *joint ventures* receberam licenças de exportação. Em 2011, o número de empresas licenciadas de capital exclusivamente chinês caiu para menos da metade (22) e foram licenciadas 9 *joint ventures*. Na primeira rodada de alocação de cotas de exportação em 2012, o governo assegurou cotas para 9 empresas e 17 deveriam esperar por resultados de inspeção ambiental. Em maio de 2012, as cotas provisionais dessas empresas foram aprovadas, totalizando, assim, entre empresas de capital chinês e *joint ventures*, 26 empresas de terras-raras a receberem licenças de exportação em 2012, número inferior ao de 2011 (MORRISON; TANG, 2012). A regulação do mercado de terras-raras chinês inclui, ainda, as tarifas de exportação. Essas tarifas variam, atualmente, de 15% a 25%. Em 2007, elas foram estabelecidas em 10% e eram aplicadas a menos itens.

Um exemplo claro do que a política de cotas de exportações de TR da China provocou no mercado foi presenciado nos preços dos OTR com pureza superior a 99%: eles aumentaram quase seis vezes, no caso do európio, e até mais de 30 vezes, no caso do samário, entre os anos de 2009 e 2012. Os aumentos dos preços dos óxidos de neodímio e de disprosio foram superiores a 12 vezes nesse mesmo período: o óxido de neodímio saiu de 19 US\$/kg em 2009 para 234,40 US\$/kg em 2011. A dependência mundial em relação à produção chinesa preocupa principalmente os países com plataformas industriais avançadas, intensivas no uso de alta tecnologia. Especialmente o Japão, que importou, em 2012, 82% de sua demanda de ETR da China, o que equivale a cerca de 40% das exportações chinesas. Já os Estados Unidos importaram outros 18% do que os chineses produziram (BRASIL, 2013). Outros países se destacam na importação desse setor: Alemanha, França, Áustria, Estônia, China, Coreia do Sul, Brasil, Canadá e Rússia.

Diante dessas movimentações, em 2012 os EUA, a Europa e o Japão denunciaram a política de cotas de exportação impostas pela China na Organização

Mundial do Comércio (OMC). Essa organização deu parecer favorável aos países denunciantes, pedindo ao governo chinês o encerramento de tais cotas. Em dezembro de 2014, a China encerrou a política de cotas de exportação para ETR; no entanto, especialistas garantem que a regularização do suprimento e a estabilização dos preços de ETR não deverão ocorrer no curto prazo (PAUL, 2015).

Além disso, a China é também a principal detentora da tecnologia e da infraestrutura industrial necessária para atuar em todas as fases da cadeia produtiva de ETR. Fora da China, atualmente, apenas a Austrália e a Malásia possuem projetos com os pré-requisitos ambientais e comerciais aprovados para isso (PATRIOTA, 2015). A norte-americana Molycorp Inc., que já tinha retomado a produção de terras-raras em 2010 (as atividades haviam sido paralisadas em 2002 por conta de acidente ambiental), teve seu retorno foi saudado, por alguns, como um passo em direção à independência americana no que tange às terras-raras. A Molycorp Inc. começou a planejar e construir sua infraestrutura para processar o minério de terras-raras de sua mina em Mountain Pass. No entanto, com a queda dos preços das terras-raras ao longo dos últimos 4 anos e problemas com endividamentos, a companhia se viu com grandes dificuldades para se manter em operação. Assim, foi necessário o pedido de recuperação judicial da Molycorp Inc., anunciado em agosto de 2015 (JAMASMIE, 2015).

Um dos principais motivos apontados por analistas do setor para a crise da Molycorp foi o fato de 98% da composição das reservas de sua mina ser constituída de cério e lantânio, que já eram dois dos ETR com os mais baixos valores de mercado e tiveram seus preços depreciados em cerca de 80% nos últimos 4 anos; a isso se somam, é claro, as dívidas acumuladas com credores. Os Estados Unidos possuem histórico de envio de terras-raras pesadas por meio da Molycorp às suas instalações na China para transformação e agregação de valor, incluindo a instalação de Magnequench, por meio da aquisição da empresa Neo Material Technologies. A China detinha uma participação de 62% na Neo Material Technologies no momento da aquisição da Molycorp em 2012. Assim, a nação americana encontra-se em situação de grande dependência da China para materiais de ímãs de terras-raras, e agora a exportação de ativos de terras-raras dos EUA para a China irá intensificar essa dependência, pelo menos por mais alguns anos (SCHUESSLER, 2014).

São várias as especulações sobre as reais razões que levaram a China a restringir as exportações de terras-raras nos últimos anos. A competição com o Japão tem sido citada como um dos principais motivos. A forte dependência do Japão em relação à produção chinesa, haja vista o país não possuir reservas desses elementos, tem levado empresas japonesas de alta tecnologia fabricantes de produtos que utilizam terras-raras a se instalarem na China, agregando valor ao território chinês e nele gerando empregos. Outra razão para a restrição da exportação de terras-raras pelos chineses seria o aumento da demanda do país e a política de formação de estoques adotada pelo governo, especialmente de terras-raras pesadas. O aumento da demanda seria resultado da atração de empresas de tecnologia em território chinês à procura de um suprimento estável e mais barato de terras-raras, e da implementação de uma estratégia “verde”. A China anunciou, em 2010, que sua indústria automobilística deverá fabricar um milhão de veículos elétricos e híbridos nos próximos anos. Um dos planos anunciados recentemente pelos chineses, para o período de 2010 a 2020, é de ter 330 GW de eletricidade eólica instalada, o que representa três vezes a potência total instalada no Brasil (LIFTON, 2012).

Considerando que a questão ambiental foi a principal justificativa dos chineses para a restrição às exportações, nesse contexto há diretrizes para o desenvolvimento dos recursos minerais (2009–2015) publicadas em 2009 pelo governo chinês. O documento, que estabelece as normas para a proteção e o uso racional dos recursos naturais chineses para o período mencionado, define as terras-raras, o tungstênio e o antimônio como *commodities* minerais protegidos, o que significa estarem sujeitos ao estrito controle do governo. O compromisso assumido pela China de combater a poluição e reduzir as emissões de carbono levou ao fechamento de minas que não atendiam aos requisitos ambientais e à suspensão de licenças para mineração de terras-raras até 2012.

Especialistas consideram que o governo chinês está na direção correta e avançou na questão ambiental associada à mineração de terras-raras. Outro fato a ser considerado é a política recente do governo central de racionalização e reestruturação de sua indústria mineradora de terras-raras, de forma a torná-la mais eficiente e lucrativa, concentrando toda a cadeia de produção em grandes empresas, o que também provocou o fechamento de minas de pequeno porte (LIMA, 2012). O Ministério da Indústria e Informação Tecnológica (MIIT) é o responsável

pelo plano de desenvolvimento que tenta reorganizar a indústria dos ETR (WÜBBEKE, 2013). Contudo, o Estado tem enfrentado queixas não só internacionalmente, mas principalmente no âmbito interno, pois não houve plena aceitação das medidas por parte dos produtores e governos locais chineses.

A situação se torna mais problemática porque é fato que as políticas nacionais são realmente implementadas quando aplicadas localmente, e é o que ocorre na China devido ao importante papel das províncias e subprovíncias no setor industrial ao controlarem e supervisionarem as licenças relativas às empresas mineradoras (PATRIOTA, 2015). Essa descentralização do controle do governo central se originou no período entre 1956 e 1978, quando houve reconfiguração das empresas estatais, as quais saíram do controle do governo central para serem administradas por governos locais como prefeituras e províncias (LEITE, 2011, p. 109). Apesar dos esforços do Estado para centralizar o parque industrial de mineração de terras-raras, ele continua fragmentado e dividido entre o governo central, as províncias e algumas empresas privadas (WÜBBEKE, 2013). Vale salientar que os problemas com o contrabando, que influenciam a tentativa de regulação das exportações, continuam.

#### **2.4.9.2 Geopolítica**

Naturalmente, as variações de oferta e as dificuldades de acesso a determinados produtos estratégicos para a economia mundial podem provocar mudanças na geopolítica internacional; com as terras-raras não é diferente. Se voltarmos um pouco no tempo, podemos afirmar que os dois choques do petróleo ocorridos na década de 1970 são, talvez, os exemplos mais recentes de como a configuração do poder entre os países pode ser redesenhada em função de quem detém determinado produto estratégico (MELO et al., 2013).

Os minerais estão distribuídos de forma desigual entre diferentes ocorrências e depósitos em jurisdições/países ao redor do mundo. Assim, como os recursos de terras-raras, considerados economicamente viáveis, são encontrados em poucas regiões, sua produção tende a ser concentrada e depender de poucos países. Quando metade ou mais da produção mundial de determinada matéria-prima está concentrada num único país, os países importadores tornam-se dependentes desse

produtor, que passa a deter grande poder de influência sobre os preços e as quantidades comercializadas mundialmente (MELO et al., 2013).

Por serem utilizadas como insumos na fabricação de produtos de alta tecnologia e serem essenciais no desenvolvimento de produtos estratégicos para a área militar (defesa), industrial e econômica como um todo, principalmente nos países industrializados, as terras-raras têm tido demanda crescente em todo o mundo. As terras-raras estão entre os recursos mais cotados e constituem um pivô das disputas no cenário do comércio internacional envolvendo Japão, Estados Unidos e União Europeia. Estes, cientes da apreciável vantagem política, econômica e militar atrelada à posse desses insumos, vêm tentando criar mecanismos e incentivos eficientes para a redução da dependência de suas economias no que toca à questão das terras-raras (SANTOS, 2014). Essa movimentação provocou interesses também de países da América do Sul, em especial do Brasil, que também vem trabalhando no objetivo de desenvolver a cadeia produtiva dos ETR no país. A corrida contemporânea para identificar e explorar novas reservas de terras-raras em lugares remotos, como a Groelândia, o Afeganistão e o leito do Mar do Pacífico, tem desafiado as convenções ambientais de escalas locais a internacionais (KLINGER, 2015). Os países, assim como as empresas, lutam para deter a produção em seus domínios na esperança de capturar a geopolítica percebida do capital gerado pelo controle de parte da produção mundial de terras-raras.

A constituição do monopólio chinês no setor de terras-raras se deu através da construção de todo um parque industrial e científico especificamente para as terras-raras, o que promoveu a China a protagonista no setor. Em parte, esse domínio foi conseguido graças à mão de obra barata encontrada no país, que ao mesmo tempo é o centro do desenvolvimento de pesquisas e processos de extração que tornaram a produção de terras-raras economicamente viáveis; isso contribuiu para justificar a grande desigualdade no que se refere à produção de matérias manufaturadas em comparação com outros países (SANTOS, 2014).

Até meados dos anos 1950, as principais fontes de abastecimento da indústria de terras-raras no mundo eram minas localizadas no Brasil e na Índia, às quais posteriormente se juntou a África do Sul. Esse fato destaca estes países como importantes nações no cenário internacional no setor de terras-raras, especialmente o Brasil, que já foi o maior produtor mundial (FRANÇA, 2012). Entre os anos de 1960 e 1980, os Estados Unidos foram o principal produtor de terras-raras. Mas, nas

décadas seguintes, a produção foi deslocada para a China a fim de tirar vantagens da força de trabalho e, conseqüentemente, dos custos baixos e da fraca ou inexistente regulação ambiental no país. Atualmente, os depósitos indianos e sul-africanos ainda produzem terras-raras concentradas, já que a expansão da produção chinesa impôs grande redução da produção desses países. Graças aos investimentos em curto, médio e longo prazos, a China conseguiu transferir praticamente toda a indústria do setor para seu território, o que a colocou na posição de base da manufatura de praticamente todas as terras-raras do mundo (SANTOS, 2014).

Os recursos de terras-raras não são difíceis de encontrar na natureza, uma vez que a sua presença (pelo menos a de boa parte dos 17 elementos classificados com essa denominação) supera, em quantidade, elementos como chumbo, cobre ou prata. No entanto, esses bens minerais ocorrem em baixas concentrações na crosta terrestre. E, dependendo do grau de concentração, dos tipos de elementos dominantes na mineralogia e da localização do depósito (levando em conta fatores técnicos, econômicos e geopolíticos), em muitos casos torna-se inviável o aproveitamento desses elementos.

Segundo Reis (2013), o continente africano, juntamente com a Austrália e o Canadá, é a solução geopolítica para acabar com o estrangulamento da China sobre os elementos de terras-raras. As três regiões são as que detêm as mais vastas reservas do mundo. Os especialistas apontam a África como a região de maior potencial e destacam que as rochas do tipo carbonatitos representam mais da metade dos depósitos mundiais de ETR. Não se pode deixar de citar os países detentores das maiores reservas mundiais oficialmente conhecidas no momento (fora da China), como o Brasil, com 22 milhões de toneladas (16% da reserva mundial) e os Estados Unidos, com 13 milhões de toneladas (10% da reserva mundial estimada) (ANDRADE, 2014). Contudo, o cenário geopolítico é bastante desafiador para o sucesso dos atuais e futuros projetos de mineração e instalações de processamentos destinados ao aproveitamento dos ETR, incluindo o desafio que a China deve enfrentar futuramente, pois há analistas que consideram que poderá haver uma crise de abastecimento nos próximos anos quando a procura chinesa superar a produção nacional e o país se tornar importador (REIS, 2013). Por fim, o êxito dos projetos relacionados com o setor de terras-raras irá depender fortemente das expectativas de mercado, o que irá influenciar a escassez ou o excesso de

oferta de ETR processados. Tudo isso terá relação direta com a situação e as perspectivas dos preços desses metais.

## 2.5 MODELOS DE ANÁLISE DE COMPETITIVIDADE

Como atividade econômica, a mineração é indispensável para a manutenção do nível de vida e o avanço das sociedades modernas em que vivemos. Dos metais às cerâmicas, dos combustíveis aos plásticos, equipamentos elétricos e eletrônicos, computadores, cosméticos, passando pelas rodovias e novas tecnologias, além das muitas outras vias de comunicação e muitos outros produtos e materiais que utilizamos ou de que desfrutamos cotidianamente, todos têm origem na atividade da mineração. Não seria precipitado afirmar que, sem a mineração, a civilização atual simplesmente não existiria. Sendo uma atividade econômica cujo objetivo é o aproveitamento das riquezas minerais, a mineração abrange e está interdependentemente ligada às atividades de exploração e exploração mineral, e aos processos industriais de beneficiamento mineral, que por sua vez estão ligados às atividades posteriores da cadeia produtiva – no caso dos metais, siderurgia, produção de ligas e combinação de metais para produção ligas especiais – e aos diversos setores industriais que dependem da atividade de mineração; estes, por sua vez, possuem grande dependência das condições relacionadas ao comércio (oferta/demanda por produtos) e ao mercado de capitais (excesso/escassez de capital para investimento no aumento da capacidade produtiva), além de fatores tecnológicos, conjunturais e geopolíticos.

A globalização criou novas dinâmicas em muitas indústrias estabelecidas. Esse tem sido o caso da indústria automotiva, de comunicações, do vestuário, de eletroeletrônicos, fotográfica, do aço e praticamente de todos os outros setores ao redor do mundo (HILL, 1994). Esse fato também é observado na indústria de mineração global, que tem passado por turbulências nos últimos anos. Na realidade, nas últimas décadas o setor de mineração global tem se deparado com algumas das maiores mudanças de sua história. Algumas das questões críticas atuais que as empresas de mineração têm de enfrentar, em escala sempre crescente, são: flutuação dos preços das *commodities* minerais e das taxas de câmbio; influências reguladoras; oportunidades globais; concorrência global; fusões, aquisições,



alianças estratégicas, reestruturação e até mesmo a saída de um determinado negócio (BRUMMER, 2009).

Durante séculos, a indústria da mineração tem sido o sustentáculo do mundo civilizado. Esse fato é evidenciado no início do progresso dos países desenvolvidos, ricos em recursos minerais, como os EUA, o Canadá e a Austrália (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1990). Essa constatação também se aplica aos países subdesenvolvidos, por exemplo o Brasil e a África do Sul, onde a indústria de mineração teve importante contribuição para a economia na última década, inclusive no século passado, e ainda tem muito a contribuir. Diante desse ambiente bastante complexo, a busca para se manter ou criar uma vantagem competitiva e sustentável vem se tornando objetivo comum para muitas empresas de mineração. Considerando que o setor mineral das terras-raras está inserido nessa dinâmica global, torna-se imperioso que as empresas do setor tomem medidas protetivas e estratégicas, assim como os países detentores de recursos minerais de terras-raras, para que se tornem e/ou permaneçam competitivos.

Para obter sucesso em tais circunstâncias dinâmicas, é fundamental que as empresas/os países adquiram ou estabeleçam ferramentas e mecanismos que permitam o monitoramento contínuo dos fatores que podem influenciar a competitividade de sua economia, nesse caso o aproveitamento econômico de suas riquezas minerais estratégicas. Com tal aparato à disposição, é possível analisar a dinâmica do ambiente externo de forma mais eficiente e eficaz.

O uso de ferramentas e mecanismos de monitoramento permite mensurar a percepção dos riscos envolvidos em projetos destinados ao aproveitamento desses bens minerais e, mesmo que em estágio conceitual, subsidiar a tomada de decisão, seja para o aperfeiçoamento, seja para a interrupção ou busca de condições mais favoráveis para o setor ou para projetos de mineração em desenvolvimento.

### **2.5.1 Competitividade e seus fundamentos conceituais**

A teoria econômica clássica aproximou a discussão sobre competitividade entre as nações mediante um tratamento quantitativo dos fatores de produção. Nesse contexto, se destaca a teoria das vantagens comparativas, desenvolvida pelo economista David Ricardo (LIMA; VALE, 2003). Em economia, a teoria (ou o princípio) das vantagens comparativas explica por que o comércio entre dois países,

regiões ou pessoas pode ser benéfico, mesmo quando um deles é mais produtivo na fabricação de todos os bens. O que importa aqui não é o custo absoluto de produção, mas a razão de produtividade que cada país possui. O conceito é muito importante para a teoria do comércio internacional moderno (GONÇALVES, 1997). No caso da vantagem absoluta, a diferença está no fato de que cada país se concentra em um nicho baseado nessas vantagens, beneficiando-se da especialização em setores nos quais é mais eficiente e comercializando os seus produtos com outros países.

A teoria foi formulada por David Ricardo (1817), que criou uma explicação sistemática no seu livro *The Principles of Political Economy and Taxation*. Essa obra deu início à análise do comércio internacional, que passou a ser regida pelas vantagens comparativas e não pelas vantagens absolutas, como acreditava Adam Smith (1776 apud BARAÚNA, 1983). Por meio da análise *ricardiana* é possível perceber que tudo remonta às falhas na teoria *smithiana* de preços.

David Ricardo (1817) usa como exemplo Inglaterra e Portugal. No segundo, era possível produzir tanto vinho quanto tecidos com menos trabalho do que na Inglaterra. A produtividade relativa de Portugal e Inglaterra pode ser medida pela relação de quanto trabalho é necessário empregar para cada unidade produzida do bem; essa relação representa os denominados coeficientes técnicos de trabalho. Ao comparar Portugal e Inglaterra, e observar que o primeiro produzia ambos os bens com menos trabalho do que o segundo, pôde-se afirmar que este possuía as chamadas vantagens absolutas, as quais refletiam a produção em unidades absolutas, não medindo, portanto, o custo relativo da produção, o qual é estabelecido com base no salário de cada país.

Embora utilizada em numerosos estudos empíricos, a competitividade não dispõe de uma definição precisa como seria de se esperar para um conceito da ciência econômica, pois na maioria das vezes a teoria se limita à comparação dos desempenhos globais e setoriais das nações no que toca ao comércio exterior (ANDRADE, 2001). Até a década de 1970, o conceito de competitividade estava direcionado exclusivamente à questão do aumento das exportações e à capacidade de atração de investimentos externos. Assim, os sistemas de monitoramento de desempenho se limitavam ao controle contábil, centrado na contabilidade de custos, relegando outras dimensões competitivas, como aprimoramento da qualidade,

inovação, prazos de entrega e, em geral, relacionamento externo com o mercado (LIMA; VALE, 2003).

Após esse período, consolida-se o livre mercado nas trocas comerciais entre diversas nações. Com a expansão industrial de países asiáticos, especialmente o Japão, configura-se um novo paradigma para a competitividade. Nessa nova filosofia, à dimensão competitiva de custos somam-se outros fatores, pois o conhecimento pleno do mercado e de suas externalidades associadas se tornou estratégico, exigindo aprimoramento contínuo de práticas comerciais.

Diversas análises sobre mensuração e determinação dos fatores de competitividade foram realizadas e publicadas nos últimos anos. Porter (1990) considera que, para concorrer no mercado competitivo, tanto interno como externo, as empresas devem inovar e aprimorar permanentemente suas vantagens competitivas, o que dependerá de quatro conjuntos de determinantes (PORTER, 1990 apud LIMA; VALE, 2003):

- Condições dos fatores de produção – dizem respeito aos insumos necessários às atividades produtivas de qualquer indústria, ou especializadas de certos setores, como mão de obra, terra cultivável, recursos naturais, capital e infraestrutura, associando-se o acesso a tais fatores;
- Condições de demanda – são estimadores da competitividade empresarial, na medida em que determinam o rumo e o caráter da melhoria e inovação pela empresa, ditadas pelas exigências dos compradores;
- Indústrias correlatas e de apoio – refletem o atributo competitivo sustentado pela disponibilidade de indústrias correlatas que atuam eficientemente no suprimento de insumos e componentes que por sua vez também detêm caráter de competitividade mercadológica;
- Estratégia, estrutura e rivalidade entre as empresas – refere-se ao contexto que rege a maneira pela qual as empresas são criadas, organizadas e dirigidas, além da natureza da rivalidade interna.

A esses quatro conjuntos determinantes que condicionam o ambiente da competitividade nacional, Porter acrescenta duas outras variáveis:

- Acaso – diz respeito a ocorrências fortuitas, fora do alcance e do controle dos agentes produtivos e dos governos, que podem criar mudanças na posição

competitiva, por exemplo as descobertas (invenções), descontinuidades nos custos dos insumos como o choque do petróleo, as crises nos mercados financeiros, os acidentes catastróficos, as decisões políticas unilaterais de governos estrangeiros e as guerras, entre outros eventos externos.

- Papel do governo – é colocado por Porter como influenciador dos quatro determinantes acima mencionados (PORTER, 1990 apud LIMA; VALE, 2003). É, assim um elemento catalisador de competitividade, ao implementar, por exemplo, políticas de subsídios, para o mercado de capitais, fiscais, educacionais e outras.

Em um trabalho sobre a competitividade da indústria brasileira, Coutinho e Ferras (1994), ao estabelecerem um organograma dos fatores determinantes da competitividade, além dos fatores inerentes às empresas e aos fatores estruturais (setoriais), destacaram os fatores sistêmicos, nos quais estão alocadas as variáveis relacionadas ao papel do governo. Esses fatores seriam:

- Macroeconômicos – relativos a taxa de câmbio, oferta de crédito e taxas de juros;
- Político-institucionais – relativos a políticas tributárias e tarifárias, regras para o poder de compra do Estado e programas de fomento ao desenvolvimento tecnológico;
- Regulatórios – políticas de proteção à propriedade industrial, preservação ambiental, defesa da concorrência e proteção ao consumidor;
- Infraestrutura – transportes, telecomunicações, energia, tecnologia, serviços em geral;
- Sociais – qualificação da mão de obra, políticas de educação, trabalhistas e de minorias, seguridade social, nível de exigência dos consumidores;
- Regionais – distribuição espacial da produção, políticas fundiárias, áreas de proteção e reservas;
- Internacionais – políticas de comércio exterior, práticas do comércio mundial, inserções em blocos hemisféricos, fluxos internacionais de capitais, relação com organismos multilaterais, acordos internacionais.

Numa visão dinâmica, a competitividade deve ser entendida como a capacidade da firma de formular e implementar estratégias concorrenciais que lhe

permitam conservar, de maneira duradoura, uma posição sustentável no mercado (COUTINHO; FERRAS, 1994). Da mesma forma que existem diversas acepções para o conceito de competitividade, no âmbito da construção de indicadores de competitividade a diversidade de abordagens é ainda maior (ANDRADE, 2001).

A análise de competitividade pode compreender diferentes configurações (CALAES, 2009):

- Configurações orgânicas – sob o ponto de vista orgânico, a análise de competitividade pode contemplar um empreendimento, um conjunto de empreendimentos, uma empresa, um conglomerado empresarial ou um setor de atividade econômica. Ainda sob o ponto de vista orgânico, cabe salientar a possibilidade de realizar análises agregadas de competitividade, focalizando uma determinada característica dos agentes de produção (por exemplo: posição competitiva das micro e pequenas empresas de modo diferenciado das de médio e grande porte);

- Recortes geográficos – sob o ponto de vista geográfico, a análise de competitividade pode contemplar uma dada área, uma região, um estado/província, um país, um conjunto de países, um continente ou um bloco econômico.

- Contextos setoriais – sob o ponto de vista setorial, a análise de competitividade pode ser empreendida segundo setores, subsetores de atividade econômica, bem como produtos:

- Setores: automobilístico, naval, de mineração, de siderurgia etc.

- Subsetores: metálicos ferrosos, metálicos não ferrosos, não metálicos etc.

- Produtos: minério de ferro, minério de manganês, calcário, rocha fosfática, minério de terras-raras, fertilizante, fosfatado, rochas ornamentais, brita etc.

- Estrutura industrial – sob o ponto de vista da estrutura industrial, a análise de competitividade pode compreender etapas do empreendimento mineral (ex.: exploração, desenvolvimento, operação) ou segmentos das cadeias produtivas (ex.: etapas de lavra, beneficiamento e transformação mineral das terras-raras).

Ao longo dos últimos anos, foram sendo identificados outros fatores igualmente importantes que passaram a ser integrados ao arcabouço teórico da competitividade: inovação tecnológica, empreendedorismo e infraestrutura do conhecimento, entre outros.

## **2.5.2 Enfoque dos modelos de análise**

De acordo com Calaes (2006), indiferentemente da abordagem (empreendimento, empresa, setor, região, país), as análises de competitividade são efetuadas segundo três diferentes enfoques: empírico, pontual e sistêmico.

### **2.5.2.1 Enfoque empírico**

Por meio desse enfoque, a análise de competitividade é empreendida com base na experiência adquirida com a observação, aferição e ponderação de determinados parâmetros. Embora mesquem, em sistemas de pontuação ponderada, fatores de competitividade de bases científica e empírica, tais análises se notabilizam pelo enfoque fundamentado no conhecimento e julgamento subjetivo das organizações que os executam, bem como pelas frequentes divergências entre os correspondentes ranqueamentos conclusivos.

Enquadram-se nesse foco, por exemplo, as análises comparativas de posição competitiva de países, elaboradas e divulgadas regularmente por instituições como Harvard Institute for International Development (HIID), Fórum Econômico Mundial (WEF), Fraser Institute e Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

### **2.5.2.2 Enfoque pontual**

Nesse enfoque, a análise de competitividade busca avaliar o comportamento constatado ou previsível de determinado indicador de desempenho, analisado isoladamente. A crítica a esse enfoque é que ele oferece resultados limitados. Isso porque, embora a análise de um determinado fator propicie a comparação de um empreendimento, de uma empresa, de um setor ou de uma região com outros conjuntos análogos e concorrentes, a constatação de que o fator em análise apresenta valor mais favorável no empreendimento, na empresa, no setor ou na região A do que em B não conduz à conclusão de que o primeiro seja efetivamente mais competitivo do que o segundo (CALAES, 2006).

No entanto, do ponto de vista estratégico, a geração de valor é a condição essencial que determina a efetiva posição competitiva de um empreendimento, setor

ou país/jurisdição. Nesse sentido, para efeito de determinação e comparação da capacidade e possibilidade ou probabilidade (determinações probabilísticas, no caso deste trabalho) de geração de valor de dois ou mais empreendimentos e/ou países/jurisdições, torna-se imprescindível analisar pontualmente diferentes fatores na estruturação do modelo de simulação que procederá à avaliação da posição competitiva.

São exemplos de indicadores de desempenho, analisados isoladamente no enfoque pontual:

- Custos segundo etapas de uma determinada cadeia produtiva (etapas de lavra, beneficiamento e transformação do minério);
- Custos segundo naturezas: mão de obra, energia, infraestrutura local etc.;
- Produção e vendas: capacidade, ocupação, *market share*, rotação de estoques;
- Índices de produtividade: mão de obra por unidade de produto, energia por unidade de produto, matéria-prima por unidade de produto;
- Carga tributária: sobre a receita bruta, sobre o lucro bruto, sobre o lucro líquido;
- Indicadores de resultado: lucro líquido sobre vendas, lucro líquido sobre investimento, lucro líquido sobre patrimônio.

Assim, mesmo com as fragilidades citadas, a análise de competitividade com enfoque pontual constitui o elo essencial para a estruturação de uma análise sistêmica de posição competitiva. Alguns dos fatores (intrínsecos e extrínsecos) abordados com frequência em avaliações de posição competitiva, na análise pontual, relacionadas à indústria mineral, seja em nível de empreendimentos, seja no de empresas, setores ou regiões são apresentados a seguir (CALAES, 2006):

- Fatores intrínsecos da competitividade – no setor mineral, destacam-se aqueles associados ao ambiente geológico/depósitos presumidos e custos associados à cadeia de suprimento mineral;

- Fatores extrínsecos da competitividade – no setor mineral, destacam-se a legislação, a tributação e a logística.

### 2.5.2.3 Enfoque sistêmico

Nesse último enfoque, a análise de competitividade possui caráter integrativo, holístico e estratégico. Podem ser consideradas externalidades à firma, que estão fora do ambiente e do alcance do controle empresarial. Sua classificação se dá em seis grupos: (i) macroeconômico; (ii) político-institucional; (iii) legal-regulatório; (iv) de infraestrutura; (v) social, (vi) regional e (vii) internacional.

### 2.5.3 Trabalhos de referência sobre análise de competitividade

Análises comparativas da posição competitiva de países são elaboradas regularmente por diferentes entidades internacionais, tais como Heritage Foundation; Fraser Institute, Harvard Institute for International Development (HIID), International Management Development Institute (IMD), Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), Banco Mundial, Fórum Econômico Mundial (WEF), Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Queen's University, Colorado School of Mines (CSM), Metals Economic Group (MEG), Halifax e outros.

Alguns trabalhos específicos sobre o setor mineral podem ser destacados:

- *Competitiveness of the U. S. minerals and metals industry* (UNITED STATES, 1990), entre outros;
- *A dynamic competitive analysis model for global mining* (BRUMMER, 2005);
- O Fraser Institute, desde 1997, realiza pesquisa anual envolvendo as empresas do setor de pesquisa, mineração e transformação mineral, tendo por objetivo avaliar a influência dos fundamentos do setor mineral e dos fatores sistêmicos, tais como tributação e aspectos regulatórios, sobre os investimentos em exploração mineral.

Estudos de competitividade relativos à área de geologia, mineração e transformação mineral são pouco difundidos no Brasil, no entanto listamos alguns destaques de trabalhos publicados nos últimos anos:

- *Potencial econômico da prospecção e pesquisa de ouro no Brasil* (MACKENZIE, 1991);



- *A posição competitiva do Brasil na exploração e mineração de ouro* (ARANTES; MACKENZIE, 1995);
- *Análise da competitividade do Brasil em relação à África do Sul, Austrália, Canadá e Estados Unidos* (CALAES, 1998);
- *Competitividade na exploração mineral: um modelo de avaliação* (tese de doutorado, ANDRADE, 2001);
- *Competitividade da indústria mineral brasileira* (LIMA, 2003);
- *Planejamento estratégico, competitividade e sustentabilidade na indústria mineral: dois casos de não metálicos no Rio de Janeiro* (CALAES, 2006);
- *Relatório Técnico 06: Análise de competitividade do setor mineral brasileiro* (CALAES, 2009).

Um modelo mineral é uma representação formal de um mercado mineral, indústria ou sistema em que as relações comportamentais refletem os fatores econômicos e técnicos envolvidos, assim como as instituições políticas e sociais (LABYS et al., 1985 apud ANDRADE, 2001). Não há um tipo de modelo mineral para todos os fins, e sim várias metodologias para se desenhar o modelo mais apropriado à finalidade desejada (ANDRADE, 2001).

### 3 FATORES DE COMPETITIVIDADE E RISCO NA MINERAÇÃO DE TERRAS-RARAS

#### 3.1 Fatores de competitividade e risco

Os fatores de competitividade e risco mais relevantes da atividade produtiva das terras-raras podem ser agrupados em seis categorias:

a) Potencial de remuneração do depósito: valor potencial do depósito, ou seja, a qualidade do depósito (mineralogia, teor de OTR e tonelagem) e estimativa de valor potencial do depósito no que toca aos ETR constituintes (a cesta de terras-raras);

b) Infraestrutura local: consiste na existência ou não de acesso rodoviário, porto, ferrovias, disponibilidade de energia e água na localização ou nas proximidades do depósito/projeto;

c) Expectativas de margens operacionais: de mineração (relativas especialmente às etapas de lavra e beneficiamento mineral); e de processamento (relativas, especialmente, às operações hidrometalúrgicas na extração e separação de ETR);

d) Implicações dos elementos radioativos presentes nos depósitos: relativos aos custos de separação e disposição de resíduos radioativos;

e) Expectativas potenciais de mercado: se refere ao grau de participação de uma empresa no mercado em termos das vendas de um determinado produto; no caso das terras-raras, é a fração do mercado de óxidos de terras prevista/preendida, isto é, o *market share* ou a fatia/cota de mercado dos ETR, que se almeja com a produção de óxidos de ETR do projeto/mina;

f) Aspectos político-econômicos conjunturais e de logística global (país): se refere à percepção política do setor de mineração e da conjuntura política, econômica e logística global da região/da província/da jurisdição/do país. O primeiro aspecto se refere a uma avaliação da atratividade política mineral (conjuntura setorial da jurisdição) e os dois últimos, à economia e à logística como um todo da jurisdição/do país.

### 3.1.2 Descrição dos fatores

Ao avaliar as condições nessas seis categorias, foram estabelecidos 8 fatores de competitividade e risco que podem influenciar de forma significativa na viabilidade de um projeto de mineração de terras-raras.

#### 3.1.2.1 Potencial de remuneração do depósito ou valor potencial do depósito

a) Qualidade e tonelagem: a qualidade do depósito no que concerne à mineralogia e à distribuição dos OTR é variável primordial na determinação das chances de sucesso de um projeto de mineração de terras-raras. Um depósito que possui mineralogia mais favorável (maior teor de ETR e menor quantidade e diversidade de materiais e/ou minerais de ganga) terá um custo operacional relativamente menor se comparado com outros projetos, uma vez que serão necessários um volume menor de massa desmontada e uma quantidade menor de substâncias químicas (seja na rota ácida, seja na básica) utilizadas nas etapas de processamento. Em alguns casos, a necessidade excessiva dessas substâncias no processo pode inviabilizar o projeto, por inflar o custo operacional.

Atualmente, os projetos em fase de produção ou os mais promissores (em fase de viabilidade econômica) trabalham com a perspectiva de obter um concentrado mineral de teor competitivo > 30% de OTR. Assim, os depósitos que possuem mineralogia e distribuição de OTR favoráveis podem garantir um concentrado mais promissor, tornando o depósito/projeto mais competitivo. Isso porque, na etapa de beneficiamento e processamento, serão utilizadas quantidades menores de substâncias químicas, cujos altos custos encarecem consideravelmente o processo produtivo. É importante destacar a importância de se ter uma tonelagem mínima de minério de terras-raras no depósito mineral, para garantir a operação e o fornecimento no longo prazo (> 20 anos).

b) Estimativa de valor do depósito: por conta da grande variabilidade dos preços de ETR, alguns projetos em desenvolvimento poderão não vingar. Algumas empresas podem aparecer rentáveis hoje; no entanto, em um mercado deprimido, as margens de lucro se tornam cada vez menores ao ponto de inviabilizarem a operação do empreendimento. Um complicador no setor de terras-raras é o fato de

os preços dos produtos desses elementos apresentarem alta volatilidade (BOGNER, 2015).

Ter uma produção com baixo custo operacional e bom preço de comercialização, logicamente, contribui para o aumento da margem operacional e, conseqüentemente, para um retorno financeiro maior do empreendimento, além de garantir sua sobrevivência. Dessa forma, a variável preço é indiscutivelmente uma das mais importantes para a mensuração da competitividade. No entanto, as flutuações das variáveis oferta e demanda estão diretamente relacionadas. Assim, elas devem ter o mesmo nível de importância na análise de competitividade e viabilidade de um projeto. Como existem diversos depósitos com diferentes composições mineralógicas de ETR, e conseqüentemente diversos produtos e aplicações distintas, há também demandas e preços distintos no mercado de TR.

A medida normalmente utilizada para estimar preliminarmente o valor do potencial econômico de um depósito de terras-raras é o valor da “cesta de terras-raras”. Esse valor é obtido pela soma ponderada dos teores de óxidos de terras-raras individuais do depósito com os respectivos preços de comercialização.

c) Distribuição de ETR no depósito: a distribuição de ETR é definida como a proporção de cada elemento em relação a todos os ETR combinados. É natural pensar que um depósito com uma distribuição mais enriquecida em ETRP seja mais valioso do que outro enriquecido em ETRL. Isso é explicado pelo fato de os primeiros possuírem quantidades maiores de ETR com maiores valores de mercado, por exemplo os ETR considerados críticos: Tb, Dy e Y. Além disso, as projeções indicam que as maiores possibilidades de aumento na produção dos elementos pesados não causarão a mesma pressão negativa sobre os preços que o possível aumento de produção de ETRL (por exemplo, Ce e La) causará. Contudo, considera-se indispensável levar em conta as distribuições de ETR na determinação da competitividade de um depósito. As distribuições comumente utilizadas na indústria de ETR como critério de avaliação e suas implicações na competitividade são:

- ETRL (ou LREE: La, Ce, Pr, Nd, Sm e Eu) – elementos terras-raras leves: possuem baixo valor de mercado;

- ETRP (ou HREE: Ga, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos terras-raras pesados: possuem alto valor de mercado;

- ETRMP (ou MHREE: Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos terras-raras médios e pesados: possuem maior valor de mercado;
- ETRC (ou CREE: Nd, Eu, Tb, Dy e Y) – elementos terras-raras críticos: possuem alto valor de mercado e implicações semelhantes às dos *MFEE*;
- ETRAI (ou MFEE: Nd, Pr, Tb, Dy) – elementos terras-raras para alimentação/produção de ímãs: possuem mercado mais forte e estável em curto, médio e longo prazos (BOGNER, 2015).

### **3.1.2.2 Infraestrutura local**

Todo projeto destinado ao aproveitamento de terras-raras, como qualquer outro dessa natureza, exige infraestrutura adequada para viabilizar a implantação e operação plenas da atividade produtiva. Tal infraestrutura necessária inclui energia, água e acesso (rodoviário, ferroviário e/ou portuário), bem como instalações de processamento e alojamento para os colaboradores. Essa é mais uma variável importante que precisa ser mensurada e ter seus custos estimados para a inclusão nas análises e avaliações de viabilidade econômica. Assim, depósito/projeto que não possui toda infraestrutura necessária à disposição pode ter sua competitividade reduzida quando comparada com a de um depósito que já possui toda ou boa parte da infraestrutura no local. Isso porque o suprimento das limitações encontradas em determinada localização acarretará a necessidade de aplicar adicionais investimentos na implantação e até na operação e no escoamento da produção; por exemplo, os acionistas controladores do empreendimento poderão ter que optar pelo tipo de transporte de minério mais adequado (hidroviário, rodoviário ou ferroviário, ou até a combinação destes) quando as instalações de beneficiamento e processamento não puderem ser instaladas nas proximidades da mina, por motivos conjunturais ou por carência de condições mínimas de infraestrutura local.

### **3.1.2.3 Expectativas de margens operacionais**

A etapa de exploração na mineração de terras-raras depende, entre outras variáveis, do tamanho do depósito, da posição e da disposição do corpo mineralizado (isto é, do tamanho, da forma, do mergulho, da continuidade e da profundidade), da geologia do depósito, da topografia e da localização geográfica,

do método de lavra (a céu aberto e/ou subterrânea). Essas variáveis devem ser levadas em conta na determinação da viabilidade econômica dos projetos de aproveitamento da riqueza mineral.

A etapa de beneficiamento mineral é outra fase do processo produtivo que pode se tornar bastante onerosa, pois as operações unitárias, os equipamentos, a tecnologia de tratamento, os custos relacionados com substâncias químicas e consequentemente a margem operacional podem variar significativamente de um projeto/depósito para outro. Isso ocorre por conta de variáveis de controle como tipos de minerais presentes e existência de OTR no minério, quantidades e natureza dos minerais de ganga associados e o domínio da tecnologia utilizada no tratamento do minério específico. Considerando os dados técnicos de projetos destinados ao aproveitamento das terras-raras atuais e, principalmente, de minas em atividade, para se garantir uma margem operacional competitiva, como citado anteriormente, é indispensável que o concentrado contenha > 30% de OTR, tendo uma recuperação entre 60 e 70% na planta de beneficiamento mineral; esses são os valores de referência das instalações chinesas (BOGNER, 2014).

A etapa seguinte envolve o processamento (hidrometalúrgico) dos OTR (extração e separação/purificação). Essa fase da atividade produtiva tem o objetivo de alterar o concentrado mineral para uma condição química mais valiosa (em óxidos utilizáveis). Isso se consegue por meio de várias etapas de processamento, nas quais normalmente são utilizadas técnicas de hidrometalurgia, como por exemplo lixiviação, extração por solvente e precipitação, entre outras. Essas diversas etapas envolvem consideráveis custos na aquisição de substâncias (seja para rota ácida ou pela básica) que representam os maiores custos da cadeia produtiva, desde a exploração até a obtenção dos ETR individuais. Assim, torna-se imprescindível o conhecimento por completo das operações unitárias dessa fase e, principalmente, dos custos envolvidos para se mensurar a margem operacional de todo o processo.

O fato é que menores massas e variedades de minerais a serem tratados na hidrometalurgia requerem quantidades menores de substâncias químicas no processo, e isso implica a redução de custos operacionais (OPEX), além de exigir instalações de processamento menores (CAPEX). Os custos de capital (CAPEX) e operacionais (OPEX) são duas das principais variáveis utilizadas para mesurar a viabilidade de um projeto que se destina ao aproveitamento de um depósito mineral.

Outra variável importante e indicadora de competitividade econômica de um projeto, que por sua vez está associada ao OPEX e às receitas geradas com as vendas dos OTR, é a margem operacional; trata-se de uma informação importantíssima na indicação de viabilidade do empreendimento mineiro. Em se tratando das terras-raras, essas informações são ainda mais importantes, pois o aproveitamento desses elementos apresenta considerável complexidade tanto do ponto de vista operacional quanto do comportamento dos preços de comercialização e sua demanda distinta para cada um dos 17 elementos, implicando assim flutuações na receita do empreendimento e, conseqüentemente, na sua margem operacional.

#### **3.1.2.4 Implicações dos elementos radioativos presentes nos depósitos**

As etapas de beneficiamento e processamento de terras-raras são operações específicas e das mais complexas de seu processo produtivo, e isso envolve as potenciais possibilidades de impacto ao meio ambiente. Para mitigar esses potenciais impactos são necessários consideráveis investimentos no processo de separação dos OTR dos demais materiais indesejados, principalmente dos elementos radioativos (especialmente tório e urânio), que estão presentes e associados aos ETR. Do ponto de vista da competitividade, a presença de elementos radionuclídeos no concentrado de TR é um fator de preocupação que deve ser considerado na análise de um depósito/projeto de TR.

A presença de resíduos de natureza radioativa implica consideráveis aumentos de custos operacionais na etapa de extração de ETR, sem citar o dispêndio de recursos adicionais para o controle, a gestão e o armazenamento dos resíduos gerados. Além disso, os metais pesados e radionuclídeos associados com rejeitos de ETR representam grandes ameaças para a saúde humana e o ambiente quando não são bem geridos. Sendo assim, torna-se necessária a adoção de novas tecnologias de processamento e disposição dos resíduos, visando a reduzir o risco de contaminação e adicionando assim custos ao processo. O aumento nos custos operacionais irá depender, principalmente, do teor de radionuclídeos presentes no concentrado mineral, o que por sua vez dependerá da concentração desses elementos no depósito *in situ* e, principalmente, do teor desses elementos no concentrado mineral que irá alimentar a planta de processamento hidrometalúrgico.

Contudo, teores mais elevados de radionuclídeos tendem a exigir maiores despesas operacionais.

### **3.1.2.5 Expectativas potenciais de mercado**

A luta pelo domínio do mercado consumidor é sempre constante. Não importa qual é o tipo de produto ou serviço que uma companhia oferece, sempre haverá concorrentes lutando pelos clientes. Dessa forma, a variação da relação de compra e venda de produtos será sempre constante. Essa realidade expõe a necessidade de se conhecer e estar por dentro de como anda essa luta entre a companhia e as demais empresas que atuam no seu setor, neste caso o de terras-raras.

Uma forma adequada de mensurar as perspectivas potenciais de mercado é o cálculo do *market share*. Essa métrica significa a participação de mercado, isto é, a fatia ou quota de mercado que uma empresa tem no seu segmento ou no segmento de um determinado produto. O *market share* serve para avaliar a força e as dificuldades de uma empresa, além da aceitação dos seus produtos. Existem variadas formas de calcular essa medida, no entanto a mais usual é o cálculo das quantidades de produtos comercializados ou serviços oferecidos pela companhia em relação aos seus concorrentes no setor de atuação. Outra forma é, em vez de considerar a quantidade total produzida, usar o valor total das vendas. No caso das terras-raras, poderá ser usado o cálculo da produção de óxidos de terras-raras (em toneladas/ano) que a empresa pretende comercializar, quando em plena operação, em relação à produção total do setor; ou pode-se utilizar o valor correspondente da potencial receita estimada com a comercialização dessa produção. Os valores obtidos são relativos, ou seja, trata-se de uma relação entre a fatia de mercado de uma companhia e o mercado/setor como um todo, por isso os valores são percentuais (0–100%).

### **3.1.2.6 Aspectos conjunturais**

Os fatores de risco relacionados aos aspectos políticos, econômicos e conjunturais podem ser medidos a partir de parte de dados combinados de três pesquisas (que são realizadas regularmente há pelo menos 10 anos), havendo assim uma série histórica para a análise estatística.



Essas pesquisas resultaram na construção de três índices: o **Índice de Atração de Investimento** ou *Investment Attractiveness Index*, de empresas de mineração, pelo Instituto Fraser; o **Índice de Liberdade Econômica** ou *Index of Economic Freedom*, da Fundação Heritage em parceria com o *Wall Street Journal*; e o **Índice de Desempenho Logístico** ou *Logistics Performance Index* pelo Banco Mundial (*World Bank*). Mais detalhes sobre essas três pesquisas serão explanados a seguir.

A primeira pesquisa/o primeiro índice, do Instituto Fraser, tem a intenção de avaliar como o potencial mineral/geológico e fatores de políticas públicas como a tributação e a incerteza regulatória afetam os investimentos em exploração mineral na jurisdição analisada. As respostas das pesquisas são computadas para classificar províncias, estados e países de acordo com os fatores de políticas públicas que encorajam ou desencorajam o investimento na exploração mineral.

A última pesquisa anual do Instituto Fraser (publicada em 2016) de empresas de mineração foi enviada a cerca de 3.800 gerentes e executivos de empresas de exploração e desenvolvimento e outras empresas relacionadas à mineração, em todo o mundo, no período de 15 de setembro a 27 de novembro de 2015. Foram recebidas um total de 449 respostas. Na pesquisa publicada em 2015, 57% respondentes eram o presidente ou vice-presidente da empresa, e 27% eram gestores ou gerentes seniores. A pesquisa incluiu 109 jurisdições de todos os continentes, exceto Antártida (JACKSON; GREEN 2016).

- Índice de Atratividade de Investimentos = [(Índice de Percepção Política) + (Índice Potencial de Melhores Práticas Minerais (potencial mineral/geológico))].

- Índice de Percepção Política (PPI): faz uma avaliação da atratividade das políticas de mineração. O PPI é um índice composto que captura as opiniões dos gestores e executivos sobre os efeitos das políticas em jurisdições com as quais estão familiarizados. O índice é constituído de respostas para fatores que afetam as decisões políticas de investimento na exploração mineral. Os fatores políticos analisados incluem informações relacionadas à:

a) Incerteza relativa à gestão, interpretação e aplicação dos regulamentos existentes;

- b) Incerteza sobre as regulamentações ambientais (estabilidade de regulamentos, coerência e pontualidade dos processos de regulamentação);
- c) Duplicações e incoerências regulamentares (federais/provinciais, federais/estaduais, sobreposição interdepartamental etc.);
- d) Sistema legal (processos legais que sejam justos, transparentes, não corrompidos, oportunos, administrados de forma eficiente etc.);
- e) Regime de tributação (pessoal, corporativo, de folha de pagamento, de capital e outros impostos, e a complexidade no cumprimento das obrigações fiscais);
- f) Incerteza quanto a reivindicações de terras em disputa;
- g) Incerteza a respeito das áreas que serão protegidas, como deserto, parques, sítios arqueológicos etc.;
- h) Qualidade da infraestrutura (acesso a estradas e disponibilidade de energia, transporte, comunicações, educação, moradia etc.);
- i) Acordos socioeconômicos/condições de desenvolvimento comunitário (inclui os requisitos de aquisição ou de transformações locais e/ou fornecimento de infraestruturas sociais como escolas ou hospitais etc.);
- j) Barreiras comerciais (barreiras tarifárias e não tarifárias, restrições sobre a repatriação de lucros, restrições de moeda etc.);
- k) Estabilidade política;
- l) Regulamentação do trabalho/de contratos de trabalho e militância trabalhista/interrupções do trabalho;
- m) Qualidade da base de dados geológicos (inclui qualidade e escala dos mapas, facilidade de acesso à informação etc.);
- n) Nível de segurança (inclui a segurança física, devido à ameaça de ataque por terroristas, criminosos, grupos guerrilheiros etc.);
- o) Disponibilidade de mão de obra/competências.

O PPI é normalizado para uma pontuação de 0 até 100. Embora seja útil para medir a atratividade de uma jurisdição com base em fatores políticos, como as regulamentações onerosas, os níveis de tributação e a qualidade da infraestrutura, o Índice de Percepção Política sozinho não reconhece o fato de que as decisões de investimento são muitas vezes tomadas puramente com base no potencial mineral. De acordo com a pesquisa do Instituto Fraser, cerca de 40% das decisões de investimentos são determinadas por fatores políticos. Nesse sentido, os relatórios

vêm mantendo a relação de ponderação precisa de 60/40 (Índice Potencial de Melhores Práticas Mineraias/Índice de Percepção Política) na determinação do Índice de Atratividade de Investimentos, permitindo a comparabilidade com outros anos (JACKSON; GREEN, 2016).

Os entrevistados da pesquisa foram solicitados a marcar apenas jurisdições com as quais eles eram familiarizados e apenas os fatores políticos dos quais eles tinham conhecimento. Para cada um dos 15 fatores, os entrevistados foram convidados a escolher entre cinco respostas uma que melhor descrevesse cada jurisdição com a qual eles estavam familiarizados:

- a) Incentiva o investimento na exploração;
- b) Não é um impedimento para o investimento na exploração;
- c) É um impedimento leve a investimentos na exploração;
- d) É um forte impedimento para investimentos na exploração; e
- e) Não prosseguiria com o investimento na exploração nesta região devido a esses fatores.

Nova metodologia: na pesquisa publicada em 2016 (ano-base 2015), os pesquisadores do Instituto Fraser utilizaram duas metodologias para a determinação do Índice de Percepção Política (PPI). A primeira é denominada “metodologia antiga” (utilizada até então) e a segunda, “metodologia nova”, adotada para os próximos anos e justificada pelos pesquisadores como uma maneira mais adequada de capturar as percepções. Esta nova metodologia difere daquela por considerar as respostas de todas as categorias (cinco respostas), enquanto na metodologia antiga tomava-se como referência apenas a resposta dos respondentes da alternativa “a” (incentiva o investimento na exploração). O percentual de respondentes quantificado para cada variável/fator de política da respectiva jurisdição é posteriormente normalizado para uma pontuação de 0 a 100, sendo o PPI de uma jurisdição a média de pontuação de todas as respectivas variáveis/fatores de política (JACKSON; GREEN, 2016).

Por se considerar que a “metodologia antiga”, até então utilizada pelo Instituto Fraser, atende às principais intenções do modelo proposto (praticidade e usabilidade), além de mensurar de forma satisfatória a percepção política sobre o encorajamento de se investir na exploração mineral de uma província/uma jurisdição/um país, a metodologia “antiga” foi adotada para a quantificação de 10

componentes entre as 15 componentes constituintes do PPI atual (ou seja, será um PPI parcial) que irão compor o modelo de competitividade e risco (MCRM-TR). As componentes adotadas para o MCRM-TR foram: (1) incerteza relativa à gestão, interpretação e aplicação dos regulamentos existentes; (2) incerteza sobre as regulamentações ambientais (estabilidade de regulamentos, coerência e pontualidade dos processos de regulamentação); (3) duplicações e incoerências regulamentares (federais/provinciais, federais/estaduais, sobreposição interdepartamental etc.); (4) regime de tributação (pessoal, corporativo, de folha de pagamento, de capital e outros impostos, e a complexidade no cumprimento das obrigações fiscais); (5) incerteza a respeito das áreas que serão protegidas, como deserto, parques, sítios arqueológicos etc.; (6) qualidade da infraestrutura (acesso a estradas, disponibilidade de energia, transporte, comunicações, educação, moradia, etc.); (7) acordos socioeconômicos/condições de desenvolvimento comunitário (inclui os requisitos de aquisição ou de transformações locais e/ou fornecimento de infraestruturas sociais como escolas ou hospitais etc.); (8) estabilidade política; (9) qualidade da base de dados geológicos (inclui a qualidade e escala dos mapas, facilidade de acesso à informação etc.); e (10) nível de segurança (inclui a segurança física, devido à ameaça de ataque por terroristas, criminosos, grupos guerrilheiros, etc.).

Os dados da segunda parcela do Índice de Atratividade de Investimento (o Índice Potencial de Melhores Práticas Minerais) não serão utilizados no modelo (MCRM-TR), pois seus efeitos já estarão contemplados nos demais fatores utilizados. Mas, a título de conhecimento, o Índice Potencial de Melhores Práticas Minerais faz uma avaliação da atratividade geológica de uma região. Ele é obtido por meio de entrevistas nas quais se classifica a atratividade puramente pelo potencial mineral da região, independentemente de quaisquer restrições políticas. O índice classifica as jurisdições com base em como a geologia da região encoraja o investimento na exploração ou não é um impedimento para o investimento.

A segunda pesquisa/o segundo índice se realiza pela Fundação Heritage (The Heritage Foundation) em parceria com o *Wall Street Journal* (Índice de Liberdade Econômica ou *Index of Economic Freedom – IEF*). Esse índice é construído por meio de informações coletadas de múltiplas fontes internacionais. A pesquisa publicada em 2016 envolveu 186 jurisdições (THE HERITAGE FOUNDATION, 2016).

Mensurar a liberdade econômica sugere uma visão do desenvolvimento humano para a população de cada país. O Índice de Liberdade Econômica é uma ferramenta que possibilita analisar a profundidade da evolução política e econômica de um país (THE HERITAGE FOUNDATION, 2016). A análise dos componentes de liberdade econômica proporcionará um diagnóstico das políticas econômicas de um país/jurisdição, além de estabelecer parâmetros que medem seus pontos fortes e fracos. Vale destacar que liberdade econômica não significa a ausência de qualquer intervenção estatal, e sim a existências de um Estado mínimo que fornece proteção da liberdade para os indivíduos na sociedade. Dessa forma, nas sociedades economicamente livres os governos permitem que o trabalho, o capital e os bens circulem livremente (THE HERITAGE FOUNDATION, 2016). Também é importante frisar que a liberdade econômica é distinta da liberdade política (participação no processo político em igualdade de condições, concorrência livre e justa para o poder político) e das liberdades civis (a liberdade de religião e liberdade de expressão) (BERGGREN, 2003). Pela ótica do investimento estrangeiro direto, Sambharya e Rasheed (2015) verificaram que o papel desempenhado pelos governos nas economias de seus países tem influência significativa sobre as decisões de investimentos estrangeiros, e que para atrair esses investimentos os governos terão de melhorar os ambientes institucionais de seus países, ou seja, melhorar os níveis de liberdade econômica e política pode facilitar o ingresso de investimentos.

A análise dos componentes de liberdade econômica centra-se em quatro categorias fundamentais do ambiente econômico sobre as quais os governos exercem tipicamente uma política de controle. São elas:

- a) Estado de direito (direitos de propriedade, liberdade de corrupção);
- b) Limitação de governo (liberdade fiscal, tamanho do governo);
- c) Eficiência regulatória (liberdade empresarial, liberdade trabalhista, liberdade monetária);
- d) Livres mercados (livre-comércio, liberdade de investimento e liberdade financeira).

Ao avaliar as condições nessas quatro categorias, o índice mede 10 componentes específicos de liberdade econômica. Trata-se de 10 fatores quantitativos e qualitativos, os quais são classificados em uma escala de 0 a 100. Esses componentes/subvariáveis são igualmente ponderados e a pontuação global

(Índice de Liberdade Econômica) é obtida pela média dos 10 componentes, que são: direitos de propriedade, liberdade de corrupção, liberdade fiscal, tamanho do governo, liberdade empresarial, liberdade trabalhista, liberdade monetária, livre-comércio, liberdade de investimento e liberdade financeira.

#### **a) Estado de direito**

- direitos de propriedade: a capacidade de acumular riqueza e propriedade privada é entendida como uma força motivadora central para os trabalhadores e investidores numa economia de mercado. O reconhecimento dos direitos de propriedade privada e de um Estado de direito efetivo para protegê-los é característica vital de uma economia de mercado em pleno funcionamento.

- liberdade de corrupção: a corrupção pode ser mais bem entendida como o fracasso da integridade no sistema econômico, uma distorção pela qual indivíduos ou grupos com interesses específicos são capazes de ganhar em detrimento do todo. Muitas vezes resultado direto da concentração do poder econômico ou político do governo, a corrupção se manifesta de muitas formas, tais como suborno, extorsão, nepotismo, clientelismo, apadrinhamento, peculato e fraude. Assegurar a transparência é crucial para lidar eficazmente com a corrupção. A abertura de procedimentos e processos de regulação pode promover um tratamento equitativo e maior eficiência.

#### **b) Limitação de governo**

- liberdade fiscal é uma medida direta da extensão em que o governo permite que indivíduos e empresas mantenham e giram sua renda e riqueza para seu próprio benefício e uso. Um governo pode impor encargos fiscais sobre a atividade econômica por meio da tributação, mas também faz isso quando se depara com a dívida pública que, em última análise, deve ser paga através de impostos. Taxas de imposto mais elevadas interferem na capacidade dos indivíduos e das empresas de atingirem seus objetivos no mercado e, assim, reduzem a atividade global do setor privado.

- tamanho do governo: o custo excessivo do governo é uma questão central na liberdade econômica, tanto em termos de geração de receita quanto em termos

de gastos. Os gastos do governo vêm em muitas formas. Alguns, por exemplo, são realizados no fornecimento de infraestrutura, no financiamento de pesquisas ou no aperfeiçoamento do capital humano (e podem ser considerados investimentos). Todos os gastos do governo que devem, eventualmente, ser financiados por uma tributação mais elevada implicam um custo de oportunidade. Esse custo é o valor do consumo privado ou investimento que teria ocorrido se os recursos envolvidos tivessem sido deixados no setor privado.

### **c) Eficiência regulatória**

- liberdade empresarial: consiste no direito do indivíduo de estabelecer e conduzir uma empresa sem interferência indevida do Estado. Regulamentações onerosas e redundantes são as barreiras mais comuns para a condução livre de uma atividade empreendedora. Ao aumentar os custos de produção, os regulamentos podem provocar maiores dificuldades para os empresários de ter sucesso no mercado. Uma vez que uma empresa está aberta, a regulamentação governamental pode interferir no processo normal de tomada de decisão ou de fixação de preços. Curiosamente, dois países com o mesmo conjunto de regras podem impor encargos regulatórios diferentes.

- liberdade trabalhista: consiste na capacidade de os indivíduos trabalharem tanto quanto e onde eles quiserem; é um componente-chave da liberdade econômica. Da mesma forma, a capacidade das empresas de contratar livremente para o trabalho e demitir trabalhadores quando eles não são mais necessários é essencial para aumentar a produtividade e sustentar o crescimento econômico global. O princípio fundamental de qualquer mercado é a livre-troca voluntária. Os regulamentos do governo tomam uma variedade de formas, incluindo controle de salários e restrições à contratação e demissão. Leis trabalhistas onerosas penalizam as empresas e os trabalhadores.

- liberdade monetária: requer uma moeda estável e preços determinados pelo mercado. Agindo como empresários ou como consumidores, as pessoas livres precisam de uma moeda estável e confiável como meio de troca, unidade de conta e reserva de valor. Sem liberdade monetária, é difícil criar valor no longo prazo ou acumular capital. O valor da moeda de um país pode ser influenciado significativamente pela política monetária de seu governo. Com uma política

monetária que se esforça para combater a inflação, manter a estabilidade dos preços e preservar a riqueza da nação, as pessoas podem contar com os preços de mercado para um futuro previsível. Investimentos, poupança e outros planos de longo prazo podem ser feitos com mais segurança.

#### **d) Livres mercados**

- livre-comércio: esse parâmetro reflete a abertura de uma economia para o fluxo de bens e serviços de todo o mundo e a capacidade do cidadão para interagir livremente como comprador ou vendedor no mercado internacional. As restrições ao comércio podem manifestar-se sob a forma de tarifas, impostos de exportação, quotas de comércio ou proibições comerciais definitivas. O grau em que o governo impede o livre fluxo do comércio exterior tem uma relação direta com a capacidade dos indivíduos de perseguir seus objetivos econômicos e maximizar sua produtividade e seu bem-estar. Em muitos casos, as limitações de comércio também colocam os produtos e serviços de tecnologia avançada fora do alcance dos empresários locais, limitando o seu próprio desenvolvimento produtivo.

- liberdade de investimento: um ambiente de investimento livre e aberto oferece máximos incentivos e oportunidades empresariais para a expansão da atividade econômica, além de maiores produtividade e criação de emprego. Os benefícios de tal ambiente não fluem somente para as empresas individuais que tomam o risco empresarial na expectativa de maior retorno, mas também para a sociedade como um todo. Um quadro de investimento eficaz será caracterizado pela transparência e equidade, suportando todos os tipos de empresas, em vez de apenas as grandes corporações ou as estrategicamente importantes, e irá incentivar em vez de desencorajar a inovação e a concorrência.

- liberdade financeira: um sistema financeiro formal acessível que funcione de forma eficiente assegura a disponibilidade da economia diversificada, do crédito, do pagamento e de serviços de investimento para os indivíduos. Ao expandir oportunidades de financiamento e promoção do espírito empresarial, um ambiente bancário aberto incentiva a concorrência a fim de proporcionar a intermediação financeira mais eficiente entre famílias e empresas, bem como entre os investidores e empresários. Tal como acontece com o sistema bancário, o papel do governo na



regulação dessas instituições é garantir a transparência e a integridade, e promover a divulgação de ativos, passivos e riscos.

A terceira pesquisa/o terceiro índice se realiza pelo Banco Mundial (World Bank) em parceria com instituições acadêmicas internacionais, empresas privadas e indivíduos envolvidos em logística internacional, abrangendo mais de 5.000 avaliações de países. É o Índice de Desempenho Logístico ou *The Logistics Performance Index* (LPI) (WORLD BANK, 2016).

O Índice de Desempenho Logístico (LPI) é uma ferramenta de *benchmarking* interativa criada para ajudar os países a identificar os desafios e as oportunidades que enfrentam no seu desempenho na logística de comércio e o que eles podem fazer para melhorar seus resultados.

Esse índice é composto por seis categorias/variáveis de indicadores. As variáveis selecionadas possuem a mesma escala para medição, pois os entrevistados avaliam seis dimensões em uma escala de 1 (pior) a 5 (melhor), sendo que as pontuações finais são a média de todos os entrevistados (WORLD BANK, 2016).

As categorias/variáveis do Índice de Desempenho Logístico (Internacional) são:

a) A eficiência do processo de desalfandegamento (*customs*). Trata-se da percepção da eficiência dos processos de desembarço aduaneiros, isto é, velocidade, simplicidade e previsibilidade das formalidades;

b) A qualidade do comércio e a infraestrutura de transportes (*infrastructure*). Trata-se da percepção da qualidade do comércio e dos transportes, e da infraestrutura relacionada (por exemplo, portos, ferrovias, estradas, tecnologia da informação);

c) A facilidade de organizar embarques a preços competitivos (*ease of arranging shipments*). Trata-se da percepção da facilidade de organizar embarques a preços competitivos para os mercados;

d) A competência e a qualidade de serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro (*quality of logistics services*). Trata-se da percepção do nível geral de competência e qualidade de serviços logísticos, por exemplo: operadores de transportes, despachantes aduaneiros etc.;

e) A capacidade de controlar e rastrear as remessas (*tracking and tracing*). Trata-se da percepção da capacidade de controlar e rastrear as remessas quanto ao transporte para o mercado;

f) A frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados (*timeliness*). Trata-se da percepção de pontualidade.

Vale salientar que, para o modelo de competitividade e risco (MCRM-TR) proposto, das seis componentes constituintes do LPI serão utilizadas cinco (ou seja, será um Índice de Desempenho Logístico parcial): (1) a eficiência do processo de desalfandegamento (*customs*); (2) a facilidade de organizar embarques a preços competitivos (*ease of arranging shipments*); (3) a competência e a qualidade dos serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro (*quality of logistics services*); (4) a capacidade de controlar e rastrear as remessas (*tracking and tracing*); e a (5) frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados (*timeliness*).

Fica de fora a componente “qualidade do comércio e infraestrutura de transportes” (*infrastructure*), por seus efeitos já estarem contemplados de forma satisfatória na componente “qualidade da infraestrutura” do fator  $F_{PPCS}$  (na pesquisa do Instituto Fraser).

#### **4 O MODELO DE COMPETITIVIDADE E RISCO (MODELO MCRM-TR)**

Tendo em vista a importância do setor de terras-raras para a atividade econômica e o progresso da indústria moderna mundial, e estando esse setor intimamente dependente da mineração e de sua cadeia produtiva, fica clara a necessidade de se definirem os parâmetros, os mecanismos e/ou as ferramentas de análise que podem indicar se é recomendável ou não investir em uma determinada região ou em um país/uma jurisdição. Do lado do governo, é importante definir quais são os parâmetros sugeridos para que o país ou a jurisdição possa alcançar níveis adequados ao estímulo para a cadeia produtiva das terras-raras ou quais níveis dos parâmetros e indicadores são necessários para que se torne competitivo.

Contudo, antes é necessário identificar e definir os fatores que influenciam de forma mais contundente a competitividade para, então, confeccionar um modelo de análise de competitividade com base nas variáveis estudadas.

O modelo proposto de análise de competitividade e risco, nesta tese de doutorado, incorpora conceitos e metodologias quantitativas e qualitativas aplicadas no processamento e na interpretação dos fatores estruturais e sistêmicos da competitividade; além disso, inclui uma nova ferramenta poderosa de análise estatística e matemática: a análise probabilística dos fatores selecionados para a construção do modelo. Um modelo como esse, que permite a análise probabilística dos fatores de competitividade selecionados, é bastante inovador e, em se tratando de uma aplicação na mineração de terras-raras, é algo de que até então não há relatos na literatura, sendo assim um modelo inédito.

A principal proposta do modelo (MCRM-TR) é servir de auxílio às tomadas de decisão relacionadas a investimentos voltados para o desenvolvimento de projetos – seja na fase preliminar, seja na de pré-viabilidade ou viabilidade – destinados ao aproveitamento econômico de depósitos minerais (no caso desta tese, de depósitos de TR). Será um instrumento importante para guiar e auxiliar a formulação de planejamentos estratégicos, principalmente por parte de investidores, sejam eles individuais ou institucionais, de governos e de pesquisadores.

O modelo MCRM-TR pode se tornar, se corretamente utilizado, uma ferramenta auxiliar de análise muito útil nos estágios conceituais de desenvolvimento de projetos de mineração (neste caso, de elementos terras-raras), que também pode ser utilizada nos estágios mais avançados desses projetos. Em suma, o MCRM-TR

compara os principais fatores de competitividade e risco de um projeto/depósito em desenvolvimento, com um portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM). O PDCM se caracteriza por uma espécie de *benchmark* (referência de mercado para que o investidor possa acompanhar o desempenho do seu empreendimento) de projetos de mineração, neste caso da mineração das terras-raras. Basicamente, trata-se de um modelo probabilístico dinâmico e comparativo.

#### **4.1 Seleção dos depósitos para o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM)**

Vale contextualizar inicialmente o que seria em sua essência um depósito de classe mundial. Há grande variedade de definições para depósitos de classe mundial, por isso eles podem significar coisas diferentes para pessoas diferentes, por exemplo: para o público em geral, é algo de excelente qualidade; para os investidores, economistas e engenheiros, é algo que permite produzir riqueza por um longo período de tempo; para os geólogos, é um depósito com uma dotação mineral muito grande. Dentre as definições comumente utilizadas por geólogos, destaca-se a citada por Laznicka (1999): “um termo informal aplicado a depósitos de tonelagem de metais excepcionais e economicamente recuperáveis”. O termo atesta um potencial benefício econômico excepcional que esses depósitos possuem de gerar riqueza/retornos. Sendo assim, é uma classe de depósitos avidamente procurados pela indústria. Os principais requisitos para um depósito de classe mundial ser classificado como tal são: grande escala (grande tonelagem relativa ao setor do bem mineral), vida longa (garantia de fornecimento por um longo período de tempo, ou seja, no mínimo 20 anos) e alta qualidade (geralmente vista em termos do teor de minério, mas mais corretamente em termos de baixos custos de produção).

O risco envolvido no aproveitamento de um depósito mineral é cada vez mais considerado pela indústria nos dias atuais, chegando ao ponto de desvalorizar um depósito considerado de classe mundial.

##### **4.1.1 Seleção dos depósitos do PDCM**

Preliminarmente, foram analisados entre minas, depósitos, prospectos e ocorrências mundiais mais de 1000 relatos (ORRIS et al., 2002; TECHNOLOGY

METALS RESEARCH, 2015; UNITED KINGDOM, 2011; GOODENOUGH et al., 2015; JAIRETH et al., 2015; XIE et al., 2016). Após isso, foi feita uma primeira triagem para selecionar os depósitos considerados potenciais. Os dados com mais detalhes foram obtidos por meio de publicações de empresas em sites de relacionamento com investidores ou em bancos de dados como, por exemplo, o SEDAR (canadense).

Também foi utilizada parte das informações do *TMR Advanced Rare-Earth Projects Index*, publicadas on-line, para complementar as informações e assim construir o banco de dados apropriado para a simulação do modelo MCRM-TR. Na última atualização em 2015, o TMR destacou 53 depósitos em estágio de projetos avançados de terras-raras pertencentes a 49 companhias em 16 países (TECHNOLOGY METALS RESEARCH, 2015).

Basicamente, a seleção dos depósitos para o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM) é constituída de 4 etapas:

- etapa 1: triagem inicial;
- etapa 2: adoção da premissa 1<sup>4</sup>;
- etapa 3: adoção da premissa 2<sup>4</sup>; e
- etapa 4: adoção das premissas 3 a 7<sup>4</sup>.

Os procedimentos realizados na seleção dos depósitos de PDCM encontram-se no Apêndice A.

Na triagem inicial, são selecionados os depósitos/projetos com recursos ou reservas formalmente definidos cujas informações tenham sido publicadas no formato de relatório técnico de acordo com as diretrizes de uma das certificações ou correspondentes aos códigos NI 43-101, o Código JORC ou o Código SAMREC.

#### **4.2 Sobre os códigos (NI 43-101, Código JORC e Código SAMREC)**

O National Instrument 43-101 (NI 43-101 ou NI) é um instrumento nacional para os padrões de divulgação de projetos minerais dentro do Canadá. O instrumento é um conjunto codificado de normas e diretrizes para a elaboração de relatórios e exibição de informações relacionadas com as propriedades minerais

---

<sup>4</sup> Premissas utilizadas na seleção dos depósitos de PDCM.

pertencentes ou exploradas por empresas, que relatam esses resultados nas bolsas de valores dentro do Canadá. Isso inclui entidades mineiras estrangeiras que negociam nas bolsas de valores, supervisionadas pela Canadian Securities Administrators.

O JORC é um código australiano para relatórios de resultados de exploração, recursos minerais e reservas de minério. Trata-se de um código de prática profissional que estabelece padrões mínimos para a publicação dos resultados de explorações minerais, recursos minerais e reservas de minério. O código JORC fornece um sistema obrigatório para a classificação de acordo com os níveis de confiança no conhecimento geológico e nas considerações técnicas e econômicas nos relatórios publicados. Os relatórios que utilizam as diretrizes do código JORC são elaborados com a finalidade de informar os investidores ou potenciais investidores e seus consultores. Eles incluem, mas não estão limitados a relatórios anuais e trimestrais da empresa, memorandos de informação, documentos técnicos, apresentações públicas dos resultados da exploração, recursos minerais e estimativas de reservas de minério.

O SAMREC é um código com a mesma finalidade dos dois citados anteriormente, adotado pela África do Sul em 2000; sua formatação iniciou-se em 1992, quando um comitê foi formado pela Sociedade Geológica da África do Sul (GSSA), incluindo a Associação Geoestatística da África do Sul (CMMI), em resposta ao Conselho de Instituições de Mineração e Metalurgia (CMMI) para compilar o primeiro Código Sul-Africano de relatórios de recursos e reservas minerais.

No caso dos depósitos/projetos em atividade (mina), são selecionados os que possuem reservas conhecidas publicamente (divulgadas). Nesta primeira etapa foram selecionados 62 depósitos/projetos.

Vale destacar que fizeram parte das etapas de seleção de depósitos para o PDCM os projetos em fase de lavra (minas em operação ou paralisadas temporariamente), tais como: depósito de Mountain Pass (Califórnia, EUA); depósito de Bayan Obo (Mongólia Interior, China), depósito de Lovozero (península de Kola, Rússia); depósito de Mount Weld da Lynas (Austrália), e depósitos de Aluva, Chavara, Manavalakurichi e Chatrapur (Índia). Outros projetos localizados na China também foram considerados, como os depósitos Mianning (na província de

Sichuan), Weishan (na província de Shandong), Jiangxi, Guangdong, Fujian, Guanxi, Yunnan e Longnan.

É possível que existam outros depósitos com projetos em desenvolvimento, cujas informações não foram divulgadas publicamente. De qualquer forma, sem dados publicados esses depósitos seriam excluídos na etapa de triagem. Contudo, esse possível número de depósitos com dados não divulgados, por ter pouca representatividade diante do espaço amostral utilizado, é irrelevante para o resultado do modelo.

### 4.3 Premissas utilizadas na seleção dos depósitos do PDCM

Ao constatar a grande diversidade de depósitos e suas características peculiares, tornou-se indispensável a adoção de premissas com vistas a uma melhor seleção dos depósitos para o Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM), de modo a garantir uma padronização na utilização no modelo (MCRM-TR).

As premissas e os procedimentos adotados para a seleção do Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM) foram aplicadas em uma vasta e diversificada fonte de dados (organizados em planilha do *software* Excel), contida em diversos artigos e bancos de dados científicos (como CAPES, *ScienceDirect*, *Accessen Gineering Library*, SABI, Google Acadêmico, Sedar), jornais e revistas, publicações de entrevistas com analistas da área de investimentos em projetos de mineração de terras-raras e publicações de relatórios técnicos e conjunturais de empresas ou órgãos públicos de diversos países (publicações relacionadas com o setor de terras-raras) e outros.

As sete premissas (qualitativas e quantitativas) para determinação do Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM) são descritas a seguir:

**a) A quantidade e qualidade de OTR dos depósitos, inicialmente, deve garantir valor mínimo na relação teor (fração) x tonelagem de minério *in situ*, com o intuito de garantir longevidade (vida longa) com competitividade ao empreendimento mineiro/projeto de TR:** seleção dos depósitos que possuem tonelagens de OTR contidos no depósito com vistas a garantir o fornecimento de minério de TR por um período mínimo de 30 anos de operação (25–30 anos é o tempo de vida útil comumente utilizado para avaliações econômicas de projetos).

Devido ao valor do dinheiro no tempo, a maioria dos projetos que são prolongados além dos 20 anos de vida útil apresentam efeitos pequenos nas suas rentabilidades (dadas pela taxa interna de retorno – TIR). A TIR de projetos com vida útil superior a 25 anos tende a se estabilizar, produzindo um efeito irrelevante na rentabilidade (STERMOLE; STERMOLE, 1984 apud SOUZA, 2009). Assim, foi adotada uma tonelagem mínima de OTR contidos nos depósitos a serem selecionados para o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM): **> 400.000 toneladas de OTR *in situ*** (MD+ID+IF), tomando-se como referência uma produção média anual de 11.000 toneladas de OTR (como base na média de produção anual prevista nos projetos atualmente em fase avançada de desenvolvimento). Isso significa algo próximo de 324.000 toneladas de OTR efetivamente processada em 30 anos de operação, tomando-se como base 90% de reserva lavrável e 90% de recuperação na lavra do minério.

Adicionalmente a essa premissa, aplica-se o procedimento de seleção dos depósitos do PDCM, tomando como base os depósitos que possuem teores e tonelagens de óxidos de terras-raras de acordo com as seguintes condições: (teor OTR wt%)  $\geq$  mediana; e na sequência (tonelagem OTR Mt)  $\geq$  mediana. Os procedimentos desta etapa são aplicados nos depósitos selecionados na etapa de triagem inicial;

**b) depósitos com melhor distribuição relativa potencial de ETR cujo mercado seja mais estável em curto, médio e longo prazo:** de acordo com as distribuições comumente utilizadas na indústria de TR, optou-se por selecionar os depósitos que possuem distribuição relativa potencial:  $\geq$  mediana da distribuição relativa potencial (DRP) (%), ou seja, mediana obtida dos valores de DRP (%) dos depósitos selecionados até esta fase de seleção – a metodologia de cálculo do DRP (%) encontra-se demonstrada na seção 4.3 desse capítulo.

Contudo, o depósito com a melhor distribuição relativa potencial de ETR cujo mercado tende a ser mais estável e promissor em curto, médio e longo prazo será o que possuir maior concentração de ETRC e ETRAI (futuramente, as composições dessas categorias poderão ser revisadas, pois o mercado é dinâmico).

Distribuição Relativa Potencial - DRP (%) =  $[(\text{Cesta de OTR do depósito referente aos ETRC} + \text{ETRAI, em US\$/kg}) / (\text{cesta de OTR do depósito, em US\$/kg}) \times 100 \text{ \%}]$ ;



**c) acesso ao bem mineral:** não deve haver impedimentos de acesso ao depósito, seja por restrições provenientes de legislação ambiental (área de proteção), seja de área indígena ou de reivindicação de terras em disputa, área de interesse turístico e área agrícola de alto rendimento etc.;

**d) aproveitamento comercial dos depósitos:** os óxidos de terras-raras devem ser produzidos como produto principal (projetos de terras-raras), podendo ser aproveitados outros metais pertencentes ao mesmo depósito como subprodutos da mineração de TR;

**e) Elementos radioativos:** seleção de depósitos/projetos cujos concentrados de minério, a ser processado na etapa hidrometalúrgica, possua teores de elementos radioativos abaixo dos valores: urânio ( $U_3O_8$ ) < 0,05 % e/ou tório ( $ThO_2$ ) < 0,1%.

**f) Jurisdição/país com boa favorabilidade para investimentos em mineração:** seleção dos depósitos remanescentes das premissas 1–4 com classificação no **Índice de Atratividade de Investimento**  $\geq$  mediana (na classificação de jurisdições/países publicada pelo Instituto Fraser no ano tomado como base para a análise de competitividade);

**g) projetos/depósitos com estimativas das variáveis econômicas divulgadas:** seleção de projetos em estágio de estudo de aproveitamento econômico preliminar ou avançado (relatório de avaliação econômica preliminar – AEP, pré-viabilidade econômica ou viabilidade econômica). Isso possibilita o conhecimento das variáveis do modelo de todos os depósitos/projetos para viabilizar a modelagem comparativa do portfólio de depósitos com o depósito em análise (idem premissa h de seleção do PDCM).

Com o procedimento das premissas, promoveu-se uma segunda triagem dos depósitos/projetos, obtendo-se assim quatro depósitos, considerados aqui e designados como depósitos com alto potencial de desenvolvimento (alta competitividade). Esses são os depósitos incluídos no denominado Portfólio de Depósitos de Classe Mundial, o qual pode ser considerado o *benchmark* dos projetos/depósitos de terras-raras e servirá de base para a modelagem comparativa no MCRM-TR.

Os depósitos de terras-raras selecionados no ano-base 2015 e suas respectivas jurisdições/países de localização, a partir da aplicação das premissas de seleção do PDCM, foram os seguintes:

- ✓ América do Norte
  - Depósito Bear Lodge – Wyoming (EUA);
  - Depósito Nechalacho Basal – Northwest Territories (CAN);
- ✓ Oceania
  - Depósito Nolans – Northern Territory (AUS);
  - Depósito Mount Weld CLD – Western Australia (AUS).

Vale destacar que algumas variáveis utilizadas nos procedimentos de seleção dos depósitos do PDCM são dinâmicas; conseqüentemente, os resultados na seleção podem variar também ao longo do tempo.

#### **4.4 Fatores de competitividade e risco na mineração das terras-raras (ETR)**

Os projetos de mineração, especialmente os destinados ao aproveitamento de depósitos potenciais de terras-raras, sofrem influência de alguns fatores que contribuem de forma positiva ou negativa para o êxito do empreendimento mineiro almejado. Essas variáveis ou fatores foram introduzidos no capítulo 2 e explanados nos capítulos 3 e 4. Denominados aqui como fatores de competitividade e risco, eles podem reduzir ou ampliar o nível de competitividade de um depósito no que concerne à real possibilidade de seu desenvolvimento (possibilidade de se tornar mina).

Levando em conta as seis categorias de fatores de competitividade e risco mais relevantes no processo produtivo das terras-raras descrito no capítulo 3, foram definidos os oito fatores de competitividade e risco mais importantes para a construção do MCRM-TR. São eles:

- $F_{VPD}$  = fator valor potencial do depósito;
- $F_{QIL}$  = fator qualidade da infraestrutura local;
- $F_{EMO}$  = fator expectativa de margem operacional (relativo a mineração: lavra e beneficiamento + processamento: separação e extração de OTR);
- $F_{IER}$  = fator implicações dos elementos radioativos;
- $F_{EPM}$  = fator expectativa potencial de mercado;

- $F_{PPCS}$  = fator percepção política conjuntural do setor de mineração (da província/da jurisdição/do país);
- $F_{PPEG}$  = fator percepção política econômica global (do país);
- $F_{PQLG}$  = fator percepção da qualidade logística global (do país).

#### Observações:

- O  $F_{PPCS}$  é obtido a partir de 10 variáveis do PPI, ou seja, do PPI parcial (10 variáveis selecionadas dentre as 15 do Índice de Percepção Política (PPI) gerado pelo Instituto Fraser;
- O  $F_{PPEG}$  é obtido a partir do Índice de Liberdade Econômica (constituído de 10 variáveis e gerado pela Fundação Heritage);
- O  $F_{PQLG}$  é obtido a partir do Índice de Desempenho Logístico (LPI), ou seja, do LPI parcial (cinco variáveis selecionadas dentre as seis do índice gerado pelo Banco Mundial).
- Cada fator terá pontuação que varia de 0 a 100.

- **Obtenção dos parâmetros dos fatores**

$F_{VPD}$  = **Fator Valor Potencial do Depósito**: os valores deste fator serão obtidos com uma relação matemática denominada de **distribuição relativa potencial – DRP**.

De acordo como as distribuições comumente utilizadas na indústria de TR (BOGNER, 2015):

- ETRL (ou *LREE*: *La, Ce, Pr, Nd, Sm e Eu*) – elementos de terras-raras leves: possui baixo valor de mercado;
- ETRP (ou *HREE*: *Ga, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y*) – elementos de terras-raras pesados: possui alto valor de mercado;
- ETRMP (ou *MHREE*: *Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y*) – elementos de terras-raras médios + pesados: possui maior valor de mercado;
- ETRC (ou *CREE*: *Nd, Eu, Tb, Dy e Y*) – elementos de terras-raras críticos: possui alto valor de mercado e implicações semelhantes às dos *MFEE*;

- ETRAI (ou MFEE: Nd, Pr, Tb, Dy) – elementos de terras-raras para alimentação/produção de ímãs: possui mercado mais forte e estável no curto, médio e longo prazo;

Contudo, o depósito com a melhor distribuição relativa potencial de ETR cujo mercado, tende a ser mais estável e promissor no curto, médio e longo prazo será o que possuir maior concentração de ETRC e ETRAI.

A **Distribuição Relativa Potencial - DRP (%)** é obtida da seguinte forma:

**Distribuição Relativa Potencial - DRP (%)** = [(Cesta de OTR do depósito referente aos ETRC + ETRAI, em US\$/kg) / (cesta de OTR do depósito, em US\$/kg) x 100 %];

**Sendo a cesta de OTR do depósito analisado dada por:**  $\sum$  %OTR Individual X preço de mercado dos OTRs contidos no depósito;

O cálculo da cesta de terras-raras é exemplificado abaixo (exemplo, depósito Bokan, Alasca-EUA):

- composição química do depósito (% em peso): La<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (11,61); CeO<sub>2</sub> (28,2); Pr<sub>6</sub>O (3,32); Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (13,77); Pm<sub>2</sub>O (0,0); Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (3,65); Eu<sub>2</sub>O<sub>3</sub>(0,33); Gd<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (3,68); Tb<sub>4</sub>O<sub>7</sub> (0,66); Dy<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (4,15); Ho<sub>2</sub>O<sub>3</sub>(0,83); Er<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (2,16); Tm<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0,33); Yb<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (1,66); Lu<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0,17); Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (25,49); Sc<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0,0) = 100 %

- preços OTR (FOB China - US\$/ kg - 2015): La(2,0); Ce (2,0); Pr (52,0); Nd(40,0) Pm(0,0); Sm(5,2); Eu(150,0); Gd(46,5); Tb(450,0); Dy(230,0); Ho(0,0); Er(0,0); Tm(0,0); Yb(0,0); Lu(0,0); Y (13,0); Sc (4.200,0). É atribuído valor zero para OTR sem demanda de mercado definida.

Cálculo da cesta de OTR do depósito Bokan (USA):

**Valor da Cesta** = (0,11\*2) + (0,28 \*2) + (0,03\*52)+ (0,36\*5,2)+(0,003\*150) + (0,36\*46,50)+(0,006\*450)+(0,04\*230)+(0,0083\*0,0)+(0,02\*0,0)+(0,003\*0,0)+(0,01\*0,0)+(0,0017\*0,0)+(0,25\*13)+(0,0\*4200) = **41,70 US\$/kg de OTR.**

**F<sub>QIL</sub> = Fator Qualidade da Infraestrutura Local:** os valores deste fator serão obtidos com uma relação matemática denominada de **Relação de Geração de Receita RGR (%)**.

Uma forma de estimar a qualidade da infraestrutura existente ou necessária para atentar o desenvolvimento de um projeto, visando a aproveitamento de um depósito mineral, é por meio da estimativa da intensidade de CAPEX (*Capital Expenditure* ou capital de investimento no projeto), pois este inclui dispêndios com infraestrutura, necessários ao empreendimento. A estimativa pode ser em forma de investimento unitário (investimento total dividido pela capacidade diária em toneladas de minério) ou a intensidade de capital (investimento total dividido pelo faturamento/receita bruta anual). Quando se compara diversos projetos com valores de investimentos unitários, se observa que os capitais de investimento são mais altos para empreendimentos minérios onde a infraestrutura de acesso, de transporte de concentrado, de alojamento de pessoal e demais instalações de apoio, tomam uma parte considerável do CAPEX (até 60 % do total). No caso mais geral de investimento unitário realizado em condições não isoladas de desenvolvimento de um depósito mineral, isto é, lugares não remotos, o investimento unitário se torna muito mais baixo.

No geral o custo com infraestrutura pode representar até 60 % do investimento total (exemplo: a mina de ferro em Carajás-Brasil). Contudo, nos casos mais frequentes esses custos são da ordem de 30 % do investimento, em casos muito favoráveis, e podem chegar a menos de 10%.

Os equipamentos de lavra não atingem 20 % dentro dos grandes projetos. Eles podem, entretanto representar 30 a 40% do investimento para uma mina pequena a céu aberto.

A planta de beneficiamento/processamento geralmente possuem custos muito variados, sendo dependente da complexidade do processo e do tipo de minério tratado, sendo que 30% é um número razoável para um tratamento de metal básico ou para plantas muito grandes, enquanto que, 60% podem ser esperados para plantas de metais preciosos e de urânio explorado em minas de dimensões medianas ou pequenas. Os outros itens de investimentos (serviços auxiliares, estudos e supervisão) representam frequentemente 20 a 25% do investimento total (D'Arrigo, 2012).

Assim, o **Fator Qualidade da Infraestrutura Local ( $F_{QIL}$ ) = Relação de Geração de Receita RGR (%)** = este parâmetro pode ser entendido como uma *Proxy* da qualidade da infraestrutura necessária para o desenvolvimento de um projeto de mineração de terras-raras (da etapa de prospecção até a produção de óxidos de TR).

Dessa forma, tomando-se a RGR (%) como uma *proxy* da qualidade de infraestrutura. Quanto maior for o valor de RGR (%) menor a intensidade de capital (CAPEX) aplicado ao projeto por unidade de receita gerada, ou seja, menor a necessidade de investimento em infraestrutura local (melhor qualidade da infraestrutura local), logo:

- No modelo (MCRM-TR), a **Relação de Geração de Receita RGR (%) =  $F_{QIL}$** ;

Onde:

**Intensidade de Capital (IC) = CAPEX (US\$) / Receita Bruta Estimada (pela venda dos OTR, US\$ / ano);**

**Receita Bruta Estimada (US\$/ano) = Cesta de OTR (US\$/kg OTR) x Produção Esperada (kg OTR / ano);**

**Relação de Geração de Receita RGR (%) = inverso da intensidade de capital =  $1 / IC = ((1 / IC) \times 100)$ .**

O preço da cesta de OTR para cada depósito será ajustado quando necessário, com base no produto final previsto pelo projeto, ou seja, um concentrado misto terá desconto de 30% no valor da cesta, OTR separados parcialmente terá desconto de 20% no valor da cesta, e quando a separação for completa dos OTR, o desconto será 0% (será usado o valor total da cesta);

- Para efeito de normalização no MCRM-TR: quando a relação entre o CAPEX e Receita Bruta Estimada por ano (intensidade de capital), for menor ou igual a 1,00, o modelo dará valor 100,00 para o  $F_{QIL}$ . No lado oposto, quanto maior for à intensidade de capital o modelo (MCRM-TR) tenderá retornar valor "0,00" para o  $F_{QIL}$ . Será utilizada a função "SE" no Excel para manter a normalização de 0-100 pontos: (= SE(RGR (%) >=100;100; (RGR (%))).

### **F<sub>EMO</sub> = Fator Expectativa de Margem Operacional**

A margem de lucro operacional é um indicador essencial para o investidor conhecer e assim poder avaliar a rentabilidade do seu negócio. Há três tipos de margens de lucro: a margem bruta, a líquida e a de contribuição. Por praticidade e executabilidade do cálculo deste indicador ainda na fase conceitual ou pré- viabilidade do projeto de mineração, foi adotado para o modelo (MCRM-TR), o cálculo da margem bruta ou margem operacional. No entanto, conforme a fase do projeto for avançando e com ela o nível de informações, poderá ser utilizado o cálculo da margem líquida sem problemas para o resultado do modelo.

**Margem Operacional Bruta (MOB):** mede a rentabilidade de um negócio, ou seja, qual a porcentagem de lucro que este negócio gera com cada venda. O cálculo da margem operacional bruta percentual é feito conforme a seguir:

$$\text{Margem Operacional Bruta - MOB (\%)} = (\text{Lucro Operacional Bruto} / \text{Receita total}) \times 100$$

Onde:

$$\text{Lucro Operacional Bruto} = (\text{Receita total} - \text{Custo Operacional})$$

No caso do modelo (MCRM-TR) o cálculo fica:

$$\text{Margem Operacional Bruta - MOB (\%)} = [(\text{Cesta de OTR (U\$\$ / KG)} - \text{OPEX (U\$\$ / KG)}) / (\text{Cesta de OTR (U\$\$ / KG)})] \times 100$$

Onde:

- F<sub>EMO</sub> = MOB = margem operacional bruta (%);
- Cesta de OTR (U\\$\\$ / KG) = receita bruta esperada com a venda dos óxidos de terras-raras separados individualmente;
- OPEX (U\\$\\$ / KG) = custo operacional envolvendo custo de mineração (lavra e beneficiamento) e custo de processamento para separação dos óxidos de terras-raras individuais.

**Lucro Bruto:** é o valor total obtido em cada venda, ou seja, o valor que sobra da venda de cada produto depois que você paga todas as contas envolvidas na produção e comercialização do mesmo.

**Custo operacional:** no cálculo dos custos, devem-se considerar apenas aquelas despesas envolvidas diretamente na produção e venda do produto (como custo de matéria prima, frete, manutenção da fábrica) ou na execução de um serviço (salário das pessoas que executam o serviço, despesas de materiais para a execução). Não se considera custos administrativos totais do negócio, impostos, etc.

O cálculo da margem operacional bruta (%) mostra qual proporção das receitas está disponível para cobrir os custos não operacionais, como despesa de juros, encargos, transporte e outras despesas adicionais. Este indicador é importante para ambos, os credores e investidores, porque ajuda a mostrar o quão forte e rentável são as operações de uma empresa e quanto sobra para pagar as outras despesas indiretas.

- O preço da cesta de OTR para cada depósito será ajustado quando necessário, com base na produção ou produto final previsto pelo projeto, ou seja, um concentrado misto terá desconto de 30% no valor da cesta, óxidos de terras-raras separados parcialmente terá desconto de 20% no valor da cesta, e quando a separação for completa dos OTR, o desconto será 0% (será usado o valor da cesta total);
- Preços em US\$/kg FOB China;
- Para efeito de normalização: no MCRM-TR será utilizada a função “SE” no Excel para manter a normalização de 0-100 pontos (=SE(MOB (%) <0; 0; MOB (%) ) ). Esta fórmula retornará pontuação de valor = 0 (zero) para as margens operacionais negativas.

**F<sub>IER</sub> = Fator Implicações dos Elementos Radioativos: F<sub>IER</sub> = Fator Implicações dos Elementos Radioativos**

As principais preocupações, quanto aos possíveis impactos ambientais das atividades produtivas das terras-raras, estão relacionadas aos elementos radioativos tório e urânio, que se encontram presentes desde quantidades insignificantes até



altos teores nos depósitos de terras-raras. A presença destes elementos, quando não aproveitados economicamente, implica em custos maiores de processamento e armazenamento. Dessa forma, foi estabelecida uma relação denominada de **Relação de Concentração Competitividade de Radioativos (RCCR)**. Esta relação pode ser considerada uma medida indireta da dificuldade dos processos e controles adicionais que se tem para separar os radioativos dos OTR e posteriormente armazená-los em condições adequadas, tendo em conta uma das **premissas do modelo (MCRM-TR), que supõe que os radiativos, inicialmente, não serão aproveitados economicamente, sendo assim, necessário o seu armazenamento**. Nestes termos tem-se:

#### **Fator Implicações de Elementos Radioativos ( $F_{IER}$ ) = Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)**

A **Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)**, pode ser considerada uma *proxy* da dificuldade de processamento e controle adicionais que se tem para separar os radioativos dos OTR e posteriormente armazená-los em condições adequadas (levando em conta uma das premissas do modelo (MCRM-TR), que considera o não aproveitamento econômico dos radioativos, nos projetos de terras-raras, pelo menos no estágio inicial do empreendimento, sendo, por tanto, todo resíduo armazenado em condições adequadas).

De acordo com Wederpohl (1969), a concentração de radioativos na crosta terrestre varia de: urânio = 1- 4 ppm ou 0,0001 - 0,0004%; e tório = 6 -10 ppm ou 0,0006 - 0,0010%, sendo o teor médio de U aproximadamente igual a 2,0 ppm, e a relação Th/U entre 3,5 ppm e 4 ppm. Birch (1965) apud Wederpohl (1969), estimou que o teor médio de urânio contido na crosta terrestre é de aproximadamente 2,8 ppm. Dickson e Scott (1997), afirmam que as concentrações médias de urânio e tório na crosta terrestre são de aproximadamente 3 ppm e 12 ppm respectivamente.

Diante do exposto, para o modelo (MCRM-TR), foram adotados como parâmetros os valores: urânio = 0,0003% (3 ppm) e tório = 0,001 (10 ppm).

O modelo (MCRM-TR) é normalizado para gerar valor igual a 100,00 para o  $RCCR = F_{IER}$ , quando a concentração média *in situ* do depósito em análise for igual ou menor ao somatório das concentrações médias de tório e urânio naturalmente encontradas na crosta terrestre (urânio = 0,0003% ou 3 ppm e tório = 0,001 ou 10

ppm). No lado oposto, quanto maior for a concentração total média de radioativos *in situ* no depósito em análise, o modelo tenderá retornar valor "0,00" para o  $RCCR = F_{IER}$ .

Na possibilidade de aproveitamento econômico dos radioativos como subproduto da mineração de terras-raras, este fator pode ser desconsiderado de forma negativa e passar a ser considerado positivo para o empreendimento. Esta mudança pode ser feita no modelo, antes da simulação (trata-se de um modelo dinâmico), atribuindo a pontuação 100,00 para o  $RCCR = F_{IER}$ .

**$F_{EPM}$  = Fator Expectativa Potencial de Mercado:** este fator é obtido com o cálculo do *Market Share* (fatia de mercado), ou seja,  $F_{EPM} = \text{Market Share}$  (média).

O *Market Share* é o termo que designa a participação de uma empresa em algum ramo de atuação. Também chamado de quota de mercado ou participação no mercado, o *Market Share* é uma medida muito importante para descobrir quais as forças e dificuldades de uma empresa, comparar seu tamanho com a concorrência e mensurar a aceitação dos seus produtos.

Por exemplo, em uma pesquisa sobre empresas de telefonia, o valor de quanto cada operadora detém da fatia de consumidores é o *market share*. Ou seja, se uma empresa tem 20% de participação de clientes de telefonia, o *Market Share* desta empresa é de 20% (BLOG PHD, 2011).

Analogamente, no caso das empresas de mineração, representa a fatia de mercado que a companhia possui ou pretende (setores: minério de ferro, alumínio, nióbio, terras-raras, etc.). Para calcular o *market share* do empreendimento basta dividir o volume de suas vendas pelo volume de vendas total do mercado, seja em valores monetários ou em quantidades.

No caso do modelo (MCRM-TR), o cálculo é feito (adotado) com base no valor monetário, como demonstrado a seguir, considerando novamente o projeto/depósito Bokan (EUA), como exemplo (Quadro 9).

Quadro 9 – Exemplo de cálculo do  $Market Share = F_{EPM}$ , projeto/depósito Bokan (EUA).

	TR	Distribuição Relativa OTR - In-Situ (wt%) a	Produção (OTR / t ano) x Distribuição de OTR (wt%) b	Estimativa de Produção Mundial (OTR, t) c	Estimativa de Market Share d = (b ÷ c)
Proj.	Lantânio (La)	0,116	261	45900	0,57%
	Cério (Ce)	0,282	635	54400	1,17%
	Praseodímio (Pr)	0,033	75	10200	0,73%
	Neodímio (Nd)	0,138	310	32300	0,96%
	Promécio (Pm)	0,000	0	0	0,00%
	Samário (Sm)	0,037	82	3400	2,42%
	Európio (Eu)	0,003	7	567	1,32%
	Gadolínio (Gd)	0,037	83	567	14,61%
	Térbio (Tb)	0,007	15	567	2,64%
	Disprósio (Dy)	0,041	93	3400	2,74%
	Hólmio (Ho)	0,008	19	567	3,29%
	Érbio (Er)	0,022	49	567	8,56%
	Túlio <sup>TM</sup>	0,003	7	567	1,32%
	Ítérbio (Yb)	0,017	37	567	6,59%
	Lutécio (Lu)	0,002	4	567	0,66%
Ítrio (Y)	0,255	573	15300	3,75%	
Escândio (Sc)	0,000	0	567	0,00%	
<b>Total</b>			2.250,00	170.000,00	3,02%
				<b>F<sub>PPM</sub> = Market Share (médio)</b>	<b>3,02%</b>

Nota:  $b = a \times$  produção prevista de OTR no projeto (2.250 toneladas/ano);  $d = b \div c$ ;  
 $F_{EPM} = Market Share =$  média ( $d_1...d_2...d_n$ ).

### **F<sub>PPCS</sub> = Fator Perspectiva Política Conjuntural do Setor de Mineração (da Jurisdição/país)**

Para este fator é utilizado o Index de Percepção Política (PPI), que possui série histórica de mais de 10 anos (sua série histórica será utilizada na análise dos dados, para determinar o tipo de distribuição de probabilidade a ser usada na simulação), e pesquisas realizadas em 122 jurisdições/países de todos os continentes, logicamente serão utilizados apenas os dados das respectivas jurisdições/países, onde estão localizados os depósitos do portfólio de classe mundial. O Index de Percepção Política (PPI) possui 15 componentes, mas para o modelo (MCRM-TR), serão utilizadas 10 componentes (PPI parcial), cujos motivos foram explanados no capítulo 3.

Os valores para o fator ( $F_{PPCS}$ ) são obtidos conforme é demonstrado a seguir:

- de posse da planilha de dados (da pesquisa Instituto Fraser) com as respostas para cada jurisdição/país, sobre “Encoraja o investimento na exploração mineral”, cujo percentual de respondentes é quantificado para cada componente (no caso do MCRM-TR, 10 componentes) e posteriormente normalizado para pontuação de 0 até 100.

- Variáveis do  $F_{PPCS}$  = **PPI (Índice de Percepção Política) parcial:**

- 1 – Incerteza relativa à gestão, interpretação e aplicação dos regulamentos existentes (Var.P<sub>PPCS1</sub>);
- 2 – Incerteza sobre as regulamentações ambientais (Var.P<sub>PPCS2</sub>);
- 3 – Duplicações e incoerências regulamentares (Var.P<sub>PPCS3</sub>);
- 4 – Regime de tributação (Var.P<sub>PPCS4</sub>);
- 5 – Incerteza a respeito das áreas que serão protegidas, como deserto, parques ou sítios arqueológicos etc. (Var.P<sub>PPCS5</sub>);
- 6 – Qualidade da infraestrutura (Var.P<sub>PPEG6</sub>);
- 7 – Acordos socioeconômicos/condições de desenvolvimento (Var.P<sub>PPEG7</sub>);
- 8 – Estabilidade política (Var.P<sub>PPCS8</sub>);
- 9 – Qualidade da base de dados geológicos (Var.P<sub>PPCS9</sub>);
- 10 – Nível de segurança (Var.P<sub>PPCS10</sub>).

Por fim, todas as jurisdições são dispostas em ordem decrescente de percentual de respostas favoráveis a jurisdição (percentual de respondentes: “encoraja o investimento na exploração mineral”), por meio da função “classificar do maior para o menor”, ferramenta encontrada no software Excel.

Em seguida, com auxílio da fórmula na planilha de trabalho no software Excel (=ORDEM.PORCENTUAL(E\$2:E\$113;E2)), é atribuída a pontuação máxima (100) para a jurisdição com melhor colocação/percentual de respostas (encoraja o investimento), e posteriormente as jurisdições são postas em ordem decrescentes desta pontuação.

O PPI parcial que no modelo (MCRM-TR) é igual ao  $F_{PPCS}$ , de uma jurisdição, é a média da pontuação de todas as respectivas componentes (10 componentes).

Logo, considerando novamente o exemplo do depósito/projeto Bokan (Alasca, EUA), considerando os dados da pesquisa (Instituto Fraser, 2016) para Jurisdição Alaska - USA, tem-se 4 etapas, conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Determinação do fator  $F_{PPCS}$ , etapas 1,2 e 3, exemplo: depósito/projeto Bokan (EUA).

### Etapa 1: dados da Pesquisa (Jurisdições)

Jurisdição	Encoraja Investimento
Zimbabwe	0%
Chubut	0%
La Rioja	0%
Venezuela	0%
Kyrgyzstan	0%
Mongolia	0%
Greece	0%
Mendoza	0%
Honduras	0%
Romania	9%
Angola	0%
Rio Negro	0%
Solomon Islands	0%
Bolivia	0%
Laos	0%
Neuquen	0%
Ecuador	9%
Russia	8%
Vietnam	17%
California	10%
Myanmar	0%
Indonesia	6%
Niger	0%
China	6%
Guinea(Conakry)	8%
South Africa	2%
India	13%
Guatemala	0%
France	7%
Philippines	5%
Kenya	0%
Democratic Republic of Congo	4%
New South Wales	12%
Malaysia	0%
Madagascar	8%
Brazil	12%
Colorado	12%
Santa Cruz	12%
Kazakhstan	0%
Jujuy	6%
Colombia	19%
Victoria	16%
Montana	17%
French Guiana	0%
Mozambique	8%
Bulgaria	8%
New Caledonia	14%
Catamarca	7%
Spain	12%
Washington	13%
Northwest Territories	20%
New Mexico	8%
Ivory Coast	17%
Tanzania	4%
Panama	13%
Papua New Guinea	16%
British Columbia	24%
Minnesota	23%
New Zealand	24%
Dominican Republic	0%
Poland	0%
Nunavut	19%
Queensland	26%
Zambia	7%
Mali	21%
Ghana	14%
Nicaragua	20%
Tasmania	22%
Salta	43%
San Juan	33%
Peru	19%
Ontario	27%
Serbia	38%
<b>Alaska</b>	<b>38%</b>
Turkey	8%
Idaho	34%
Burkina Faso	37%
Arizona	22%
Yukon	44%
Greenland	31%
Eritrea	20%
Guyana	14%
Mexico	32%
Manitoba	54%
Quebec	46%
Ethiopia	23%
Finland	39%
Uruguay	0%
South Australia	53%
Fiji	35%
Chile	36%
Nova Scotia	35%
Namibia	33%
Sweden	37%
Michigan	25%
Alberta	44%
Ireland	58%
Norway	31%
Northern Territory	43%
Portugal	33%
Newfoundland and Labrador	51%
Western Australia	56%
New Brunswick	48%
Nevada	48%
Utah	44%
Wyoming	71%
Saskatchewan	62%
Botswana	58%

### Etapa 2: Classificar do maior para o menor (%)

Etapa 1   Respondentes da Pesquisa		Etapa 2   Ordem decrescente	
Jurisdição	Encoraja Investimento	Jurisdição	Encoraja Investimento
Zimbabwe	0%	Neuquen	0%
Chubut	0%	Ecuador	9%
La Rioja	0%	Russia	8%
Venezuela	0%	Vietnam	17%
Kyrgyzstan	0%	California	10%
Mongolia	0%	Myanmar	0%
Greece	0%	Indonesia	6%
Mendoza	0%	Niger	0%
Honduras	0%	China	6%
Romania	9%	Guinea(Conakry)	8%
Angola	0%	South Africa	2%
Rto Negro	0%	India	13%
Solomon Islands	0%	Guatemala	0%
Bolivia	0%	France	7%
Laos	0%	Philippines	5%
Neuquen	0%	Kenya	0%
Ecuador	9%	Democratic Republic of Congo (DRC)	4%
Russia	8%	New South Wales	12%
Vietnam	17%	Malaysia	0%
California	10%	Madagascar	8%
Myanmar	0%	Brazil	12%
Indonesia	6%	Colorado	12%
Niger	0%	Santa Cruz	12%
China	6%		
Guinea(Conakry)	8%		
South Africa	2%		
India	13%		
Guatemala	0%		
France	7%		
Philippines	5%		
Kenya	0%		
Democratic Republic of Congo (DRC)	4%		
New South Wales	12%		
Malaysia	0%		
Madagascar	8%		
Brazil	12%		
Colorado	12%		
Santa Cruz	12%		

**Aviso de classificação**

O Microsoft Excel localizou dados próximos à sua seleção. Como você não selecionou esses dados, eles não serão classificados.

O que você deseja fazer?

Expandir a seleção

Continuar com a seleção atual

### Etapa 3: Pontuar 0-100 jurisdições (da melhor classificação para pior)

Wyoming	71%
Saskatchewan	62%
Ireland	58%
Botswana	58%
Western Australia	56%
Manitoba	54%
South Australia	53%
Newfoundland and Labrador	51%
New Brunswick	48%
Nevada	48%
Quebec	46%
Yukon	44%
Alberta	44%
Utah	44%
Salta	43%
Northern Territory	43%
Finland	39%
Serbia	38%
<b>Alaska</b>	<b>38%</b>
Morocco	38%
Burkina Faso	37%
Sweden	37%
Chile	36%
Fiji	35%
Nova Scotia	35%
Idaho	34%
San Juan	33%
Namibia	33%
Portugal	33%
Mexico	32%
Greenland	31%
Norway	31%
Ethiopia	29%
Ontario	27%
Queensland	26%
Michigan	25%
British Columbia	24%
New Zealand	24%
Minnesota	23%
Tasmania	22%
Arizona	22%
Mali	21%
Northwest Territories	20%
Nicaragua	20%
Eritrea	20%
Colombia	19%
Nunavut	19%
Peru	19%
Vietnam	17%
Montana	17%
Ivory Coast	17%
Victoria	16%
Papua New Guinea	16%
New Caledonia	14%
Ghana	14%

SOMA		=ORDEM.PORCENTUAL(B\$2:B\$113;B2)	
A	B	C	D
<b>Etapa 3: Pontuar</b>			
Wyoming	71%	=ORDEM.PORCENTUAL(B\$2:B\$113;B2)	
Saskatchewan	62%		
Ireland	58%	=ORDEM.PORCENTUAL(matriz; x; [significância])	
Botswana	58%		
Western Australia	56%		
Manitoba	54%		
South Australia	53%		
Newfoundland and Labrador	51%		
New Brunswick	48%		
Nevada	48%		
Quebec	46%		
Yukon	44%		
Alberta	44%		
Utah	44%		
Salta	43%		
Northern Territory	43%		
Finland	39%		
Serbia	38%		
<b>Alaska</b>	<b>38%</b>		
Morocco	38%		
Burkina Faso	37%		
Sweden	37%		
Chile	36%		
Fiji	35%		
Nova Scotia	35%		
Idaho	34%		
San Juan	33%		
Namibia	33%		
Portugal	33%		
Mexico	32%		
Greenland	31%		
Norway	31%		
Ethiopia	29%		
Ontario	27%		
Queensland	26%		
Michigan	25%		
British Columbia	24%		
New Zealand	24%		
Minnesota	23%		
Tasmania	22%		
Arizona	22%		
Mali	21%		
Northwest Territories	20%		
Nicaragua	20%		
Eritrea	20%		
Colombia	19%		
Nunavut	19%		
Peru	19%		
Vietnam	17%		
Montana	17%		
Ivory Coast	17%		
Victoria	16%		
Papua New Guinea	16%		
New Caledonia	14%		
Ghana	14%		

Figura 19 – Determinação do fator  $F_{PPCS}$ , etapas 4, exemplo: depósito/projeto Bokan (EUA).

**Etapa 4:** repetir o mesmo procedimento das etapas 1-3 para as 10 componentes/variáveis da pesquisa, e calcular o valor médio das respectivas pontuações/porcentagens obtidas, para se obter o PPI parcial.

Wyoming	71%	100,00%
Saskatchewan	62%	99,00%
Ireland	58%	97,20%
Botswana	58%	97,20%
Western Australia	56%	96,20%
Manitoba	54%	95,30%
South Australia	53%	94,40%
Newfoundland and Labrador	51%	93,50%
New Brunswick	48%	91,60%
Nevada	48%	91,60%
Quebec	46%	90,70%
Yukon	44%	87,90%
Alberta	44%	87,90%
Utah	44%	87,90%
Salta	43%	86,10%
Northern Territory	43%	86,10%
Finland	39%	85,10%
Serbia	38%	82,40%
<b>Alaska</b>	<b>38%</b>	<b>82,40%</b>
Morocco	38%	82,40%
Burkina Faso	37%	80,50%
Sweden	37%	80,50%
Chile	36%	79,60%
Fiji	35%	77,70%
Nova Scotia	35%	77,70%
Idaho	34%	76,80%
San Juan	33%	74,00%
Namibia	33%	74,00%
Portugal	33%	74,00%
Mexico	32%	73,10%
Greenland	31%	71,20%
Norway	31%	71,20%
Ethiopia	29%	70,30%
Ontario	27%	69,40%
Queensland	26%	68,50%
Michigan	25%	67,50%
British Columbia	24%	65,70%
New Zealand	24%	65,70%
Minnesota	23%	64,80%
Tasmania	22%	62,90%
Arizona	22%	62,90%
Mali	21%	62,00%
Northwest Territories	20%	59,20%
Nicaragua	20%	59,20%
Eritrea	20%	59,20%
Colombia	19%	56,40%
Nunavut	19%	56,40%
Peru	19%	56,40%
Vietnam	17%	53,70%
Montana	17%	53,70%
Ivory Coast	17%	53,70%
Victoria	16%	51,80%
Papua New Guinea	16%	51,80%
New Caledonia	14%	49,00%
Ghana	14%	49,00%
Guyana	14%	49,00%
India	13%	46,20%
Washington	13%	46,20%
Panama	13%	46,20%
New South Wales	12%	41,60%
Brazil	12%	41,60%
Colorado	12%	41,60%
Santa Cruz	12%	41,60%
Spain	12%	41,60%
California	10%	40,70%
Romania	9%	38,80%
Ecuador	9%	38,80%
Russia	8%	32,40%
Guinea(Conakry)	8%	32,40%
Madagascar	8%	32,40%
Mozambique	8%	32,40%

Fonte: Elaboração própria.

## **F<sub>PPEG</sub> = Fator Percepção Política Econômica Global (da jurisdição/país)**

São utilizadas as componentes do Índice de Liberdade Econômica (com base nos dados de pesquisa anual realizada pela Fundação *Heritage*), para determinar os valores deste fator (F<sub>PPEG</sub>).

- Variáveis do **F<sub>PPEG</sub> = Índice de Liberdade Econômica**

### **Estado de direito**

- 1 – Direitos de propriedade (Var.P<sub>PPEG1</sub>);
- 2 – Liberdade de corrupção (Var.P<sub>PPEG2</sub>);

### **Limitação de governo**

- 3 – Liberdade fiscal (Var.P<sub>PPEG3</sub>);
- 4 – Tamanho do governo (Var.P<sub>PPEG4</sub>);

### **Eficiência regulatória**

- 5 – Liberdade empresarial (Var.P<sub>PPEG5</sub>);
- 6 – Liberdade trabalhista (Var.P<sub>PPEG6</sub>);
- 7 – Liberdade monetária (Var.P<sub>PPEG7</sub>);

### **Livres mercados**

- 8 – Livre-comércio (Var.P<sub>PPEG8</sub>);
- 9 – Liberdade de investimento (Var.P<sub>PPEG9</sub>);
- 10 – Liberdade financeira (Var.P<sub>PPEG10</sub>).

A pesquisa é realizada pela Fundação *Heritage* em parceria com o *Wall Street Journal* em 186 jurisdições/países de todos os continentes. O Índice de Liberdade Econômica possui 10 componentes, já normalizadas 0-100. Além de já se encontrarem normalizados para pontuação de 0-100, inclusive para todas as componentes do índice, as jurisdições também já estão classificadas. Assim, não é necessário proceder com as 3 etapas descritas anteriormente (no procedimento de obtenção dos valores para o fator: **F<sub>PPCS</sub>**), partindo logo para o final da etapa 4

(calcular o valor médio da pontuação/porcentagem obtida nas 10 componentes pertencentes ao Index de Liberdade Econômica).

O Index de Liberdade Econômica que no modelo (MCRM-TR) é igual ao  $F_{PPEG}$ , de uma jurisdição, é a média da pontuação de todas as respectivas componentes (10 componentes).

Assim, considerando ainda o exemplo do depósito/projeto Bokan (Alsca, EUA), os dados da pesquisa (Fundação *Heritage*, 2016) para Jurisdição EUA conforme os dados da jurisdição EUA (em 2016, ano-base 2015) são mostrados no Quadro 10.

Quadro 10 – Dados da pesquisa (Fundação *Heritage*, 2016) para Jurisdição EUA.

Componentes do Index de Liberdade Econômica (Index of Economic Freedom )			Pontuação (%)
Estado de direito	1	Direitos de propriedade	80,00
	2	Liberdade de corrupção	74,00
Limitação de Governo	3	Liberdade fiscal	65,60
	4	Tamanho do governo	54,70
Eficiência Regulatória	5	Liberdade empresarial	84,70
	6	Liberdade trabalhista	91,40
	7	Liberdade monetária	77,00
Livres Mercados	8	Livre comércio	87,00
	9	Liberdade de investimento	70,00
	10	Liberdade financeira	70,00
			<b>75,44</b>

Fonte: Elaboração própria.

**$F_{PQLG}$  = Fator Percepção da Qualidade Logística Global = Índice de Desempenho Logístico Parcial - LPI (Internacional)**

Para este fator são utilizadas as componentes do Índice de Desempenho Logístico (com base na pesquisa do Banco Mundial “*World Bank*”), em parceria com instituições acadêmicas internacionais, empresas privadas e indivíduos envolvidos em logística internacional, abrangendo mais de 5.000 avaliações de países. (Índice de Desempenho Logístico ou *The Logistics Performance Index-LPI*) (WORLD BANK, 2016). Para o modelo de competitividade e risco, proposto, das 6 componentes constituintes do LPI, são utilizadas 5 (**sendo renomeado assim para Índice de Desempenho Logístico Parcial**), como já explanado no capítulo 3.

- Variáveis do  $P_{PQLG}$  = Índice de Desempenho Logístico (internacional) parcial

1 – A eficiência do processo de desalfandegamento (*customs*) (Var. $P_{PQLG}1$ );



2 – A facilidade de organizar embarques a preços competitivos (*ease of arranging shipments*) (Var.P<sub>PQLG2</sub>);

3 – A competência e qualidade dos serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro (*quality of logistics services*) (Var.P<sub>PQLG3</sub>);

4 – A capacidade de controlar e rastrear as remessas (*tracking and tracing*) (Var.P<sub>PQLG4</sub>);

5 – Frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados (*timeliness*) (Var.P<sub>PQLG5</sub>).

Os procedimentos para determinação dos valores para este fator (F<sub>PQLG</sub>) são semelhantes aos do fator (F<sub>PPEG</sub>), diferindo apenas no número de componentes (no caso do fator F<sub>PQLG</sub>, são 5 componentes).

Assim, é necessário proceder apenas a partir do final da etapa 4 (descrita na obtenção dos valores para o fator: F<sub>PPCS</sub>), ou seja, calcular o valor médio da pontuação/porcentagem obtida nas 5 componentes pertencentes ao Índice de Desempenho Logístico Parcial. Similarmente ao que é feito com os demais fatores do modelo (MCRM-TR) suas respectivas pontuações são normalizadas para ir de 0 a 100 pontos. Logo, considerando o mesmo exemplo do depósito/projeto Bokan (EUA), os dados da pesquisa (WORLD BANK, 2016) para Jurisdição EUA, são mostrados no Quadro 11.

Quadro 11 – Dados da Jurisdição (USA), em 2016 (ano-base 2015).

Componentes do Index de Desempenho Logístico Parcial - LPI (Internacional)	Pontuação (%)
1 - A Eficiência do processo de desalfandegamento ("Customs")	90,5%
2 - A Facilidade de organizar embarques a preços competitivos ("Ease of arranging shipments");	88,6%
3 - A competência e qualidade dos serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro ("Quality of logistics services")	95,5%
4 - A Capacidade de controlar e rastrear as remessas ("Tracking and tracing")	97,4%
5 - Frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados ("Timeliness")	93,7%
	<b>93,1%</b>

Fonte: Elaboração própria.

Diante dos fatores de competitividade e risco definidos anteriormente e de posse dos dados do Portfólio de Depósitos de Classe Mundial, é possível montar o modelo proposto (MCRM-TR).

Antes da descrição do modelo, vale destacar a impossibilidade de o MCRM-TR conseguir capturar as oscilações das variáveis ou fatores no tempo, por exemplo, as flutuações nos preços dos OTR, nos custos etc. Dessa forma, a opção mais adequada para sanar o problema da “solução determinística” é utilizar-se de ferramentas de geração de números aleatórios para produzir possíveis valores para cada um dos fatores pertencentes ao modelo (MCRM-TR). Uma das técnicas mais conhecidas de geração de números aleatórios é a denominada simulação de Monte Carlo ou o método de Monte Carlo.

#### 4.5 Números aleatórios e Simulação de Monte Carlo

Uma sequência de números aleatórios,  $x_1, x_2, \dots$ , deve possuir duas importantes propriedades: uniformidade e independência. Todo número aleatório  $x_i$  é uma amostra independente de uma distribuição uniforme e contínua no intervalo de 0 a 1.

##### 4.5.1 Propriedades desejadas aos geradores de números aleatórios

Para melhor compreender o fato de existirem vários métodos geradores de números aleatórios e por que um é considerado melhor do que outro, abaixo é mostrado um exemplo de como um gerador opera. A técnica empregada mais comum faz uso de uma relação recursiva na qual, o próximo número na sequência é uma função do último ou dois últimos números gerados, ou seja,

$$x_n = f(x_{n-1} + x_{n-2}, \dots)$$

Um exemplo desta função é:  $x_n = 5x_{n-1} + 1 \pmod{16}$

Iniciando a série com  $x_0 = 5$ , obtemos  $x_1$  da forma que segue:

$$x_1 = 5(5) + 1 \pmod{16} = 26 \pmod{16} = 10$$

Os primeiros 32 números obtidos por meio deste procedimento são: 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5.

Nesse exemplo os valores de  $x$  são inteiros entre 0 e 15. Dividindo-os por 16, obtém-se uma sequência de números aleatórios com valores entre 0 e 1. Os números gerados foram (PUC, 2015):

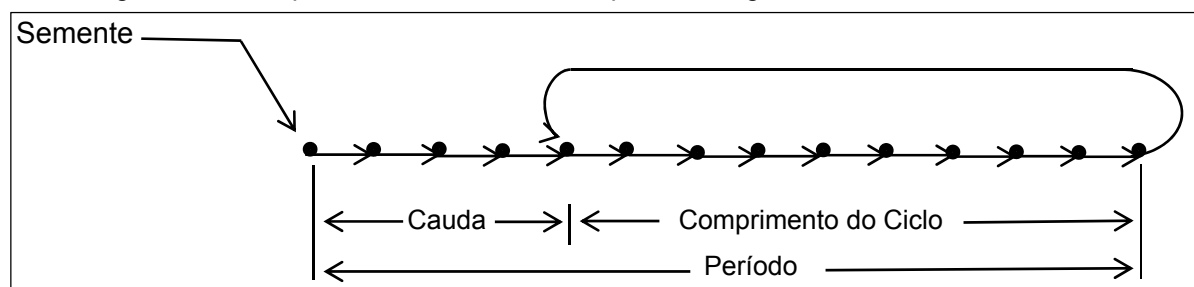
0,6250 0,1875 0,0000 0,0625 0,3750 0,9375 0,7500 0,8125  
 0,1250 0,6875 0,5000 0,5625 0,8750 0,4375 0,2500 0,3125  
 0,6250 0,1875 0,0000 0,0625 0,3750 0,9375 0,7500 0,8125  
 0,1250 0,6875 0,5000 0,5625 0,8750 0,4375 0,2500 0,3125

Como se observa, conhecida a função  $f$ , pode-se gerar novamente a sequência sempre for fornecido o valor inicial de  $x_0$ . Este valor, usado para iniciar a sequência, é conhecido por semente (número qualquer definido pelo analista antes da simulação). Tendo invista que a função  $f$  é determinística, dada uma semente, pode-se afirmar, com 100% de certeza, qual serão os números na sequência.

Embora esses números sejam considerados randômicos (aleatórios), no sentido de serem aprovados em testes estatísticos de aleatoriedade, são, de fato, pseudoaleatórios. Mesmo assim, o objetivo em qualquer método de geração é produzir uma sequência de números aleatórios entre zero e 1, a qual possua propriedades semelhantes aquelas dos verdadeiros números aleatórios. Há algumas vantagens em se gerar números pseudoaleatórios no lugar dos verdadeiramente aleatórios tais como (PUC, 2015):

- quando se trata de empregar números aleatórios em simulações nas quais se deseja a possibilidade de repetir o experimento simulado e, portanto, a sequência de números aleatórios, da maneira exata como foi executada anteriormente, e caso o interesse for uma sequência diferente, pode-se, a qualquer momento, fazer uso de valores diferentes para a semente (os números aleatórios nos fornecem um controle adicional sobre a possibilidade de reproduzir os resultados);
- Outra característica importante, observada no exemplo, é que apenas os 16 primeiros valores são únicos. O 17º número é igual ao primeiro e o restante da sequência representa apenas uma repetição cíclica dos primeiros 16 números (com mostrado no exemplo, o gerador utilizado possui um comprimento de ciclo igual a 16 valores). Vale destacar que alguns geradores não repetem a parte inicial do ciclo, denominada de cauda. Nesta situação, o comprimento de seu período é determinado pela soma do comprimento da cauda mais o comprimento do ciclo (Figura 20).

Figura 20 – Comprimento de ciclo, cauda e período de gerador de números aleatórios.



Fonte: Material didático (PUC, 2015), modificado.

O método de Monte Carlo é designado por qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado número de vezes, para calcular probabilidades heurísticamente, tal como se, de fato, se registrassem os resultados reais em jogos de casino (daí o nome). Este tipo de método é utilizado em simulações estocásticas com diversas aplicações em áreas como a física, matemática, biologia e outras.

#### 4.5.2 Simulação de Monte Carlo

A técnica conhecida como Monte Carlo surgiu através de trabalhos de diversos matemáticos. Stanislaw Ulam, matemático polonês, que participou do Projeto Manhattan e propôs a Teller-Ulam desenho de armas termonucleares, usou esta ideia para este projeto. Enquanto em Los Alamos, sugeriu que o método Monte Carlo para avaliar integrais matemáticas complicadas que surgem na teoria de reações nucleares em cadeia. Esta sugestão levou ao desenvolvimento do método de simulação Monte Carlo por Von Neumann, *Metropolis* e outros (PORTALACTION, 2017). O método de Monte Carlo tem sido utilizado há muito tempo como forma de obter aproximações numéricas de funções complexas em que não é viável, ou é mesmo impossível, obter uma solução analítica ou, pelo menos, determinística (PUC, 2015). De acordo com Portalaction (2017), atualmente o método de simulação Monte Carlo é muito utilizado como ferramenta para simulação de comportamentos estocásticos, como por exemplo, em estudos do mercado financeiro.

Na sua conceituação mais simples é um gerador de números aleatórios útil para previsões, estimativas e análises de risco. Uma simulação calcula numerosos cenários de um modelo escolhendo valores repetidamente de uma distribuição de

probabilidade predefinida pelo usuário para as variáveis incertas e usando esses valores no modelo. Todos esses cenários produzem resultados associados em um modelo, em que cada cenário pode ter uma previsão. As previsões são eventos (normalmente com fórmulas ou funções) que você define como resultados importantes do modelo. Em geral, são eventos como: lucro líquido, despesas brutas, custos operacionais, etc..

Para aplicação da simulação de Monte Carlo no modelo (MCRM-TR), são necessários estudos sobre a forma de distribuição de probabilidade dos dados de cada fator a ser utilizado. Apenas a partir desse estudo pode-se determinar o tipo de distribuição de probabilidade que cada fator possui, para assim poder realizar a geração/simulação de valores aleatórios para cada fator e, conseqüentemente, obter as respectivas probabilidades. A partir desta fase, o modelo se torna um modelo dinâmico (de média-variância), não sendo mais determinístico. Serão realizadas simulações para diversos valores possíveis dos fatores de competitividade e risco.

Os parâmetros definidos para os valores-limite dos fatores de competitividade e risco foram determinados com base na experiência de 10 anos do executante na área de mineração, de seu orientador – que possui vasta experiência no setor de mineração (especialmente em tecnologia e economia mineral) – e de seu coorientador – especialista e representante do *software* estatístico e de simulação probabilística adotado para o desenvolvimento deste trabalho de tese. O *software* adotado para simulações e, por conseguinte, para a obtenção das estatísticas no modelo proposto nessa trabalho foi o Risk Simulator. Trata-se de um *software* de previsão, otimização e simulação que contém o módulo simulação Monte Carlo, que executa simulações paramétricas e não paramétricas de 42 distribuições de probabilidade com diferentes perfis de simulação, simulações truncadas e correlacionadas, distribuições personalizáveis, simulações controladas de precisão e erro e muitos outros algoritmos. Desenvolvido e escrito na linguagem Micro.NETC#; ele funciona usando o *software* Excel como suplemento (desenvolvido pela Real Options Valuation (© 2005-2016 *Real Options Valuation, Inc.*). De forma resumida, a execução de uma simulação Monte Carlo no Risk Simulator, no seu módulo Excel existente, segue as seguintes etapas: (1) iniciar um novo perfil de simulação ou abrir um perfil existente; (2) definir valores de entrada nas células relevantes; (3) definir resultados de previsão (saídas) nas células relevantes; (4) executar a simulação e (5) interpretação dos resultados.

Com o intuito de subsidiar o entendimento e desenvolvimento do modelo de competitividade e risco na mineração de elementos de terras-raras (MCRM-ETR) proposto neste trabalho, no Anexo B encontra-se material sobre a revisão de alguns conceitos e noções importantes da estatística básica. No Anexo C, é feita uma explanação sobre os métodos de geração de números, variáveis aleatórias e detalhes sobre o método e a simulação de Monte Carlo, inclusive análises de resultados com o Software Risk Simulator (© 2005-2016 Real Options Valuation, Inc.).

#### 4.6 Desenvolvimento do modelo (MCRM-TR)

Fazendo analogia ao mercado de capitais, a determinação do nível de competitividade na mineração pode ser entendida como a propensão à obtenção de retorno no desenvolvimento de um empreendimento (neste caso, propensão à viabilidade técnica e econômica do desenvolvimento de um depósito de terras-raras), levando em conta os riscos associados. Nesse caso, o risco é mensurado de forma parecida com o que se pratica no mercado de capitais (ações, opções etc.), ou seja, faz-se uma análise por meio de média-variância.

O  $I_{\text{CRM-TR}}$  será um indicador que medirá a competitividade e o risco relativos relacionados com cada depósito/projeto de TR em estágio avançado de desenvolvimento, por meio de comparação entre o valor do nível dos fatores de competitividade e risco do depósito que está sendo analisado ( $N_{\text{FCRDA}}$ ) e o comportamento de uma carteira que represente o setor/mercado – neste caso, o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM), representado pelo valor do nível dos fatores de competitividade e risco dos depósitos de classe mundial ( $N_{\text{FCRDPM}}$ ). Os depósitos de classe mundial foram classificados conforme descrito no capítulo 4.

A fórmula para o cálculo do  $N_{\text{FCRDPM}}$  após a simulação (método de Monte Carlo) é mostrada a seguir. Antes, vale destacar que os  $F_{\text{VPD}}$ ,  $F_{\text{QIL}}$ ,  $F_{\text{EMO}}$ ,  $F_{\text{IER}}$ ,  $F_{\text{EPM}}$ ,  $F_{\text{PPCS}}$ ,  $F_{\text{PPEG}}$  e  $F_{\text{PQLG}}$  se tornarão probabilidades após a simulação, logo sua nova nomenclatura será  $P_{\text{VPD}}$ ,  $P_{\text{QIL}}$ ,  $P_{\text{EMO}}$ ,  $P_{\text{IER}}$ ,  $P_{\text{EPM}}$ ,  $P_{\text{PPCS}}$ ,  $P_{\text{PPEG}}$  e  $P_{\text{PQLG}}$ , significando as probabilidades de ocorrência dos valores dos respectivos fatores de competitividade e risco (com 95% de confiança adotado na simulação) e seus respectivos erros/riscos, ou seja, os desvios padrão associados ( $DP_{\text{VPD}}$ ,  $DP_{\text{QIL}}$ ,  $DP_{\text{EMO}}$ ,  $DP_{\text{IER}}$ ,  $DP_{\text{EPM}}$ ,  $DP_{\text{PPCS}}$ ,  $DP_{\text{PPEG}}$ , e  $P_{\text{PCLG}}$ ).

De acordo com a pesquisa realizada pelo Instituto Fraser e publicada em 2015 (pesquisa realizada em 122 jurisdições/países), de acordo com as informações dos respondentes, 40% das decisões de investimentos são determinadas por fatores de percepções políticos e conjunturais (JACKSON; GREEN 2016). Dessa forma, os fatores de percepção ( $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$  e  $F_{PQLG}$ ) são ponderados considerando essa informação nas Equações (1) e (2). Assim, os fatores técnicos e econômicos são ponderados com 0,6 (60%) e os fatores de percepções políticos e conjunturais, 0,4 (40%).

$$PN_{FCRDCM} = ((P_{VPD} + P_{QIL} + P_{EMO} + P_{IER} + P_{EPM}) / 5) \times 0,6 + (P_{PPCS} + P_{PPEG} + P_{PQLG}) / 3 \times 0,4$$

(1)

e

$$PN_{FCRDA} = ((P_{VPD} + P_{QIL} + P_{EMO} + P_{IER} + P_{EPM}) / 5) \times 0,6 + (P_{PPCS} + P_{PPEG} + P_{PQLG}) / 3 \times 0,4$$

(2)

Onde:

- $PN_{FCRDCM}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco dos depósitos do portfólio de classe mundial (valor obtido após a simulação de monte Carlo sobre o  $N_{FCRDCM}$ ).
- $PN_{FCRDA}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise (valor obtido após a simulação de monte Carlo sobre o  $N_{FCRDA}$ ).
- $F_{VPD}$  = fator valor potencial do depósito;
- $F_{QIL}$  = fator qualidade da infraestrutura local;
- $F_{EMO}$  = fator expectativa de margem operacional (relativo a mineração: lavra e beneficiamento + processamento: separação e extração de OTR);
- $F_{IER}$  = fator implicações dos elementos radioativos;
- $F_{EPM}$  = fator expectativa potencial de mercado;
- $F_{PPCS}$  = fator percepção política conjuntural do setor de mineração (da província/da jurisdição/do país);
- $F_{PPEG}$  = fator percepção política econômica global (do país);
- $F_{PQLG}$  = fator percepção da qualidade logística global (do país).

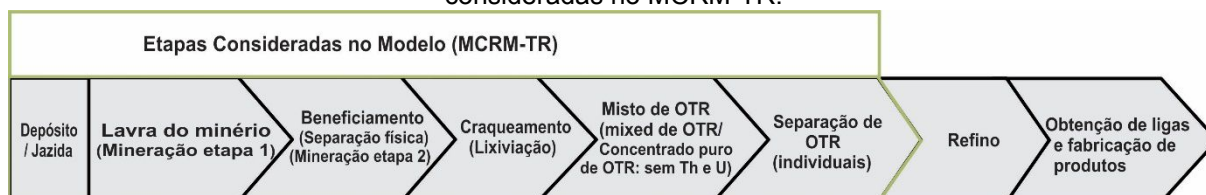
Seguindo o mesmo raciocínio adotado na seleção do Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM), ao considerar a existência de grande diversidade de

depósitos/projetos com características particulares quanto aos fatores de competitividade e risco associados e à diversidade de objetivos econômicos de cada empreendimento mineiro tornou-se indispensável a adoção de premissas com vistas a uma melhor aplicação do modelo (MCRM-TR).

As seis premissas (qualitativas) para aplicação adequada do modelo (MCRM-TR) são descritas a seguir:

**a) variáveis do processo produtivo dos óxidos de terras-raras consideradas no modelo (MCRM-TR), para todos os depósitos:** serão consideradas desde as etapas envolvidas com atividades de mineração até a etapa de separação dos óxidos de terras-raras individuais. Isso significa que as variáveis das etapas de refino e posteriores não serão consideradas no modelo proposto. O motivo é que, dessa forma, a análise de competitividade se torna mais igualitária para os empreendimentos dos depósitos a serem desenvolvidos, já que nem todos os projetos em desenvolvimento têm a pretensão de comercializar o produto final da cadeia produtiva (ligas/produtos acabados), concentrando-se apenas na produção dos óxidos de terras-raras individuais (OTR), conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Exemplo simplificado das etapas principais da cadeia produtiva dos OTR que serão consideradas no MCRM-TR.



Fonte: Elaboração própria, 2017.

As etapas consideradas no modelo MCRM-TR vão da fase de mineração até os óxidos de terras-raras separadas. Caso o projeto em análise tenha a pretensão de comercializar apenas o *mixed* de OTR ou os óxidos de terras-raras separados parcialmente, serão realizados ajustes nos preços das cestas de terras-raras, que normalmente são dados tomando-se como base os preços US\$ FOB China de óxidos de terras-raras separados individualmente.

Assim, com base na produção/no produto final pretendido pelo projeto, serão feitos os seguintes ajustes nos valores das cestas de OTR: se for um concentrado misto, terá desconto de 30% no valor da cesta; óxidos de terras-raras separados parcialmente terão desconto de 20% no valor da cesta; e, quando a separação for completa dos OTR, o desconto será de 0% (será usado o valor da cesta total);



**b) os OTR terão como destino o mercado nacional e/ou internacional;**

**c) comercialização dos produtos provenientes dos depósitos:** os óxidos de terras-raras serão produzidos como produto principal (projetos de terras-raras). Podem ser aproveitados outros metais pertencentes ao mesmo depósito como subprodutos da mineração de TR, porém não serão consideradas as expectativas de receitas desses subprodutos na aplicação do modelo;

**d) os metais radioativos extraídos/separados dos ETR, na etapa hidrometalúrgica,** não serão aproveitados comercialmente no primeiro momento, necessitando assim de instalações de armazenamento (como urânio e tório). Logo, suas receitas também não serão consideradas no primeiro momento.

**e) acesso ao bem mineral:** não há impedimentos de acesso ao depósito, seja por restrições provenientes de legislação ambiental (área de proteção), seja de área indígena ou de reivindicação de terras em disputa, área de interesse turístico e área agrícola de alto rendimento etc. (*idem* à premissa c de seleção do PDCM);

**f) projetos/depósitos com estimativas das variáveis econômicas divulgadas:** seleção de projetos com estudo de aproveitamento econômico preliminar ou avançado (relatório de avaliação econômica preliminar – AEP, pré-viabilidade econômica ou viabilidade econômica). Isso possibilita o conhecimento das variáveis do modelo de todos os depósitos/projetos, para viabilizar a modelagem comparativa do portfólio de depósitos com o depósito em análise (*idem* à premissa f de seleção do PDCM).

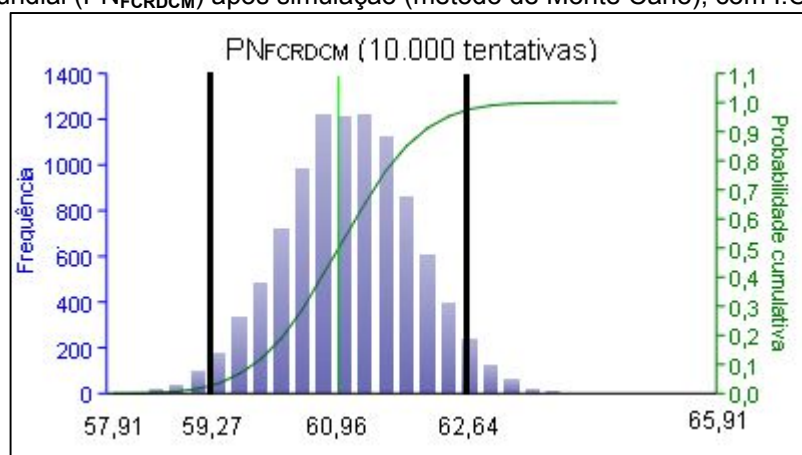
As simulações pelo método Monte Carlo, sobre as Equações 1 e 2, resultam em probabilidades sobre os fatores de competitividade e risco, produzindo as resultantes  $PN_{FCRDCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ , que são na realidade as probabilidades médias dos níveis dos fatores de competitividade e risco do PDCM (resultante  $N_{FCRDCM}$ ) e dos DAs (resultante  $N_{FCRDA}$ ), respectivamente.

Com as principais informações obtidas na simulação/previsão – média, intervalo de confiança, coeficiente de variação e determinação ( $R^2$ ) –, alimenta-se a planilha de resultados, e assim se realizam as análises e interpretações possíveis dos resultados comparativos.

As Figuras 22 e 23 apresentam exemplos de respectivas distribuições do PDCM e DA com as estatísticas obtidas após a simulação (geração de números aleatórios pelo método de Monte Carlo) no MCRM-TR, sobre as Equações 1 e 2 (utilizando 10.000 interações), tanto para o portfólio formado pelos depósitos de

classe mundial (PDCM) quanto para um depósito em análise (depósito D1, depósito hipotético tomado como exemplo para análise de competitividade). As estatísticas obtidas após a simulação de Monte Carlo são utilizadas nas análises de competitividades e risco, tais como: o valor médio da distribuição de probabilidade (distribuição normal), o intervalo de confiança (I.C.) e coeficiente de variação (risco).

Figura 22 – Obtenção da distribuição de probabilidade do nível de competitividade e risco do portfólio de classe mundial ( $PN_{FCRDCM}$ ) após simulação (método de Monte Carlo), com I.C.= 95%.

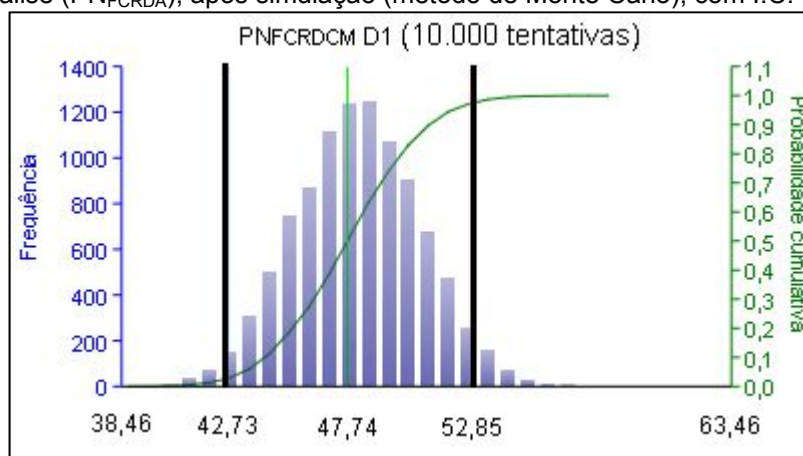


Fonte geradora: *Software Risk Simulator*, versão 10.0.0 – 2014(© 2005-2016 *Real Options Valuation, Inc.*).

Estatísticas: valor médio: 60,96; intervalo de confiança: [59,27; 62,64]; desvio padrão: 0,85 e coeficiente de variação (CV):  $(0,0141 \times 100) = 1,41 \%$ .

(© 2005-2016 *Real Options Valuation, Inc.*

Figura 19 – Obtenção da distribuição de probabilidade do nível de competitividade e risco do depósito D1, em análise ( $PN_{FCRDA}$ ), após simulação (método de Monte Carlo), com I.C.= 95%.



Fonte geradora: *Software Risk Simulator*, versão 10.0.0 – 2014(© 2005-2016 *Real Options Valuation, Inc.*).

Estatísticas: valor médio: 47,74; intervalo de confiança: [42,73; 52,85]; desvio padrão: 2,60; e coeficiente de variação (CV):  $(0,0545 \times 100\%) = 5,45\%$ .

Em suma, a análise de competitividade pelo modelo (MCRM-TR) envolve cinco principais etapas. A primeira etapa começa como o cálculo dos valores de

cada fator ( $F_{VPD}$ ,  $F_{QIL}$ ,  $F_{EMO}$ ,  $F_{IER}$ ,  $F_{EPM}$ ,  $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$ ,  $F_{PCLG}$ , e as subvariáveis destes 3 últimos) para os depósitos/projetos do PDCM e os DAs. Na segunda etapa são definidos os tipos de distribuições comportamentais para cada variável (preços dos OTRs, produção anual de OTR, OPEX, relação de concentrado de radioativos, as variáveis e subvariáveis dos fatores de percepções:  $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$ ,  $F_{PCLG}$ ). Essa definição do tipo de distribuição é feita com base na experiência do analista que considera a distribuição de probabilidade mais adequada para cada variável, conforme estudos sobre o banco de dados (série histórica ou intervalo de valores comportamentais de cada variável). Também, com base nesta experiência, se define o número de iterações a serem utilizadas na simulação de Monte Carlo (no caso deste trabalho de tese, foram utilizadas 10.000 iterações, consideradas suficientes para obter resultados satisfatórios). Na terceira etapa é realizada a geração de números aleatórios (método de Monte Carlo) nas variáveis dos fatores, obtendo-se probabilidades ( $P_{VPD}$ ,  $P_{QIL}$ ,  $P_{EMO}$ ,  $P_{IER}$ ,  $P_{EPM}$ ,  $P_{PPCS}$ ,  $P_{PPEG}$ ,  $P_{PCLG}$ , e as subvariáveis destes 3 últimos), que estão relacionadas conforme as Equações 1 e 2. Após as primeiras três etapas, já se conhece as resultantes:  $PN_{FCRDCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ , e respectivos desvios padrão, coeficientes de determinação ( $R^2$ ) e coeficientes de variação (CV). Assim é possível concluir a quarta etapa, trata-se do cálculo do  $I_{CRM-TR}$ .

- **Cálculo do  $I_{CRM-TR}$**

O índice de competitividade e risco na mineração de terras-raras ( $I_{CRM-TR}$ ) é obtido, com o cálculo da média entre a resultante  $PN_{FCRDA}$  e o GCR ( $R^2$ ), subtraindo deste resultado a componente de volatilidade (risco, isto é, o CV), conforme Equação 3.

$$I_{CRM-TR} = ((P_{NFCRDA} + GCR)/2) - CV \quad (3)$$

Onde:

- $P_{NFCRDA}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise (valor obtido após a simulação de monte Carlo sobre o  $N_{FCRDA}$ );
- CV (%) = Coeficiente de Variação: o CV (%) é a razão do desvio padrão pela média (volatilidade/risco), que nesse modelo, se trata da razão entre a resultante  $PN_{FCRDCM}$  e/ou  $PN_{FCRDA}$  com seus respectivos desvios padrões (componente de volatilidade/risco), obtidos na simulação.
- GCR = Grau de competitividade e risco no modelo =  $R^2$  (x 100).

O coeficiente de determinação, também chamado de  $R^2$ , é uma medida de ajustamento de um modelo estatístico linear generalizado. O  $R^2$  varia entre 0 e 1, indicando, em percentagem (no modelo logicamente vai de 0-100%) o grau de associação entre duas variáveis.

- ✓ Analogias entre variáveis e equações da teoria estatística do  $R^2$  com o GCR.

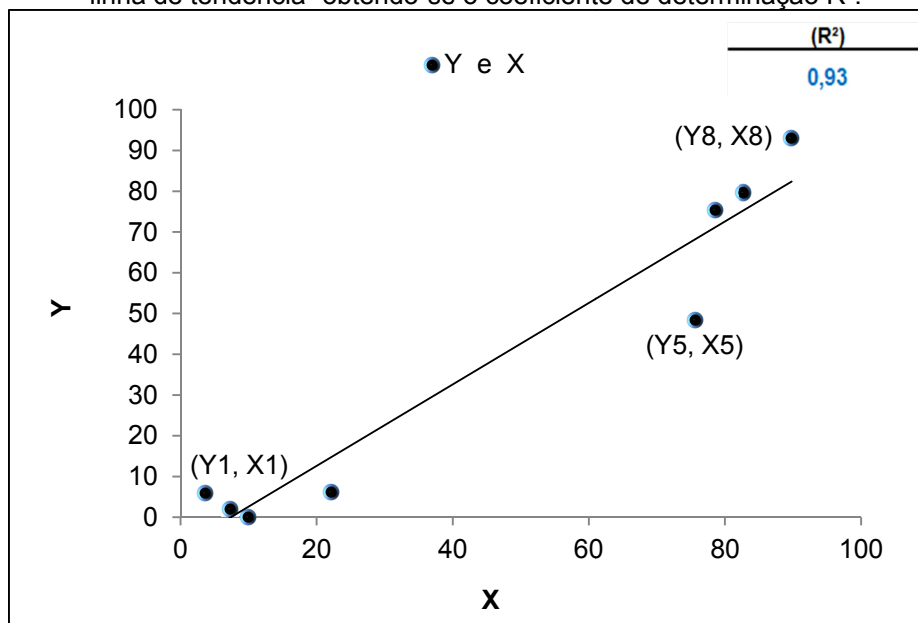
Tendo como referência todo o embasamento teórico da estatística descrito no Anexo B, são feitas algumas analogias e substituições de variáveis, no intuito de subsidiar o cálculo do GCR proposto no modelo (MCRM-TR). Inicialmente são feitas alguns considerações importantes para utilização das analogias pretendidas:

- os fatores de competitividade e risco do MCRM-TR possuem comportamento linear (linearidade entre os fatores);
- são geradas variáveis aleatórias (pelo método de monte Carlo) para cada fator (um total de 8 fatores para cada depósito), a partir da análise prévia do intervalo ou série de valores conforme a variável tratada, para no final da simulação se obter uma distribuição normal (Teorema Central do Limite) para as variáveis/fatores. Assim, considerando a existência de linearidade entre os fatores de competitividade e risco ( $P_{VPD}$ ,  $P_{QIL}$ ,  $P_{EMO}$ ,  $P_{IER}$ ,  $P_{EPM}$ ,  $P_{PPCS}$ ,  $P_{PPEG}$ ,  $P_{PCLG}$ , e as subvariáveis destes 3 últimos), o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) por ser uma boa medida da aderência do modelo de regressão aos dados, de forma indireta, pode determinar o grau de associação entre os fatores (aos pares) dos depósitos do PDCM e os fatores dos DAs. Este grau de associação é definido no modelo (MCRM-TR) como Grau de Competitividade e Risco (GCR). Ao substituímos as variáveis hipotéticas X ( $X_1...X_8$ ) e Y ( $Y_1...Y_8$ ) pelas probabilidades dos níveis dos fatores  $P_{VPD}$ ,  $P_{QIL}$ ,  $P_{EMO}$ ,  $P_{IER}$ ,  $P_{EPM}$ ,  $P_{PPCS}$ ,  $P_{PPEG}$ ,  $P_{PQLG}$ , pertencentes ao PDCM e o DA respectivamente, determina-se o grau de associação entre os fatores (variáveis) aos pares:  $(Y_1, X_1)$ ,  $(Y_2, X_2)$ ,  $(Y_3, X_3)$ ,  $(Y_4, X_4)$ ,  $(Y_5, X_5)$ ,  $(Y_6, X_6)$ ,  $(Y_7, X_7)$  e  $(Y_8, X_8)$ .

Com analogia:  $PN_{FCRD\text{CM}} = Y$  e  $PN_{FCRD\text{A}} = X$ , as relações entre Y e X: serão análogas às relações entre os 8 fatores do portfólio de classe mundial ( $Y = P_{NFCR\text{PCM}}$ ) e do depósitos em análise ( $X = P_{NFCR\text{DA}}$ ) respectivamente (aos pares), isto é, de cálculos de covariância, coeficiente de correlação, coeficiente de determinação ( $R^2$ ), distribuições de probabilidades, desvios padrões e intervalos de confiança. Os

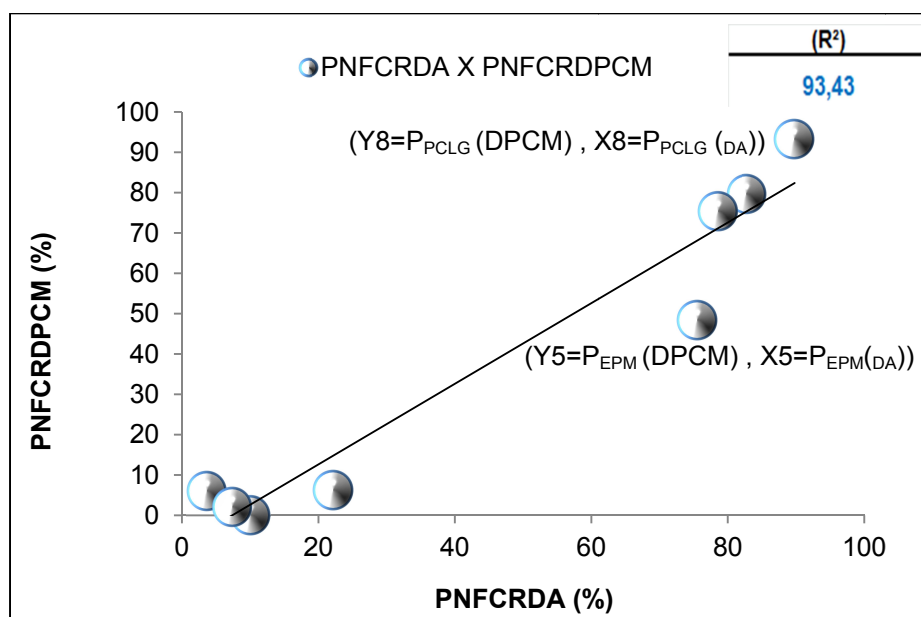
exemplos das figuras 24 e 25 mostram o resultado da analogia proposta para determinação do GCR ( $R^2 \times 100$ ).

Figura 24 – Diagrama de dispersão para variáveis hipotéticas Y e X e ajuste através de “linha de tendência” obtendo-se o coeficiente de determinação  $R^2$ .



Fonte: Elaboração própria, 2017.

Figura 25 – Diagrama de dispersão para as variáveis das resultantes  $PN_{FCRDPCM} = Y$  e  $PN_{FCRDA} = X$  e ajuste através de “linha de tendência” obtendo-se GCR ( $= R^2 \times 100$ ).



Fonte: Elaboração própria, 2017.

Na quinta etapa, como suplemento as análises do modelo (MCRM-TR), são determinados, por análise gráfica (*Graphic views*), os fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR), conforme a Equação 4.

$$\mathbf{FVCCR = PN_{FCRDA} - PN_{FCRDCM}} \quad \mathbf{(4)}$$

Onde:

FVCCR = fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco;

-  $PN_{FCRDCM}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco dos depósitos do portfólio de classe mundial (valor obtido após a simulação de monte Carlo sobre o  $N_{FCRDCM}$ );

-  $PN_{FCRDA}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise (valor obtido após a simulação de monte Carlo sobre o  $N_{FCRDA}$ );  
 $PN_{FCRDPCM} = \text{base} = 0,0\%$  ( $PDCM/benchmark$  tomado como base de referência).

Na resultante FVCCR são considerados fatores e/ou variáveis relativamente críticas os resultados que apresentarem valores negativos ( $- FVCCR < 0,0 \%$ ) e fora do intervalo de confiança (I.C.) do  $PN_{FCRDPCM}$ . Do contrário, os fatores e/ou variáveis não serão considerados críticos (FVCCR com valores iguais ou superiores a 0,0%, e/ou dentro do intervalo de confiança (I.C.) do  $PN_{FCRDCM}=PDCM/benchmark$ ). O desenho esquemático resumido do modelo (MCRM-TR) é mostrado na Figura 26.

Figura 26 – Esquema do MCRM-TR.

MCRM-TR								
Fatores de Competitividade e Risco	<b>F<sub>VPD</sub></b>	<b>F<sub>QIL</sub></b>	<b>F<sub>EMO</sub></b>	<b>F<sub>IER</sub></b>	<b>F<sub>EPM</sub></b>	<b>F<sub>PPCS</sub></b>	<b>F<sub>PPEG</sub></b>	<b>F<sub>PQLG</sub></b>
Análise dos dados e/ou definição dos parâmetros: dados em forma de série histórica (S.H.) ou Intervalo de valores (I.V.)	S.H.	I.V.	I.V.	I.V.	I.V.	S.H.	S.H.	S.H.
Determinação do tipo de distribuição de probabilidade comportamental dos dados para cada fator de competitividade e risco.								
Geração de amostras (números aleatórios, conforme os parâmetros de cada fator de competitividade e risco) e produção de estatísticas	<b>Simulação: método de Monte Carlo (Risk Simulator)</b>							
Probabilidade de ocorrência das variáveis dos fatores de competitividade e risco (nível de competitividade e risco)	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>
Resultantes <b>PN<sub>FCRDCM</sub></b> e <b>PN<sub>FCRDA</sub></b> Classificação Preliminar	$= [((P_{VPD} + P_{QIL} + P_{EMO} + P_{IER} + P_{EPM})/5) \times 0,6 + ((P_{PPCS} + P_{PPEG} + P_{PQLG})/3) \times 0,4]$							
Grau de Competitividade e Risco (GCR, %)	$= \text{Coeficiente de determinação} = R^2 \text{ (coeficiente de correlação)}^2$ $= \text{RQUAD} (PN_{FCRDCM}, PN_{FCRDA})$							
Nível de Competitividade X Risco (CV, %)	Coordenadas Portfólio de Depósitos de Classe Mundial : [ PN <sub>FCRDCM</sub> ; DPN <sub>FCRDCM</sub> / PN <sub>FCRDCM</sub> ] Depósito em Análise : [ PN <sub>FCRDA</sub> ; DPN <sub>FCRDA</sub> / PN <sub>FCRDA</sub> ]							
<b>I<sub>CRM-TR</sub></b> Índice de Competitividade e Risco na Mineração de Terras Raras $I_{CRM-TR} = ((PN_{FCRDA} + GCR) / 2) - CV$	Classificação / Ranking						100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0	
Fatores e Variáveis Críticos de Competitividade e Risco - FVCCR  $FVCCR = (PN_{FCRDA} - PN_{FCRDPCM})$	Análise Gráfica: Graphic View (GV, %): FVCCR							

Fonte: Elaboração própria, 2017.

#### 4.7 Resultados esperados

O modelo (MCRM-TR) permite gerar, pelo menos, cinco resultados comparativos, conforme listado a seguir:

a) determinação do nível médio probabilístico dos fatores de competitividade e risco dos depósitos ( $PN_{FCRPDCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ ), ou seja, a competitividade relativa em relação ao *PDCM/benchmark* dos depósitos, sem levar em conta as incertezas (produzindo uma classificação inicial/preliminar: competitividade acima do PDCM, competitividade em linha com o PDCM e competitividade abaixo do PDCM);

b) determinação da intensidade ou grau da competitividade e risco (GCR) em relação ao *PDCM/benchmark* dos depósitos, isto é, o grau de associação entre os fatores pertencentes aos depósitos do *PDCM/benchmark* e DA;

c) visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco (coeficiente de variação) das respectivas resultantes  $PN_{FCRPDCM}$  (dos depósitos do PDCM) e  $PN_{FCRDA}$  (depósitos em análise) e o coeficiente de variação CV (risco);

d) classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GCR e CV), gerando um índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ ) além de uma classificação final com base neste índice;

e) identificação por análise gráfica dos fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR) dos depósitos em análise, tendo como referência o  $PN_{FCRPDCM} = \text{PDCM}/\text{benchmark}$  dos depósitos/projetos do setor de TR em desenvolvimento.

Mais detalhes sobre os resultados do MCRM-TR podem ser obtidos na demonstração realizada no Apêndice B. Além dos cinco resultados principais, outras análises e conclusões podem ser feitas adicionalmente por meio de uma leitura mais detalhada do modelo MCRM-TR.



## 5 APLICAÇÃO E TESTE DO MODELO

Após tratamento do banco de dados dos depósitos/projetos de terras-raras, iniciando pela etapa de triagem inicial, onde são selecionados os depósitos/projetos com recursos ou reservas formalmente definidos, cujas informações, tenham sido publicadas no formato de relatório técnico de acordo com as diretrizes de uma das certificações ou correspondentes aos códigos: NI 43-101, o Código JORC ou o Código SAMREC (descritos nos subitens 4.1 e 4.2), foi alimentada a planilha de resultados (em *software* Microsoft Excel versão 2016) com as informações do PDCM contendo os quatro depósitos/projetos selecionados.

Foram escolhidos oito depósitos/projetos localizados em diferentes regiões do mundo para teste do modelo. Eles foram denominados de D1-TM, D2-TM, D3-TM, D4-TM, D5-TM, D6-TM, D7-TM e D8-TM.

Também foram selecionados cinco depósitos/projetos para estudo de caso Brasil. Essa escolha foi feita tomando-se como base e subsídio os trabalhos de Takehara (2015) e Petter, R(2015), que consideram em seus trabalhos os depósitos/projetos com maior potencial em 2015 (o ano de 2015 foi tomado como referência para os dados trabalhados no MCRM-TR) para o aproveitamento dos óxidos de terras-raras no Brasil. Os cinco depósitos/projetos brasileiros escolhidos para o teste do modelo foram denominados D1-BR, D2-BR, D3-BR, D4-BR, D5-BR.

Conforme citado anteriormente, os quatro depósitos de terras-raras selecionados no ano-base 2015 e suas respectivas jurisdições/países de localização, a partir da aplicação das premissas de seleção do PDCM, foram os seguintes:

- Projeto 1: Depósito Bear Lodge – Wyoming – Estados Unidos (EUA);
- Projeto 2: Depósito Mount Weld CLD – Western Austrália (AUS);
- Projeto 3: Depósito Nechalacho Basal – Northwest Territories (CAN);
- Projeto 4: Depósito Nolans – Northern Territory – Austrália (AUS);

Vale destacar que algumas variáveis utilizadas nos procedimentos de seleção dos depósitos do PDCM são dinâmicas; conseqüentemente, os resultados na seleção podem variar também ao longo do tempo. Projetos em operação na China não foram selecionados por não atenderem a um ou mais requisitos das premissas do modelo MCRM-TR, por exemplo: o projeto Bayan Obo (Mongólia Interior, China)

não tem o minério de terras-raras como produto principal, e sim como subproduto da produção proveniente da mina de ferro; além disso, não há dados técnicos e econômicos divulgados sobre o aproveitamento das terras-raras no local.

Os oito depósitos escolhidos, localizados em diferentes regiões do mundo, para teste do modelo foram:

Depósitos/projetos: teste do modelo – TM

- Projeto 1 (D1): Mountain Pass – Estados Unidos (EUA) – América do Norte;
- Projeto 2 (D2): Mount Weld CLD – Austrália (AUS) – Oceania;
- Projeto 3 (D3): Ashram Main – Canadá (CAN) – América do Norte;
- Projeto 4 (D4): Dubbo Zirconia – Austrália (AUS) – Oceania;
- Projeto 5 (D5): Lofdal – Namíbia (NAM) – África Austral;
- Projeto 6 (D6): Norra Kärr – Suécia (SWE) – Europa Setentrional;
- Projeto 7 (D7): Ngulla – Tanzânia (TZA) – África Oriental;
- Projeto 8 (D8): Zandkopsdrift (JV) – África do Sul (ZAF) – Extremo Sul da África.

Como base e subsídio nos trabalhos de Takehara (2015) e Petter, R(2015), os depósitos selecionados para simulação e estudo de caso Brasil foram:

Depósitos/projetos: estudo de caso Brasil – BR

- Projeto 1 (D1): Serra Verde – MSV;
- Projeto 2 (D2): Araxá – CBMM;
- Projeto 3 (D3): Catalão 2 – VALE;
- Projeto 4 (D4): Araxá – MBAC/ITAFOS;
- Projeto 5 (D5): Morro do Ferro.

## **5.1 Análise e discussão dos resultados**

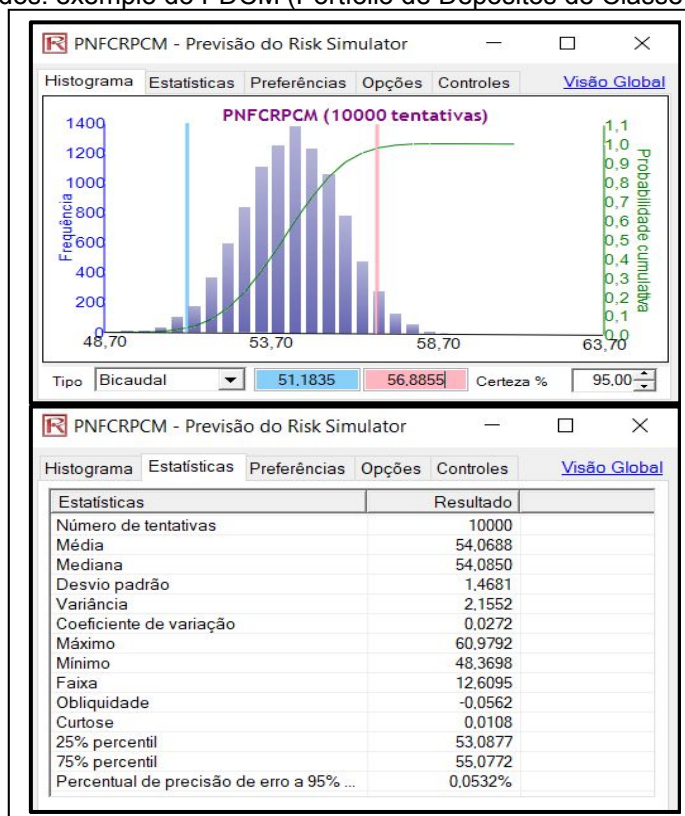
Os resultados da simulação/previsão no modelo MCRM-TR serão analisados e interpretados de acordo com os cinco principais resultados esperados (conforme explanado no capítulo 4): classificação relativa inicial/preliminar por meio da determinação do nível médio probabilístico dos fatores de competitividade e risco dos depósitos ( $PN_{FCRPDCM/benchmark}$  e  $PN_{FCRDA}$ ); grau da competitividade e risco (GCR) em relação ao  $PDCM/benchmark$  dos depósitos; visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco das respectivas resultantes  $PN_{FCRPDCM}$  e

$PN_{FCRDA}$ ; classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GCR e o CV) e gerando o índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ ); e, por último, a identificação por análise gráfica dos fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR), cuja relação é obtida subtraindo-se as resultantes  $PN_{FCRDA}$  de depósito em análise e o  $PN_{FCRDPCM} = PDCM/benchmark$  (referência).

### 5.1.1 Análise dos depósitos/projetos: teste do modelo (TM) e estudo e caso Brasil (BR)

As estatísticas obtidas na simulação/previsão (Figura 20) são utilizadas para alimentar a planilha de resultados.

Figura 20 – Histograma e estatísticas geradas após execução de Simulação/previsão nos depósitos analisados: exemplo do PDCM (Portfólio de Depósitos de Classe Mundial).



Fonte: Simulação no Software *Risk Simulator* (© 2005-2016 *Real Options Valuation, Inc.*)

Nota: para todos os depósitos, os dados dos resultados utilizados para análise e interpretação na planilha de resultados são: média e coeficiente de variação (CV%). O intervalo de confiança obtido na simulação/previsão do Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM), por meio da resultante  $PN_{FCRDPCM}$ , será utilizado como referência para a classificação relativa inicial/preliminar dos depósitos, conforme as etapas explanadas a seguir.

É importante frisar que, devido à não disponibilidade pública de dados sobre teores de elementos radioativos no depósito/projeto da Mineração Serra Verde – projeto 1 (D1) –, e para efeito de conclusão deste trabalho de tese, foi dado um valor de referência tomando como base os depósitos de terras-raras localizados no sul da China, que, segundo informações presentes na *home page* da própria Mineração Serra Verde, possuem grandes semelhanças geoquímicas com aqueles depósitos (SERRA VERDE, 2017). Também há informações na *home page* da companhia de que as concentrações de urânio e tório são baixas o suficiente para não oferecer problemas com a armazenagem dos resíduos.

Os recursos de terras-raras em argilas, encontrados principalmente no Sul da China, contêm quantidades muito pequenas de urânio e tório, cerca de 20–30 ppm de  $\text{ThO}_2$  e  $\text{U}_3\text{O}_8$  (WANG, 2006; WANG; TANG, 2007). Esses recursos de terras-raras são ricos em ítrio e outras terras-raras pesadas e críticas, o que se assemelha ao depósito da Mineração Serra Verde. Uma vez que uma das premissas (premissa *d*) do modelo MCRM – TR é a análise de projetos/depósitos nos quais as terras-raras sejam principal produto, o depósito/projeto CBMM – projeto 2 (D2) – não poderia ser analisado. No entanto, para efeito de conclusão deste trabalho de tese, o projeto da CBMM também foi analisado. As análises e os resultados propriamente ditos dos oito depósitos/projetos de teste do modelo e dos cinco depósitos de estudo de caso Brasil são mostrados a seguir: no quadro 12 (classificação relativa inicial/preliminar); no quadro 13 e nas figuras de 28 a 40 (grau da competitividade e risco); na figura 41 (visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco); no quadro 14 (classificação relativa final dos depósitos em análise e o Índice de Competitividade e Risco na Mineração de Terras-raras:  $I_{\text{CRM-TR}}$ ). Por conveniência, foram incluídas no Apêndice C, nas figuras de 1 até 17, as visualizações gráficas dos fatores e variáveis críticos de competitividade e risco (FVCCR) referentes ao último dos cinco resultados mínimo produzidos pelo modelo MCRM-TR (as Figuras 42 e 43 mostram apenas os resultados de um dos depósitos).

### **5.1.2 Discussão dos resultados: teste do modelo (TM) e estudo e caso Brasil (BR)**

Tendo em vista os cinco principais resultados do modelo (MCRM-TR), tem-se:

Quadro 12 – Classificação relativa inicial/preliminar.

Modelo de Competitividade e Risco na Mineração - TR (MCRM-TR)						
Probabilidade do Nível médio dos Fatores de Competitividade e Risco dos Depósitos (PNFCRD)						
PN <sub>FCRD</sub> = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco dos depósitos do portfólio de classe mundial.						
PN <sub>FCRDA</sub> = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise						
PN <sub>FCRDPCM</sub>	PN <sub>FCRDPCM</sub>	54,06	PDCM	Intervalo de Confiança (95%):		CV (%)
				Limites PDCM	Inferior	Superior
					51,18	56,88
						2,72
Depósitos em Análise: Teste do modelo - TM						
D1-TM	PN <sub>FCRDA</sub>	39,56				CV (%)
						7,15
Classificação	Descrição					
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR					
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR					
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR					
D2-TM	PN <sub>FCRDA</sub>	55,82				CV (%)
						4,62
Classificação	Descrição					
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR					
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR					
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR					
D3-TM	PN <sub>FCRDA</sub>	58,80				CV (%)
						3,33
Classificação	Descrição					
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR					
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR					
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR					

Quadro 12 (continuação) – Classificação relativa inicial/preliminar.

<b>D4-TM</b>	<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>51,41</b>		CV (%)
				3,70
<b>Classificação</b>	<b>Descrição</b>			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D5-TM</b>	<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>42,13</b>		CV (%)
				8,38
<b>Classificação</b>	<b>Descrição</b>			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D6-TM</b>	<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>63,38</b>		CV (%)
				3,87
<b>Classificação</b>	<b>Descrição</b>			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D7-TM</b>	<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>39,56</b>		CV (%)
				8,28
<b>Classificação</b>	<b>Descrição</b>			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			

Quadro 12 (continuação) – Classificação relativa inicial/preliminar.

<b>D8-TM</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>47,92</b>		CV (%)
					4,82
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>Depósitos em Análise: Estudo de caso Brasil</b>					
<b>D1-BR</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>47,73</b>		CV (%)
					5,02
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D2-BR</b>					
<b>D2-BR</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>44,30</b>		CV (%)
					3,77
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D3-BR</b>					
<b>D3-BR</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>46,22</b>		CV (%)
					4,17
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			

Quadro 12 (continuação) – Classificação relativa inicial/preliminar.

<b>D4-BR</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>42,89</b>		CV (%)
			42,89		6,37
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			
<b>D5-BR</b>		<b>PN<sub>FCRDA</sub></b>	<b>44,38</b>		CV (%)
			44,38		5,95
<b>Classificação</b>		<b>Descrição</b>			
+ PDCM		Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos/depósitos de TR			
≈ PDCM		Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos/depósitos de TR			
- PDCM		Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos/depósitos de TR			

Fonte: Elaboração própria.



**a) Primeiro resultado (não leva em conta as incertezas: GCR e CV)**

O Quadro 12 da planilha de resultados, da classificação relativa/preliminar (que toma como referência o PDCM,  $PN_{FCRDPCM} = 54,06$  e seu intervalo de confiança), mostra que os depósitos usados para teste do modelo (TM) D1-TM, D5-TM, D7-TM e D8-TM apresentaram nível de competitividade abaixo do PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR. Enquanto isso, os depósitos D2-TM e D4-TM apresentaram nível em linha com o PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR em desenvolvimento. Por fim, os depósitos D3-TM ( $PN_{FCRDA} = 58,80$ ) e D6-TM ( $PN_{FCRDA} = 63,38$ ) foram os que obtiveram melhores resultados entre os depósitos/projetos usados como teste, tendo seu nível de competitividade classificada, mesmo que preliminarmente, acima do PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade acima da média dos depósitos/projetos de TR.

No caso dos depósitos usados para estudo de caso Brasil (BR), todos os depósitos/projetos de D1-BR a D5-BR apresentaram classificação de competitividade inicial abaixo do PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR. Analisando preliminarmente os resultados dos cinco depósitos/projetos brasileiros, o D1-BR (47,73) e o D3-BR (46,22) foram os que se classificaram melhor.

Quadro 13 – Grau da competitividade e risco - GCR (em relação ao PDCM/benchmark).

Grau de Competitividade e Risco - GCR									
Depósitos em Análise: <b>Teste do modelo</b>									
<b>D1-TM</b>									
	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>89,43</b>
<b>PN<sub>FCRDA D1</sub></b>	79,65	6,14	0,00	5,91	2,04	48,30	75,44	93,14	
<b>D2-TM</b>									
	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>99,57</b>
<b>PN<sub>FCRDA D2</sub></b>	84,67	25,24	8,23	1,93	7,32	81,61	80,34	88,00	
<b>D3-TM</b>									
	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>89,57</b>
<b>PN<sub>FCRDA D3</sub></b>	82,90	42,15	42,50	2,87	6,56	80,60	77,97	90,00	
<b>D4-TM</b>									
	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>67,83</b>
<b>PN<sub>FCRDA D4</sub></b>	73,54	14,91	63,14	2,63	5,41	54,31	80,34	88,00	
<b>D5-TM</b>									
	<b>P<sub>VPD</sub></b>	<b>P<sub>QIL</sub></b>	<b>P<sub>EMO</sub></b>	<b>P<sub>IER</sub></b>	<b>P<sub>EPM</sub></b>	<b>P<sub>PPCS</sub></b>	<b>P<sub>PPEG</sub></b>	<b>P<sub>PQLG</sub></b>	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>76,13</b>
<b>PN<sub>FCRDA D5</sub></b>	65,70	47,43	2,08	2,99	3,67	68,85	61,85	46,50	

Quadro 13 – (continuação) Grau da competitividade e risco - GCR (em relação ao PDCM/benchmark).

Grau de Competitividade e Risco - GCR									
			Depósitos em Análise: <b>Teste do modelo</b>						
<b>D6-TM</b>									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>67,18</b>
<b>PN<sub>FCRDA D6</sub></b>	68,53	42,16	26,99	61,90	7,96	84,02	71,96	98,32	
<b>D7-TM</b>									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>70,63</b>
<b>PN<sub>FCRDA D7</sub></b>	83,66	15,82	4,49	18,84	1,47	21,82	58,46	62,20	
<b>D8-TM</b>									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>86,36</b>
<b>PN<sub>FCRDA D8</sub></b>	81,51	26,69	11,40	5,78	7,71	37,35	61,90	87,50	

Quadro 13 – (continuação) Grau da competitividade e risco - GCR (em relação ao PDCM/benchmark).

Grau de Competitividade e Risco - GCR									
Depósitos em Análise: <b>Estudo de caso Brasil</b>									
D1-BR									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>71,39</b>
<b>PN<sub>FCRDA D1</sub></b>	70,94	32,90	34,86	25,97	9,16	35,85	56,54	63,48	
D2-BR									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>61,13</b>
<b>N<sub>FCRDA D2</sub></b>	75,28	61,61	16,25	1,18	1,55	35,85	56,54	63,48	
D3-BR									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>58,62</b>
<b>PN<sub>FCRDA D3</sub></b>	89,93	62,07	12,16	10,00	4,75	35,85	56,54	63,48	
D4-BR									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>84,42</b>
<b>PN<sub>FCRDA D4</sub></b>	82,25	23,57	15,45	1,00	2,53	35,85	56,54	63,48	
D5-BR									
	P <sub>VPD</sub>	P <sub>QIL</sub>	P <sub>EMO</sub>	P <sub>IER</sub>	P <sub>EPM</sub>	P <sub>PPCS</sub>	P <sub>PPEG</sub>	P <sub>PQLG</sub>	GCR-TR (R <sup>2</sup> ) %
<b>PN<sub>FCRDPCM</sub></b>	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	<b>69,62</b>
<b>PN<sub>FCRDA D5</sub></b>	77,34	29,76	40,44	0,12	7,83	35,85	56,54	63,48	

Fonte: Elaboração própria.

As Figuras 28 a 35 trazem a visualização gráfica/graphic view (GV) dos depósitos em análise (Teste do modelo – TM).

Figura 28 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 1 (TM).

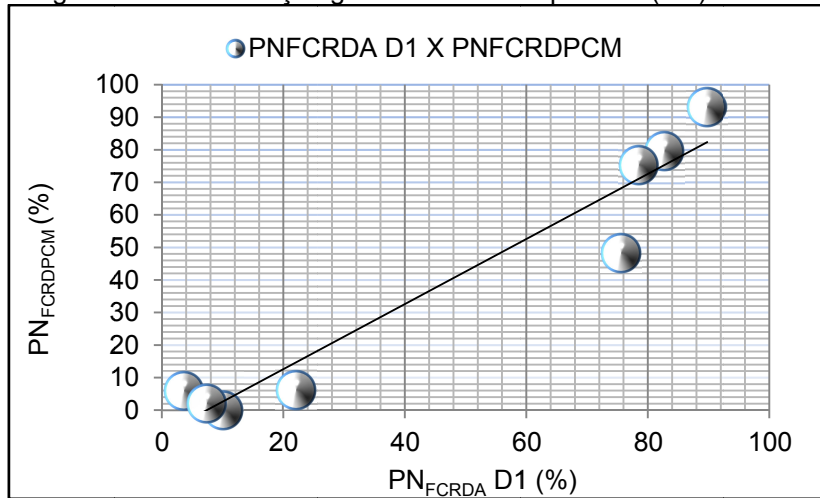


Figura 29 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 2 (TM).

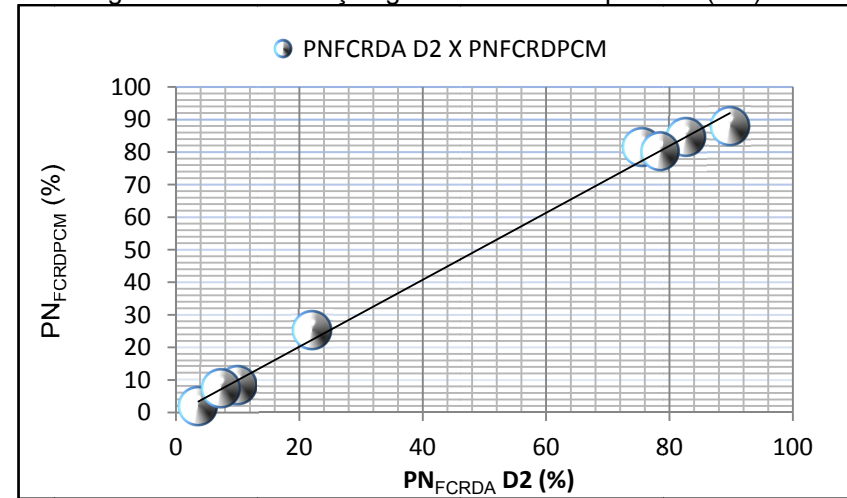


Figura 30 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 3 (TM).

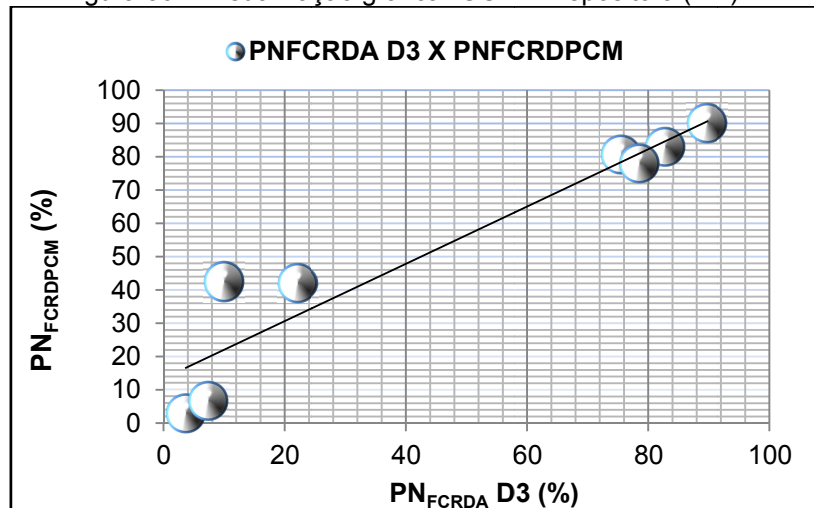


Figura 21 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 4 (TM).

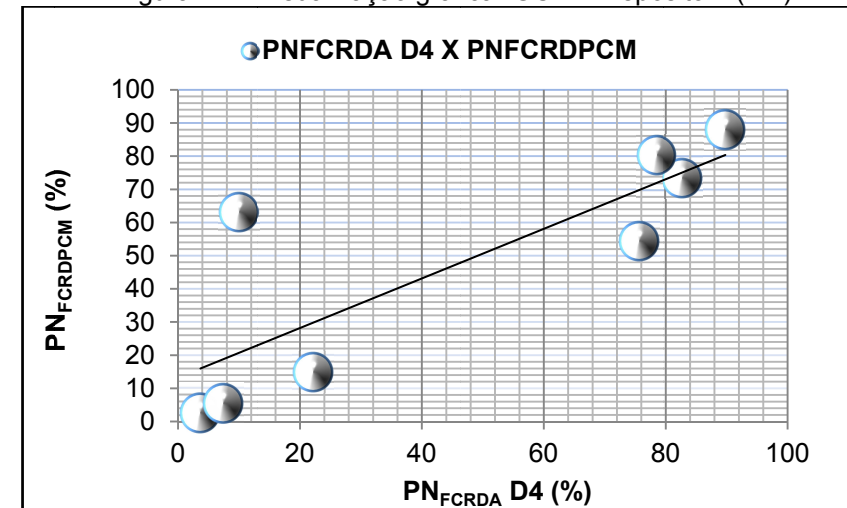


Figura 22 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).

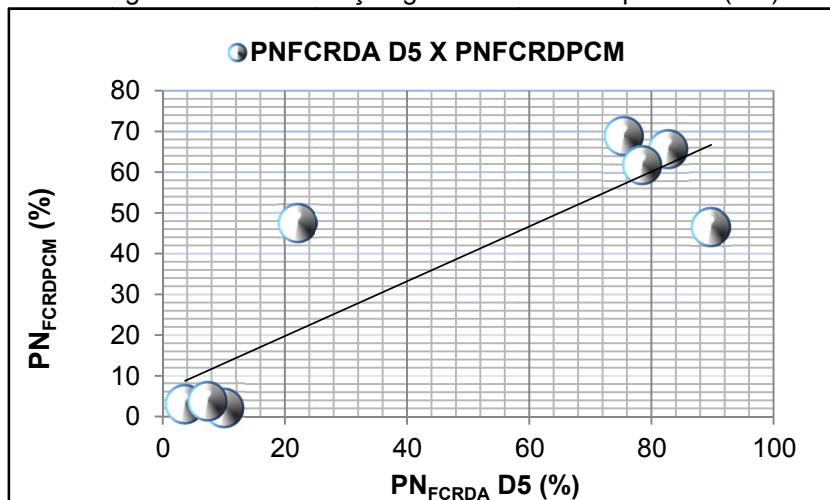


Figura 23 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 6 (TM).

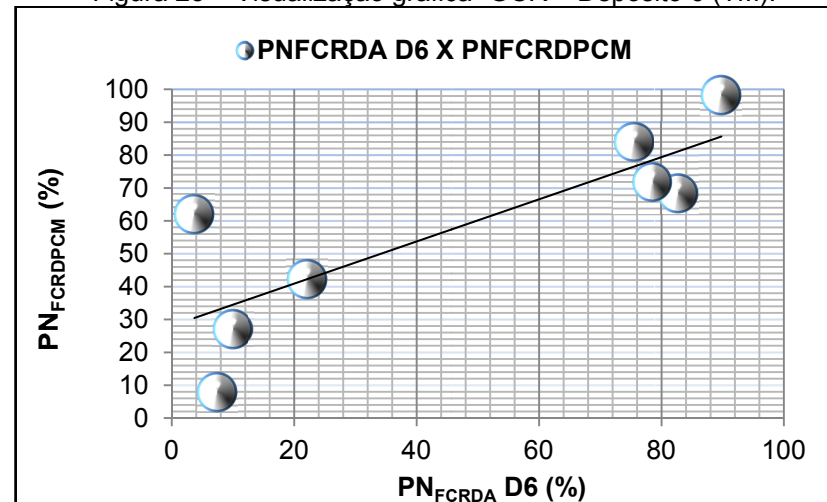


Figura 34 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).

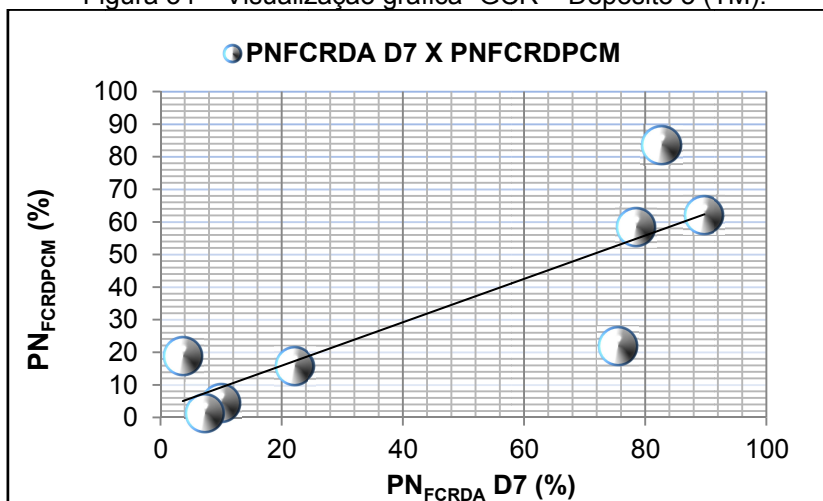
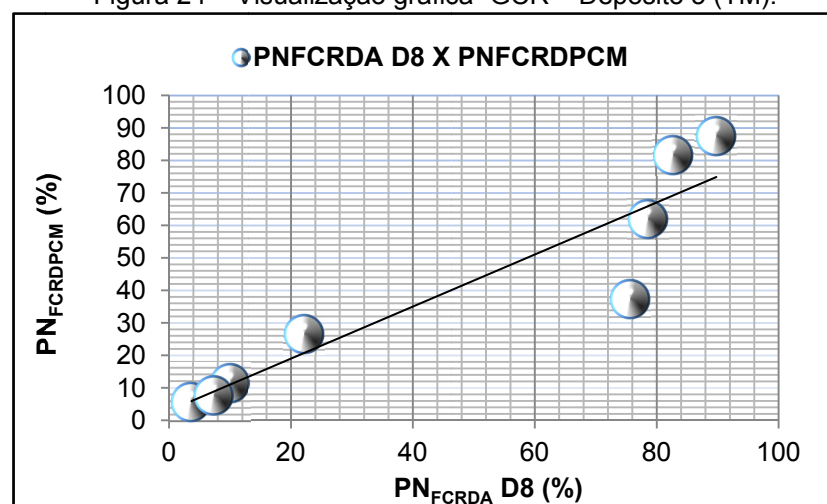


Figura 24 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (TM).



Fonte: Elaboração própria.

As Figuras 36 a 40 trazem a visualização gráfica/graphic view (GV) dos depósitos em análise (Estudo de caso Brasil).

Figura 25 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 1 (BR).

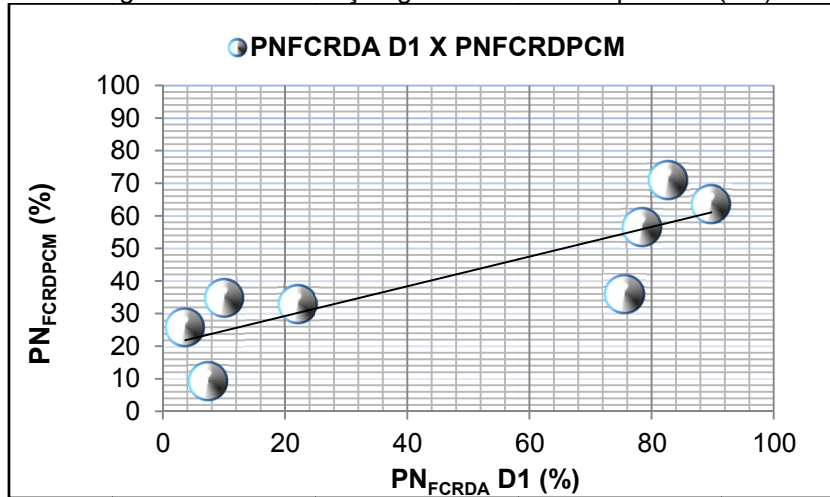


Figura 26 – Visualização gráfica - GCR – Depósito 2 (BR).

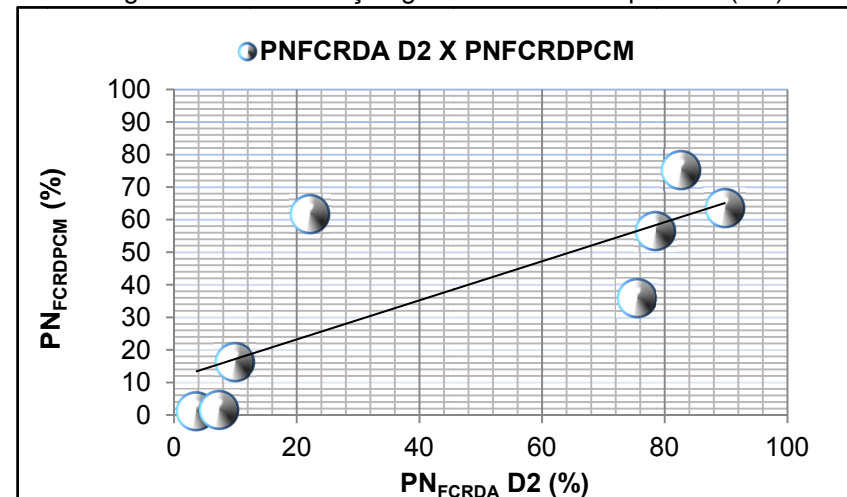


Figura 27 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 3 (BR).

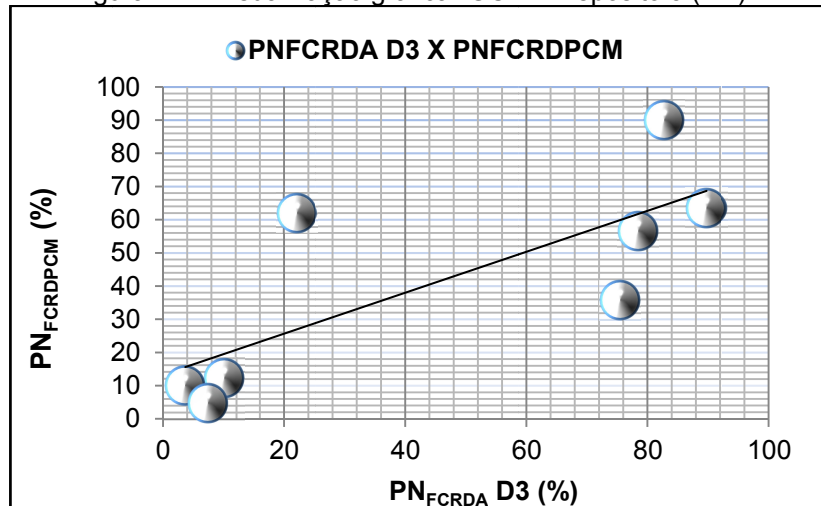


Figura 39 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 4 (BR).

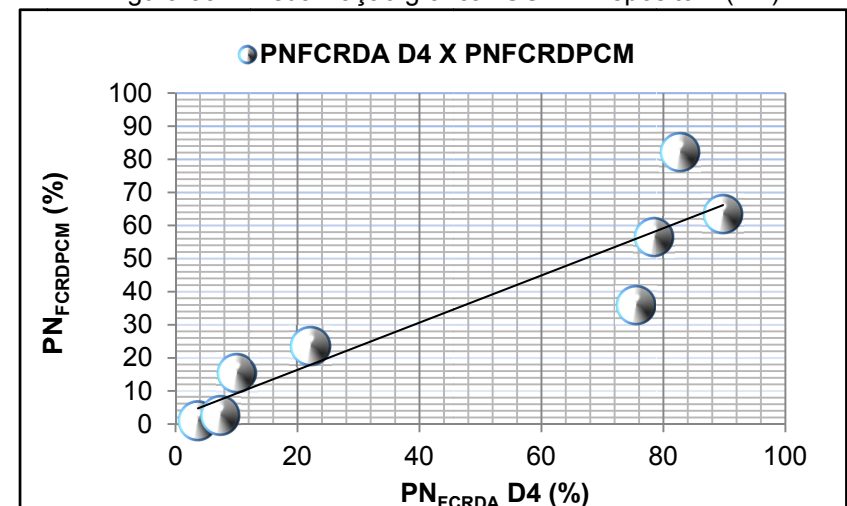
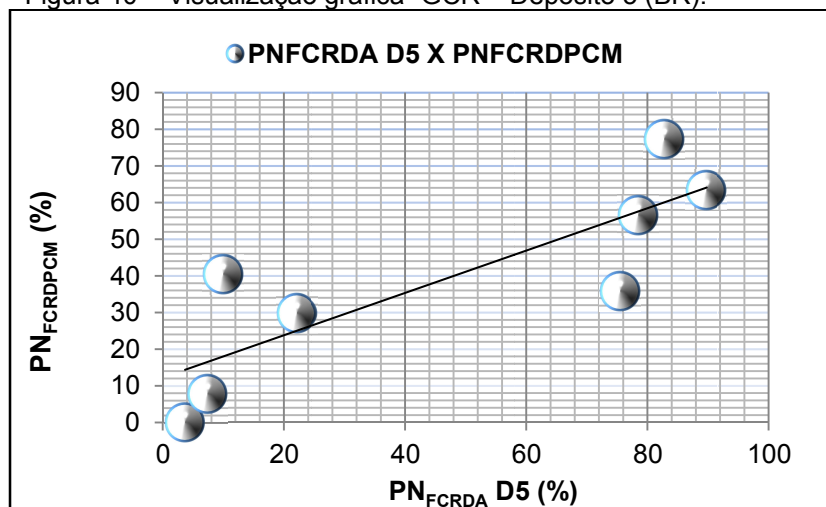


Figura 40 – Visualização gráfica -GCR – Depósito 5 (BR).



Fonte: Elaboração própria.

**b) Segundo resultado: o grau da competitividade e risco (GCR) em relação ao PDCM/benchmark**

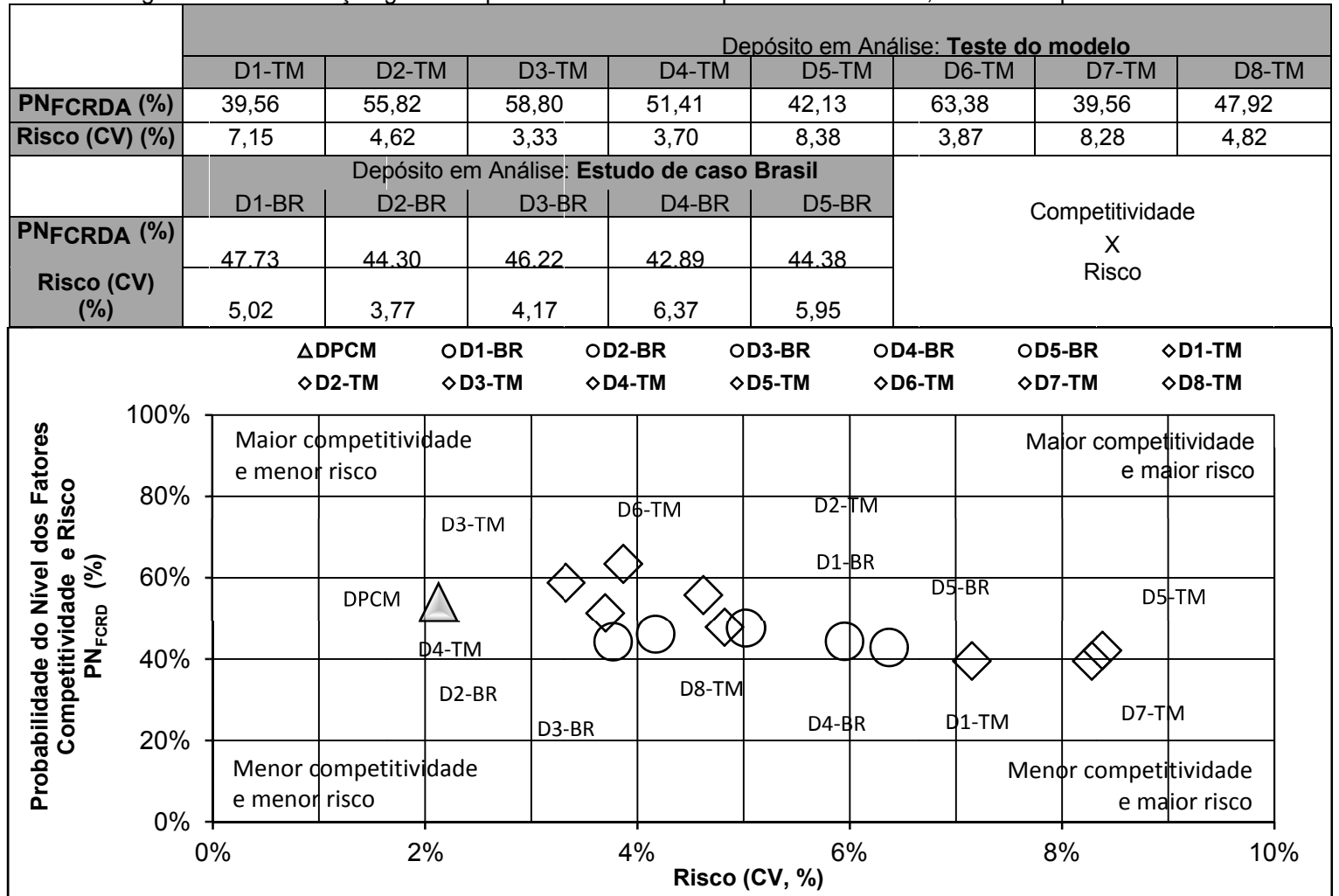
De acordo com o Quadro 13 e as Figuras 36–40, os melhores resultados, quanto ao grau de associação entre os fatores de competitividade e risco dos depósitos em análise e o PDCM, foram apresentados pelos depósitos/projetos (nos depósitos teste do modelo) D2-TM (99,57), D1-TM (93,43) e D3-TM (89,57). No estudo de caso Brasil, os melhores desempenhos nesse segundo resultado foram obtidos pelos depósitos/projetos D4-BR (84,42) e D1-BR (71,39).

Até esta etapa (segundo resultado), ainda não é possível determinar com precisão os depósitos/projetos que apresentam as condições ideais, ou seja, maior competitividade e menor risco.

Na Figura 41, está uma visualização gráfica espacial da relação competitividade X risco das respectivas resultantes ( $PN_{FCRPDCM}$ ,  $PN_{FCRDA}$  e o CV).



Figura 28 – Visualização gráfica espacial do nível de Competitividade X Risco, todos os depósitos.



Nota: DPCM = Portfólio de depósitos de classe mundial; TM = depósitos em análise (teste do modelo); BR = depósitos em análise (estudo de caso Brasil).

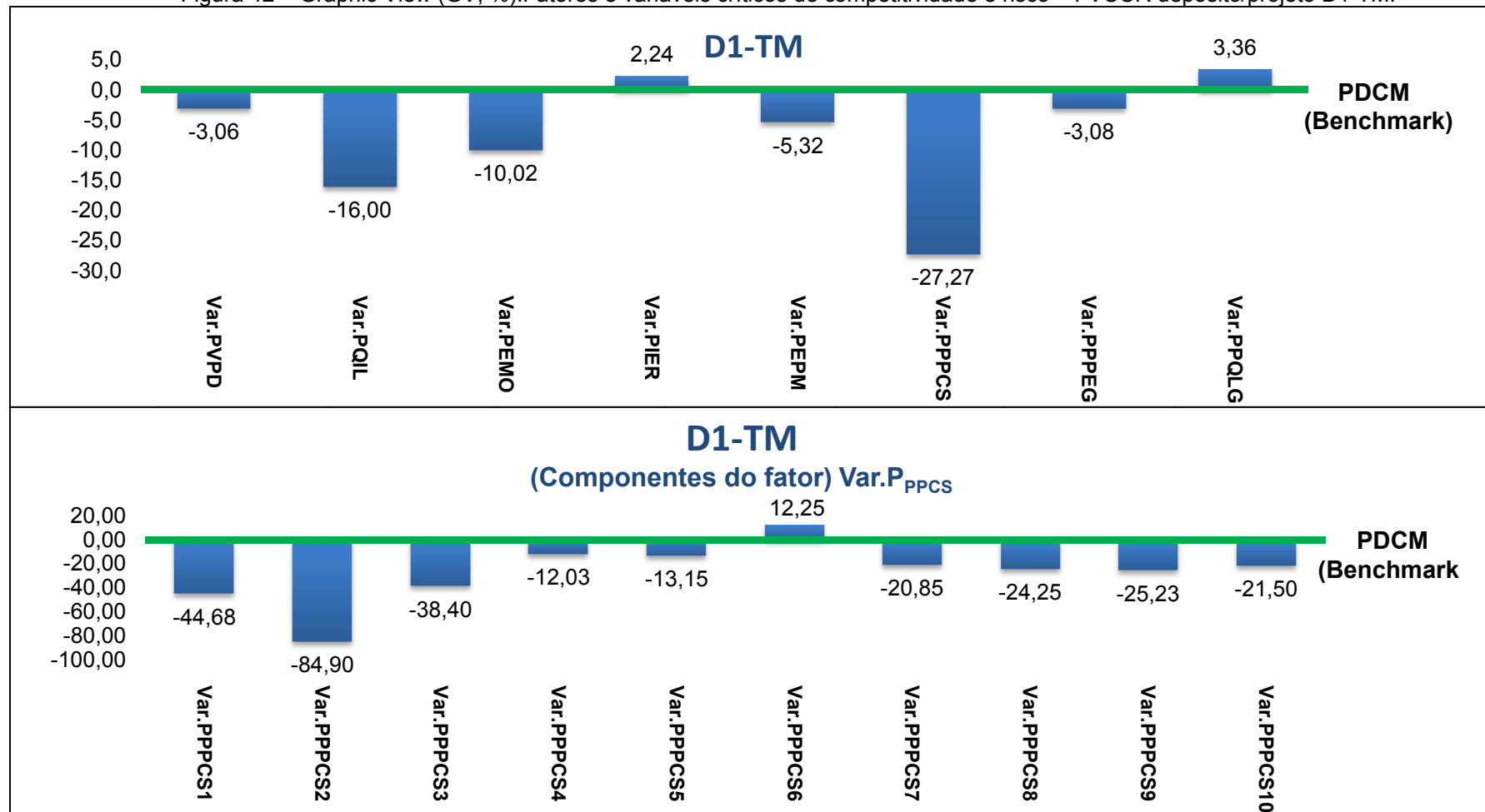
Quadro 9 – Classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GCR e o CV) e o ranking de competitividade e risco, por meio do  $I_{CRM-TR}$ .

Ranking de Competitividade e Risco, por meio do $I_{CRM-TR}$							
Índice de Competitividade e Risco na Mineração de Terras-raras ( $I_{CRM-TR} = (PN_{FCRDA} + GCR) / 2 - CV$ )							
$PN_{FCRDA}$ = Probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise $GCR$ = Grau de competitividade e Risco $CV$ = Coeficiente de Variação do $PN_{FCRDA}$ = Risco							
Portfólio de Depósitos de Classe Mundial - PDCM							
Projetos	$PN_{FCRDA}$	GCR (%)	CV (%)	$I_{CRM-TR}$ (%)	Ranking de Competitividade e Risco dos Depósitos/Projetos de TR ( $I_{CRM-TR}$ )		
<b>Depósitos em Análise: Teste do modelo</b>							
D1-TM	39,56	93,43	7,15	59,35	1°	D2-TM	Teste do modelo
D2-TM	55,82	99,57	4,62	73,08	2°	D8-TM	Teste do modelo
D3-TM	58,80	58,62	3,33	55,38	3°	D1-TM	Teste do modelo
D4-TM	51,41	67,83	3,70	55,92	4°	D6-TM	Teste do modelo
D5-TM	42,13	76,13	8,38	50,75	5°	D4-BR	Estudo de caso Brasil
D6-TM	63,38	61,13	3,87	58,39	6°	D4-TM	Teste do modelo
D7-TM	39,56	70,63	8,28	46,82	7°	D3-TM	Teste do modelo
D8-TM	47,92	86,36	4,82	62,32	8°	D1-BR	Estudo de caso Brasil
<b>Depósitos em Análise: Estudo de caso Brasil</b>				$I_{CRM-TR}$	9°	D5-BR	Estudo de caso Brasil
D1-BR	47,73	71,39	5,02	54,54	10°	D5-TM	Teste do modelo
D2-BR	44,30	61,13	3,77	48,95	11°	D2-BR	Estudo de caso Brasil
D3-BR	46,22	58,62	4,17	48,25	12°	D3-BR	Estudo de caso Brasil
D4-BR	42,89	84,42	6,37	57,28	13°	D7-TM	Teste do modelo
D5-BR	44,38	69,62	5,95	51,05	.	.	.
					.	.	.

Fonte: Elaboração própria.

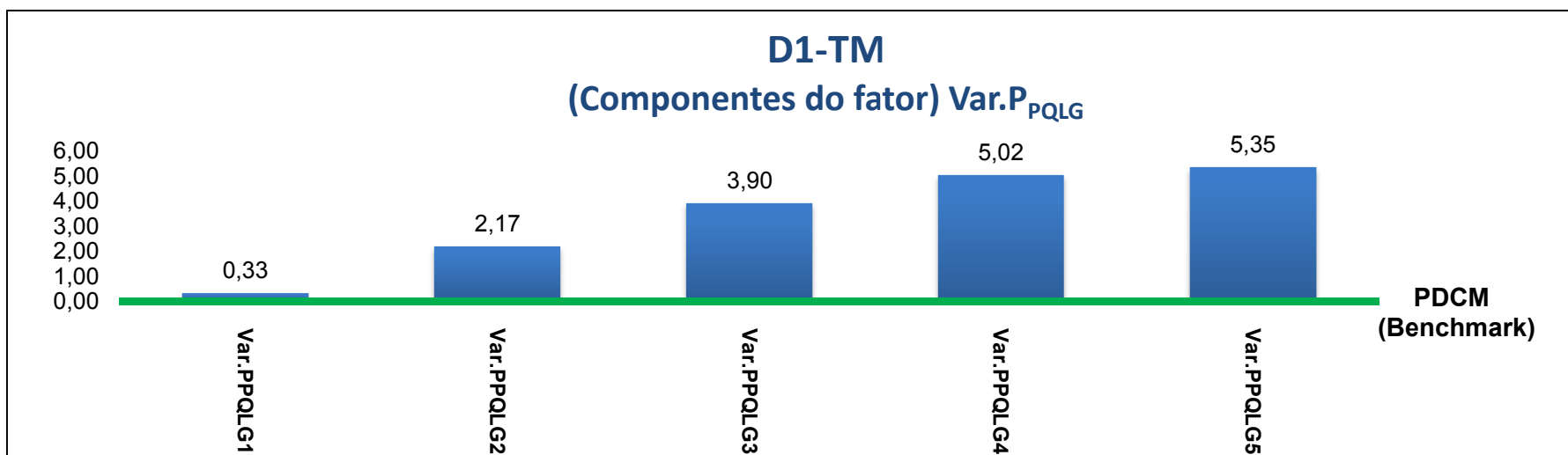
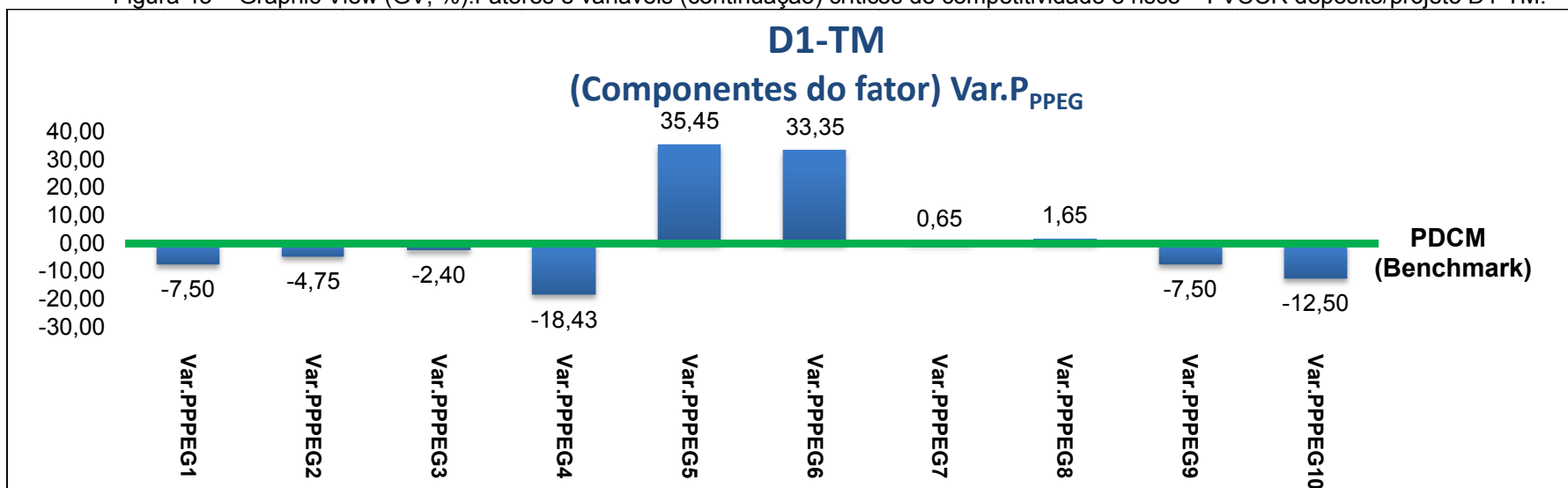
As figuras 42 e 43 mostram os resultados de visualização gráfica dos fatores e variáveis críticas de competitividade e risco (FVCCR) apenas do depósito D1-TM (Teste do modelo – TM). No Anexo D, encontram-se os resultados de todos os depósitos.

Figura 42 – Graphic View (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM.



Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - Teste do modelo (TM).

Figura 43 – Graphic View (GV, %):Fatores e variáveis (continuação) críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM.



Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - Teste do modelo (TM).

**c) Terceiro resultado: visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco das respectivas resultantes ( $PN_{FCRDPCM}$ ;  $PN_{FCRDA}$  e o CV)**

No terceiro resultado, de acordo com a Figura 41, é possível visualizar os depósitos/projetos que estão localizados na região gráfica de maior favorabilidade (condições ideais: maior competitividade e menor risco): os depósitos/projetos D3-TM, D4-TM e D6-TM (de teste do modelo) e os depósitos D2-BR e D3-BR (do estudo de caso Brasil). Foram o D3-TM (teste do modelo) e o D2-BR (estudo de caso Brasil) os que apresentaram melhores condições de favorabilidade no desenvolvimento de seus depósitos/projetos, respectivamente. Entre todos os depósitos/projetos analisados, o D3-TM é o que mais se aproximou do PDCM (*benchmark*) e da região de maior favorabilidade.

**d) Quarto resultado: classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GCR e o CV) e gerando o índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ )**

De acordo com o Quadro 14, levando-se em consideração todos os depósitos/projetos analisados, o melhor desempenho, isto é, a melhor pontuação no índice  $I_{CRM-TR}$  foi obtida pelo depósito/projeto D2-TM (teste do modelo), enquanto o pior resultado ficou com o D7-TM (também teste do modelo). Entre os depósitos brasileiros (no estudo de caso Brasil), os que obtiveram melhores e piores resultados foram D4-BR e D3-BR, respectivamente.

**e) Quinto resultado: identificação por análise gráfica dos fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR)**

Neste resultado, o PDCM é tomado como base de referência, ou seja, o  $PN_{FCRDPCM} = PDCM/benchmark$ , isto é,  $FVCCR = PN_{FCRDA} - PN_{FCRDPCM}$ , em que  $PN_{FCRDPCM} = base = 0,0\%$ . São considerados fatores e/ou variáveis relativamente críticas as resultantes que apresentarem valores negativos –  $FVCCR < 0,0\%$  e fora do intervalo de confiança (IC) do  $PN_{FCRDPCM}$ . Do contrário, os fatores e/ou variáveis não serão considerados críticos – resultantes FVCCR com valores iguais ou superiores a  $0,0\%$ , e/ou dentro do intervalo de confiança (IC) do  $PN_{FCRDPCM} = PDCM/benchmark$ , que na simulação ficou em (IC) =  $\pm 2,86$ .

De acordo com os resultados dos *graphic views* (resultados, Figuras 42 e 43, os demais resultados encontram-se no Apêndice C, da figura 1 até 17), os fatores e as variáveis relativamente críticos nos depósitos/projetos (os oito usados para teste

do modelo -TM e os 5 do estudo de caso Brasil-BR), com o intuito de tornar os respectivos projetos/depósitos analisados mais competitivos, são:

**D1-TM:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>EMO</sub>, Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub> até Var.P<sub>PPCS10</sub>, todos críticos), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG1</sub>, Var.P<sub>PPEG2</sub>, Var.P<sub>PPEG4</sub>, Var.P<sub>PPEG9</sub>, Var.P<sub>PPEG10</sub>). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D2-TM:** Var.P<sub>PPCS4</sub>, Var.P<sub>PPEG3</sub>, Var.P<sub>PQLG1</sub>, Var.P<sub>PQLG4</sub>. Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D3-TM:** Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS8</sub> e Var.P<sub>PPCS10</sub>), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG4</sub>, Var.P<sub>PPEG5</sub>, Var.P<sub>PPEG6</sub>, Var.P<sub>PPEG7</sub>), Var.P<sub>PQLG</sub> (Var.P<sub>PQLG2</sub> e Var.P<sub>PQLG5</sub>). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D4-TM:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub>, Var.P<sub>PPCS2</sub>, Var.P<sub>PPCS3</sub>, Var.P<sub>PPCS4</sub>, Var.P<sub>PPCS5</sub>, Var.P<sub>PPCS7</sub> e Var.P<sub>PPCS8</sub>), Var.P<sub>PPEG7</sub>, Var.P<sub>PQLG1</sub>, Var.P<sub>PQLG4</sub>. Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D5-TM:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>EMO</sub>, Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub>, Var.P<sub>PPCS4</sub>, Var.P<sub>PPCS6</sub>, Var.P<sub>PPCS7</sub>, Var.P<sub>PPCS8</sub>, Var.P<sub>PPCS9</sub>, Var.P<sub>PPCS10</sub>), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG1</sub>, Var.P<sub>PPEG2</sub>, Var.P<sub>PPEG3</sub>, Var.P<sub>PPEG5</sub>, Var.P<sub>PPEG7</sub>, Var.P<sub>PPEG8</sub>, Var.P<sub>PPEG9</sub>, Var.P<sub>PPEG10</sub>), Var.P<sub>PQLG</sub> (Var.P<sub>PQLG1</sub> até Var.P<sub>PQLG5</sub>: todos críticos). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D6-TM:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>PPCS1</sub>, Var.P<sub>PPCS2</sub>, Var.P<sub>PPCS3</sub>, Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG3</sub>, Var.P<sub>PPEG4</sub>, Var.P<sub>PPEG6</sub>). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D7-TM:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>EMO</sub>, Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub> até Var.P<sub>PPCS10</sub>, todos críticos), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG1</sub>, Var.P<sub>PPEG2</sub>, Var.P<sub>PPEG5</sub>, Var.P<sub>PPEG6</sub>, Var.P<sub>PPEG7</sub>, Var.P<sub>PPEG8</sub>, Var.P<sub>PPEG9</sub>, Var.P<sub>PPEG10</sub>), Var.P<sub>PQLG</sub> (Var.P<sub>PQLG1</sub> até Var.P<sub>PQLG5</sub>: todos críticos). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D8-TM:** Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub> até Var.P<sub>PPCS10</sub>, todos críticos, exceto a variável Var.P<sub>PPCS5</sub>), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG1</sub>, Var.P<sub>PPEG2</sub>, Var.P<sub>PPEG5</sub>, Var.P<sub>PPEG6</sub>, Var.P<sub>PPEG7</sub>, Var.P<sub>PPEG8</sub>,

Var.P<sub>PPEG9</sub>, Var.P<sub>PPEG10</sub>), Var.P<sub>PQLG</sub> (Var.P<sub>PQLG3</sub>). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D1-BR:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Var.P<sub>PPCS1</sub> até Var.P<sub>PPCS10</sub>, todos críticos), Var.P<sub>PPEG</sub> (Var.P<sub>PPEG1</sub>, Var.P<sub>PPEG2</sub>, Var.P<sub>PPEG5</sub>, Var.P<sub>PPEG6</sub>, Var.P<sub>PPEG7</sub>, Var.P<sub>PPEG8</sub>, Var.P<sub>PPEG9</sub>, Var.P<sub>PPEG10</sub>), Var.P<sub>PQLG</sub> (Var.P<sub>PQLG1</sub> até Var.P<sub>PQLG5</sub>: todos críticos). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D2-BR:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PPEG</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PQLG</sub> (Idem D1-BR). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D3-BR:** Var.P<sub>PPCS</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PPEG</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PQLG</sub> (Idem D1-BR). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D4-BR:** Var.P<sub>EPM</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PPEG</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PQLG</sub> (Idem D1-BR). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

**D5-BR:** Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>IER</sub>, Var.P<sub>PPCS</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PPEG</sub> (Idem D1-BR), Var.P<sub>PQLG</sub> (Idem D1-BR). Sem maiores problemas quanto aos demais fatores.

Neste quinto resultado, entre os oito depósitos/projetos usados para teste do modelo (TM), tanto os fatores técnico-econômicos quanto os político-conjunturais foram relevantes no sentido de reduzir a competitividade dos depósitos/projetos D1-TM, D4-TM, D5-TM, D6-TM e D7-TM. Enquanto isso, nos depósitos/projetos D2-TM, D3-TM e D8-TM a relevância negativa foi apenas um dos fatores político-conjunturais (Var.P<sub>PPCS</sub>, Var.P<sub>PPEG</sub>, Var.P<sub>PQLG</sub>), estando estes bem posicionados quanto aos fatores técnico-econômicos.

Para o estudo de caso Brasil (BR), no que toca aos fatores técnico-econômicos (Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>IER</sub>, Var.P<sub>EMO</sub> e Var.P<sub>EPM</sub>), os melhores resultados foram apresentados pelos depósitos/projetos D1-BR e D3-BR (o D3-BR não apresentou relevância negativa em nenhum desses fatores, enquanto o D1-BR apresentou relevância negativa na variável Var.P<sub>VPD</sub>). A influência negativa sobre D1-BR e D3-BR foi provocada principalmente pelos fatores político-econômicos conjunturais.

O D2-BR merece destaque, pois não poderia fazer parte dos testes por não atender a uma das premissas do modelo (aproveitamento das TR como produto principal), uma vez que nesse projeto o aproveitamento das TR se dá a partir do rejeito a produção de nióbio TR como subproduto; trata-se do projeto da CBMM no Brasil. Isso significa que o projeto possui vantagem em relação aos seus pares, por possuir seus custos de mineração (lavra e tratamento de minério inicial) cobertos pela atividade principal (produção de nióbio). Porém, o projeto foi incluído na análise por estar entre os mais avançados no Brasil no que toca ao aproveitamento de terras-raras. No que toca aos fatores técnico-econômicos, D2-BR apresentou relevância negativa, apenas nos fatores  $Var.P_{VPD}$  e  $Var.P_{EPM}$ . E como era de se esperar, obteve bom resultado nos fatores  $Var.P_{QIL}$  e  $Var.P_{EMO}$ , já que, este projeto possui seus custos de mineração (lavra e tratamento de minério inicial) cobertos pela produção de nióbio (os OTR são aproveitados do rejeito proveniente da produção de nióbio). Todos os projetos/depósitos do estudo de caso Brasil tiveram os fatores técnico-econômicos e político-econômicos, conjunturais e de logística como relevantes no sentido de reduzir a competitividade dos depósitos/projetos.

Em suma, no caso dos depósitos usados para testes do modelo, é importante destacar alguns baixos resultados obtidos pelo depósito/projeto D1-TM; trata-se do projeto Mountain Pass (EUA), pertencente à Molycorp Inc., que entrou com pedido de recuperação judicial em junho de 2015. Pouco tempo depois do pedido de recuperação judicial, em agosto de 2015, foi relatado que as minas deveriam ser desativadas. Em agosto de 2016, a Molycorp Inc. emergiu da falência como Neo Performance Materials. Em julho de 2017, a MP Mine Operations LLC ("MPMO") comprou Mountain Pass. A MPMO está atualmente trabalhando para reiniciar as operações em Mountain Pass.

Os cinco principais resultados do modelo (MCRM-TR) identificaram a fraqueza competitiva desse projeto, por exemplo: o primeiro resultado (classificação inicial/preliminar) mostrou que o projeto D1-TM possui nível de competitividade abaixo do PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR; o terceiro resultado mostrou que esse depósito figura entre a região de menor competitividade e maior risco; o quinto resultado principal identificou dificuldades na maioria dos fatores e/ou variáveis críticos, principalmente nos fatores técnico-econômicos (todos apresentaram fraquezas). Porém, nem todos os resultados foram ruins; por exemplo, no quarto resultado, que faz a classificação



relativa final por meio do  $I_{CRM-TR}$ , o D1-TM se apresentou em boa colocação. Isso graças ao segundo resultado que mede o grau de associação entre os fatores de competitividade e risco dos depósitos em análises (GCR) e o PDCM/*benchmark*, o qual apresentou um dos melhores valores, indicando que, embora haja algumas variáveis que precisam ser melhoradas, o D1-TM ainda tem força competitiva.

Outro caso que vale destaque é o do D2-TM; trata-se do projeto Mount Weld CLD – (AUS), que se encontra em plena operação e suporta com bravura as oscilações de preços e incertezas de mercado, por exemplo, no primeiro resultado o D2-TM situou-se entre os depósitos/projetos classificados (preliminarmente) com nível de competitividade em linha com o PDCM (*benchmark*), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR em desenvolvimento. No segundo resultado, obteve o melhor grau da competitividade e risco – GCR (99,57) em relação ao PDCM/*benchmark*. No terceiro resultado, figurou na região de maior competitividade e posição intermediária em relação ao risco. No quarto resultado (classificação relativa final por meio do  $I_{CRM-TR}$ ), o D2-TM foi o melhor classificado.

Vale sempre destacar que os cinco resultados do modelo (MCRM-TR) são influenciados pela **precisão adotada na simulação/previsão** em cada depósito/projeto analisado, e esta por sua vez depende da fase em que se encontra o projeto em análise (preliminar/PAE/conceitual, pré-viabilidade ou viabilidade/operação). Além disso, por ser um modelo dinâmico os resultados retratam a situação em determinado período (no caso deste trabalho, o ano-base foi 2015), podendo assim sofrer variações com o tempo.

## 6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, são recapitulados os principais objetivos traçados no início do trabalho desta tese e expostas as principais conclusões fundamentadas nos resultados apresentados e discutidos nos capítulos anteriores.

Tendo em vista os propósitos definidos e almejados nos objetivos gerais e específicos, tais como suprir a carência de informações sobre o setor de terras-raras do ponto de vista da economia mineral, o trabalho teve ênfase em aspectos tecnológicos, técnicos-econômicos e políticos-conjunturais, com a identificação e a análise dos fatores favoráveis e desfavoráveis no que toca à competitividade global nesse setor e os riscos econômicos envolvidos no desenvolvimento de um empreendimento mineiro, destinado à produção de terras-raras.

Além disso, buscava-se construir um modelo probabilístico de avaliação de competitividade e risco de investimento no desenvolvimento de um depósito mineral inicialmente considerado um recurso potencial para a mineração de terras-raras (potencial para se tornar uma mina de terras-raras), tanto em fase preliminar de avaliação quanto em fase avançada (projetos em estágio de estudo de avaliação econômica preliminar – AEP, pré-viabilidade econômica ou viabilidade econômica). Sem sombra de dúvidas, pode-se afirmar que todos os objetivos foram alcançados. Assim, os cinco principais resultados esperados apontaram algumas conclusões sobre os depósitos/projetos analisados, conforme a seguir.

O depósito/projeto com melhor classificação no  $I_{CRM-TR}$ , entre os depósitos utilizados para teste do modelo (TM) foi o D2-TM (Projeto Mount Weld CLD, AUS), enquanto que, entre os depósitos/projetos tomados para estudo de caso Brasil a melhor classificação foi obtida pelo D4-BR (Araxá–MBAC/ITAFOS, BRA).

Com as análises dos resultados apresentados pelo modelo (MCRM-TR), foi possível comprovar sua eficácia na identificação dos problemas relacionados com principais fatores de competitividade e risco, envolvidos nos projetos de mineração de terras-raras. Sobre estas comprovações, podemos destacar 3 projetos: D2-TM (Projeto Mount Weld CLD, AUS), D1-TM (projeto Mountain Pass, EUA) e o D2-BR (projeto da CBMM no Brasil).

Sobre o projeto D2-TM (Projeto Mount Weld CLD, AUS), melhor classificado no  $I_{CRM-TR}$ . Este projeto encontra-se em plena operação e suportando com bravura as oscilações de preços e incertezas de mercado, mostrando-se bastante resiliente. Os

cinco principais resultados obtidos no MCRM-TR comprovaram isso. Por exemplo, no primeiro resultados o D2-TM apresentou favorabilidade em linha com linha com o PDCM (*benchmark*). No segundo resultado, obteve o melhor grau da competitividade e risco, no terceiro resultado, figurou na região de maior competitividade e intermediária em relação ao risco (CV %) e na análise das variáveis críticas, apenas Var.P<sub>PPCS4</sub>, Var.P<sub>PPEG3</sub>, Var.P<sub>PQLG1</sub> e Var.P<sub>PQLG4</sub> se mostraram preocupantes (todas pertencentes aos fatores político-econômicos conjunturais).

O modelo (MCRM-TR) também conseguiu identificar algumas fraquezas apresentadas pelo depósito/projeto D1-TM (projeto Mountain Pass, EUA), que entrou com pedido de recuperação judicial em 2015. Os resultados mostraram o projeto D1-TM possui nível de competitividade abaixo do PDCM (*benchmark*) e que o este projeto figura entre a região de menor competitividade e maior risco, no entanto, o D1-TM se apresentou em boa colocação no  $I_{CRM-TR}$ . Isto graças ao bom resultado apresentado no GCR, comprovando que embora haja algumas variáveis que precisam ser melhoradas o D1-TM ainda tem força competitiva considerável no cenário mundial. Segundo alguns especialistas de mercado, este projeto foi muito afetado pela queda dos preços da cesta de terras-raras e o crescente endividamento da companhia.

Embora o depósito/projeto D4-BR (Araxá-MBAC/ITAFOS, BRA), tenha sido o melhor classificado no  $I_{CRM-TR}$ , o destaque foi dado ao Projeto D2-BR (Projeto da CBMM).

Por não atender a uma das premissas do modelo (aproveitamento das TR como produto principal), esse projeto não poderia ser analisado pelo modelo (MCRM-TR), uma vez que nesse projeto o aproveitamento dos OTR se dá a partir do rejeito da produção de nióbio (como subproduto). Mesmo assim, foi incluído na análise por estar entre os mais avançados no Brasil. O Projeto D2-BR possui vantagem em relação aos seus pares, já que, os custos de mineração (lavra e tratamento de minério inicial) são cobertos pela produção de nióbio. Também possui grande vantagem em relação ao fator Var.P<sub>QIL</sub>, já que, há toda infraestrutura local pronta e funcionando. Estas vantagens foram comprovadas pelos resultados do modelo (MCRM-TR), porém não foram suficientes para proporcionar ao D2-BR a melhor classificação no  $I_{CRM-TR}$ , uma vez que, foram identificadas fraquezas em outros fatores igualmente importantes, por exemplo, os fatores Var.P<sub>VPD</sub> e Var.P<sub>EPM</sub> que apresentaram relevância negativa(no quito resultado).

## 7 RECOMENDAÇÕES

Tendo em vista o desempenho dos depósitos/projetos brasileiros no modelo (MCRM-TR), ele foi afetado, do ponto de vista crítico, com maior intensidade pelos fatores político-econômicos conjunturais (Var.P<sub>PPCS</sub>, Var.P<sub>PPEG</sub>, Var.P<sub>PQLG</sub>) do que pelos fatores técnico-econômicos. Assim, torna-se indispensável que se façam algumas recomendações no sentido de promover melhorias no desempenho dos fatores e/ou variáveis críticos identificados e, por conseguinte, melhorar as respectivas classificações dos depósitos/projetos brasileiros, embora alguns projetos tenham apresentado fraquezas nas variáveis técnico-econômicas. Nesses termos, recomendam-se incentivos, regulamentações e/ou políticas de melhorias para as variáveis que mais afetam os depósitos/projetos brasileiros, tais como:

Var.P<sub>PPCS</sub>1: incerteza relativa à gestão, interpretação e aplicação dos regulamentos existentes;

Var.P<sub>PPCS</sub>2: incerteza sobre as regulamentações ambientais;

Var.P<sub>PPCS</sub>3: duplicações e incoerências regulamentares;

Var.P<sub>PPCS</sub>4: regime de tributação;

Var.P<sub>PPCS</sub>5: incerteza a respeito das áreas que serão protegidas (Ex. sítios arqueológicos etc.);

Var.P<sub>PPCS</sub>6: qualidade da infraestrutura;

Var.P<sub>PPCS</sub>7: acordos socioeconômicos / condições de desenvolvimento;

Var.P<sub>PPCS</sub>8: estabilidade política;

Var.P<sub>PPCS</sub>9: qualidade da base de dados geológicos;

Var.P<sub>PPCS</sub>10: nível de segurança (ex. ameaça de ataque por criminosos etc.);

Var.P<sub>PPEG</sub>1: direitos de propriedade;

Var.P<sub>PPEG</sub>2: liberdade de corrupção;

Var.P<sub>PPEG</sub>5: liberdade empresarial;

Var.P<sub>PPEG</sub>6: liberdade trabalhista;

Var.P<sub>PPEG</sub>7: liberdade monetária;

Var.P<sub>PPEG</sub>8: livre-comércio;

Var.P<sub>PPEG</sub>9: liberdade de investimento;

Var.P<sub>PPEG</sub>10: liberdade financeira;

Var.P<sub>PQLG</sub>1: eficiência do processo de alfandegamento;

Var.P<sub>PQLG</sub>2: facilidade de organizar embarques a preços competitivos;

Var.P<sub>PQLG3</sub>: competência e qualidade dos serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro;

Var.P<sub>PQLG4</sub>: capacidade de controlar e rastrear as remessas;

Var.P<sub>PQLG5</sub>: frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados.

Por fim, pode-se afirmar que os principais depósitos de TR do Brasil possuem futuro promissor mesmo com as dificuldades mostradas nos resultados do modelo MCRM-TR, uma vez que, embora possuam nível de competitividade abaixo do PDCM/*benchmark*, não estão tão distantes dele. Somadas a essas barreiras estão as dificuldades tecnológicas (processo de extração e separação das TR, não totalmente conhecido). Estas estão entre as principais dificuldades enfrentadas por todos os projetos ao redor do mundo, uns com maior e outros com menor intensidade. Essas dificuldades também são refletidas e/ou representadas e mensuradas indiretamente pelos fatores de competitividade e risco: Var.P<sub>VPD</sub>, Var.P<sub>QIL</sub>, Var.P<sub>EMO</sub> e Var.P<sub>IER</sub>.

Superando todas essas dificuldades ou pelo menos reduzindo suas fraquezas competitivas, o Brasil poderá se tornar um fornecedor internacional importante de óxidos de terras-raras, além de suprir sua própria demanda. Mesmo sabendo que o mercado de TR ainda é relativamente pequeno, a perspectiva de demanda é exponencialmente crescente. Assim, as terras-raras devem ser tratadas efetivamente como bem mineral estratégico, com legislação própria e como política pública de Estado.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIATION OF CHINA RARE EARTH INDUSTRY (ACREI). **Análise de mercado de terras-raras**: jan.-fev. 2016. 2016. Disponível em: <<http://www.acrei.org.cn/portal.php?mod=view&aid=4691>>. Acesso em: 4 mar. 2016.
- ALONSO, E. et al. Evaluating rare earth element availability. **Environmental Science and technology**, v. 46, p. 3406–3414, 2012. Disponível em: <[http://medallionresources.com/wp-content/uploads/2012/08/MIT\\_Evaluating\\_Rare-Earth\\_Element\\_Availability\\_March-2012.pdf](http://medallionresources.com/wp-content/uploads/2012/08/MIT_Evaluating_Rare-Earth_Element_Availability_March-2012.pdf)>. Acesso em: 20 jan. 2016.
- ANDRADE, J. G. **Competitividade na exploração mineral**: um modelo de avaliação. 181 p. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <[http://www.cprm.gov.br/publique/media/dou\\_jose\\_guedes.pdf](http://www.cprm.gov.br/publique/media/dou_jose_guedes.pdf)>. Acesso em: 13 ago. 2013.
- ANDRADE, R. H. P. 2014. Terras-raras. In: BRASIL. Departamento Nacional de Produção Mineral. **Sumário mineral 2014**. Brasília: DNPM, 2014. p. 114-115. Disponível em: <<http://www.dnpm.gov.br/dnpm/sumarios/sumario-mineral-2014>>. Acesso em: 26 set. 2017.
- ARANTES, D. A; MACKENZIE, B. W. **A posição competitiva do Brasil na exploração e mineração de ouro**. Brasília: Secretaria de Minas e Metalurgia, Departamento Nacional de Produção Mineral, 1995. 102p.
- ARGUS CONSULTING SERVICES. **Argus White Paper**: impact of changes to chinese policy on the rare earth market in 2015. London: [s.l.], 2015. Disponível em: <<https://www.argusmedia.com/Methodology-and-Reference/White-Papers/~media/4EFDC00E1F484177A8268ED9C9C95D27.ashx>>. Acesso em: 20 jan. 2016.
- \_\_\_\_\_. **Argus Rare Earths Monthly Outlook**, v. 17-9, set. 2017. Disponível em: <<https://www.argusmedia.com/~media/files/pdfs/samples/argus-rare-earths-monthly.pdf?la=en>>. Acesso em: 01 dez. 2017.
- BERGGREN, N. The benefits of economic freedom: a survey. **The Independent Review**, v. 8, n. 2, p. 193-211, 2003. Disponível em: <[http://www.freetheworld.com/papers/berggren\\_review.pdf](http://www.freetheworld.com/papers/berggren_review.pdf)>. Acesso em: 01 set. 2016.
- BLOG PHD. 2011. O que é Market Share e como esta informação pode ajudar a sua empresa. Blog do Instituto PHD. Disponível em: <<http://www.institutophd.com.br/blog/o-que-e-market-share-e-como-esta-informacao-pode-ajudar-a-sua-empresa/>>. Acesso em: 12 dez. 2016.
- BOGNER, S. Rare earth deposits: a simple means of comparative evaluation. **Rockstone Research**. 2014a. 20 p. Disponível em: <

research.com/index.php/en/research-reports/160-Rare-Earth-Deposits:-A-Simple-Means-of-Comparative-Evaluation>. Acesso em 2 jan. 2016.

\_\_\_\_\_. The REE Basket Price Deception and Clarity of OPEX. **Rockstone Research**. 2015a. 13 p. Disponível em: <<http://www.rockstone-research.com/index.php/en/research-reports/64-The-REE-Basket-Price-Deception-and-the-Clarity-of-OPEX>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

\_\_\_\_\_. Rumble in the REE jungle: Molycorp vs. Commerce Resources. **Rockstone Research**. 2015b. Disponível em: <<http://www.rockstone-research.com/index.php/en/research-reports/384-Rumble-in-the-REE-Jungle:-Molycorp-vs.-Commerce-Resources>>. Acesso em: 10 set. 2015.

\_\_\_\_\_. The Knock-Out Criteria for Rare Earth Element Deposits: Cutting the Wheat from the Chaff. **Rare Earth Element Deposits**, Jan. 2014b. 25 p. Disponível em: <<http://www.rockstone-research.com/images/PDF/Commerce1en.pdf>>. Acesso em: 4 abr. 2014.

BRADSHER, K. China enfrenta impacto da exploração de terras-raras. **Folha de S. Paulo**. 12 nov. 2013. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/ambiente/2013/11/1368943-china-enfrenta-impacto-da-exploracao-de-terras-raras.shtml>>. Acesso em: 15 dez. 2016.

BRASIL. Ministério das Minas e Energia. Ministério da Ciência e Tecnologia. Centro de Tecnologia Mineral. **I Seminário Brasileiro de Terras-raras**: Informações sobre o evento. Rio de Janeiro: Cetem, 2011. Disponível em: <[http://www2.cetem.gov.br/02\\_11\\_11\\_seminario\\_brasileiro\\_terras\\_raras2011.php](http://www2.cetem.gov.br/02_11_11_seminario_brasileiro_terras_raras2011.php)> Acesso em: 15 ago. 2013.

\_\_\_\_\_. Ministério das Minas e Energia. Portaria Interministerial 614, de 01-07-2010. **Diário Oficial da União**, Brasília, 12 jul. 2010. Disponível em: <[http://www.mme.gov.br/documents/10584/904396/Portaria\\_interministerial+614+de+01-07-2010+Publicado+no+DOU+de+12-07-2010/2a3a91b2-f541-44d4-bd85-a5d7dd69e563;jsessionid=37F0AF729F30DF136AEE3F8EA4F1D0C2.srv155?version=1.0](http://www.mme.gov.br/documents/10584/904396/Portaria_interministerial+614+de+01-07-2010+Publicado+no+DOU+de+12-07-2010/2a3a91b2-f541-44d4-bd85-a5d7dd69e563;jsessionid=37F0AF729F30DF136AEE3F8EA4F1D0C2.srv155?version=1.0)>. Acesso em: 20 jan. 2017.

\_\_\_\_\_. Senado Federal. Secretaria Especial de Comunicação Social. **Em discussão!**: revista de audiências públicas do Senado Federal, v. 4, n. 17, set. 2013. Disponível em: <<http://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/496343>>. Acesso em: 27 fev. 2017.

BRAUN, J.-J. et al. Mobilization and redistribution of REEs and thorium in a syenitic lateritic profile: a mass balance study. **Geochim. Cosmochim. Acta**, v. 57, p. 4419-4434, 1993. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/223555089\\_Mobilization\\_and\\_redistribution\\_of\\_REEs\\_and\\_thorium\\_in\\_a\\_syenitic\\_lateritic\\_profile\\_a\\_mass\\_balance\\_study\\_Geochim\\_Cosmochim\\_Acta\\_57\\_4419-4434](https://www.researchgate.net/publication/223555089_Mobilization_and_redistribution_of_REEs_and_thorium_in_a_syenitic_lateritic_profile_a_mass_balance_study_Geochim_Cosmochim_Acta_57_4419-4434)>. Acesso em: 21 dez. 2015.

BRUMMER, H. L. **A dynamic competitive analysis model for global mining firms**. Thesis – University of South Africa, Pretoria, 2005. 32 p.

CALAES, G. D. et al. **Análise da competitividade do Brasil em relação à África do Sul, Austrália, Canadá e Estados Unidos**. Brasília: DNPM, 1998.

\_\_\_\_\_. **Planejamento estratégico, competitividade e sustentabilidade na indústria mineral**: dois casos de não metálicos no Rio de Janeiro: MCTI, 2006. 237 p. Disponível em: <<http://www.cotemar.com.br/biblioteca/mineracao/planejamento-competitividade-sustentabilidade-industria-mineral.pdf>>. Acesso em: 23 fev. 2016.

\_\_\_\_\_. **Relatório Técnico 06**: Análise de Competitividade do Setor Mineral Brasileiro. Brasília: MME, 2009. 94p. Disponível em: <[http://www.mme.gov.br/documents/1138775/1256656/P02\\_RT06\\_Analise\\_Comparativa\\_da\\_Competitividade\\_do\\_Setor\\_Mineral\\_Nacional.pdf/ae24cc34-8c4b-4952-aa05-6e8fdbddf142](http://www.mme.gov.br/documents/1138775/1256656/P02_RT06_Analise_Comparativa_da_Competitividade_do_Setor_Mineral_Nacional.pdf/ae24cc34-8c4b-4952-aa05-6e8fdbddf142)>. Acesso em 23 fev. 2016.

CANADIAN INSTITUTE OF MINING, METALLURGY AND PETROLEUM. **National Instrument 43-101**. 2018. Disponível em: <<http://web.cim.org/standards/MenuPage.cfm?sections=177,181&menu=229>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS. **Uso e aplicações de Terras-raras no Brasil**: 2012-2030. Brasília: CGEE, 2013. Disponível em: <[http://www.cgee.org.br/publicacoes/terras\\_raras.php](http://www.cgee.org.br/publicacoes/terras_raras.php)>. Acesso em: 05 fev. 2016.

CHAKHMOURADIAN, A. R.; WALL, F. Rare earth elements: minerals, mines, magnets (and more). **Elements**, v. 8, n. 5, p. 333-340, Oct. 2012. Disponível em: <<http://elements.geoscienceworld.org/content/8/5/333.abstract>>. Acesso em: 10 nov.2015

CHAKHMOURADIAN, A. R.; ZAITEV, A. N. Rare Earth mineralization in igneous rocks: sources and process. **Elements**, v. 8, n. 5, p. 347-353, Oct. 2012. Disponível em: < <http://elements.geoscienceworld.org/content/8/5/347.abstract>>. Acesso em: 10 nov.2015

CODEMIG e Certi projetam fábrica de ímas de terras-raras em Minas Gerais. **De Fato**. 25 fev. 2016. Capa/Editoriais/Economia. Disponível em: <<https://www.defatoonline.com.br/codemig-e-certi-projetam-fabrica-de-imas-de-terras-raras-em-minas-gerais/>>. Acesso em: 10 abr. 2017.

CONNELLY, N. G. et al. **Nomenclature of Inorganic Chemistry**: IUPAC Recommendations 2005. Cambridge: RSC Publishing, 2005. Disponível em: <[http://www.iupac.org/mwg-internal/de5fs23hu73ds/progress?id=78GHxgZR4ff4\\_Q822xMFd6psu3NO84roxQKPWxv7usE](http://www.iupac.org/mwg-internal/de5fs23hu73ds/progress?id=78GHxgZR4ff4_Q822xMFd6psu3NO84roxQKPWxv7usE)>. Acesso em: 01 fev. 2016.

COUTINHO, L. G.; FERRAZ, J. C. **Estudo da Competitividade da Indústria Brasileira**. Campinas: Unicamp, 1994, 344 p.

D'ARRIGO, R.F. 2012. Modelo de Estimativa de Custos Operacionais e de Capital em Projetos de Mineração em Fase Conceitual Baseado no Modelo de O'Hara.



Dissertação de mestrado. PPGE3M-UFRGS. P. 28-29. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/96382>>. Acesso em: 10 dez 2016.

DICKSON, B.L.; SCOTT, K.M., 1997. Interpretation of aerial gamma-ray surveys-adding the geochemical factors. *AGSO-Journal of Australian geology & Geophysics*, 17 (2), 187-200.

DU, C. et al. Present situation and suggestions for treatment of Baotou's rare earth concentrate. *Hydrometall*, v. 29, n. 1, p. 1-4, 2010 (in Chinese).

ERNST & YOUNG. **Technology minerals**: The rare earths race is on! New York: Ernst & Young, 2011. Disponível em: <<http://pt.slideshare.net/Tehama/technology-minerals-the-rare-earths-race-is-on-april-2011>>. Acesso em: 20 jan. 2016.

FERRON, C. J. et al. Beneficiation of Rare Earth Oxide Minerals. *Materials Science Fórum*, v. 70-72, p. 251-270, 1991.

FRANÇA, M. S. J. Terras que valem ouro. *Unespciência*, abr. 2012, p. 32-35. Disponível em: <[http://www.unesp.br/aci\\_ses/revista\\_unespciencia/acervo/29/terrara](http://www.unesp.br/aci_ses/revista_unespciencia/acervo/29/terrara)>. Acesso em: 20 fev. 2016.

GLOBAL gross domestic product (GDP) 2016. **Statista**. 2017. Disponível em: <<http://www.statista.com/statistics/268750/global-gross-domestic-product-gdp/>>. Acesso em: 20 dez. 2017.

GLOBAL rare earth elements market revenue will reach \$10.96 billion by 2020: Hexa Research. **Marketwired**. Aug. 2015. Disponível em: <<http://www.marketwired.com/press-release/global-rare-earth-elements-market-revenue-will-reach-1096-billion-2020-hexa-research-2049802.htm>>. Acesso em: 25 jan. 2016.

GODOY, S. G. M.; PAMPLONA, J. B. **O protocolo de Kyoto e os países em desenvolvimento**. 2007. Tese (Doutorado em Economia Política) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

GOLEV, A. et al. 2014. Rare earths supply chains: Current status, constraints and opportunities. *Resources Policy*, v. 41, p. 52-59, Sept. 2014. Acesso em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301420714000282>>. Acesso em: 10 dez. 2015.

GONÇALVES, R. A teoria do comércio internacional: uma resenha. *Economia Ensaios*, v. 12, n.1, p. 3-20, 1997. Disponível em: <[http://www.ie.ufrj.br/oldroot/hpp/intranet/pdfs/goncalves\\_r.\\_resenha\\_comercio\\_internacional\\_1997.pdf](http://www.ie.ufrj.br/oldroot/hpp/intranet/pdfs/goncalves_r._resenha_comercio_internacional_1997.pdf)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

GOODENOUGH, K. M. et al. 2016 Europe's rare earth element resource potential: an overview of REE metallogenetic provinces and their geodynamic setting. *Ore Geology Reviews*, 2015. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169136815300755>>. Acesso em: 24 abr. 2016.

GREE, K. P.; JACKSON, T. **Fraser Institute Annual Survey of Mining Companies**. Vancouver: Fraser Institute, 2014. Disponível em: <<http://www.fraserinstitute.org/studies/annual-survey-of-mining-companies-2014>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

GRUBER, P. et al. Global Lithium Availability: A Constraint for Electric Vehicles? **J. Ind. Ecol.**, v. 15, n. 5, Oct. 2011.

GUIMARÃES, S. G. Terras-raras e Sustentabilidade Energética. **Defesanet**, dez. 2011. Disponível em: <<http://www.defesanet.com.br/tecnologia/noticia/3981/Terras-Raras-e-Sustentabilidade-Energetica/>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

GUPTA, C. K.; KRISHNAMURTHY, N. **Extractive Metallurgy of Rare Earths**. Boca Raton: CRC Press, 2005. Disponível em: <[http://vector.umd.edu/images/links/Extractive\\_Metallurgy\\_of\\_Rare\\_Earths\\_Gupta.pdf](http://vector.umd.edu/images/links/Extractive_Metallurgy_of_Rare_Earths_Gupta.pdf)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

HATCH, G. TMR Advanced Rare-Earth Projects Index. **Technology Metals Research**, 2015. Disponível em: <<http://www.techmetalsresearch.com/metrics-indices/tmr-advanced-rare-earth-projects-index/>>. Acesso em: 4 nov. 2015.

HELMENSTINE, T. Periodic Table of Elements [Printable]. **Sciencenotes**. 2015. Disponível em: <<http://sciencenotes.org/wp-content/uploads/2015/01/PeriodicTableBW.pdf>>. Acesso em: 07 jan. 2016.

HENDERSON, P. General geochemical properties and abundances of the Rare Earth Elements. In: \_\_\_\_\_. (Ed.). **Developments in geochemistry, rare earth element geochemistry**. Amsterdam: Elsevier, 1984. v. 2, p. 1-32. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978044442148750006X>>. Acesso em: 08 nov. 2015.

HILL, C. W. L. **International business: competing in the global market place**. Illinois: Richard D. Irwin, 1994. Disponível em: <<http://catalog.hathitrust.org/api/volumes/oclc/27897462.html>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

HOBBSAWM, E. J. **A era das revoluções**. 10. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

HYDROMETALLURGY in the P.eurare.eu/technologies/hydrometallurgy.html: <<http://www.eurare.eu/technologies/hydrometallurgy.html>>. Acesso em: 10 fev. 2016.

IDER, K. **Recapture strategic value chains in the rare earth market: a contemporary market analysis of rare earths and their economic implications**. Bachelor of Arts (Double Degree Program in Business Administration) – Berlin School of Economics and Law, Berlin, 2014. Disponível em: <[https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/105572/Ider\\_Kadir.pdf?sequence=1](https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/105572/Ider_Kadir.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

INSTITUTO BRASILEIRO DE MINERAÇÃO (IBRAM). **Uma visão comentada sobre minerais estratégicos e terras-raras**. IBRAM. 2015. Disponível em: <[http://www.ibram.org.br/150/15001002.asp?ttCD\\_CHAVE=241625](http://www.ibram.org.br/150/15001002.asp?ttCD_CHAVE=241625)>. Acesso em: 25 jan. 2016.

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY (IAEA). **Guidelines for radioelement mapping using gamma ray spectrometry data**. Vienna: IAEA-TECDOC, 2003. 173 p. Disponível em: <[http://www-pub.iaea.org/mtcd/publications/pdf/te\\_1363\\_web.pdf](http://www-pub.iaea.org/mtcd/publications/pdf/te_1363_web.pdf)>. Acesso em: 5 jan. 2016.

JACKSON, T.; GREEN K. P. **Fraser Institute Annual Survey of Mining Companies 2015**. 2016. Disponível em: <<https://www.fraserinstitute.org/studies/annual-survey-of-mining-companies-2015>>. Acesso em: 10 set. 2016.

JAIRETH, S.; HOATSON, M., D.; MIEZITIS, Y. Geological setting and resources of the major rare-earth-element deposits in Australia. **Ore Geology Reviews**, v. 62, p. 72-128. Oct. 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169136814000353>>. Acesso em: nov. 2015.

JAMASMIE, C. Molycorp desliga Mountain Pass planta de terras-raras. **Mining.com**. 2015. Disponível em: <[http://www.mining.com/molycorp-shuts-down-mountain-pass-rare-earth-plant/?utm\\_source=digest-en-rare-earth-150907&utm\\_medium=email&utm\\_campaign=digest](http://www.mining.com/molycorp-shuts-down-mountain-pass-rare-earth-plant/?utm_source=digest-en-rare-earth-150907&utm_medium=email&utm_campaign=digest)>. Acesso em: 10 jan.2016.

\_\_\_\_\_. Rare earths prices rise as China builds reserves, tackles illegal mining. **Mining.com**. 20 June 2016. Disponível em: <<http://www.mining.com/rare-earths-prices-rise-as-china-builds-reserves-tackles-illegal-mining/>>. Acesso em: 21 jul. 2016.

JARA, J. J. Determinants of country competitiveness in attracting mining investments: an empirical analysis. **Resources Policy**, v. 52, p. 65-71, June 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301420716300204>>. Acesso em: 10 out. 2017.

JINGHUA, S.; XINXIN, M.; NAN, X. The Comparative Study on the Mining Industry Competitiveness of Xinjiang in China. **Energy Procedia**, v. 52, June 2017, p. 158-162. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1876610211009647>>. Acesso em: 11 jan. 2017.

JOINT ORE RESERVES COMMITTEE. **What is the JORC Code?** Disponível em: <<http://www.jorc.org/>>. Acesso em: 10 jan. 2016. Acesso em: 10 jan. 2016.

KANAZAWA, Y.; KAMITANI, M. Rare earth minerals and resources in the world. **J. Alloys and Compounds**, v. 408-412, p. 1339-1343, 2006. Disponível em:

<<http://wenku.baidu.com/view/334b6dd249649b6648d747d4.html>>. Acesso em: 21 dez. 2015.

KINGSNORTH, D. J. **Meeting the challenges of rare earths supply in the next decade**. [Apresentação]. Washington: Industrial Minerals Company of Australia Pty Ltd. 1 Dec. 2010. 30p.

KLINGER, J. M. A historical geography of rare earth elements: From discovery to the atomic age. **The Extractive Industries and Society**, v. 2, n. 3, p. 572-580, Aug. 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214790X15000891>>. Acesso em: 23 dez. 2015.

LABYS, W. C.; FIELD, F. R.; CLARK, J. Minerals models. In: VOLGELY, W. A. (Ed.) **Economics of the mineral industries**. 4. ed. New York: Aime, 1985. p. 337-79.

LANTHANIDE Contraction. **TutorCircle**. Disponível em: <<http://chemistry.tutorcircle.com/inorganic-chemistry/lanthanide-contraction.html>>. Acesso em: 07 fev. 2016.

LAPIDO-LOUREIRO, F. E. V.; FIGUEIREDO, C. M. V.; TOREZAN, M. J. Os elementos terras-raras nos complexos carbonatíficos brasileiros. In: FORMOSO, M. L. L.; NARDI, L. V. S.; HARTMANN, L. A. (Eds.). **Geoquímica dos elementos terras-raras no Brasil**. Rio de Janeiro: CPRM; DNPM, 1989. p. 48-59. Disponível em: <[http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/21/085/21085903.pdf](http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/21/085/21085903.pdf)>. Acesso em: 12 dez. 2015.

LAPIDO-LOUREIRO, F. E. V.; SANTOS, R. L. C. (Eds.) **O Brasil e a reglobalização da indústria das terras-raras**. Rio de Janeiro: CETEM/MCTI, 2013. 216 p.

LAZNICKA, P. Quantitative relationships among giant deposits of metals. **Economic Geology**, v. 94, p. 455-473, 1999. Disponível em: <<http://economicgeology.org/content/94/4/455.abstract>>. Acesso em: 10 jun. 2016.

LEITE, Alexandre César Cunha. **O projeto de desenvolvimento econômico chinês – 1978-2008**: a singularidade de seus fatores políticos e econômicos. Tese (Doutorado em Ciências Sociais/Relações Internacionais) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <[http://www.sapientia.pucsp.br/tde\\_arquivos/8/TDE-2011-10-21T07:28:09Z-11635/Publico/Alexandre%20Cesar%20Cunha%20Leite.pdf](http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/8/TDE-2011-10-21T07:28:09Z-11635/Publico/Alexandre%20Cesar%20Cunha%20Leite.pdf)>. Acesso em: 15 fev. 2016.

LIFTON, J. Implications of leaping Chinese virtual demand for rare earths. **Resource Investor**, 15 June 2011. Disponível em: <[https://www.wto.org/english/res\\_e/publications\\_e/wtr10\\_forum\\_e/wtr10\\_oecd2\\_e.pdf](https://www.wto.org/english/res_e/publications_e/wtr10_forum_e/wtr10_oecd2_e.pdf)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

LIMA, J. M. G.; VALE, E. **Competitividade da indústria mineral brasileira**: relatório final. Brasília: MME, 2003. 124p.

LING, Z. L.; YANG, X. China's rare earth resources, mineralogy, and beneficiation. In: LIMA, I. B. de; LEAL, W. **Rare Earths Industry: Technological, Economic, and Environmental Implications**. Outokumpu: Elsevier, 2015. Cap. 9, p. 139-150. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128023280000097>>. Acesso em: 26 fev. 2016.

LIRA, J. C. L. Terra-rara. **Infoescola**. 2015. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/elementos-quimicos/terra-rara/>>. Acesso em: 15 jan 2016.

LIU, J. et al. Progress in extraction technology of thorium from rare earth concentrate. **Chin. J. Rare Metal**, v. 36. n. 4, p. 651-658, 2012.

LONG, K. R. et al. **The principal rare earth elements deposits of the United State**: a summary of domestic deposits and a global perspective: scientific investigations report 2010–5220. Washington: U. S. Geological Survey, 2010. 96 p. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/sir/2010/5220/>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

LOS ALAMOS NATIONAL LABORATORY, 2015. **Periodic Table of Elements**. (online). Disponível em: <<http://periodic.lanl.gov/list.shtml>>. Acesso em: 15 jan. 2016.

LUSTY, P. Critical Metals and Rare Earth Elements. **British Geological Survey**, London, 2010. Disponível em: <[http://www.bgs.ac.uk/downloads/search.cfm?SECTION\\_ID=0&MIME\\_TYPE=0&SEARCH\\_TXT=Critical+Metals+and+Rare+Earth+Elements&dlBtn=go](http://www.bgs.ac.uk/downloads/search.cfm?SECTION_ID=0&MIME_TYPE=0&SEARCH_TXT=Critical+Metals+and+Rare+Earth+Elements&dlBtn=go)>. Acesso em: 3 mar 2016.

MACIEL, A. C.; CRUZ, P. R. **Perfil Analítico do Tório e Terras-raras**. Boletim n°28. Brasília: Departamento Nacional de Produção Mineral, 1973. 72p.

MACKENZIE, B. W. **Potencial Econômico da Prospecção e Pesquisa de Ouro no Brasil**: Estudos de Política e Economia Mineral. Brasília: DNPM, 1991. 220 p.

MANYIKA, J. et al. Disruptive technologies: Advances that will transform life, business, and the global economy. **The McKinsey Global Institute** [online] p. 2-4, 2013. Disponível em: <[http://www.mckinsey.com/insights/business\\_technology/disruptive\\_technologies](http://www.mckinsey.com/insights/business_technology/disruptive_technologies)>. Acesso em: 3 mar 2016.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952. Disponível em: <[http://www.efalken.com/LowVolClassics/markowitz\\_JF1952.pdf](http://www.efalken.com/LowVolClassics/markowitz_JF1952.pdf)>. Acesso em: 20 dez. 2015.

MAXWELL, 2016. Os Íons Terras-Raras–Introdução. Repositório Institucional da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC – RIO. Disponível em: <[http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10657/10657\\_4.PDFXXvmi=fqMMkV4UhGrK7PFkvgSZIKthLjwNKJL1azOuuSqMATxHKe2guVfeGKwr45gPO3R0CGu7AWUbQtSCIVSeS](http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10657/10657_4.PDFXXvmi=fqMMkV4UhGrK7PFkvgSZIKthLjwNKJL1azOuuSqMATxHKe2guVfeGKwr45gPO3R0CGu7AWUbQtSCIVSeS)>

9szT12Z7iOVmHWZns7Xp29hv3Tf0MtSWWsRZvQ6PG3cn0bMsjLTmVbT0590SDTPBnIATzHJgKWFL9rfsd9PakJapSbjv5a8tSlosq9Jb6pXfRdl6mxgHir8bDsIJDQdwAD01MKdS ab93oR9LqqtJSDVv6EgJvtg67h7U2kNcwWfVPpl>. Acesso em: 02 jan. 2016.

MCKINSEY GLOBAL INSTITUTE. **Resource revolution**: meeting the world's energy, materials, food, and water needs. Report. 2011. 224 p. Disponível em: <<http://www.mckinsey.com/business-functions/sustainability-and-resource-productivity/our-insights/resource-revolution>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

MELO, F. R.; SANTOS, C. J. C.; DIAS, H. K. G. 2013. **A geopolítica da exploração e comercialização de terras-raras**: perspectivas de tensões internacionais em segurança e comércio. 10 p. In: ENCONTRO ESTADUAL DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ESTUDOS DE DEFESA. João Pessoa, Nov. 2012. **Anais...** João Pessoa: ABED, 2012.

MORAES, C. A. C.; PITTA, F. M.; NOMEINE, R. **Usos e aplicações de Terras-raras no Brasil: 2012-2030**. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2013. 254 p. Disponível em: <[https://www.cgee.org.br/documents/10182/734063/Terras\\_Raras\\_Web\\_9532.pdf](https://www.cgee.org.br/documents/10182/734063/Terras_Raras_Web_9532.pdf)>. Acesso em: 2 mar. 2016.

MORRISON, W. M.; TANG, R. **China's Rare Earth Industry and Export Regime: Economic and Trade Implications for the United States**. Washington: Congressional Research Service, 2012. 40 p. Disponível em: <<http://www.fas.org/sgp/crs/row/R42510.pdf>>. Acesso em: 27 fev. 2016.

NIENHAUS, K.; PRETZ, T.; WOTRUBA, H. **Sensor Technologies**: impulses for the raw Materials Industry. Aachen: RWTH, 2014.

O PROJETO de Terras-raras (Visão Geral). **Mineração Serra Verde**. Disponível em: <<http://svpm.com.br/projeto/>>. Acesso em: 3 ago. 2017.

ORRIS, G. J.; GRAUCH, R. I. **Rare earth element mines, deposits, and occurrences**. Open-File Report 02-189. [s.l.]: U.S. Geological Survey, 2002. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/of/2002/of02-189/>>. Acesso em: 10 dez. 2015.

PATRIOTA, L. A. **Terras-raras**: uma análise sobre as políticas de restrição chinesa. 2015. Trabalho de Conclusão (Graduação) – Universidade Estadual da Paraíba, João Pessoa, 2015.

PAUL, S. China's rare earths quotas go, possible new moves stoke supply doubts. **Reuters**, 07 Jan. 2015. Disponível em: <<http://www.reuters.com/article/2015/01/07/china-rareearths-producers-idUSL3N0UL65220150107>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

PETTER, R. A. **A técnica de análise de risco econômico aplicada a diferentes cenários de investimentos**: minas de elementos terras-raras: reciclagem de rejeitos de material de demolição e construção civil. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul,

Porto Alegre, 2015, 140 p. Disponível em: <[www.lume.ufrgs.br/handle/10183/131043](http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/131043)>. Acesso em: 12 dez 2016.

PIRES, A. C. **Xenotima, pagarinita, floucerita e waimirita da mina Pitinga (AM): mineralogia e avaliação preliminar do potencial do albita granito para exploração de elementos de terras-raras e ítrio.** 2010. Tese (Doutorado em Geociências) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

PORTALACTION.2017. Simulação Monte Carlo. Disponível em:<<http://www.portalaction.com.br/simulacao-monte-carlo>>. Acesso em: 05 jan. 2017

PORTER, M. E. **A vantagem competitiva das nações.** Rio de Janeiro: Campus, 1989.

PUC. 2015. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC- RS –Material didático - Uma Introdução aos Métodos de Geração de Números e Variáveis Aleatórias para Aplicações em Simuladores. Disponível em: <[http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/mia\\_ima\\_fafis/material/ead/outros/Geracao\\_de\\_numeros\\_e\\_variaveis\\_aleatorias.pdf](http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/mia_ima_fafis/material/ead/outros/Geracao_de_numeros_e_variaveis_aleatorias.pdf)>. Acesso em: 16 dez. 2015.

PRICES of rare earth oxides worldwide from 2009 to 2013. **Statista.** Disponível em: <<http://www.statista.com/statistics/449834/average-rare-earth-oxide-prices-globally/>>. Acesso em: 27 dez. 2016.

RARE earth metals. **Mineral Prices.** 2017. Disponível em: <<http://mineralprices.com/default.aspx#rar>>. Acesso em: 27 fev. 2016.

REIS, C. África: Abundantes Terras-raras. **Além-Mar** (on-line), nov. 2013. Disponível em: <<http://www.alem-mar.org/cgi-bin/quickregister/scripts/redirect.cgi?redirect=EFIFVyVAupaPiUMrqJ>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

RICARDO, D. **On the principles of political economy and taxation.** Cambridge: Cambridge University Press, 1962 (1. ed. 1817). Disponível em: <<https://www.marxists.org/reference/subject/economics/ricardo/tax/>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

ROSKILL INFORMATION SERVICES. **The economics of rare earths and yttrium.** London: Roskill Information Services, 2007.

ROSSINI, J. P. Em busca dos superímãs brasileiros. **Instituto Ciência Hoje**, 09 mar. 2016. Disponível em: <[http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/2263/n/em\\_busca\\_dos\\_superimas\\_brasileiros](http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/2263/n/em_busca_dos_superimas_brasileiros)>. Acesso em: 11 mar. 2016.

SAMBHARYA, R. B.; RASHEED, A. A. Does economic freedom in host countries lead to increased foreign direct investment? **Competitiveness Review**, v. 25, n. 1, p. 2-24, 2015. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/CR-05-2013-0047>>. Acesso em: 01 set. 2016.

SAMCODES. **The SAMREC Code.** Disponível em: <<http://www.samcode.co.za/samcode--ssc-mainmenu-66/samrec-mainmenu-67>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

SANTOS, C. J. C. Recursos Naturais e Terras-raras. **Política Hoje**, v. 23, p. 175-191, 2014. Disponível em: <<http://www.revista.ufpe.br/politicohoje/index.php/politica/article/viewFile/302/159>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

SEMINÁRIO DE TERRAS-RARAS, 1. 2011. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://cetem.gov.br/palestras-e-seminarios/817-i-seminario-brasileiro-de-terras-raras>>. Acesso em: 7 abr. 2017.

\_\_\_\_\_. 2. 2013. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.cetem.gov.br/palestras-e-seminarios/67-comunicacao/812-ii-seminario-brasileiro-de-terras-raras>>. Acesso em: 7 dez. 2015.

\_\_\_\_\_. 3. 2015. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.cetem.gov.br/iiisbtr>>. Acesso em: 10 dez. 2015.

\_\_\_\_\_. 4. 2017. São Paulo. Disponível em: <[http://www.ipt.br/eventos/194-iv\\_seminario\\_brasileiro\\_de\\_terras\\_raras.htm](http://www.ipt.br/eventos/194-iv_seminario_brasileiro_de_terras_raras.htm)>. Acesso em: 10 dez. 2017.

SERRA, O. A. Rare Earths: Brazil x China. **Journal of the Brazilian Chemical Society**. v. 22, n. 5, p. 811-812, 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/jbchs/v22n5/v22n5a01.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2015.

SERRA, O. A.; SOUSA, F. P. C. Terras-raras no Brasil: histórico, produção e perspectivas. **Química Nova**, v. 37, p. 753-760, 2014. Disponível em: <<http://quimicanova.sbq.org.br/imagebank/pdf/v37n4a29.pdf>>. Acesso em: 10/01/2016.

SERRA, O. A.; LIMA, J. F.; DE SOUSA FILHO, P. C. A Luz e as Terras-raras. **Revista Virtual de Química**, p. 242-264, 2015. Disponível em: <<http://www.uff.br/RVQ/index.php/rvq/article/download/941/515>>. Acesso em: 15 jan. 2016.

SCHUESSLER R. L. Missouri mine shines spotlight on global battle for rare-earth metals. **Al Jazeera**. 30 jan. 2014. Disponível em: <<http://america.aljazeera.com/articles/2014/1/30/us-counts-on-pearidgerareearthsmine.html>>. Acesso em: 20 Dez. 2017.

SMITH, A. **A riqueza das nações**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

SOUZA, M. Especialistas defendem mais investimento para exploração de terras-raras. **Agência Câmara Notícias**. Ago. 2013. Disponível em: <<http://www2.camara.leg.br/camaranoticias/noticias/MEIO-AMBIENTE/450621-ESPECIALISTAS-DEFENDEM-MAIS-INVESTIMENTO-PARA-EXPLORACAO-DE-TERRAS-RARAS.html>>. Acesso em: 30 jan. 2016.



SOUZA, P. A. **Avaliação Econômica de Projetos de Mineração**: análise de sensibilidade e análise de risco. 2. ed. Belo Horizonte: Itec, 2009.

STANWAY, D. Fate of global rare earth miners rests on China smuggling crackdown. **Reuters**. 2015. Disponível em: <<https://ca.reuters.com/article/technologyNews/idCAKCN0PH2DO20150707>>. Acesso em: 10 dez. 2017.

STRATEGIC METALS & RARE EARTHS LETTER INTERNATIONAL. June 2015. 18 p. Disponível em: <[http://www.metalcommodities-ip.com/wp-content/uploads/2015/10/SMRE\\_LETTER\\_June2015Update.pdf](http://www.metalcommodities-ip.com/wp-content/uploads/2015/10/SMRE_LETTER_June2015Update.pdf)>. Acesso em: 2 mar. 2016.

TAKEHARA, L.; SILVEIRA, F. V.; SANTOS, R. V. Potentiality of rare earth elements in Brazil. In: LIMA, I. B. de; LEAL, W. (Eds.). **Rare Earths Industry**: technological, economic, and environmental implications. 1. ed. Amsterdã: Elsevier, 2015, v. 1, p. 57-72. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128023280000048>>. Acesso em: 11 nov. 2016.

THE HERITAGE FOUNDATION. **Index of Economic Freedom**. 2016. Disponível em: <<http://www.heritage.org/index/explore?view=by-region-country-year>>. Acesso em: 12 jan. 2016.

TECHNOLOGY METALS RESEARCH. **TMR Advanced Rare-Earth Projects Index**. 2015. Disponível em: <<http://www.techmetalsresearch.com/metrics-indices/tmr-advanced-rare-earth-projects-index/>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

TOLENTINO, M.; ROCHA-FILHO, R. C.; CHAGAS, A. P. Alguns aspectos históricos da classificação periódica dos elementos químicos. **Química Nova**, v. 20, p. 103-117, 1997.

TOMRA. **About sensor-based sorting**. 2017. Disponível em: <<https://www.tomra.com/en/sorting/mining/about-sensor-based-sorting/>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

TANTALUS RARE EARTHS AG. **Regulatory News**. 2017. Disponível em: <[http://www.tre-ag.com/media/regulatory-news.aspx?sc\\_lang=en](http://www.tre-ag.com/media/regulatory-news.aspx?sc_lang=en)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

TSE, P. **China's Rare-Earth Industry**: Open-File Report 2011-1042. Reston: US Geological Survey, 2011. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/of/2011/1042/of2011-1042.pdf>>. Acesso em: 24 fev. 2016.

UNITED KINGDOM. British Geological Survey. Natural Environment Research Council. Rare Earth Elements. **Mineral Profiles**. 2011. Disponível em: <<http://www.bgs.ac.uk/mineralsUK/statistics/mineralProfiles.html>>. Acesso em: 26 jan. 2016.

\_\_\_\_\_. British Geological Survey. **Risk List 2012: Current Supply Risk Index for Chemical Elements or Element Groups Which are of Economic Value**. 2012. Disponível em: <<http://www.bgs.ac.uk/mineralsuk/statistics/risklist.html>>. Acesso em: 6 jan. 2016.

\_\_\_\_\_. British Geological Survey. **World Mineral Production (2010-2014)**. 2016. Disponível em: <<http://www.bgs.ac.uk/mineralsuk/statistics/worldStatistics.html>>. Acesso em: 26 fev. 2016.

UNITED STATES. Environmental Protection Agency (EPA). **Rare Earth Elements: A Review of Production, Processing, Recycling, and Associated Environmental Issues**. Cincinnati: EPA, 2012. Disponível em: <<https://nepis.epa.gov/Exe/ZyPURL.cgi?Dockey=P100EUBC.TXT>>. Acesso em: 10 fev. 2016.

\_\_\_\_\_. Environmental Protection Agency (EPA). **Identification and Description of Mineral Processing Sectors and Waste Streams**. Washington, EPA, 1991. Disponível em: <<http://www.epa.gov/osw/nonhaz/industrial/special/mining/minedock/id/>>. Acesso em: 15 fev. 2016.

\_\_\_\_\_. National Research Council. **Competitiveness of the U.S. Minerals and Metals Industry**. Washington: National Academy Press, 1990. Disponível em: <<http://www.nap.edu/read/1545/chapter/3>>. Acesso em: 23 fev. 2016.

\_\_\_\_\_. US Department of Energy. **Critical Materials Strategy: Summary**. Washington: DOE, 2010. 4p. Disponível em: <[http://energy.gov/sites/prod/files/10\\_Critical\\_Materials\\_Strategy\\_Exec\\_Summary\\_final.pdf](http://energy.gov/sites/prod/files/10_Critical_Materials_Strategy_Exec_Summary_final.pdf)>. Acesso em: 01 dez. 2015.

\_\_\_\_\_. United States Geological Survey (USGS). **Rare earth elements: U.S. Mineral Commodity Summaries**. Reston: USGS, 2015. Disponível em: <[http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare\\_earths/mcs-2016-raree.pdf](http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare_earths/mcs-2016-raree.pdf)>. Acesso em: 15 dez. 2017.

\_\_\_\_\_. United States Geological Survey (USGS). **Rare earth elements: U.S. Mineral Commodity Summaries**. Reston: USGS, 2016. Disponível em: <[http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare\\_earths/mcs-2016-raree.pdf](http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare_earths/mcs-2016-raree.pdf)>. Acesso em: 15 dez. 2017.

\_\_\_\_\_. United States Geological Survey (USGS). **Rare earth elements: U.S. Mineral Commodity Summaries**. Reston: USGS, 2017. Disponível em: <[http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare\\_earths/mcs-2016-raree.pdf](http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare_earths/mcs-2016-raree.pdf)>. Acesso em: 20 Jan. 2018.

VERAS, M. M. et al. Amining breakthrough: preconcentration by sensor-based sorting. **Mining Engineering**, v. 68, n. 3, p. 38-42, 2016.

VERESCHAGIN, Y. A. et al. Rare-earth magnets in Russia: raw materials, processing, properties control and output issues. **J. Iron Steel Res. Int.**, v. 13

(Supplement 1), p. 23-32, 2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1006706X08601570>>. Acesso em: 10 dez. 2015.

VERPLANCK, P. L.; VAN GOSEN, B. S. **Carbonatite and alkaline intrusion-related rare earth element deposits**: a deposit model: open-file report 2011–1256. Washington: USGS, 2011. 6 p. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/of/2011/1256/report/OF11-1256.pdf>>. Acesso em: 20 dez. 2015.

VIEIRA, E. V.; LINS, F. F. **Concentração de minérios de terras-raras**: uma revisão. Série Tecnologia Mineral, n. 73. 59 p. Rio de Janeiro: CETEM/MCTI, 1997. Disponível em: <[http://www.cetem.gov.br/publicacoes/serie-tecnologia-mineral/item/download/382\\_35f9cacda6142020a247ca34e57d9c3c](http://www.cetem.gov.br/publicacoes/serie-tecnologia-mineral/item/download/382_35f9cacda6142020a247ca34e57d9c3c)>. Acesso em: 20 dez. 2015.

WANG, J.; FAN, Y.; ZHOU, L. Study on the technologic conditions for rare earth chloride production using alkaline method. **Inner Mong. Petrochem. Ind.**, v. 25, n. 3, p. 15-17, 1999.

WANG, J., WANG, X. Comprehensive exploitation and cleaning production technology of Bayan Obo rare earth ore. **Chin. Rare Earth**, v. 27, n. 1, p. 103-105, 2006.

WEDERPOHL, K.H. Handbook of Geochemistry. New York: Springer-Verlag, 1969. v2/5.

WORLD BANK. **The Logistics Performance Index**. 2016. Disponível em: <<http://lpi.worldbank.org/>>. Acesso em: 15 de out. 2016.

WORLD NUCLEAR ASSOCIATION. Uranium from Rare Earths Deposits. **Information Library**. 2015. Disponível em: <<http://www.world-nuclear.org/information-library/nuclear-fuel-cycle/uranium-resources/uranium-from-rare-earths-deposits.aspx>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

WU, Y.; XIAO, X.; SONG, Z. Competitiveness analysis of coal industry in China: a diamond model study. **Resources Policy**, v. 52, p. 39-53, Jan. 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030142071630085X>>. Acesso em: 10 jun. 2017.

WÜBBEKE, J. Rare earth elements in China: policies and narratives of reinventing an industry. **Resources Policy**, Berlin, v. 38, p. 384-394, 2013. Disponível em: <[http://econpapers.repec.org/article/eeejrpoli/v\\_3a38\\_3ay\\_3a2013\\_3ai\\_3a3\\_3ap\\_3a384-394.htm](http://econpapers.repec.org/article/eeejrpoli/v_3a38_3ay_3a2013_3ai_3a3_3ap_3a384-394.htm)>. Acesso em: 15 fev. 2016.

XIE, Y. L. et al. Rare Earth Element Deposits in China. **Reviews in Economic Geology**, v. 18, p. 115-136, May 2016. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/301889592\\_Rare\\_Earth\\_Element\\_Deposits\\_in\\_China](https://www.researchgate.net/publication/301889592_Rare_Earth_Element_Deposits_in_China)>. Acesso em: 26 ago. 2016.

ZAJEC, O. Controle da matéria-prima e tecnologias em disputa. **Le Monde diplomatique Brasil**, p. 22-23, nov. 2010. Disponível em: <<http://www.diplomatique.org.br/artigo.php?id=813>>. Acesso em: 20 fev. 2016.

ZEPF, V. An overview of the usefulness and strategic value of rare earth metals. In: LIMA, I. B. de; LEAL, W. (Eds.). **Rare Earth Industry: Technological, Economic and Environmental Implications**. Amsterdam: Elsevier, 2015. p. 3-17. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/book/9780128023280>>. Acesso em: 24 fev. 2016.)

## **APÊNDICE A – PROCEDIMENTOS PARA SELEÇÃO DOS DEPÓSITOS DO PORTFÓLIO DE DEPÓSITOS DE CLASSE MUNDIAL–PDCM**

O procedimento começa pela etapa de triagem inicial, onde são selecionados os depósitos/projetos com recursos ou reservas formalmente definidos, cujas informações, tenham sido publicadas no formato de relatório técnico de acordo com as diretrizes de uma das certificações ou correspondentes aos códigos: NI 43-101, o Código JORC ou o Código SAMREC. No caso dos depósitos/projetos em atividade (mina), são selecionados os que possuem reservas conhecidas publicamente (divulgadas).

Após a triagem inicial se aplica as 7 premissas descritas no capítulo 4 (premissas para determinação do – PDCM), conforme demonstrado a seguir.

Basicamente a seleção dos depósitos para o “portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM)” é constituída de 4 etapas:

- etapa 1: triagem inicial;
- etapa 2: adoção da premissa 1\* ;
- etapa 3: adoção da premissa 2\*; e
- etapa 4: adoção das premissas 3 a 7\*.

(\*premissas utilizadas na seleção dos depósitos do PDCM, descritas no capítulo 4).

### **• Premissas para seleção do PDCM**

**1) Quantidade e qualidade de OTR dos depósitos, inicialmente, garantir valor mínimo na relação: teor (fração) x tonelagem de minério *in situ*), no intuito de garantir longevidade (vida longa) com competitividade ao empreendimento mineiro/projeto de TR:** seleção dos depósitos que possuem tonelagens de OTR contidos no depósito, com vistas a garantir o fornecimento de minério de TR por um período mínimo de 30 anos de operação (25-30 anos é o tempo de vida útil comumente utilizado para avaliações econômicas de projetos). Devido ao valor do dinheiro no tempo, a maioria dos projetos que são prolongados além dos 20 anos (de vida útil), apresentam efeitos pequenos nas suas rentabilidades (dadas pela taxa interna de retorno - TIR). A taxa interna de retorno – TIR, de projetos com vida úteis superiores a

25 anos (por exemplo: 25, 50, 100) tende a se estabilizar, produzindo um efeito irrelevante na rentabilidade (Stermole & Stermole, 1984 apud SOUZA, 2009). Assim foi adotada uma tonelagem mínima de OTR contidos nos depósitos a serem selecionados para o portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM): **> 400.000 toneladas de OTR *in situ*** (MD+ID+IF), tomando-se como referência uma produção média anual de 11.000 toneladas de OTR (como base na média de produção anual prevista nos projetos atualmente em fase avançada de desenvolvimento), isto significa algo próximo de 324.000 toneladas de OTR efetivamente processada, em 30 anos de operação, tomando-se como base: 90% de reserva lavrável e 90% de recuperação na lavra do minério.

**Adicionalmente a essa premissa, se aplica o procedimento de seleção dos depósitos do PDCM, tomando-se como base os depósitos que possuem teores e tonelagens de óxidos de terras raras de acordo com as seguintes condições:** (teor OTR wt%)  $\geq$  Mediana; e na sequência (tonelagem OTR Mt)  $\geq$  Mediana. Os procedimentos nesta etapa são aplicados nos depósitos selecionados na etapa de triagem inicial;

**2) depósitos com melhor distribuição relativa potencial de ETR cujo mercado, seja mais estável no curto, médio e longo prazo:** de acordo como as distribuições comumente utilizadas na indústria de TR, selecionar os depósitos que possuem distribuição relativa potencial:  $\geq$  Mediana da Distribuição Relativa Potencial - DRP (%) (mediana obtida dos valores de DRP (%) dos depósitos selecionados até esta fase de seleção);

- ETRL (ou *LREE*: La, Ce, Pr, Nd, Sm e Eu) – elementos de terras leves: possui baixo valor de mercado;

- ETRP (ou *HREE*: Ga, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos de terras pesados: possui alto valor de mercado;

- ETRMP (ou *MHREE*: Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos de terras médios + pesados: possui maior valor de mercado;

- ETRC (ou *CREE*: Nd, Eu, Tb, Dy e Y) – elementos de terras raras críticos: possui alto valor de mercado e implicações semelhantes às dos *MFEE*;

- ETRAI (ou MFEE: Nd, Pr, Tb, Dy) – elementos de terras raras para alimentação/produção de ímãs: possui mercado mais forte e estável no curto, médio e longo prazo (BOGNER, 2015).

Contudo, o depósito com a melhor distribuição relativa potencial de ETR cujo mercado, tende a ser mais estável e promissor no curto, médio e longo prazo será o que possuir maior concentração de ETRC e ETRAI (futuramente as composições destas categorias poderão ser revisadas, pois o mercado é dinâmico).

Distribuição Relativa Potencial - DRP (%) = [(Cesta de OTR do depósito referente aos ETRC + ETRAI, em US\$/kg) / (cesta de OTR do depósito, em US\$/kg) x 100 %];

**3) acesso ao bem mineral:** não há impedimentos de acesso ao depósito, seja por restrições provenientes de legislação ambiental (área de proteção), área indígena ou de reivindicação de terras em disputa, área de interesse turístico e área agrícola de alto rendimento, etc.;

**4) aproveitamento comercial dos depósitos:** os óxidos de terras raras serão produzidos como produto principal (projetos de terras raras), podendo ser aproveitados outros metais pertencentes ao mesmo depósito como subprodutos da mineração de TR, porém, inicialmente os radioativos não são aproveitados economicamente, tendo que ser armazenados em condições adequadas);

**5) Elementos radioativos:** seleção dos depósitos/projetos cujos teores de radioativos tório e urânio, possuam valores in situ abaixo de: urânio < 0,05 % e/ou tório (ThO<sub>2</sub>) < 0,1% (com base nos dados dos principais depósitos de terras raras em operação, cujo o aproveitamento econômico é voltado exclusivamente para as terras raras, podendo ter outros metais como subprodutos. Contudo, inicialmente os radioativos não são aproveitados economicamente, tendo que ser armazenados em condições adequadas);

**6) Jurisdição/pais com boa favorabilidade para investimentos em mineração:** seleção dos depósitos remanescentes das premissas 1-5, com classificação no Índice de Atratividade de Investimento  $\geq$  Mediana (na classificação de jurisdições/pais, publicada pelo Instituto Fraser, no ano tomado como base para análise de competitividade, no caso do MCRM-TR, ano-base 2015);

**7) projetos/depósitos com estimativas das variáveis econômicas divulgadas:** seleção de projetos com estudo de aproveitamento econômico preliminar ou avançado (relatório de avaliação econômica preliminar – AEP, pré-viabilidade econômica ou viabilidade econômica). Possibilitando assim, o conhecimento das variáveis do modelo de todos os depósitos /projetos, para viabilizar a modelagem comparativa do portfólio de depósitos com o depósito em análise (Idem premissa 6 de seleção do PDCM).

**- Etapa 1: triagem inicial;**





- Etapa 1(continuação): triagem inicial;

<b>Etapa 1</b> Triagem Inicial (lista de depósitos) >>>
--

	<b>Lista de depósitos (pós triagem inicial)</b>		<b>OTR (wt%)</b>	<b>OTR (Mt)</b>
1	Aksu Diamas	TUR	0,07	0,35
2	Araxá	BRA	4,21	1,19
3	Ashram Main	CAN	1,90	4,55
4	Ashram MHREO	CAN	1,61	0,15
5	Bear Lodge	USA	2,68	1,55
6	Bokan	USA	0,60	0,03
7	Brockmans	AUS	0,21	0,08
8	Browns Range	AUS	0,63	0,06
9	Buckton	CAN	0,03	1,03
10	Buckton South	CAN	0,03	0,15
11	Charley Creek (JV)	AUS	0,03	0,24
12	Clay-Howells	CAN	0,73	0,06
13	Cummins Range	AUS	1,74	0,09
14	Dubbo Zirconia Project	AUS	0,89	0,65
15	Eco Ridge	CAN	0,16	0,09
16	Elliott Lake Teasdale	CAN	0,19	0,10
17	Foxtrot	CAN	1,01	0,15
18	Glenover (JV)	ZAF	2,13	0,22
19	Grande-Vallée	CAN	0,05	0,60
20	Hoidas Lake	CAN	2,40	0,07
21	Kangankunde	MWI	4,24	0,11
22	Kipawa	CAN	0,39	0,11
23	Kutessey II	KGZ	0,26	0,05
24	Kvanefjeld	GRL	1,09	7,34
25	La Paz	USA	0,04	0,05
26	Lavergne-Springer	CAN	1,16	0,20
27	Lofdal	NAM	0,59	0,01
28	Milo	AUS	0,06	0,11
29	Montviel	CAN	1,45	3,87
30	Mount Weld CLD	AUS	9,73	1,45
31	Mount Weld Duncan	AUS	4,84	0,44
32	Mountain Pass	USA	6,57	2,08
33	Mrima Hill High Grade	KEN	7,04	1,89
34	Mrima Hill Main	KEN	3,21	4,25
35	Nechalacho Basal	CAN	1,43	1,80
36	Nechalacho Upper	CAN	1,32	2,35
37	Ngualla	TZA	4,19	1,75
38	Niobec	CAN	1,73	18,31
39	Nolans	AUS	2,59	1,45
40	Norra Kärr	SWE	0,61	0,19
41	Olserum	SWE	0,62	0,05
42	Round Top	USA	0,06	0,54
43	Sarfartoq	GRL	1,72	0,14
44	Serra Verde	BRA	0,16	1,45
45	Songwe Hill	MWI	1,48	0,47
46	Sørensen	GRL	1,10	2,66
47	Steenkampskraal	ZAF	14,00	0,10
48	Storkwitz	GER	0,45	0,02
49	Strange Lake Enriched (Zona B)	CAN	1,44	0,29
50	Strange Lake Granite	CAN	0,87	4,11
51	Tanbreez	GRL	0,65	27,95
52	Tantalus	MDG	0,08	0,50
53	Two Tom	CAN	1,18	0,48
54	Wigu Hill Twiga	TZA	5,27	0,03
55	Xiluvo	MOZ	2,03	0,02
56	Yangibana (JV)	AUS	1,52	0,10
57	Zandkopsdrift (JV)	ZAF	1,89	0,88
58	Zone 3	GRL	1,16	1,11

- Etapa 2: adoção da premissa 1;

**Etapa 2**  
**Premissa 1 (na seqüência: OTR wt% e OTR Mt)**

Lista de depósitos (pós premissa 1 - OTR wt%)			OTR	Lista de depósitos (pós premissa 1 - OTR Mt)			OTR (Mt)		
47	Steenkampskraal	ZAF	14,00	1	19	Niobec	CAN	18,31	1
30	Mount Weld CLD	AUS	9,73	2	16	Ashram Main	CAN	4,55	2
33	Mrima Hill High Grade	KEN	7,04	3	10	Mrima Hill Main	KEN	4,25	3
32	Mountain Pass	USA	6,57	4	24	Montviel	CAN	3,87	4
54	Wigu Hill Twiga	TZA	5,27	5	27	Nechalacho Upper	CAN	2,35	5
31	Mount Weld Duncan	AUS	4,84	6	4	Mountain Pass	USA	2,08	6
21	Kangankunde	MWI	4,24	7	3	Mrima Hill High Grade	KEN	1,89	7
2	Araxá	BRA	4,21	8	26	Nechalacho Basal	CAN	1,80	8
37	Ngualla	TZA	4,19	9	9	Ngualla	TZA	1,75	9
34	Mrima Hill Main	KEN	3,21	10	11	Bear Lodge	USA	1,55	10
5	Bear Lodge	USA	2,68	11	2	Mount Weld CLD	AUS	1,45	11
39	Nolans	AUS	2,59	12	12	Nolans	AUS	1,45	12
20	Hoidas Lake	CAN	2,40	13	8	Araxá	BRA	1,19	13
18	Glenover (JV)	ZAF	2,13	14	30	Zone 3	GRL	1,11	14
55	Xiluvo	MOZ	2,03	15	17	Zandkopsdrift (JV)	ZAF	0,88	15
3	Ashram Main	CAN	1,90	16	28	Two Tom	CAN	0,48	
57	Zandkopsdrift (JV)	ZAF	1,89	17	23	Songwe Hill	MWI	0,47	
13	Cummins Range	AUS	1,74	18	6	Mount Weld Duncan	AUS	0,44	
38	Niobec	CAN	1,73	19	25	Strange Lake Enriched (Zona B)	CAN	0,29	
43	Sarfartoq	GRL	1,72	20	14	Glenover (JV)	ZAF	0,22	
4	Ashram MHREO	CAN	1,61	21	29	Lavergne-Springer	CAN	0,20	
56	Yangibana (JV)	AUS	1,52	22	21	Ashram MHREO	CAN	0,15	
45	Songwe Hill	MWI	1,48	23	20	Sarfartoq	GRL	0,14	
29	Montviel	CAN	1,45	24	7	Kangankunde	MWI	0,11	
49	Strange Lake Enriched (Zona B)	CAN	1,44	25	22	Yangibana (JV)	AUS	0,10	
35	Nechalacho Basal	CAN	1,43	26	1	Steenkampskraal	ZAF	0,10	
36	Nechalacho Upper	CAN	1,32	27	18	Cummins Range	AUS	0,09	
53	Two Tom	CAN	1,18	28	13	Hoidas Lake	CAN	0,07	
26	Lavergne-Springer	CAN	1,16	29	5	Wigu Hill Twiga	TZA	0,03	
58	Zone 3	GRL	1,16	30	15	Xiluvo	MOZ	0,02	
46	Sørensen	GRL	1,10						
24	Kvanefjeld	GRL	1,09						
17	Foxtrot	CAN	1,01						
14	Dubbo Zirconia Project	AUS	0,89						
50	Strange Lake Granite	CAN	0,87						
12	Clay-Howells	CAN	0,73						
51	Tanbreez	GRL	0,65						
8	Browns Range	AUS	0,63						
41	Olserum	SWE	0,62						
40	Norra Kärr	SWE	0,61						
6	Bokan	USA	0,60						
27	Lofdal	NAM	0,59						
48	Storkwitz	GER	0,45						
22	Kipawa	CAN	0,39						
23	Kutessay II	KGZ	0,26						
7	Brockmans	AUS	0,21						
16	Elliott Lake Teasdale	CAN	0,19						
15	Eco Ridge	CAN	0,16						
44	Serra Verde	BRA	0,16						
52	Tantalus	MDG	0,08						
1	Aksu Diamas	TUR	0,07						
28	Milo	AUS	0,06						
42	Round Top	USA	0,06						
19	Grande-Vallée	CAN	0,05						
25	La Paz	USA	0,04						
9	Buckton	CAN	0,03						
10	Buckton South	CAN	0,03						
11	Charley Creek (JV)	AUS	0,03						

Mediana 0,68

**Nota: Distribuição relativa potencial**

- ETRL (ou LREE: La, Ce, Pr, Nd, Sm e Eu) – elementos de terras leves: possui baixo valor de mercado;

- ETRP (ou HREE: Ga, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos de terras pesados: possui alto valor de mercado;

- ETRMP (ou MHREE: Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu e Y) – elementos de terras médios + pesados: possui maior valor de mercado;

- ETRC (ou CREE: Nd, Eu, Tb, Dy e Y) – elementos de terras raras críticas: possui alto valor de mercado e implicações semelhantes as dos MFEE;

- ETRAI (ou MFEE: Nd, Pr, Tb, Dy) – elementos de terras raras para alimentação/produção de ímãs: possui mercado mais forte e estável no curto, médio e longo prazo (BOGNER, 2015);

**Distribuição relativa potencial (%) = [(Cesta de OTR do depósito referente aos ETRC + ETRAI, em US\$/kg) / (cesta de OTR do depósito, em US\$/kg) x 100 %]**

Mediana 1,16

**- Etapa 3: adoção da premissa 2 (Distribuição Relativa Potencia (DRP %));**

**Etapa 3**  
**Premissa 2** >>>

	<b>Distribuição Relativa Potencial (%) &gt; mediana</b>		<b>OTR (Mt)</b>
8	Nechalacho Basal	CAN	88,32
10	Bear Lodge	USA	87,10
12	Nolans	AUS	85,99
5	Nechalacho Upper	CAN	85,94
3	Mrima Hill Main	KEN	85,52
15	Zandkopsdrift (JV)	ZAF	84,61
11	Mount Weld CLD	AUS	84,37
1	Niobec	CAN	84,19
2	Ashram Main	CAN	83,50
4	Montviel	CAN	83,19
7	Mrima Hill High Gra	KEN	83,04
9	Ngualla	TZA	82,17
14	Zone 3	GRL	81,61
13	Araxá	BRA	80,85
6	Mountain Pass	USA	76,50

**Mediana** 84,19

**- Etapa 4: adoção das premissas 3 a 7.**

>>> **Etapa 4** **Premissas 3, 4, 5, 6 e 7** >>>

<b>Pemissas qualitativas (3, 4, 5, 6 e 7)</b>	
Nechalacho Basal	CAN
Bear Lodge	USA
Nolans	AUS
Nechalacho Upper (excluído nesta etapa)	CAN
Mrima Hill Main (excluído nesta etapa)	KEN
Zandkopsdrift (JV) (excluído nesta etapa)	ZAF
Mount Weld CLD	AUS
Niobec (excluído nesta etapa)	CAN

<b>Portfólio de Depósitos de Classe Mundial (PDCM)</b>	
Nechalacho Basal	CAN
Bear Lodge	USA
Nolans	AUS
Mount Weld CLD	AUS

De acordo com os procedimentos (etapas 1-4), foram selecionados 5 depósitos para o “Portfólio de Depósitos de Classe Mundial – PDCM”. Vale destacar que este método de seleção de depósitos para o PDCM, é dinâmico e com isto, dependendo de novas atualizações nos dados dos depósitos analisados, ou também a inclusão de novos depósitos na análise, poderá gerar novos resultados para o portfólio (PDCM).

## Referências (Banco de informações dos depósitos analisados)

BRITISH GEOLOGICAL SURVEY. 2011. Natural Environment Research Council. Rare Earth Elements. Disponível em: <<http://www.bgs.ac.uk/mineralsUK/statistics/mineralProfiles.html>>. Acesso em 26 jan. 2016.

GOODENOUGH, K.M.; SCHILLING, J.; JONSSON, E.; KALVIG, P.; CHARLES, N.; TUDURI, J.; DEADY, E.A.; SADEGHI, M.; SCHIELLERUP, H.; MULLER, A.; BERTRAND, G.; ARVANIDITIS, N.; ELIOPOULOS, D.G.; SHAW, R.A.; THRANE, K.; KEULEN, N.. 2016 Europe's rare earth element resource potential: an overview of REE metallogenetic provinces and their geodynamic setting. *Ore Geology Reviews*, 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169136815300755>>. Acesso em: 24 abr. 2016.

JAIRETH, S.; M., D.H., MIEZITIS, Y.: Geological setting and resources of the major rare-earth-element deposits in Australia. *Ore Geology Reviews*, 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169136814000353>>. Acesso em: nov. 2015.

ORRIS, GRETA J., AND GRAUCH, RICHARD I., 2002, Rare earth element mines, deposits, and occurrences: U.S. Geological Survey, Open-File Report 02-189. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/of/2002/of02-189/>>. Acesso em: 10 dez. 2015.

TMR (Technology metals research). TMR Advanced Rare-Earth Projects Index. 2015. Disponível em: <<http://www.techmetalsresearch.com/metrics-indices/tmr-advanced-rare-earth-projects-index/>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

XIE, Y.L.; HOU, Z.Q.; GOLDFARB, R.J.; GUO, X.; WANG, L.. Rare Earth Element Deposits in China. Chapter 6. may 2016. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/301889592\\_Rare\\_Earth\\_Element\\_Deposits\\_in\\_China](https://www.researchgate.net/publication/301889592_Rare_Earth_Element_Deposits_in_China)>. Acesso em: 26 ago. 2016.

## **APÊNDICE B – PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO NO MCRM-TR E ALIMENTAÇÃO DA PLANILHA DE RESULTADOS**

### **1.1 – Banco de dados**

Após seleção do PDCM depósitos/projetos de terras-raras conforme procedimentos descritos no **APÊNDICE A**, é alimentada uma planilha (em software Microsoft Excel versão 2016) com as informações do PDCM, com 4 depósitos selecionados) e dos DAs (depósitos em análise). Foram escolhidos 8 depósitos localizados em diferentes regiões para teste do modelo. Os 8 depósitos escolhidos para o teste do modelo foram denominados de: D1 –TM, D2-TM, D3-TM, D4-TM, D5-TM, D6-TM, D7-TM, D8-TM. Também foram selecionados 5 depósitos/projetos, para estudo de caso Brasil. A escolha para estudo de caso destes 5 depósitos, foi feita tomando-se como base e subsídio, os trabalhos de Takehara (2015) e Petter, R (2015), que consideram em seus trabalhos os depósitos/projetos com maior potencial (em 2015) para o aproveitamento dos óxidos de terras raras no Brasil. Os 5 depósitos brasileiros escolhidos para o teste do modelo foram denominados de: D1 –BR, D2-BR, D3-BR, D4-BR, D5-BR, D6-BR, D7-BR, D8-BR.

### **1.2 – Procedimento de Simulação no Risk Simulator (© 2005-2016 Real Options Valuation)**

Os procedimentos foram realizados em etapas conforme descritas no **ANEXO II (parte 3)**, isto é:

- a) Iniciar/criar um novo perfil de simulação;
- b) Definir valores de entrada nas células relevantes;
- c) Definir resultados de previsão nas células relevantes;
- d) Executar a simulação; e
- e) Análise e interpretação dos resultados.

A seguir serão demonstrados estes procedimentos para alguns dos depósitos analisados, uma vez que, em geral, os procedimentos são semelhantes para todos os depósitos/projetos (diferindo apenas nas precisões dos dados, adotadas nos tipos de distribuições selecionadas para os valores de

entrada dos respectivos depósitos/projetos), não é necessário fazer demonstrações para todos.

- Montagem e execução da simulação pelo método de Monte Carlo nos depósitos do portfólio de depósitos de classe mundial (PDCM). Figuras 1 e 2.

### 1– Foi criado um novo perfil de simulação

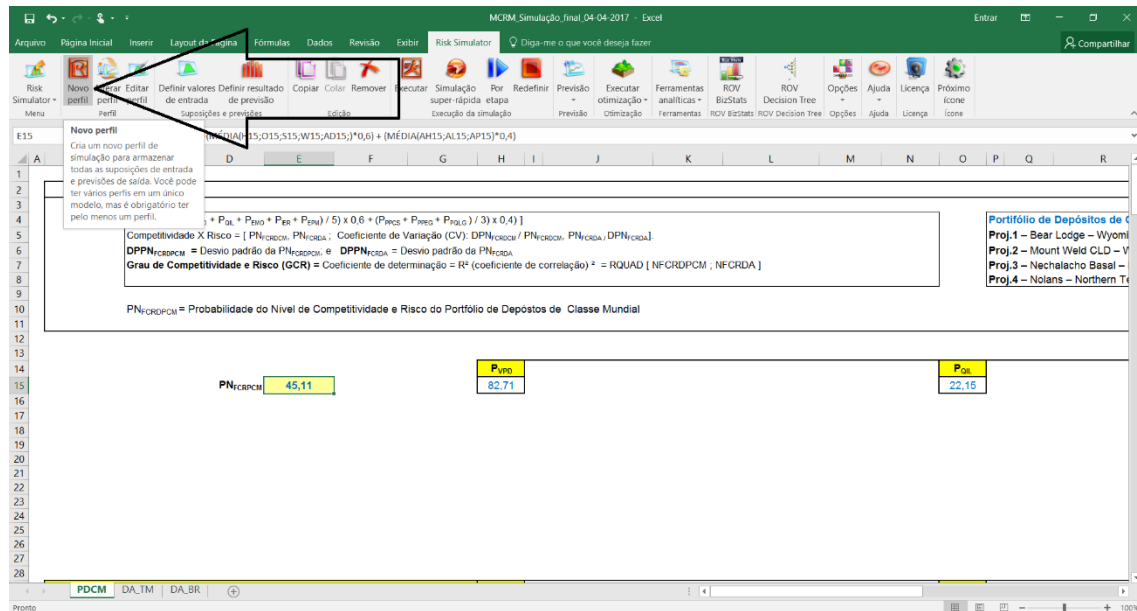


Figura 1 – Criação de um perfil de simulação

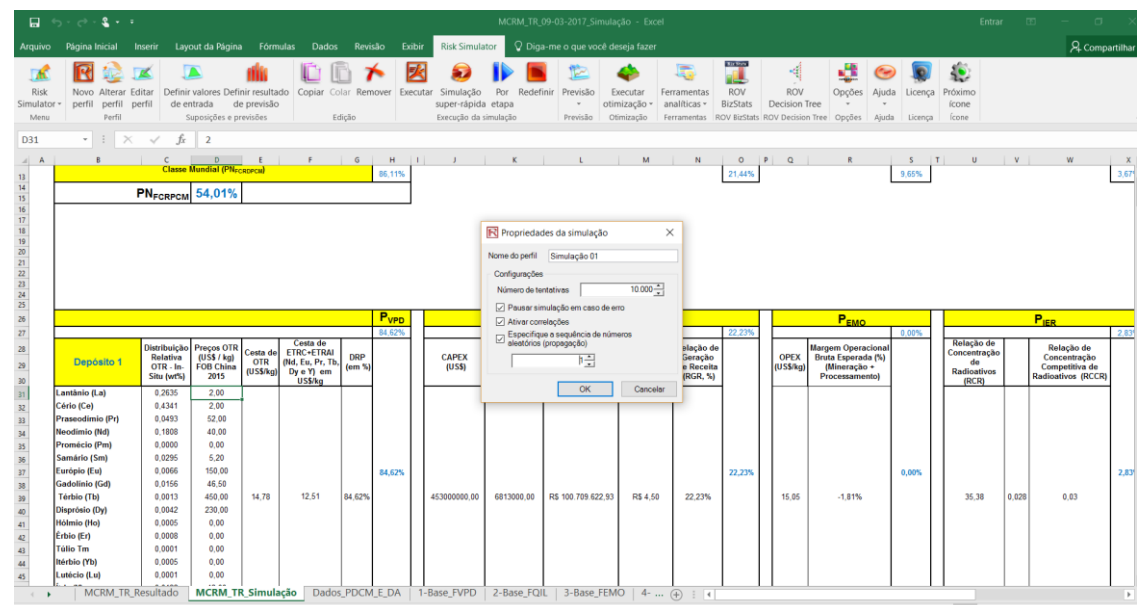


Figura 2- Configuração do novo perfil de simulação em criação (número de tentativas adotadas: 10.000).

Após a criação de um novo Perfil de simulação, foram definidas as precisões e os tipos de distribuições para as variáveis mais importantes (relacionadas com os fatores de competitividade e risco) dos respectivos depósitos/projetos, conforme mostram os quadros 1 e 2.

Quadro 1 – Fases dos Projetos, na época em que os dados foram obtidos.

	DEPÓSITOS/PROJETO	FASE DO PROJETO	PRECISÃO ADOTADA PARA SIMULAÇÃO (MONTE CARLO)
<b>Depósitos do PDCM</b>			
PROJ.1	Bear Lodge	Pré-viabilidade	± 25 %
PROJ.2	Mount Weld CLD	Viabilidade/operação	± 15 %
PROJ.3	Nechalacho Basal	Viabilidade	± 15 %
PROJ.4	Nolans	Pré-viabilidade	± 25%
<b>Depósitos para Teste do Modelo - TM</b>			
PROJ.1	Mountain Pass	Viabilidade/operação	± 15 %
PROJ.2	Mount Weld CLD	Viabilidade/operação	± 15 %
PROJ.3	Ashram Main	Avaliação Preliminar/PAE/Conceitual	± 50 %
PROJ.4	Dubbo Zirconia Project (DZP)	Viabilidade	± 15 %
PROJ.5	Lofdal	Avaliação Preliminar/PAE/Conceitual	± 50 %
PROJ.6	Norra Kärr	Pré-viabilidade	± 20 %
PROJ.7	Ngulla	Pré-viabilidade	± 25 %
PROJ.8	Zandkopsdrift (JV)	Pré-viabilidade	± 25 %
<b>Depósitos Estudo de Caso Brasil - BR</b>			
PROJ.1	Serra Verde - MSV	Pré-viabilidade	± 25 %
PROJ.2	Araxá - CBMM	Pré-viabilidade	± 25 %
PROJ.3	Catalão 2 - VALE	Avaliação Preliminar/PAE/Conceitual	± 50 %
PROJ.4	Araxá - MBAC	Avaliação Preliminar/PAE/Conceitual	± 50 %
PROJ.5	Morro do Ferro - Primester	Avaliação Preliminar/PAE/Conceitual	± 50 %

Quadro 2 – Principais variáveis de competitividade e risco, identificadas para simulação no MCRM-TR, pelo método de Monte Carlo e os tipos de distribuições definidas/adotadas para o comportamento dos respectivos dados.

Preços de cada um dos 17 OTR (US\$ / kg):	Distribuição triangular
CAPEX (US\$):	Distribuição triangular
Produção Esperada (Kg de OTR / ano):	Distribuição uniforme
OPEX (US\$ / kg OTR):	Distribuição triangular
Relação de Concentração de Radioativos (RCR):	Distribuição uniforme
P <sub>PPCS</sub> (% , nas componentes de 1 até 10):	Distribuição normal
P <sub>PPEG</sub> (% , nas componentes de 1 até 10):	Distribuição normal
P <sub>PQLG</sub> (% , nas componentes de 1 até 5):	Distribuição normal



A seguir são apresentados os dados calculados e/ou determinados para se definir as respectivas precisões e parâmetros das variáveis mais relevantes de entrada dos fatores:  $F_{VPD}$ ,  $F_{QIL}$ ,  $F_{EMO}$ ,  $F_{IER}$ ,  $F_{EPM}$ ,  $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$  e  $F_{PQLG}$ . Figuras 3 e 4.

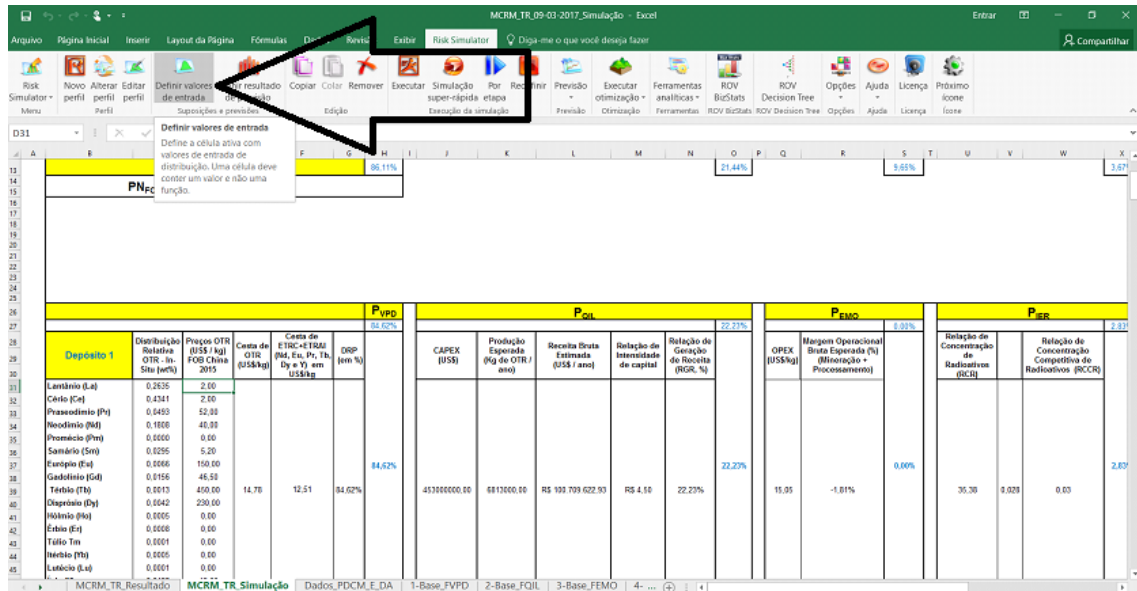


Figura 3 – Definição dos valores de entrada nas células relevantes

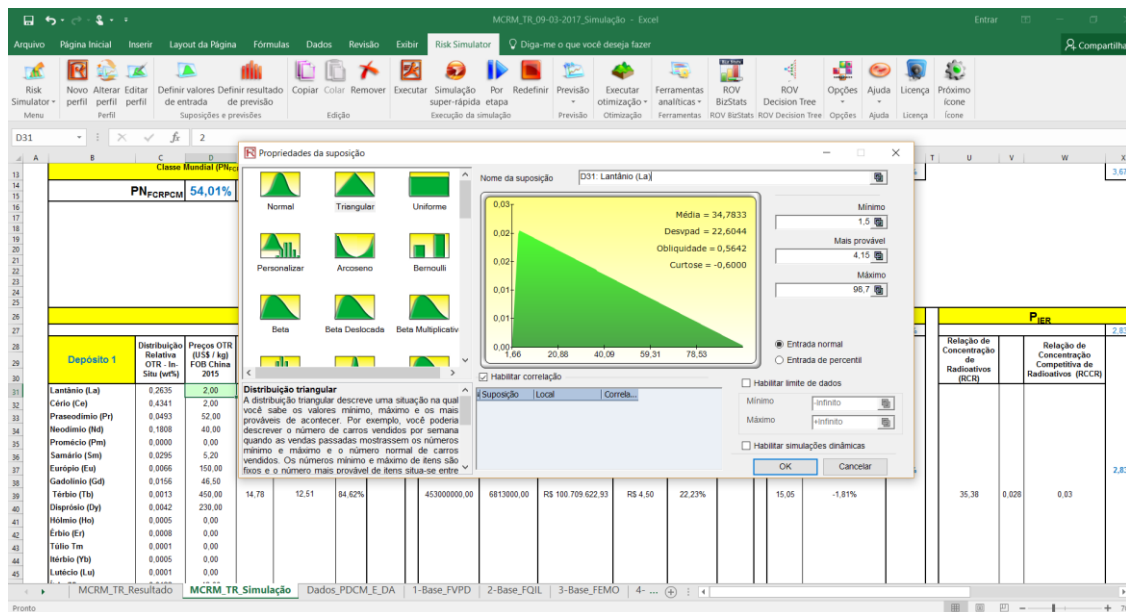


Figura 4 – Definição do tipo de distribuição e valores de entrada

Os valores de entrada foram definidos conforme a seguir:

Tabela 1 - Valores (máximo, mínimo e mais provável/mediana) da série histórica dos preços dos OTR (FOB China, US\$/ kg) entre 2002-2015. Para o fator:  $F_{VPD}$

OTR	Variação dos Preços (FOB China, US\$/ kg) 2002-2015		
	máximo	mínimo	mediana
La	98,70	1,50	4,15
Ce	98,20	1,40	3,90
Pr	204,10	3,90	29,30
Nd	250,60	4,40	31,05
Pm*	0,00	0,00	0,00
Sm	104,80	2,40	4,40
Eu	2923,00	150,00	402,90
Gd	62,70	24,00	46,50
Tb	2344,00	170,00	503,90
Dy	1508,00	14,60	117,10
Ho	303,00	66,00	66,00
Er	236,00	68,00	68,00
Tm*	0,00	0,00	0,00
Yb	113,00	52,00	52,00
Lu	1385,00	827,00	1201,00
Y	143,00	13,00	26,00
Sc	4200,00	3150,00	3675,00

\* para OTR sem dados de preço, sem teor no depósito ou sem produção conhecida são atribuídos valores = 0 “zero”.

$F_{VPD}$ , neste fator as variáveis simuladas foram os preços de cada OTR que possuem relação como a **Distribuição Relativa Potencial – DRP (idem apêndice A)**. Para cada preço de respectivo OTR, foi definido um valor mínimo, máximo e mais provável (conforme a tabela 1), sendo a distribuição triangular adotada para todos. Figura 5.

Depósito 1	Distribuição Relativa OTR - In-Situ (wt%)	Preços OTR (US\$/ kg) FOB China 2015	Cesta de OTR (US\$/kg)	Cesta de ETRC+ETRA (Nd, Eu, Pr, Tb, Dy e Y) em US\$/kg	DRP (em %)	$P_{VPD}$			$P_{OPEX}$			Relação de Concentração de Radioativos (RCR)				
						83,50	22,53	0,00	OPEX (US\$/kg)	margin Operacional Bruta Esperada (%) (Mineração +)						
Lantânio (La)	0.2635	2,00														
Cério (Ce)	0.4341	2,00														
Praseodímio (P)	0.0493	52,00														
Neodímio (Nd)	0.1808	40,00														
Promécio (Pm)	0.0000	0,00														
Samário (Sm)	0.0295	5,20														
Európio (Eu)	0.0066	150,00														
Gadolínio (Gd)	0.0156	46,50														
Térbio (Tb)	0.0013	450,00														
Disprósio (Dy)	0.0042	230,00														
Hólmio (Ho)	0.0005	66,00														
Érbio (Er)	0.0008	68,00														
Túlio (Tm)	0.0001	0,00														
Íterbio (Yb)	0.0005	52,00														
Lutécio (Lu)	0.0001	1201,00														
Ítrio (Y)	0.0132	13,00														
Escândio (Sc)	0.0000	4200,00														
						83,50	R\$ 453.000.000,00	6813000,00	R\$ 102.063.570,42	4,44	22,53	22,53	R\$ 15,05	-0,46	0,00	35,38

Figura 5 – Definição de valores de entrada para cada preço de respectivo OTR.

**F<sub>QIL</sub>**, neste fator a variável simulada foi o CAPEX que possui relação com a **Relação de Geração de Receita RGR (idem apêndice A)**. Foi adotada a distribuição triangular: os valores máximos, mínimos e mais prováveis (valor apresentado nos respectivos relatórios de avaliação econômica), tiveram suas precisões definidas de acordo com o quadro 1. Figura 6.

P <sub>max</sub>					P <sub>Esq</sub>			P <sub>Dir</sub>			P <sub>Esq</sub>			
CAPEX (US\$)	Produção Esperada (Kg de OTR / ano)	Receita Bruta Estimada (US\$ / ano)	Relação de Intensidade de capital	Relação de Geração de Receita (RGR, %)	OPEX (US\$/kg)	margem Operacional Bruta Esperada (%) (Mineração +)	Relação de Concentração de Radioativos (RCR)	Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)	Produção prevista (t/ano)	6813,00	Estimativa de Market Share	4,48		
R\$ 453.000.000,00	6813000,00	R\$ 102.063.570,42	4,44	22,53	R\$ 15,05	-0,46	35,38	2,83						

Figura 6 – Definição de valores de entrada para a variável CAPEX.

**F<sub>EMO</sub>**, neste fator a variável simulada foi o OPEX (considerando mineração e processamento/separação dos OTR) que possui relação como a **Margem Operacional Bruta (idem apêndice A)**. Nesta variável também foi adotada distribuição triangular: os valores máximos, mínimos e mais prováveis (valor apresentado nos respectivos relatórios de avaliação econômica), tiveram suas precisões definidas de acordo com o quadro 1. Figura 7

P <sub>max</sub>					P <sub>Esq</sub>			P <sub>Dir</sub>			P <sub>Esq</sub>			
CAPEX (US\$)	Produção Esperada (Kg de OTR / ano)	Receita Bruta Estimada (US\$ / ano)	Relação de Intensidade de capital	Relação de Geração de Receita (RGR, %)	OPEX (US\$/kg)	margem Operacional Bruta Esperada (%) (Mineração +)	Relação de Concentração de Radioativos (RCR)	Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)	Produção prevista (t/ano)	6813,00	Estimativa de Market Share	4,48		
R\$ 453.000.000,00	6813000,00	R\$ 102.063.570,42	4,44	22,53	R\$ 15,05	-0,46	35,38	2,83						

Figura 7 – Definição de valores de entrada para a variável OPEX.

**F<sub>IER</sub>**, neste fator a variável simulada foi a **Relação de Concentração de Radioativos (RCR)**, que possui relação como a concentração de radioativos (tório e urânio) no depósito/projeto de TR (idem apêndice A). Nesta variável foi adotada distribuição uniforme: os valores máximos, mínimos, tiveram suas precisões definidas de acordo com o quadro 1. Figura 8.

P <sub>CR</sub>					P <sub>PM</sub>			P <sub>RCR</sub>		P <sub>PR</sub>							
22,53					0,00			2,83		6813,00					4,48		
CAPEX (US\$)	Produção Esperada (Kg de OTR / ano)	Receita Bruta Estimada (US\$ / ano)	Relação de Intensidade de capital	Relação de Geração de Receita (RGR, %)	OPEX (US\$/kg)	margem Operacional Bruta Esperada (%) (Mineração + Beneficiamento)	Relação de Concentração de Radioativos (RCR)	Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)	Distribuição Relativa OTR - In-Situ (wt%)	Produção (OTR / t ano) X Distribuição OTR (wt%)	Produção mundial de OTR (t/ano)	Estimativa de Market Share					
RS 453.000.000,00	6813000,00	RS 102.063.570,42	4,44	22,53	RS 15,05	-0,46	0,00	35,38	2,83	2,83	4,48	4,48					
													Lantânio (La)	0,2635	1795	45900,00	3,91
													Cério (Ce)	0,4341	2958	54400,00	5,44
													Praseodímio (Pr)	0,0493	336	10200,00	3,29
													Neodímio (Nd)	0,1808	1232	32300,00	3,81
													Promécio (Pm)	0,0000	0	0,00	0,00
													Samário (Sm)	0,0295	201	3400,00	5,91
													Europium (Eu)	0,0096	45	566,67	7,94
													Gadolínio (Gd)	0,0156	106	566,67	18,78
													Térbio (Tb)	0,0013	9	566,67	1,56
													Disprósio (Dy)	0,0042	29	3400,00	0,84
													Hólmio (Ho)	0,0050	34	566,67	6,01
													Érbio (Er)	0,0080	55	566,67	9,62
													Túlio Tm	0,0010	7	566,67	1,20
													Ítrio (Yb)	0,0050	34	566,67	6,01
													Lutécio (Lu)	0,0010	7	566,67	1,20
													Ítrio (Y)	0,0132	90	15300,00	0,59
													Escândio (Sc)	0,0000	0	566,67	0,00

Figura 8 – Definição de valores de entrada para variável RCR.

**F<sub>EPM</sub>**, neste fator a variável simulada foi a **Produção Prevista de OTR (t/ano)**, que possui relação como a fatia de mercado (*Market Share*) pretendida/prevista para o projeto (informações publicadas nos respectivos relatórios técnico-econômicos dos projetos, **idem apêndice A**). Figura 9.

P <sub>PM</sub>		P <sub>RCR</sub>		Produção prevista (t/ano)					P <sub>PR</sub>		P <sub>PPCS</sub>		P <sub>PPQLG</sub>		P <sub>PPPEG</sub>	
0,00		2,83		6813,00					4,48		92,26		75,44		93,14	
margem Operacional Bruta Esperada (%) (Mineração + Beneficiamento)	Relação de Concentração de Radioativos (RCR)	Relação de Concentração Competitiva de Radioativos (RCCR)	Distribuição Relativa OTR - In-Situ (wt%)	Produção (OTR / t ano) X Distribuição OTR (wt%)	Produção mundial de OTR (t/ano)	Estimativa de Market Share	CF*	Pontos	CF*	Pontos	CF*	Pontos	CF*	Pontos	CF*	Pontos
-0,46	0,00	35,38	2,83	2,83	Lantânio (La)	0,2635	1795	45900,00	3,91	1	100,00	1	80,00	1	90,50	
					Cério (Ce)	0,4341	2958	54400,00	5,44	2	99,00	2	74,00	2	88,60	
					Praseodímio (Pr)	0,0493	336	10200,00	3,29	3	92,50	3	65,60	3	95,50	
					Neodímio (Nd)	0,1808	1232	32300,00	3,81	4	91,60	4	54,70	4	97,40	
					Promécio (Pm)	0,0000	0	0,00	0,00	5	97,20	5	84,70	5	93,70	
					Samário (Sm)	0,0295	201	3400,00	5,91	6	88,80	6	91,40	6	91,40	
					Europium (Eu)	0,0096	45	566,67	7,94	7	94,40	7	77,00	7	93,70	
					Gadolínio (Gd)	0,0156	106	566,67	18,78	8	98,10	8	87,00	8	93,70	
					Térbio (Tb)	0,0013	9	566,67	1,56	9	79,60	9	70,00	9	70,00	75,44
					Disprósio (Dy)	0,0042	29	3400,00	0,84	10	81,40	10	70,00	10	70,00	
					Hólmio (Ho)	0,0050	34	566,67	6,01							
					Érbio (Er)	0,0080	55	566,67	9,62							
					Túlio Tm	0,0010	7	566,67	1,20							
					Ítrio (Yb)	0,0050	34	566,67	6,01							
					Lutécio (Lu)	0,0010	7	566,67	1,20							
					Ítrio (Y)	0,0132	90	15300,00	0,59							
					Escândio (Sc)	0,0000	0	566,67	0,00							

Figura 9 – Definição de valores de entrada para a variável Produção Prevista de OTR.

Na simulação das variáveis dos fatores políticos **F<sub>PPCS</sub>**, **F<sub>PPQLG</sub>**, **F<sub>PPPEG</sub>**, foram utilizadas as respectivas séries históricas, após cálculo das médias e desvios padrões respectivos. Os dados utilizados são dos índices: Index de Percepção Política parcial - PPI parcial (para o **F<sub>PPCS</sub>**), Índice de Liberdade Econômica (para o **F<sub>PPPEG</sub>**) e o Índice de Desempenho Logístico (Internacional) parcial (para o **F<sub>PPQLG</sub>**), conforme explanado no capítulo 3. Figuras 10, 11 e 12.

P <sub>PPCS</sub>		P <sub>PPPEG</sub>		P <sub>PPQLG</sub>	
92,26		75,44		93,14	
CF*	Pontos	CF*	Pontos	CF*	Pontos
1	100,00	1	80,00	1	90,50
2	99,00	2	74,00	2	88,60
3	92,50	3	65,60	3	95,50
4	91,60	4	54,70	4	97,40
5	97,20	5	84,70	5	93,70
6	88,80	6	91,40		
7	94,40	7	77,00		
8	98,10	8	87,00		
9	79,60	9	70,00		
10	81,40	10	70,00		

Figura 10 (**F<sub>PPCS</sub>**)

P <sub>PPCS</sub>			P <sub>PPES</sub>			P <sub>PQLG</sub>		
		92,26			75,44			93,14
CF*	Pontos		CF*	Pontos		CF*	Pontos	
1	100,00		1	80,00		1	90,50	
2	99,00		2	74,00		2	88,60	
3	92,50		3	65,60		3	95,50	
4	91,60		4	54,70		4	97,40	
5	97,20		5	84,70		5	93,70	
6	88,80		6	91,40				
7	94,40		7	77,00				
8	98,10		8	87,00				
9	79,60		9	70,00				
10	81,40	92,26	10	70,00	75,44			93,14

Figura 11 (F<sub>PPEG</sub>)

P <sub>PPCS</sub>			P <sub>PPEG</sub>			P <sub>PQLG</sub>		
		92,26			75,44			93,14
CF*	Pontos		CF*	Pontos		CF*	Pontos	
1	100,00		1	80,00		1	90,50	
2	99,00		2	74,00		2	88,60	
3	92,50		3	65,60		3	95,50	
4	91,60		4	54,70		4	97,40	
5	97,20		5	84,70		5	93,70	
6	88,80		6	91,40				
7	94,40		7	77,00				
8	98,10		8	87,00				
9	79,60		9	70,00				
10	81,40	92,26	10	70,00	75,44			93,14

Figura 12 (F<sub>PQLG</sub>)

Exemplificando com parte dos depósitos analisados, tem-se: os dados utilizados dos respectivos projetos, tabelas 2, 3 e 4.

- **F<sub>PPCS</sub>**

**Projetos e respectivas jurisdições**

- A - Projeto Zandkopsdrift (JV) - South Africa (ZAF)
- B - Projeto Nolan's Bore - Northern Territory (AUS) (proj.4)
- C - Projeto Mount Weld CLD - Western Australia (AUS) (proj.2)
- D - Projeto Nechalacho Basal - Northwest Territories (CAN) (proj.3)
- E - Projeto Bear Lodge – Wyoming (USA) (proj.1)

Tabela 2

A	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		B	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		C	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016	
	Média	Desvio		Média	Desvio		Média	Desvio
1	34,00	11,00	1	86,00	8,00	1	88,00	8,00
2	49,00	14,00	2	63,00	30,00	2	74,00	16,00
3	35,00	12,00	3	78,00	15,00	3	79,00	13,00
4	30,00	18,00	4	50,00	26,00	4	55,00	22,00
5	49,00	24,00	5	63,00	25,00	5	71,00	15,00
6	53,00	12,00	6	50,00	19,00	6	66,00	12,00
7	26,00	16,00	7	65,00	20,00	7	72,00	10,00
8	22,00	10,00	8	87,00	9,00	8	87,00	7,00
9	50,00	7,00	9	87,00	8,00	9	90,00	7,00
10	18,00	5,00	10	85,00	11,00	10	88,00	6,00

D	Período: 2005/2006 até 2015/2016		E	Período: 2005/2006 até 2015/2016	
	Média	Desvio		Média	Desvio
1	53,00	9,00	1	82,00	13,00
2	44,00	17,00	2	78,00	26,00
3	38,00	15,00	3	80,00	8,00
4	67,00	15,00	4	89,00	10,00
5	23,00	10,00	5	75,00	25,00
6	32,00	13,00	6	88,00	5,00
7	45,00	19,00	7	91,00	7,00
8	59,00	10,00	8	88,00	7,00
9	65,00	10,00	9	74,00	12,00
10	67,00	11,00	10	74,00	16,00

### Variáveis do F<sub>PPCS</sub> = PPI (índice de Percepção Política) parcial:

- 1 – Incerteza relativa à gestão, interpretação e aplicação dos regulamentos existentes;
- 2 – Incerteza sobre as regulamentações ambientais;
- 3 – Duplicações e incoerências regulamentares
- 4 – Regime de tributação;
- 5 – Incerteza a respeito das áreas que serão protegidas como: deserto, parques, ou sítios arqueológicos, etc.;
- 6 – Qualidade da Infraestrutura;
- 7 – Acordos Socioeconômicos / condições de desenvolvimento;
- 8 – Estabilidade política;
- 9 – Qualidade da base de dados geológicos;
- 10 – Nível de segurança.

- **F<sub>PPEG</sub>**

**Exemplificando parte dos dados trabalhados, tem-se:**

**Projetos e respectivas jurisdições**

- A-Projeto Zandkopsdrift (JV) - South Africa (ZAF)
- B-Projeto Nolan's Bore - Northern Territory (AUS) (proj.4)
- C-Projeto Mount Weld CLD - Western Australia (AUS) (proj.2)
- D-Projeto Nechalacho Basal - Northwest Territories (CAN) (proj.3)
- E-Projeto Bear Lodge - Wyoming (USA) (proj.1)

Tabela 3

A	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		B	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		C	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016	
	Média	Desvio		Média	Desvio		Média	Desvio
1	50,00	0,00	1	90,00	0,00	1	90,00	0,00
2	45,13	2,96	2	86,23	2,75	2	86,23	2,75
3	69,65	0,59	3	62,02	2,40	3	62,02	2,40
4	74,56	4,49	4	63,23	1,71	4	63,23	1,71
5	72,60	2,02	5	90,98	2,83	5	90,98	2,83
6	57,94	1,90	6	87,95	6,52	6	87,95	6,52
7	75,86	3,48	7	84,10	1,36	7	84,10	1,36
8	76,16	1,30	8	84,01	3,29	8	84,01	3,29
9	48,33	3,26	9	77,92	4,98	9	77,92	4,98
10	58,33	3,89	10	90,00	0,00	10	90,00	0,00
D	Período: 2005/2006 até 2015/2016		E	Período: 2005/2006 até 2015/2016				
	Média	Desvio		Média	Desvio			
1	90,00	0,00	1	85,83	4,17			
2	85,64	2,55	2	73,33	1,67			
3	77,64	1,99	3	67,90	1,40			
4	50,26	3,98	4	55,85	5,16			
5	92,77	5,33	5	90,06	2,73			
6	81,05	3,30	6	95,61	1,79			
7	79,24	3,47	7	79,91	4,12			
8	87,12	1,98	8	85,69	2,41			
9	70,00	10,87	9	73,33	4,44			
10	77,50	4,52	10	75,83	7,93			

## Variáveis do F<sub>PPEG</sub> = Índice de Liberdade Econômica:

<b>Estado de direito</b>	1	Direitos de propriedade
	2	Liberdade de corrupção
<b>Limitação de Governo</b>	3	Liberdade fiscal
	4	Tamanho do governo
<b>Eficiência Regulatória</b>	5	Liberdade empresarial
	6	Liberdade trabalhista
	7	Liberdade monetária
<b>Livres Mercados</b>	8	Livre comércio
	9	Liberdade de investimento
	10	Liberdade financeira

### • P<sub>PQLG</sub>

#### Projetos e respectivas jurisdições

A-Projeto Zandkopsdrift (JV) - South Africa (ZAF)

B-Projeto Nolan's Bore - Northern Territory (AUS) (proj.4)

C-Projeto Mount Weld CLD - Western Australia (AUS) (proj.2)

D-Projeto Nechalacho Basal - Northwest Territories (CAN) (proj.3)

E-Projeto Bear Lodge - Wyoming (USA) (proj.1)

Tabela 4

A	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		B	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016		C	PERÍODO: 2005/2006 ATÉ 2015/2016	
	Média	Desvio		Média	Desvio		Média	Desvio
1	81,90	5,46	1	90,50	3,02	1	90,50	3,02
2	85,00	2,69	2	90,08	6,07	2	90,08	6,07
3	85,08	1,11	3	89,50	0,92	3	89,50	0,92
4	85,68	6,42	4	89,52	2,03	4	89,52	2,03
5	79,26	9,41	5	87,46	2,08	5	87,46	2,08
<b>Período: 2005/2006 até 2015/2016</b>								
D	Período: 2005/2006 até 2015/2016		E	Período: 2005/2006 até 2015/2016				
	Média	Desvio		Média	Desvio			
1	92,10	3,48	1	90,40	1,56			
2	86,48	6,04	2	85,36	4,99			
3	93,12	1,72	3	94,10	1,95			
4	93,20	2,02	4	97,34	2,09			
5	93,32	5,45	5	91,92	2,74			



## Variáveis do $P_{PQLG}$ = Índice de Desempenho Logístico (Internacional) parcial

- 1-A eficiência do processo de desalfandegamento ("Customs");
- 2-A facilidade de organizar embarques a preços competitivos ("Ease of arranging shipments");
- 3-A competência e qualidade dos serviços logísticos de transporte rodoviário, encaminhamento e despacho aduaneiro ("Quality of logistics services");
- 4-A capacidade de controlar e rastrear as remessas ("Tracking and tracing");
- 5-Frequência com que as remessas chegam aos destinatários dentro dos prazos de entrega programados ou esperados ("Timeliness").

### 3 – Definir resultados de previsão nas células relevantes: $PN_{FCRPCM}$

(probabilidade dos níveis dos fatores, para o portfólio de depósitos de classe mundial – PDCM),  $PN_{FCRDA-TM}$  (probabilidade dos níveis dos fatores, para os depósitos em análise, teste do modelo) e  $PN_{FCRDA-BR}$  (probabilidade dos níveis dos fatores, para os depósitos em análise, estudo de caso Brasil). Figuras 13-15.

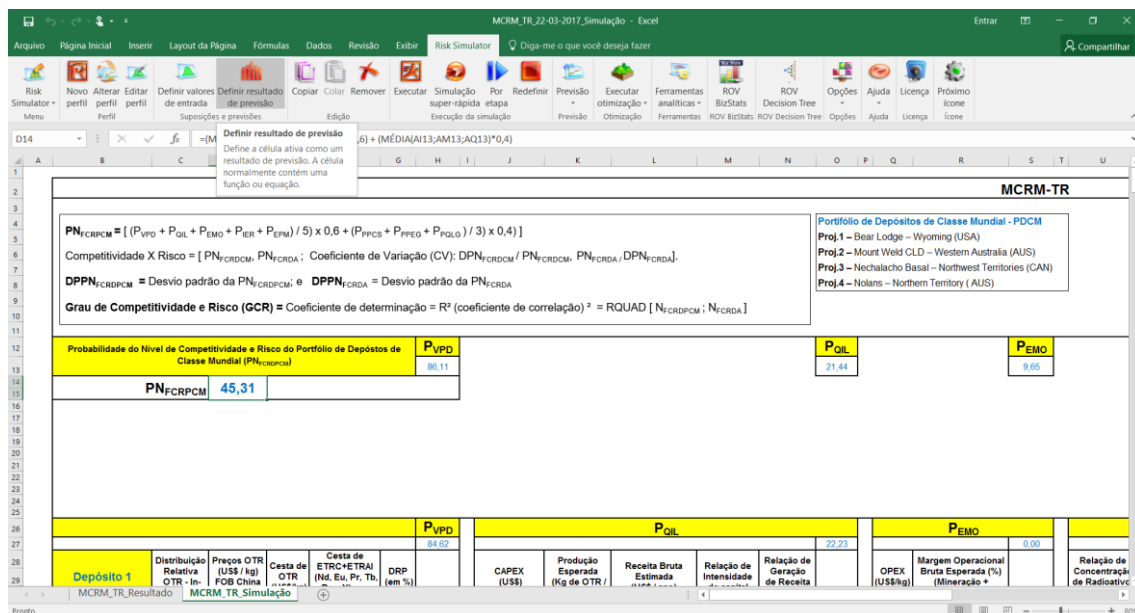


Figura 13- Seleção das células para as previsões; célula de previsão do PDCM.

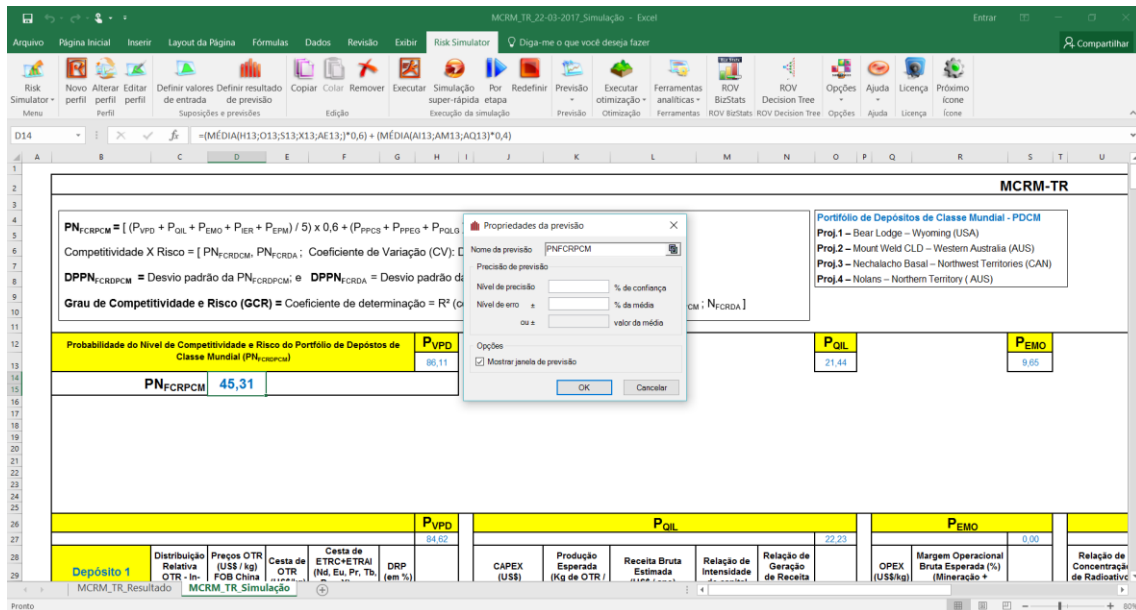


Figura 14 – Definição dos parâmetros de previsão, célula de previsão do PDCM

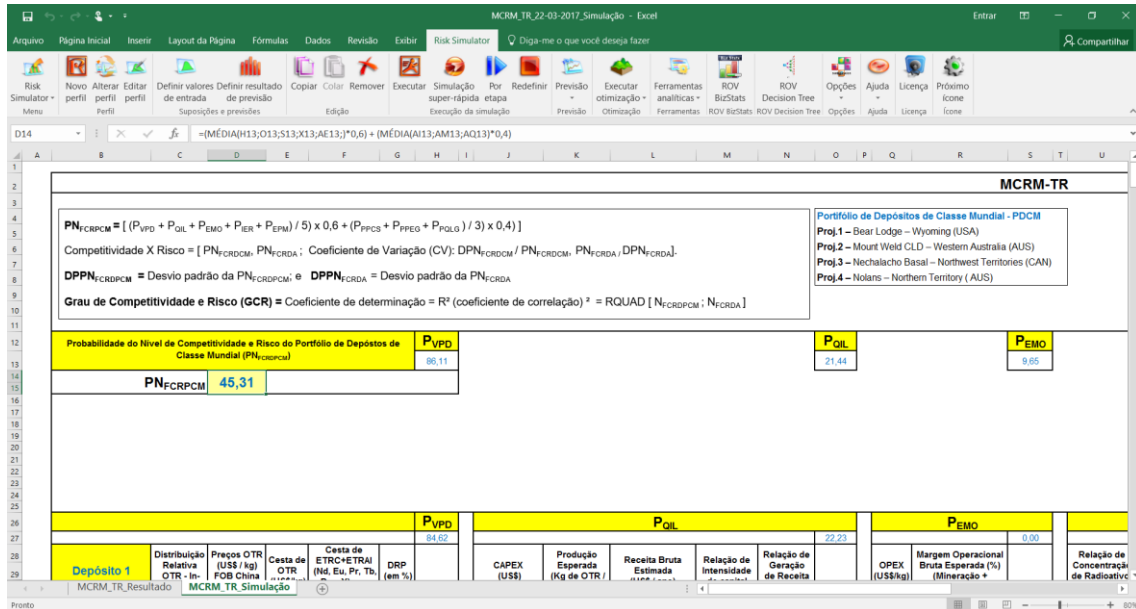


Figura 15 – Célula de previsão do PDCM e parâmetros definidos.

Após a definição da célula de previsão para o portfólio (PDCM), realizar mesmo procedimento para os demais depósitos em análise (8 depósitos de teste do modelo e 5 depósitos de estudo de caso Brasil) de forma individualizada. Figuras 16 e 17.

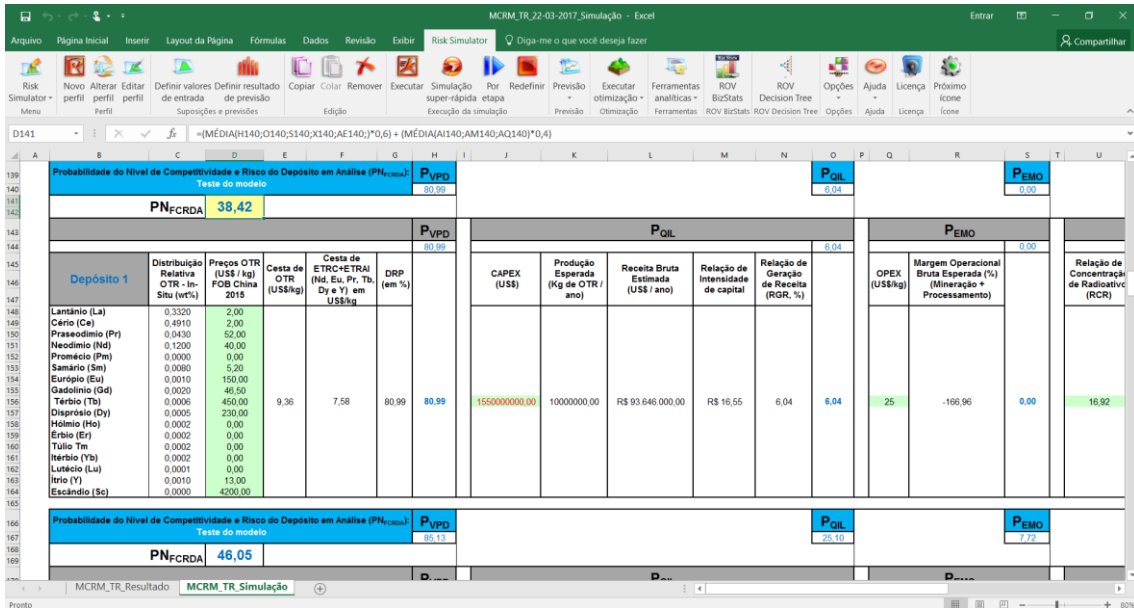


Figura 16 – Seleção da célula para previsão de cada depósito em análise (8 depósitos para teste do modelo)

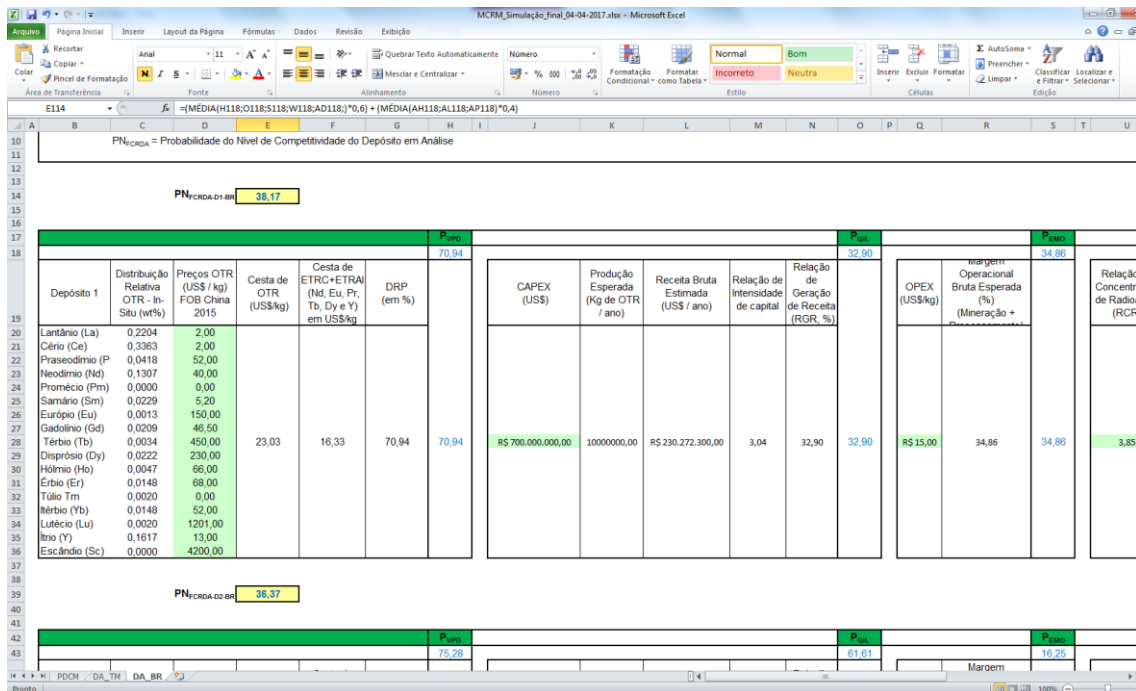


Figura 17 – Seleção da célula para previsão de cada depósito em análise (5 depósitos para estudo de caso Brasil)

Por fim, execução da simulação, geração de histogramas, estatísticas e alimentação da planilha de resultados para análise e interpretação. Figuras 18-21.

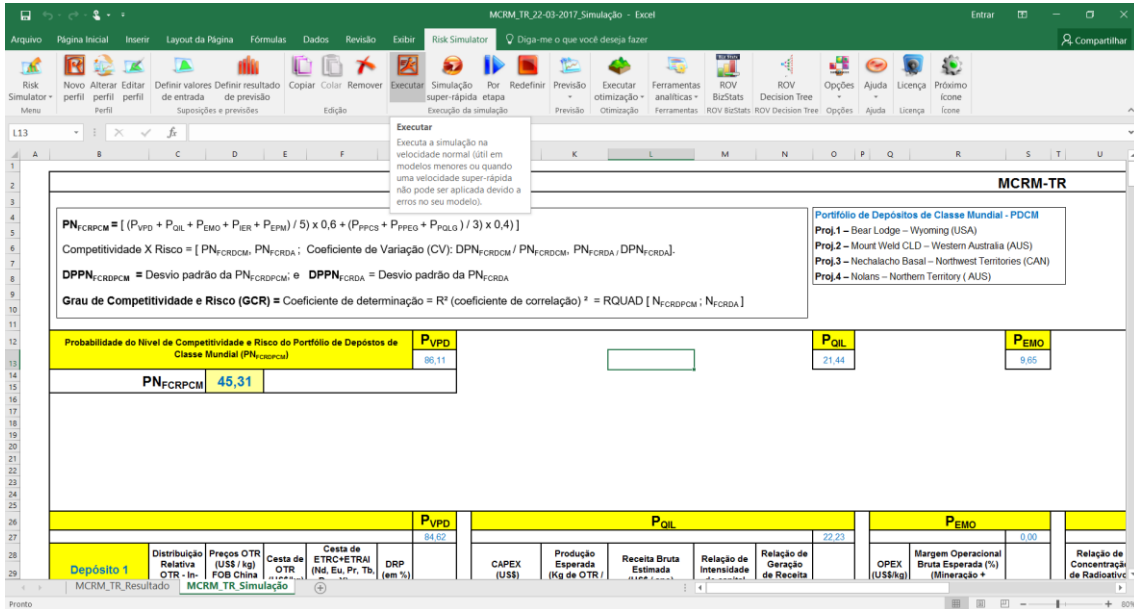


Figura 18 – Execução da Simulação/previsões

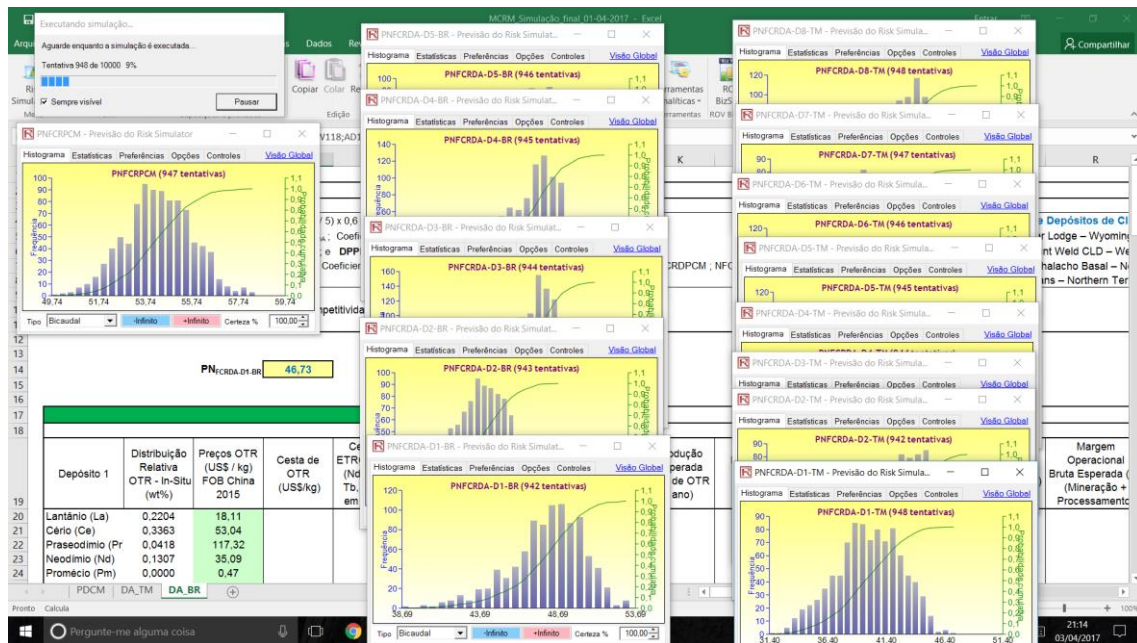


Figura 19 – Execução da Simulação/previsões: geração de histogramas e estatísticas.

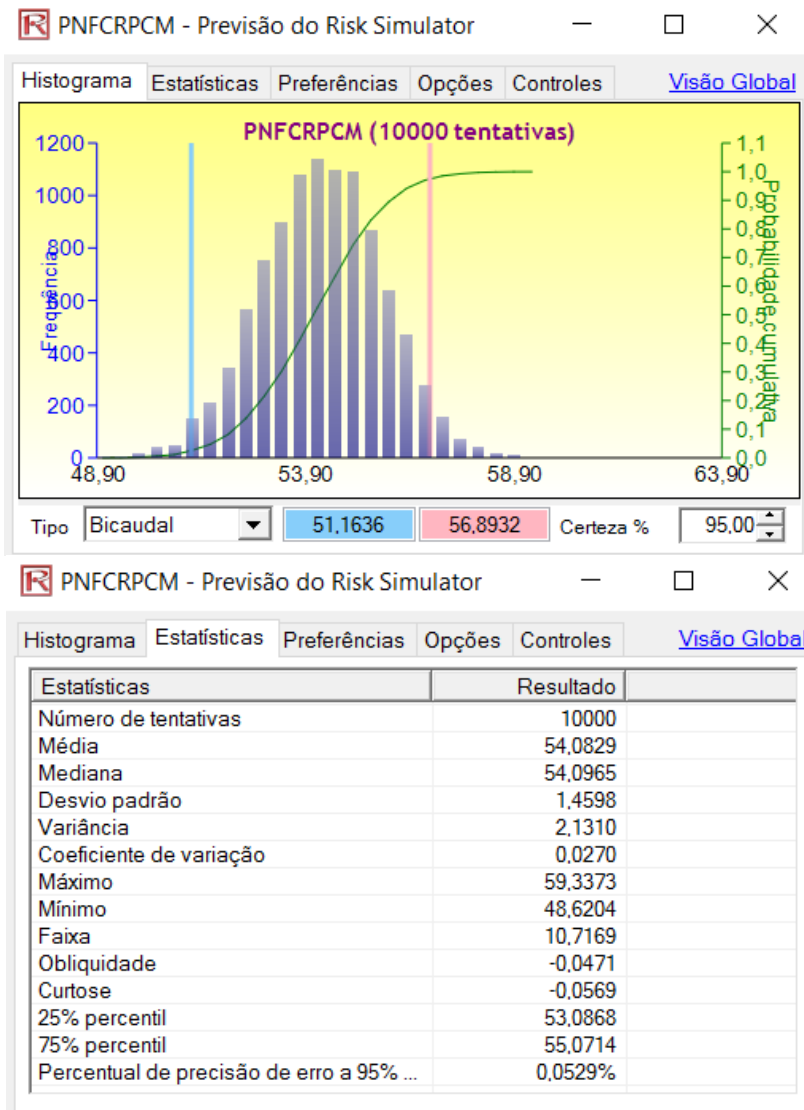


Figura 20 – Exemplo de histograma e estatísticas geradas após execução de Simulação/previsão nos depósitos analisados: exemplo do PDCM (Portfólio de Depósitos de Classe Mundial).

Fonte: Simulação no Software *Risk Simulator* (© 2005-2016 Real Options Valuation, Inc.)

**Nota:** para todos os depósitos, os dados dos resultados utilizados para análise e interpretação na planilha de resultados são: **média e coeficiente de variação (CV%)**. O **Intervalo de confiança obtido na simulação/previsão do PDCM** (Portfólio de Depósitos de Classe Mundial, por meio da resultante:  $PN_{FCRDPCM}$ ), será utilizado como referência para classificação relativa inicial/preliminar dos depósitos, conforme as etapas explanadas a seguir.

## **e) Análise e interpretação dos resultados.**

De posse dos resultados da previsão/simulação, a etapa seguinte é alimentar a planilha de resultados para análise e interpretação, conforme demonstração a seguir.

O modelo (MCRM-TR) permitirá gerar, pelo menos, cinco resultados comparativos, conforme listados a baixo:

1 – determinação do nível médio probabilístico dos fatores de competitividade e risco dos depósitos ( $PN_{FCRPDCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ ), ou seja, a competitividade relativa (em relação ao  $PDCM/benchmark$ ) dos depósitos, sem levar em conta as incertezas (produzindo uma classificação inicial/preliminar: competitividade acima do PDCM, competitividade em Linha com o PDCM e competitividade abaixo do PDCM);

2. determinação da intensidade ou grau da competitividade relativa - GCR (em relação ao  $PDCM/benchmark$ ) dos depósitos, isto é, o grau de associação entre os fatores pertencentes aos depósitos do  $PDCM/benchmark$  e o depósito em análise - DA);

3. visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco (coeficiente de variação) das respectivas resultantes  $PN_{FCRPDCM}$  (dos depósitos do PDCM) e  $PN_{FCRDA}$  (depósitos em análise);

4. classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GRC e o CV), gerando um índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ ), além de uma classificação final com base neste índice; e

5. identificação por análise gráfica dos fatores e variáveis críticos de competitividade e risco (FVCCR) dos depósitos em análise, tendo como referência o  $PN_{FCRPDCM=PDCM/benchmark}$  dos depósitos/projetos do setor de TR em desenvolvimento.

A planilha para análise e interpretação dos resultados obtidos na simulação/previsão é exemplificada a seguir.

Primeiro resultado (1): determinação do nível médio probabilístico dos fatores de competitividade e risco dos depósitos ( $PN_{FCRDPCM}$  e  $PN_{FCRDA}$ ), ou seja, a competitividade relativa (em relação ao PDCM/*benchmark*) dos depósitos, sem levar em conta as incertezas (produzindo uma classificação inicial/preliminar: competitividade acima do PDCM, competitividade em Linha com o PDCM e competitividade abaixo do PDCM);

Análises e Resultados				
Modelo de Competitividade e Risco na Mineração - TR				
Probabilidade do Nível médio dos Fatores de Competitividade e Risco dos Depósitos ( $PN_{FCRD}$ )				
$PN_{FCRDPCM}$ = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco dos depósitos do portfólio de classe mundial.				
$PN_{FCRDA}$ = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise				
$PN_{FCRDPCM}$	$PN_{FCRDPCM}$	54,08	PDCM	Intervalo de Confiança (95%):
				Limites PDCM
				Inferior
				Superior
				CV (%)
				2,13
Depósitos em Análise: Teste do modelo				
D1	$PN_{FCRDA}$	39,56		CV (%)
				7,15
Classificação	Descrição			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos de TR			
= PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR			
D2	$PN_{FCRDA}$	55,82		CV (%)
				4,62
Classificação	Descrição			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos de TR			
= PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR			
D3	$PN_{FCRDA}$	58,80		CV (%)
				3,33
Classificação	Descrição			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos de TR			
= PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR			
D4	$PN_{FCRDA}$	51,41		CV (%)
				3,70
Classificação	Descrição			
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos de TR			
= PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR			
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR			

Figura 21 – Ilustração das variáveis alimentadas na “planilha de resultados”:  $PN_{FCRDPCM}$ ,  $PN_{FCRDA}$ , intervalo de confiança, coeficiente de variação (CV), e classificação preliminar/inicial.

A classificação inicial/preliminar tem como referência o intervalo de confiança do PDCM, ou seja, a classificação preliminar será dada de acordo com o quadro 3.

Quadro 3 – Classificação preliminar dos depósitos/projetos de TR

Classif.	Descrição
+ PDCM	Competitividade acima do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade acima da média dos projetos de TR
≈ PDCM	Competitividade em Linha com o PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade em linha com os projetos de TR
- PDCM	Competitividade abaixo do PDCM ( <i>benchmark</i> ), isto é, favorabilidade abaixo da média dos projetos de TR

**Nota:** sendo o  $PN_{FCRDPCM}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco dos depósitos do portfólio de classe mundial; e o  $PN_{FCRDA}$  = probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise.

Segundo resultado (2): determinação da intensidade ou grau da competitividade relativa - GCR (em relação ao PDCM/*benchmark*) dos depósitos, isto é, o grau de associação entre os fatores pertencentes aos depósitos do PDCM/*benchmark* e o depósito em análise – DA, figuras 22 e 23; **(as analogias para obtenção do GCR são explanadas nas páginas 51 e 52 do Anexo B).**

Depósitos em Análise: Teste do modelo									
<b>D1</b>									
	$P_{VPD}$	$P_{OIL}$	$P_{EMO}$	$P_{IER}$	$P_{EPM}$	$P_{PPCS}$	$P_{PPEG}$	$P_{POLG}$	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
$PN_{FCRDPCM}$	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	93,43
$PN_{FCRDA D1}$	79,65	6,14	0,00	5,91	2,04	48,30	75,44	93,14	
<b>D2</b>									
	$P_{VPD}$	$P_{OIL}$	$P_{EMO}$	$P_{IER}$	$P_{EPM}$	$P_{PPCS}$	$P_{PPEG}$	$P_{POLG}$	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
$PN_{FCRDPCM}$	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	99,57
$PN_{FCRDA D2}$	84,67	25,24	8,23	1,93	7,32	81,61	80,34	88,00	
<b>D3</b>									
	$P_{VPD}$	$P_{OIL}$	$P_{EMO}$	$P_{IER}$	$P_{EPM}$	$P_{PPCS}$	$P_{PPEG}$	$P_{POLG}$	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
$PN_{FCRDPCM}$	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	89,57
$PN_{FCRDA D3}$	82,90	42,15	42,50	2,87	6,56	80,60	77,97	90,00	
<b>D4</b>									
	$P_{VPD}$	$P_{OIL}$	$P_{EMO}$	$P_{IER}$	$P_{EPM}$	$P_{PPCS}$	$P_{PPEG}$	$P_{POLG}$	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
$PN_{FCRDPCM}$	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	67,83
$PN_{FCRDA D4}$	73,54	14,91	63,14	2,63	5,41	54,31	80,34	88,00	
<b>D5</b>									
	$P_{VPD}$	$P_{OIL}$	$P_{EMO}$	$P_{IER}$	$P_{EPM}$	$P_{PPCS}$	$P_{PPEG}$	$P_{POLG}$	<b>GCR-TR (R<sup>2</sup>) %</b>
$PN_{FCRDPCM}$	82,71	22,15	10,02	3,67	7,36	75,57	78,52	89,79	76,13
$PN_{FCRDA D5}$	65,70	47,43	2,08	2,99	3,67	68,85	61,85	46,50	

Figura 223 – Determinação do GCR de alguns depósitos, isto é, R<sup>2</sup> (grau de associação dos fatores de competitividade e risco dos depósitos em análise ( $PN_{FCRDA}$ ) com o PDCM= $PN_{FCRDPCM}$  (Benchmark).



Graphic View (GV): Depósitos em Análise - Teste do modelo

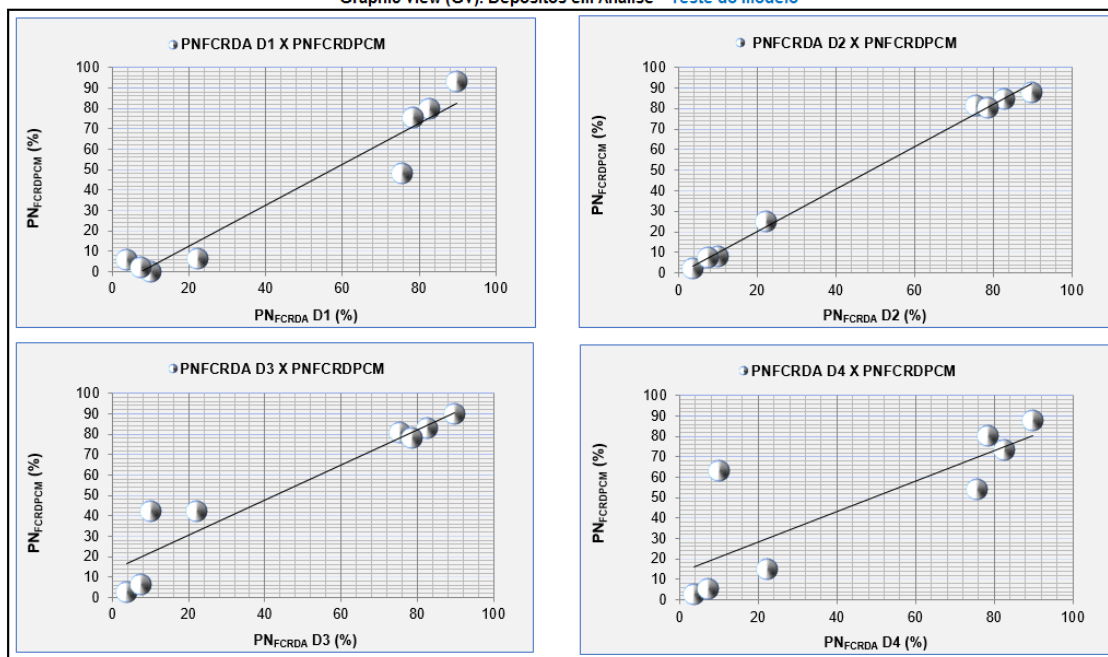


Figura 23 – Visualização gráfica (*Graphic View - GV*) de alguns depósitos de acordo com o GCR.

Terceiro resultado (3): visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco (coeficiente de variação) das respectivas resultantes  $PN_{FCRPDCM}$  (dos depósitos do PDCM) e  $PN_{FCRDA}$  (depósitos em análise), figura 24;

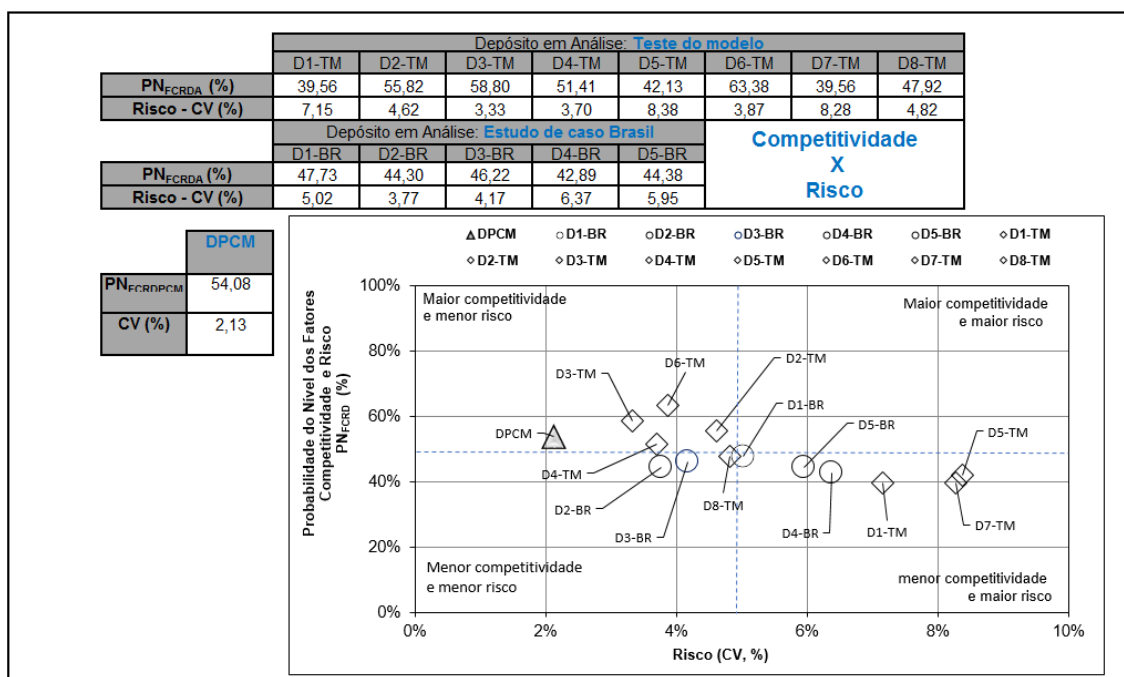


Figura 24 – Visualização gráfica espacial do nível de competitividade X risco (CV%), do PDCM e dos depósitos em análise (depósitos de teste do modelo (TM) e depósitos para estudo de caso Brasil (BR)).

Quarto resultado (4): classificação relativa final dos depósitos em análise, levando em conta as incertezas (GRC e o CV), gerando um índice de competitividade e risco ( $I_{CRM-TR}$ ), além de uma classificação final com base neste índice, figura 25;

Ranking de Competitividade e Risco, por meio do $I_{CRM-TR}$					
Índice de Competitividade e Risco na Mineração de Terras Raras ( $I_{CRM-TR} = (PN_{FCRDA} + GCR) / 2 - CV$ )					
$PN_{FCRD}$ = Probabilidade do nível médio dos fatores de competitividade e risco do depósito em análise					
$CV$ = Coeficiente de Variação da $PN_{FCRDA}$ = Risco					
Portifólio de Depósitos de Classe Mundial - PDCM					
Projetos	$PN_{FCRDA}$	GCR (%)	CV (%)	$I_{CRM-TR}$ (%)	Ranking de Competitividade e Risco dos Depósitos/Projetos de TR ( $I_{CRM-TR}$ )
<b>Depósitos em Análise: Teste do modelo</b>					
D1-TM	39,56	93,43	7,15	59,35	1° D2-TM Teste do modelo
D2-TM	55,82	99,57	4,62	73,08	2° D8-TM Teste do modelo
D3-TM	58,80	58,62	3,33	55,38	3° D1-TM Teste do modelo
D4-TM	51,41	67,83	3,70	55,92	4° D6-TM Teste do modelo
D5-TM	42,13	76,13	8,38	50,75	5° D4-BR Estudo de caso Brasil
D6-TM	63,38	61,13	3,87	58,39	6° D4-TM Teste do modelo
D7-TM	39,56	70,63	8,28	46,82	7° D3-TM Teste do modelo
D8-TM	47,92	86,36	4,82	62,32	8° D1-BR Estudo de caso Brasil
<b>Depósitos em Análise: Est. de caso Brasil</b>					
D1-BR	47,73	71,39	5,02	54,54	9° D5-BR Estudo de caso Brasil
D2-BR	44,30	61,13	3,77	48,95	10° D5-TM Teste do modelo
D3-BR	46,22	58,62	4,17	48,25	11° D2-BR Estudo de caso Brasil
D4-BR	42,89	84,42	6,37	57,28	12° D3-BR Estudo de caso Brasil
D5-BR	44,38	69,62	5,95	51,05	13° D7-TM Teste do modelo

Figura 25 – Classificação relativa final dos depósitos

**Nota:**  $I_{CRM-TR} (%) = (PN_{FCRDA} + GCR) / 2 - CV$ .

Quinto resultado (5): identificação por análise gráfica dos fatores e variáveis relativamente críticos de competitividade e risco (FVCCR) dos depósitos em análise, tendo como referência o  $PN_{FCRDPCM} = PDCM / benchmark$  dos depósitos/projetos do setor de TR em desenvolvimento, figuras 26 e 27.

Neste resultado o PDCM é tomado como base de referência o  $PN_{FCRDPCM} = PDCM / benchmark$ , ou seja,  $FVCCR = PN_{FCRDA} - PN_{FCRDPCM}$ , onde  $PN_{FCRDPCM} = base = 0,0 \%$ . São considerados fatores e/ou variáveis relativamente críticas as resultantes com valores negativos ( $FVCCR < 0,0 \%$  e fora do intervalo de confiança (I.C.) do  $PN_{FCRDPCM}$ ), do contrário, não serão considerados fatores e variáveis relativamente críticos (resultantes FVCCR com valores iguais ou superiores a  $0,0 \%$ , e/ou dentro do intervalo de confiança (I.C.) do  $PN_{FCRDPCM} = PDCM / benchmark$ , que neste trabalho ficou em (I.C.) =  $\pm 2,86$ ).

Fatores e Variáveis Críticas de Competitividade e Risco - FVCCR (PN <sub>FCRDA</sub> - PN <sub>FCRDPCM</sub> )										
D1-TM	Depósitos em Análise: Teste do modelo									
	Var.P <sub>VPD</sub>	Var.P <sub>QIL</sub>	Var.P <sub>EMO</sub>	Var.P <sub>IER</sub>	Var.P <sub>EPM</sub>	Var.P <sub>PPCS</sub>	Var.P <sub>PPEG</sub>	Var.P <sub>PQLG</sub>		
	-3,06	-16,00	-10,02	2,24	-5,32	-27,27	-3,08	3,36		
Componentes dos Fatores (P <sub>PPCS</sub> , P <sub>PPEG</sub> , P <sub>PQLG</sub> )	Var.P <sub>PPCS</sub>									
	Var.P <sub>PPCS1</sub>	Var.P <sub>PPCS2</sub>	Var.P <sub>PPCS3</sub>	Var.P <sub>PPCS4</sub>	Var.P <sub>PPCS5</sub>	Var.P <sub>PPCS6</sub>	Var.P <sub>PPCS7</sub>	Var.P <sub>PPCS8</sub>	Var.P <sub>PPCS9</sub>	Var.P <sub>PPCS10</sub>
	-44,68	-84,90	-38,40	-12,03	-13,15	12,25	-20,85	-24,25	-25,23	-21,50
	Var.P <sub>PPEG</sub>									
	Var.P <sub>PPEG1</sub>	Var.P <sub>PPEG2</sub>	Var.P <sub>PPEG3</sub>	Var.P <sub>PPEG4</sub>	Var.P <sub>PPEG5</sub>	Var.P <sub>PPEG6</sub>	Var.P <sub>PPEG7</sub>	Var.P <sub>PPEG8</sub>	Var.P <sub>PPEG9</sub>	Var.P <sub>PPEG10</sub>
-7,50	-4,75	-2,40	-18,43	35,45	33,35	0,65	1,65	-7,50	-12,50	
Var.P <sub>PQLG</sub>										
Var.P <sub>PQLG1</sub>	Var.P <sub>PQLG2</sub>	Var.P <sub>PQLG3</sub>	Var.P <sub>PQLG4</sub>	Var.P <sub>PQLG5</sub>						
0,33	2,17	3,90	5,02	5,35						

Figura 26 – Determinação dos fatores e variáveis críticos de competitividade e risco - FVCCR (subtração entre: PN<sub>FCRDA</sub> - PN<sub>FCRDPCM</sub>) de um depósito usado para teste do modelo (D1 – TM), tomado como exemplo.

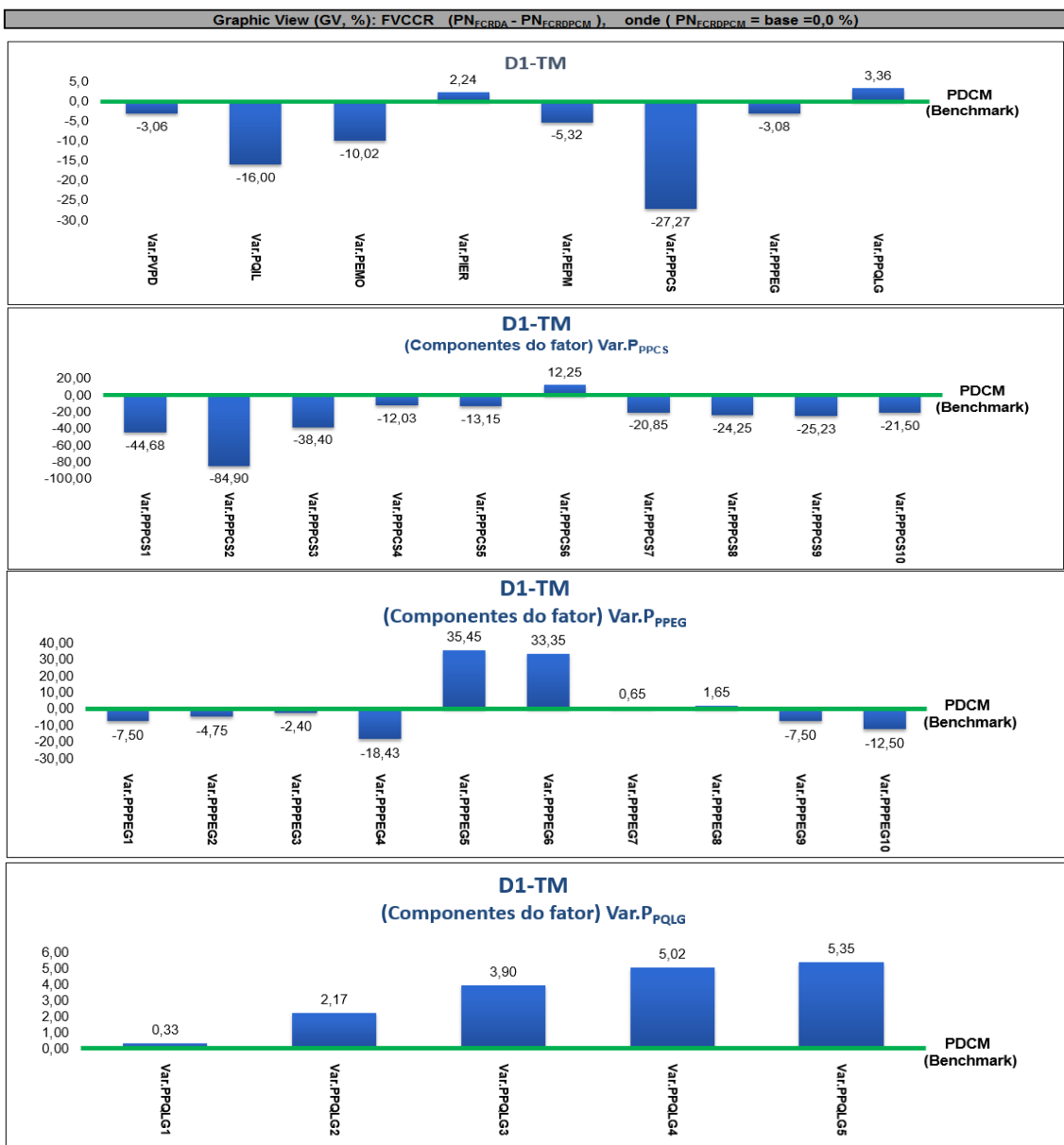


Figura 27 – Visualização gráfica dos FVCCR: graphic view (GV, %)

## **APÊNDICE C – VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DOS FATORES E VARIÁVEIS CRÍTICOS DE COMPETITIVIDADE E RISCO – FVCCR**

As figuras 1 até 27 mostram as Visualizações gráficas dos fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR. Referentes ao último dos cinco resultados mínimos possíveis produzidos pelo modelo **MCRM-TR**.

Nas figuras 1 até 17 são mostradas as visualizações referentes aos resultados do Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#), e nas figuras 18 até 27 são mostradas as visualizações referentes aos resultados do Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

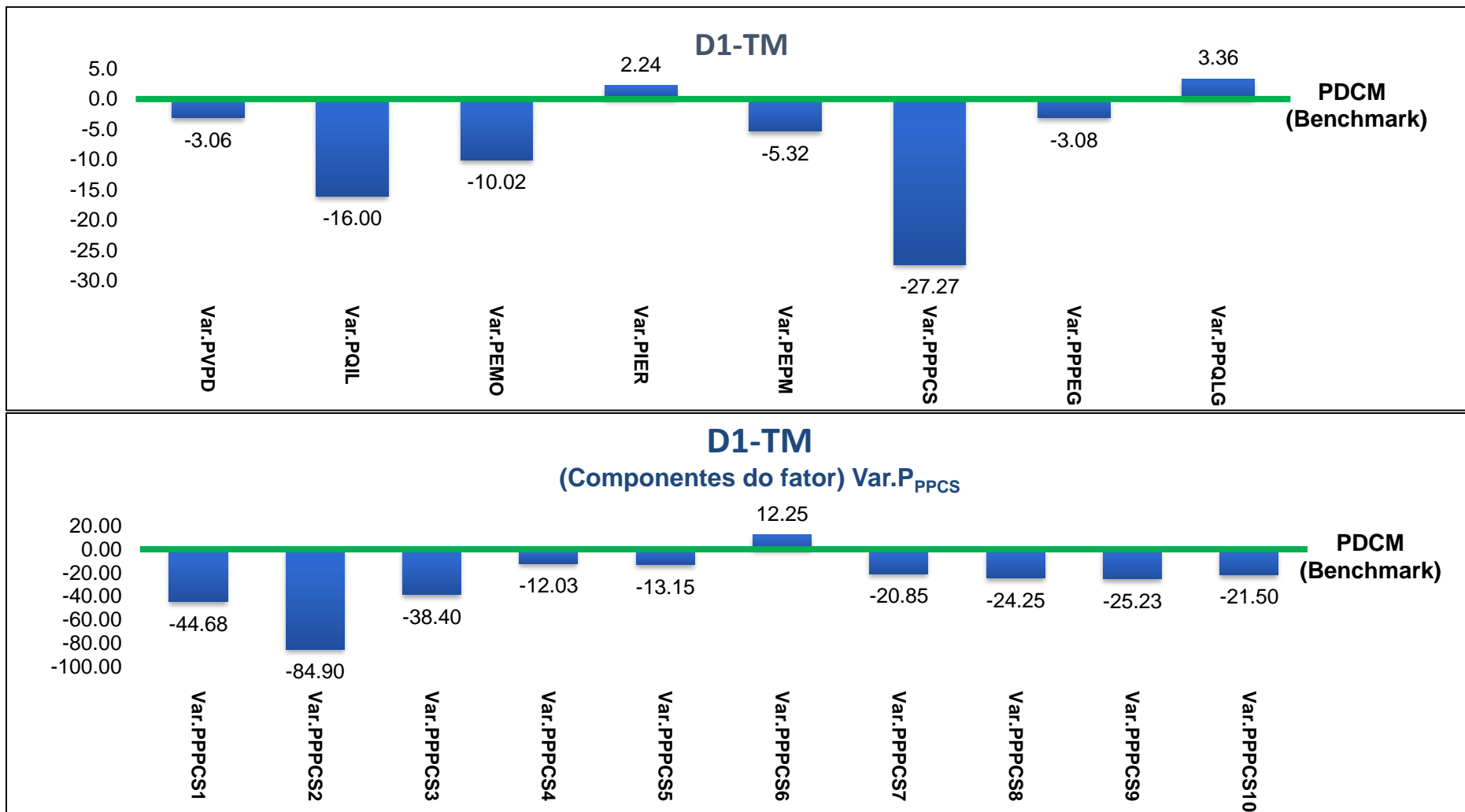


Figura 1 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

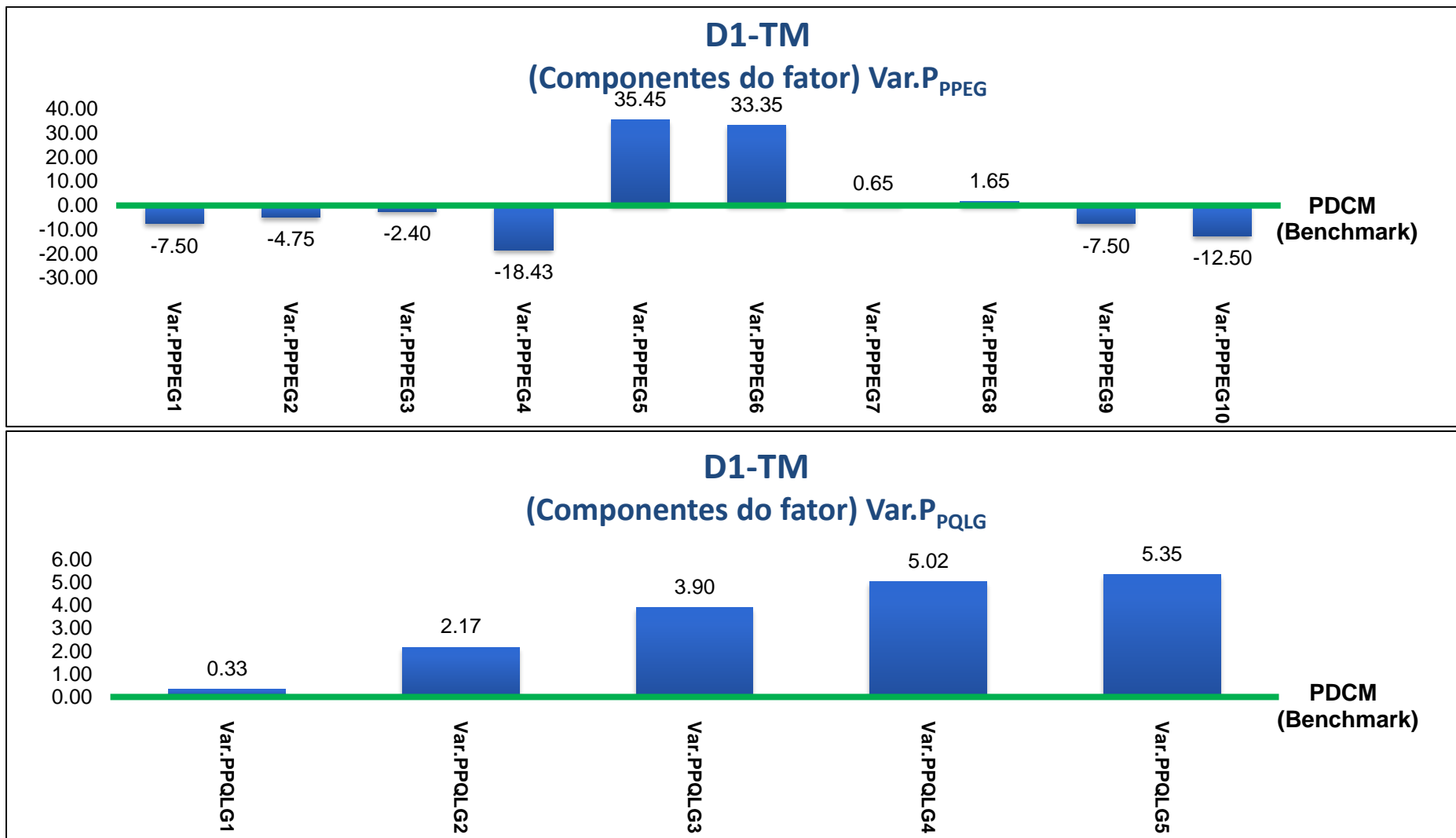


Figura 2 – Graphic View (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-TM  
 Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - Teste do modelo – TM.

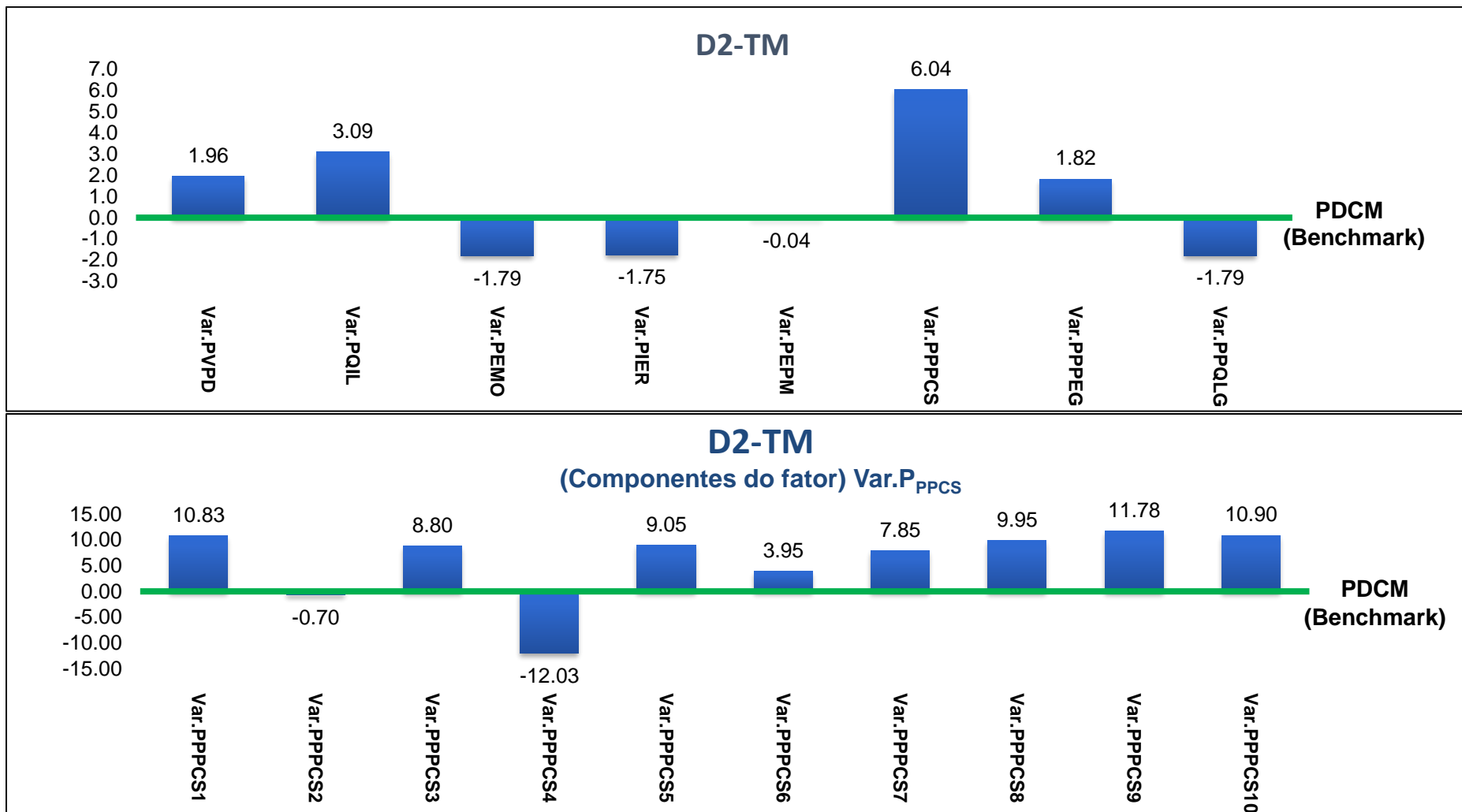


Figura 3 – Graphic View (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D2-TM  
 Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - Teste do modelo – TM.

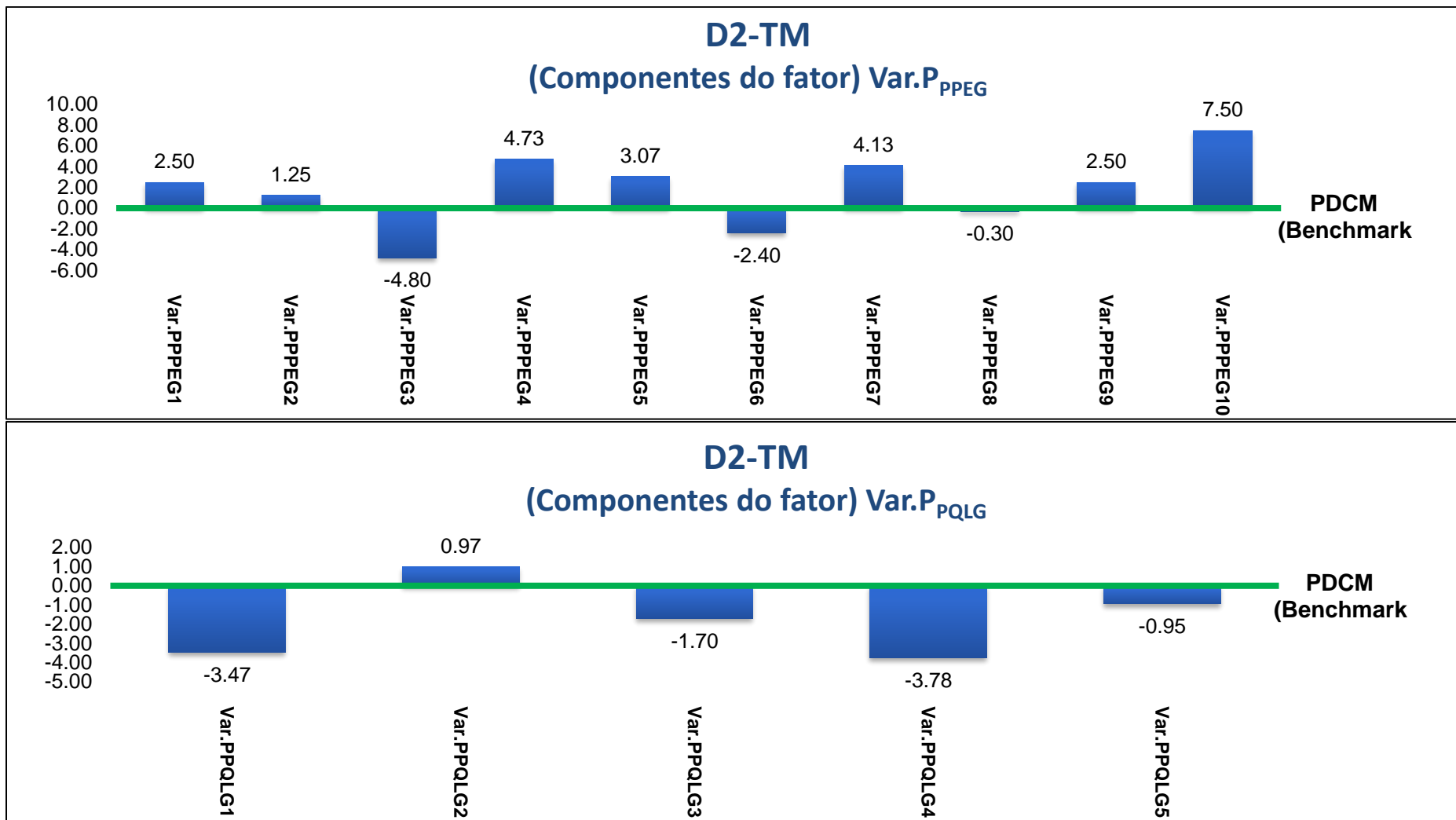


Figura 4 – Graphic View (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D2-TM  
 Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = base = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - Teste do modelo – TM.



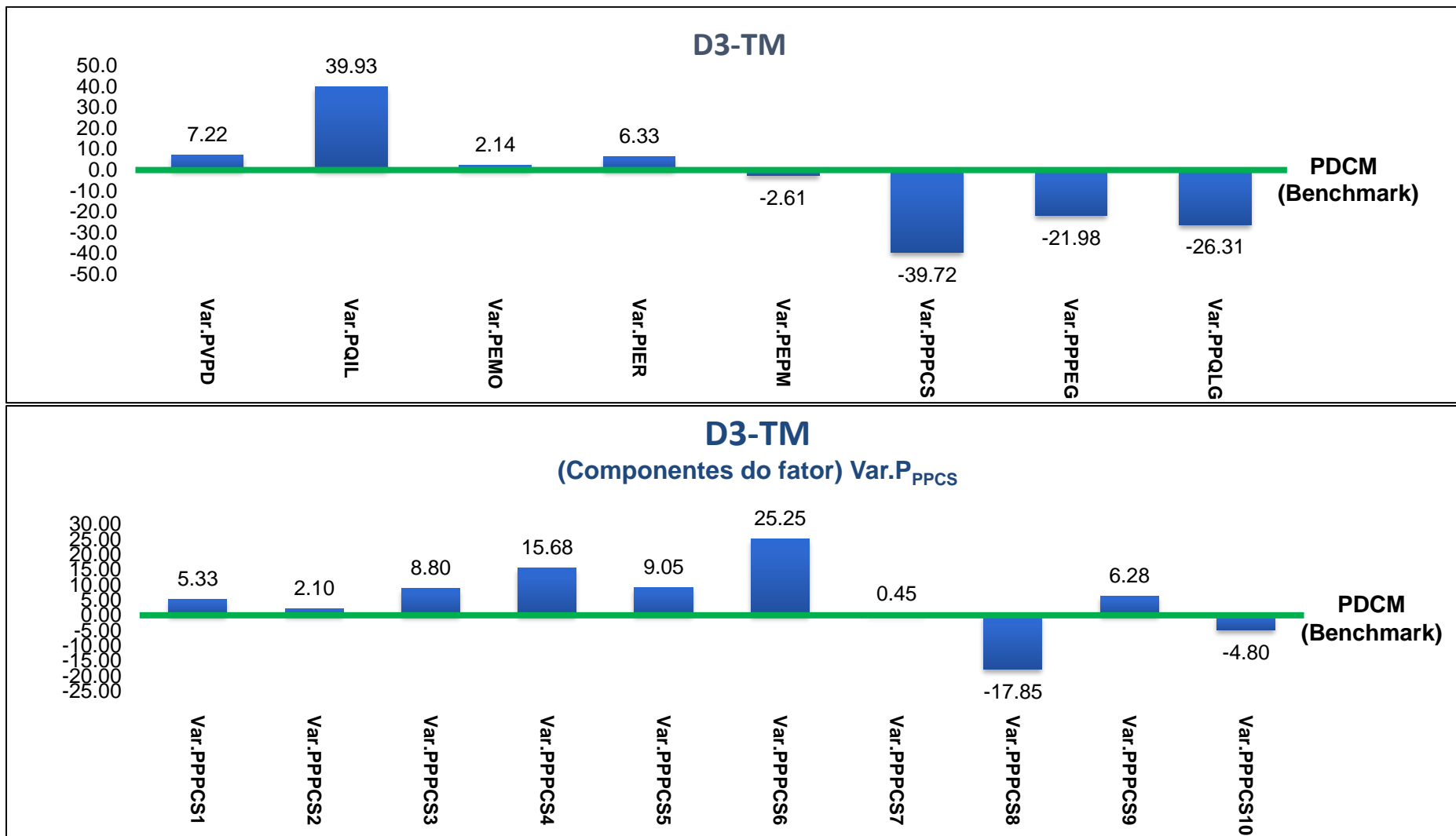


Figura 5 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D3-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

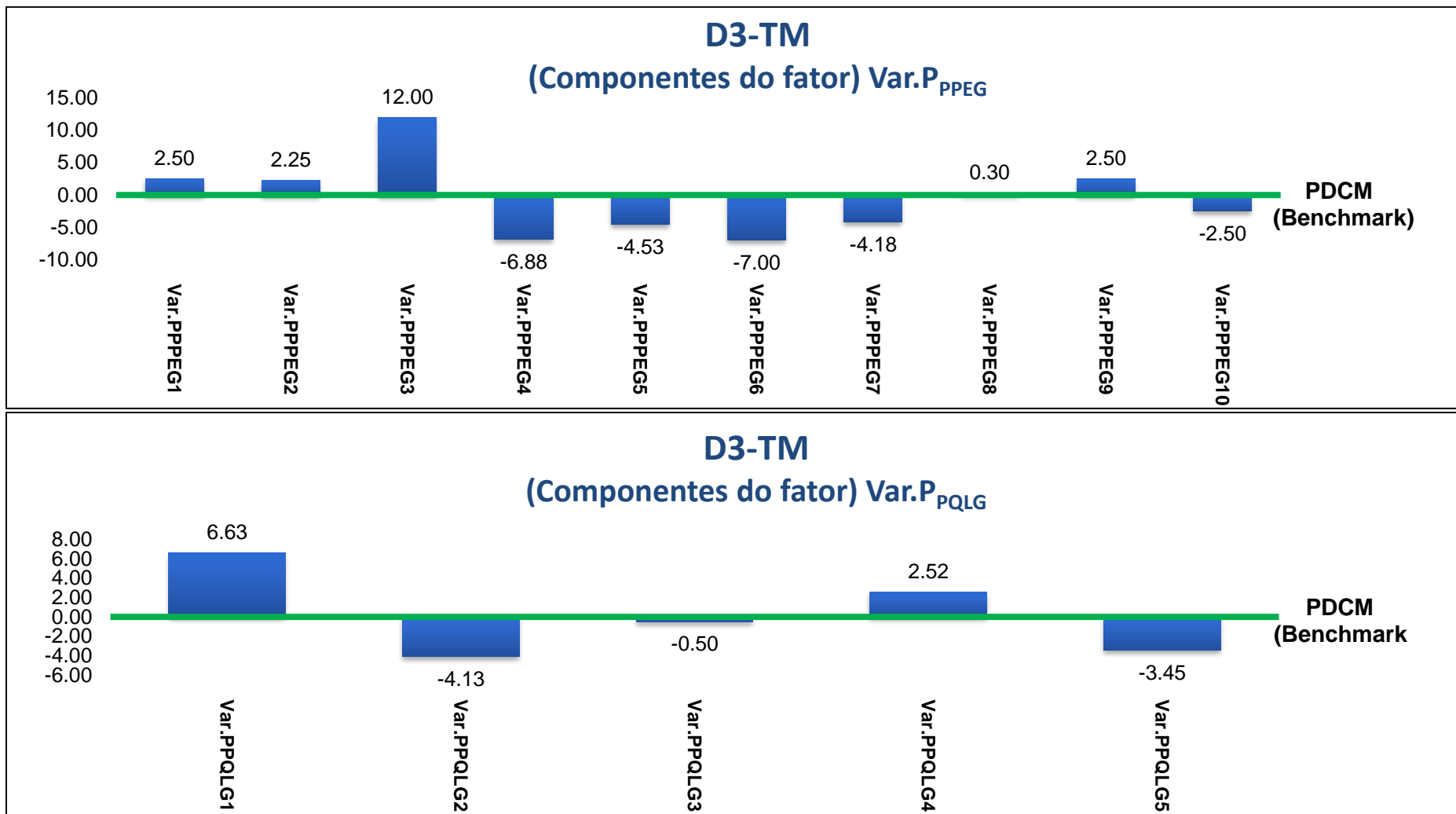


Figura 6 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D3-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDCPM})$ , onde  $(P_{NFCRDCPM} = base = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

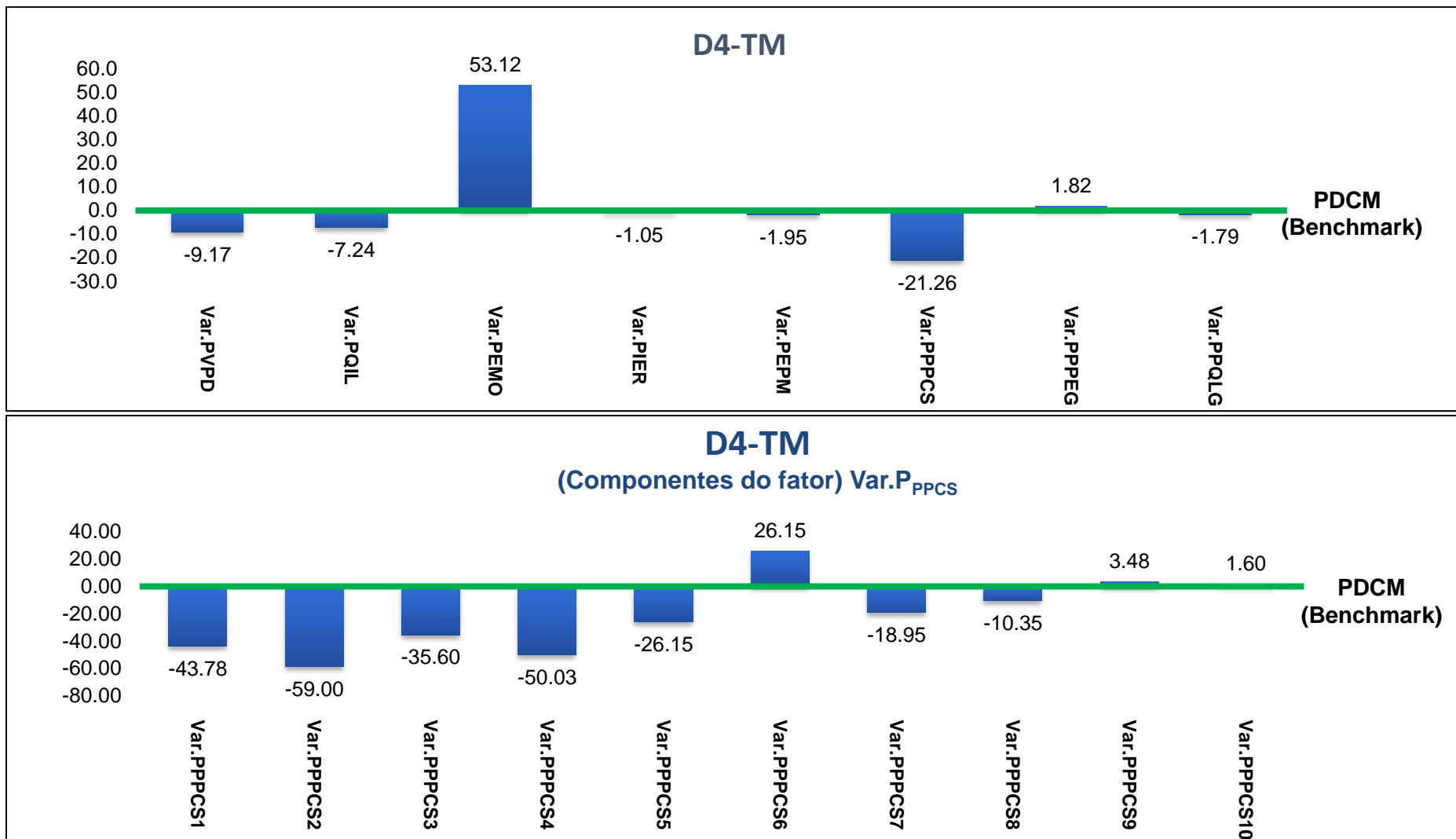


Figura 7 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D4-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

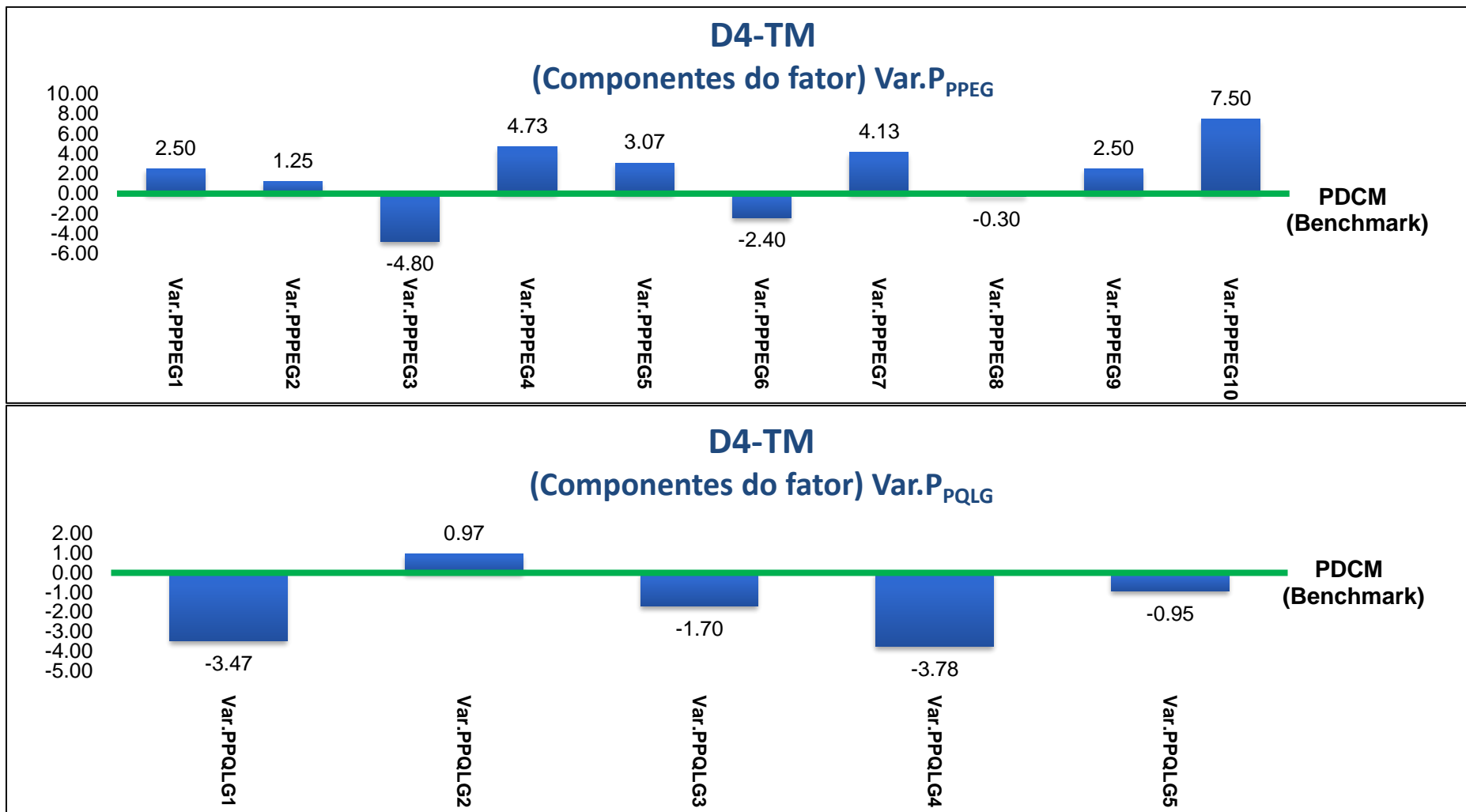


Figura 9 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D4-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCDRA} - P_{NFCDPCM})$ , onde  $(P_{NFCDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

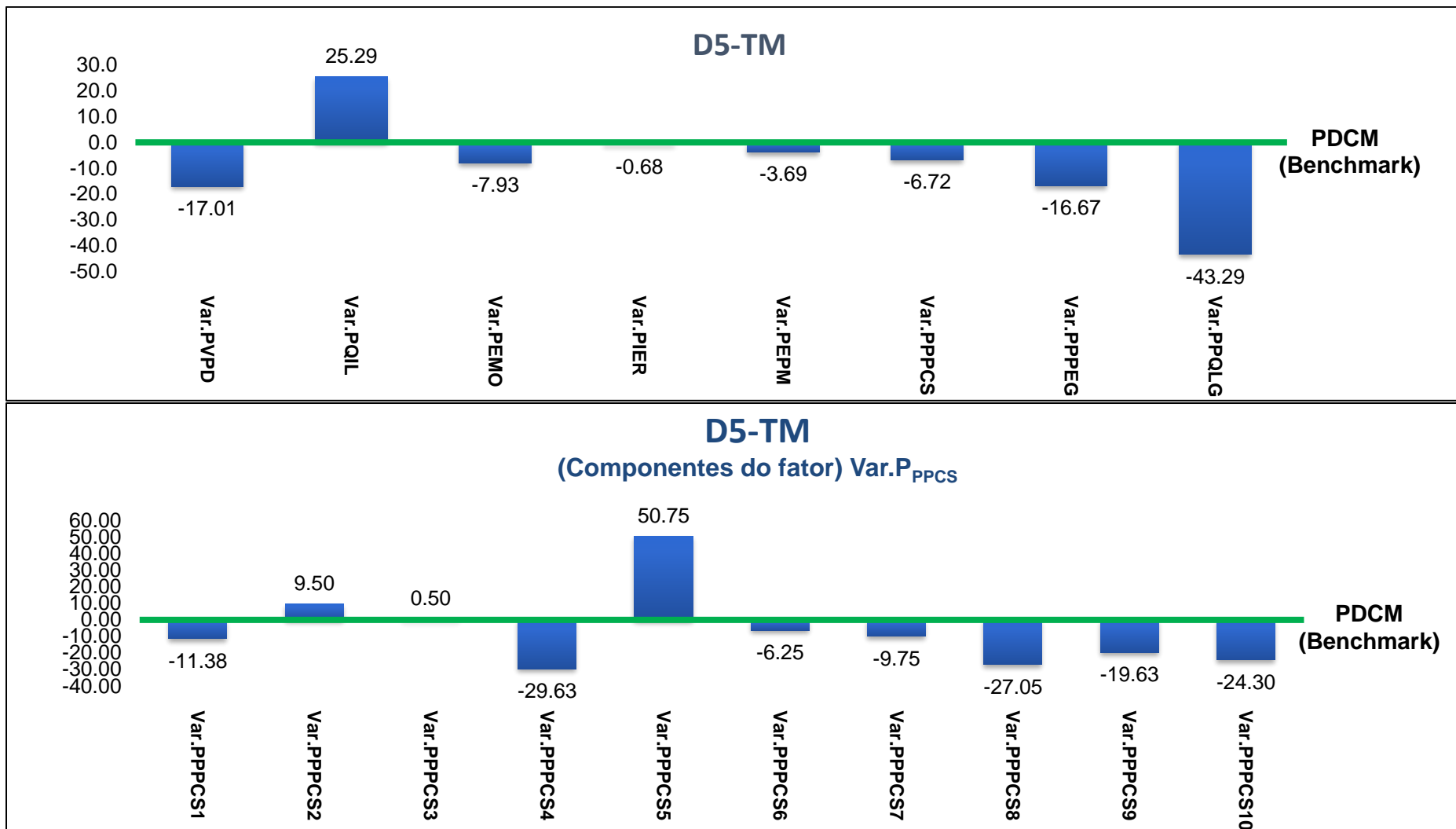


Figura 10 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D5-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %):  $FVCCR = (P_{NFCDRA} - P_{NFCDPCM})$ , onde ( $P_{NFCDPCM} = \text{base} = 0,0\%$ ); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

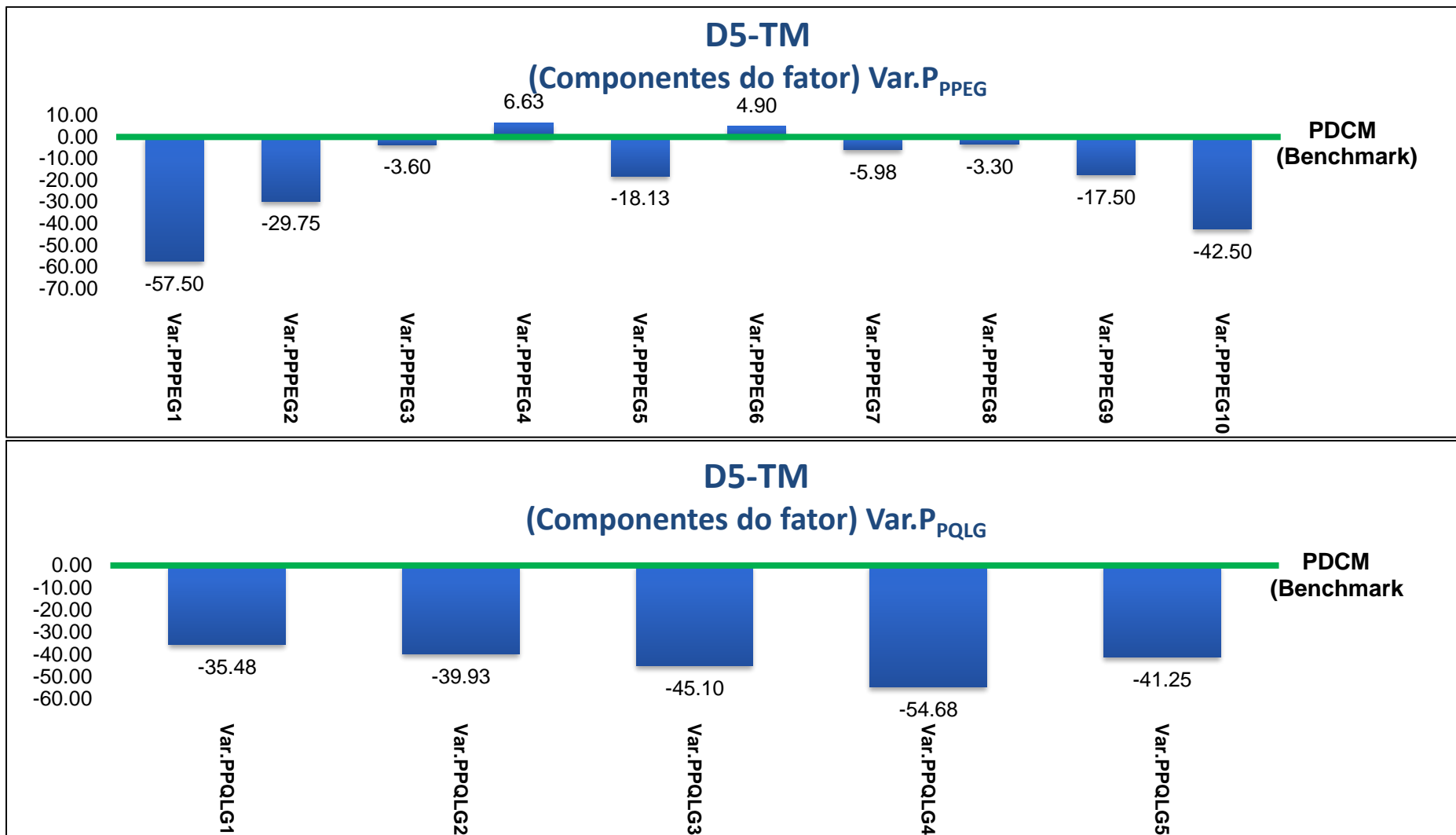


Figura 11– *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D5-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCDRA} - P_{NFCDPCM})$ , onde  $(P_{NFCDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

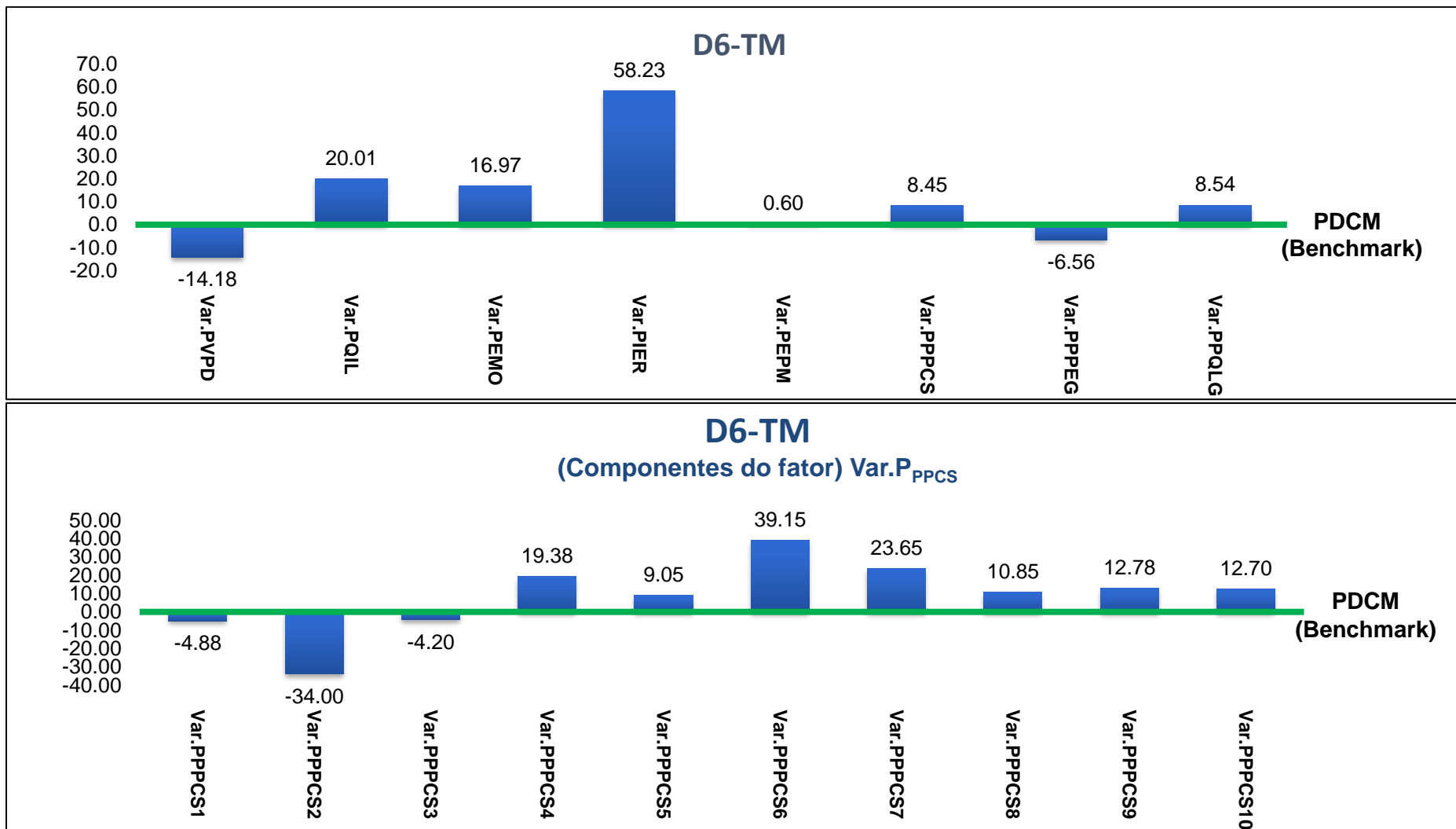


Figura 12 – Graphic View (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D6-TM  
 Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

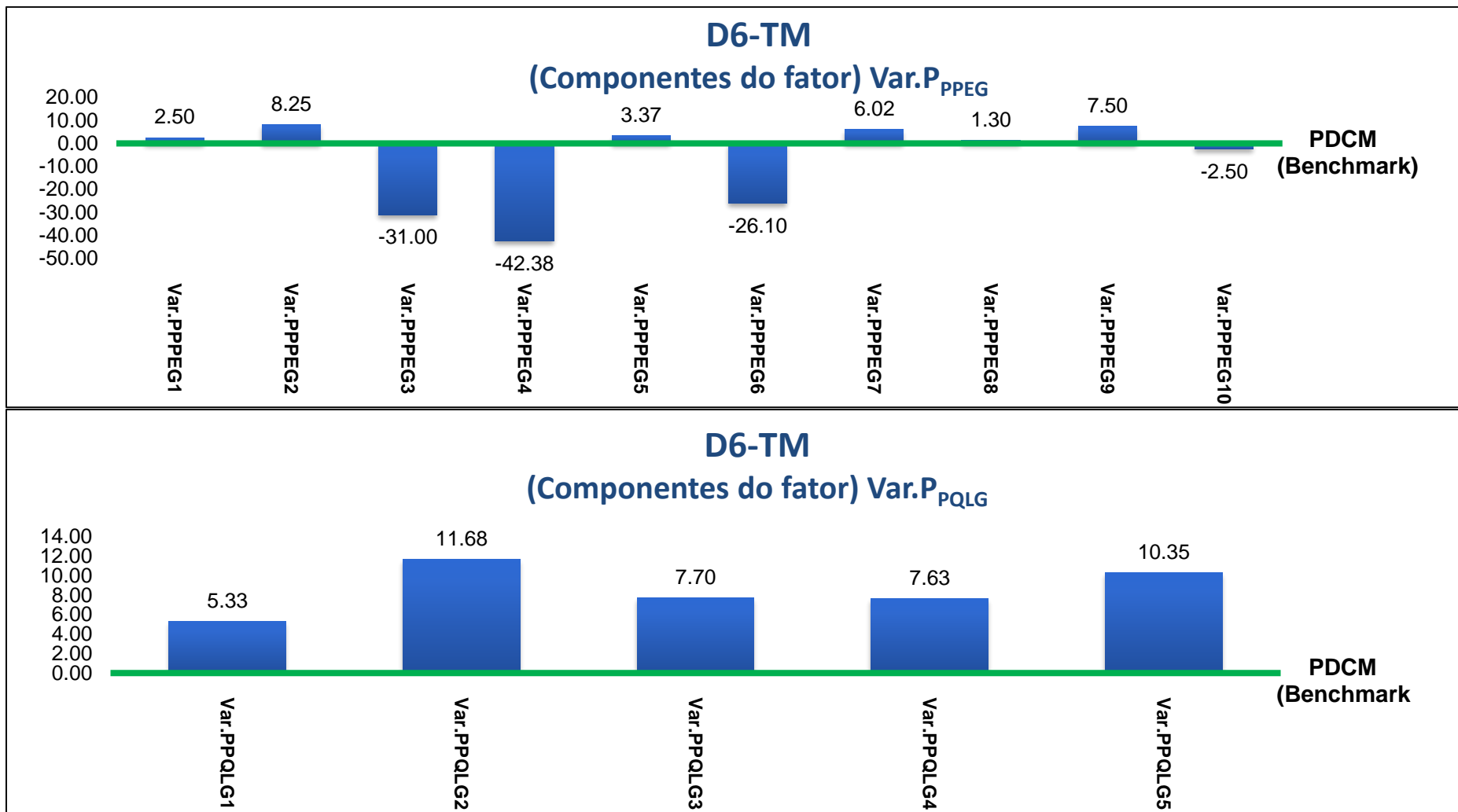


Figura 13 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D6 -TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - *Teste do modelo – TM*.



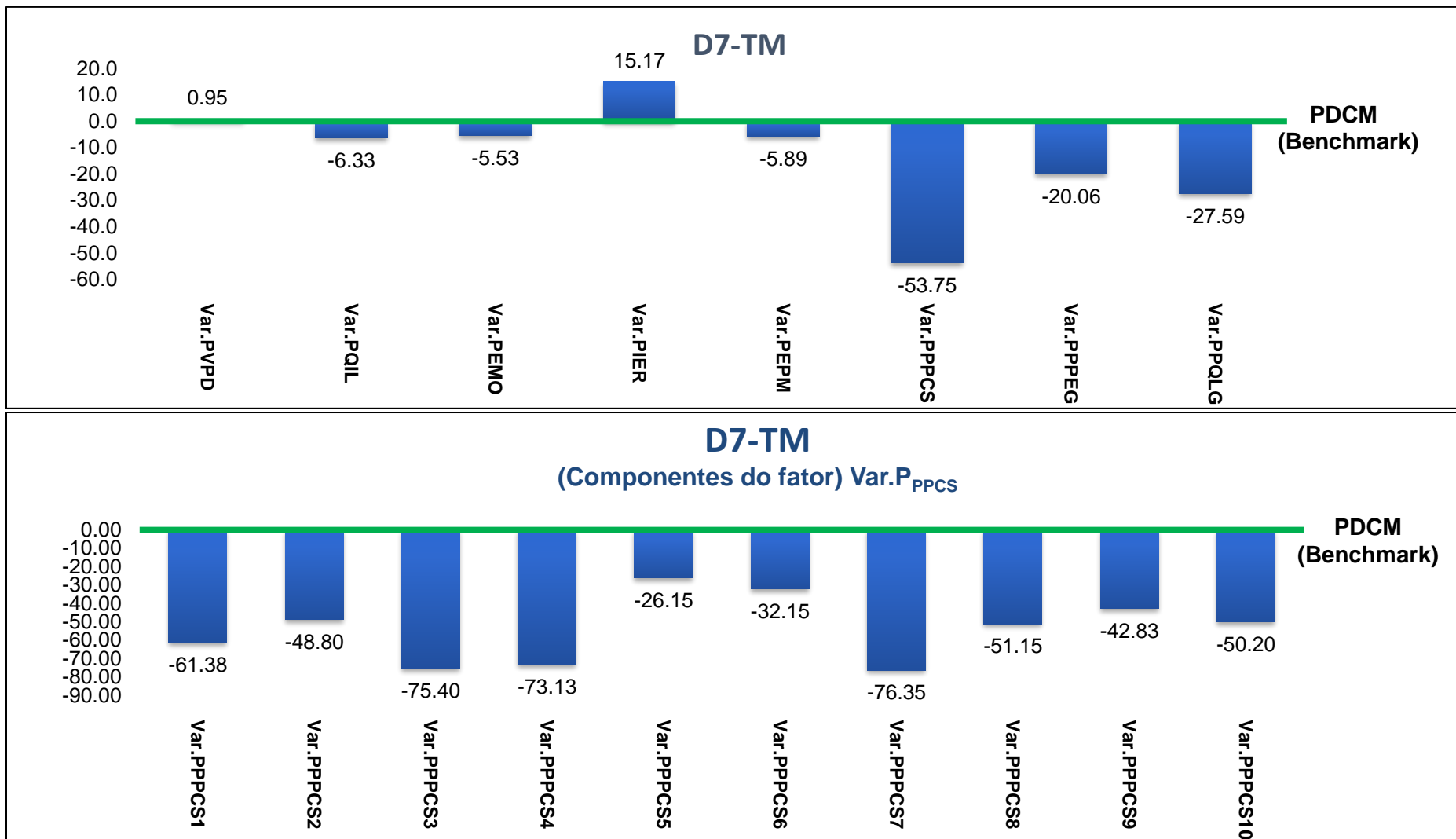


Figura 14 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D7-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base = 0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

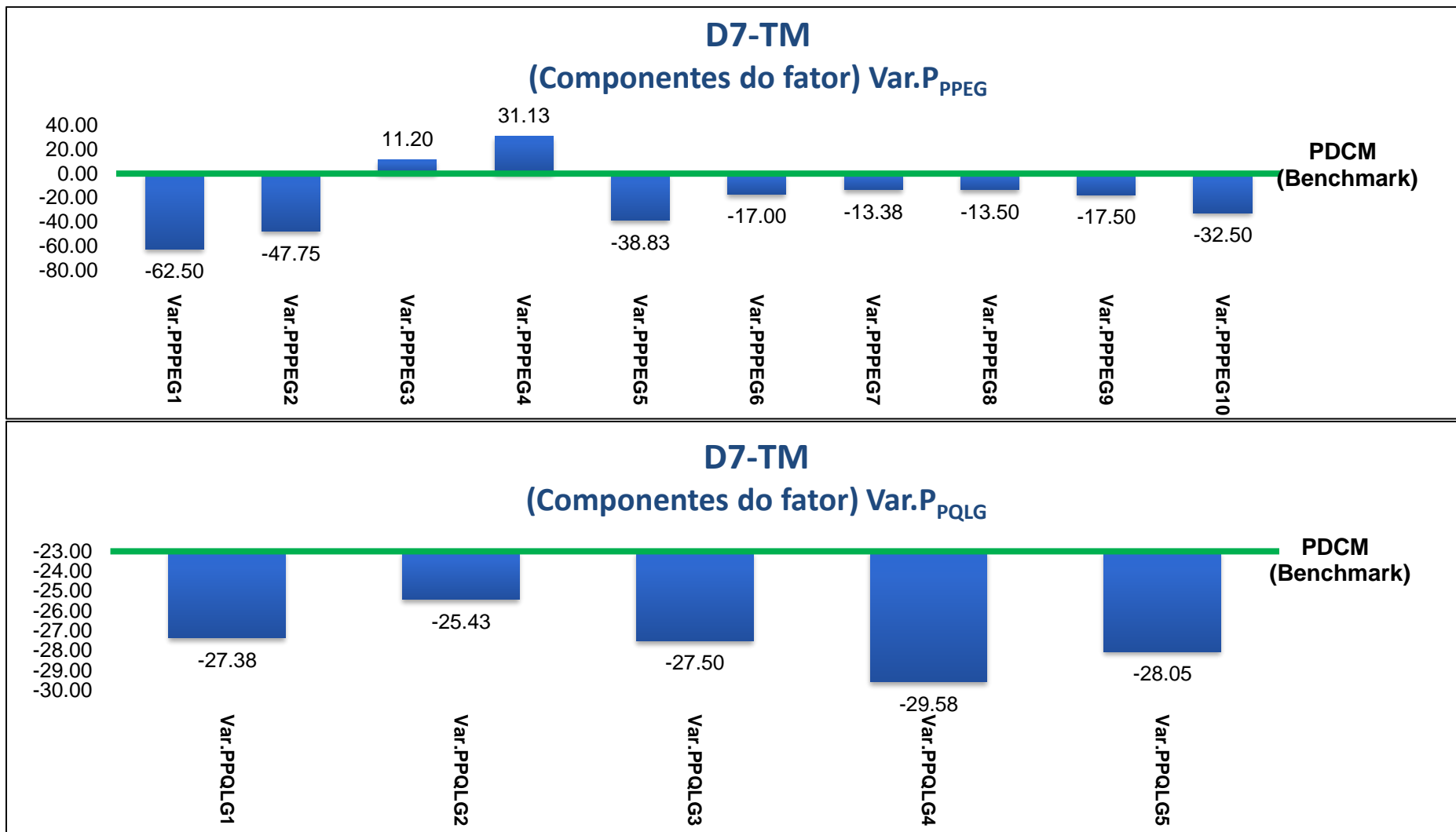


Figura 15 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticos de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D7-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

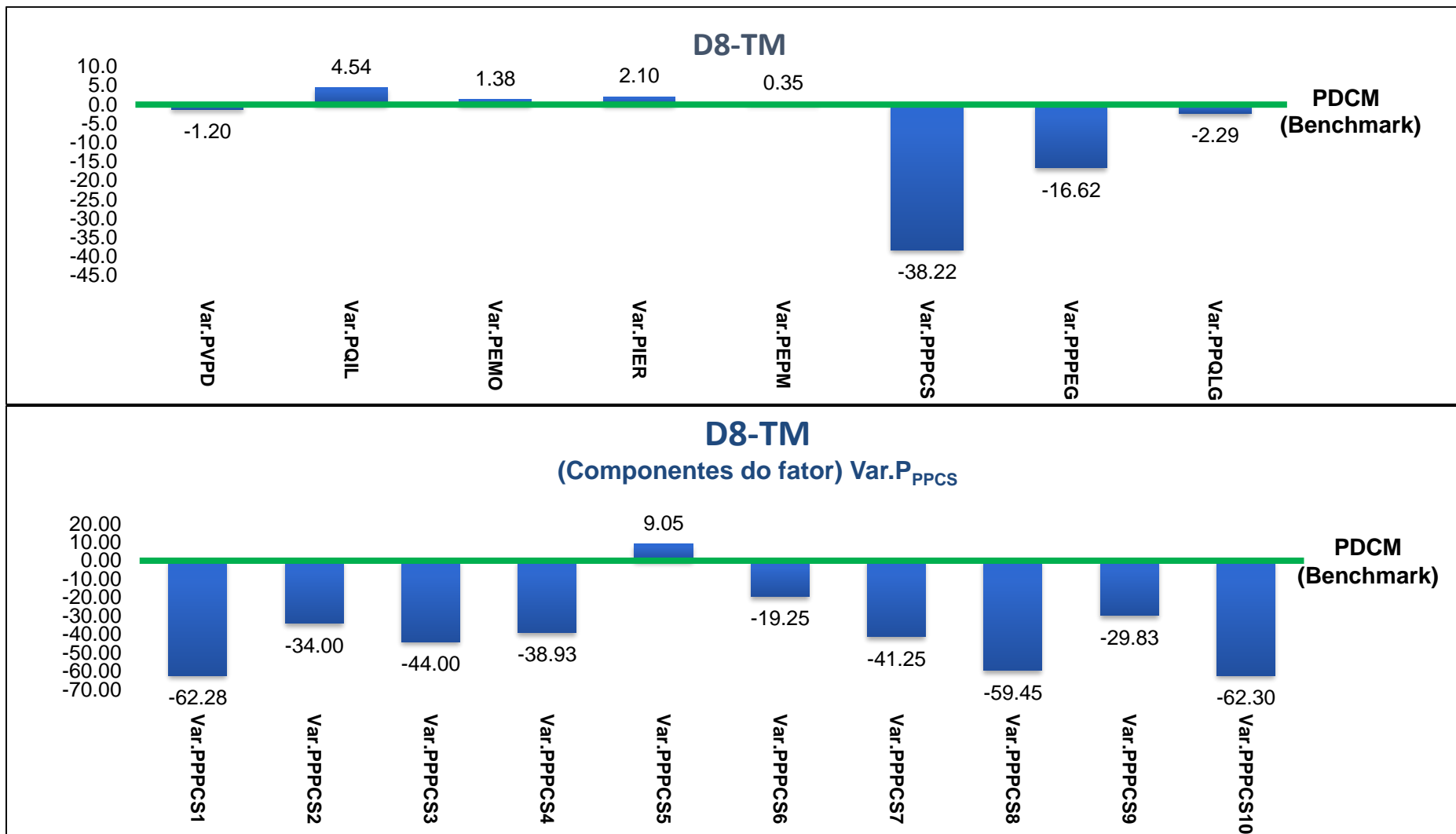


Figura 16 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D8-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base = 0,0 %); Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

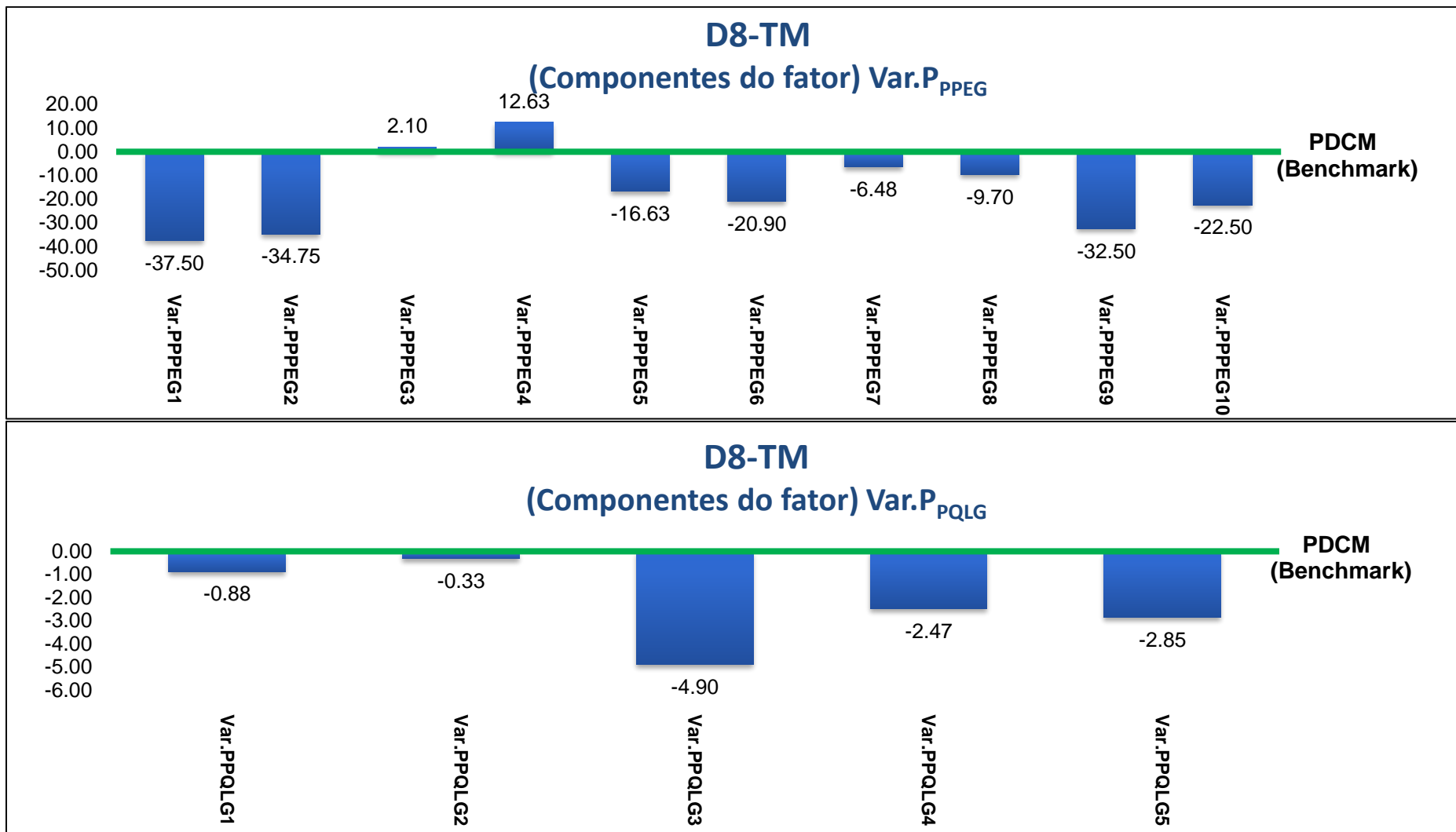


Figura 17 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D8-TM  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Teste do modelo – TM](#).

Figuras 18 até 27 – Visualização gráfica dos fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR, *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %). Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#)

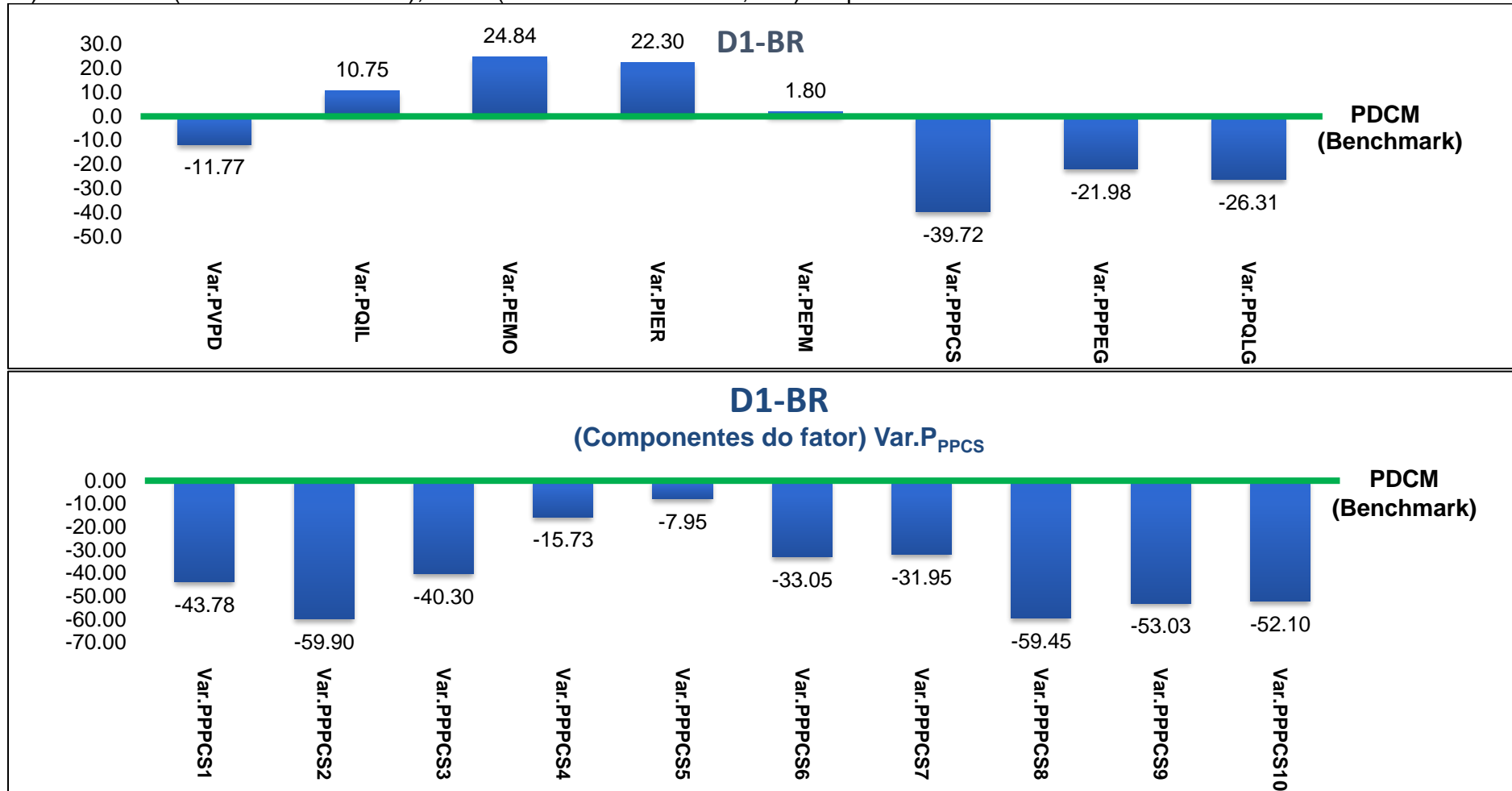


Figura 18 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-BR  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

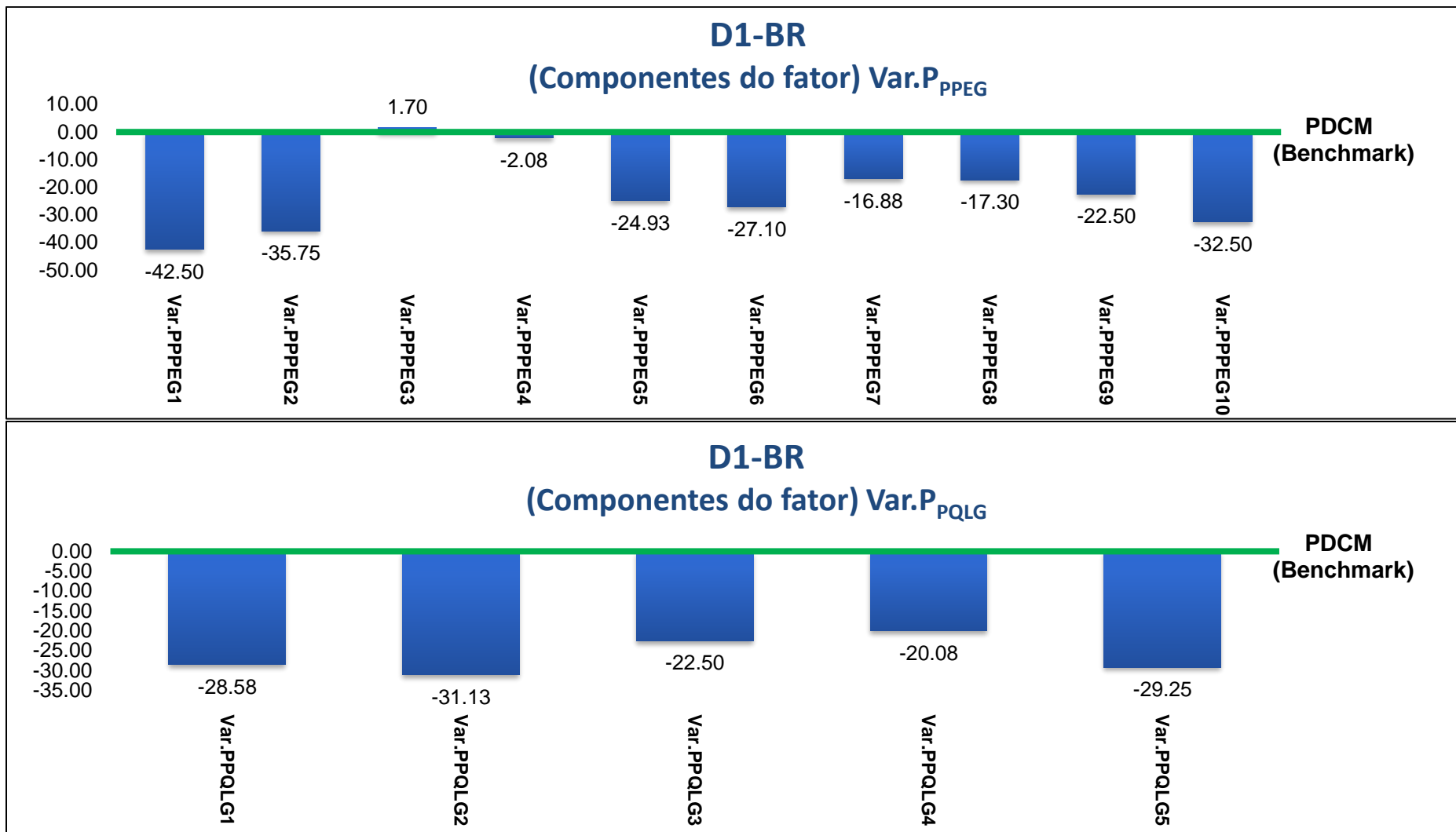


Figura 19 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCDRA} - P_{NFCDPCM})$ , onde  $(P_{NFCDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

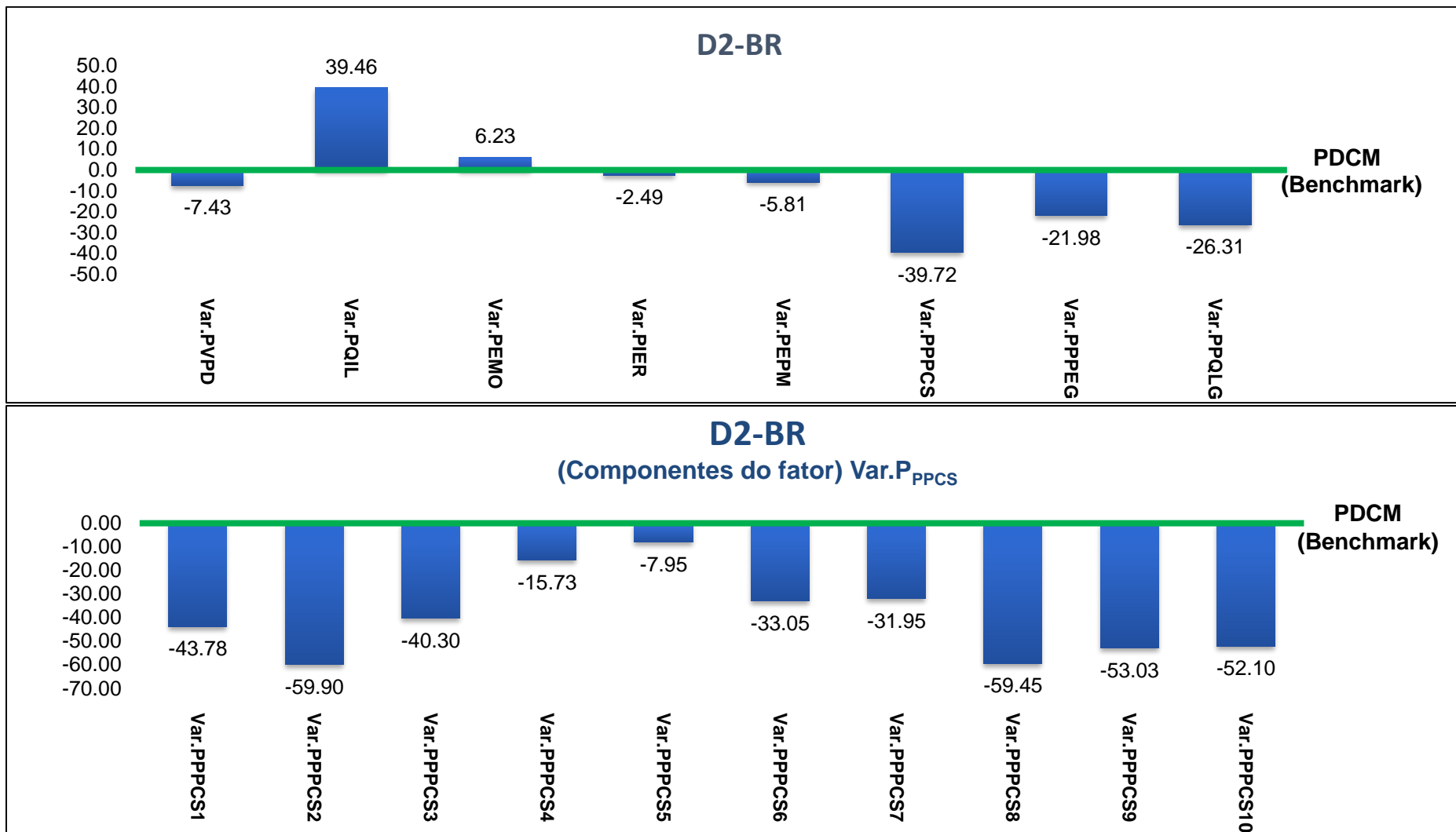


Figura 20 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D2-BR  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

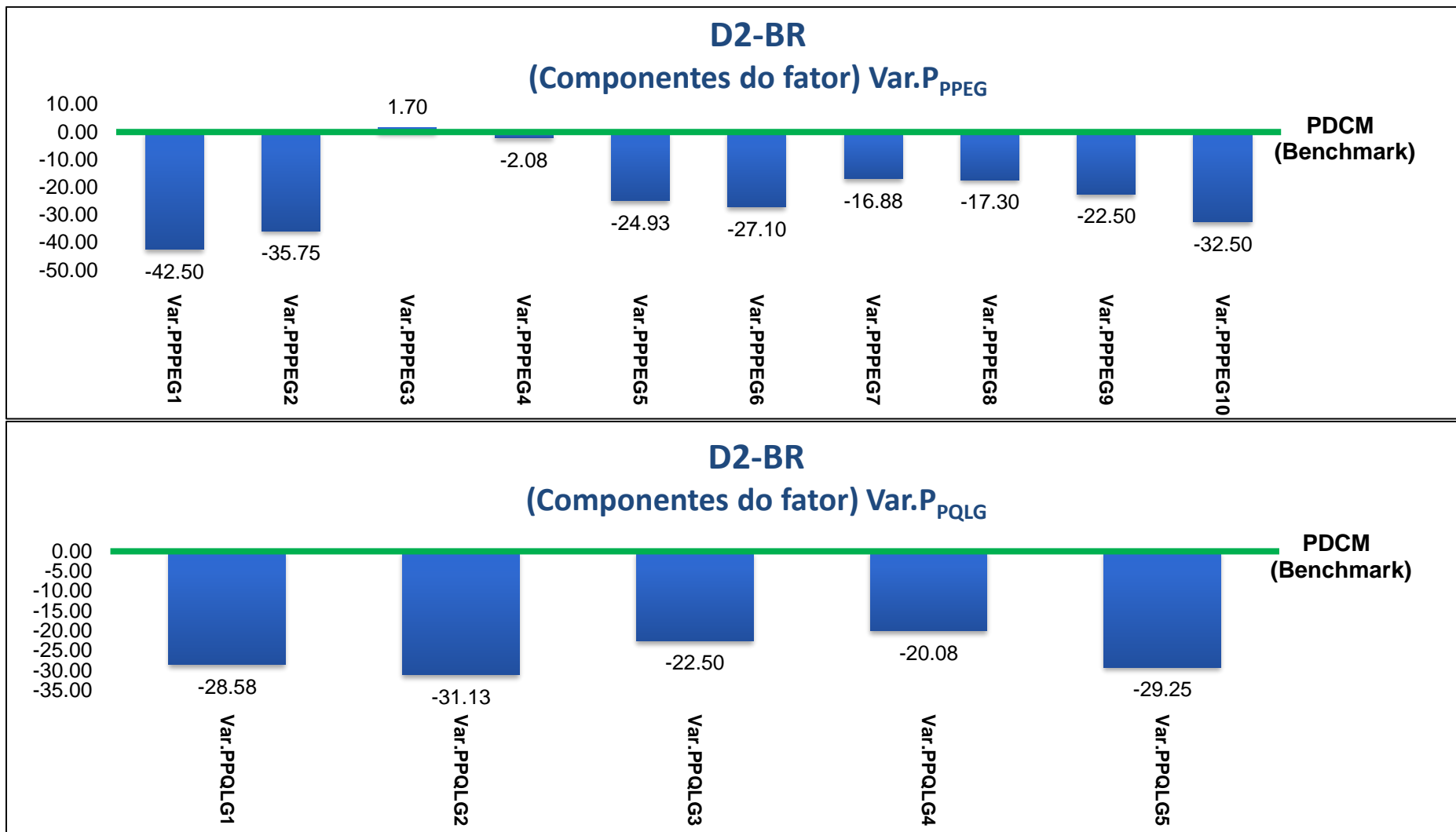


Figura 21 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D2-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCDRA} - P_{NFCDPCM})$ , onde  $(P_{NFCDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).



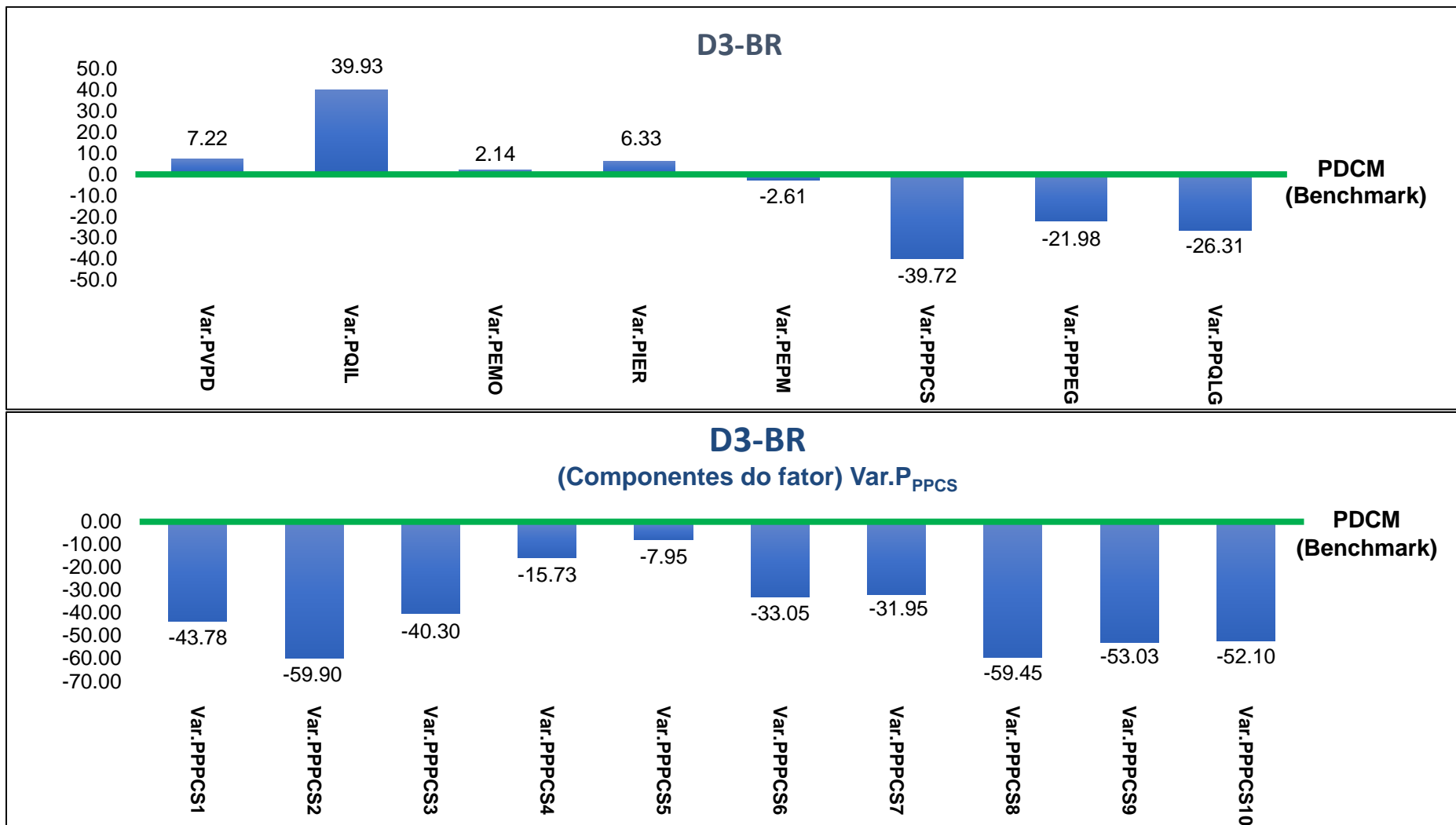


Figura 22 – Graphic View (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D3-BR

Nota: Graphic View (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

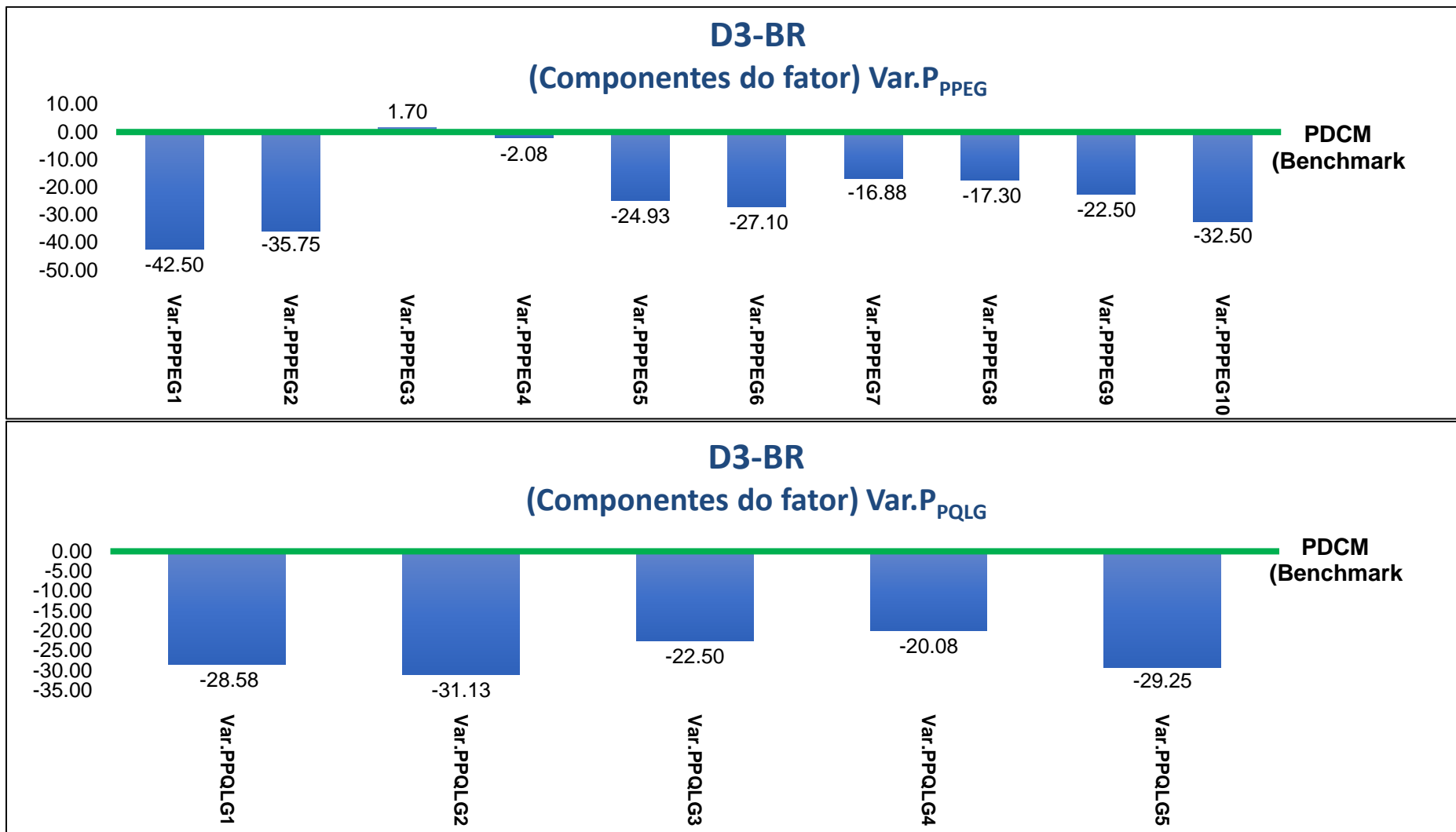


Figura 23 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D3-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

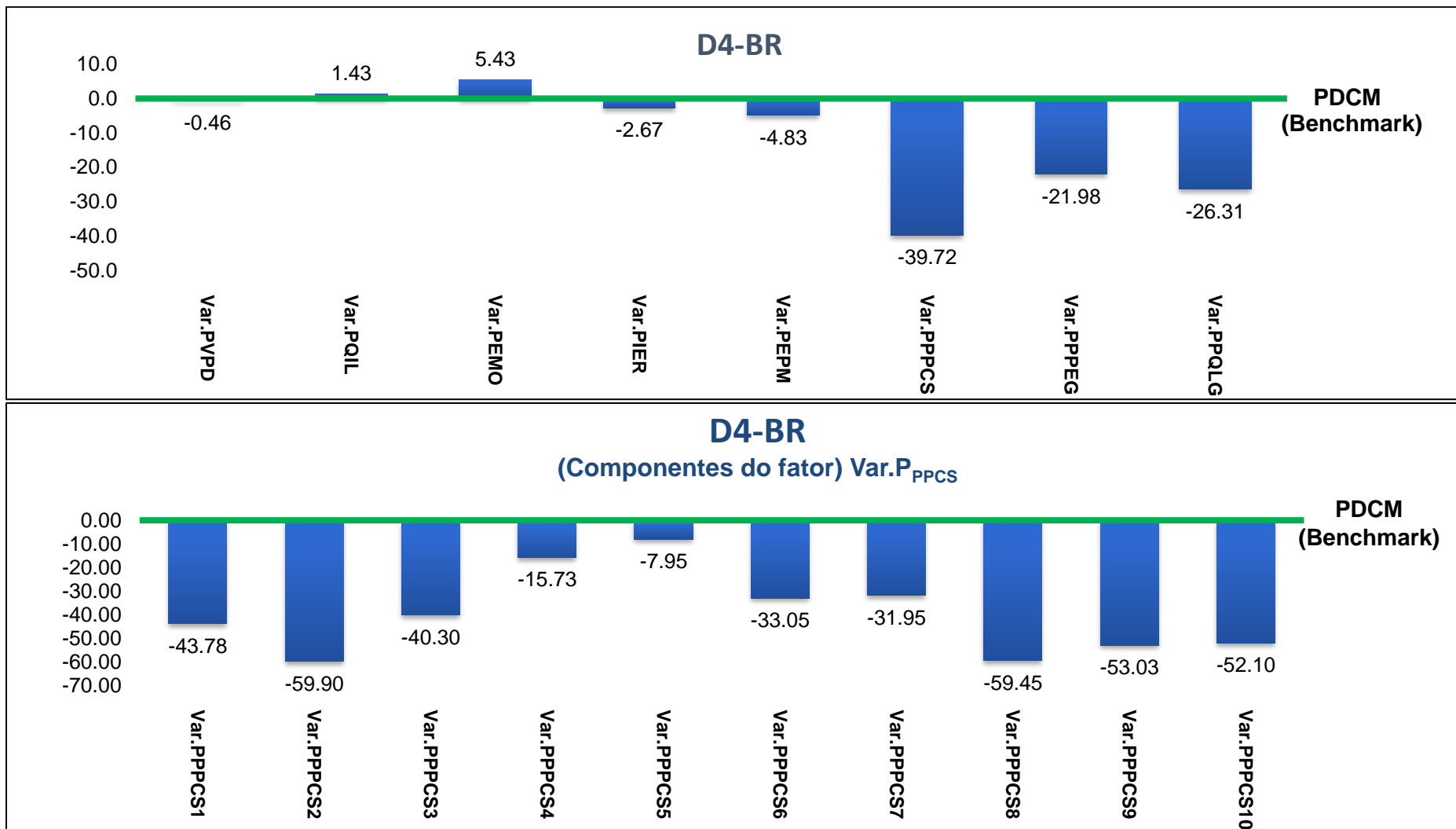


Figura 24 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D4-BR  
 Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base = 0,0 %); Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

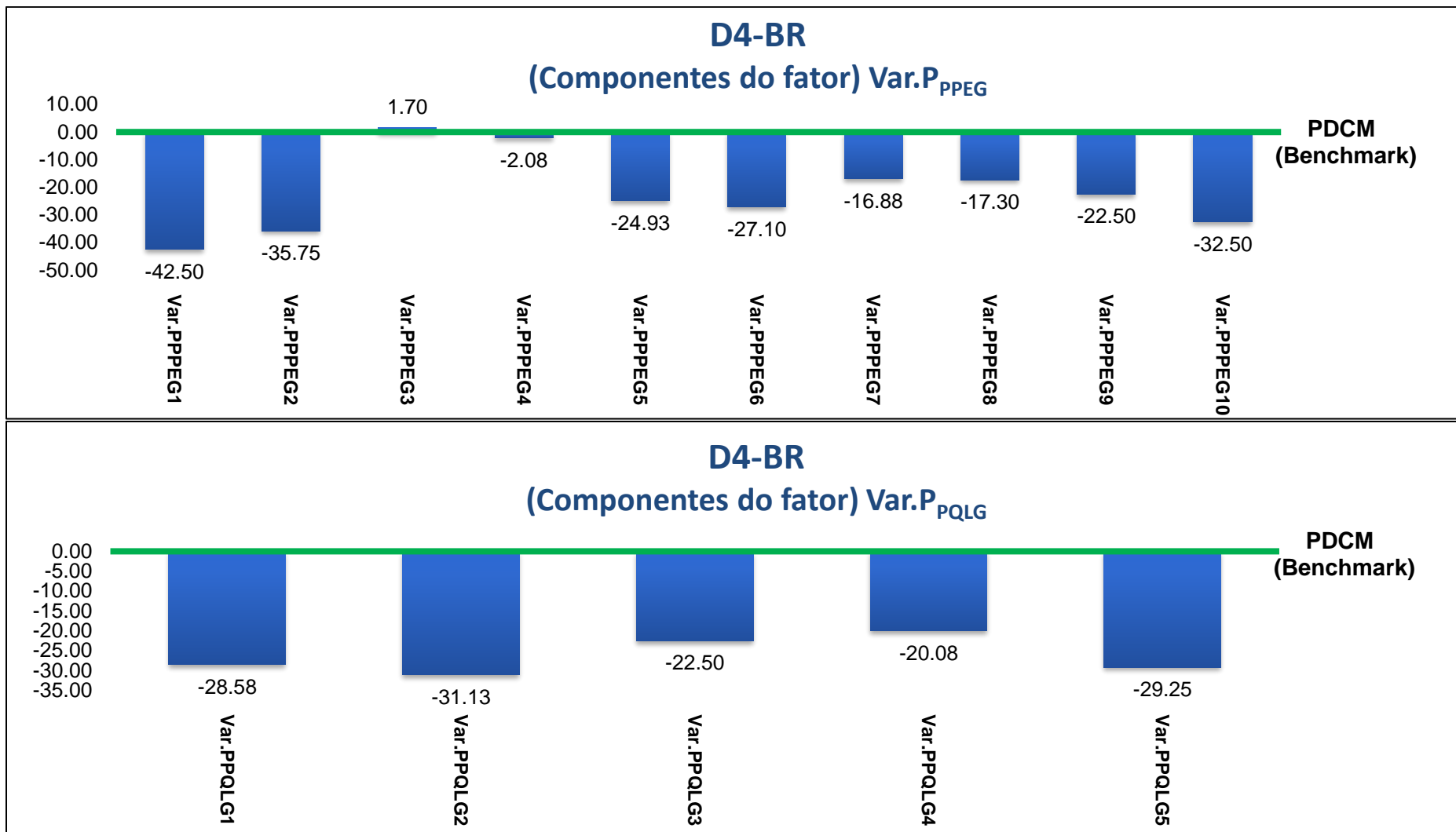


Figura 25 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D4-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

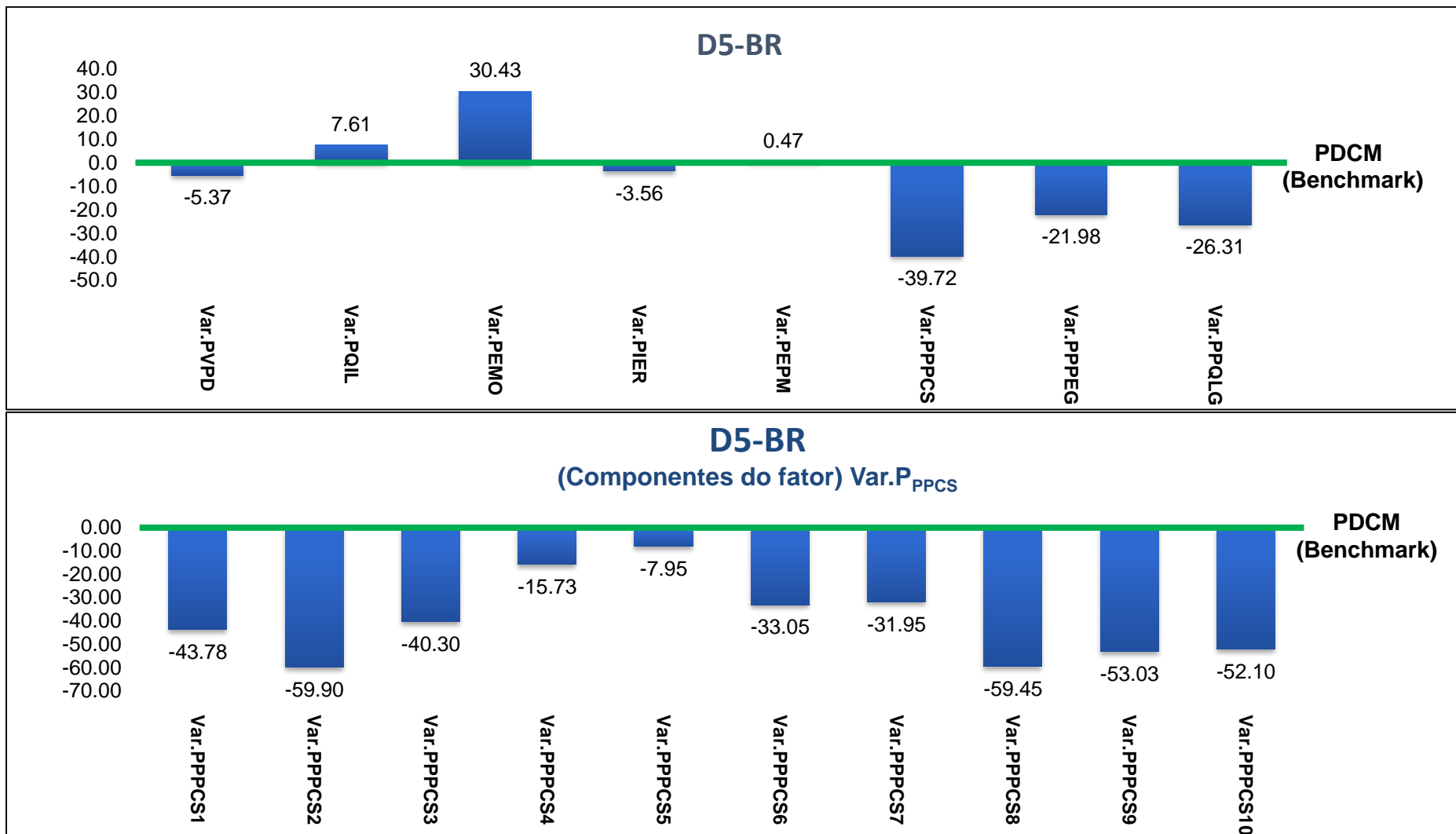


Figura 26 – *Graphic View* (GV, %):Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D5-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR = (P<sub>NFCRDA</sub> - P<sub>NFCRDPCM</sub>), onde (P<sub>NFCRDPCM</sub> = base =0,0 %); Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

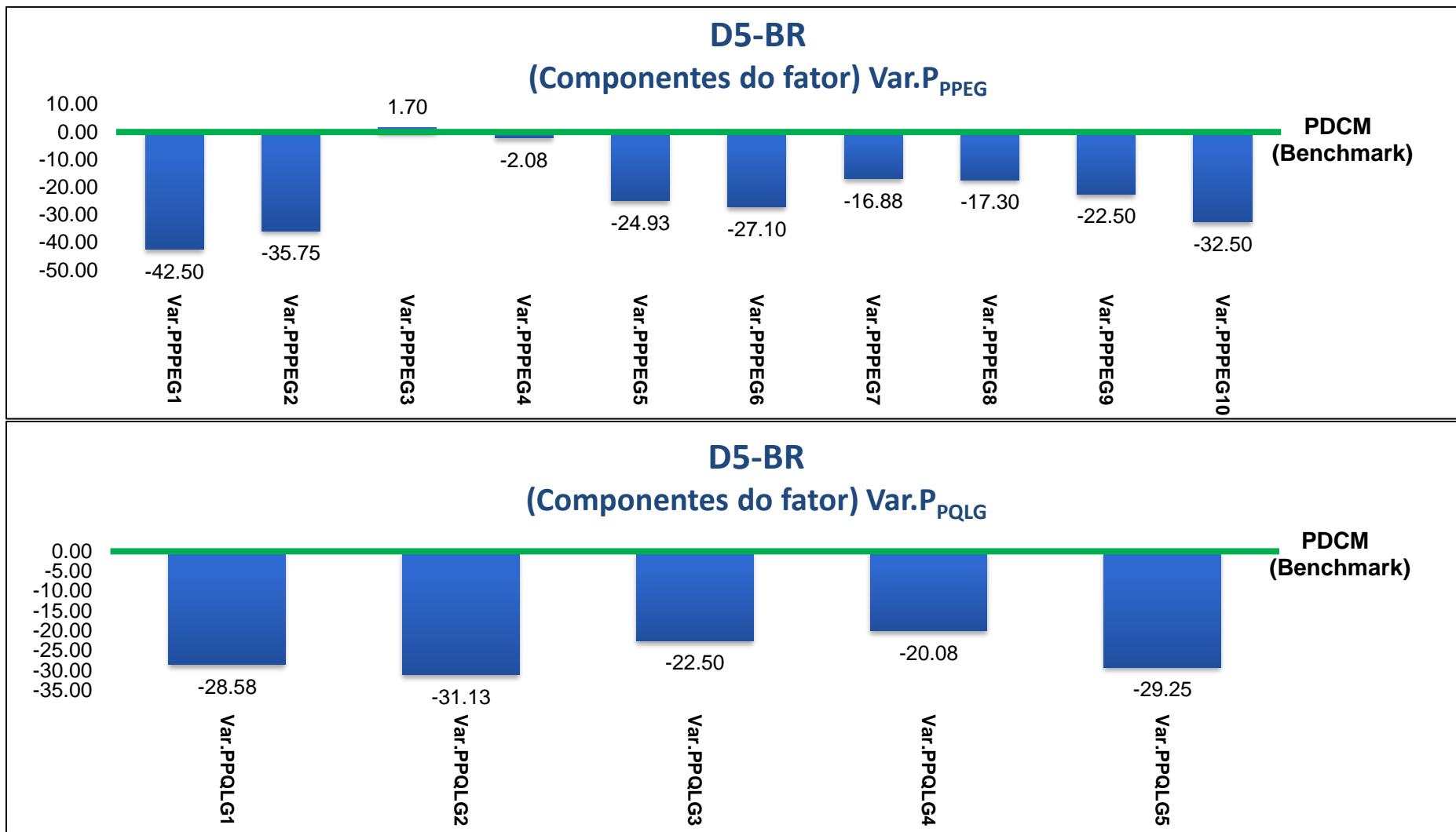


Figura 27 – *Graphic View* (GV, %): Fatores e variáveis críticas de competitividade e risco – FVCCR depósito/projeto D1-BR

Nota: *Graphic View* (GV, %): FVCCR =  $(P_{NFCRDA} - P_{NFCRDPCM})$ , onde  $(P_{NFCRDPCM} = \text{base} = 0,0 \%)$ ; Depósitos em Análise - [Estudo de caso Brasil](#).

## ANEXO A - HISTÓRICO E GEOQUÍMICA DOS ELEMENTOS TERRAS RARAS

O primeiro registro sobre as ETR data de 1751, quando o sueco Axel Frederik Cronstedt descobre um novo mineral, a “pedra pesada de *Bastnäs*” (rocha preta esverdeada) nas proximidades de Estocolmo, Suécia, posteriormente chamado de cerita. Nesta época, após séries de análises, acreditou-se que o mineral se tratava de um silicato de cálcio e ferro, sendo que os ETR, então desconhecidos, foram confundidos com o cálcio (WERTS, 2005 e WEEKS, 1956 apud SERRA, O.A.; SOUSA, F.P.C., 2014). Outra rocha pesada de cor preta esverdeada foi encontrada em 1787 pelo militar e mineralogista Carl Axel Arrhenius, esta nova amostra foi recolhida numa pedreira próxima à localidade de Ytterby, nas proximidades de Estocolmo na Suécia (CHAKHMOURADIAN e WALL, 2012). A incomum rocha escura foi batizada por Arrhenius como Yterbia, em razão da localidade na qual fora descoberta tal rocha, e posteriormente chamou de Ytria (HOATSON, 2011). Os ETR foram observados pela primeira vez, quando da descrição do mineral Yterbita  $[Y_2Fe^2Be_2Si_2O_{10}]$  (também conhecido como gadolinita –  $Y[(Ce,La,Nd,Y)_2FeBe_2Si_2O_{10}]$ ), a partir de 1800 (CHAKHMOURADIAN e WALL, 2012).

Assim, a partir da gadolinita, o químico Anders Gustav Ekeberg isolou o elemento químico berílio, mas não conseguiu reconhecer a presença das *terras raras*, os outros elementos nos quais aquele minério é rico. Em 1803, um mineral recolhido em Bastnäs, uma localidade próxima de Riddarhyttan, na Suécia, que se acreditava ser um mineral de ferro-tungstênio, foi reanalisado por Jöns Jacob Berzelius e Wilhelm Hisinger, que obtiveram um óxido branco a que deram o nome de *céria*, depois identificado como um óxido de cério. Dessa forma, em 1803 eram conhecidos os óxidos de dois elementos pertencentes às *terras raras*: o *ítrio* e o *cério*. A *íttria* consistia em uma mistura de óxidos que hoje se conhecem como *terras ítricas*, isto é, os óxidos do ítrio e dos lantanídeos pesados (Gd-Lu). E o *cério* era, na verdade, uma mistura das chamadas *terras céricas*, isto é, de óxidos dos lantanídeos leves (La-Eu, com exceção do promécio, a única das TR que não apresenta isótopos estáveis). O descobrimento desses dois novos elementos deu início a uma extensa e complexa série de trabalhos de separação e identificação de novos elementos a partir dos óxidos supostamente puros (SERRA, O.A.; SOUSA, F.P.C., 2014). Em 1839 Carl Gustav Mosander, um assistente de Berzelius,

conseguiu separar o óxido de cério em dois componentes. Ao óxido do sal solúvel que ele obteve, o chamou de *lanthana*. Durou cerca de 3 anos até que conseguisse separar o *lanthana* no seu *didymia* (gêmeo) e em lantânio puro. O *didymia*, não separável pelas técnicas usadas por Mosander, era ainda uma mistura de óxidos (GSCHNEIDNER, 1987). No ano de 1842 Mosander também separou o *ytteria* em três óxidos: *ytteria* pura, *térbia* e *érbia* (nomes derivados de Ytterby, a localidade de onde o mineral original proviera).

Mosander deu o nome de *terbium* ao elemento que dava origem a sais rosados; ao que produzia peróxidos amarelados *erbium*. Estavam então, isolados o térbio e o érbio, totalizando o número de terras raras conhecidas até então em seis: *yttrium* (ítrio), *cerium* (cério), *lanthanum* (lantânio), *erbium* (érbio), e *didymium* (didímio), sendo este último uma mistura de dois elementos diferentes (praseodímio e neodímio). Mais tarde, Nils Johan Berlin e Marc Delafontaine conseguiram também separar o *ytteria* e encontraram as mesmas substâncias que Mosander obtiverad, mas Berlin denominou (em 1860) a substância que produzia sais rosados como *erbium* e Delafontaine designou a substância que produzia o peróxido amarelado como *terbium*. Esta confusão levou a várias identificações erradas, incluindo diversos casos de isolamento de novos elementos que depois se provou serem já conhecidos, tais como o *mosandrium* de John Lawrence Smith, ou o *philippium* e *decipium* de Delafontaine. Graças as semelhanças físico-químicas dos Terras raras, a separação dos demais elementos levou mais 30 anos, sendo o *didymium* listado nas tabelas periódicas como um elemento químico com massa molecular de 138. Em 1879 Delafontaine utilizou a (recém inventada) técnica de espectroscopia de chama e descreveu um espectro óptico complexo, com linhas de absorção que indicavam a presença de mais de um elemento. Também em 1879, o químico francês Paul Émile Lecoq de Boisbaudran isolou um novo elemento pertencente ao grupo das *terras raras*, o *samarium* (*samário*) a partir do mineral samarskite. A partir de *samaria*, os óxidos de *samarium*, Paul Émile Lecoq de Boisbaudran isolou em 1886, resultado que foi confirmando por Jean-Charles Galissard de Marignac, que obteve o mesmo elemento diretamente da samarskite. A este elemento deram o nome de *gadolinium* (*gadolínio*), em homenagem a Johan Gadolin, designando os seus



óxidos como *gadolinia*. Por meio de análises espectroscópicas de amostras da *samarita*, *ytterbia* e *samaraskite*, realizadas por William Crookes, Lecoq de Boisbaudran e Eugène-Anatole Demarçay entre 1886 e 1901, revelaram linhas espectrais que indicavam a presença de um elemento desconhecido, que quando em 1901 foi isolado por cristalização fracionada, este foi chamado de *europium* (európio). A partir de 1839 surgiu uma terceira fonte de *terras raras*, um mineral similar à *gadolinite*, o *uranotantalum*, hoje designado por *samaraskite*. Este mineral foi inicialmente encontrado em Miass, no sul dos Montes Urais, sendo descrito pela primeira vez por Gustave Rose. O químico russo, R. Harmann, postulou então que um novo elemento, o *ilmenium* (de *ilmenita*), um mineral da região de Ilmen, nos Urais), deveria estar presente no mineral, mas Christian Wilhelm Blomstrand (1826-1897), Jean-Charles Galissard de Marignac e Heinrich Rose, encontraram nele apenas *tântalo* e *nióbio*. No início do século XX, estima-se que o número de *terras raras* conhecidos pudesse atingir os 25 elementos. Contudo, apenas após a utilização de raios x, aplicada ao estudo da difração em cristais, por Henry Moseley, permitindo a determinação dos números atômicos. Foi possível concluir que o número de elementos químicos pertencentes aos lantanídeos se tratava de 15, estando ainda em falta o elemento com número atômico 71. Por outro lado, a utilização da difração de raios x permitiu provar que o *hafnium* (*háfnio*) não era uma *terra rara* e que o anúncio feito por Georges Urbain da descoberta do elemento de número atômico 71 era incorreto (GSCHNEIDNER, 1987).

No período entre a descoberta do ítrio (1794) e do lutécio (a última dos ETR naturais a ser identificado, em 1907) relata-se quase uma centena de anúncios de descobertas de ETR, que na realidade se tratavam de inúmeras misturas de ETR não completamente separados. (SERRA, O.A.; SOUSA, F.P.C., 2014). Certamente os grandes avanços, no que toca a separação dos óxidos de terras raras, foram conseguidos com uso de espectroscópio em 1859. Por meio deste, foi possível determinar padrões de emissão e absorção de luz dos vários elementos. Assim, entre 1879 a 1907, o óxido *Didymia* foi separado em *Samária* (*Samário*), *Praseodymia* (*Praseodímio*), *Neodímia* (*Neodímio*), e *Európia* (*Európio*). Por fim, nos óxidos de *Érbia* (*Érbio*) e *Térbia* (*Térbio*), foram encontrados os óxidos *Holmia*

(Hólmio), Thulia (Túlio), Dysprósia (Dísprósio), Ytérbia(Itérbio) e Lutécia (Lutécio) (MAXWELL, 2016).

A figura 1 apresenta o fluxo da cronologia de separação dos ETR, e o quadro1, mostra de forma resumida o registro cronológico da descoberta dos ETR.

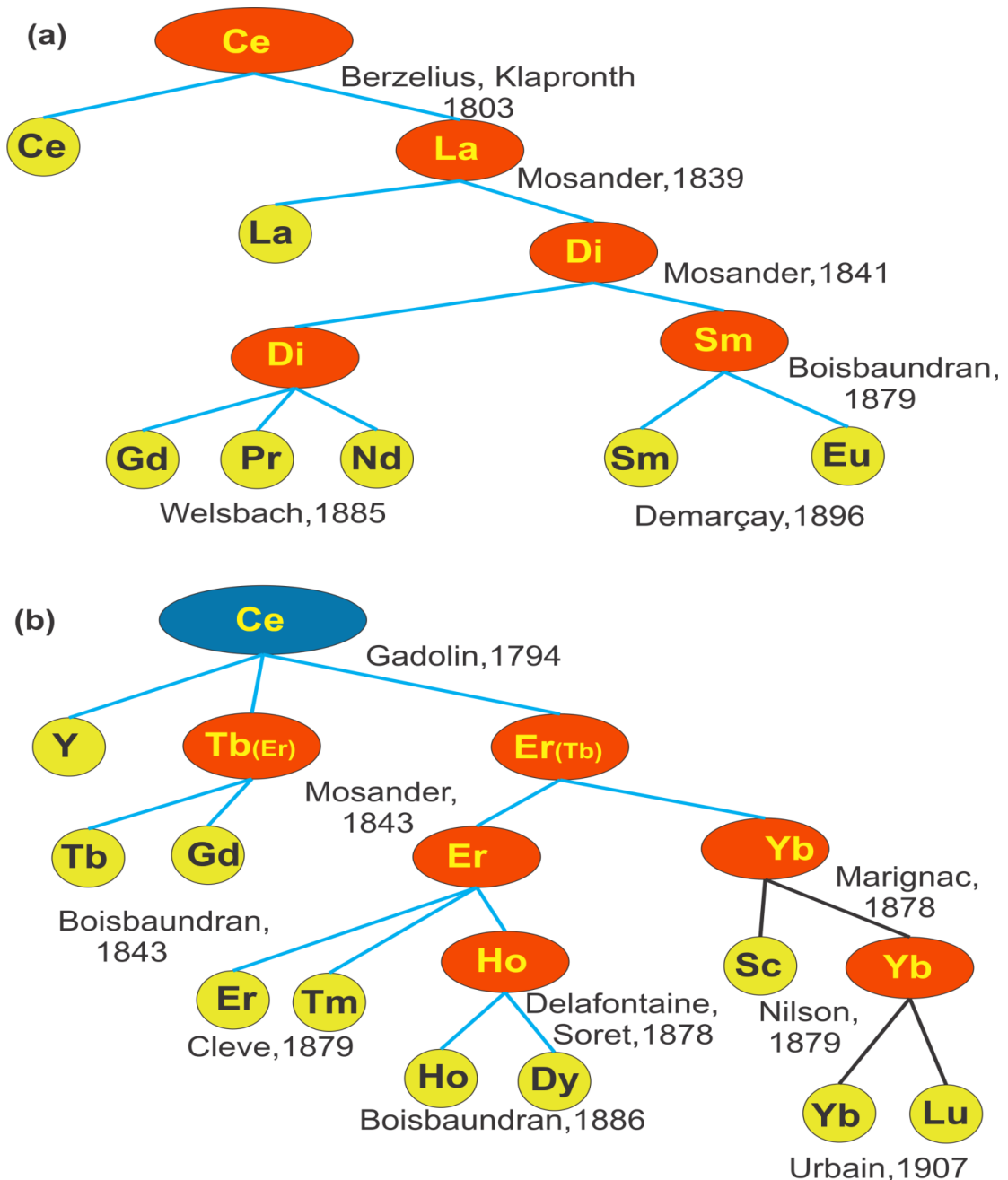


Figura 1 – Cronologia da separação das terras (a) céricas e (b) ítricas por seus respectivos descobridores a partir das misturas consideradas como elementos puros.

Fonte: Modificado de DAVIS, 1961; SAEZ-PUCHE, 1998; WEEKS, 1956 e MOSANDER apud SERRA, O.A.; SOUSA, F.P.C., 2014.

Elemento (Símbolo)	Número atômico	Ano	Descobridor	Origem do Nome
<b>ÍTRIO (Y)</b>	39	1794	Johan Gadolin (finlandês)	Mina de Ytterby, Suécia
<b>CÉRIO (Ce)</b>	58	1803	Jöns Jacob Berzelius e Wilhelm von Hisinger (sueco); Martin Heinrich Klaproth (alemão)	Planetóide de Ceres
<b>LANTÂNIO (La)</b>	57	1839	Carl Gustaf Mosander (sueco)	Grego: <i>lanthana</i> (oculto ou não observado) uma vez que estava escondido na terra.
<b>TÉRBIO (Tb)</b>	65	1843	Carl Gustaf Mosander (sueco)	Mina de Ytterby, (Suécia)
<b>ÉRBIO (Er)</b>	68	1843	Carl Gustaf Mosander (sueco)	Mina de Ytterby, (Suécia)
<b>HÓMIL (Ho)</b>	67	1878	Jacques-Louis Soret e Marc Delafontaine (suíço); Per Theodor Cleve (sueco)	Latim: <i>holmia</i> para 'Estocolmo'
<b>YTÉRBIO (Yb)</b>	70	1878	Jean Charles Galissard de Marignac (francês)	Mina de Ytterby, (Suécia)
<b>ESCÂNDIO (Sc)</b>	21	1879	Lars Fredrik Nilson (sueco)	Latim: <i>scandia</i> para 'Escandinávia'
<b>SAMÁRIO (Sm)</b>	62	1879	Paul Émile Lecoq de Boisbaudran (francês)	O mineral samarskita e seu descobridor, o Coronel oficial Von Samarsky da mina Russa
<b>TÚLIO (Tm)</b>	69	1879	Per Theodor Cleve (sueco)	Latim: <i>Thule</i> para o nome antigo da 'Escandinávia'
<b>GADOLÍNIO (Gd)</b>	64	1880	Jean Charles Galissard de Marignac (Suíço)	Hebreu: <i>gadol</i> para 'grande' e em honra ao químico finlandês Johan Gadolin
<b>PRASEODÍMIO (Pr)</b>	59	1885	Carl Auer von Welsbach (austríaco)	
<b>NEODÍMIO (Nd)</b>	60	1885	Carl Auer von Welsbach (austríaco)	Grego: <i>neos</i> para 'o novo' e <i>didimios</i> para os 'gêmeos'
<b>DISPRÓSIO (Dy)</b>	66	1886	Paul Émile Lecoq de Boisbaudran (francês)	Grego: <i>dysprositos</i> 'difícil de conseguir'; dificuldade envolvida com sua detecção e separação
<b>EURÓPIO (Eu)</b>	63	1896	Eugène-Anatole Demarçay (francês)	Grego: Europa da mitologia
<b>LUTÉCIO (Lu)</b>	71	1907	Georges Urbain (francês)	Latim: <i>Lutetia</i> para o local onde Paris foi fundada
<b>PROMÉCIO (Pm)</b>	61	1945	Charles D. Coryell; Jacob A. Marinsky; Lawrence E. Glendenin (estadunidenses)	Grego: Prometheus que trouxe fogo para a humanidade - referência ao aproveitamento da energia da fissão nuclear e alerta contra os perigos.

Quadro 1 – Registro da descoberta cronológica dos ETR

Fonte: HOATSON, JAIETH E MIEZITIS, 2011.

## 2.1 – GEOQUÍMICA

Existem mais de 250 minerais de ETR catalogados no mundo, a maioria deles possui baixas concentrações (SERRA, 2011). A bastnaesita  $[(\text{Ce},\text{La})(\text{CO}_3)\text{F}]$ , a monazita  $[(\text{Ce},\text{La},\text{Nd},\text{Th})\text{PO}_4]$  e a xenotima  $(\text{YPO}_4)$  são os três minerais com maior importância econômica, correspondendo a mais de 95% da produção mundial de ETR. Os minerais loparita e apatita podem conter também importantes concentrações de terras raras, mas com baixa relevância econômica (JACKSON E CRISTIANSEN, 1993; LAPIDO LOUREIRO, 1994; WOOD, 2004). Os 17 ETR pertencem ao grupo III da tabela periódica (metais de transição). Quanto ao número atômico destes metais, vai, em ordem crescente, do Lantânio (La) ao Lutécio (Lu).

Ao fato de o Sc possui raio iônico menor e poder ser facilmente substituído por Mg,  $\text{Fe}^{2+}$ , Zr, e Sn, há casos em que são excluídos da família dos ETR por alguns cientistas (CHAKHMOURADIAN E WALL, 2012). Embora o Y possua peso atômico relativamente baixo ainda é incluído no grupo do ETR (como ETR pesado, ETRP), isto se deve ao seu raio iônico e as suas propriedades serem muito semelhantes ao Hólmio (Ho), que é um ETR pesado, ETRP. Contudo, os demais 15 elementos ETR (lantanídeos) podem ser subdivididos em: ETR Leves (ETRL, que vai do La ao Eu e ETR pesados (ETRP, que vai do Gd ao Lu). Alguns especialistas também consideram a seguinte classificação: (ETRL, que vai do La ao Pm), ETR médios (ETRM, que vai do Sm ao Ga) e ETRP (do Tb ao Lu). Uma possível explicação para o uso destas duas subdivisões é que os elementos Sm, Eu, Ga, são mais transicionais e podem ser classificados como ETRL ou como ETRP. Os elementos promécio (número atômico 61) e escândio (número atômico 21), por serem considerados escassos, muitas vezes não são levados em consideração nessa classificação. A localização dos íons terras raras na tabela periódica aconteceu entre 1913 e 1914, quando o físico britânico H. G. J. Moseley encontrou uma relação direta entre as frequências de raio-x e o número atômico dos elementos. Só após a década de 1950 foi possível obter os ETR na forma suficientemente pura e assim realizar pesquisas básicas sobre suas propriedades químicas, magnéticas, ópticas e outras (MAXWELL, 2016).

O comportamento geoquímico dos ETR é dado pela configuração eletrônica constituintes de seus elementos. Assim, seus elétrons ocupam níveis energéticos

designados por números quânticos, de um a sete para átomos estáveis, que contêm certa quantidade de elétrons nos orbitais s, p, d e f. Os orbitais são preenchidos por elétrons de acordo com sua estabilidade. O elemento Xenônio (Xe – 5º período da tabela periódica) tem os orbitais 4s, 4p, 4d, 5s e 5p preenchidos. No início do sexto período, são adicionados dois elétrons no orbital 6s, para os elementos Césio (Cs) e Bário (Ba). No caso do La, o primeiro dos lantanídeos, um terceiro elétron ocupa o orbital 5d<sup>1</sup>. Contudo, em conformidade com a lei de Linus Pauling, com o aumento no número atômico ocorre o preenchimento do orbital 4f, até atingir 14 elétrons, sua capacidade máxima, e a configuração eletrônica 6s<sup>2</sup> ou 5d<sup>1</sup> 6s<sup>2</sup> permanece inalterada. A entrada de mais um elétron aumenta a atração entre o núcleo e os elétrons no orbital 6s, levando a diminuição no raio iônico dos átomos. Esta diminuição progressiva do raio atômico é uma particularidade dos Lantanídeos e é conhecida como a “contração dos lantanídeos” (GOLDSCHMIDT, 1925, apud CHAKHMOURADIAN e WALL, 2012).

O único estado de valência possível para Sc, Y e La, é (3+), com isto não há alteração de elétrons na camada de valência, por este motivo a contração dos lantanídeos se processa sempre a uma carga constante ou seja (3+). A tabela 2 mostra a configuração eletrônica dos ETR.

Outro fato importante é que os ETR são conhecidos como o maior grupo de elementos com comportamento coerente no sistema terrestre, à exceção, os íons com valências diferentes de (3+) (exemplo: Ce<sup>4+</sup> e Eu<sup>2+</sup>). Nestes dois casos, a ocorrência é muito restrita, já que, dependem de condições ambientais especiais. Os três elementos Ce, Tb e Pr podem ocorrer como cátions tetravalentes, sendo que somente o Ce<sup>4+</sup> é encontrado na natureza, ocorrendo em ambientes restritos e altamente oxidantes, como em alguns casos de processos superficiais. Os elementos Eu, Yb e Sm, por sua vez, podem ocorrer no estado divalente, dos quais o Eu<sup>2+</sup> é o mais comum e ocorre em ambiente redutor, onde a fugacidade de oxigênio é baixa, como encontrado em alguns sistemas magmáticos. Como o Cério (Ce) pode ocorrer em dois estados (trivalente e tetravalente), ele é utilizado como um indicador de processos de oxidação no ciclo exógeno. Já a dupla valência do Eu permite seu uso no estudo de alguns processos magmáticos. O quadro 2 mostra a configuração eletrônica e Raios Iônicos dos respectivos ETR.

Número Atômico	Nome	Íon	Configuração Eletrônica	Raios iônicos por número de coordenação (Å)		
				VI	VIII	XII
21	Escândio	Sc <sup>3+</sup>	[Ar] 3d <sup>1</sup> 4s <sup>2</sup>	7,45		
39	Ítrio	Y <sup>3+</sup>	[Kr] 4d <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup>	9,0	10,19	
57	Lantânio	La <sup>3+</sup>	[Xe] 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	10,32	11,60	13,6
58	Cério	Ce <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup>	10,10	11,43	13,4
59	Praseodímio	Pr <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup>	9,90	11,26	
60	Neodímio	Nd <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup>	9,83	11,09	12,7
61	Promécio	Pm <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup>			12,4
62	Samário	Sm <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup>	9,58	10,79	
63	Európio	Eu <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup>	9,47	10,66	
64	Gadolínio	Gd <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>7</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	9,38	10,53	
65	Térbio	Tb <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>9</sup> 6s <sup>2</sup>	9,23	10,40	
66	Disprósio	Dy <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup>	9,12	10,27	
67	Hólmio	Ho <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>11</sup> 6s <sup>2</sup>	9,01	10,15	
68	Érbio	Er <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>12</sup> 6s <sup>2</sup>	8,90	10,04	
69	Túlio	Tm <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>13</sup> 6s <sup>2</sup>	8,80	9,94	
70	Ítérbio	Yb <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>14</sup> 6s <sup>2</sup>	8,68	9,85	
71	Lutécio	Lu <sup>3+</sup>	[Xe] 4f <sup>14</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	8,61	9,77	

Quadro 2 – Configuração eletrônica e Raios Iônicos dos ETR.

Fontes: Tabela periódica dos Elementos (SHODO) e Gupta e Krishnamurthy, 2005.

Nota: (Ar) 1s<sup>2</sup>2s<sup>2</sup>2p<sup>6</sup>3s<sup>2</sup>3p<sup>6</sup>; (Kr) 1s<sup>2</sup>2s<sup>2</sup>2p<sup>6</sup>3s<sup>2</sup>3p<sup>6</sup>3d<sup>10</sup>4s<sup>2</sup>4p<sup>6</sup>;

(Xe) 1s<sup>2</sup>2s<sup>2</sup>2p<sup>6</sup>3s<sup>2</sup>3p<sup>6</sup>3d<sup>10</sup>4s<sup>2</sup>4p<sup>6</sup>4d<sup>10</sup>5s<sup>2</sup>5p<sup>6</sup>.

O uso de ETR está diretamente ligado as suas propriedades. O quadro 3 mostra as principais propriedades físicas e químicas dos ETR e a figura 2 apresenta um gráfico que mostra a diminuição do raio iônico com aumento do número atômico dos ETR nas diferentes valências.

Elemento (Símbolo)	N° atômico <sup>1</sup>	Peso atômico <sup>1</sup>	Densidade (g/cm <sup>3</sup> ) <sup>1</sup>	Ponto fusão (°C) <sup>1</sup>	Ponto Ebulição (°C) <sup>1</sup>	Abundância Crustal (ppm) <sup>2</sup>
Escândio (Sc)	21	44,95	2,989	1541	2832	8
Ítrio (Y)	39	88,90	4,469	1522	3337	30
Lantânio (La)	57	138,9	6,146	918	3469	30
Cério (Ce)	58	140,11	6,773	789	3257	60
Praseodímio (Pr)	59	140,90	6,773	931	3127	7
Neodímio (Nd)	60	144,24	7,008	1021	3217	25
Promécio (Pm)	61	145,00	7,264	1042	3000	4,5x10 <sup>-20</sup>
Samarium (Sm)	62	150,36	7,520	1074	1900	5
Európio (Eu)	63	151,96	5,244	822	1597	1
Gadolínio (Gd)	64	257,25	7,901	1313	3233	4
Térbio (Tb)	65	158,92	8,230	1356	3041	0,7
Disprósio (Dy)	66	162,50	8,551	1412	2562	3,5
Hólmio (Ho)	67	164,93	8,795	1474	2720	0,8
Érbio (Er)	68	167,26	9,066	1529	2510	2,3
Túlio (Tm)	69	168,93	9,321	1545	1727	0,32
Ítébio (Yb)	70	173,04	6,966	819	1466	2,2
Lutécio (Lu)	71	174,97	9,841	1663	3315	0,4

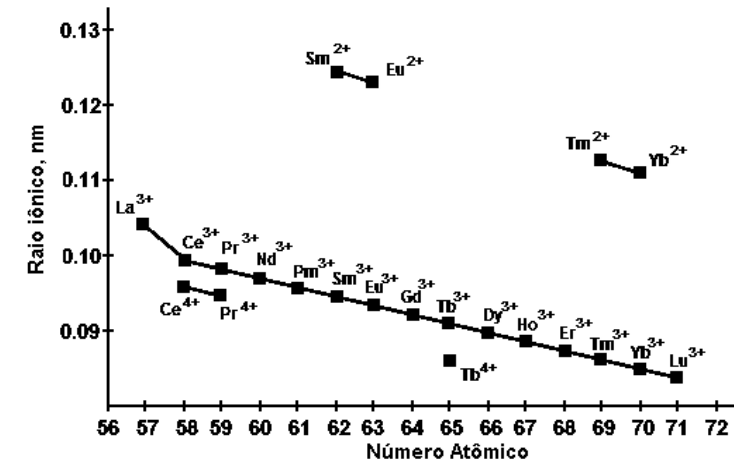


Figura 2 – Diminuição do raio iônico com aumento do número atômico dos ETR nas diferentes valências, fenômeno denominado de “contração dos lantanídeos”

Fonte: CHEMISTRY.TUTORCIRCLE.

### Quadro 3 – Principais propriedades químicas e físicas dos ETR

Fontes: Tabela periódica dos Elementos (SHODO) <sup>1,2</sup>; Abundância crustal em ppm (partes por milhão) de Christie et al (1998)<sup>2</sup>; Gupta e Krishnamurthy, 2005 <sup>1,2</sup>.

Os ETR possuem baixo potencial de ionização, isto implica em elementos com comportamento químico altamente eletropositivos (a eletropositividade indica a tendência que o núcleo do átomo de um elemento químico tem de se afastar de seus elétrons na camada de valência quando forma um composto, ao contrário da eletronegatividade, que se refere à tendência que o átomo tem de atrair os elétrons compartilhados em uma ligação).

O potencial iônico (que mede a resistência de um átomo em se tornar cátion monovalente (perder 1 elétron), quanto maior essa resistência, mais afinidade eletrônica o átomo possui, assim, quanto maior o potencial de ionização, maior a afinidade eletrônica. Esta propriedade é usada para diferenciar os elementos compatíveis e incompatíveis geoquimicamente. Os elementos compatíveis são os que apresentam maior afinidade geoquímica com a fase sólida (mineral). Enquanto que, os elementos incompatíveis (ou higromagmatófilos) têm preferência pela fase líquida (magma). Como os ETR pertencem ao grupo dos íons de alto potencial iônico (High Field Strength - HFS), tendem a ser incompatíveis, no entanto os ETR que não ocorrem em estado trivalente, são considerados compatíveis. Contudo, de acordo com Henderson (1984), os ETR são incompatíveis na estrutura cristalina do mineral, deixando-o mais facilmente. E seu comportamento litófilo os leva a se concentrar predominantemente em minerais silicáticos ao invés de metais puros ou minerais sulfetados. A compatibilidade de um elemento também depende do tipo de mineral, da composição do magma, e do processo geológico atuante. A concentração média estimada dos ETR na crosta terrestre varia de 150 a 220 ppm, mais do que alguns metais que são minerados em escala industrial, como Cu (55 ppm) e Zn (70 ppm) (LONG et al., 2010). A exceção é o promécio que, por ser um isótopo instável, é muito raro e a sua quantidade estimada na Terra é de cerca de 600 g (CHAKHMOURADIAN E WALL, 2012). O pH influencia no comportamento dos complexos de carbonatos, óxidos e hidróxidos de ETR, que são estáveis em condições alcalinas e se tornam solúveis em condições ácidas. O fator de resfriamento do fluido hidrotermal geralmente é responsável pela formação dos minerais de ETR, pois modificam a estabilidade dos fluidos: concentração dos ligantes, pH, ebulição e perda de gás. O estado de oxidação do sistema e reações de oxidação-redução podem ser importantes para o Eu e Ce. A estrutura cristalina



e/ou número de coordenação dos sítios para ETR também influencia na abundância de ETRL e ETRP nos minerais (KANAZAWA E KAMITANI, 2006). De acordo com kanazawa e kamitani (2006), a abundância relativa de ETRL e ETRP está relacionada como o número de coordenação de cada classe mineral, por exemplo, os ETRL ocupam os sítios de número de coordenação maiores entre 7 e 11, sendo que a maior parte ocupam os de número 8 a 10. Por outro lado, os ETRP são mais abundantes nos números de coordenação 6 e 8, predominado no número de coordenação 8. A figura 3 resume a relação entre o número de coordenação e abundância de ETRL e ETRP nos sítios estruturais de cada classe mineral de ETR.

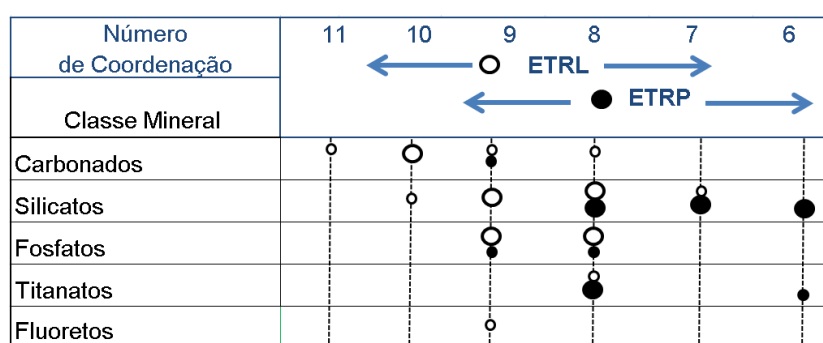


Figura 3 – Número de coordenação e abundância de ETRL e ETRP nos sítios estruturais de cada classe mineral de ETR: (O) e (●) mostra ETRL e ETRP respectivamente. O tamanho dos círculos mostra a abundância de ETR em cada classe mineral. Fonte: modificado de kanazawa e kamitani (2006).

De acordo com Braun (et al., 1993), o processo de intemperismo destrói os minerais acessórios de ETR (alanita, apatita, etc.) nos seus primeiros estágios, liberando a maior parte dos ETR, que serão fracionados e redistribuídos na zona saprolítica. Os depósitos de ETR estão associados geneticamente a carbonatitos e rochas silicáticas peralcalinas a graníticas diferenciadas que normalmente possuem altas concentrações de ETR. No perfil de intemperismo, a maior parte dos ETR é lixiviada do horizonte superior rico em ferro. Apenas o Cério (Ce) é depositado como cerianita ( $CeO_2$ ) devido a mudanças no pH e no estado de oxidação. Enquanto os demais ETR movem para a base deste perfil. No caso dos fosfatos, formados neste processo, são fortemente enriquecidos em ETRL. Mesmo formando acumulações, em ambientes superficiais, que podem se tornarem econômicos, os ETR são encontrados em baixas concentrações. Apesar das semelhanças nas

propriedades geoquímicas dos ETR; as propriedades metalúrgicas, químicas, catalíticas, elétricas, magnéticas e ópticas variam sutilmente de um elemento para outro, tornando a separação de cada elemento individual bastante difícil (VERPLANCK E VAN GOSEN, 2011). No entanto, é justamente, por conta destas pequenas diferenças que há diversas possibilidades de utilização dos ETR em tecnologias modernas.

### 3 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHRISTIE T, BRATHWAITE B, TULLOCH A (1998) – Mineral Commodities Report 17 – Rare earths and related elements. New Zealand Institute of Geological and Nuclear Sciences Ltd. Disponível em: <<http://www.nzpam.govt.nz/cms/investors/our-resource-potential/minerals/minerals-commodity-reports/rareearths.pdf>>. Acesso em: 01 fev. 2016

CHAKHMOURADIAN, A. R.; WALL, F. Rare earth elements: minerals, mines, magnets (and more). Elements, v. 8, n. 5, p. 333-340, Oct. 2012. Disponível em: <<http://elements.geoscienceworld.org/content/8/5/333.abstract>>. Acesso em: 10 nov.2015.

CHAKHMOURADIAN, A. R.; ZAITEV, A. N. Rare Earth mineralization in igneous rocks: sources and process. Elements, v. 8, n. 5, p. 347-353, Oct. 2012. Disponível em: <<http://elements.geoscienceworld.org/content/8/5/347.abstract>>. Acesso em: 10 nov.2015.

GSCHNEIDNER KA, CAPPELLEN,1987. "1787-1987 Two hundred Years of Rare Earths". Rare Earth Information Center, IPRT, North-Holland. Disponível em: <<http://camrhon.proboards.com/thread/6783/list-rare-elements>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

GUPTA, C. K.; KRISHNAMURTHY, N. Extractive metallurgy of rare earth. Boca Raton: CRC Press, 2005. 537 p. Disponível em: <[http://vector.umd.edu/images/links/Extractive\\_Metallurgy\\_of\\_Rare\\_Earths\\_Gupta.pdf](http://vector.umd.edu/images/links/Extractive_Metallurgy_of_Rare_Earths_Gupta.pdf)>. Acesso em: 20 nov. 2015.

HOATSON, D. M.; JAIRETH, S.; MIEZITIS, Y. The major rare-earth-element deposits of Australia: geological setting, exploration, and resources. Austrália: Geoscience Australia, 2011. 204 p. Disponível em: <[http://www.ga.gov.au/image\\_cache/GA19657.pdf](http://www.ga.gov.au/image_cache/GA19657.pdf)>. Acesso em: dez. 2015.

JACKSON, W. D.; CHRISTIANSEN, G. International strategic minerals inventory summary report – rare earth oxides. U.S. Geological Survey circular, 930-N, 1993. 80 p. Disponível em: <<https://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/mcs/2017/mcs2017.pdf>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

JAIRETH, S.; M., D.H., MIEZITIS, Y.; Geological setting and resources of the major rare-earth-element deposits in Australia. *Ore Geology Reviews*, 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169136814000353>>. Acesso em: nov. 2015.

LONG, K. R.; VAN GOSEN, B. S.; FOLEY, N. K.; CORDIER, D. The principal rare earth elements deposits of the United State: a summary of domestic deposits and a global perspective: scientific investigations report 2010–5220. Washington, DC: U.S. Geological Survey, 2010. 96 p. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/sir/2010/5220/>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

MAXWELL, 2016. Os Íons Terras-Raras–Introdução. Repositório Institucional da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC – RIO. Disponível em: <[http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10657/10657\\_4.PDFXXvmi=fqMMkv4UhGrK7PFkvgSZIKthLjwNKJL1azOuuSqMATxHKe2guVfeGKwr45gPO3R0CGu7AWUbQtSCIVSeS9szT12Z7iOVmHWZns7Xp29hv3Tf0MtSWWsRZvQ6PG3cn0bMsjLTmVbT0590SDTPBnIATzHJgKWFL9rfsd9PakJapSbjv5a8tSlosq9Jb6pXfRdl6mxgHir8bDslJDQdwAD01MKdSab93oR9LqqtJSDVv6EgJvtg67h7U2kNcwWfVPPl](http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10657/10657_4.PDFXXvmi=fqMMkv4UhGrK7PFkvgSZIKthLjwNKJL1azOuuSqMATxHKe2guVfeGKwr45gPO3R0CGu7AWUbQtSCIVSeS9szT12Z7iOVmHWZns7Xp29hv3Tf0MtSWWsRZvQ6PG3cn0bMsjLTmVbT0590SDTPBnIATzHJgKWFL9rfsd9PakJapSbjv5a8tSlosq9Jb6pXfRdl6mxgHir8bDslJDQdwAD01MKdSab93oR9LqqtJSDVv6EgJvtg67h7U2kNcwWfVPPl)>. Acesso em: 02 jan. 2016.

KANAZAWA, Y.; KAMITANI, M. Rare earth minerals and resources in the world. *J. Alloys and Compounds*, v. 408-412, p. 1339-1343, 2006. Disponível em: <<http://wenku.baidu.com/view/334b6dd249649b6648d747d4.html>>. Acesso em: 21 dez. 2015.

LAPIDO LOUREIRO, F. E. V. Terras raras no Brasil: depósitos, recursos identificados e reservas. Rio de Janeiro: CETEM/MCTI, 1994. 189 p.  
SERRA, O. A. 2011. Rare Earths: Brazil x China. *Journal of the Brazilian Chemical Society* – (online). Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/jbchs/v22n5/v22n5a01.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2015.

SERRA, O.A.; SOUSA, F.P.C. Terras Raras no Brasil: histórico, produção e perspectivas. *Química nova*, v. 37, p. 753-760, 2014. Disponível em: <<http://quimicanova.sbq.org.br/imagebank/pdf/v37n4a29.pdf>>. Acesso em: 10/01/2016.

SHODO. Tabela Periódica (Software). Com Recomendações atuais da IUPAC, Disponível em:< <http://shdo.com.br/blog/baixar/tpv/>>. Acesso em 07 jan. 2016.  
VERPLANCK, P. L.; VAN GOSEN, B. S. Carbonatite and alkaline intrusion-related rare earth element deposits: a deposit model: open-file report 2011–1256. Washington, DC: U.S. Geological Survey, 2011. 6 p. Disponível em: <<http://pubs.usgs.gov/of/2011/1256/report/OF11-1256.pdf>>. Acesso em 20 dez. 2015.

WOOD, S. A. The hydrothermal geochemistry of the rare earth elements. *The Gangue*, v. 81, Apr. 2004. Disponível em: <<http://www.gac.ca/wp/wp-content/uploads/2012/04/Gangue81.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2015.

**ANEXO B— CONCEITOS IMPORTANTES DA ESTATÍSTICA (DIVIDIDO EM DUAS PARTES:  
PARTE 1 - NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA E PARTE 2 - ANÁLISE DE  
CORRELAÇÃO, REGRESSÃO, LINEAR, MEDIDAS DE ASSOCIAÇÃO,  
DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL, ESTIMATIVAS E INTERVALO DE CONFIANÇA).**

**Revisão de alguns conceitos importantes da estatística básica no intuito de subsidiar o entendimento e desenvolvimento do modelo de competitividade e risco na mineração de terras-raras (MCRM-TR), no que concerne aos cálculos probabilísticos, métodos de observações, análises e classificação das variáveis, além da interpretação dos dados.**

**Este material foi produzido a partir da compilação, leitura, e adaptação de conteúdos de livros especializados e de materiais didáticos de professores e pesquisadores com alguns anos de dedicação ao ensino da disciplina estatística, conforme referendados nas respectivas páginas e também no final deste anexo.**

## Sumário

### Parte 1 - Noções básicas de Estatística

1.1 – Conceito de Estatística-----	3
1.2 – Levantamento e tratamento dos dados estatísticos coletados-----	3
1.3 – Medidas de Tendência Central-----	10
1.4 – Medidas de Dispersão-----	16
1.5 – Medidas de Assimetria-----	19
1.6 – Medidas de Curtose-----	21

### Parte 2 - Análise de Correlação, Regressão Linear, Medidas de Associação, Distribuição Amostral, Estimativas e Intervalo de Confiança

2.1 – Análise de Correlação e medidas de associação-----	23
2.2 – Diagramas de Dispersão-----	23
2.3 – A Covariância e o Coeficiente de correlação de Pearson-----	24
2.4 – Qualidade do Ajustamento e Coeficiente de Determinação ( $R^2$ )-----	28
2.5 – Análise de Regressão-----	30
2.6 – Distribuição Amostral, Estimativas e Intervalo de Confiança-----	37
2.7 – Intervalo de confiança-----	43

### 3 – Analogias de variáveis e equações da Teoria Estatística com o Modelo de Competitividade e Risco na Mineração de Elementos de Terras Raras (MCRM-ETR)-----

51

### 4 – Referências Bibliográficas -----

53

## Parte 1: Noções básicas de Estatística

### 1.1 – Conceito de Estatística

A Estatística é um método, que utiliza a matemática, aplicável em todos os domínios das ciências onde se encontram fenômenos coletivamente típicos. Método que objetiva estudar esses fenômenos que dependem de uma multiplicidade de causas. Representando, sob a forma analítica ou gráfica, as tendências características limites desses fenômenos.

A estatística divide-se em três grandes grupos (a construção do modelo MCRM-ETR envolve conhecimentos destes três grupos):

- Estatística Descritiva;
- Estatística Probabilística;
- Estatística Inferencial;

Estatística Descritiva tem como objeto o levantamento de dados visando o registro que pode ser através de tabelas ou de gráficos;

Estatística Probabilística trata da medição da ocorrência de eventos sujeitos ao aspecto de aleatoriedade;

Estatística Inferencial visa estabelecer conclusões sobre populações baseando-se em suas amostras.

População finita ou infinita é qualquer conjunto de valores dos quais se pretende conhecer características, denominadas *parâmetros*.

Amostra é qualquer subconjunto, não vazio, de uma população. As características das amostras são denominadas *estatísticas*. Desta forma as estatísticas, características das amostras, serão utilizadas para prestar informações sobre os parâmetros, características das populações.

### 1.2 – Levantamento e tratamento dos dados estatísticos coletados

Em todo trabalho estatístico, qualquer que seja a natureza do conhecimento, exige um planejamento, que pode ser dividido, por exemplo nas seguintes etapas:

- a) Coleta dos Dados Brutos;
- b) Ordenar os dados obedecendo ao critério de ordem geralmente crescente, denominado ROL;
- c) Calcular as médias, moda, mediana e desvio padrão;
- d) Construir o gráfico em barras, o histograma e o polígono de frequência.

### Exercício prático

Os dados seguintes referem-se ao consumo de energia elétrica em kWh de uma amostra de 60 residências.

80	51	70	65	60	160	150	140	135	85
51	60	60	120	160	110	160	120	155	70
51	51	100	120	100	120	98	90	65	140
60	130	100	90	115	70	95	60	130	160
130	90	76	90	68	90	51	80	150	160
85	70	88	51	75	51	160	150	140	98

Pede-se:

- a) Elaborar uma Distribuição de Frequência;
- b) Elaborar o polígono de frequência;
- c) Uma residência para ter boa iluminação, deve consumir mais de 99 kWh. Quantas têm má iluminação, observando a tabela.
- d) Médias
  - d.1. Aritmética
  - d.2. Geométrica
  - d.3. Harmônica
  - d.4. Quadrática
- e) Moda
- f) Calcule: Mediana, 1º Quartil.

Para a resolução desse exercício, vamos conhecer alguns conceitos das etapas de execução do trabalho estatístico:

- Coleta, apuração, apresentação e análise dos dados, sobretudo quando envolve a incerteza;
- O tamanho da amostra aleatória de 60 residências da população finita;
- Os Dados Brutos são provenientes da coleta;
- O Rol é o processo de ordenação dos dados de forma crescente de consumo de energia;
- Frequência simples ( $f_i$ ) é a repetição dos dados;
- Amplitude total ( $A_t$ ) é a diferença entre o maior e o menor valor da amostra;
- Classes ( $K$ ) é a quantidade de classes da distribuição de frequência:  $K = 1 + 3,322 \log n$ , sendo  $n$  o número de dados da amostra;

(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES, 2007).

- Amplitude de classe (C) é a diferença entre o limite superior real e o limite real inferior real de cada classe, ou:  $C = \frac{At}{K}$

- Frequência acumulada é o resultado do somatório das frequências simples das classes;

- Distribuição de Frequência é a representação tabular dos dados por classes, com as frequências simples correspondentes de cada classe, denomina-se também de Tabela de Frequência;

- Ponto médio ( $x_i$ ) é o  $\frac{\text{limite inferior real} + \text{limite superior real de cada classe}}{2}$

- Histograma é o gráfico formado por um conjunto de retângulos justapostos na quantidade K de classes existente;

- Polígono de frequência é um diagrama de linhas, que consiste na união sucessiva das ordenadas dos pontos médios de classe;

- A área do histograma é igual à área do polígono de frequência;

- Média aritmética:  $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

- Média Geométrica:  $\log \bar{X}_G = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i}$

- Média Harmônica:  $\bar{X}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$

- Média quadrática:  $\bar{X}_q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}}$

- Moda ( $M_o$ ) é o valor de maior frequência:  $M_o = L_i + \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right] \cdot C$

Onde:

$L_i$  é o limite inferior real do intervalo de classe modal;

$\Delta_1$  é a frequência modal menos a frequência da classe anterior a modal;

$\Delta_2$  é a frequência modal menos a frequência da classe posterior a modal;

C é a amplitude da classe modal.

- Mediana ( $M_e$ ) é o valor que divide o Rol em duas partes iguais, isto é, a quantidade de elementos que precede a mediana é igual à quantidade de elementos que a segue:

$$M_e = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{F}{2} - f_{ac \downarrow ant} \right)}{f_{me}} \right] \cdot C$$



Onde:

$L_i$  é o limite inferior real do intervalo mediano;

$F$  é a frequência total;

$f_{ac\downarrow ant}$  é a “frequência acumulada abaixo de” do intervalo anterior ao da mediana;

$f_{me}$  é a frequência simples do intervalo mediano;

$C$  é a amplitude da classe mediana.

- Quartil ( $Q_i$ ) são três quartis que divide o conjunto de dados ordenados em quatro partes iguais:

$$Q_1 = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{F}{4} - f_{ac\downarrow ant} \right)}{f_{q_1}} \right] \cdot C \quad ; \quad Q_2 = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{2F}{4} - f_{ac\downarrow ant} \right)}{f_{q_2}} \right] \cdot C \quad ; \quad Q_3 = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{3F}{4} - f_{ac\downarrow ant} \right)}{f_{q_3}} \right] \cdot C$$

Onde:

$L_i$  é o limite inferior real do intervalo de classe do 1º quartil;

$F$  é a frequência total;

$f_{ac\downarrow ant}$  é a “frequência acumulada abaixo de” do intervalo anterior ao 1º quartil;

$f_{q_1}$  é a frequência simples do intervalo do 1º quartil;

$C$  é a amplitude da classe do 1º quartil.

Resolução:

a) Distribuição de Frequência

Consumo em kWh	Frequência ( $f_i$ )
51	2
60	2
65	2
68	1
70	4
75	1
76	1
80	2
85	2
88	1
90	2
95	1
98	2
100	3
110	1
115	1
120	4
130	3
135	1
140	3
150	3
155	1
160	6
<b>Total</b>	<b><math>\sum f_i = 60</math></b>

(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES, 2007).

$$b) A_t = 160 - 51 = 109$$

$$K = 1 + 3,3 \log n$$

$$K = 1 + 3,3 \log 60$$

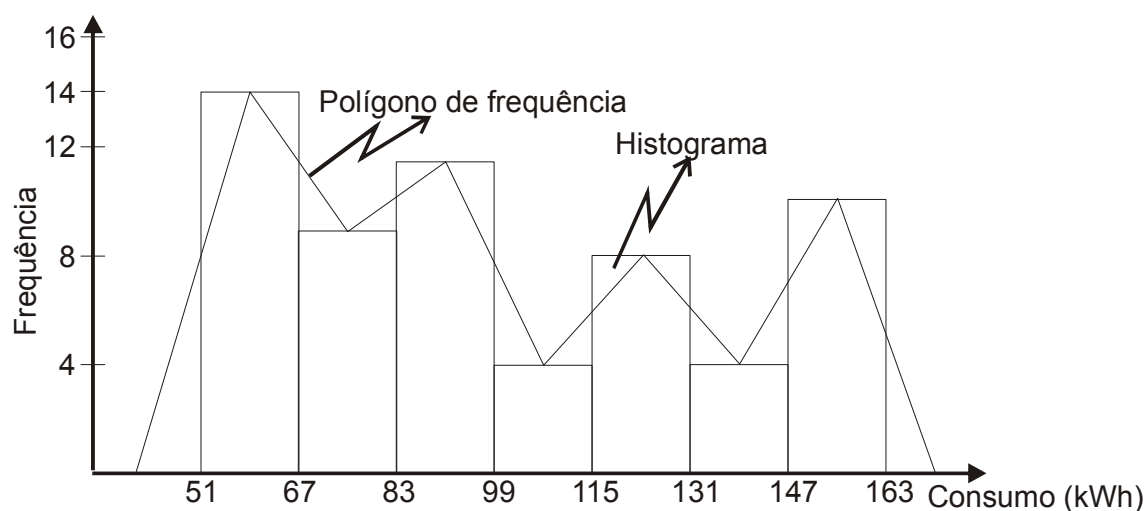
$$K = 1 + 3,3 \times 1,778 = 6,87 \quad \therefore K \cong 7$$

$$C = \frac{A_t}{K} \quad \text{Assim} \quad C = \frac{109}{7} = 15,5 \quad \text{logo } C \cong 16$$

### Tabela de Frequência

Consumo em kWh	$f_i$	$f_{ac\downarrow}$	$x_i$	$x_i f_i$	$x_i^2$	$x_i^2 f_i$
51 I— 67	14	14	59	826	3481	48734
67 I— 83	9	23	75	675	5625	50625
83 I— 99	11	34	91	1001	8281	91091
99 I— 115	4	38	107	428	11449	45796
115 I— 131	8	46	123	984	15129	121032
131 I— 147	4	50	139	556	19321	77284
147 I— 163	10	60	155	1550	24025	240255
Total	$\sum f_i = 60$	-	-	$\sum x_i f_i = 6020$	-	$\sum x_i^2 f_i = 674812$

### Histograma e Polígono de Frequência



(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística - NES, 2007).

c) Conforme se observa na Tabela de Frequência, existem 34 residências com má iluminação, ou seja, com consumo abaixo de 99 kWh.

d) Médias

d.1. Média aritmética:  $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6020}{60} = 100,33$

d.2. Média geométrica

Tabela de Frequência (continuação)

$f_i \log x_i$	$\frac{f_i}{x_i}$
24,79	0,24
16,88	0,12
21,55	0,12
8,12	0,04
16,72	0,07
8,59	0,03
21,90	0,06
$\sum f_i \log x_i = 118,53$	$\sum \frac{f_i}{x_i} = 0,67$

$$\log \bar{X}_G = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i} = \frac{118,53}{60} = 1,98$$

$$\text{antilog } 1,98 = \bar{X}_G = 94,51$$

d.3. Média harmônica

$$\bar{X}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}} = \frac{60}{0,67} = 89,04$$

d.4. Média quadrática

$$\bar{X}_q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{674812}{60}} = 106,05$$

(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES, 2007).

e) Moda

$$M_o = L_i + \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right] \cdot C$$

$$M_o = 51 + \left[ \frac{14}{14 + 5} \right] \cdot 16 = 51 + \frac{14}{19} \cdot 16 = 62,79$$

$$L_i = 51$$

$$\Delta_1 = 14 - 0 = 14$$

$$\Delta_2 = 14 - 9 = 5$$

$$C = 16$$

f) Mediana

$$M_e = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{F}{2} - f_{ac \downarrow ant} \right)}{f_{me}} \right] \cdot C$$

$$\text{O intervalo médio} = \frac{F}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$F = 60$$

$$L_i = 83$$

$$f_{ac \downarrow ant} = 23$$

$$f_{me} = 11$$

$$C = 16$$

$$M_e = 83 + \left[ \frac{30 - 23}{11} \right] \cdot 16 = 93,18$$

1º Quartil:

$$Q_1 = L_i + \left[ \frac{\left( \frac{F}{4} - f_{ac \downarrow ant} \right)}{f_{q1}} \right] \cdot C$$

$$F = 60$$

O intervalo do 1º quartil:

$$\frac{F}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$L_i = 67$$

$$f_{ac \downarrow ant} = 14$$

$$f_{q1} = 9$$

$$C = 16$$

$$Q_1 = 67 + \left[ \frac{15 - 14}{9} \right] \cdot 16 = 68,78$$

### 1.3 – Medidas de Tendência Central

O termo medidas de tendência central ou promédios, é usado para designar os valores que podem ser calculados, quando se procura caracterizar a distribuição de freqüência. Os promédios dizem respeito à região central da distribuição, ou ao seu centro de gravidade, ou ao valor que a variável  $x$  assume no centro da distribuição. Assim há necessidade de se dispor de estatísticas que representem valores centrais em torno dos quais se agrupam as observações.

A característica comum das medidas de tendência central é que elas se encontram dentro da amplitude dos dados, isto é, uma medida de tendência central não pode ser maior que o maior valor nem menor que o menor valor dos dados.

Tipos de Promédios:

$$\text{Médias} \left\{ \begin{array}{l} \text{Média Aritmética } \bar{X} \\ \text{Média Geométrica } \bar{X}_G \\ \text{Média Harmônica } \bar{X}_h \\ \text{Média Quadrática } \bar{X}_q \end{array} \right\}$$

$$\text{Moda} \quad \{ M_0 \}$$

$$\text{Separatrizes} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mediana} \quad M_e \\ \text{Quartil} \quad Q_i \\ \text{Decil} \quad D_i \\ \text{Centil} \quad C_i \end{array} \right\}$$

A seguir serão detalhados os promédios: média aritmética, média geométrica, média harmônica, moda, mediana e quartil (os mais utilizados).

#### Média Aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Propriedades:

a) A soma algébrica dos desvios em torno se  $\bar{X}$  é nula.

De fato, seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com média aritmética  $\bar{X}$ .

Define-se desvio por  $d_i = x_i - \bar{X}$ , logo:

$$d_1 = x_1 - \bar{X}$$

$$d_1 = x_1 - \bar{X}$$

$$d_2 = x_2 - \bar{X}$$

•

•

•

$$d_n = x_n - \bar{X}$$

Somando ambos os membros da expressão acima, tem-se:

$$\sum d_i = \sum (x_i - \bar{X}) \quad \text{Ocorre que} \quad \sum x_i = n\bar{X}, \text{ então} \quad \sum d_i = 0$$

b) A média aritmética de uma variável  $x$  adicionada ou subtraída de uma constante qualquer, é igual à média aritmética da variável  $x$  adicionada ou subtraída da mesma constante;

c) A média aritmética de uma variável  $x$  multiplicada ou dividida de uma constante qualquer, é igual à média aritmética da variável  $x$  multiplicada ou dividida da mesma constante;

d) A soma dos quadrados dos desvios de um conjunto de valores da variável  $x$  em torno da média aritmética é um mínimo;

De fato, seja:

$$\sum d_i^2 = \sum (x_i - a)^2 = \text{mínimo}$$

Fazendo  $y = \sum d_i^2$ , tem-se:

$$\frac{dy}{da} = 2 \sum (x_i - a) \cdot (-1) = 0 \quad \therefore \quad \sum (x_i - a) = 0$$

$$\sum x_i = \sum a \quad \therefore \quad na = \sum x_i \quad \therefore \quad a = \sum \frac{x_i}{n} = \bar{X}$$

e) Se  $f_1$  números têm média  $m_1$ ,  $f_2$  números tem média  $m_2$ , ...,  $f_n$  números têm média  $m_n$ , então a média aritmética de todos os números do conjunto estudado é:

$$\bar{X} = \frac{(f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_n m_n)}{(f_1 + f_2 + \dots + f_n)}$$

f) Se  $A$  é qualquer média aritmética admitida ou arbitrada e se  $d_i = x_i - A$ , são os desvios de  $x_i$  em relação a  $A$ , então a média aritmética é dada por:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d_i}{n}$$

De fato, seja:

$$\begin{aligned} \sum d_i &= \sum (x_i - A) & \frac{\sum x_i}{n} &= \frac{\sum d_i}{n} + A \\ \sum d_i &= \sum x_i - nA & \bar{X} &= A + \frac{\sum d_i}{n} \\ \sum x_i &= \sum d_i + nA \end{aligned}$$

A média aritmética é uma medida altamente influenciada pelos valores extremos da variável, ou seja, pelo maior valor e pelo menor valor da variável. Sendo uma medida de posição, que caracteriza a região central de distribuição, isto representa uma desvantagem pois um valor muito afastado dos valores centrais, ainda que não representativo, pode influenciar totalmente o valor do promédio.

Um outro aspecto a ressaltar é que as médias aritméticas iguais podem corresponder a conjuntos de variáveis completamente distintas.

Exemplo:

Sejam os conjuntos  $A(2, 8, 12, 13, 15)$  e  $B(3, 9, 11, 13, 14)$

A média aritmética de  $A$  é igual a 10

A média aritmética de  $B$  também é igual a 10

No entanto como se vê, os dois conjuntos são formados por valores completamente distintos.

A média aritmética é de todas as medidas de tendência central a mais utilizada pela facilidade de obtenção e por sofrer influência de todos os dados.

### Média Geométrica

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{f_i}}, \text{ sendo } n = \sum f_i$$

$$\log \bar{X}_G = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i}$$

**Propriedades:**

- a) A média geométrica é expressa na mesma unidade de medida das variáveis  $x_i$ .
- b) O produto dos quocientes de cada valor da variável pela média geométrica é igual à unidade:

Seja  $x_i$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com média geométrica  $\bar{X}_G$

$$\text{Então: } \frac{x_1}{\bar{X}_G} \cdot \frac{x_2}{\bar{X}_G} \dots \frac{x_n}{\bar{X}_G} = \frac{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}{\bar{X}_G^n} \quad (1)$$

Como  $\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$  tem-se que  $\bar{X}_G^2 = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$

$$\text{Substituindo em (1) tem-se: } \frac{x_1}{\bar{X}_G} \cdot \frac{x_2}{\bar{X}_G} \dots \frac{x_n}{\bar{X}_G} = \frac{\bar{X}_G^2}{\bar{X}_G^n} = 1$$

- c) O quadrado da média geométrica é a média geométrica do quadrado dos valores da variável  $x_i$ .

$$\text{Como: } \bar{X}_G^2 = \left( \sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)} \right)^2 = \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \dots x_n^2}$$

Vantagens da utilização da média geométrica

- A média geométrica não sofre influência dos valores extremos da variável;
- A média geométrica tem grande utilidade nos estudos de variáveis temporais, que tem uma clara tendência exponencial;
- A sua aplicação é válida na determinação de valores intermediários, isto é, quando se deseja interpolar não linearmente.

Exemplo: Calcular a população para o ano de 1955, sabendo-se que em 1940 e 1960 os seus valores foram respectivamente 2,5 milhões e 4 milhões de habitantes.

Solução: Inicialmente se calcula o valor intermediário entre 1940 e 1960, isto é, o valor para o ano de 1950. A seguir calcula-se o valor intermediário desejado que estará entre 1950 e 1960.

$$P_{1950} = \sqrt{2,5 \cdot 40} = 3,15 \text{ milhões}$$

$$P_{1955} = \sqrt{3,15 \cdot 40} = 3,55 \text{ milhões}$$

$$P_{1950} = \text{população no ano de 1950}$$

$$P_{1960} = \text{população no ano de 1960}$$

$$P_{1955} = \text{população para o ano de 1955}$$



### Desvantagens da utilização da média geométrica

- A determinação da média geométrica é mais trabalhosa do que as demais medidas de tendência central;
- É altamente influenciada pelos valores menores da variável;
- O seu valor é nulo quando pelo menos um dos valores da variável for igual a zero;
- O seu cálculo também não tem sentido para valores negativos.

### **Média harmônica**

A média harmônica de um conjunto de  $n$  valores da variável  $x_i$ , isto é,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definida com o inverso da média aritmética dos inversos dos  $n$  valores da variável  $x_i$ .

$$\bar{X}_h = \frac{1}{\frac{\sum f_i \frac{1}{x_i}}{\sum f_i}} = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$$

$$\text{onde, } n = \sum f_i$$

Propriedades:

- a) A média harmônica é expressa na mesma unidade de medida da variável  $x_i$ ;
- b) A média harmônica é empregada quando existe uma relação inversa entre os valores da variável. É o caso de todas as relações de produtividade em que se consideram basicamente, a velocidade ( $v$ ) e o tempo ( $t$ ).

Exemplo:

Um grupo de trabalhadores constrói os primeiros 120 km de uma estrada com uma produtividade de 2 km diários. Os restantes 120 km são construídos a razão de 3 km diários. Determinar a produtividade média diária durante toda a execução da obra.

Solução: Utilizando-se o promédio média aritmética, ter-se-ia.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2+3}{2} = 2,5 \text{ km/dia}$$

Agora utilizando o seguinte raciocínio:

Como os primeiros 120 km são executados com uma produtividade de 2 km/dia, então foram gastos 60 dias para este trecho. Os restantes 120 km foram executados em 120 Km/ 3 km/dia = 40 dias.

Logo, toda a obra foi concluída em 100 dias. Faça agora a aplicação do resultado encontrado com a média aritmética.

Se a produtividade média foi de 2,5 km/dia, conforme calculado com média aritmética; em 100 dias seriam executados  $100 \times 2,5 = 250$  km de estrada, o que é absurdo pois a obra total tem 240 km.

Desta forma constata-se a inconsistência do cálculo baseado na média aritmética.

Por outro lado, utilizando-se o cálculo da média harmônica ter-se-ia:

$$\bar{X}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ km/dia}$$

em que,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$

Em face desse promédio, tem-se que em 100 dias o grupo de trabalhadores executará  $100 \times 2,4 = 240$  km, o que prova a consistência do indicador média harmônica.

### Média quadrática

$$\bar{X}_q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}}$$

### Moda

É uma estatística que informa o valor de maior frequência e o seu conceito é o mesmo de moda no mundo dos estilistas. Observe no seu grupo quantas pessoas estão usando gins?

Provavelmente as pessoas que estão usando gins são maioria, isto porque usar gins está na moda.

### A Mediana

Os Quartis, os Decis e os Centis são estatísticas de posição, onde os dados devem obedecer a um critério de ordem. A mediana tem a sua esquerda e a sua direita 50% dos elementos; o 1º quartil possui a sua esquerda 25% e a sua direita 75% dos dados. Por outro lado o 29º centil possui a sua esquerda 29% dos elementos e a sua direita 71%.

## 1.4 – Medidas de Dispersão

As medidas de dispersão caracterizam a variabilidade de um conjunto de valores em relação a uma medida de tendência central. As medidas de dispersão são também denominadas de medidas de variabilidade.

Comparativamente com as medidas de tendência central podemos afirmar: As medidas de tendência central são estatísticas que se situam dentro da distribuição, isto é, entre o menor e o maior valor dos dados, enquanto que as medidas de variabilidade procuram medir distância em torno de uma medida de tendência central, que geralmente é a média aritmética.

Todas as medidas de dispersão, tanto absolutas e relativas, têm como objetivo quantificar a dispersão dos dados em estudo.

### Tipos de medidas de dispersão

#### a) Medidas absolutas

- Amplitude Total
- Desvio Médio
- Amplitude Semi-interquartilica
- Variância
- Desvio Padrão

#### b) Medidas relativas

- Coeficiente de Variação
- Desvio Quartil Reduzido

### Medidas de Dispersão absolutas

#### Amplitude ou Intervalo Total ( $A_t$ )

A amplitude total de um conjunto de valores é a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto numérico. Podemos dizer também que é a diferença entre os pontos médios extremos.

#### Desvio Médio (DM)

Seja a variável  $x_i$  :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que ocorre com frequência  $f_i$  :  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Define-se desvio médio de uma variável  $x_i$  que ocorre com frequência  $f_i$  através da expressão:

$$DM = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{X}|}{\sum f_i}$$

(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES, 2007).

### Vantagens e desvantagem do DM

O desvio médio apresenta a vantagem de ser facilmente determinado e o seu cálculo é realizado considerando todos os dados. No entanto, apresenta a desvantagem de levar em conta apenas os valores absolutos, o que dificulta a sua utilização em cálculos algébricos.

### Amplitude Semi-interquartílica ( $D_q$ )

Seja a variável  $x_i : x_1, x_2, \dots, x_n$  que ocorre com frequência  $f_i : f_1, f_2, \dots, f_n$ .  
Define-se amplitude semi-interquartílica de uma variável  $x_i$  que ocorre com frequência  $f_i$  através da expressão:

$$D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

onde,  $Q_1$  e  $Q_2$  são os primeiros e terceiros quartis respectivamente e,  $Q_3 - Q_1$  é a Amplitude Interquartílica.

Observação: outra medida de dispersão absoluta utilizada é a Amplitude entre os centis  $C_{10}$  e  $C_{90}$ , definida pela expressão:  $C_{90} - C_{10}$

onde,  $C_{10}$  e  $C_{90}$  são o décimo e o nonagésimo centis, respectivamente.

### Variância ( $\sigma^2$ ou $S^2$ )

Seja a variável  $x_i : x_1, x_2, \dots, x_n$  que ocorre com frequência  $f_i : f_1, f_2, \dots, f_n$ .  
Define-se variância de uma variável  $x_i$  que ocorre com frequência  $f_i$  através da expressão:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n}$$

Como,  $d_i^2 = (x_i - \bar{X})^2$

Pode-se entender a Variância como a média aritmética dos quadrados dos desvios.

Propriedades da Variância

- A variância de uma constante é zero;
- Somando-se ou subtraindo-se cada valor da série por uma constante, a variância não se altera;
- Se multiplicarmos ou dividirmos um valor constante a cada elemento de um conjunto, a variância ficará multiplicada ou dividida pela constante ao quadrado;
- A variância da soma ou diferença de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , é igual a soma ou diferença das variâncias de  $x$  e  $y$ ;
- A variância é expressa no quadrado da unidade de medida considerada para os valores de  $x$ ;

- f) A variância será nula quando existir a homogeneidade total, isto é, quando não existir dispersão entre os valores de  $x$  ;  
 g) A variância será tanto maior na medida em que os valores de  $x$  tornem discrepantes;  
 h) Quando o nº de observações for reduzido ( $n \leq 30$ ) a variância deverá ser expressa por:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

### Desvio Padrão ( $\sigma$ ou $S$ )

Por definição desvio padrão é a raiz quadrada da variância

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n}}$$

### Medidas de Dispersão relativas

Coefficiente de Variação

- a) Pearson

$$CV_p = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100$$

- b) Thorndike

$$CV_t = \frac{\sigma}{M_e} \cdot 100$$

- c) Intervalo Quartil

$$CV_q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \cdot 100$$

### Desvio Quartil Reduzido ( DQR )

Por definição é a amplitude semi-interquartílica sobre a mediana.

$$DQR = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{M_e} \cdot 100 = \frac{Q_3 - Q_1}{2 M_e} \cdot 100$$

## Momentos (M)

Seja a variável  $x_i : x_1, x_2, \dots, x_n$  que ocorre com frequência  $f_i : f_1, f_2, \dots, f_n$ . Defini-se momento de uma variável  $x_i$  que ocorre com frequência  $f_i$  em relação a uma origem, por exemplo a média aritmética, através da expressão:

$$M = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^R \cdot f_i}{\sum f_i}$$

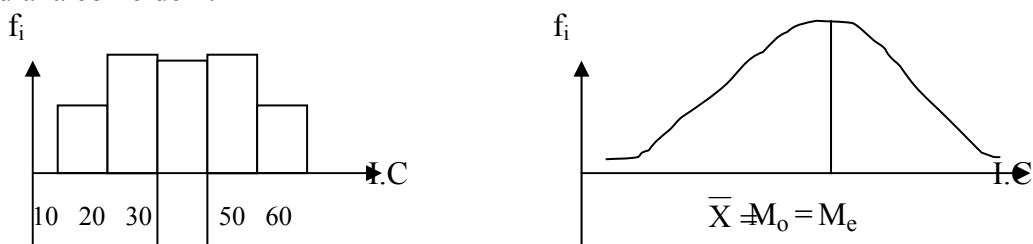
onde:

a origem do momento de grau R é a média aritmética  $\bar{X}$  da variável  $x_i$ . Os Momentos centrados na média aritmética são utilizados para os cálculos de Medidas de Assimetria e de Medidas de Curtose. O primeiro momento com origem na média aritmética é sempre zero.

### 1.5 – Medidas de Assimetria

É a medida do grau do desvio ou afastamento da simetria em curvas de distribuição de frequência que tratam de fenômenos estatísticos.

Uma distribuição de frequência é simétrica quando a média aritmética, a moda e a mediana coincidem:



Característica da Distribuição de Frequência Simétrica:  $\bar{X} = M_o = M_e$

Ocorre assimetria em situação de não simetria, isto é, quando a igualdade média aritmética = moda = mediana não são satisfeitas.

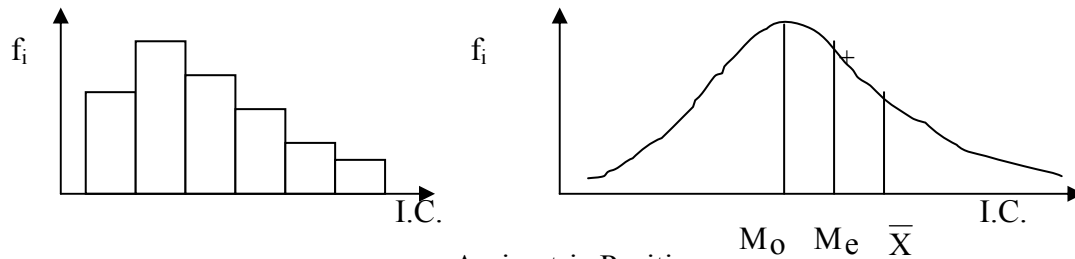
Desta forma pode-se definir assimetria como uma medida do afastamento da simetria de uma distribuição.

Quando qualquer coeficiente de assimetria for igual a zero, a distribuição é simétrica. No caso em que qualquer coeficiente de assimetria for negativo ou positivo, a assimetria será, respectivamente, negativa ou positiva. Os valores dos coeficientes de Assimetria encontram-se no intervalo fechado de  $[-1, +1]$ .

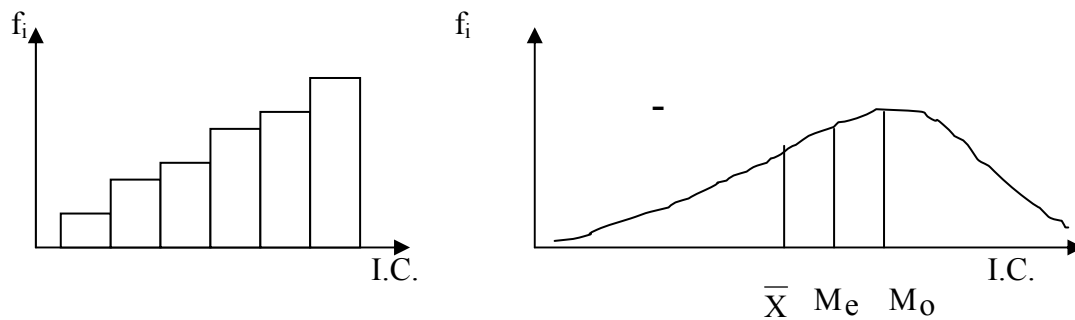
## Tipos de Assimetria

- Assimetria Positiva
- Assimetria Negativa

Graficamente podemos representá-las assim:



Assimetria Positiva  
(enviesada à direita)



Assimetria Negativa  
(enviesada à esquerda)

Enviesada = oblíqua, torta

## Coefficientes de Assimetria:

Coefficientes de Pearson

$$C_s = \frac{(\bar{X} - M_0)}{\sigma} \quad (\text{primeiro coeficiente de Pearson})$$

ou

$$C_s = \frac{3 \cdot (\bar{X} - M_e)}{\sigma} \quad (\text{segundo coeficiente de Pearson})$$

$$\text{Coeficiente Quartílico de Assimetria} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$\text{Coeficiente Centílico de Assimetria} = \frac{(C_{90} - C_{50}) - (C_{50} - C_{10})}{C_{90} - C_{10}}$$

$$\text{Coeficiente Momento de Assimetria} = C_s = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

onde  $M_3$  é o terceiro momento com origem na média aritmética.

### 1.6 – Medidas de Curtose

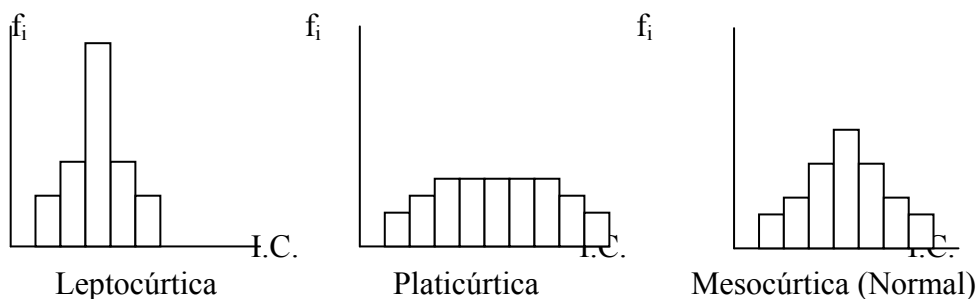
Entende-se como medidas de curtose, o afastamento para cima, com pico, ou para baixo com achatamento, em relação a normal que é a curva simétrica padrão (curva normal em forma de sino ou conhecida como curva de distribuição de Gauss).

Chama-se de curtose (achatamento) o grau de achatamento de uma distribuição, em relação a uma distribuição normal.

Tipos de Curtose

- a) Leptocúrtica
- b) Platicúrtica
- c) Mesocúrtica

Graficamente podemos representá-las assim:



(Fonte: Material didático do Prof. Max Krempser - Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES, 2007).



Coeficientes de Curtose:

Coeficiente Centílico de Curtose

$$C_c = \frac{Q_3 - Q_1}{2 \cdot (C_{90} - C_{10})} \quad \text{ou} \quad C_c = \frac{Q_3 - Q_1}{2 \cdot (D_9 - D_1)}$$

$C_c = 0,263$  curtose do tipo mesocúrtica (normal)

$C_c > 0,263$  curtose do tipo leptocúrtica

$C_c < 0,263$  curtose do tipo platicúrtica)

Coeficiente Momento de Curtose

$$C_c = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

onde  $M_4$  é o quarto momento com origem na média aritmética.

$C_c = 3$  curtose do tipo mesocúrtica (normal)

$C_c > 3$  curtose do tipo leptocúrtica

$C_c < 3$  curtose do tipo platicúrtica

## **Parte 2 - Análise de Correlação, Regressão Linear, Medidas de Associação, Distribuição Amostral, Estimativas e Intervalo de Confiança.**

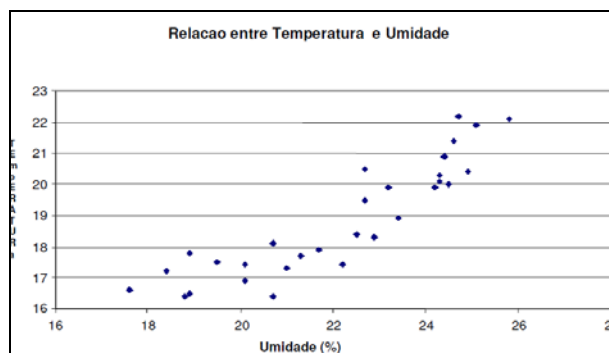
### **2.1– Análise de Correlação e medidas de associação**

Muitas vezes precisamos avaliar o grau de relacionamento entre duas ou mais variáveis. É possível descobrir com precisão, o quanto uma variável interfere no resultado de outra. As técnicas associadas à Análise de Correlação representam uma ferramenta fundamental de aplicação nas Ciências Sociais e do comportamento, da Engenharia e das Ciências naturais. A importância de se conhecer os diferentes métodos e suas suposições de aplicação é exatamente pelo cuidado que se deve ter para não se utilizar uma técnica inadequada. Existem diversos critérios de avaliação desta relação, alguns próprios para variáveis que seguem uma distribuição normal e outros para variáveis que não seguem uma distribuição teórica conhecida. É comum a utilização do Coeficiente de correlação de Pearson. No entanto, existem situações em que o relacionamento entre duas variáveis não é linear, ou uma delas não é contínua ou as observações não são selecionadas aleatoriamente. Nestes casos, outras alternativas de coeficientes deverão ser aplicadas. Entre as diversas alternativas, veremos aqui algumas das mais importantes: Coeficiente de Spearman e coeficiente de Contingência.

### **2.2 – Diagramas de Dispersão**

Um dos métodos mais usados para a investigação de pares de dados é a utilização de diagramas de dispersão cartesianos (ou seja, os conhecidos diagramas x-y). Geometricamente, um diagrama de dispersão é simplesmente uma coleção de pontos num plano cujas duas coordenadas Cartesianas são os valores de cada membro do par de dados. E para quê fazemos um diagrama de dispersão? Este é o melhor método de examinar os dados no que se refere à ocorrência de tendências (lineares ou não), agrupamentos de uma ou mais variáveis, mudanças de espalhamento de uma variável em relação à outra e verificar a ocorrência dos valores discrepantes. Observe o exemplo a seguir:

Segundo o dicionário Aurélio, correlação significa relação mútua entre dois termos, qualidade de correlativo, correspondência. Correlacionar significa estabelecer relação ou correlação entre; ter correlação. Enquanto que a palavra regressão significa: ato ou efeito de regressar, de voltar, retorno, regresso; dependência funcional entre duas ou mais variáveis aleatórias. A palavra regredir significa ir em marcha regressiva, retroceder. Mas, onde e como surgiram os termos correlação e regressão? Foi Francis Galton (1822-1911), primo de Charles Darwin, quem usou pela primeira vez esses termos, cujo trabalho influenciou a Estatística e a Psicologia. Galton publicou o livro *Gênio Hereditário*, em 1869, onde aplicou conceitos estatísticos a problemas da hereditariedade. O primeiro relato onde Galton usou o termo “correlações” foi em 1888.



Podemos notar pela análise da figura acima, a relação linear entre as duas variáveis. Os coeficientes apresentados a seguir nos auxiliam na quantificação do grau de relacionamento entre as variáveis de interesse.

### 2.3 – A Covariância e o Coeficiente de correlação de Pearson

Quando estudamos a relação entre duas variáveis X e Y devemos primeiramente compreender o conceito de covariância. Se a variância é uma estatística através da qual chegamos ao desvio padrão que é uma medida de dispersão, da mesma maneira a covariância é uma estatística através da qual chegamos ao coeficiente de correlação que mede o grau de associação “linear” entre duas variáveis aleatórias X e Y.

Observe o exemplo abaixo. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer, que tomam os seguintes valores:

Tabela 1. Cálculo do coeficiente de correlação de Pearson

X	Y	DESVOIX ( $X_i - \bar{X}$ )	DESVOIY ( $Y_i - \bar{Y}$ )	DXDY ( $X_i - \bar{X}$ ) * ( $Y_i - \bar{Y}$ )	DESVOIX2 ( $X_i - \bar{X}$ ) <sup>2</sup>	DESVOIY2 ( $Y_i - \bar{Y}$ ) <sup>2</sup>	PRE_1 Y=a+bX
1	0	-4,50	-6,00	27,00	20,25	36,00	,92727
2	2	-3,50	-4,00	14,00	12,25	16,00	2,05455
3	4	-2,50	-2,00	5,00	6,25	4,00	3,18182
4	5	-1,50	-1,00	1,50	2,25	1,00	4,30909
5	5	-,50	-1,00	,50	,25	1,00	5,43636
6	8	,50	2,00	1,00	,25	4,00	6,56364
7	7	1,50	1,00	1,50	2,25	1,00	7,69091
8	7	2,50	1,00	2,50	6,25	1,00	8,81818
9	11	3,50	5,00	17,50	12,25	25,00	9,94545
10	11	4,50	5,00	22,50	20,25	25,00	11,07273
55	60	0	0	93,00	82,50	114,00	60,00000

Na tabela 1 está uma ilustração dos cálculos dos componentes da covariância e correlação.

A figura 1 mostra a relação entre as duas variáveis X e Y, bem como a linha ajustada a esses valores pelo método de mínimos quadrados. Observe que a média de X é 5,5 e a média de Y é 6,0, e que elas estão formadas pelas linhas paralelas ao eixo Y e ao eixo X respectivamente. Vejamos agora o que significa os desvios de cada ponto em relação à média.

Observe que cada ponto está formado pelo par ordenado  $(X_i, Y_i)$ , onde  $X_i$  indica o valor da variável X e  $Y_i$  o valor da variável Y naquele ponto.

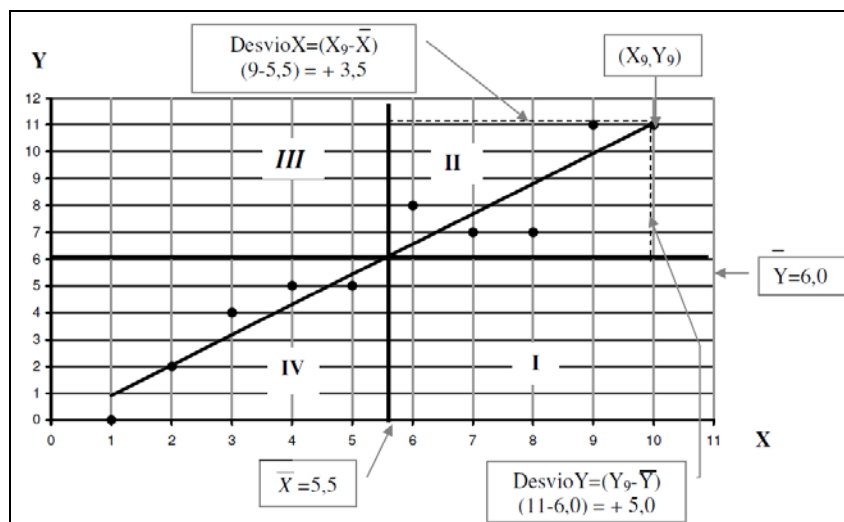


Figura 1– Relação entre X e Y

Tome agora, por exemplo,

Desvio X =  $(X_9 - \bar{X}) = (9 - 5,5) = +3,5$  e Desvio Y =  $(Y_9 - \bar{Y}) = (11 - 6,0) = +5,0$

O produto dos desvios:

Desvio (X) x Desvio (Y) =  $(X_9 - \bar{X}) * (Y_9 - \bar{Y}) = (9 - 5,5) * (11 - 6,0) = (+3,5) * (+5,0) = 17,5$

Se calcularmos esses produtos para todos os valores de X e Y e somarmos temos o numerador da covariância de X e Y:

$$C(X, Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})}{n} = \frac{93}{10} = 9,3 \quad (1)$$

Logo, covariância significa covariação, como as duas variáveis variam de forma conjunta. Agora, vejamos o que acontece se os pontos estivessem no quadrante I. Neste caso, os desvios de X seriam todos positivos, enquanto que os desvios de Y seriam todos negativos, logo os produtos tomarão valores negativos. O mesmo vai acontecer com os pontos do quadrante III, nele, os desvios de X tomarão valores negativos e os desvios de Y, valores positivos, logo os produtos tomarão valores negativos.

Assim, se a maioria dos pontos caem nos quadrantes I e III a covariância tomará valores negativos, indicando que essas duas variáveis se relacionam de forma negativa ou inversa, ou seja, que quando uma cresce a outra diminui e vice-versa.

Quando os pontos se distribuem nos quatro quadrantes, haverá valores positivos e negativos, logo a soma tenderá para zero, e neste caso, afirmaremos que não existe relação linear entre essas variáveis. Observamos que esta estatística tenderá para zero, mesmo havendo uma relação que não for linear, por exemplo se os dados tivessem o formato de uma parábola, ou relação quadrática.

A pesar da covariância ser uma estatística adequada para medir relação linear entre duas variáveis, ela não é adequada para comparar graus de relação entre variáveis, dado que ela está influenciada pelas unidades de medida de cada variável, que pode ser metros, quilometro, quilogramas, centímetros, etc.

Para evitar a influência da ordem de grandeza e unidades de cada variável, dividimos a covariância pelo desvio padrão de X e de Y, dando origem ao **coeficiente de correlação de Pearson** obtido da seguinte forma:

$$r = \frac{C(X, Y)}{S_Y * S_X} \quad r = \frac{9,3}{2,8723 * 3,3764} = 0,95896$$

(2)

Notação:

Coefficiente de correlação amostral: **r**

Coefficiente de correlação populacional: **ρ**

Como o coeficiente de correlação está isento de unidades e da ordem de grandeza das variáveis, este toma valores entre -1 e 1.

Quando a relação é positiva **r** tomará o valor 1 quando a relação é perfeita.

Quando a relação é negativa **r** tomará o valor -1 quando a relação é perfeita.

Quando a relação é difusa ou não linear **r** será igual a 0.

$$r = \frac{C(X, Y)}{S_Y * S_X} \quad r = \frac{9,3}{2,8723 * 3,3764} = 0,95896$$

(2)

Onde:  $S_{2x} = 82,5 / 10 = 8,25$      $\Rightarrow S_x = 2,8723$   
 $S_{2y} = 114,0 / 10 = 11,4$      $\Rightarrow S_y = 3,3764$

Ao se estudar uma variável o interesse eram as medidas de tendência central, dispersão, assimetria, etc. Com duas ou mais variáveis além destas medidas individuais também é de interesse conhecer se elas tem algum relacionamento entre si, isto é, se valores altos (baixos) de uma das variáveis implicam em valores altos (ou baixos) da outra variável. Por exemplo, pode-se verificar se existe associação entre a taxa de desemprego e a taxa de criminalidade em uma grande cidade, entre verba investida em propaganda e retorno nas vendas, etc.

A associação entre duas variáveis poder ser de dois tipos: correlacional e experimental. Numa relação experimental os valores de uma das variáveis são controlados pela atribuição ao acaso do objeto sendo estudado e observando o que acontece com os valores da outra variável. Por exemplo, pode-se atribuir dosagens casuais de uma certa droga e observar a resposta do organismo; pode-se atribuir níveis de fertilizante ao acaso e observar as diferenças na produção de uma determinada cultura.

No relacionamento correlacional, por outro lado, não se tem nenhum controle sobre as variáveis sendo estudadas. Elas são observadas como ocorrem no ambiente natural, sem nenhuma interferência, isto é, as duas variáveis são aleatórias. Assim a diferença entre as duas situações é que na experimental nós atribuímos valores ao acaso de uma forma não tendenciosa e na outra a atribuição é feita pela natureza. Os vários tipos de relacionamentos variáveis é mostrado na figura 2.

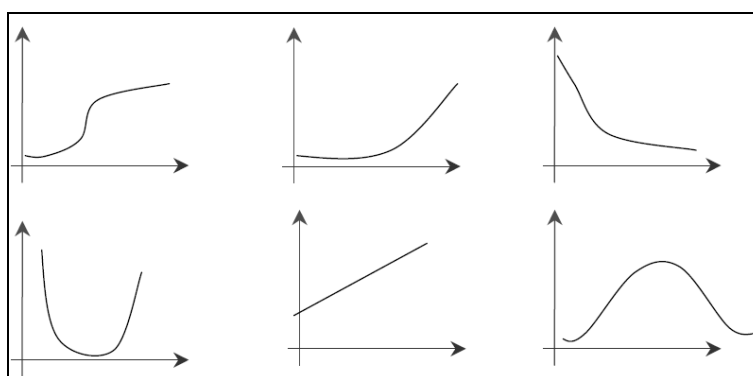


Figura 2 – Vários tipos de relacionamento entre as variáveis X e Y.

Frequentemente é necessário estudar o relacionamento entre duas ou mais variáveis. Ao estudo do relacionamento entre duas ou mais variáveis denominamos de correlação e regressão. Se o estudo tratar apenas de duas variáveis tem-se a correlação e a regressão simples, se envolver mais do que duas variáveis, tem-se a correlação e a regressão múltiplas.

A regressão e a correlação tratam apenas do relacionamento do tipo linear entre duas variáveis. A análise de correlação fornece um número que resume o grau de relacionamento linear entre as duas variáveis. Já a análise de regressão fornece uma equação que descreve o comportamento de uma das variáveis em função do comportamento da outra variável.

## 2.4 – Qualidade do Ajustamento e Coeficiente de Determinação ( $R^2$ )

Na presença de um conjunto de dados bivariados o primeiro passo na análise desses dados é representá-los num diagrama de dispersão (como o da figura 1). A forma da nuvem de pontos, representada no diagrama, pode mostrar uma associação linear entre as duas variáveis, que pode ser expressa numericamente pelo coeficiente de correlação amostral de Pearson ou pelo seu quadrado que se chama **coeficiente de determinação**.

A melhor reta, no sentido dos mínimos quadrados, que melhor se ajusta aos dados do diagrama de dispersão é dada por:  $y = b_0 + b_1x$ .

Uma medida útil associada à reta de regressão, é o grau com que as predições baseadas na equação de regressão, superam as predições baseadas em  $\bar{Y}$ . Isto é, se as predições baseadas na reta não são melhores que as baseadas no valor médio de  $Y$  ( $\bar{Y}$ ), então não adianta dispormos de uma equação de regressão. Para a observação  $y_i$  a diferença em relação ao valor médio  $\bar{Y}$  é conhecida por desvio total e pode decompor-se numa soma de parcelas:

$$\underbrace{(y_i - \bar{y})^2}_{\text{Desvio Total}} = \underbrace{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\text{Desvio explicado pelo modelo}} + \underbrace{(y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{Desvio não explicado ou residuo}}$$

Considerando todas as observações  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , obtemos a variação total:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{\text{Variação Total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\text{Variação explicado pelo modelo}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{Variação não explicado}}$$

**O coeficiente de determinação ( $R^2$ ) em suma é uma medida do poder explicativo do modelo utilizado. Dá a proporção da variação da variável dependente,  $Y$ , que é explicada em termos lineares pela variável independente,  $X$ , i.e., a proporção da variação de  $Y$  explicada pelo modelo**

$$R^2 = \frac{\text{variação explicada}}{\text{variação total}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Na prática

$$R^2 = \frac{a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{y}^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}$$

Tem-se que:

o  $R^2$ , é um valor adimensional, podendo variar apenas de 0 a +1.

- $0 \leq R^2 \leq 1$  a proporção da variação de Y explicada pelo modelo é no máximo 1 e no mínimo 0.
- Se  $R^2 \cong 1$  significa que grande parte da variação de Y é explicada linearmente por X (modelo adequado).

O coeficiente de determinação pode ser utilizado como uma medida da qualidade do ajustamento ou como medida da qualidade de confiança depositada na equação de regressão como instrumento de precisão.

O  $R = \sqrt{R^2}$  dá-se o nome de coeficiente de correlação simples. Para o caso linear, o coeficiente de determinação será simplesmente o quadrado do coeficiente de correlação linear de Pearson ( $R=r$ ).

### **Observações:**

1. Um modelo de regressão linear não dá respostas exatas; assim, para um determinado valor de x da variável X espera-se, em média, que  $\hat{y} = b_1 x + b_0$ ;
2. A estimação, ou previsão, de uma variável com base em valores conhecidos da outra deve ser cautelosa! Não deve ser feita qualquer extrapolação dessa reta para valores fora do âmbito dados. O perigo de extrapolar para fora do âmbito dos dados amostrais é que a mesma relação possa não mais se verificar.
3. A existência de correlação nada diz sobre a natureza da relação causal que porventura exista entre as variáveis. Ao interpretar um coeficiente de correlação deve ter-se presente, que uma valor elevado de R não significa que X seja causa de Y ou Y seja causa de X.

A análise de regressão apenas indica qual o relacionamento matemático pode existir, se existir algum; a lógica de uma relação causal deve provir de teorias externas ao âmbito da Estatística.



## 2.5 – Análise de Regressão

Análise de regressão é uma técnica de modelagem utilizada para analisar a relação entre uma variável dependente (Y) e uma ou mais variáveis independentes  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . O objetivo dessa técnica é identificar (estimar) uma função que descreve, o mais próximo possível, a relação entre essas variáveis e assim poderemos prever o valor que a variável dependente (Y) irá assumir para um determinado valor da variável independente X.

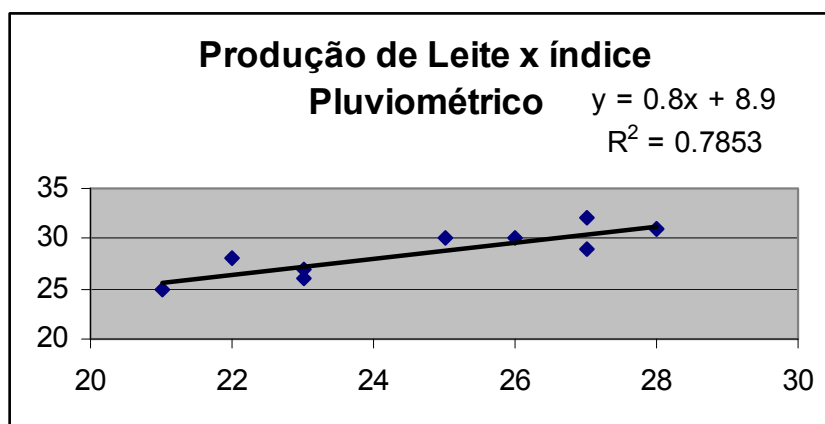
Exemplos de relação entre variáveis são o consumo em relação à taxa de inflação; a produção de leite e temperatura ambiente; a resistência de um material e sua composição química; o número de peças com defeitos e a experiência; receita e gasto com publicidade e etc.

O modelo de regressão poderá ser escrito genericamente como:

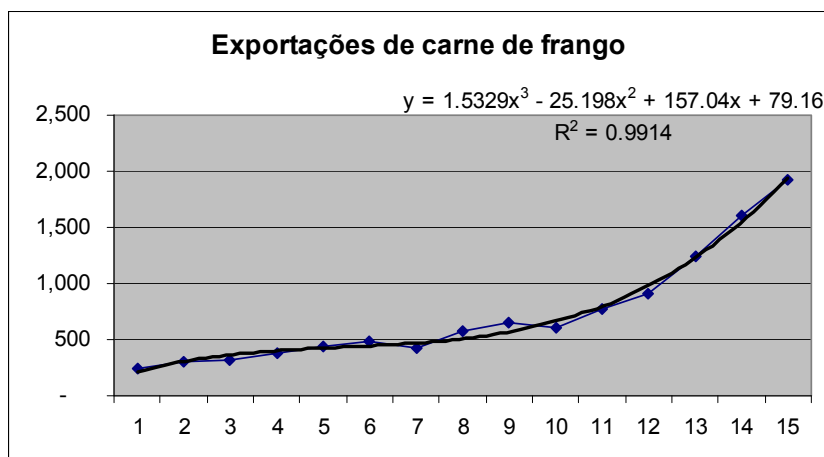
$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) + \varepsilon,$$

onde o termo  $\varepsilon$  representa uma perturbação aleatória na função, ou o erro da aproximação. O número de variáveis independentes varia de uma aplicação para outra, quando se tem apenas uma variável independente chama-se Modelo de Regressão Simples, quando se tem mais de uma variável independente chama-se de Modelo de Regressão Múltipla. A forma da função  $f(\cdot)$  também varia, podendo ser representada por um modelo linear, polinomial ou até mesmo uma função não linear.

A figura abaixo mostra um modelo linear para representar a relação entre a produção de leite e o índice pluviométrico de um município.



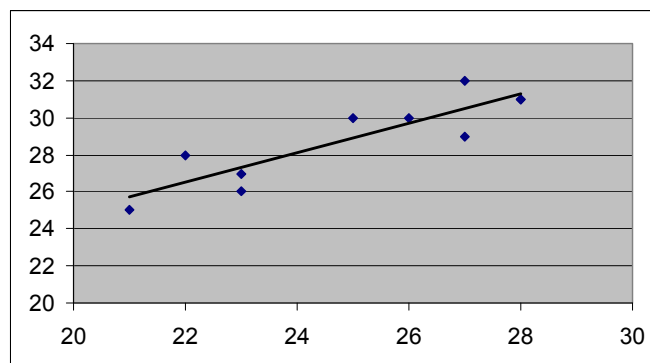
Por sua vez, os dados somente de exportação de carne de frango poderão ser representados por um modelo polinomial conforme é mostrado na figura abaixo.



### Regressão Linear Simples

Este modelo é utilizado quando existe uma relação linear entre a variável independente e a variável dependente (neste caso apenas uma). A função que expressa esse modelo será dada pela forma abaixo:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + \varepsilon$$



O gráfico acima é uma representação desse modelo. Verifica-se pelo mesmo que nem todos os pontos tocam a reta, e essa diferença é o erro ( $\varepsilon$ ), que pode ter sido ocasionado por um erro de leitura dos dados; uma venda abaixo do preço real de mercado; uma produção abaixo do esperado por uma estiagem não comum; retração do consumo por uma subida inesperada na taxa de juros; e assim vai.

Mas supõe-se que em média esses erros tendem a se anular, ou seja:

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

Uma vez escolhido o modelo de regressão, deve-se estimar seus parâmetros, neste caso os coeficientes da equação da reta,  $b_0, b_1$ . Isso pode ser feito a partir da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados.

Tirando a média sobre a equação acima, temos:

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 \bar{X}$$

uma vez que a média dos erros é zero.

Subtraindo as duas equações temos:

$$Y_i - \bar{Y} = (b_0 - b_0) + (b_1)(X_i - \bar{X}) + \varepsilon_i$$

Chamando de  $y$  e  $x$  as diferenças centradas nas médias,  $(Y_i - \bar{Y})$  e  $(X_i - \bar{X})$  respectivamente, temos que:

$$y_i = b_1 x_i + \varepsilon_i$$

ou ainda,

$$\varepsilon_i = y_i - b_1 x_i$$

Fazendo a soma dos quadrados dos erros,

$$\sum (\varepsilon_i)^2 = \sum (y_i - b_1 x_i)^2$$

$$\sum (\varepsilon_i)^2 = \sum y_i^2 - \sum 2b_1 x_i y_i + \sum b_1^2 x_i^2$$

como  $b_1$  é uma constante,

$$\sum (\varepsilon_i)^2 = \sum y_i^2 - 2b_1 \sum x_i y_i + b_1^2 \sum x_i^2$$

Como o objetivo é estimar uma equação que minimize os erros, devemos então derivar a equação acima em relação a  $b_1$  e igualar a zero. E como não se tem os verdadeiros valores e sim uma amostra, ou seja o valor a ser determinado é um estimador do

verdadeiro valor populacional, a nova nomenclatura para  $b_1$  será  $\hat{b}_1$ . Com isso temos:

$$0 = -2 \sum x_i y_i + 2\hat{b}_1 \sum x_i^2$$

Que pode ser reescrita como:

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

E o estimador  $\hat{b}_0$ , pode ser calculado a partir de:

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}$$

Sendo que a equação de estimativa será dada por:

$$\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \bar{X}$$

### Exemplo 1 – Regressão Linear Simples

Em uma determinada região do país foram coletados os índices pluviométricos e a produção de leite do tipo c. Sabendo-se que existe uma previsão para o próximo ano de um índice pluviométrico de 24mm determine então a produção de leite dessa região.

Anos	Produção de Leite C (1.000.000 litros)	Índice pluviométrico (mm)
1970	26	23
1971	25	21
1972	31	28
1973	29	27
1974	27	23
1975	31	28
1976	32	27
1977	28	22
1978	30	26
1979	30	25

#### Resolução

	Y	X	y	x	y <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	xy
1970	26	23	-2.9	-2	8.41	4	5.8
1971	25	21	-3.9	-4	15.21	16	15.6
1972	31	28	2.1	3	4.41	9	6.3
1973	29	27	0.1	2	0.01	4	0.2
1974	27	23	-1.9	-2	3.61	4	3.8
1975	31	28	2.1	3	4.41	9	6.3
1976	32	27	3.1	2	9.61	4	6.2
1977	28	22	-0.9	-3	0.81	9	2.7
1978	30	26	1.1	1	1.21	1	1.1
1979	30	25	1.1	0	1.21	0	0
Soma	289	250	0	0	48.9	60	48
Média	28.9	25	0	0	4.89	6	4.8

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \text{ assim } \hat{b}_1 = \frac{48}{60} = 0.8$$

$$\text{e } \hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}, \text{ que } \hat{b}_0 = 28,9 - 0.8 \cdot 25 = 8,9$$

Assim a equação pode ser escrita como:  $\hat{Y} = 8.9 + 0.8\bar{X}$

Mas será que a equação do exemplo foi bem estimada, ou melhor, será que ela representa bem a relação entre as variáveis? Uma maneira de avaliar é através da diferença entre os valores amostrais reais ( $Y$ ) e os valores estimados ( $\hat{Y}$ ), essa diferença damos o nome de resíduo. Continuando o exemplo,

Continuação do exemplo 1

	Y	X	y	x	y <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	xy	$\hat{Y}$	Y- $\hat{Y}$	(Y- $\hat{Y}$ ) <sup>2</sup>
1970	26	23	-2.9	-2	8.41	4	5.8	27.3	-1.3	1.69
1971	25	21	-3.9	-4	15.21	16	15.6	25.7	-0.7	0.49
1972	31	28	2.1	3	4.41	9	6.3	31.3	-0.3	0.09
1973	29	27	0.1	2	0.01	4	0.2	30.5	-1.5	2.25
1974	27	23	-1.9	-2	3.61	4	3.8	27.3	-0.3	0.09
1975	31	28	2.1	3	4.41	9	6.3	31.3	-0.3	0.09
1976	32	27	3.1	2	9.61	4	6.2	30.5	1.5	2.25
1977	28	22	-0.9	-3	0.81	9	2.7	26.5	1.5	2.25
1978	30	26	1.1	1	1.21	1	1.1	29.7	0.3	0.09
1979	30	25	1.1	0	1.21	0	0	28.9	1.1	1.21
Soma	289	250	0	0	48.9	60	48	289	0	11
Média	28.9	25	0	0	4.89	6	4.8	28.9	0	1

Podemos perceber que as diferenças ( $Y-\hat{Y}$ ) são relativamente pequenas. Uma análise mais cuidadosa pode ser feita através da aplicação de testes estatísticos, nesse caso ANOVA (teste de variância) e teste t-Student.

Começaremos pela ANOVA, para tanto vamos precisar montar a tabela abaixo:

Tabela ANOVA				
Soma dos	Graus de Liberdade	Quadrados	Médios	Teste F
Quadrados	(g.l.)	(QM)		
$SQE = \hat{b}_1^2 \sum x_i^2$	1	SQE/g.l.		SQEmed/SQRmed
$SQR = \sum (Y - \hat{Y})^2$	n-2	SQR/g.l.		
$SQT = \sum y_i^2$	n-1	SQE/g.l + SQR/g.l.		

Obs.: O grau de liberdade em relação ao SQE é devido a termos apenas uma variável independente; Em relação a SQT, os graus devem ser iguais a variância amostral, ou seja, n-1 (onde n é o número da elementos da amostra); E o grau de liberdade para SQR seria dado pela diferença entre este, ou seja n-2.

Onde,

Soma dos quadrados dos totais de y centrado

$$SQT = \sum y_i^2$$

Soma dos quadrados explicados

$$SQE = \sum \hat{Y}_i^2 = \sum \hat{b}_1^2 x_i^2 = \hat{b}_1^2 \sum x_i^2$$

Soma dos quadrados dos resíduos

$$SQR = \sum (Y - \hat{Y})^2$$

Um outro parâmetro utilizado constantemente é o coeficiente de determinação,  $R^2$ , que explica percentualmente a relação entre as variáveis do problema.

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT}$$

Continuação do exemplo 1 - ANOVA

Tabela ANOVA				
Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade (g.l.)	Quadrados Médios (QM)		Teste F
SQE=38.4	1	38.4		27.83
SQR=11.0	8	1.38		
SQT=49.4	7	7.06		

Agora que já temos o valor de F, precisamos testar a hipótese nula que as variâncias são diferentes, ou seja,  
 $H_0 = \mu_1 \neq \mu_2$

Adotaremos um nível de significância ( $\alpha$ ) de 5%. Com esse valor e os números de graus de liberdade, acha-se na tabela um valor crítico de 5.32.

Como o F calculado é maior que o F crítico então se rejeita a hipótese  $H_0$ , o que também quer dizer que as variâncias são iguais, e consequentemente o modelo de regressão é válido.

## Regressão, causalidade e os erros de previsão

O método de regressão, a estimação de parâmetros de uma equação, é cada vez mais divulgado e utilizado para resolver problemas na fábrica e na administração das empresas. Na área de manutenção o método oferece uma maneira de prever a degradação de ferramentas e a probabilidade de paradas da linha de produção. O método avalia os prazos para garantias e a confiabilidade do produto. Com regressão podemos ver mais claramente a relação entre certos insumos e a qualidade e quantidade da produção. Mais recentemente ficou a ferramenta mais utilizada para previsão de demanda e o controle de estoques. No capítulo 16, onde vamos apresentar a área de planejamento de experimentos tão importante para o desenho e desenvolvimento de novos produtos, o método de regressão terá um papel indispensável.

A regressão demonstra quantitativamente a força atrás de uma causalidade ou um simples relacionamento que ocorre de  $X_t$  para  $Y_t$ . Nesse sentido,  $Y_t$  é a variável dependente da variável  $X_t$ , denominada variável independente. Quando o valor de  $X_t$  se altera por alguma razão, então, em consequência, o valor de  $Y_t$  se alterará. É também comum chamar  $Y_t$  a variável explicada e  $X_t$  a variável explicatória (ou explicativa). É importante enfatizar que a questão de causalidade entre variáveis (influência da variável explicatória na variável explicada) deve ser determinada antes de investigar a relação com regressão. As grandes questões da ciência como o posicionamento relativo da terra, da lua e do sol ou a questão da curvatura da terra, ou as questões industriais sobre quais insumos melhor criam valor e qualidade, são analisadas, primeiro, com a teoria e a lógica, e segundo, com comprovações estatísticas através do método de regressão.

Contudo a causalidade não é necessariamente a razão atrás do relacionamento de variáveis. Duas variáveis podem ser apenas covariadas, se movendo conjuntamente, mas uma não necessariamente causa a outra. Quando foi atribuída equivocadamente causalidade onde na realidade não existe, o resultado operacional de controlar o irrelevante pode abocanhar em conclusões equivocadas. Por exemplo, num estudo da estrutura salarial numa multinacional, descobriram que as mulheres ganhavam menos que os homens, até mesmo levando em conta anos de experiência na empresa, nível educacional, entre outras variáveis. Se forem levadas em conta todas as variáveis que representam e der sustentação ao desempenho do funcionário, e o resultado da pesquisa continua com salário menor das mulheres, então a questão das mulheres ganharem menos está ainda sem solução. Nesse caso, não seria correto dizer que as mulheres causam os seus baixos níveis de rendimento, mas sim que há uma associação entre ser mulher e ser mal paga; uma associação que precisa ser mais bem analisada. Outro exemplo da complexidade da distinção entre causa e efeito é a relação entre a reflexão da imagem no espelho e o objeto concreto sendo refletido. Uma alienígena de outro universo onde não existem espelhos e nem reflexão, sem conhecimento sobre o funcionamento desse fenômeno, certamente vai captar a forte correlação entre imagem e objeto, mas não necessariamente vai adivinhar qual é a causa do outro.

## 2.6 – Distribuição Amostral, Estimativas e Intervalo de Confiança

### Principais Conceitos

**População:** conjunto de entes portadores de pelo menos uma característica em comum e que são passíveis de ser observados, sob as mesmas condições, formando o universo de estudo. É o conjunto total de unidades elementares de pessoas, objetos ou coisas, sobre as quais se deseja obter informações.

Amostra: um subconjunto finito de elementos extraído de uma população. para ser representativa, a amostra tem que possuir as mesmas características da população de origem. a amostra é aleatória, quando todos os elementos da população têm a mesma chance de serem escolhidos.

Amostragem: o processo de seleção de uma amostra da população.

Amostragem Aleatória: o processo de seleção de uma amostra (normalmente por sorteio) que permite que todos os elementos da população tenham a mesma chance de serem escolhidos, e que também todo subconjunto de n elementos tenha a mesma chance de fazer parte da amostra.

Inferência Estatística ou Indução Estatística: processo de obtenção de informações sobre a população, a partir de resultados observados numa amostra.

Amostra Aleatória: considerando X uma variável populacional que se deseja estudar, uma amostra aleatória de X é o conjunto de n variáveis aleatórias independentes ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ), de forma que cada uma delas possui a mesma característica (ou distribuição de probabilidade) da variável populacional X.

Parâmetro: uma medida descritiva (média, variância, proporção, etc.) associada à População.

#### 2.6.2 – Estatística ou Estimador:

Uma Medida Descritiva (média, variância, proporção, etc.) associada à Amostra.

a) Estimador para a Média Populacional  $\mu$

$$\text{Média Amostral: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

b) Estimador para a Variância Populacional  $\sigma^2$

$$\text{Variância Amostral: } s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

c) Estimador para a Proporção ou probabilidade de um evento populacional P

$$\text{Frequência Relativa: } f = \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{nro de casos favoráveis}}{\text{nro total de casos}}$$



d) Estimador para o Desvio Padrão Populacional  $\sigma$

$$\text{Desvio Padrão Amostral: } s = \sqrt{s^2}$$

e) Estimador para a Soma ou Diferença de duas Médias Populacionais ( $\mu_1 \pm \mu_2$ )

$$\text{Soma ou diferença de duas médias amostrais: } (\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$$

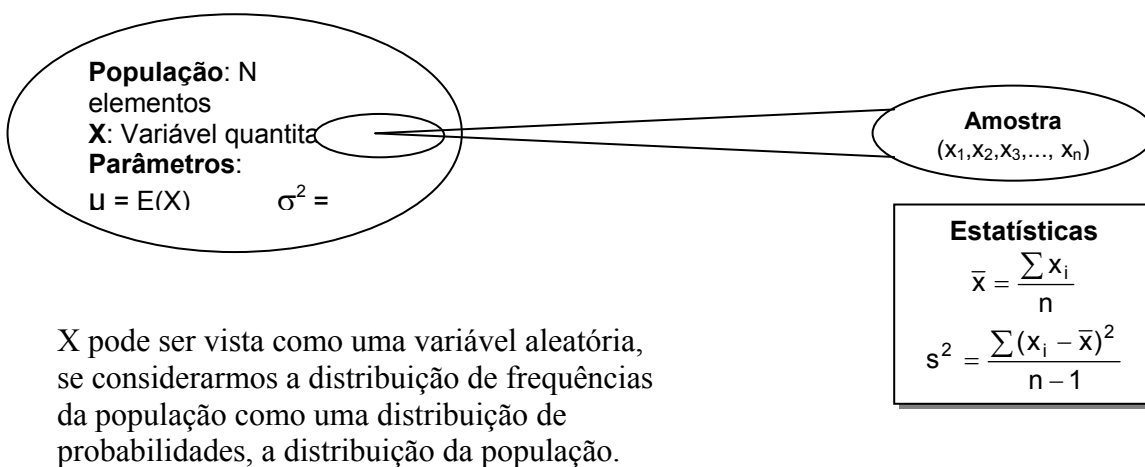
Estimativa: o valor numérico de um estimador.

## Distribuições Amostrais

Considere todas as possíveis amostras de tamanho  $n$  que se pode extrair de uma determinada população. Se para cada uma das amostras for calculado o valor de uma medida (ou estimador), tem-se uma distribuição amostral desta medida ou estimador.

### Distribuição Amostral das Médias

Queremos determinar qual é a distribuição amostral da média aritmética. Sabemos que a média aritmética amostral é um estimador da média aritmética populacional. Como a média amostral é uma variável aleatória, busca-se conhecer sua distribuição de probabilidade.



### Propriedades (ou teoremas)

1) A média da distribuição amostral das médias, denotada por  $\mu$ , é igual à média populacional  $\mu$ .

$$E[\bar{x}] = \mu(\bar{x}) = \mu$$

2) Se a população é infinita (ou muito grande) ou se a amostragem é com reposição, a variância amostral das médias é igual à razão da variância populacional pelo tamanho da amostra, ou seja, a variância da média amostral é menor que a variância da população:

$$E[(\bar{x} - \mu)^2] = \sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

3) Se a população é finita ( $N < 20n$  ou  $n > 5\%$  de  $N$ ) OU se a amostragem é sem reposição, então a variância da distribuição amostral das médias é dada por:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$$

Nota: ao termo  $(N-n)/(N-1)$  denomina-se Fator de Correção para População Finita (FCPF).

4) Teorema Central do Limite: Se o tamanho da amostra for razoavelmente grande ( $n \geq 30$ ), então a Distribuição Amostral da Média pode ser aproximada pela Distribuição Normal.

Em outras palavras, se a população tem ou não Distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então a Distribuição das Médias Amostrais será normalmente distribuída com média  $\mu$  e variância dada por:

Para População Infinita:  $\frac{\sigma^2}{n}$       para População Finita:  $\frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$

### Distribuição Amostral das Frequências Relativas

Queremos determinar qual é a distribuição amostral da frequência relativa ou proporção. Seja  $X$  uma população infinita, e seja  $p$  a probabilidade (ou proporção) para um certo evento de  $X$ . Assim,  $q = 1 - p$  é a probabilidade do evento não ocorrer.

Seja  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  uma amostra aleatória de  $n$  elementos dessa população, e seja  $x$  o número de sucessos nesta amostra. Identifica-se facilmente que  $X$  é uma variável aleatória com DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL, tendo média= $npx$  e variância= $npxq$ .

A Distribuição Amostral da Frequência Relativa:  $\hat{p} = f = \frac{x}{n}$  terá por parâmetros:

$$\text{Média} = E[f] = E\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{np}{n} = p$$

$$\text{Variância} = V[f] = V\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

Para  $n \geq 30$  a Distribuição Amostral da Frequência Relativa  $f$  será Normal com *parâmetros*:

$$f \stackrel{d}{=} N\left(p; \frac{pq}{n}\right)$$

Distribuição Amostral de Variâncias: Seja a Variância Populacional designada por  $\sigma^2$  e a Variância Amostral designada por  $s^2$ . Logo,  $s^2$  é o estimador de  $\sigma^2$ . Pode ser demonstrado que a Distribuição de  $s^2$  tem parâmetros:

$$\text{Média} = E[s^2] = \sigma^2$$

$$\text{Variância} = V[s^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Prova-se também que  $s^2$  tem DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO com  $(n-1)$  graus de liberdade, ou seja:

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \stackrel{d}{=} \chi_{n-1}^2$$

Assim, a relação entre  $s^2$  e  $\sigma^2$  é dada por uma DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO.

### Distribuição Amostral da Soma ou Diferença de Duas Médias

Desejamos identificar a distribuição amostral do estimador  $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ . Sabe-se que a distribuição amostral da média é Normal com média =  $\mu$  e variância =  $\sigma^2/n$ .

A soma ou diferença de duas médias terá também Distribuição Normal, com média igual à soma ou diferença das médias populacionais e variância igual à soma das variâncias populacionais.

$$(x_1 \pm x_2) \stackrel{d}{=} N\left(\mu_1 \pm \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

### Distribuição Amostral da Soma ou Diferença de Duas Frequências Relativas

Desejamos identificar a distribuição amostral do estimador  $(\bar{f}_1 \pm \bar{f}_2)$ . Sabe-se que a distribuição amostral da frequência relativa, considerando-se  $n \geq 30$ , é normal com média =  $p$  e variância =  $pq/n$ .

Considerando-se amostras independentes de duas populações, a soma ou diferença de duas proporções terá Distribuição Normal, com média igual à soma ou diferença das proporções populacionais e variância igual à soma das variâncias populacionais.

$$(f_1 \pm f_2) \stackrel{d}{=} N\left(p_1 \pm p_2; \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}\right)$$

### Distribuição Amostral das Médias Quando a Variância da População é Desconhecida

Sabe-se que a distribuição amostral da média é Normal com média =  $\mu$  e variância =  $\sigma^2/n$ , o que implica em sua distribuição normal padronizada ser representada por:

$$Z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Como não se conhece o valor da variância populacional  $\sigma^2$ , e portanto não se conhece também o valor do desvio padrão populacional  $\sigma$ , uma possibilidade é substituir o desvio padrão populacional pelo seu estimador, o desvio padrão amostral. Neste caso, passamos a ter a estatística T:

$$T_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

que possui **DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT** com **(n-1)** graus de liberdade, e portanto:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

### **Estimação de Parâmetros**

Trata-se da questão de avaliar parâmetros populacionais a partir de operações com os dados de uma amostra. É um raciocínio tipicamente indutivo, onde se generalizam resultados obtidos na parte (amostra) para o todo (população).

No início deste capítulo foi estabelecido que uma estatística é normalmente uma medida descritiva (Média, Desvio Padrão, etc.), que é função dos elementos contidos na amostra. Quando uma estatística é usada para avaliar algum parâmetro da população, é também chamada de Estimador.

Desta forma, pelo fato de depender dos particulares elementos selecionados na amostra, o Estimador é também uma variável Aleatória.

Uma vez realizada uma amostragem, ao valor calculado para o estimador nesta amostra, dá-se o nome de estimativa.

Há dois tipos de estimativas:

- Estimativa pontual: é o valor obtido por cálculo de uma medida numa amostra retirada da população de interesse.

- Estimativa Intervalar: A estimativa está incluída num intervalo, considerando um certo grau de acerto, determinado Intervalo de Confiança, que contém a estimativa pontual. Note-se que, ao se definir um grau de acerto, automaticamente fica também definido um grau de erro, ao qual se dá o nome de margem de erro da estimativa (em pontos percentuais), e que resulta em um erro de estimativa ou erro amostral (em unidades da variável).

### Propriedades de um Estimador

Por se tratar de uma variável aleatória, um estimador pode assumir valores segundo uma distribuição de probabilidades. A principal característica que um estimador deve apresentar é a de que, em média, ele seja igual ao parâmetro populacional que se deseja estimar. De outra forma:

### Estimador não tendencioso

Seja  $T$  um estimador do parâmetro  $\theta$ . O estimador  $T$  é **não-tendencioso** (ou não-viesado) se  $E[T] = \theta$ .

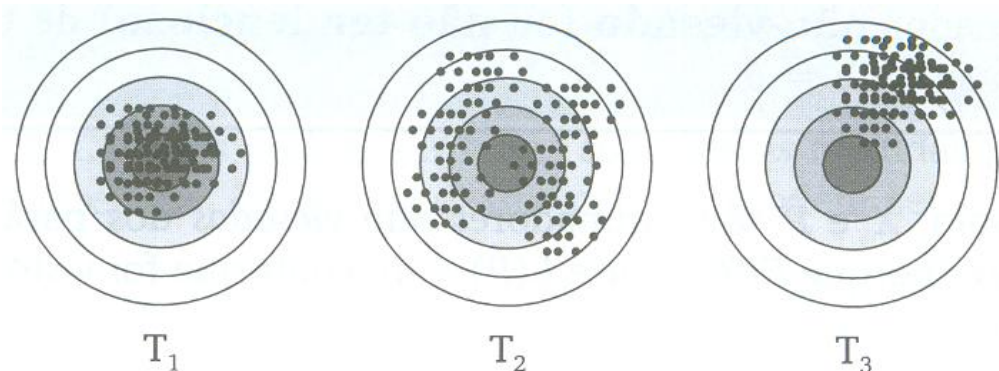
Na prática, normalmente retiramos apenas uma amostra da população e produzimos através dela um único valor para o Estimador: uma estimativa. Ainda que nosso estimador seja não tendencioso, o valor da estimativa pode ser diferente do valor do parâmetro populacional. É desejável portanto, que nosso estimador tenha variância pequena, para reduzir a chance de nossa estimativa se afastar muito do valor do parâmetro.

### Eficiência do Estimador

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  dois estimadores não tendenciosos de um parâmetro, sendo  $V[T_1] < V[T_2]$ . Neste caso,  $T_1$  é dito mais eficiente que  $T_2$ , e a eficiência relativa de  $T_1$  em relação a  $T_2$  é dada por:

$$ef(T_1, T_2) = \frac{V[T_2]}{V[T_1]}$$

Os conceitos de TENDÊNCIA e EFICIÊNCIA são bem ilustrados através da figura abaixo, onde  $T_1$  e  $T_2$  são rifles não tendenciosos e  $T_3$  é tendencioso. Embora  $T_1$  e  $T_2$  sejam não tendenciosos,  $T_1$  é mais eficiente do que  $T_2$ .



Usando as distribuições amostrais, é possível avaliar probabilisticamente, o erro que se está cometendo por se usar uma amostra e não toda a população. Conforme anteriormente mencionado, a este erro dá-se o nome de Erro Amostral ou Erro de Estimativa, e seu cálculo fica evidenciado na estimativa em forma de Intervalo de confiança.

## 2.7 – Intervalo de Confiança

Trata-se de uma das técnicas para inferência estatística, onde a partir de um intervalo de confiança, construído com os elementos da amostra, pode-se inferir sobre um parâmetro populacional. Devido à variabilidade amostral, as possíveis amostras aleatórias de mesmo tamanho retiradas da mesma população terão medidas diferentes. Assim, surge naturalmente a pergunta: qual a confiabilidade de uma estimativa pontual? O intervalo de confiança foi instituído para definir de forma objetiva a credibilidade da estimativa. Intervalo de Confiança é o intervalo de valores que contém o parâmetro da população, com uma determinada probabilidade de acerto, e é construído a partir de uma amostra aleatória retirada da população.

### Exemplificando o Intervalo de Confiança para a Média.

Se o tamanho da amostra ( $n$ ) for suficientemente grande, a média de uma amostra aleatória terá distribuição normal, com média igual à da população, e variância igual à variância da população dividida por  $n$ .

Da distribuição normal padrão, podemos então concluir, por exemplo, que a probabilidade da média estar incluída no intervalo de dois desvios padrão ao redor da média é de 95,45%, conforme a seguir demonstrado:

$$P(\bar{x} - 2\sigma_a \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma_a) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2), \text{ onde}$$

$\sigma_a$  significa o desvio padrão da amostra.

$$P(\bar{x} - 2\sigma_a \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma_a) = 0,9772 - 0,02275 = 0,95445$$

$$P(\bar{x} - 2\sigma_a \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma_a) = 95,45\%$$

De outra maneira, podemos dizer que 95,45% das médias amostrais se situam ao redor de mais ou menos dois desvios padrão da média.

Portanto, em 95,45% das vezes em que repetirmos a amostragem aleatória e calcularmos sua média, a média populacional estará incluída no intervalo de mais ou menos 2 desvios padrão ao redor da média amostral. Reciprocamente, em 4,55% das vezes, a média populacional não estará incluída no intervalo definido por dois desvios padrão. O Intervalo de Confiança neste caso define o percentual de todas as amostras possíveis que satisfazem à margem de erro (ou erro de estimativa) de 2 desvios padrão amostral. Adicionalmente, fica bastante claro que o erro da estimativa ou margem de erro, depende fundamentalmente da amostra.

Utilizando raciocínio semelhante ao desenvolvido acima, podemos calcular, no caso da média, o erro da estimativa ou margem de erro, para alguns níveis de confiabilidade de interesse, conforme abaixo ilustrado.

<b>IC ( 1 - <math>\alpha</math> )</b>	<b>90,00%</b>	<b>95,00%</b>	<b>95,50%</b>	<b>97,50%</b>	<b>99,00%</b>
<b><math>\alpha</math></b>	<b>10,00%</b>	<b>5,00%</b>	<b>4,50%</b>	<b>2,50%</b>	<b>1,00%</b>
<b>( 1 - <math>\alpha/2</math> )</b>	<b>95,00%</b>	<b>97,50%</b>	<b>97,75%</b>	<b>98,75%</b>	<b>99,50%</b>
<b><math>Z_{\alpha/2}</math></b>	<b>1,64</b>	<b>1,96</b>	<b>2,00</b>	<b>2,24</b>	<b>2,58</b>

### Intervalo de Confiança para Média, Variância Populacional ( $\sigma^2$ ) Conhecida.

Conforme já estabelecido, o estimador da média populacional ( $\mu$ ) é a média amostral ( $\bar{x}$ ), e a distribuição de probabilidade das médias é normal com parâmetros:

para população infinita

$$\bar{x} \stackrel{d}{=} N \left( \mu ; \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

ou

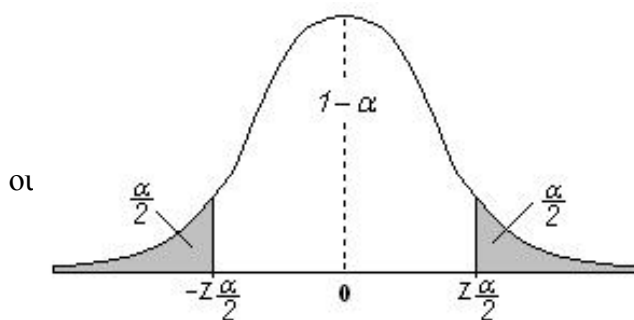
para população finita

$$\bar{x} \stackrel{d}{=} N \left( \mu ; \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \right)$$

Logo, para o caso de populações infinitas, a variável padronizada de  $\bar{x}$  será:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Fixando-se um nível de confiança  $(1-\alpha)$ , temos a seguinte representação da situação:



$$P \left( -z \frac{\alpha}{2} \leq Z \leq z \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \alpha$$

Substituindo-se o valor de  $Z$ , tirado de  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  para o caso de populações infinitas, e resolvendo-se para as duas inequações, temos:

$$P\left(\bar{x} - z \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Para fins de cálculo, a utilização da fórmula é muito simples: basta fixar o nível de confiabilidade  $(1 - \alpha)$  e portanto também  $\alpha$ , e observar na tabela da Distribuição Normal Padrão, o valor da abscissa  $z \frac{\alpha}{2}$  para a probabilidade  $\left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ . Com os valores da média amostral  $\bar{x}$ , do desvio padrão da população  $\sigma$  e do tamanho da amostra  $n$ , constrói-se o intervalo.

No caso de populações finitas, lembre-se que  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$  e portanto o

intervalo de confiança para Populações Finitas se transforma em:

$$P\left(\bar{x} - z \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{x} + z \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

Considerando a Distribuição Normal de probabilidades podemos calcular antecipadamente o valor da abscissa para alguns níveis de confiabilidade de interesse, conforme indicado abaixo:

<b>IC ( 1 - <math>\alpha</math> )</b>	<b>90,00%</b>	<b>95,00%</b>	<b>95,50%</b>	<b>97,50%</b>	<b>99,00%</b>
<b><math>\alpha</math></b>	<b>10,00%</b>	<b>5,00%</b>	<b>4,50%</b>	<b>2,50%</b>	<b>1,00%</b>
<b>( 1 - <math>\alpha/2</math> )</b>	<b>95,00%</b>	<b>97,50%</b>	<b>97,75%</b>	<b>98,75%</b>	<b>99,50%</b>
<b><math>Z\alpha/2</math></b>	<b>1,64</b>	<b>1,96</b>	<b>2,00</b>	<b>2,24</b>	<b>2,58</b>



**Exemplo:** A duração da vida de uma peça tem desvio padrão  $\sigma = 5$  horas. Foram amostradas 100 peças observando-se a média de 500 horas. Construir o intervalo de confiança para a verdadeira duração da peça, com um nível de confiabilidade de 95%.

**Solução:** temos que:

$$\sigma = 5 ; \quad n=100 ; \quad \bar{x} = 500 ; \quad (1-\alpha).100 = 95\%$$

Da tabela acima retiramos o valor da abscissa  $Z_{\alpha/2}$  como sendo **1,96** (para 97,5%) e substituindo os valores na fórmula para **população infinita** obtemos a inequação:

$$P\left(500 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 500 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = 95\%$$

, cujo cálculo resulta em uma **margem de erro** (ou **erro de estimativa**) de **0,98 horas**.

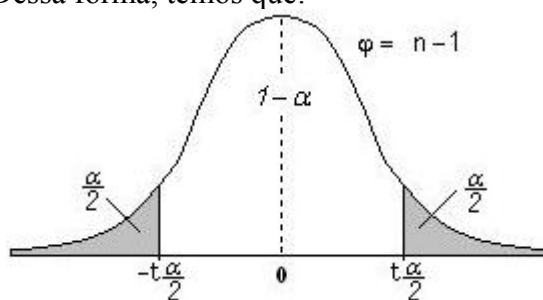
Assim, o intervalo **500±0,98**, ou **[499,02 ; 500,98]** contém a duração média da peça com 95% de confiança, significando com isso que permanece uma chance de 5% de a real duração da peça não pertencer a este intervalo.

### Intervalo de Confiança para Média, Variância Populacional ( $\sigma^2$ ) Desconhecida.

O processo de obtenção do intervalo de confiança neste caso, é bastante semelhante ao caso anterior. A grande diferença é que, ao substituirmos a variância populacional pelo seu estimador, a variância amostral, a variável normalizada resultante passa a ser constituída pelo quociente entre duas variáveis aleatórias:  $\bar{x}$  e  $s$ , o que

implica que a distribuição da variável  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$  passe a ter **DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT**

com **n-1** graus de liberdade. Dessa forma, temos que:



Ou seja:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Substituindo o valor de t e resolvendo as inequações, temos então:

$$(população\ infinita) \quad P\left(\bar{x} - t\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ou então:

$$(população\ finita) \quad P\left(\bar{x} - t\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{x} + t\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

onde  $t \stackrel{d}{=} t_{n-1}$ .

Considerando que os valores das abscissas ( $t_{\alpha/2}$ ) da distribuição “T” dependem agora do tamanho da amostra (n) e do desvio padrão amostral, podemos calcular referido valor para alguns níveis de confiabilidade de interesse e para alguns tamanhos usuais de amostra, conforme indicado abaixo:

IC (1 - $\alpha$ )	90,00%	95,00%	95,50%	97,50%	99,00%
$\alpha$	10,00%	5,00%	4,50%	2,50%	1,00%
$t_{\alpha/2}, n=10, gl=9$	1,83	2,26	2,33	2,69	3,25
$t_{\alpha/2}, n=20, gl=19$	1,73	2,09	2,15	2,43	2,86
$t_{\alpha/2}, n=30, gl=29$	1,70	2,05	2,10	2,36	2,76
$t_{\alpha/2}, n=50, gl=49$	1,68	2,01	2,06	2,31	2,68
$t_{\alpha/2}, n=100, gl=99$	1,66	1,98	2,03	2,28	2,63

**Exemplo:** A amostra: 9; 8; 12; 7; 9; 6; 11; 6; 10; 9 foi extraída de uma *população normal*. Construir o intervalo de confiança para a média ao nível de 95%.

**Solução:** Calculando a média aritmética e o desvio padrão da amostra, obtemos os seguintes resultados:

$$\bar{x} = 8,7 \quad e \quad s = 2$$

Considerando que  $(1-\alpha) = 95\%$  e  $g.l. = 9$  (graus de liberdade =  $n-1$ ), da tabela acima retiramos o valor **2,26** para a abscissa  $t_{\alpha/2}$ . Com tais valores, o *erro de estimativa* (ou *margem de erro*) é **1,43** e o intervalo de confiança  **$8,7 \pm 1,43$**  torna-se **[7,27 ; 10,13]**, o qual contém a média da população com 95% de confiança.

### Intervalo de Confiança para Proporção ou Probabilidade

Na seção 3.2 foi estabelecido que o estimador para proporção ( $p$ ) é a frequência relativa ( $f$ ), e a distribuição de probabilidade das frequências relativas é normal com parâmetros:

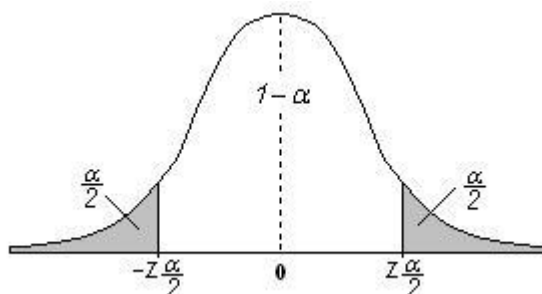
$$f \stackrel{d}{=} N\left(p; \frac{p \cdot q}{n}\right) \quad \text{para população infinita}$$

ou

$$f \stackrel{d}{=} N\left(p; \frac{p \cdot q}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right) \quad \text{para população finita}$$

Assim, para o caso de populações infinitas, a variável padronizada de  $f$  é dada por  $Z = \frac{f - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}}$

Fixando-se um nível de confiança  $1 - \alpha$ , temos a seguinte representação da situação:



Ou seja:

$$P\left(-z \frac{\alpha}{2} \leq Z \leq z \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \alpha$$

Substituindo-se o valor de  $Z$  tirado de  $Z = \frac{f - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}}$  para o caso de populações infinitas,

e resolvendo-se para as duas inequações, temos:

$$P\left(f - z \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \leq p \leq f + z \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (\text{população infinita})$$

Para amostras grandes ( $n > 30$ ), pode-se substituir os parâmetros da população  $p$  e  $q$  pelos seus estimadores  $f$  e  $(1 - f)$  de forma que o intervalo de confiança torna-se:

$$P\left(f - z \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}} \leq p \leq f + z \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (\text{população infinita})$$

$$P\left(f - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \leq p \leq f + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\right) = 1 - \alpha \quad (\text{população finita})$$

**Exemplo:** Examinadas **500** peças de uma produção, encontrou-se **260** defeituosas. Construir um intervalo de confiança a **90%** para a verdadeira proporção de peças defeituosas.

**Solução:** Temos **n=500**; **x=260**; **(1-α)=90%**

Assim, a **proporção na amostra** é  $f = \frac{x}{n} = \frac{260}{500} = 0,52$ . O valor da abscissa  $z_{\alpha/2}$  pode ser obtido da tabela do item 5.1 como sendo **1,645**. Substituindo tais valores na fórmula encontramos:

$$P\left(0,52 - 1,645 \sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{500}} \leq p \leq 0,52 + 1,645 \sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{500}}\right) = 90\%$$

e portanto  $P(0,4832 \leq p \leq 0,5568) = 90\%$ , ou ainda o intervalo [ **48,32%** ; **55,68%** ] (**margem de 3,68%**) contém a verdadeira proporção de peças defeituosas, com uma confiança de 90%.

A maneira mais fácil de se calcular o intervalo de confiança é **calcular primeiramente a margem de erro**, expressa neste caso por:

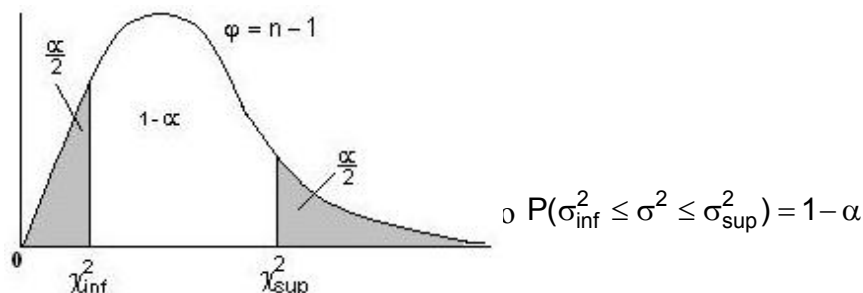
$$\text{Margem de Erro} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}} = 1,645 \sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{500}} = 0,0368$$

Assim, o intervalo de confiança é obtido pelos limites  $f \pm \text{erro}$ , ou seja [0,52-0,0368 ; 0,52+0,0368] que fornece o mesmo resultado acima [0,4832 ; 0,5568].

Intervalo de Confiança para Variância: sendo  $s^2$  o estimador de  $\sigma^2$ , e sabendo que  $s^2$  tem distribuição qui-quadrado com  $(n-1)$  graus de liberdade, ou seja:

$$\frac{(n-1) s^2}{\sigma^2} \equiv \chi_{n-1}^2, \text{ o que pode ser escrito como } \sigma^2 \equiv \frac{(n-1) s^2}{\chi_{n-1}^2}$$

O intervalo será:



Substituindo-se os valores na fórmula acima temos:

$$P\left(\frac{(n-1).s^2}{\chi_{\text{sup}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1).s^2}{\chi_{\text{inf}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

**Exemplo:** Suponha que uma amostra de **10** elementos, tenha revelado *variância amostral* igual a **4**. Construir o Intervalo de Confiança ao nível de **90%**.

**Solução:** Temos **n=10**; **s<sup>2</sup>=4**; **(1- $\alpha$ )=90%**; **gl=(n-1)=9**  
Consultando a tabela do Qui-Quadrado com **gl=9**, temos:

a) Para  **$\alpha=5\%$** , temos  $\chi_{\text{sup}}^2 = 16,9190$

b) Para  **$\alpha=95\%$**  temos  $\chi_{\text{inf}}^2 = 3,3251$

Logo,

$$P\left(\frac{9 \times 4}{16,919} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \times 4}{3,3251}\right) = 90\%$$

e portanto  $P(2,13 \leq \sigma^2 \leq 10,81) = 90\%$ , com a mesma interpretação dada aos intervalos anteriores.

Intervalo de Confiança para Desvio Padrão: Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, pode-se calcular o IC para a variância e depois extrair a raiz quadrada dos limites do intervalo para obtenção do intervalo de confiança para o desvio padrão.

### 3 – Analogias entre variáveis e equações da teoria estatística do $R^2$ com o GCR

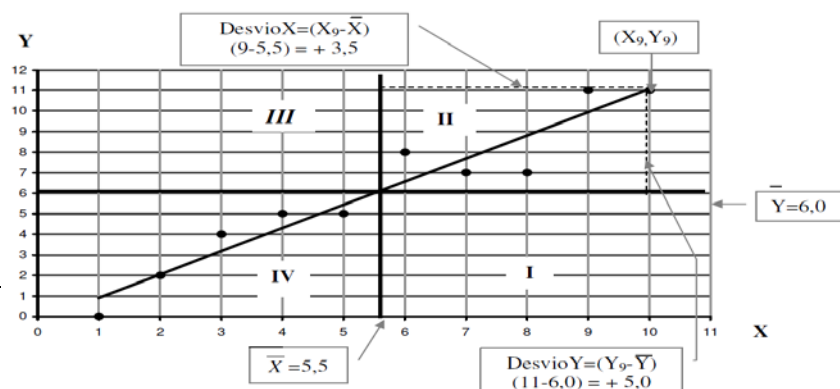
Aqui são feitas algumas analogias e substituições de variáveis, no intuito de subsidiar o cálculo do GCR proposto no modelo (MCRM-TR). Inicialmente são feitas algumas considerações importantes para utilização das analogias pretendidas:

- os fatores de competitividade e risco do MCRM-TR possuem comportamento linear (linearidade entre os fatores);
- são geradas variáveis aleatórias (pelo método de monte Carlo) para cada fator (um total de 8 fatores para cada depósito), a partir da análise prévia do intervalo ou série de valores conforme a variável tratada, para no final da simulação se obter uma distribuição normal (Teorema Central do Limite) para as variáveis/fatores. Assim, considerando a existência de linearidade entre os fatores de competitividade e risco ( $P_{VPD}$ ,  $P_{QIL}$ ,  $P_{EMO}$ ,  $P_{IER}$ ,  $P_{EPM}$ ,  $P_{PPCS}$ ,  $P_{PPEG}$ ,  $P_{PCLG}$ , e as subvariáveis destes 3 últimos), o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) por ser uma boa medida da aderência do modelo de regressão aos dados, de forma indireta, pode determinar o grau de associação entre os fatores (aos pares) dos depósitos do PDCM e os fatores dos DAs. Este grau de associação é definido no modelo (MCRM-TR) como Grau de Competitividade e Risco (GCR).

Assim, considerando a existência de linearidade entre os fatores de competitividade e risco ( $F_{VPD}$ ,  $F_{QIL}$ ,  $F_{EMO}$ ,  $F_{IER}$ ,  $F_{EPM}$ ,  $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$ ,  $F_{PQLG}$ ), a correlação entre duas variáveis do tipo quantitativas descreve a associação entre essas variáveis. Sendo assim, o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) por ser uma boa medida da aderência do modelo de regressão aos dados, e de forma indireta, pode determinar o grau de associação entre os fatores (aos pares) dos depósitos de portfólio mundial (referência de alto nível de competitividade e baixo risco) e os fatores do depósito em análise. Este grau de associação é definido no modelo (MCRM-TR) como Grau de Competitividade e Risco - GCR.

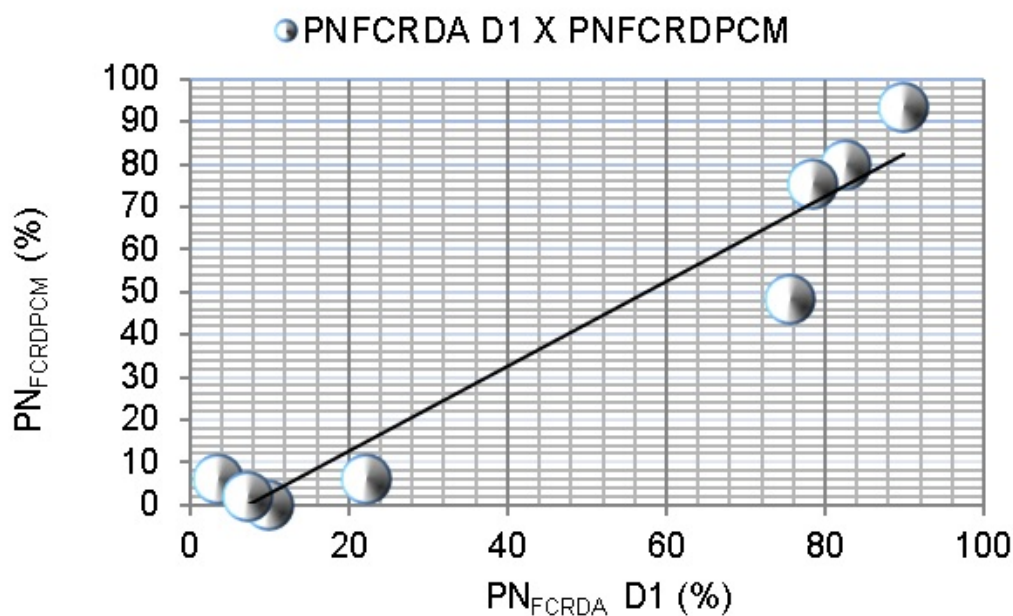
#### Analogias

Na figura do subtítulo 2.3, podemos substituir as variáveis  $X$  e  $Y$  pelas probabilidades dos níveis dos fatores:  $P_{VPD}$ ,  $P_{QIL}$ ,  $P_{EMO}$ ,  $P_{IER}$ ,  $P_{EPM}$ ,  $P_{PPCS}$ ,  $P_{PPEG}$ ,  $P_{PQLG}$ , do portfólio de classe mundial e do depósito em análise respectivamente, conforme a seguir:



Relação entre Y e X: será a relação entre os 8 fatores:  $F_{VPD}$ ,  $F_{QIL}$ ,  $F_{EMO}$ ,  $F_{IER}$ ,  $F_{EPM}$ ,  $F_{PPCS}$ ,  $F_{PPEG}$ ,  $F_{PQLG}$ , do portfólio de classe mundial ( $Y = PN_{FCRPCM}$ ) e do depósito em análise ( $X = PN_{FCRDA}$ ) respectivamente (aos pares).

Idem analogias para as igualdades de Y e X ( $Y = N_{FCRPCM}$  e  $X = PN_{FCRDA}$ ) nas equações de cálculos de covariância, coeficiente de correlação, coeficiente de determinação ( $R^2$ ), distribuições de probabilidades, desvios padrões e intervalos de confiança. O exemplo da figura abaixo mostra o resultado da analogia proposta para determinação do GCR ( $R^2$ ).



Relação entre Y e X, após analogia: relação entre  $PN_{FCRPCM}$  e  $PN_{FCRDA}$  respectivamente para os 8 fatores (empareados).

Dessa forma, quanto mais próximo de +1 maior o grau de associação entre os depósitos, ou seja, mas semelhantes são seus fatores e conseqüentemente suas características competitivas e de riscos.

#### 4 – Referências Bibliográficas

KREMPSEK, M. Material didático – Estatística Aplicada. 2007. Universidade Federal de Sergipe - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Núcleo de Estatística – NES. Disponível em: < <https://projetolivres.files.wordpress.com/2009/03/apostila-de-estatistica-aplicada.doc> >. Acesso em 07 dez. 2015.

GUIMARÃES, P.R.B. Material didático – Análise de Correlação e medidas de associação. Disponível em: < <http://people.ufpr.br/~jomarc/correlacao.pdf> >. Acesso em 01 dez. 2015.

MALVA, M. Material didático – Análise de Regressão e Correlação. Departamento de Matemática - Escola Superior de Tecnologia-Instituto Politécnico de Viseu – Portugal. Disponível em: < <http://www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/malva/MethodosElectro/Regress%C3%A3o.pdf> >. Acesso em nov. 2015.

VIALI, L. Apostila V – Série: estatística básica, texto v: correlação e regressão – PUCRS. Disponível em: < [http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/eae\\_fenge/material/apostilas/Corregre.pdf](http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/eae_fenge/material/apostilas/Corregre.pdf) >. Acesso em: 10 nov. 2015.

SAMOHYL, R.W. Material didático – Ferramentas Estatísticas em Controle Estatístico de Qualidade – Capítulo 13 - Regressão linear Simples. Disponível em: < <http://eps7000.pbworks.com/f/Cap%C3%ADtulo+13+Regress%C3%A3o+linear+simpl es.doc> >. Acesso em: 15 nov. 2015.

SERRA, C. M. V. Material didático – Análise de Regressão. UEPA. Disponível em: < <http://unebcampusxixest.wikispaces.com/file/view/Anlise+de+Regresso.doc> >. Acesso em: 15 nov. 2015.

MAGRINI, A. Material didático – Estatística 1 – capítulo 8 - Distribuição Amostral e Estimativa). Disponível em: < [http://www.magrini.eng.br/Disc\\_Estat/Apoio/Apostilas/ESTAT\\_8\\_Distrib\\_Amostral\\_Estimativas.doc](http://www.magrini.eng.br/Disc_Estat/Apoio/Apostilas/ESTAT_8_Distrib_Amostral_Estimativas.doc) >. Acesso em: 22 out. 2015.



**ANEXO C – DIVIDIDO EM TRÊS PARTES: PARTE 1 – INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE GERAÇÃO DE NÚMEROS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PARA APLICAÇÕES EM SIMULADORES, PARTE 2 – MÉTODO DE MONTE CARLO/SIMULAÇÃO MONTE CARLO; PARTE 3 - SIMULAÇÃO MONTE CARLO E ANÁLISES DE RESULTADOS COM SOFTWARE RISK SIMULATOR (ROV, INC.)**

**Dando continuidade ao ANEXO B, este anexo traz uma revisão de outros conceitos importantes da estatística também com o intuito de subsidiar o entendimento e desenvolvimento do modelo de competitividade e risco na mineração de elementos de terras-raras (MCRM-TR).**

**Este material foi produzido a partir da compilação, leitura, e adaptação de conteúdos de livros especializados e de materiais didáticos de professores e pesquisadores com alguns anos de dedicação ao ensino da disciplina estatística, conforme referendados nas respectivas páginas e também no final deste anexo.**

## Sumário

### Parte 1 – Introdução aos Métodos de Geração de Números e Variáveis Aleatórias para Aplicações em Simuladores

1.1 – Propriedades dos Números Aleatórios.....	3
1.2 – Propriedades Desejadas aos Geradores de Números Aleatórios.....	4
1.3 – Métodos de Geração de Números Aleatórios.....	6
1.4 – Geração de Variáveis Aleatória.....	11
1.5 – Referências Bibliográficas (Parte 1).....	19

### Parte 2 – Método de Monte Carlo/Simulação de Monte Carlo (Aplicado às Finanças)

2.1 – Introdução.....	20
2.2 – O Método de Monte Carlo.....	22
2.3 – Inversão da Função de Distribuição.....	25
2.4 – Algumas Aplicações.....	27
2.5 – Princípios Básicos do Método de Monte Carlo.....	32
2.5.1 – Introdução.....	32
2.5.2 – Formulação Geral.....	33
2.6 – Referências Bibliográficas (Parte 2).....	37

### Parte 3 – Simulação Monte Carlo e Análises de Resultados com o Software *Risk Simulator* (Software *Risk Simulator* versão 10.0.0 – 2014 (ROV, Inc.)).

3.1 – Introdução.....	39
3.2 – O que é a Simulação Monte Carlo (de forma simplificada)?.....	41
3.2.1 – Introdução ao Software Risk Simulator.....	41
3.2.2 – Executar uma Simulação Monte Carlo .....	43
3.2.2.1 – Iniciar um Novo Perfil de Simulação.....	43
3.2.2.2 – Definir Valores de Entrada.....	45
3.2.2.3 – Definir Resultados de Previsão.....	47
3.2.2.4 – Executar a Simulação.....	48
3.2.2.5 – Interpretação dos Resultados de Previsão.....	48
3.3 – Noções básicas sobre distribuições de probabilidade na simulação Monte Carlo.....	52
3.3.1 – Seleção da Distribuição de Probabilidade Apropriada.....	54
3.3.2 – Distribuições Discretas.....	55
3.3.3 – Distribuições Contínuas.....	61
3.4 – Referências Bibliográficas (Parte 3).....	83

## Parte 1– Introdução aos Métodos de Geração de Números e Variáveis Aleatórias para Aplicações em Simuladores

A geração de números e variáveis aleatórias é um ingrediente fundamental em qualquer programa de simulação, comercial ou não. Na grande maioria dos programas comerciais, este processo é transparente para o usuário, restando a este apenas definir os parâmetros desta ou daquela distribuição de probabilidades desejada. Este texto introdutório está voltado para o leitor que pretende desenvolver programas de simulação com base em uma linguagem de propósito geral ou para aqueles desejosos de uma melhor compreensão dos conceitos e técnicas envolvidas nos processos de geração de números e variáveis aleatórias que se encontram presentes nas linguagens específicas de simulação.

### 1.1 Propriedades dos Números Aleatórios

Uma sequência de números aleatórios,  $x_1, x_2, \dots$ , deve possuir duas importantes propriedades: uniformidade e independência. Todo número aleatório  $x_i$  é uma amostra independente de uma distribuição uniforme e contínua no intervalo de zero a 1. Desta forma, a função densidade de probabilidade de  $x$  é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{outro valor} \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade é mostrada na Figura 1.

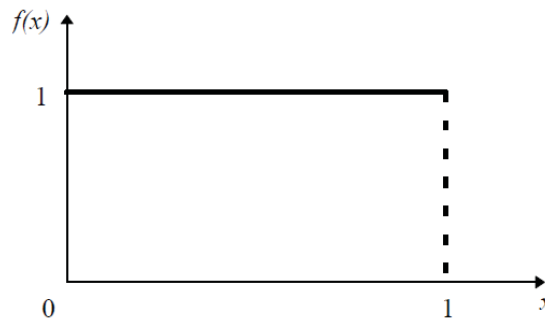


Figura 1: FDP para números aleatórios

O valor esperado para cada  $x_i$  é dado por:

$$E(x) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

A variância por sua vez é dada por:

$$V(x) = \int_0^1 x^2 dx - [E(x)]^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

Algumas das conseqüências da uniformidade e independência são as seguintes:

1. Se o intervalo de  $[0, 1]$  é subdividido em  $n$  classes, ou subintervalos de igual tamanho, o valor esperado de observações em cada intervalo será de  $N/n$ , onde  $N$  é o número total de observações.
2. A probabilidade de observar um valor em um particular intervalo é independente dos valores previamente obtidos.

## 1.2 Propriedades Desejadas aos Geradores de Números Aleatórios

Para melhor compreender por que existem vários métodos geradores de números aleatórios e por que alguns são considerados melhores do que outros, exemplifica-se como estes geradores operam. A técnica empregada mais comum faz uso de uma relação recursiva na qual, o próximo número na seqüência é uma função do último ou dois últimos números gerados, isto é,

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$$

Um exemplo desta função é:

$$x_n = 5 x_{n-1} + 1 \text{ mod } 16$$

Iniciando a série com  $x_0 = 5$ , obtemos  $x_1$  da forma que segue:

$$x_1 = 5(5) + 1 \text{ mod } 16 = 26 \text{ mod } 16 = 10$$

Os primeiros 32 números obtidos por meio deste procedimento são: 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5.

Observa-se que os valores de  $x$  são inteiros entre 0 e 15. Dividindo-os por 16, obtém-se uma seqüência de números aleatórios com valores entre 0 e 1. Para o exemplo acima os números serão:

0,6250	0,1875	0,0000	0,0625	0,3750	0,9375	0,7500	0,8125
0,1250	0,6875	0,5000	0,5625	0,8750	0,4375	0,2500	0,3125
0,6250	0,1875	0,0000	0,0625	0,3750	0,9375	0,7500	0,8125
0,1250	0,6875	0,5000	0,5625	0,8750	0,4375	0,2500	0,3125

Fica claro que, conhecida a função  $f$ , pode-se gerar novamente a seqüência sempre que se fornece o valor inicial de  $x_0$ . Este valor, usado para iniciar a seqüência, é conhecido por *semente*.

Uma importante observação sobre o exemplo dado, é que a função  $f$  é determinística. Desta forma, dada uma semente, pode-se afirmar, com 100% de certeza, qual serão os números na seqüência. Embora estes números sejam considerados randômicos, no sentido de serem aprovados em testes estatísticos de aleatoriedade, são, de fato, *pseudo-aleatórios*. Embora isto seja verdadeiro, o objetivo em qualquer método de geração é produzir uma seqüência de números aleatórios entre zero e 1, a qual possua propriedades semelhantes aquelas dos verdadeiros números aleatórios. Além disso, os números pseudo-aleatórios muitas vezes apresentam vantagens sobre os *verdadeiramente-aleatórios*. Por exemplo, quando se trata de empregá-los em simulações nas quais é desejável a possibilidade de se repetir o experimento simulado e, portanto, a seqüência de números aleatórios, da maneira exata como foi executada anteriormente. É claro que se o interesse for uma seqüência diferente, pode-se, a qualquer momento, fazer uso de valores diferentes para a semente. Desta forma, os geradores de números aleatórios nos fornecem um controle adicional sobre a possibilidade de reproduzir os resultados.

Outra importante característica evidenciada no exemplo apresentado, é que somente os 16 primeiros valores são únicos. O 17º é igual ao primeiro e o restante da seqüência é apenas uma repetição cíclica dos primeiros 16 números. Dito de outra forma, o gerador utilizado possui um *comprimento de ciclo* igual a 16 valores. Alguns geradores não repetem uma parte inicial do ciclo, chamada de *cauda*. Neste caso, o comprimento de seu *período* é dado pela soma do comprimento  $L$  da cauda mais o comprimento  $C$  do ciclo (Figura 2).

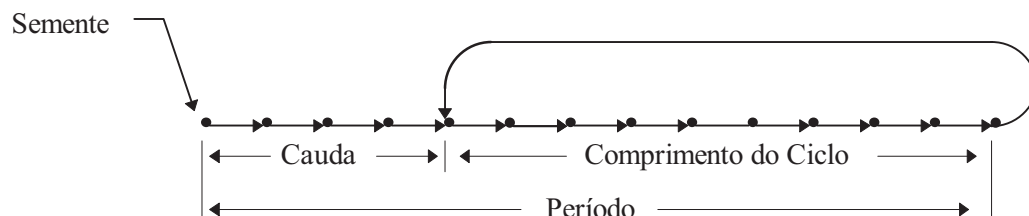


Figura 2: Comprimento do ciclo, cauda e período de gerador de números aleatórios

As propriedades desejadas em um gerador de números aleatórios são as seguintes:

1. *Deve ser computacionalmente eficiente:* Uma vez que as simulações podem necessitar da geração de, até mesmo, milhões de números aleatórios em cada execução, o tempo para processar cada geração deve ser mínimo;
2. *O período deve ser muito longo:* Um período curto pode fazer com que haja a reciclagem da seqüência de números aleatórios, resultando em uma repetição da seqüência de eventos. Como consequência, pode haver uma limitação do período útil de uma rodada de simulação.
3. *Os sucessivos valores devem ser independentes e uniformemente distribuídos:* A correlação entre os diversos valores gerados deve ser pequena. A correlação, se significativa, indica dependência.

A duas primeiras propriedades são facilmente alcançáveis. A terceira, no entanto, requer uma série de testes estatísticos para garanti-la. A literatura sob o tema [9] oferece e analisa uma

série de métodos geradores de números aleatórios consagrados. Neste texto introdutório, se trata, principalmente, do mais utilizado deles, isto é, o método Congruente Linear.

### 1.3 Métodos de Geração de Números Aleatórios

O método Congruente Linear é considerado o mais popular, entre tantos outros métodos geradores de números aleatórios e, por esta razão, será tratado com um pouco mais de detalhes. Além deste, se tratará também de algumas de suas extensões, às quais são reportados seqüências com longos períodos. Muitos outros métodos poderão ser encontrados nas referências como, por exemplo, em Law e Kelton (1991) e Bratley, Fox e Schrage (1987).

#### 1.3.1 Método Congruente Linear (MCL)

Este método, também conhecido como *método congruente misto*, foi primeiramente divulgado em um trabalho desenvolvido pelo Prof. D. H. Lehmer, em 1951, quando dos experimentos executados pelo computador ENIAC no MIT, conforme citado por Jain, [1991]. Em suas pesquisas ele descobriu que restos de sucessivas potências de um número possuem boas características de aleatoriedade. Ele obtinha o *n-ésimo* número de uma seqüência, tomando o resto da divisão da *n-ésima* potência de um inteiro *a* por um outro inteiro *m*. Isto é:

$$x_n = a^n \text{ mod } m$$

Uma expressão equivalente usada para o cálculo de  $x_n$  após calcular  $x_{n+1}$  é dada por:

$$x_n = ax_{n-1} \text{ mod } m$$

Os parâmetros *a* e *m* são chamados de *multiplicador* e *módulo* respectivamente. Ainda segundo Jain (1991), as escolhas de Lehmer para estes parâmetros foram  $a = 23$  e  $m = 10^8 + 1$ . Tais valores foram baseados na facilidade de implementação no ENIAC, que era uma máquina de oito dígitos decimais.

Muitas das propostas atuais são generalizações da proposta de Lehmer e seguem a seguinte fórmula:

$$x_n = ax_{n-1} + b \text{ mod } m$$

Os valores de  $x_n$  são inteiros entre 0 e  $m-1$ . As constantes *a* e *b* são positivas.

A popularidade dos geradores baseados neste método deve-se ao fato de serem facilmente analisados e de algumas garantias de suas propriedades dadas pela teoria das congruências [Dudewicz e Karian (1985)].

De maneira geral, a escolha dos valores de *a*, *b*, e *m* afeta o período e a autocorrelação na seqüência. Vários pesquisadores estudaram tais influências. O resumo destes resultados são apresentados nas referências Jain (1991), Banks (1996), Law (1991) e [Dudewicz e Karian (1985)]., e são apresentados abaixo:

1. O módulo de *m* deve ser grande. Uma vez que os valores de *x* estarão entre 0 e  $m-1$ , o período nunca será maior do que *m*;

2. Para que a computação de mod  $m$  seja eficiente,  $m$  deve ser uma potência de 2, isto é,  $2^k$ . Neste caso, o mod  $m$  poderá ser obtido truncando-se o resultado à direita por  $k$  bits.
3. Se  $b$  for diferente de zero, o máximo período possível  $m$  é obtido se e somente se:
  - a) os inteiros  $m$  e  $b$  sejam primos, um em relação ao outro, isto é, não possuam nenhum outro fator além de 1;
  - b) todo número primo que é um fator de  $m$ , é também um fator de  $a-1$ ;
  - c)  $a-1$  é um múltiplo de 4, se o inteiro  $m$  é múltiplo de 4.
4. Se  $b = 0$ , e  $m$  potência de 2, o maior período possível será  $P = m / 4$ , considerando que:  $x_0$  (semente) seja um número ímpar e o multiplicador ( $a$ ) seja dado por  $a = 8k + 3$  ou  $a = 8k + 5$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots$

Observe que todas estas condições são alcançadas se  $m = 2^k$ ,  $a = 4c + 1$  e  $b = \text{ímpar}$ . Neste caso,  $c$ ,  $b$  e  $k$  são inteiros positivos.

Um gerador que possua o maior período possível é chamado de *gerador de período completo*. Nem todos os geradores de período completo são igualmente bons. A questão da autocorrelação deve também ser considerada. Aqueles com baixa correlação são, obviamente, preferidos. O exemplo abaixo revela tais diferenças. Os dois geradores possuem o período completo, mas o primeiro apresenta uma correlação de 0,25 entre  $x_{n-1}$  e  $x_n$ , enquanto que no segundo esta correlação é menor do que  $2^{-18}$ .

$$X_n = (2^{34} + 1)x_{n-1} + 1 \pmod{2^{35}}$$

$$X_n = (2^{18} + 1)x_{n-1} + 1 \pmod{2^{35}}$$

Vejamos um exemplo de geração de números aleatórios usando o MCL.

### Exemplo 1

Use o MCL para gerar uma seqüência de números aleatórios entre zero e 1, com os seguintes parâmetros:  $x_0 = 27$ ,  $a = 17$ ,  $b = 43$  e  $m = 100$ : Observe que os valores inteiros gerados, serão todos entre zero e 99, em razão do módulo. Observe também, que estarão sendo gerados inteiros aleatórios e não números aleatórios. Tais inteiros podem ser transformados em números aleatórios ( $R_{i,s}$ ) entre zero e 1, aplicando-se a relação:

$$R_i = x_i / m, i = 1, 2, \dots$$

A seqüência de valores para  $x_i$  e subseqüentes  $R_i$ , é apresentada abaixo:

$$x_0 = 27$$

$$x_1 = (17 \cdot 27 + 43) \pmod{100} = 502 \pmod{100} = 2$$

$$R_1 = 2 / 100 = 0,02$$

$$x_2 = (17 \cdot 2 + 43) \pmod{100} = 77 \pmod{100} = 77$$

$$R_2 = 77 / 100 = 0,77$$

$$x_3 = (17 \cdot 77 + 43) \pmod{100} = 1352 \pmod{100} = 52$$

$$R_3 = 52 / 100 = 0,52$$

.

### 1.3.2 Método Congruente Linear Multiplicativo (MCLM)

Uma das derivações do MCL é o método congruente linear multiplicativo. Neste método, o valor do incremento  $b = 0$ . Desta forma, o gerador fica reduzido a seguinte expressão:

$$x_n = ax_{n-1} \text{ mod } m$$

Computacionalmente falando, os geradores baseados no MCLM são mais eficientes do que aqueles com base no MCL. Uma vez que não existe o envolvimento de adições, o tempo de processamento necessário se reduz. Tal eficiência pode ser ainda maior quando  $m$  assume uma potência de 2, fazendo com que, desta forma, a operação mod seja trivial. Podem-se destacar dois métodos multiplicativos derivados do MCLM, aqueles com  $m = 2^k$  e aqueles com  $m \neq 2^k$ . Abaixo um exemplo empregando o MCLM com  $m = 2^k$ .

#### Exemplo 2

Encontre o período para o gerador com os seguintes parâmetros:  $a = 13$ ,  $m = 2^6$ , e  $x_0 = 1, 2, 3$  e 4. A solução é dada na tabela 1.

$i$	$x_i$	$x_i$	$x_i$	$x_i$
0	1	2	3	4
1	13	26	39	52
2	41	18	59	36
3	21	42	63	20
4	17	34	51	4
5	29	58	23	
6	57	50	43	
7	37	10	47	
8	33	2	35	
9	45		7	
10	9		27	
11	53		31	
12	49		19	
13	61		55	
14	25		11	
15	5		15	
16	1		3	

Tabela 1: Variação dos períodos para várias sementes

Observa-se que com as sementes ímpares (1 e 3), é possível a obtenção de períodos com 16 elementos ( $P = m/4 = 64/4 = 16$ ). Para as sementes pares (2 e 4), os períodos obtidos têm comprimentos 8 e 4, respectivamente. Observa-se, também que  $a$  obedece a fórmula  $8k + 5$ , com  $k = 1$ , exigida para o alcance de períodos máximos.

Afirmou-se anteriormente, que qualquer método gerador de números aleatórios, incluindo o MCL, deve gerar uma seqüência de valores uniformes e independentes. Além de tais



propriedades, necessárias a um bom gerador, algumas propriedades secundárias também são requeridas. Dentre estas se salienta a da máxima densidade, isto é, a necessidade de que os valores assumidos por  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , não deixem grandes folgas ou “buracos” no intervalo  $[0, 1]$ . O espaço entre os valores de  $R_i$  deve ser uniforme e mínimo. No caso do gerador deste exercício, tais folgas são demasiadamente grandes. Os valores gerados para  $x_0 = 1$  são  $\{1, 5, 9, 13, \dots, 53, 57, 61\}$ . A folga neste caso pode ser calculada pela relação entre dois valores consecutivos, isto é:  $folga = 5/64 - 1/64 = 0,0625$ . Este é um valor considerado muito grande para a maioria das aplicações. O gerador exemplificado não é viável para, praticamente, qualquer tipo de aplicação devido ao curto período e a grande folga. O exemplo, no entanto, demonstra os cuidados necessários para com os parâmetros dos geradores.

A propósito, velocidade e eficiência computacional são elementos sempre da maior importância quando se trata do uso de computadores digitais. O exemplo a seguir, adaptado de Banks (1996), mostra que uma boa escolha do *módulo* sempre traz benefícios neste sentido.

### Exemplo 3

Velocidade e eficiência sempre são beneficiadas quando a escolha de  $m$  é uma potência de 2 ou muito próximo disso. Uma vez que a maioria dos computadores digitais usa uma representação binária dos números, a operação de cálculo do *resto* é sempre conduzida mais eficientemente quando  $m = 2^k$ . Após o cálculo de  $ax_i + b$ ,  $x_{i+1}$  é obtido pela retirada do dígito binário mais a esquerda de  $ax_i + b$  e pelo uso do  $k$ -ésimo dígito binário mais a direita.

Um exemplo proposto por Banks (1996), usando o formato decimal, (de mais fácil compreensão), ilustra, por analogia, tal mecanismo. Assume-se que  $m = 10^2 = 100$ ,  $a = 19$ ,  $c = 0$  e  $x_0 = 63$  e gera-se uma série de números aleatórios usando a equação do MLC.

$$x_0 = 63$$

$$x_1 = (19)(63) \bmod 100 = 1197 \bmod 100 = 97 \rightarrow (1197/100 = 11,97. k=2 \text{ dígitos à direita} = 97)$$

$$x_2 = (19)(97) \bmod 100 = 1843 \bmod 100 = 43$$

$$x_3 = (19)(43) \bmod 100 = 817 \bmod 100 = 17$$

.

No caso  $m$  é uma potência de 10, isto é,  $m = 10^k$  e a operação do módulo (ou de determinação do *resto*) é realizada tomando-se os  $k$  dígitos (decimais neste caso), mais à direita.

Para encerrar esta seção, apresenta-se um exemplo de um gerador ainda em uso em muitas rotinas para a geração de números aleatórios, presentes em programas comerciais. Os valores dos parâmetros satisfazem as condições para permitir  $P = m - 1$  (maior do que 2 bilhões). Os valores dos parâmetros são:  $m = 2^{31} - 1 = 2.147.483.647$  (que é um número primo),  $a = 7^5 = 16.807$  e  $c = 0$ . A semente  $x_0 = 123.456$ . Os primeiros números gerados serão:

$$x_1 = (7^5)(123.456) \bmod (2^{31} - 1) = 2.074.941.799 \bmod (2^{31} - 1) = 2.074.941.799$$

$$R_1 = 2.074.941.799 / 2^{31} = 0,9662$$

$$x_2 = (7^5)(2.074.941.799) \bmod (2^{31} - 1) = 559.872.160$$

$$R_2 = 559.872.160 / 2^{31} = 0,2607$$

$$x_3 = (7^5)(559.872.160) \bmod (2^{31} - 1) = 1.645.535.613$$

$$R_3 = 1.645.535.613 / 2^{31} = 0,7662$$

•  
•

Observe-se que nesta rotina a divisão é feita por  $m + 1$ , no lugar de  $m$ . No entanto, para grandes valores de  $m$  o efeito é insignificante.

Duas precauções importantes devem ser consideradas quando da implementação das rotinas computacionais referentes aos geradores aqui mencionados. A primeira delas diz respeito às propriedades dos métodos. Todo o processo computacional envolvido deve garantir tais propriedades. Para tanto, toda a computação deve ser feita de forma exata, sem arredondamentos. Em outras palavras, isto significa trabalhar com aritmética inteira sem erros de excesso ou “estouro” de capacidade (*overflow*). Em algumas linguagens a computação é realizada com números reais. Neste caso, os cuidados devem recair sobre os possíveis arredondamentos, os quais podem causar consideráveis reduções no período.

A segunda preocupação na implementação do MLC e suas derivações dizem respeito à grandeza do produto  $a \cdot x_{n-1}$ , o qual pode exceder a capacidade para o maior inteiro permitido no sistema. Uma possível alternativa para contornar este problema foi apresentada por Schrage (1979), citado por Jain (1991). A base do MLC foi apresentada na forma da seguinte identidade:

$$ax \bmod m = g(x) + mh(x)$$

onde

$$g(x) = (ax \bmod q) - r(x \operatorname{div} q)$$

e

$$h(x) = (x \operatorname{div} q) - (ax \operatorname{div} m)$$

onde,  $q = m \operatorname{div} a$  e  $r = m \bmod a$ . A operação  $A \operatorname{div} B$  é equivalente a dividir  $A$  por  $B$  truncando o resultado (isto é, removendo a parte fracionária do número). Pode ser mostrado que para todo os valores de  $x$  no intervalo  $1, 2, \dots, m-1$ , as expressões envolvendo  $g(x)$  são todas menores do que  $m-1$ . Também pode ser mostrado que se  $r < q$ ,  $h(x)$  será 0 ou 1 e poderá ser inferido a partir de  $g(x)$  e,  $h(x)$  é 1 se e somente se  $g(x)$  for negativo. Desta forma, a operação  $ax$ , que pode causar *overflow*, não precisará ser executada. O exemplo a seguir ilustra a destes conceitos.

#### Exemplo 4

Considere a implementação do seguinte MCLM:

$$x_n = 7^5 x_{n-1} \bmod (2^{31} - 1)$$

ou

$$x_n = 16.807 x_{n-1} \bmod 2.147.483.647$$

O produto de  $ax_{n-1}$  pode ser tão grande quanto  $16.807 \times 2.147.483.647 \approx 1.03 \times 2^{45}$ . A implementação deste gerador usando aritmética inteira produzira um *overflow*, a menos que o processador suporte inteiros de 46 bits ou mais. Neste caso, a implementação do método de Schrage, é feita da seguinte maneira:

$$a = 16.807$$

$$m = 2.147.483.647$$

$$q = m \operatorname{div} a = 2.147.483.647 \operatorname{div} 16.807 = 12.7773$$

$$r = m \operatorname{mod} a = 2.147.483.647 \operatorname{mod} 16.807 = 2.836$$

Jain (1991) apresenta uma rotina em PASCAL para este método, a qual é reproduzida abaixo:

---

```

FUNCTION Random (VAR x: INTEGER) : REAL;

CONST
    a = 16807;           (* Multiplicador *)
    m = 2147483647;     (* Módulo *)
    q = 127773;         (* m div a *)
    r = 2836;           (* m mod a *)

VAR
    x_div_q, x_mod_q, x_new: INTEGER;

BEGIN
    x_div_q := x DIV q;
    x_mod_q := x MOD q;
    x_new := a * x_mod_q - r * x_div_q;
    IF x_new > 0 THEN x := x_new ELSE x := x_new + m;
    Random := x/m;
END;

```

---

Segundo Jain (1991), esta rotina pode ser implementada em computadores cujo maior inteiro suportado seja  $2^{31} - 1$  ou maior do que isso. O mesmo autor apresenta ainda uma rotina para números reais, caso o maior inteiro suportado pelo sistema seja menor do que o especificado. Um bom teste para uma rotina que implemente este método, é calcular o valor de  $x_{10.000}$  iniciando com  $x_0 = 1$ . Uma correta implementação chegará ao valor 1.043.618.065.

## 1.4 Geração de Variáveis Aleatórias

Neste tópico trata-se dos métodos e procedimentos computacionais dedicados à geração de variáveis aleatórias com características específicas de alguma das diversas distribuições teóricas de probabilidades. A necessidade de tais variáveis pode ser atestada nos inúmeros exemplos de sistemas de filas e outros. Por exemplo, tempos entre chegadas, tempos de serviço ou demandas por produtos, são elementos muitas vezes de natureza aleatória e que necessitam serem incorporados aos modelos de simulação, mantendo estas características (Freitas, 2008). Uma série de procedimentos envolvendo técnicas de amostragem, estimação de parâmetros e testes de aderência, são necessários para que se possa bem determinar o tipo de distribuição teórica que determina o comportamento da(s) variável(eis) sob tratamento. Aqui, considera-se apenas a necessidade de geração computacional de tais variáveis. Todos os métodos baseiam-se na prévia geração de um número aleatório  $R$ , uniformemente distribuído sobre o intervalo  $(0, 1)$ . Para efeito de notação,  $x$  será uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (fdp)  $f(x)$ , caso contínuo e  $p(x)$  no caso discreto. Todos os métodos pretendem tratar o problema de expressar  $x$  como uma função explícita de  $R$ .

A literatura sobre o assunto reporta a existência de pelo menos cinco métodos básicos voltados para a geração de amostras aleatórias:

1. Transformação Inversa;
2. Transformação Direta;
3. Convolução;
4. Aceitação/Rejeição;
5. Propriedades Especiais;

O método a ser empregado na geração das variáveis aleatórias depende do tipo de distribuição e da eficiência que se está buscando no processo. Sobre as distribuições que serão tratadas a seguir, ora se fará uso de um ora de outro método, conforme os mesmos aparecem na literatura, reportando os dois critérios acima expostos. Neste texto introdutório ao assunto, se prefere não detalhar os métodos, em particular, mas mostrar a forma como se apresentam, quando empregados na obtenção de variáveis aleatórias que seguem esta ou aquela particular distribuição de probabilidades.

#### 1.4.1 Geração de Distribuições Discretas

Dentre as muitas distribuições teóricas discretas possíveis de serem artificialmente geradas apresentam-se, particularmente, os procedimentos associados às distribuições: Geométrica, Poisson e Empírica Discreta.

##### 1.4.1.1 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson se caracteriza pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$p(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

a qual representa a probabilidade de ocorrência de  $x$  sucessos, num dado intervalo de tempo. Onde  $\lambda$ , é o valor esperado do número de ocorrências por unidade de tempo.

Os procedimentos computacionais para a geração de uma variável aleatória Poisson, considerando a aplicação do método da Aceitação/Rejeição, são os seguintes:

1. Fazer  $n = 0$  e  $P = 1$ ;
2. Gerar um número aleatório  $R_{n+1}$  e substituir  $P$  por  $P \cdot R_{n+1}$ ;
3. Se,  $P < e^{-\lambda}$ , aceitar  $X = n$ , caso contrário, rejeitar  $n$  atual, fazer  $n = n + 1$ , e retornar aos procedimentos no passo 2.

A idéia básica por trás do método da Aceitação/Rejeição, é gerar um número aleatório e testar uma determinada condição de “aceitação”. Caso esta condição seja satisfeita, o valor gerado deve ser aceito. Caso contrário, os passos devem ser repetidos. Verifica-se, claramente, a necessidade de se gerar mais números aleatórios do que o efetivamente utilizado, uma vez que, nem sempre os valores das variáveis aleatórias geradas, satisfarão à condição necessária. Abaixo um exemplo.

#### Exemplo 5

Gerar dois números, segundo uma distribuição de Poisson, com  $\lambda = 0,2$ . Primeiramente, computa-se o valor de  $e^{-\lambda} = e^{-0,2} = 0,8187$ . Na seqüência, obtém-se um conjunto de números aleatórios e se iniciam os procedimentos estabelecidos nos passos de 1 a 3 anteriormente firmados, os quais são apresentados na tabela 2.

	Passo	Geração de $P, n$ e $X$
Geração do primeiro valor	1	$n = 0, P = 1$
	2	$R_1 = 0,4357; P = 1.R_1 = 0,4357$
	3	como $P = 0,4357 < e^{-0,2} < 0,8187$ ; aceita-se $X = 0$
	1 - 3	$R_1 = 0,4146$ leva a: $X = 0$
Geração do segundo valor	1	$n = 0, P = 1$
	2	$R_1 = 0,8353; P = 1.R_1 = 0,8353$
	3	como $P \geq e^{-\lambda}$ ; rejeita-se $n = 0$ e retorna-se ao passo 2 com $n = 1$
	2	$R_2 = 0,9952; P = P.R_2 = 0,8353.0,9952 = 0,8313$
	3	como $P \geq e^{-\lambda}$ ; rejeita-se $n = 1$ e retorna-se ao passo 2 com $n = 2$
	2	$R_3 = 0,8004; P = P.R_3 = 0,8313. 0,8004 = 0,6654$
	3	como $P = 0,6654 < e^{-0,2} < 0,8187$ ; aceita-se $X = 2$

Tabela 2: Valores para a variável aleatória Poisson

Como pode ser observado nos resultados, foram necessários 4 números aleatórios para gerar 2 variáveis de Poisson ( $X = 0$  e  $X = 2$ ). Numa longa simulação, com cerca de 1000 valores Poisson com  $\lambda = 0,2$ , serão necessários, aproximadamente  $1.000(\lambda + 1)$  ou 1200 números aleatórios. Segundo Schrage (1987) e Law (1991), para valores maiores do que  $\lambda = 15$ , a ineficiência computacional é muito grande e uma aproximação pela distribuição normal torna-se computacionalmente mais adequada.

#### 1.4.1.2 Distribuição Empírica Discreta

Uma distribuição empírica pode ser tanto discreta quanto contínua. Sua aplicação costuma estar associada à impossibilidade de determinação da distribuição teórica de probabilidades da variável aleatória sob estudo. Neste caso, ela é usada como uma aproximação da verdadeira distribuição.

Para gerar uma variável aleatória que tenha um comportamento semelhante ao determinado por distribuição empírica discreta conhecida, é necessário que, inicialmente, se determine as freqüências relativas acumuladas da distribuição. Para exemplificar os procedimentos, imagine que uma amostragem realizada sobre determinada variável aleatória discreta tenha resultado nos valores da tabela 3:

$x$	$p(x)$	$F(x)$
0	0,50	0,50
1	0,30	0,80
2	0,20	1,00

Tabela 3: Valores da variável aleatória  $x$  e de suas probabilidades

A função densidade de probabilidade (fdp),  $p(x)$ , da variável é dada por:

$$\begin{aligned} p(0) &= P(X = 0) = 0,50 \\ p(1) &= P(X = 1) = 0,30 \\ p(2) &= P(X = 2) = 0,20 \end{aligned}$$

e a função densidade de probabilidade acumulada,  $F(x) = P(X \leq x)$ , é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,5 & 0 \leq x < 1 \\ 0,8 & 1 \leq x < 2 \\ 1,0 & 2 \leq x \end{cases}$$

Uma vez que tais informações estejam disponíveis, aplica-se o método da transformação inversa que, neste caso, torna-se um processo de pesquisa em uma tabela de valores, num procedimento muito semelhante ao do método de Monte Carlo.

Exemplifica-se esta aplicação considerando a variável aleatória  $x$  da tabela 1.4. Suponha que se tenha gerado um número aleatório  $R_1 = 0,73$ . Traçando um gráfico da função densidade de probabilidade acumulada, verifica-se que para  $F(x) = R_1$ , o correspondente valor de  $x$  será 1, isto é,  $X = 1$  (ver Gráfico 1). Logo, graficamente verifica-se que  $R_1 = 0,73$  é transformado em  $X = 1$ .

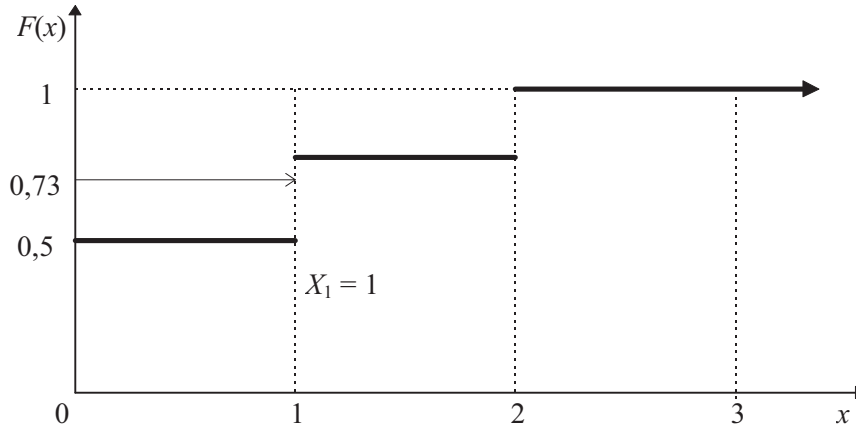


Gráfico 1: Transformação de  $R_1 = 0,73$  em  $X = 1$

Os procedimentos de busca são facilitados pela construção de uma tabela como a Tabela 4, abaixo.

$i$	Entrada $r_i$	Saída $x_i$
1	0,50	0
2	0,80	1
3	1,00	2

Tabela 4: Tabela de geração dos valores de  $X$

Primeiramente, o objetivo é descobrir o intervalo no qual se encontra  $R_1$ . Em geral, fazendo  $R = R_1$ , se,

$$F(x_{i-1}) = r_{i-1} < R \leq r_i = F(x_i)$$

então  $X_1 = x_i$ . Como  $r_1 = 0,5 < R_1 = 0,73 \leq r_2 = 0,8$  então  $X_1 = x_2 = 1$ . O esquema de geração é resumido como segue:

$$X = \begin{cases} 0, & R \leq 0,5 \\ 1, & 0,5 < R \leq 0,8 \\ 2, & 0,8 < R \leq 1,0 \end{cases}$$

### 1.4.2 Geração de Distribuições Contínuas

Dentre as muitas distribuições teóricas contínuas, possíveis de serem artificialmente geradas, apresentam-se, particularmente, os procedimentos afetos as distribuições uniforme, triangular, exponencial e normal.

#### 1.4.2.1 Distribuição Uniforme

Uma variável aleatória  $x$  tem distribuição uniforme sobre um intervalo  $[a, b]$ , se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

A técnica mais utilizada para a obtenção de uma variável aleatória uniformemente distribuída é a da transformação inversa. A fórmula é a seguinte:

$$x = a + (b - a)R$$

Os parâmetros necessários para a obtenção de uma variável com distribuição uniforme são apenas os valores extremos do intervalo  $[a, b]$ . Uma vez definidos, os seguintes passos devem ser considerados:

1. Gerar  $R$ ;
2. Calcular  $x = a + (b - a)R$ .

#### Exemplo 6

Gerar três valores de uma distribuição uniforme no intervalo  $[10, 50]$ . Usando uma tabela de valores aleatórios, obtém-se  $R_1 = 0,932$ ;  $R_2 = 0,105$  e  $R_3 = 0,687$ . Aplicando-se o método proposto obtém-se os resultados mostrados na Tabela 5:

Passo	Valor de $R_i$ e de $x_i$
1	$R_1 = 0,932$
2	$x_1 = 10 + (40)0,932 = 47,28$
1	$R_2 = 0,105$
2	$x_2 = 10 + (40)0,105 = 14,2$
1	$R_3 = 0,687$
2	$x_3 = 10 + (40)0,687 = 37,48$

Tabela 5: Valores para a variável aleatória uniforme

### 1.4.2.2 Distribuição Triangular

Uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição triangular se sua fdp é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, & b < x \leq c \end{cases}$$

onde:  $a \leq b \leq c$ . A moda  $b = 3 E(x) - (a + c)$ .

Pelo método da transformação inversa facilmente se obtém a fórmula para gerar amostras com distribuição triangular. A variável  $x$  com esta distribuição é obtida por:

$$x = \begin{cases} a + \sqrt{R(b-a)(c-a)}, & \text{se } 0 \leq R \leq \frac{b-a}{c-a} \\ c - \sqrt{(1-R)(c-b)(c-a)}, & \text{se } \frac{b-a}{c-a} < R \leq 1 \end{cases}$$

#### Exemplo 7

Gerar três valores de uma distribuição triangular com parâmetros (0, 1, 2). Usando uma tabela de valores aleatórios, obtém-se  $R_1 = 0,544$ ;  $R_2 = 0,747$  e  $R_3 = 0,449$ . Aplicando o método proposto chega-se a:

$$x = \begin{cases} \sqrt{2R} & 0 \leq R \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-R)} & \frac{1}{2} < R \leq 1 \end{cases}$$

Os três valores obtidos são apresentados na Tabela 6:

Passo	Valor de $R_i$ e de $x_i$
1	$R_1 = 0,544$
2	$x_1 = 2 - \sqrt{2(1-0,544)} = 1,045$
1	$R_2 = 0,747$



2	$x_2 = 2 - \sqrt{2(1 - 0,747)} = 1,288$
1	$R_3 = 0,449$
2	$x_3 = \sqrt{2(0,449)} = 0,947$

---

Tabela 6: Valores para a variável aleatória uniforme

### 1.4.2.3 Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição exponencial se sua fdp é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

O parâmetro  $\lambda$  é interpretado como sendo o número médio de ocorrências por unidade de tempo, enquanto a razão  $1/\lambda$  representa o tempo médio entre as ocorrências.

Aplicando-se o método da transformação inversa para a obtenção de uma variável aleatória  $x$  com distribuição exponencial resulta na seguinte relação:

$$x_i = -\lambda \ln(1 - R_i)$$

Uma vez que  $(1 - R_i)$ , da mesma forma que  $R_i$ , possui distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , pode-se substituir  $(1 - R_i)$  por  $R_i$  na expressão acima.

#### Exemplo 8

Gerar valores de uma distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda = 1$ . De acordo com o método exposto acima, cada  $R_i$  gera um correspondente  $x_i$  conforme mostrado na Tabela 7.

$i$	1	2	3	4	5
$R_i$	0,1306	0,0422	0,6597	0,7965	0,7696
$x_i$	0,1399	0,0431	1,0779	1,5920	1,4679

Tabela 7: Valores para a variável aleatória exponencial

### 1.4.2.4 Distribuição Normal

Uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição normal se sua fdp é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Onde  $\mu$  é a média da distribuição e  $\sigma$  é o desvio padrão.

O método utilizado para a obtenção de uma variável normal padronizada, isto é, com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , é conhecido como *método de Box-Muller*. Embora existam outras técnicas de obtenção

de variáveis normalmente distribuídas, este método é facilmente programável e apresenta bons resultados. Considere duas variáveis normais padronizadas,  $Z_1$  e  $Z_2$ , as quais correspondem às coordenadas de um ponto no plano (Gráfico 2).

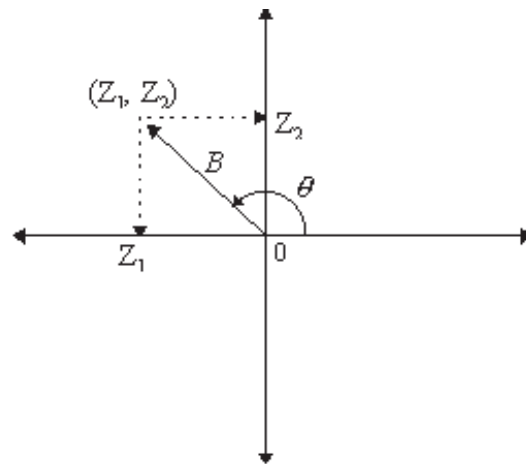


Gráfico 2: Representação polar do par de variáveis normais padronizadas

Este ponto pode ser representado em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} Z_1 &= B \cos \theta \\ Z_2 &= B \sin \theta \end{aligned}$$

Após algumas transformações matemáticas, é possível demonstrar que o raio  $B$  pode ser obtido por:

$$B = (-2 \ln R)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstra-se, também que o ângulo  $\theta$  é uniformemente distribuído entre 0 e  $2\pi$  radianos. A combinação destas relações nos fornece as duas equações abaixo, as quais permitem a obtenção de um par de variáveis aleatórias com distribuição normal padronizada, a partir de dois números aleatórios  $R_1$  e  $R_2$ .

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \ln R_1} \cos(2\pi R_2) \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \ln R_1} \sin(2\pi R_2) \end{aligned}$$

### Exemplo 9

Considerando as equações acima, gerar dois valores com distribuição normal padronizada a partir de  $R_1 = 0,1758$  e  $R_2 = 0,1489$ .

$$Z_1 = [-2 \ln (0,1758)]^{\frac{1}{2}} \cos (2\pi 0,1489) = 1,11$$

$$Z_2 = [-2 \ln (0,1758)]^{\frac{1}{2}} \sin (2\pi 0,1489) = 1,50$$

Para a obtenção de variáveis aleatórias normais  $x_i$ , com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , deve-se aplicar a transformação  $x_i = \mu + \sigma Z_i$  aos valores da normal padronizada. Por exemplo, para

transformar os valores obtidos em variáveis aleatórias normais com

$$\mu = 10 \text{ e } \sigma = 2, \text{ calcula-se: } x_1 = 10 + 2.(1,11) = 12,22 \quad x_2 = 10 + 2.(1,50) = 13,00$$

## 1.5 – Referências Bibliográficas (Parte 1)

Banks, J. e Carson, J.S., Discrete-Event System Simulation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

Banks, J. Carson, J.S. e Nelson, B.L., Discrete-Event System Simulation, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

Law, A.M. e Kelton, W.D., Simulation Modeling and Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, NY, 1991.

Bratley, P., Fox, B. L. e Schrage, L. E., A Guide to Simulation, 2nd. Ed., Springer-Verlag, NY, 1987.

Dudewicz E. J. e Karlin Z. A., Modern Design and Analysis of Discrete-Event Computer Simulations, IEEE Computer Society Press, 1985.

Freitas Filho, P.J., Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas, VisualBooks, 2008.

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Rio Grande do Sul - PUC- RS – Material didático - Uma Introdução aos Métodos de Geração de Números e Variáveis Aleatórias para Aplicações em Simuladores. Disponível em: <  
[http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/mia\\_ima\\_fafis/material/ead/outros/geracao\\_de\\_numeros\\_e\\_variaveis\\_aleatorias.pdf](http://www.pucrs.br/famat/viali/especializa/mia_ima_fafis/material/ead/outros/geracao_de_numeros_e_variaveis_aleatorias.pdf)>. Acesso em: 16 dez. 2015.

Scharage, L. E., A More Portable FORTRAN Random Number Generator, ACM Transactions on Mathematical Software, 5(2),132-138, 1979.

Jain, R., The Art of Computer Systems Performance Analysis, John Wiley & Sons, 1991.

Silva, V.L., Monte-Mor, J.A., Marcellino, F.J.M., Soma, N. Y., Interface Amigável para o Diehard e Avaliação de Geradores de Números Pseudo-Aleatórios, DCC-ITA, 2003

## **Parte 2 – Método de Monte Carlo/Simulação de Monte Carlo (Aplicado às Finanças)**

### **2.1 - Introdução**

Desde há muito que as técnicas de simulação são uma importante ferramenta para a resolução de problemas. Tratando-se de técnicas extremamente versáteis, podem ser utilizadas em praticamente todos os tipos de sistemas estocásticos, desde as filas de espera aos sistemas financeiros, passando pela gestão de stocks, o desenvolvimento de processos produtivos e de redes de distribuição, ou mesmo pelo cálculo da probabilidade de se conseguir terminar um dado projeto dentro do prazo acordado. O recurso à simulação torna-se indispensável quando o sistema probabilístico em consideração é demasiado complexo para que o problema em estudo seja solucionado, de forma exata ou, pelo menos, satisfatória, recorrendo a modelos matemáticos e estatísticos. Quando a complexidade inviabiliza esta alternativa, o que é frequente nos modelos financeiros, a simulação é frequentemente a única abordagem praticável. Um modelo de simulação visa assim “replicar” o comportamento de um determinado sistema, objeto de estudo, com o propósito de procurar detetar as interações existentes entre os vários elementos que o compõem – e que se traduzem sobretudo nas relações inputs/outputs. Por esse motivo, os outputs que tais modelos permitem obter apresentam-se habitualmente em termos de medidas selecionadas, que refletem o desempenho do sistema, face aos diferentes cenários considerados para os inputs. Depois, podem tomar-se decisões sobre o rumo a tomar. Tradicionalmente, as técnicas de simulação têm sido utilizadas na análise de problemas de dois tipos distintos:

1. Problemas teóricos nas áreas da Matemática, da Física e da Química.
2. Problemas relacionados com aplicações práticas.

Dentro do primeiro grupo, merecem destaque particular:

- estimação da área limitada por uma curva, incluindo a avaliação de integrais múltiplos. Claro que pode parecer confuso como se há de estabelecer a ligação entre o cálculo de um integral e uma distribuição de probabilidade, mas a verdade é que se faz.
- inversão de matrizes.
- resolução de equações diferenciais parciais.
- estudo do movimento de partículas num plano.

- estudo da difusão de partículas.
- resolução de sistemas de equações lineares.

Quanto ao segundo grupo, é muito comum:

- A simulação de sistemas de inventário, filas de espera, sistemas de distribuição, calendarização de ações de manutenção, ...
- A simulação do funcionamento de uma empresa, do comportamento dos consumidores, da evolução dos capitais necessários para o crescimento da empresa, dos mercados, incluindo os financeiros, da economia, ...
- A simulação de sistemas sociais e dos comportamentos, ...
- A simulação de sistemas biomédicos, ...
- A simulação de estratégias e táticas de combate.

O procedimento é de enorme simplicidade conceptual: consideram-se cenários alternativos para as variáveis de input, simula-se o funcionamento do sistema, dado cada um desses cenários, e analisam-se os outputs obtidos, cenário a cenário. Depois, podem tomar-se decisões sobre o rumo a tomar.

Por exemplo, na simulação do funcionamento de um certo balcão de um banco, dados o horário de atendimento, o número de funcionários e a procura, pode ter-se como objetivo calcular estimativas para o tempo médio de espera dos clientes e o tempo médio em que não há clientes para atender. Na simulação da gestão do stock de um artigo pode procurar avaliar-se o nível médio e o nível máximo de stock e os custos de posse, de encomenda e de ruturas. Na simulação da evolução do preço do ativo subjacente a uma dada opção procura normalmente determinar-se o prémio, ou a probabilidade da opção vir a ser exercida. Na simulação das taxas de juro futuras procura saber-se a probabilidade associada a certos quantitativos de retorno, ...

Uma experiência de simulação diferencia-se de uma experiência laboratorial, na medida em que pode ser inteiramente conduzida no computador. A partir da expressão das interações entre as componentes do sistema por meio de relações matemáticas, é possível recolher a informação necessária de modo muito semelhante ao que sucederia no mundo real (aparte, evidentemente, as simplificações introduzidas no modelo).

A natureza da simulação permite assim ter grande flexibilidade na representação de sistemas complexos, como são via de regra os modelos financeiros. No entanto, o desenvolvimento deste tipo de modelos pode ser muito exigente em termos de recursos.

## 2.2 - O Método de Monte Carlo

Na chamada simulação de Monte Carlo (MC) os modelos são construídos tendo explicitamente como input variáveis aleatórias, que representam as fontes de incerteza presentes no problema em estudo. Conhecidas as distribuições de probabilidade dessas variáveis aleatórias, é então possível correr o modelo um grande número de vezes, de tal modo que em cada uma das corridas as variáveis aleatórias incluídas assumam particulares valores concretos, ditados pelas respectivas distribuições.

Ou seja, o que se pretende é que a geração dos particulares valores concretos seja feita de modo a “reconstituir” a distribuição conjunta das variáveis de input.

Por exemplo, admitindo que é necessário gerar observações de um par aleatório  $(x, y)$  com f.p conjunta uniforme em  $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ , em 900 000 gerações independentes de observações do par aleatório deve esperar-se que cada uma das nove concretizações possíveis surja 100 000 vezes.

Dependendo do número de variáveis aleatórias input do modelo, e do conjunto dos valores possíveis para cada uma delas, assim poderá ser necessário efetuar milhares ou centenas de milhares de réplicas, antes de a experiência estar completa.

Uma experiência de simulação de Monte Carlo só se considera completa quando a distribuição de probabilidade (empírica) das variáveis output for conhecida com razoável certeza.

Esta necessidade de conhecer a distribuição das variáveis output (impossível de obter exatamente pela técnica tradicional) é muitas vezes incontornável, sobretudo no que diz respeito às caudas, que caracterizam probabilisticamente as situações extremas, normalmente as mais críticas em análises do risco.

Verifica-se assim que o Método de Monte Carlo (MMC) se impõe na simulação de *processos probabilísticos*, uma vez que se baseia muito simplesmente no princípio de

recorrer à amostragem para estimar o resultado pro curado. Nestas condições, a simulação deve ser tratada como uma *experiência aleatória*. Ao contrário das soluções que os modelos matemáticos determinísticos fornecem, pontuais e sem que seja possível atribuir -lhes uma probabilidade de concretização, os resultados produz idos quando se corre um modelo de simulação estocástica são *observações de variáveis aleatórias* , com todas as consequências inerentes, estando inclusivamente sujeitas ao erro de amostragem. Isto significa que qualquer inferência relativa ao desempenho do modelo de simulação tem que se sujeitar aos testes estatísticos apropriados.

Como é evidente, o conhecimento das distribuições de probabilidade é a for ma mais adequada de descrever o comportamento dos fatores de incerteza existentes e a sua influência sobre os resultados. Alguns exemplos das distribuições mais utilizadas e das aplicações tradicionais:

- *Normal* – Distribuição simétrica completamente especificada pelo conhecimento da média e do desvio padrão e com aplicações tão díspares como o peso e a altura ou as taxas de inflação e os preços da energia.
  - *Lognormal* – Com assimetria positiva, é usada para re presentar grandezas que não assumem valores negativos, mas têm um poten cial de cr escimento ilimitado , caso do valor de certos ativos imobiliários, de algumas ações ou das reservas de petróleo.
  - *Uniforme* – Outra distribuição simétrica, bastand o conhecer o mínimo e o máximo dos valores possíveis; é adequada na modelização de certos custos de fabrico.
  - *Triangular* – Cara cterizada pelo mínimo, pelo máximo e pela moda, usa -se par a a descrição do volume de vendas por unidade de tempo ou do nível do stock de certo tipo de bens num armazém, ao longo do tempo.
  - *Exponencial* – Especificada pela média, aplica-se à modeliz ação de tem pos de espe ra por certo tipo de ocorrências, ou das durações de alguns equipamentos.
- No decorrer de uma simulação de M C, realiza-se um processo iterado de amostragem casual, que consiste em g erar uma observação de cada uma das variáveis aleatórias consideradas como input e calcular os correspondentes valores d as variáveis de output. Estes resultados são então objeto de registo. Depois de um número de iterações considerado suficiente, constrói-se a distribuição das variáveis de output, cuja análise é determinante para alguma eventual tomada de decisão. Consegue-se com este processo

um quadro muito completo de toda a situação, que contempla não só aquilo que poderá vir a acontecer, mas também a probabilidade com que poderá vir a acontecer. As vantagens do MMC, comparativamente a uma análise do tipo determinista, ou de estimação de ponto único, como também se diz, são indiscutíveis:

- Fornece resultados probabilizados.
- Possibilita análises gráficas, pois as múltiplas iterações dão origem a uma enorme quantidade de observações estatísticas, que podem ser objeto dos mais variados tratamentos gráficos, com todas as vantagens interpretativas daí decorrentes.
- Viabiliza análises de sensibilidade, sobretudo quando é importante descobrir quais os fatores que têm maior responsabilidade pelos resultados particularmente gravosos.

- Permite a deteção das combinações de fatores mais arriscadas, pois os analistas conseguem determinar com exatidão os cenários de input associados a certos resultados, informação inestimável para a análise subsequente. Tal não é possível de forma tão integral com os modelos deterministas, a menos que se conheça tão bem o sistema que *a priori* se saiba quais são esses cenários. Mas a probabilidade de alguns serem ignorados é muito maior do que quando se fazem milhares, ou milhões, de corridas do sistema.

- Facilita a correta introdução das relações de interdependência existentes entre as diversas variáveis de input, o que é da maior importância para a precisão dos resultados. Para além de todas as vantagens enumeradas, acresce que o método de MC é muitas vezes a única ferramenta ao dispor dos analistas financeiros, sobretudo quando se trata de efetuar cálculos com plexos na determinação dos preços de certos produtos, ou a avaliação de determinados riscos. Há problemas, com efeito, em que só com uma simulação estocástica bem conduzida é possível chegar a uma solução que mereça alguma confiança por parte dos decisores.

A finalizar este ponto, uma nota histórica. A conceção do MMC é atribuída a um matemático de origem polaca radicado nos Estados Unidos, Stanislaw Ulam. Segundo parece, a ideia ter-lhe-á surgido quando se ocupava com o cálculo da probabilidade de conseguir ganhar um jogo de Solitário. As condições da génese levaram um seu colaborador, Nicholas Metropolis, a dar ao procedimento o nome de Método de Monte Carlo (MMC, em atenção aos múltiplos casinos que há na cidade com o mesmo nome. Os dois publicaram em 1949 um artigo conjunto intitulado *The Monte Carlo Method*, no *Journal of the American Statistical Association*.



## 2.3 - Inversão da Função de Distribuição

Foi atrás amplamente salientado que um dos aspetos dominantes no uso da simulação de MC está associado à necessidade de descrever o problema em estudo também por meio de uma distribuição de probabilidade adequada, da qual as amostras com as observações das variáveis de input são extraídas.

Nos modelos de simulação, o processo de amostragem a partir de qualquer distribuição alicerça-se no uso de números aleatórios no intervalo  $[0,1]$ , os quais devem satisfazer as seguintes propriedades estatísticas:

1. Ter distribuição uniforme;
2. Os sucessivos valores têm que ser gerados de uma forma totalmente aleatória, ou seja, as sucessivas observações devem poder associar-se a variáveis aleatórias independentes. Dois resultados teóricos muito conhecidos (a chamada transformação uniformizante)

fundamentam este uso de números aleatórios no intervalo  $[0, 1]$ . (ver Murteira, pp 270-271).

Teorema 1: Se  $X$  é v.a. do tipo contínuo, com função de distribuição  $F(x)$ , então a v.a.  $U = F(X)$  tem distribuição  $\mathcal{U}(0,1)$ .

Teorema 2: Se  $F(x)$  é função de distribuição de uma v.a., e se  $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ , então existe uma função  $X = \Psi(U)$  com função de distribuição  $F(x)$ .

Uma outra formulação, que destaca melhor como se há de usar a distribuição  $\mathcal{U}(0,1)$  no domínio da simulação de MC, é a seguinte.

Teorema 3: Seja  $X$  uma v.a. com função de distribuição  $F(x)$ , estritamente crescente. Se  $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ , então  $F^{-1}(U)$  é uma v.a. identicamente distribuída a  $X$ .

A demonstração é imediata, bastando notar que  $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow U \leq F(x)$ , donde resulta que  $P[F^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F(x)]$ , pois acontecimentos equivalentes têm

iguais probabilidades. Mas, sendo  $P[U \leq F(x)] = \int_{-\infty}^{F(x)} f(u)du = \int_0^{F(x)} 1du = F(x)$ , então

$P[F^{-1}(U) \leq x] = F(x)$ . Fica prova do que  $P[F^{-1}(U) \leq x] = P[X \leq x]$ , ou seja, que  $F^{-1}(U)$  é uma v.a. identicamente distribuída a  $X$ .

O resultado anterior exige que  $F$  seja estritamente crescente, de modo a garantir a existência da inversa. Nos casos em que  $F$  não é estritamente crescente, como sucede se  $X$  é v.a. discreta, recorre-se à chamada inversa generalizada, em que para cada  $u \in [0,1]$  se define  $F^{-1}(u) = \inf \{x \in R : F(x) \geq u\}$ .

Torna-se assim fácil gerar amostras de qualquer população  $X$ : basta gerar amostras aleatórias extraídas da população  $U \sim \mathcal{U}(0,1)$  e transformá-las em amostras aleatórias da população  $X$  desejada, a partir da relação  $X = F^{-1}(U)$ .

Claro que, quando não se dispõe da expressão analítica de  $F$ , ou esta função não é invertível, é necessário encontrar alternativas. A distribuição Normal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  é uma destas distribuições. Para a resolução do problema há vários métodos, entre os quais o método direto, ou método de Box-Muller (1958).

O método direto inicia-se com a geração de dois números aleatórios com distribuição uniforme em  $[0,1]$ , representem-se por  $u_1$  e  $u_2$ ;

Prossegue com o cálculo de

$$z_1 = \sin(2\pi u_2) \sqrt{-2 \log_e u_1} \quad \wedge \quad z_2 = \cos(2\pi u_2) \sqrt{-2 \log_e u_1},$$

que se demonstra fornecer duas observações,  $z_1$  e  $z_2$ , da distribuição Normal Standard;

Fica completo com a transformação de  $z_1$  e  $z_2$  nas observações  $x_1 = \mu + \sigma z_1$  e  $x_2 = \mu + \sigma z_2$ , que já são da distribuição  $N(\mu, \sigma)$ , como se pretendia.

Para a simulação de uma v.a.  $Y$  com distribuição log normal  $(\mu, \sigma)$  faz-se como que uma “extensão” deste método - pois diz-se que  $Y$  tem distribuição log normal  $(\mu, \sigma)$  quando  $X = \ln Y$  tem distribuição  $N(\mu, \sigma)$ .

Assim, depois de se obter uma observação  $x$  da distribuição normal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , com o método direto, basta ter em atenção que  $y = e^x$  é a observação desejada.

## 2.4 - Algumas Aplicações

Nas aplicações seguintes, vai recorrer-se ao Excel, mas podia ter-se usado o *Mathematica*, o *Matlab*, o C++, o R ... Relativamente ao Excel, há duas abordagens básicas: a trivial folha de trabalho ou, quando a dimensão/complexidade da situação em estudo não o permite, o uso da linguagem *VBA (Visual Basic for Applications)*. Nestes exemplos adopta-se a primeira, que consiste em construir um modelo compacto do problema numa linha da *worksheet* e replicá-lo tantas vezes quantas as necessárias nas linhas seguintes, aproveitando as virtualidades das funções *copy* e *paste* do programa. Para evitar que o Excel refaça automaticamente a simulação, sempre que se realiza alguma operação na folha de trabalho, pode escolher-se a opção *Manual* no menu das *Calculations*, ou usar a opção *Paste Special... Values and number formats*, no menu *Edit*, para copiar toda a folha com os cálculos para uma nova folha.

Caso 1: No dia 1 de Janeiro de 2011 um investidor aplicou 10000 pelo prazo de 3 anos, nas condições seguintes. A 31 de Dezembro de 2011, 2012 e 2013 será lançado um dado equilibrado: se a pontuação for 5 ou 6, é aplicada a taxa de 5% ao valor acumulado no início do ano; se a pontuação for 1, 2, 3 ou 4, é aplicada a taxa de 0%. Calcule-se o valor mínimo e também o valor máximo possíveis para o valor acumulado ao fim dos 3 anos e as respetivas probabilidades. Calcule-se ainda a probabilidade de se obter um valor acumulado inferior ao valor acumulado esperado. (Resolvido na aula)

Caso 2: Volte a resolver-se o Caso 1, admitindo agora que o prazo da aplicação é de 5 anos e que, se a pontuação for 5 ou 6, é aplicada a taxa de 5% ao valor acumulado no início do ano; se a pontuação for 2, 3 ou 4, é aplicada a taxa de 0%; e que, se a pontuação for 1, é aplicada a taxa de -2%.

O valor mínimo e o valor máximo são de cálculo imediato:  $\min A_5 = 10000 = 9039.208$ , com probabilidade  $(1/6)^5 = 0.0001286$ . (0.98)<sup>5</sup>

$\max A_5 = 10000(1.05)^5 = 12762.81563$ , com probabilidade  $(1/3)^5 = 0.004115$ .

Quanto ao cálculo de

$$P[A_5 < E[A_5]] = P[A_5 < 10000(1 + E[I])^5] = P[A_5 < 10000(1 + 0,01(3))^5] = P[A_5 < 10684.683],$$

já é tentador aplicar o MMC, embora continue a tratar-se de um problema muito elementar, relativamente ao qual ainda é possível calcular a distribuição exata de  $A_5 = 10000(1 + I_1)(1 + I_2)(1 + I_3)(1 + I_4)(1 + I_5)$ .

Definindo as v.a.  $I_t, t = 1, \dots, 5$ , que representam as taxas de juro a aplicar nos 5 anos (e que, pelas condições do enunciado são claramente i.i.d.), é imediato que as 5 têm função de distribuição idêntica à de uma v.a.  $I$ , tal que

$$F(i) = P[I \leq i] = \begin{cases} 0, & i < -2\% \\ 1/6, & -2\% \leq i < 0\% \\ 2/3, & 0\% \leq i < 5\% \\ 1, & i \geq 5\% \end{cases}$$

Então, de acordo com o que se viu, a cada  $u \in [0,1]$  gerado aleatoriamente vai fazer-se corresponder uma das três taxas possíveis, de acordo com a transformação:

$$0 \leq u \leq 1/6, \quad \Rightarrow i = -2\%$$

$$1/6 < u \leq 2/3, \quad \Rightarrow i = 0\%$$

$$2/3 < u \leq 1 \quad \Rightarrow i = 5\%$$

Para cada trajetória do processo simulam-se as 5 taxas anuais, o que vai permitir obter uma observação de  $A_5$ ; tratando-se de uma simulação de MC repete-se o processo de forma independente tantas vezes quantas as necessárias para, dada a *distribuição* das v.a. input ( $t, t = 1, \dots, 5$ ), se obter a *distribuição* empírica dessa v.a. output ( $A_5$ ).

Usando o Excel, tem-se

Comandos nas células A2, C2, E2, G2, I2: =RAND()

Comando em B 2: =IF(A2<=1/6;-0,02;IF(A2<=2/3;0; 0,05)) - comandos análogos em D2, F2, H2, J2.

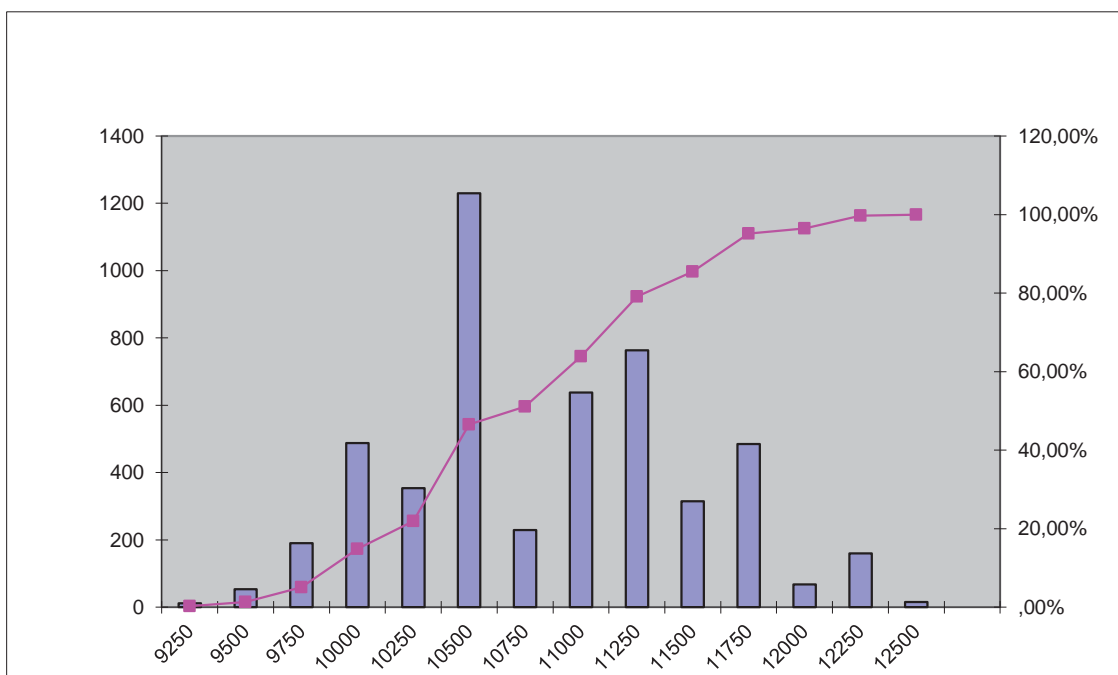
Comando em K2: =10000\*(1+B2)\*(1+D2)\*(1+F2)\*(1+H2)\*(1+J2)

Aproveitando as funcionalidades do programa, é imediata a replicação de, por exemplo, 5000 trajetórias, gerando assim 5000 observações de  $A_5$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		$i_1$		$i_2$		$i_3$		$i_4$		$i_5$	$A_5$
2	0,139307	- 0,02	0,423575	0	0,525444	0	0,205491	0	0,700417	0,05	10290,00000
3	0,609711	0	0,601024	0	0,338185	0	0,258833	0	0,651613	0	10000,00000
...											
5001	0,697201	0,05	0,554567	0	0,339087	0	0,006573	-0,02	0,509787	0	10290,00000

Recorrendo à *Data Analysis*, podem obter-se as estatísticas de sumário, o histograma e um esboço da distribuição empírica de  $A_5$ , com estas particulares 5000 observações.

Mean	10692,50345	Skewness	0,312916964
Standard Error	9,05517534	Range	3539,134025
Median	10588,41	Minimum	9223,6816
Mode	11025	Maximum	12762,81563
Standard Deviation	640,2975888	Sum	53462517,23
Sample Variance	409981,0022	Count	5000
Kurtosis	-0,27668221	Confidence Level (95,0%)	17,7521152



Para calcular uma estimativa da probabilidade pedida, basta converter cada observação de  $A_5$  na observação da correspondente Indicatriz de Bernoulli.

$A_{5i} < 10684.683 \Rightarrow$  observa-se um 'sucesso';  $A_{5i} \geq 10684.683 \Rightarrow$  observa-se um 'insucesso'; a estimativa procurada obtém-se dividindo o número de sucessos pelo número de observações (5000). Usando o Excel

Comando em L2: =IF(K2<10884,683;1;0)

	...	K	L
1		$A_5$	
2		10290,00000	1
3		10000,00000	1
...			
5001		10290,00000	1

Para calcular a estimativa da probabilidade: =sum(L2:L5001)/5000

Com a particular amostra simulada, a estimativa é 0,511 – o histograma já dava alguma indicação do valor aproximado.

Questões que permanecem:

- 5000 será uma dimensão suficiente (note-se que o mínimo nunca chegou a ser observado)?
- Outra amostra com a mesma dimensão forneceria resultados significativamente diferentes destes?

É preciso repetir o processo até que as dúvidas sejam, tanto quanto possível, dissipadas.

Caso 3: Retome-se o Caso 1, admitindo que o dado foi posto de parte e que as melhores previsões indicam que as 3 taxas efectivas anuais vão ter distribuição uniforme no intervalo  $[\frac{1}{2}\%, 5\%]$ . Para além de refazer os cálculos então pedidos, estime-se também a probabilidade de não haver agora qualquer valorização do capital aplicado.

(Tratado na aula)

Caso 4: Considere-se novamente o Caso 3.

4.1 Admita-se que as 3 taxas efectivas anuais terão distribuição exponencial com média igual à da distribuição uniforme Calcule-se agora a probabilidade de a valorização média anual do capital aplicado não exceder 1%.

(Tratado na aula)

Refira-se adicionalmente que o Excel gera observações de uma população com distribuição gama de parâmetros  $n$  e  $\lambda = \alpha$ . (O valor esperado é o produto dos dois). O comando é

=GAMMAINV(rand();n;1/α)

4.2 Admita-se que as 3 taxas efectivas anuais terão distribuição normal com média e variância iguais à da distribuição uniforme. Calcule-se a probabilidade de a valorização média anual do capital aplicado pertencer ao intervalo  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ .

(Tratado na aula; recordar o Método de Box and Muller ou a aproximação dada no texto de apoio ou ver ainda as pp. 36-38 de Korn *et al.*)

Claro que o Excel também gera observações de uma população com distribuição Normal Standard, usando o comando

=NORMSINV(RAND())

E gera observações de uma população com distribuição Normal de média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , com o comando

=NORMINV(RAND();μ;σ)

4.3 Admita-se que a v.a.  $1 + i_t, t = 1, 2, 3$ , terá distribuição Lognormal com parâmetros  $\mu = \sigma = 0.07$ . Calcule-se a probabilidade de a valorização média anual do capital aplicado ser superior a  $E[i_t]$ .

(Tratado na aula)

O Excel também gera observações de uma população com distribuição Lognormal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  (que agora já não correspondem à média nem ao desvio padrão da distribuição, como se sabe). Comando:

=LOGINV(RAND();μ;σ)

## 2.5 - Princípios Básicos do Método de Monte Carlo

### 2.5.1 - Introdução

Para além da transformação uniformizante, de que já se falou, e tendo sempre presente que se está no domínio da amostragem, das distribuições por amostragem e da estimação, isto é, no domínio da Estatística, há alguns princípios básicos fundamentais para um correcto entendimento do MMC.

Como se consegue depreender das aplicações atrás vistas, o objetivo da aplicação do método é muitas vezes calcular as probabilidades de acontecimentos relevantes, o que se consegue calculando os valores esperados de variáveis aleatórias convenientemente definidas.

Este propósito é alcançado a partir do cálculo da média aritmética dos resultados obtidos com um grande número de repetições de experiências aleatórias, conduzidas de modo que em todas elas a distribuição dessas variáveis aleatórias esteja subjacente.

Para ilustrar, recorde-se o Caso 2 em que, para além do valor mínimo e do valor máximo, e respectivas probabilidades (que podem ser calculados sem recorrer ao MMC), se pedia a probabilidade de ser obtido um valor acumulado (v.a.  $A_5$ ) inferior ao valor acumulado esperado,  $E[A_5] = 10\,684,683$  o que já exigia a recolha de uma amostra por simulação de MC. Começou então por se considerar uma amostra com 5000 valores acumulados e a cada uma das 5000 v.a.  $A_{5i}$ , associou-se uma v.a.

Indicatriz de Bernoulli,  $X_i$ ,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{se } A_{5i} \geq E[A(5)] \\ 1, & \text{se } A_{5i} < E[A(5)] \end{cases}, i = 1, \dots, 5000,$$

em que a probabilidade de sucesso é

$$p = P[X_i = 1] = P[A_{5i} < E[A_5]].$$

Por outro lado, como se sabe,

$$p = E[X],$$

pelo que, para estimar a probabilidade  $p$ , é suficiente estimar o valor esperado  $E[X]$ .



Uma estimativa para  $p$  foi assim obtida calculando a média aritmética dos 5000 valores assumidos pelas indicatrizes de Bernoulli,  $(x_1, x_2, \dots, x_{5000})$ , face à particular amostra  $(a_{51}, a_{52}, \dots, a_{55000})$  obtida. Por outras palavras: uma estimativa para  $p$  é a média de uma amostra com 5000 observações extraídas da população  $X \sim B(1, p)$ , pois todas as variáveis são identicamente distribuídas.

### 2.5.2 - Formulação Geral

Considere-se uma v. a.  $X$  definida num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e seja  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de v.a. i.i.d. a  $X$ . Seja  $E[X] = \mu$  e  $Var(X) = \sigma^2$  e admita-se que se quer estimar  $\mu$ .

Resultados já conhecidos, que é conveniente recordar, para a resolução do problema de estimação em causa:

1. A lei forte dos grandes números (na sua forma mais simples, ou versão de Kolmogorov, que é suficiente no que diz respeito ao MMC), segundo a qual, considerando a medida de probabilidade  $P$ , se tem para quase todos os resultados  $\omega \in \Omega$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \xrightarrow{qc} \mu.$$

Por outras palavras, pode dizer-se que a sucessão das médias aritméticas das realizações de  $X_i$  converge quase certamente para a média da população  $X$ , que se quer estimar.

$\bar{X}_n$  é um estimador consistente de  $\mu$ .

[Note-se que se diz que uma sucessão de v.a.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge quase certamente para  $c$ ,  $X_n \xrightarrow{qc} c$ , quando  $X_n - c \xrightarrow{qc} 0$ ; diz-se que  $(X_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$  converge quase certamente para zero quando

$$P(A) = 1, A = \{\omega \in \Omega = \Omega \times \Omega \times \Omega \times \dots, : \lim X_n(\omega) = 0\}.$$

2. A média da amostra (ou estimador de Monte Carlo) é um estimador não enviesado da média da população, ou seja, sendo  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  uma amostra aleatória recolhida da população  $X$ ,

$$E[\bar{X}_N] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \mu.$$

Mais ainda, a variância do erro de estimação é  $Var(\bar{X}_N - \mu) = Var(\bar{X}_N) \equiv \frac{\sigma^2}{N}$ .

Daqui se conclui que o estimador de MC goza de boas propriedades. Também se pode concluir que o desvio padrão de  $\bar{X}_N$  é de ordem  $O(1/\sqrt{N})$ , o que indica ser necessário multiplicar a dimensão da amostra em 100 observações para se reduzir o desvio padrão em 0.1. Observa-se assim que a convergência do método é bastante lenta.

3. O uso do desvio padrão do erro cometido como medida da precisão obtida com o MMC pode ser justificado invocando o TLC, pois  $\sigma$  caracteriza a dispersão dos valores da distribuição normal em torno da média.

Assim, nas condições de 2.,

$$\frac{\bar{X}_N - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1).$$

4. O TLC garante que, para  $N$  suficientemente grande,  $\bar{X}_N \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$ ; tal conhecimento permite a obtenção de intervalos de confiança para  $\mu$ . Considerando um nível de confiança aproximado  $(1 - \alpha)$ , vem

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right] = \left[ \bar{X}_N - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right],$$

onde  $z_{1-\alpha/2}$  é o quantil de ordem  $1 - \alpha/2$  da distribuição Normal-Standard, o que é equivalente a dizer-se que verifica a condição  $\Phi\left(z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2$ .

Normalmente, também é necessário estimar o desvio padrão  $\sigma$  da população, para o que se usa como estimador o desvio padrão corrigido da amostra (igualmente um estimador centrado),

$$\bar{\sigma}_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2} = \sqrt{\frac{N}{N-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{N} - \bar{X}_N^2 \right)}.$$

Quando se fixa  $\alpha = 0.05$ , ou seja, quando se pretende obter um intervalo de confiança a 95%,  $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$ ; usualmente, dado que se trata de um cálculo que envolve aproximações, considera-se então

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - 2 \frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i + 2 \frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right] = \left[ \bar{X}_N - 2 \frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + 2 \frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right].$$

[Com  $\alpha = 0.1$  - intervalo de confiança a 90% -  $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$ ; com  $\alpha = 0.01$  - intervalo de confiança a 99% -  $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.576, \dots$ ]

#### OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Todas as considerações anteriores se podem aplicar, com as necessárias adaptações, ao caso em que é necessário estimar uma quantidade  $\theta = E[g(\mathbf{X})]$ , sendo

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  um vetor aleatório em  $\mathbf{R}^N$ ,  $g(\cdot)$  uma função de  $\mathbf{R}^N$  em  $\mathbf{R}$  e  $E[|g(\mathbf{X})|] < +\infty$ . Note-se que  $\mathbf{X}$  pode representar uma trajectória de um processo estocástico, por exemplo, o preço de um dado ativo ao longo do tempo; nesse caso,  $X_i$  representaria o preço do ativo no momento  $i$ .

Atrás, como o objetivo era estimar  $\mu$ , a média da população, tomou-se

$g(\mathbf{X}) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$ , a média dos valores observados da v.a., cujo valor esperado

é exatamente  $\mu$ . De modo semelhante, quando o objetivo é calcular a probabilidade de se realizar um determinado acontecimento  $A$ , expresso em função da v.a.  $X_i$  (por vezes, o acontecimento  $A$  vem expresso ainda em função dos acontecimentos elementares  $\omega \in \Omega$ ), a questão é resolvida definindo as v.a. Indicatrizes de Bernoulli

$I_A(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i \in A \\ 0, & \text{se } X_i \notin A \end{cases}$ , pois da teoria das probabilidades sabe-se que  $E[I_A] = P(A)$ .

Mais uma vez, e pelas mesmas razões, também agora a estimativa de MC para  $P(A)$  se determina calculando a média da amostra  $\mathbf{I} = \{I_A(X_1), I_A(X_2), \dots, I_A(X_N)\}$ , relativa às observações de  $I_A(X_i)$ , as quais são obtidas a partir da amostra  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ . Isto significa que  $g(\mathbf{X})$  é igual à proporção de sucessos na amostra das  $N$  observações

independentes. Como esta proporção não é mais do que a frequência relativa das realizações de  $A$  na amostra, vem

$$g(\mathbf{X}) = rf_N(A) = \frac{I_A(X_1) + I_A(X_2) + \dots + I_A(X_N)}{N}.$$

Sabendo-se igualmente ser  $Var[I_A] = P(A)(1 - P(A))$ , pode tomar-se como estimador da variância  $\hat{\sigma}^2 = rf_N(A)(1 - rf_N(A))$ . O intervalo de confiança para  $P(A)$  com um nível aproximado de 95% é

$$\left[ rf_N(A) - 2\sqrt{\frac{rf_N(A)(1 - rf_N(A))}{N}}, rf_N(A) + 2\sqrt{\frac{rf_N(A)(1 - rf_N(A))}{N}} \right],$$

caso particular para as populações de Bernoulli do intervalo anteriormente apresentado

$$\left[ \bar{X}_N - 2\frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + 2\frac{\bar{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right], \text{ pois } rf_N(A) = \bar{X}_N.$$

Exemplo com os resultados da simulação do preço da *call* europeia:

Intervalo de confiança a 95% para o valor da opção:

$$\left[ 1,16 - 1,96 \frac{0,9041}{\sqrt{2500}}, 1,16 + 1,96 \frac{0,9041}{\sqrt{2500}} \right] = [1,142, 1,178].$$

Intervalo de confiança a 95% para a probabilidade de se exercer a opção:

$$\left[ 0,8804 - 1,96 \sqrt{\frac{0,8804(1 - 0,8804)}{2500}}, 0,8804 + 1,96 \sqrt{\frac{0,8804(1 - 0,8804)}{2500}} \right]$$

$$= [0,8676, 0,8931].$$

## 2.6 - Referências Bibliográficas (Parte 2)

Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica (CEMAPRE). Material didático - Método de Monte Carlo Aplicado às Finanças. Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG). Universidade de Lisboa. Disponível em: <  
<http://cemapre.iseg.ulisboa.pt/~fernando/MC.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2015.

Glasserman, Paul (2003). Monte Carlo Methods in Financial Engineering- Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer.

Hogg, R. V. e A. Tanis (2005). Probability and Statistical Inference, 7th edition, Prentice-Hall.

Korn, R., Korn, E., Kroisandt, G. (2010). Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, London.

Larson, R (1982) Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, 3rd edition, Wiley, John & Sons, Incorporated, NY.

Murteira, Bento (1999). Probabilidades e Estatística, volume I, 2ª edição revista, McGraw-Hill.

Pidd, M. (2004). Computer Simulation in Management Science, John Wiley and Sons Ltd, Chichester.

Taha, H. A. (2003). Operations research: an introduction, 7th edition, Prentice-Hall.

**Parte 3 – Simulação Monte Carlo e Análises de Resultados com o Software *Risk Simulator* (Software *Risk Simulator* versão 10.0.0 – 2014 (ROV, Inc.).**

Este anexo constitui parte do manual de usuário do Software *Risk Simulator* e o software nele descrito é fornecido mediante licença e só pode ser usado ou copiado de acordo com os termos do acordo de licença do usuário final. As informações neste documento são fornecidas com finalidade informativa, estão sujeitas a alterações sem aviso prévio e não representa um compromisso da Real Options Valuation, Inc. com a comercialização ou a adequação a uma finalidade específica.

Nenhuma parte do manual pode ser reproduzida ou transmitida de qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico ou mecânico, inclusive fotocópia ou gravação, para qualquer finalidade sem a permissão por escrito da Real Options Valuation, Inc.

Materiais baseados em publicações protegidas por direito autoral do Dr. Johnathan Mun, fundador e CEO, Real Options Valuation, Inc. Escrito, concebido e publicado nos Estados Unidos da América.

Para comprar cópias adicionais do manual de usuário, o interessado deve entrar em contato com a Real Options Valuation, Inc. por este endereço de e-mail: [admin@RealOptionsValuation.com](mailto:admin@RealOptionsValuation.com) ou visite o site [www.realoptionsvaluation.com](http://www.realoptionsvaluation.com).

© 2005 – 2012 por Dr. Johnathan Mun. Todos os direitos reservados.

### 3.1 – Introdução

O **Risk Simulator** é um software de previsão, otimização e simulação Monte Carlo. O software foi escrito na linguagem Microsoft .NET C# e funciona com o Excel como um suplemento. Este software também é compatível e usado com frequência com os softwares, Real Options Super Lattice Solver (SLS) e Employee Stock Options Valuation Toolkit (ESOV), desenvolvidos pela Real Options Valuation, Inc.

O software **Risk Simulator** contém os seguintes módulos:

- Simulação Monte Carlo (executa simulações paramétricas e não paramétricas de 42 distribuições de probabilidade com diferentes perfis de simulação, simulações truncadas e correlacionadas, distribuições personalizáveis, simulações controladas de precisão e erro e muitos outros algoritmos);
- Previsão (executa ARIMA, Box-Jenkins, regressão múltipla, extrapolação não linear, processos estocásticos e análise de série temporal);
- Otimização sob incerteza (executa otimizações usando variáveis inteiras discretas e contínuas para otimização de portfólios e projetos com ou sem simulação);
- Ferramentas analíticas e de modelagem (executam análises tornado, aranha e de sensibilidade, bem como simulação de bootstrap, teste de hipóteses, ajuste da distribuição etc.).

O software **Real Options SLS** é usado para calcular opções simples e complexas e permite criar modelos de opções personalizáveis. O software **Real Options SLS** contém os seguintes módulos:

- Single Asset SLS (para resolver opções de abandono, escolha, contração, adiamento e expansão, além de resolver opções personalizadas);
- Multiple Asset and Multiple Phase SLS (para resolver opções sequenciais de várias fases, opções com vários ativos e fases subjacentes, combinações de várias fases sequenciais com abandono, escolha, contração, adiamento, expansão e troca de opções; também pode ser usado para resolver opções personalizadas);
- Multinomial SLS (para resolver opções trinomiais de reversão à média, opções quadrinomiais de difusão com salto e opções pentanomiais de arco-íris);
- Funções suplementares do Excel (para resolver todas as opções acima além de modelos de contrato fechado e opções personalizadas em um ambiente baseado no Excel).



Figura 1 – Tela inicial do Risk Simulator

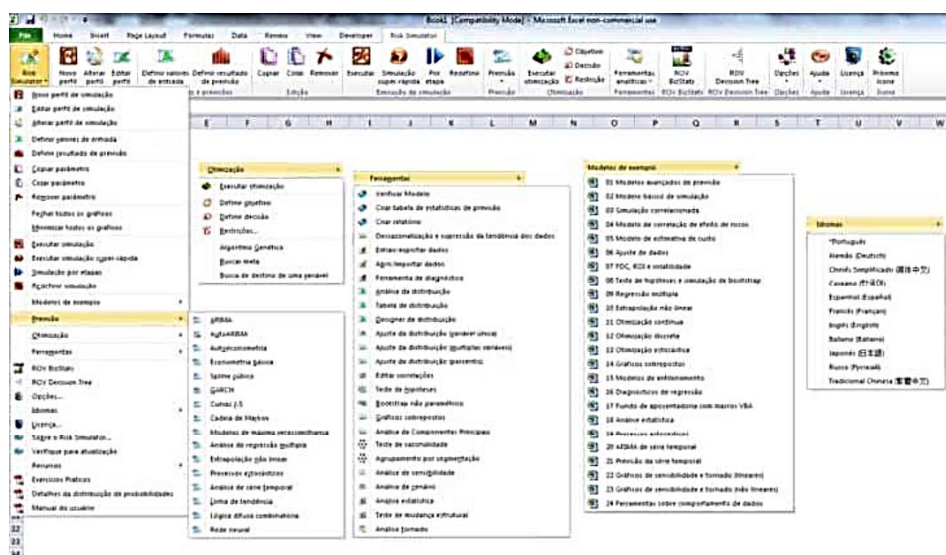


Figura 2 – Menu do Risk Simulator e barra de ícones do Excel 2007/2010



Figura 3 – Barras de ferramentas de ícones do Risk Simulator no Excel 2007/2010



### 3.2 – O que é a simulação Monte Carlo (de forma simplificada)?

A simulação Monte Carlo, assim chamada devido ao famoso cassino no principado de Mônaco, é uma metodologia muito poderosa. Para o exercício de uma profissão, a simulação abre as portas para a resolução de problemas difíceis e complexos, ainda que práticos, com grande facilidade. A simulação Monte Carlo cria futuros artificiais gerando até milhões de caminhos de amostras de resultados e observa suas características predominantes. Para os analistas em uma empresa, cursar disciplinas de matemática avançada no nível de pós-graduação simplesmente não é lógico nem prático. Um analista brilhante usaria todas as ferramentas disponíveis ao seu dispor para obter a mesma resposta da maneira mais fácil e prática possível. Em todo caso, quando modelada corretamente, a simulação Monte Carlo fornece respostas semelhantes aos métodos matematicamente mais elegantes. Assim, o que é a simulação Monte Carlo e como ela funciona?

**A simulação Monte Carlo na sua forma mais simples** é um gerador de números aleatórios útil para previsões, estimativas e análises de risco. Uma simulação calcula numerosos cenários de um modelo escolhendo valores repetidamente de uma distribuição de probabilidade predefinida pelo usuário para as variáveis incertas e usando esses valores no modelo. Todos esses cenários produzem resultados associados em um modelo, em que cada cenário pode ter uma previsão. As previsões são eventos (normalmente com fórmulas ou funções) que você define como resultados importantes do modelo. Em geral, são eventos como totais, lucro líquido ou despesas brutas. De maneira simplificada, pense na simulação Monte Carlo como escolher bolas de golfe de uma grande cesta repetidamente com reposições. O tamanho e a forma da cesta depende dos valores de entrada da distribuição (por exemplo, uma distribuição normal com uma média 100 e um desvio padrão 10, comparada com uma distribuição uniforme ou triangular) em que algumas cestas são mais fundas ou mais simétricas do que outras, permitindo que certas bolas sejam tiradas com mais frequência do que outras. O número de bolas tiradas repetidamente depende do número de tentativas simuladas. Para um modelo grande com várias suposições relacionadas, imagine o modelo grande como uma cesta muito grande, com muitas cestas menores dentro. Cada cesta menor tem seu próprio conjunto de bolas que estão se movimentando. Algumas vezes essas cestas menores estão juntas umas das outras (se houver uma correlação entre as variáveis) e as bolas de golfe estão se movimentando em pares enquanto outras se movimentam independentemente umas das outras. As bolas que são retiradas de cada vez dessas interações dentro do modelo (a cesta maior) são tabuladas e registradas, fornecendo o resultado de saída da previsão da simulação.

#### 3.2.1 – Introdução ao Risk Simulator

O software *Risk Simulator* possui diferentes utilizações, incluindo simulação Monte Carlo, previsão, otimização e análise de risco. Conforme a seguir:

- **O módulo Simulação** permite executar simulações em modelos existentes do Excel, gerar e extrair previsões de simulação (distribuição de resultados), executar o ajuste da distribuição (encontrar automaticamente a distribuição estatística mais adequada), calcular correlações (manter relações entre variáveis aleatórias simuladas), identificar sensibilidades (criando gráficos tornado e de sensibilidade), testar hipóteses estatísticas (encontrando diferenças estatísticas entre pares de previsões), executar uma simulação de *bootstrap* (testando a robustez das estatísticas do resultado) e executar simulações personalizadas e não paramétricas (simulações usando dados históricos sem especificar distribuições ou parâmetros de previsão para fazer previsões sem dados ou aplicar previsões de especialistas).
- **O módulo Previsão** pode ser usado para gerar previsões de séries temporais automáticas (com ou sem sazonalidade e tendência), regressões multivariadas (modelando relações entre variáveis), extrapolações não lineares (ajuste de curva), processos estocásticos (caminhos aleatórios, reversões à média, difusão com salto e processos mistos), ARIMA Box-Jenkins (previsões econométricas), AutoARIMA, econometria básica e autoeconometria (modelagem de relações e geração de previsões), curvas J exponenciais, curvas S logísticas, modelos GARCH e suas variações (modelagem e previsão da volatilidade), modelos de máxima verossimilhança para variáveis dependentes limitadas (modelos logit, tobit e probit), cadeias de Markov, linhas de tendência, curvas spline, entre outros.
- **O módulo Otimização** é usado para otimizar múltiplas variáveis de decisão sujeitas a restrições para maximizar ou minimizar um objetivo. Ele pode ser executado como uma otimização estática, dinâmica ou estocástica sob incerteza junto com a simulação Monte Carlo, ou como uma otimização estocástica com simulações super-rápidas. O software pode lidar com otimizações lineares e não lineares com variáveis binárias, inteiras e contínuas, e também gerar fronteiras eficientes de Markowitz.
- **O módulo Ferramentas analíticas** permite executar agrupamento por segmentação, teste de hipóteses, testes estatísticos de dados brutos, diagnóstico de dados de suposições de previsões técnicas (por exemplo, heteroscedasticidade, multicolinearidade e semelhantes), análises de sensibilidade e de cenário, análise de gráficos sobrepostos, gráficos aranha, gráficos tornado e muitas outras ferramentas poderosas.
- **O Real Options Super Lattice Solver** é um software autônomo que complementa o Risk Simulator e é usado para resolução de problemas de opções reais simples ou complexos.

### 3.2.2 – Executar uma simulação Monte Carlo

Em suma, para executar uma simulação no seu modelo Excel existente, estas etapas devem ser executadas: 1 – Iniciar um novo perfil de simulação ou abrir um perfil existente; 2 – Definir valores de entrada nas células relevantes; 3 – Definir resultados de previsão nas células relevantes; 4 – Executar a simulação e 5 – Interpretar os resultados.

#### 3.2.2.1 – Iniciar um novo perfil de simulação

Para iniciar uma nova simulação, primeiro é necessário criar um perfil de simulação. Um perfil de simulação contém um conjunto completo de instruções sobre como executar uma simulação, por exemplo, todas as suposições, previsões, preferências de execução etc. O uso de perfis facilita a criação de vários cenários de simulação. Ou seja, usando o mesmo modelo, é possível criar vários perfis, cada um com propriedades e requisitos de simulação específicos. A mesma pessoa pode criar diferentes cenários de teste usando suposições e entradas de distribuição diferente ou várias pessoas podem testar suposições e entradas no mesmo modelo.

**Inicie o Excel** e crie um novo modelo ou abra um existente (você pode usar o exemplo do Modelo básico de simulação para acompanhar) Clique em **Risk Simulator | Novo perfil de simulação** Especifique um título para a simulação, além de todas as informações pertinentes (Figura 4)

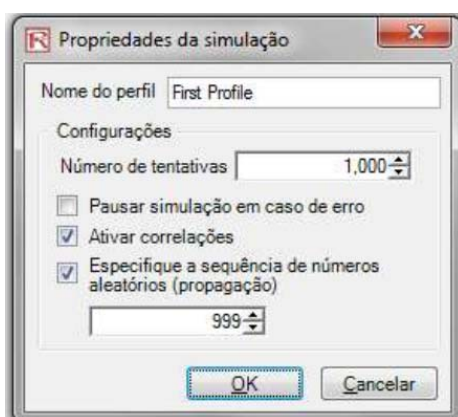


Figura 4 – Novo perfil de simulação

**Título:** A especificação do título de uma simulação permite criar vários perfis de simulação em um único modelo do Excel. Isso significa que agora você pode salvar diferentes perfis de cenário de simulação no mesmo modelo sem ter que excluir as suposições existentes e alterá-las sempre que um novo cenário de simulação for necessário. É possível alterar o nome do perfil mais tarde (**Risk Simulator | Editar perfil**).

**Número de tentativas:** Insira o número de tentativas de simulação necessário. Ou seja, executar 1.000 tentativas significa que serão geradas 1.000 iterações diferentes de resultados de acordo com os valores de entrada. Você pode alterar esse número se desejar, mas só são aceitos inteiros positivos. O número padrão de execuções é 1.000 tentativas. Você pode usar o controle de precisão e erro para ajudar a determinar automaticamente quantas tentativas de simulação devem ser executadas (consulte a seção sobre controle de precisão e erro para obter detalhes).

**Pausar simulação em caso de erro:** Se selecionado, a simulação será interrompida sempre que um erro for encontrado no modelo do Excel. Ou seja, se o seu modelo encontrar um erro de cálculo (por exemplo, alguns valores de entrada gerados em uma tentativa de simulação podem resultar em um erro de divisão por zero em uma das células da planilha), a simulação será interrompida. Isso é importante para ajudar a auditar o modelo do Excel a fim de verificar se ele não contém erros de cálculo. No entanto, se você tiver certeza de que o modelo funciona, não será necessário selecionar essa preferência.

**Ativar correlações:** Se selecionado, as correlações entre pares de valores de entrada serão calculadas. Caso contrário, as correlações serão todas definidas como zero e a simulação será executada supondo que não há correlações entre os valores de entrada. Por exemplo, a aplicação de correlações renderá resultados mais precisos se elas existirem de fato e tenderá a resultar em uma confiança de previsão mais baixa, se houver correlações negativas. Após ativar as correlações, você poderá definir os coeficientes de correlação relevantes em cada suposição gerada (consulte a seção sobre correlações para obter mais detalhes).

**Especifique a sequência de números aleatórios (propagação):** A simulação por definição apresentará resultados um pouco diferentes toda vez que uma simulação for executada. Isso ocorre por causa da rotina de geração de números aleatórios na simulação Monte Carlo e é um fato teórico em todos os geradores de números aleatórios. No entanto, ao criar apresentações, é possível que você precise dos mesmos resultados (principalmente quando o relatório apresentado exibe um conjunto de resultados que também devem ser exibidos durante uma apresentação ao vivo, ou quando você compartilha modelos com outras pessoas e deseja que os mesmos resultados sejam obtidos sempre). Nesses casos, selecione essa preferência e insira um número de propagação inicial. O número de propagação pode ser qualquer inteiro positivo. Usando o mesmo valor de propagação inicial, o mesmo número de tentativas e os mesmos valores de entrada, a simulação sempre apresentará a mesma sequência de números aleatórios, garantindo o mesmo conjunto final de resultados.

Observe que depois de criado um novo perfil de simulação, você poderá modificar essas seleções. Para fazer isso, verifique se o perfil ativo atual é aquele que você deseja modificar; caso contrário, clique em **Risk Simulator | Alterar perfil de simulação**, selecione o perfil que deseja alterar e clique em **OK** (a Figura 5 mostra um exemplo com vários perfis e como ativar um perfil selecionado). Em seguida, clique em **Risk Simulator | Editar perfil de simulação** e faça as alterações necessárias. Também é possível duplicar ou renomear um perfil existente. Ao criar vários perfis no mesmo modelo do Excel, dê um nome exclusivo a cada perfil para poder diferenciá-los depois. Além disso, esses perfis são armazenados dentro de setores ocultos do arquivo \*.xls do Excel e você não precisa salvar nenhum arquivo adicional. Os perfis e os respectivos conteúdos (suposições, previsões etc.) são automaticamente salvos quando você salva o arquivo do Excel. Por fim, o último perfil ativo quando você sai do Excel e salva o arquivo será aberto na próxima vez que o arquivo do Excel for acessado.

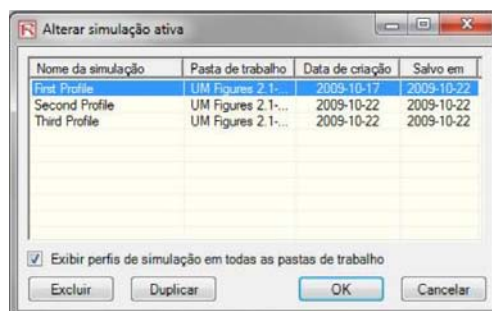


Figura 5 – Alterar simulação ativa

### 3.2.2.2 – Definir valores de entrada

A próxima etapa é definir os valores de entrada em seu modelo. Observe que as suposições podem ser atribuídas somente a células que não contêm equações ou funções, por exemplo, valores numéricos inseridos que sejam entradas em um modelo, enquanto os resultados de previsão podem ser atribuídos somente a células que contêm equações e funções, por exemplo, os resultados de um modelo. Lembre-se de que as suposições e previsões não podem ser definidas a menos que já exista um perfil de simulação. Para definir novos valores de entrada no modelo, faça o seguinte: Verifique se existe um perfil de simulação, abra um perfil existente ou inicie um novo perfil (**Risk Simulator | Novo perfil de simulação**) Selecione a célula na qual deseja definir uma suposição (por exemplo, a célula **G8** no exemplo do modelo básico de simulação) Clique em **Risk Simulator | Definir valores de entrada** ou clique no ícone Definir valores de entrada na barra de ferramentas de ícones do Risk Simulator Selecione a distribuição desejada e insira os parâmetros de distribuição relevantes (por exemplo, distribuição **Triangular** com **1,5; 2,0; 2,5** como os valores mínimo, máximo e mais provável) e clique em **OK** para inserir os valores de entrada no modelo (Figura 6).

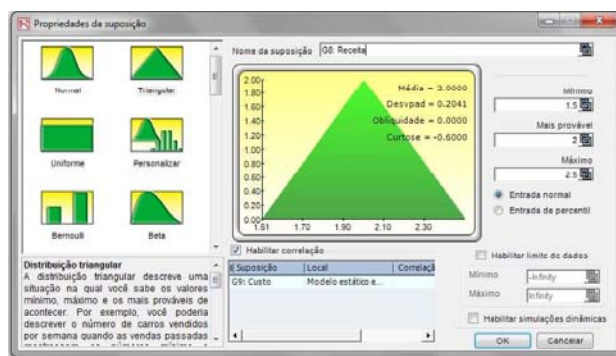


Figura 6 – Definir um valor de entrada

Observe que você também pode definir suposições selecionando a célula na qual deseja definir a suposição e **clcando com o botão direito do mouse**, acesse o menu de atalho do Risk Simulator para definir valores de entrada. Além disso, para usuários experientes, é possível definir valores de entrada usando as **Funções RS** do Risk Simulator: selecione a célula desejada e, no Excel, clique em *Inserir, Função* e selecione *Todas as Categorias* e role para baixo até a lista de funções RS (não é recomendável usar as funções RS se você não é um usuário experiente). Para os exemplos a seguir, siga as instruções básicas sobre como acessar menus e ícones.

Observe que em Propriedades da suposição, há várias áreas que merecem ser mencionadas. A Figura 7 mostra as diferentes áreas:

**Nome da suposição:** Esta é uma área opcional que permite inserir nomes exclusivos para as suposições com o intuito de ajudar a rastrear o que cada uma delas representa. Uma boa prática de modelagem é usar nomes curtos, mas precisos para as suposições.

**Galeria de distribuições:** Esta área à esquerda mostra todas as distribuições diferentes disponíveis no software. Para alterar as exibições, clique com o botão direito do mouse na galeria e selecione ícones grandes, ícones pequenos ou lista. Há dezenas de distribuições disponíveis.

**Parâmetros de entrada:** Dependendo da distribuição selecionada, são mostrados os parâmetros obrigatórios relevantes. Você pode inserir os parâmetros diretamente ou vinculá-los a células específicas na sua planilha. A inclusão de parâmetros por codificação ou digitação é útil quando se supõe que os parâmetros da suposição não se alteram. A vinculação a células da planilha é útil quando os parâmetros de entrada precisam ser visíveis ou podem ser alterados (clique no ícone de vínculo para vincular um parâmetro de entrada a uma célula da planilha).

**Habilitar limite de dados:** Em geral, este recurso não é usado pela maioria dos analistas, mas existe para truncar as suposições de distribuição. Por exemplo, se uma distribuição normal for selecionada, os limites teóricos estarão entre o infinito negativo e o infinito positivo. No entanto, na prática, a variável simulada existe apenas dentro de uma faixa menor que pode ser inserida para truncar a distribuição de maneira apropriada.

**Correlações:** É possível atribuir correlações de paridade a valores de entrada. Se forem necessárias suposições, marque a preferência Ativar correlações clicando em **Risk Simulator Editar perfil de simulação**. Consulte a seção sobre correlações mais adiante neste capítulo para obter mais detalhes sobre a atribuição de correlações e seus efeitos em um modelo. Observe que você pode truncar uma distribuição ou correlacioná-la a outra suposição, mas não as duas coisas.

**Descrições resumidas:** Elas existem para cada uma das distribuições da galeria. As descrições resumidas explicam quando uma determinada distribuição é usada, bem como os parâmetros de entrada obrigatórios. Consulte a seção *Noções básicas sobre distribuições de probabilidade na simulação Monte Carlo* para obter detalhes sobre cada tipo de distribuição disponível no software.

**Entrada normal e Entrada de percentil:** Estas opções permitem executar um teste rápido de *due diligence* nos valores de entrada. Por exemplo, se estiver definindo uma distribuição normal com algumas entradas de média e desvio padrão, você poderá clicar na entrada de percentil para ver quais são os 10º e 90º percentis correspondentes.

**Habilitar simulações dinâmicas:** Por padrão, esta opção não é selecionada, mas para executar uma simulação multidimensional (por exemplo, se você vincular os parâmetros de entrada da suposição a outra célula que seja uma suposição, serão simuladas as entradas ou a simulação), portanto, lembre-se de selecionar esta opção. A simulação

dinâmica só funciona se as entradas estão vinculadas a outros valores de entrada alteráveis.

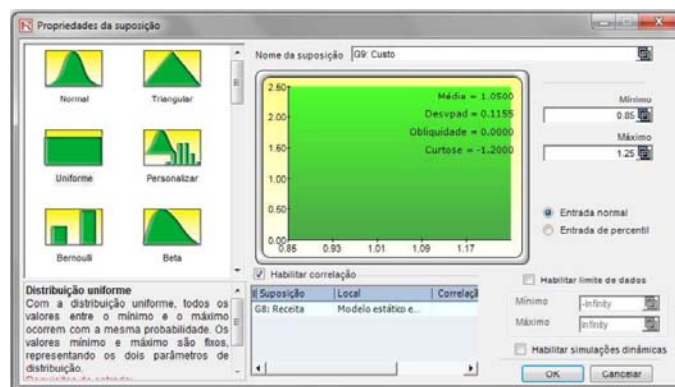


Figura 7 – Propriedades da suposição

### 3.2.2.3 – Definir resultados de previsão

A próxima etapa é definir os resultados de previsão no modelo. As previsões só podem ser definidas em células de resultado com equações ou funções. O processo de definição de previsão é descrito a seguir: Selecione a célula na qual deseja definir uma suposição (por exemplo, a célula **G10** no exemplo do modelo básico de simulação) Clique em **Risk Simulator** e selecione **Definir resultado de previsão** ou clique no ícone de definição de resultado de previsão na barra de ferramentas de ícones do Risk Simulator (Figura 3) Insira as informações relevantes e clique em **OK** Observe que você também pode definir resultados de previsão selecionando a célula na qual deseja definir a suposição e **clcando com o botão direito do mouse**, acesse o menu de atalho do Risk Simulator para definir resultados de previsão. A Figura 8 ilustra as propriedades da previsão.

**Nome da previsão:** Especifique o nome da célula de previsão. Isso é importante porque, quando você tem um modelo grande com várias células de previsão, nomeá-las individualmente permite acessar os resultados rapidamente. Não subestime a importância dessa etapa simples. Uma boa prática de modelagem é usar nomes curtos, mas precisos para as suposições.

**Precisão de previsão:** Em vez de confiar em uma estimativa aleatória de quantas tentativas devem ser executadas na simulação, você pode configurar controles de precisão e erro. Quando uma combinação de erro-precisão for obtida, a simulação será pausada e você será informado da precisão obtida, automatizando o processo de determinado do número de tentativas da simulação que não requer palpites sobre o número de tentativas necessárias.

**Mostrar janela de previsão:** Permite ao usuário mostrar ou não uma determinada janela de previsão. O padrão é sempre mostrar um gráfico de previsão.

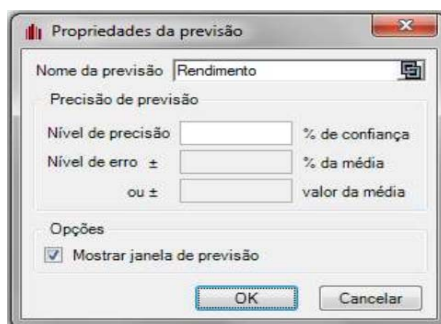


Figura 8 – Definir resultado de previsão

#### 3.2.2.4 – Executar a simulação

Se tudo estiver correto, clique em **Risk Simulator | Executar simulação** ou clique no ícone **Executar** na barra de ferramentas do Risk Simulator e a simulação continuará. Você também pode redefinir uma simulação depois que ela for executada para executá-la novamente (**Risk Simulator | Redefinir simulação** ou o ícone Redefinir simulação na barra de ferramentas) ou pausá-la durante uma execução. Além disso, a função etapa (**Risk Simulator | Simulação por etapas** ou o ícone Simulação por etapas na barra de ferramentas) permite simular uma única tentativa de cada vez, o que é útil para ensinar outras pessoas sobre simulação (por exemplo, você pode mostrar que em cada tentativa, todos os valores nas células de suposição são substituídos e o modelo inteiro é recalculado a cada vez). Você também pode acessar o menu Executar simulação clicando com o botão direito do mouse em qualquer lugar no modelo e selecionando Executar simulação.

O Risk Simulator também permite executar a simulação em uma velocidade extremamente rápida, chamada super-rápida. Para fazer isso, clique em **Risk Simulator Executar simulação super-rápida** ou use o ícone Super-rápido. Observe a diferença de velocidade da simulação super-rápida quando executada. Para praticar, clique em **Redefinir simulação** e **Editar perfil de simulação**, altere **Número de tentativas** para **100.000** e clique em **Executar simulação super-rápida**. A execução demora apenas alguns segundos. No entanto, lembre-se de que a simulação super-rápida não será executada se o modelo tiver erros, código VBA (Visual Basic for Applications) ou vínculos para aplicativos ou fontes de dados externas. Nessas situações, você será notificado e a simulação será executada em velocidade normal. As simulações em velocidade normal sempre são executadas, mesmo que contenham erros, código VBA ou vínculos externos.

#### 3.2.2.5 – Interpretação dos resultados de previsão

A última etapa da simulação Monte Carlo é interpretar os gráficos de previsão resultantes. As Figuras 9 a 17 mostram gráficos de previsão e as estatísticas correspondentes geradas após a execução da simulação. Os itens a seguir geralmente são importantes para interpretar os resultados de uma simulação: **Gráfico de previsão:** O gráfico de previsão mostrado na Figura 9 é um histograma de probabilidade que mostra a contagem da frequência dos valores que ocorrem no número total de tentativas simuladas. A barra vertical mostra a frequência com que um valor  $x$  específico ocorre no total de tentativas, enquanto a frequência cumulativa (linha suave) mostra as probabilidades totais de todos os valores que ocorrem na previsão em  $x$  e abaixo dele. **Estatísticas de previsão:** As estatísticas de previsão mostradas na Figura 10 resumem a distribuição dos valores de previsão nos quatro momentos de uma distribuição. Consulte



a seção Noções básicas sobre estatísticas de previsão para obter mais detalhes sobre o significado de algumas dessas estatísticas. Para alternar entre as guias Histograma e Estatísticas, pressione a barra de espaço.

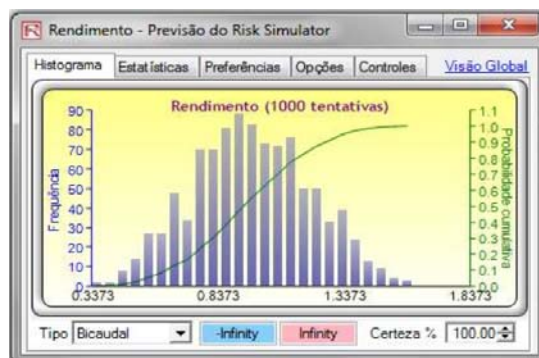


Figura 9 – Gráfico de previsão

Estatísticas	Resultado
Número de tentativas	1000
Média	0.9451
Mediana	0.9378
Desvio padrão	0.2347
Variância	0.0551
Coefficiente de variação	0.2483
Máximo	1.5876
Mínimo	0.3040
Fatca	1.2836
Obliquidade	0.0661
Curiose	-0.4308
25% percentil	0.7791
75% percentil	1.1025
Percentual de precisão de erro a 95% de confiança	1.5390%

Figura 10 – Estatísticas de previsão

**Preferências:** A guia Preferências no gráfico de previsão permite alterar a aparência dos gráficos. Por exemplo, se **Sempre visível** estiver selecionado, os gráficos de previsão ficarão sempre visíveis, independentemente de qualquer outro software que esteja sendo executado no computador. **Resolução do histograma** permite alterar o número de compartimentos do histograma, de 5 a até 100 compartimentos. Além disso, a seção **Atualização de dados** permite controlar a velocidade de execução da simulação e a frequência em que o gráfico de previsão é atualizado. Ou seja, se você deseja que o gráfico de previsão seja atualizado em quase todas as tentativas, isso diminuirá a velocidade da simulação, porque é alocada mais memória para a atualização do gráfico do que para a execução da simulação. Isso é meramente uma preferência do usuário e não altera os resultados da simulação, apenas a velocidade com a qual ela será concluída. Para aumentar a velocidade da simulação, minimize o Excel enquanto a simulação estiver sendo executada. Isso reduz a quantidade de memória necessária para atualizar visivelmente a planilha do Excel e libera memória para executar a simulação. As opções **Limpar tudo** e **Minimizar tudo** controlam todos os gráficos de previsão abertos.



Figura 11 – Preferências do gráfico de previsão

**Opções:** Esta opção do gráfico de previsão permite mostrar todos os dados de previsão ou filtrar valores que estejam dentro de um intervalo específico escolhido por você ou dentro de um desvio padrão de sua escolha. Além disso, o nível de precisão pode ser definido aqui para a previsão específica a fim de mostrar os níveis de erro na exibição das estatísticas. Consulte a seção sobre controle de erro e precisão para obter mais detalhes. *Mostrar estas estatísticas* é uma preferência do usuário se for necessário exibir as linhas de média, mediana, primeiro e quarto quartis (25<sup>o</sup> e 75<sup>o</sup> percentis) no gráfico de previsão.

**Controles:** Esta guia tem todas as funcionalidades que permitem alterar o tipo, a cor, o tamanho, o zoom, a inclinação, 3D e outras características do gráfico de previsão. Ela também fornece gráficos sobrepostos (FDP, FDA) e executa ajuste da distribuição nos dados de previsão (consulte a seção Ajuste de dados para obter mais detalhes sobre essa metodologia).



Figuras 12 e 13 – Opções e controles do gráfico de previsão

- **Usar gráficos de previsão e intervalos de confiança**

Nos gráficos de previsão, você pode determinar a probabilidade de ocorrência, denominada intervalos de confiança. Ou seja, dados dois valores, quais são as chances de o resultado estar entre um desses dois valores? A Figura 2.10 ilustra que há uma probabilidade de 90% de que o resultado final (nesse caso, o nível de renda) estará entre \$0,5565 e \$1,3423. Para obter o intervalo de confiança bicaudal, primeiro selecione o tipo **Bicaudal**, insira o valor de certeza desejado (por exemplo, **90**) e pressione **TAB**. Os dois valores calculados que correspondem ao valor de certeza serão exibidos. Nesse exemplo, há uma probabilidade de 5% de que a renda esteja abaixo de \$0,5565 e outros 5% de probabilidade de que a renda esteja acima de \$1,3423. Ou seja, o intervalo de confiança bicaudal é um intervalo simétrico centrado na mediana ou no valor do 50<sup>o</sup> percentil. Dessa forma, ambas as caudas terão a mesma probabilidade.



Figura 14 – Intervalo de confiança bicaudal do gráfico de previsão

Como alternativa, pode-se calcular uma probabilidade unicaudal. A Figura 2.11 mostra a seleção da cauda esquerda com 95% de confiança (por exemplo, escolha o tipo **Cauda esquerda**, insira **95** como o nível de certeza e pressione a tecla **TAB**). Isso significa que há uma probabilidade de 95% de o rendimento estar abaixo de \$1,3423 ou uma probabilidade de 5% de que a renda esteja acima de \$1,3423, correspondendo perfeitamente aos resultados vistos na Figura 13.



Figura 15 – Intervalo de confiança unicaudal do gráfico de previsão

Além de avaliar qual é o intervalo de confiança (ou seja, dado um nível de probabilidade e encontrando os valores de renda relevantes), você pode determinar a probabilidade de uma renda específica. Por exemplo, qual é a probabilidade de a renda ser menor ou igual a \$1? Para fazer isso, selecione o tipo de probabilidade **Cauda esquerda**, insira **1** na caixa de entrada de valor e pressione a tecla **TAB**. A certeza correspondente será calculada. Nesse caso há uma probabilidade de 59,70% de a renda ser menor ou igual a \$1.



Figura 16 – Avaliação da probabilidade do gráfico de previsão

Para garantir a integridade, selecione o tipo de probabilidade **Cauda direita >**, insira o valor **1** na caixa de entrada de valor e pressione a tecla **TAB**. A probabilidade resultante indicará a probabilidade de cauda direita depois do valor 1, ou seja, a probabilidade de a renda exceder \$1. Nesse caso, percebe-se que há uma probabilidade de 40,30% de a renda exceder \$1. A soma de 59,70% e 40,30% é, evidentemente, 100%: a probabilidade total abaixo da curva.



Figura 17 – Avaliação da probabilidade do gráfico de previsão

### 3.3 – Noções básicas sobre distribuições de probabilidade na simulação Monte Carlo

Esta seção demonstra a força da simulação Monte Carlo, mas antes de começar a simulação é necessário entender o conceito de distribuições de probabilidade. Para começar a entender probabilidade, considere este exemplo: você quer analisar a distribuição de salários sem isenções em um departamento de uma grande empresa. Primeiro, você coleta dados brutos neste caso, os salários de cada funcionário não-isento no departamento. Depois, organiza os dados em um formato válido e plota os dados como uma distribuição de frequência em um gráfico. Para criar uma distribuição de frequência, divida os salários em intervalos de grupos e liste esses intervalos no eixo horizontal do gráfico. Em seguida, liste o número ou a frequência dos funcionários em cada intervalo no eixo vertical do gráfico. Agora, é possível ver a distribuição de salários sem isenções no departamento.

O gráfico na Figura 2.25 revela que a maioria dos funcionários (aproximadamente 60 de um total de 180) ganham entre \$7,00 e \$9,00 por hora.

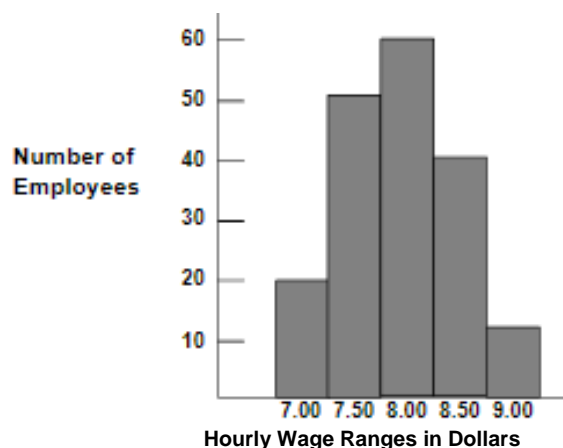


Figura 18 – Histograma de frequência I

Você pode representar esses dados como uma distribuição de probabilidade. Uma distribuição de probabilidade mostra o número de funcionários em cada intervalo como uma fração do número total de funcionários. Para criar uma distribuição de probabilidade, divida o número de funcionários em cada intervalo pelo número total de funcionários e liste os resultados no eixo vertical do gráfico. O gráfico na Figura 2.26 mostra o número de funcionários em cada grupo de salário como uma fração do total de funcionários. Você pode estimar a probabilidade de que um funcionário escolhido ao acaso do grupo total ganhe um salário pertencente a um determinado intervalo. Por exemplo, supondo que as condições eram as mesmas no momento em que foi criada a amostra, a probabilidade é de 0,33 (um em três) de que um funcionário escolhido ao acaso do total de funcionários ganhe entre \$8,00 e \$8,50 por hora.

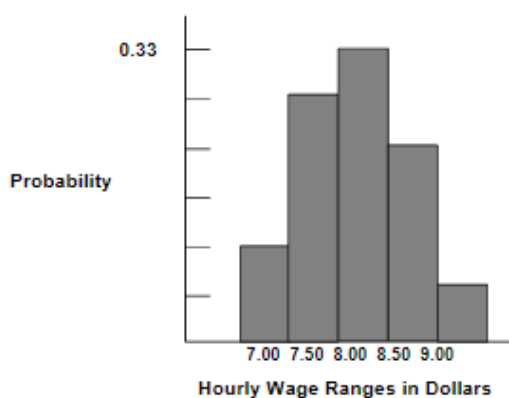


Figura 19 – Histograma de frequência II

As distribuições de probabilidade podem ser **discretas ou contínuas**. As distribuições de probabilidade discretas descrevem valores distintos, geralmente inteiros, sem valores intermediários e são mostradas como uma série de barras verticais. Uma distribuição discreta, por exemplo, poderia descrever o número de caras em quatro rodadas de cara ou coroa usando uma moeda como 0, 1, 2, 3 ou 4.

As distribuições contínuas são abstrações matemáticas, porque supõem a existência de todos os valores intermediários possíveis entre dois números. Ou seja, uma distribuição contínua presume que há um número infinito de valores entre dois pontos na distribuição. No entanto, em muitas situações, você pode usar uma distribuição contínua para fazer a aproximação de uma distribuição discreta, ainda que o modelo contínuo não descreva a situação de maneira exata.

### **3.3.1 – Seleção da distribuição de probabilidade apropriada**

A plotagem dos dados é um guia para selecionar uma distribuição de probabilidade. As seguintes etapas fornecem outro processo para selecionar distribuições de probabilidade que melhor descrevem as variáveis incertas nas suas planilhas. Para selecionar a distribuição de probabilidade correta, use estas etapas:

- Observe a variável em questão. Liste tudo o que você sabe sobre as condições que envolvem a variável. Pode ser possível coletar informações valiosas sobre a variável incerta a partir dos dados históricos. Se não houver dados históricos disponíveis, use seu próprio julgamento, com base na sua experiência, listando tudo o que você sabe sobre a variável incerta. Revise as descrições de distribuições de probabilidade. Selecione a distribuição que caracteriza a variável. Uma distribuição caracteriza uma variável quando as condições da distribuição correspondem àquelas da variável.

## Distribuições discretas

---

Veja a seguir uma lista detalhada dos diferentes tipos de distribuições de probabilidade que podem ser usadas na simulação Monte Carlo. A listagem está incluída neste apêndice apenas para referência.

### *Distribuição Bernoulli ou distribuição sim/não*

A distribuição Bernoulli é uma distribuição discreta com dois resultados: cara ou coroa, êxito ou fracasso, 0(zero) ou 1(um). A distribuição Bernoulli é a distribuição binomial com uma tentativa e pode ser usada para simular condições do tipo sim/não ou êxito/fracasso. Essa distribuição é o fundamento de outras distribuições mais complexas. Por exemplo:

- Distribuição binomial: distribuição Bernoulli com um número mais alto de tentativas totais  $n$  que calcula a probabilidade de  $x$  êxitos no número total de tentativas.
- Distribuição geométrica: distribuição Bernoulli com um número mais alto de tentativas que calcula o número de fracassos necessários antes do primeiro sucesso.
- Distribuição binomial negativa: distribuição Bernoulli com um número mais alto de tentativas que calcula o número de fracassos antes do  $X$ ésimo sucesso.

Os construtos matemáticos da distribuição Bernoulli são os seguintes:

$$P(n) = \begin{cases} 1-p & \text{para } x = 0 \\ p & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

ou

$$P(n) = p^x(1-p)^{1-x}$$

$$\text{média} = p$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{p(1-p)}$$

Probabilidade de êxito ( $p$ ) é o único parâmetro de distribuição. Além disso, é importante observar que há apenas uma tentativa na distribuição Bernoulli e o valor simulado resultante será 0 ou 1.

Requisitos de entrada:

Probabilidade de êxito  $> 0$  e  $< 1$  (ou seja,  $0,0001 \leq p \leq 0,9999$ )

## ***Distribuição binomial***

A distribuição binomial descreve quantas vezes um determinado evento ocorre em um número fixo de tentativas, como o número de caras em 10 rodadas de cara ou coroa ou o número de itens defeituosos entre 50 itens escolhidos

### *Condições*

As três condições subjacentes à distribuição binomial são:

- Para cada tentativa, apenas dois resultados são possíveis e mutuamente exclusivos.
- As tentativas são independentes: o que acontece na primeira tentativa não afeta a próxima tentativa.
- A probabilidade de um evento ocorrer permanece a mesma de uma tentativa para outra.

Os construtos matemáticos da distribuição binomial são os seguintes:

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad \text{para } n > 0; x = 0, 1, 2, \dots, n; \text{ e } 0 < p < 1$$

$$\text{média} = np$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{np(1-p)}$$

A probabilidade de êxito ( $p$ ) e o número inteiro do total de tentativas ( $n$ ) são os parâmetros de distribuição. O número de tentativas bem-sucedidas é indicado por  $x$ . É importante observar que a probabilidade de êxito ( $p$ ) de 0 ou 1 é uma condição trivial e não requer simulação, portanto, não é permitida no software.

Requisitos de entrada:

Probabilidade de êxito  $> 0$  e  $< 1$  (ou seja,  $0,0001 \leq p \leq 0,9999$ )

Número de tentativas  $\geq 1$  ou inteiros positivos e  $\leq 1000$  (para tentativas maiores, use a distribuição normal com a média binomial calculada relevante e o desvio padrão como os parâmetros da distribuição normal).

## ***Distribuição binomial negativa***

A distribuição binomial negativa é útil para modelar a distribuição do número de tentativas adicionais necessárias além do número de ocorrências bem-sucedidas necessárias ( $R$ ). Por exemplo, para fechar um total de 10 oportunidades de vendas, quantas chamadas de vendas extras você precisaria fazer além de 10 chamadas, dada alguma probabilidade de êxito em cada chamada? O eixo  $x$  mostra o número de chamadas adicionais necessárias ou o número de chamadas fracassadas. O número de tentativas não é fixo, as tentativas continuam até o  $R$ -ésimo êxito e a probabilidade de sucesso é a mesma em cada tentativa. A probabilidade de êxito ( $p$ ) e o número de êxitos necessários ( $R$ ) são os parâmetros de



distribuição. É essencialmente uma *superdistribuição* das distribuições binomial e geométrica. A distribuição mostra as probabilidades de cada número de tentativas excessivas de  $R$  em produzir o êxito necessário  $R$ .

#### Condições

As três condições subjacentes à distribuição binomial negativa são:

- O número de tentativas não é fixo.
- As tentativas continuam até o  $r$ -ésimo êxito.
- A probabilidade de êxito é a mesma de uma tentativa para outra.

Os construtos matemáticos da distribuição binomial negativa são os seguintes:

$$P(x) = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!x!} p^r (1-p)^x \quad \text{para } x = r, r+1, \dots; \text{ e } 0 < p < 1$$

$$\text{média} = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{p^2 - 6p + 6}{r(1-p)}$$

A probabilidade de êxito ( $p$ ) e o número de êxitos necessários ( $R$ ) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Êxitos necessários devem ser inteiros positivos  $> 0$  e  $< 8000$ .

Probabilidade de êxito  $> 0$  e  $< 1$  (ou seja,  $0,0001 \leq p \leq 0,9999$ ). É importante observar que a probabilidade de êxito ( $p$ ) de 0 ou 1 é uma condição trivial e não requer simulação, portanto, não é permitida no software.

### **Distribuição geométrica**

A distribuição geométrica descreve o número de tentativas até a primeira ocorrência bem-sucedida, como o número de vezes que você precisa girar uma roleta antes de ganhar.

#### Condições

As três condições subjacentes à distribuição geométrica são:

- O número de tentativas não é fixo.
- As tentativas continuam até o primeiro êxito.
- A probabilidade de êxito é a mesma de uma tentativa para outra.

Os construtos matemáticos da distribuição geométrica são os seguintes:

$$P(x) = p(1-p)^{x-1} \quad \text{para } 0 < p < 1 \text{ e } x = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{média} = \frac{1}{p} - 1$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{p^2 - 6p + 6}{1-p}$$

Probabilidade de êxito ( $p$ ) é o único parâmetro de distribuição. O número de tentativas bem-sucedidas simuladas é indicado por  $x$ , que só pode conter inteiros positivos.

Requisitos de entrada:

Probabilidade de êxito  $> 0$  e  $< 1$  (ou seja,  $0,0001 \leq p \leq 0,9999$ ). É importante observar que a probabilidade de êxito ( $p$ ) de 0 ou 1 é uma condição trivial e não requer simulação, portanto, não é permitida no software.

### ***Distribuição hipergeométrica***

A distribuição hipergeométrica é semelhante à distribuição binomial, já que ambas descrevem quantas vezes um determinado evento ocorre dado um certo número fixo de tentativas. A diferença é que as tentativas da distribuição binomial são independentes, enquanto as tentativas da distribuição hipergeométrica mudam a probabilidade de cada tentativa subsequente e são chamadas "tentativas sem substituição". Por exemplo, suponha que uma caixa de peças fabricadas contenha algumas peças defeituosas. Você escolhe uma peça da caixa, descobre que é defeituosa e a remove da caixa. Se você escolher outra peça da caixa, a probabilidade de ela ser defeituosa é um pouco menor do que para a primeira peça, porque você retirou uma peça defeituosa. Se você tivesse substituído a peça defeituosa, as probabilidades teriam permanecido as mesmas e o processo teria satisfeito as condições de uma distribuição binomial.

#### *Condições*

As condições subjacentes à distribuição hipergeométrica são:

- O número total de itens ou elementos (o tamanho da população) é um número fixo, uma população finita. O tamanho da população deve ser menor ou igual a 1.750.
- O tamanho da amostra (o número de tentativas) representa uma parte da população.
- A probabilidade de êxito inicial conhecida da população muda depois de cada tentativa.

Os construtos matemáticos da distribuição hipergeométrica são os seguintes:

$$P(x) = \frac{\frac{(N_x)!}{x!(N_x - x)!} \frac{(N - N_x)!}{(n - x)!(N - N_x - n + x)!}}{\frac{N!}{n!(N - n)!}} \quad \text{para } x = \text{Max}(n - (N - N_x), 0), \dots, \text{Min}(n, N_x)$$

$$\text{média} = \frac{N_x n}{N}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(N - N_x) N_x n (N - n)}{N^2 (N - 1)}}$$

$$\text{obliquidade} = \sqrt{\frac{N - 1}{(N - N_x) N_x n (N - n)}}$$

curtose excessiva = função complexa

O número de itens na população ou o tamanho da população ( $N$ ), as tentativas amostradas ou o tamanho da amostra ( $n$ ) e o número de itens da população que obtiveram êxito ou os êxitos da população ( $N_x$ ) são os parâmetros de distribuição. O número de tentativas bem-sucedidas é indicado por  $x$ .

Requisitos de entrada:

Tamanho da população  $\geq 2$  e inteiro

Tamanho da amostra  $> 0$  e inteiro

Êxitos da população  $> 0$  e inteiro

Tamanho da população  $>$  êxitos da população

Tamanho da amostra  $<$  êxitos da população

Tamanho da população  $< 1750$

### ***Distribuição de Pascal***

A distribuição de Pascal é útil para modelar a distribuição do número total de tentativas necessárias para obter o número de ocorrências bem-sucedidas necessárias. Por exemplo, para fechar um total de 10 oportunidades de vendas, quantas chamadas de vendas no total seriam necessárias, dada alguma probabilidade de êxito em cada chamada? O eixo  $x$  mostra o número total de chamadas necessárias, que inclui chamadas bem-sucedidas e malsucedidas. O número de tentativas não é fixo, as tentativas continuam até o  $R$ -ésimo êxito e a probabilidade de sucesso é a mesma em cada tentativa. A distribuição de Pascal está relacionada à distribuição binomial negativa. A distribuição binomial negativa calcula o número de eventos necessários além do número de êxitos necessários dada alguma probabilidade (ou seja, o total de falhas), enquanto a distribuição de Pascal calcula o número total de eventos necessários (ou seja, a soma de êxitos e falhas) para alcançar os êxitos necessários dada alguma probabilidade. Êxitos necessários e probabilidade são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição Pascal são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)!}{(x-s)!(s-1)!} p^s (1-p)^{x-s} & \text{for all } x \geq s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{x=1}^k \frac{(x-1)!}{(x-s)!(s-1)!} p^s (1-p)^{x-s} & \text{for all } x \geq s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{m\u00e9dia} = \frac{s}{p}$$

$$\text{desvio padr\u00e3o} = \sqrt{s(1-p)p^2}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{p^2 - 6p + 6}{r(1-p)}$$

Requisitos de entrada:

\u00caxitos necess\u00e1rios deve ser maior que 0 e ser um inteiro

$0 \leq \text{Probabilidade} \leq 1$

### ***Distribui\u00e7\u00e3o Poisson***

A distribui\u00e7\u00e3o Poisson descreve o n\u00famero de vezes que um evento ocorre em um dado intervalo, como o n\u00famero de telefonemas por minuto ou o n\u00famero de erros por p\u00e1gina em um documento.

*Condi\u00e7\u00f5es*

As tr\u00eas condi\u00e7\u00f5es subjacentes \u00e0 distribui\u00e7\u00e3o Poisson s\u00e3o:

- O n\u00famero de ocorr\u00eancias poss\u00edveis em qualquer intervalo \u00e9 ilimitado.
- As ocorr\u00eancias s\u00e3o independentes. O n\u00famero de ocorr\u00eancias em um intervalo n\u00e3o afeta o n\u00famero de ocorr\u00eancias em outros intervalos.
- O n\u00famero m\u00e9dio de ocorr\u00eancias deve permanecer inalterado de um intervalo para outro.

Os construtos matem\u00e1ticos da distribui\u00e7\u00e3o Poisson s\u00e3o os seguintes:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{para } x \text{ e } \lambda > 0$$

$$\text{m\u00e9dia} = \lambda$$

$$\text{desvio padr\u00e3o} = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{1}{\lambda}$$

A taxa ou o lambda ( $\lambda$ ) é o único parâmetro de distribuição.

Requisitos de entrada:

Taxa  $> 0$  e  $\leq 1000$  (ou seja,  $0,0001 \leq \text{taxa} \leq 1000$ )

### ***Distribuição uniforme discreta***

A distribuição uniforme discreta também é conhecida como a distribuição de *resultados equiprováveis*, na qual a distribuição tem um conjunto de  $N$  elementos e cada elemento tem a mesma probabilidade. Essa distribuição está relacionada à distribuição uniforme, mas seus elementos são discretos e não contínuos.

Os construtos matemáticos da distribuição binomial são os seguintes:

$$P(x) = \frac{1}{N}$$

$$\text{média} = \frac{N+1}{2} \text{ valor classificado}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(N-1)(N+1)}{12}} \text{ valor classificado}$$

obliquidade = 0 (ou seja, a distribuição é perfeitamente simétrica)

$$\text{curtose excessiva} = \frac{-6(N^2+1)}{5(N-1)(N+1)} \text{ valor classificado}$$

Requisitos de entrada:

Mínimo  $<$  máximo, ambos devem ser inteiros (inteiros negativos e zero são permitidos)

## **Distribuições contínuas**

### ***Distribuição de arco seno***

A distribuição de arco seno tem o formato de U e é um caso especial da distribuição beta no qual o formato e a escala são iguais a 0,5. Valores próximos ao mínimo e ao máximo têm alta probabilidade de ocorrência enquanto valores entre esses dois extremos têm probabilidades muito baixas de ocorrência. Mínimo e máximo são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição arco seno são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sqrt{x}) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{média} = \frac{\text{Min} + \text{Max}}{2}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(\text{Max} - \text{Min})^2}{8}}$$

$$\text{obliquidade} = 0$$

$$\text{curtose excessiva} = 1.5$$

Requisitos de entrada:

Mínimo < Máximo

### ***Distribuição beta***

A distribuição beta é muito flexível e geralmente é usada para representar variabilidade em uma faixa fixa. Uma das aplicações mais importantes da distribuição beta é seu uso como uma distribuição conjugada do parâmetro de uma distribuição Bernoulli. Nessa aplicação, a distribuição beta é usada para representar a incerteza na probabilidade de ocorrência de um evento. Também é usada para descrever dados empíricos e prever o comportamento aleatório de porcentagens e frações, já que a faixa de resultados fica normalmente entre 0 e 1.

A importância da distribuição beta está na grande variedade de formas que ela pode assumir quando você varia dois parâmetros: alfa e beta. Se os parâmetros forem iguais, a distribuição será simétrica. Se um parâmetro for 1 e o outro for maior do que 1, a distribuição será no formato J. Se alfa for menor do que beta, diz-se que a distribuição é positivamente oblíqua (a maioria dos valores está próxima do valor mínimo). Se alfa for maior do que beta, diz-se que a distribuição é negativamente oblíqua (a maioria dos valores está próxima do valor máximo).

Os construtos matemáticos da distribuição beta são os seguintes:

$$f(x) = \frac{(x)^{(\alpha-1)} (1-x)^{(\beta-1)}}{\left[ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right]} \quad \text{para } \alpha > 0; \beta > 0; x > 0$$

$$\text{média} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (1 + \alpha + \beta)}}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{1 + \alpha + \beta}}{(2 + \alpha + \beta)\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{3(\alpha + \beta + 1)[\alpha\beta(\alpha + \beta - 6) + 2(\alpha + \beta)^2]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)} - 3$$

Alfa ( $\alpha$ ) e beta ( $\beta$ ) são os dois parâmetros de forma da distribuição e  $\Gamma$  é a função gama.

#### *Condições*

As duas condições subjacentes à distribuição beta são:

- A variável incerta é um valor aleatório entre 0 e um valor positivo.
- O formato da distribuição pode ser especificado usando dois valores positivos.

Requisitos de entrada:

Alfa e beta  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

#### ***Distribuição beta multiplicativa deslocada***

A distribuição beta é muito flexível e geralmente é usada para representar variabilidade em uma faixa fixa. Ela é usada para descrever dados empíricos e prever o comportamento aleatório de porcentagens e frações, já que a faixa dos resultados em geral está entre 0 e 1. A vantagem da distribuição beta é a grande variedade de formas que pode assumir quando os dois parâmetros são variados, alfa e beta. A distribuição beta multiplicativa deslocada é obtida pela multiplicação da distribuição beta por um fator e pelo deslocamento dos resultados de acordo com um parâmetro de local para permitir que a faixa de resultados seja expandida além de seus limites naturais de 0 e 1 com um ponto de partida diferente de 0. Alfa, beta, local e fator são os parâmetros de entrada.

Requisitos de entrada:

Alfa  $> 0$

Beta  $> 0$

Local pode ser qualquer número positivo ou negativo incluindo zero

Fator  $> 0$

#### ***Distribuição Cauchy, Lorentz ou Breit-Wigner***

A distribuição Cauchy, também chamada de distribuição de Lorentz ou de Breit-Wigner, é uma distribuição contínua que descreve comportamento ressonante. Ela também descreve a distribuição de distâncias horizontais nas quais um segmento de linha inclinado a um ângulo aleatório corta o eixo x.

Os construtos matemáticos da distribuição Cauchy ou Lorentz são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(x-m)^2 + \gamma^2/4}$$

A distribuição Cauchy é um caso especial em que não há momentos teóricos (média, desvio padrão, obliquidade e curtose) já que todos são indefinidos.

Localização da moda ( $\alpha$ ) e escala ( $\beta$ ) são os únicos parâmetros nesta distribuição. O parâmetro de localização especifica o pico ou a moda da distribuição, enquanto o parâmetro de escala especifica a metade da largura na metade do máximo da distribuição. Além disso, a média e a variância de uma distribuição de Cauchy ou Lorentz são indefinidas.

Além disso, a distribuição de Cauchy é a distribuição T de Student com apenas um grau de liberdade. Essa distribuição também é construída tomando-se o quociente de duas distribuições normais padrão (distribuições normais com uma média zero e uma variação de um) que são independentes uma da outra.

Requisitos de entrada:

O local alfa pode ser qualquer valor

Beta da escala  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

### ***Distribuição de cosseno***

A distribuição de cosseno parece uma distribuição logística na qual o valor da mediana entre o mínimo e o máximo possui a moda ou o pico mais alto, tendo a probabilidade máxima de ocorrência, enquanto as caudas extremas próximas aos valores mínimo e máximo têm probabilidades menores. Mínimo e máximo são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição cosseno são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b} \cos\left[\frac{x-a}{b}\right] & \text{for } \min \leq x \leq \max \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } a = \frac{\min + \max}{2} \text{ and } b = \frac{\max - \min}{\pi}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 + \sin\left(\frac{x-a}{b}\right) \right] & \text{for } \min \leq x \leq \max \\ 1 & \text{for } x > \max \end{cases}$$

$$\text{média} = \frac{\text{Min} + \text{Max}}{2}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(\text{Max} - \text{Min})^2 (\pi^2 - 8)}{4\pi^2}}$$

$$\text{obliquidade} = 0$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6(90 - \pi^4)}{5(\pi^2 - 6)^2}$$

Requisitos de entrada:

Mínimo  $<$  Máximo



## ***Distribuição de Erlang***

A distribuição de Erlang é igual à distribuição gama, com o requisito de que o parâmetro alfa ou o parâmetro de formato deve ser um inteiro positivo. Um exemplo de aplicação da distribuição de Erlang é calibrar a taxa de transição de elementos através de um sistema de compartimentos. Tais sistemas são amplamente usados em biologia e ecologia (por exemplo, em epidemiologia, um indivíduo pode progredir a uma taxa exponencial de um estado saudável passando a portador de uma doença e continuar exponencialmente de portador a infectado). Alfa (também conhecido como formato) e beta (também conhecido como escala) são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição Erlang são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta(\alpha-1)} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(x/\beta)^i}{i!} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{média} = \alpha\beta$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\alpha\beta^2}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6}{\alpha} - 3$$

Requisitos de entrada:

Alfa (formato) deve ser maior que 0 e ser um inteiro

Beta (escala) > 0

## ***Distribuição exponencial***

A distribuição exponencial é amplamente usada para descrever eventos que se repetem em momentos aleatórios, como o intervalo de tempo entre eventos como falhas em equipamentos eletrônicos ou entre entradas em um estande de serviços. Ela está relacionada à distribuição Poisson, que descreve o número

de ocorrências de um evento em um determinado intervalo de tempo. Uma característica importante da distribuição exponencial é a sua propriedade de "não memorização", o que significa que a vida útil futura de determinado objeto tem a mesma distribuição, independentemente do tempo de sua existência. Em outras palavras, o tempo não tem efeito algum em resultados futuros.

Os construtos matemáticos da distribuição exponencial são os seguintes:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0; \lambda > 0$$

$$\text{média} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{desvio padrão} = \frac{1}{\lambda}$$

obliquidade = 2 (este valor se aplica a todas as entradas de taxa de sucesso  $\lambda$ )

curtose excessiva = 6 (este valor se aplica a todas as entradas de taxa de sucesso  $\lambda$ )

A taxa de êxito ( $\lambda$ ) é o único parâmetro de distribuição. O número de tentativas bem-sucedidas é indicado por  $x$ .

*Condições*

A condição subjacente à distribuição exponencial é:

- A distribuição exponencial descreve a quantidade de tempo entre as ocorrências.

Requisitos de entrada:

Taxa > 0

### ***Distribuição exponencial deslocada***

A distribuição exponencial é amplamente usada para descrever eventos que se repetem em momentos aleatórios, como o intervalo de tempo entre eventos como falhas em equipamentos eletrônicos ou entre entradas em um estande de serviços. Ela está relacionada à distribuição Poisson, que descreve o número de ocorrências de um evento em um determinado intervalo de tempo. Uma característica importante da distribuição exponencial é a sua propriedade de não memorização, o que significa que a vida útil futura de determinado objeto tem a mesma distribuição, independentemente do tempo de sua existência. Em outras palavras, o tempo não tem efeito algum em resultados futuros. A taxa de êxito ( $\lambda$ ) é o único parâmetro de distribuição.

Requisitos de entrada:

Lambda da taxa > 0

Local pode ser qualquer número positivo ou negativo incluindo zero

### ***Distribuição de valor extremo ou distribuição Gumbel***

A distribuição de valor extremo (tipo 1) normalmente é usada para descrever o maior valor de uma resposta em um período de tempo, por exemplo, em fluxos de inundações, precipitações e terremotos. Outras aplicações incluem a força necessária para quebrar um material, projetos de construções e cargas e tolerâncias de aeronaves. A distribuição de valor extremo também é conhecida como distribuição Gumbel.

Os construtos matemáticos da distribuição de valor extremo são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} z e^{-z} \quad \text{onde } z = e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} \quad \text{para } \beta > 0; \text{ e qualquer valor de } x \text{ e } \alpha$$

$$\text{média} = \alpha + 0.577215\beta$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{1}{6} \pi^2 \beta^2}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{12\sqrt{6}(1.2020569)}{\pi^3} = 1.13955 \quad (\text{isso se aplica a todos os valores de moda e escala})$$

$$\text{curtose excessiva} = 5,4 \quad (\text{isso se aplica a todos os valores de moda e escala})$$

Moda ( $\alpha$ ) e escala ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição.

#### *Cálculo de parâmetros*

Há dois parâmetros padrão para a distribuição de valor extremo: moda e escala. O parâmetro moda é o valor de maior probabilidade para a variável (o ponto mais alto na distribuição da probabilidade). Depois de selecionar o parâmetro de moda, você pode estimar o parâmetro de escala. O parâmetro de escala é um número maior que 0. Quanto maior o parâmetro de escala, maior a variância.

Requisitos de entrada:

Alfa da moda pode ser qualquer valor

Beta da escala  $> 0$

### ***Distribuição F ou distribuição de Fisher-Snedecor***

A distribuição F, também conhecida como a distribuição de Fisher-Snedecor, é outra distribuição contínua usada mais frequentemente para o teste de hipóteses. Especificamente, ela é usada para testar a diferença estatística entre duas variâncias na análise de testes de variância e testes de índice de verossimilhança. A distribuição F com o grau de liberdade do numerador  $n$  e grau de liberdade do denominador  $m$  está relacionada à distribuição qui-quadrada pois:

$$\frac{\chi_n^2 / n}{\chi_m^2 / m} \sim F_{n,m}$$

$$\text{média} = \frac{m}{m-2}$$

$$\text{desvio padrão} = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \text{ para todos os } m > 4$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2(m+2n-2)}{m-6} \sqrt{\frac{2(m-4)}{n(m+n-2)}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{12(-16 + 20m - 8m^2 + m^3 + 44n - 32mn + 5m^2n - 22n^2 + 5mn^2)}{n(m-6)(m-8)(n+m-2)}$$

O grau de liberdade do numerador  $n$  e o grau de liberdade do denominador  $m$  são os únicos parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Graus de liberdade do numerador e do denominador  $> 0$  e inteiros

### ***Distribuição gama (distribuição Erlang)***

A distribuição gama se aplica a uma grande variedade de quantidades físicas e está relacionada a outras distribuições: lognormal, exponencial, Pascal, Erlang, Poisson e qui-quadrada. Ela é usada em processos meteorológicos para representar a concentração de poluentes e as quantidades de precipitação. A distribuição gama também é usada para medir o tempo entre as ocorrências de eventos, quando o processo do evento não é completamente aleatório. Outras aplicações da distribuição gama incluem controle de estoques, teoria econômica e a teoria de riscos de seguro.

#### *Condições*

A distribuição gama é usada com mais frequência como a distribuição da quantidade de tempo até a  $r$ -ésima ocorrência de um evento em um processo Poisson. Quando usada dessa maneira, as três condições subjacentes à distribuição gama são:

- O número de ocorrências possíveis em qualquer unidade de medida não está limitado a um número fixo.
- As ocorrências são independentes. O número de ocorrências em uma unidade de medida não afeta o número de ocorrências em outras unidades.

- O número médio de ocorrências deve permanecer inalterado de uma unidade para outra.

Os construtos matemáticos da distribuição gama são os seguintes:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta} \quad \text{com qualquer valor de } \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0$$

média =  $\alpha$

desvio padrão =  $\sqrt{\alpha\beta^2}$

obliquidade =  $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$

curtose excessiva =  $\frac{6}{\alpha}$

O alfa do parâmetro de forma ( $\alpha$ ) e o beta do parâmetro de escala ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição e  $\Gamma$  é a função gama.

Quando o parâmetro alfa é um inteiro positivo, a distribuição gama é chamada de distribuição de Erlang, usada para prever tempos de espera em sistemas de enfileiramento, nos quais a distribuição de Erlang é a soma de variáveis aleatórias independentes e distribuídas de forma idêntica, cada uma possuindo uma distribuição exponencial de não memorização. Definindo  $n$  como o número dessas variáveis aleatórias, o construto matemático da distribuição de Erlang é:

$$f(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{(n-1)!}, \quad \text{para todos os } x > 0 \text{ e todos os inteiros positivos de } n$$

Requisitos de entrada:

Beta da escala  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

Alfa da forma  $\geq 0,05$  e qualquer valor positivo

A localização pode ser qualquer valor

### ***Distribuição de Laplace***

A distribuição de Laplace também é chamada de distribuição exponencial dupla, pois pode ser construída com duas distribuições exponenciais (com um parâmetro de local adicional) combinadas, criando um pico incomum no meio. A função densidade de probabilidade da distribuição de Laplace lembra a distribuição normal. No entanto, enquanto a distribuição normal é expressa em termos da diferença quadrática da média, a densidade de Laplace é expressa em termos da diferença absoluta da média, tornando as caudas da distribuição de Laplace mais achatadas que as da distribuição normal. Quando o parâmetro de local é definido como zero, a variável aleatória da distribuição de Laplace é distribuída exponencialmente com um inverso do parâmetro de escala. Alfa (também conhecido como local) e beta (também conhecido como escala) são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição Laplace são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left[\frac{x-\alpha}{\beta}\right] & \text{when } x < \alpha \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{x-\alpha}{\beta}\right] & \text{when } x \geq \alpha \end{cases}$$

média =  $\alpha$

desvio padrão =  $1.4142\beta$

obliquidade = 0

curtose excessiva = 3

Requisitos de entrada:

Alfa (local) pode assumir valores positivos ou negativos, incluindo zero

Beta (escala)  $> 0$

### ***Distribuição logarítmica dupla***

A distribuição logarítmica dupla é semelhante à distribuição Cauchy, na qual a tendência central tem um pico e tem a densidade de probabilidade de valor máximo, mas diminui mais rapidamente quanto mais longe está do centro, criando uma distribuição simétrica com um pico extremo entre os valores mínimo e máximo. Mínimo e máximo são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição logarítmica dupla são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2b} \ln\left(\frac{|x-a|}{b}\right) & \text{for } \min \leq x \leq \max \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $a = \frac{\min + \max}{2}$  and  $b = \frac{\max - \min}{2}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \left(\frac{|x-a|}{2b}\right) \left[1 - \ln\left(\frac{|x-a|}{b}\right)\right] & \text{for } \min \leq x \leq a \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{|x-a|}{2b}\right) \left[1 - \ln\left(\frac{|x-a|}{b}\right)\right] & \text{for } a \leq x \leq \max \end{cases}$$

$$\text{média} = \frac{\text{Min} + \text{Max}}{2}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(\text{Max} - \text{Min})^2}{36}}$$

obliquidade = 0

Requisitos de entrada:

Mínimo < Máximo

### ***Distribuição logística***

A distribuição logística normalmente é usada para descrever crescimento, ou seja, o tamanho de uma população expresso como uma função de uma variável de tempo. Ela também pode ser usada para descrever reações químicas e a taxa de crescimento de uma população ou um indivíduo.

Os construtos matemáticos da distribuição logística são os seguintes:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{\alpha-x}{\beta}}}{\beta \left[ 1 + e^{-\frac{\alpha-x}{\beta}} \right]^2} \text{ para qualquer valor de } \alpha \text{ e } \mu$$

média =  $\alpha$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{1}{3} \pi^2 \beta^2}$$

obliquidade = 0 (este valor se aplica a todas as entradas de média e escala)

curtose excessiva = 1,2 (este valor se aplica a todas as entradas de média e escala)

Média ( $\alpha$ ) e escala ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição.

#### *Cálculo de parâmetros*

Há dois parâmetros padrão para a distribuição logística: média e escala. O parâmetro de média é o valor médio e, para esta distribuição, é igual à moda, porque é uma distribuição simétrica. Depois de selecionar o parâmetro de média, você pode estimar o parâmetro de escala. O parâmetro de escala é um número maior que 0. Quanto maior o parâmetro de escala, maior a variância.

Requisitos de entrada:

Beta da escala > 0, podendo ser qualquer valor positivo

Alfa da média pode ser qualquer valor

## ***Distribuição lognormal***

A distribuição lognormal é amplamente usada em situações nas quais os valores são positivamente inclinados, por exemplo, em análises financeiras para avaliação de títulos ou avaliações de propriedades, nas quais os valores não podem ficar abaixo de zero.

Os preços de ações normalmente são positivamente inclinados em vez de distribuídos normalmente (simetricamente). Os preços de ações apresentam essa tendência pois não podem cair abaixo do limite mais baixo, que é zero, mas podem aumentar até atingir qualquer preço sem limite. Do mesmo modo, os preços de imóveis demonstram obliquidade positiva pois não podem tornar-se negativos.

### *Condições*

As três condições subjacentes à distribuição lognormal são:

- As variáveis incertas podem crescer sem limites mas não podem ficar abaixo de zero.
- A variável incerta tem uma obliquidade positiva, com a maioria dos valores perto do limite inferior.
- O logaritmo natural da variável incerta produz uma distribuição normal.

Geralmente, se o coeficiente de variabilidade é maior que 30 por cento, use uma distribuição lognormal. Caso contrário, use a distribuição normal.

Os construtos matemáticos da distribuição lognormal são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi \ln(\sigma)}} e^{-\frac{[\ln(x)-\ln(\mu)]^2}{2[\ln(\sigma)]^2}} \quad \text{para } x > 0; \mu > 0 \text{ e } \sigma > 0$$

$$\text{média} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\exp(\sigma^2 + 2\mu)[\exp(\sigma^2) - 1]}$$

$$\text{obliquidade} = \left[\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}\right](2 + \exp(\sigma^2))$$

$$\text{curtose excessiva} = \exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 6$$

Média ( $\mu$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Média e desvio padrão  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

### *Conjuntos de parâmetros lognormais*

Por padrão, a distribuição lognormal usa a média aritmética e o desvio padrão. Para aplicações nas quais dados históricos estão disponíveis, é mais apropriado usar a média logarítmica e o desvio padrão ou a média geométrica e o desvio padrão.



### ***Distribuição lognormal deslocada***

A distribuição lognormal é amplamente usada em situações nas quais os valores são positivamente inclinados, por exemplo, em análises financeiras para avaliação de títulos ou avaliações de propriedades, nas quais os valores não podem ficar abaixo de zero. Os preços de ações normalmente são positivamente inclinados em vez de distribuídos normalmente (simetricamente). Os preços de ações apresentam essa tendência pois não podem cair abaixo do limite mais baixo, que é zero, mas podem aumentar até atingir qualquer preço sem limite. Em contrapartida, a distribuição lognormal deslocada é igual à distribuição lognormal, mas é deslocada de maneira que o valor resultante possa assumir valores negativos. Média, desvio padrão e deslocamento são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Média > 0

Desvio padrão > 0

Deslocamento pode ser um valor positivo ou negativo incluindo zero

### ***Distribuição normal***

A distribuição normal é a distribuição mais importante em teoria de probabilidade porque descreve muitos fenômenos naturais, como o QI ou a altura das pessoas. Pessoas responsáveis por tomar decisões podem usar a distribuição normal para descrever variáveis incertas, como a taxa de inflação ou o preço futuro da gasolina.

*Condições*

As três condições subjacentes à distribuição normal são:

- Algum valor da variável incerta é o mais provável (a média da distribuição).
- A variável incerta pode tanto estar acima da média como abaixo dela (simétrica em relação à média).
- A variável incerta provavelmente estará mais próxima da média do que mais afastada dela.

Os construtos matemáticos da distribuição normal são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ para todos os valores de } x \text{ e } \mu, \text{ enquanto } \sigma > 0$$

média =  $\mu$

desvio padrão =  $\sigma$

obliquidade = 0 (isso se aplica a todas as entradas de média e desvio padrão)

curtose excessiva = 0 (isso se aplica a todas as entradas de média e desvio padrão)

Média ( $\mu$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Desvio padrão > 0, podendo ser qualquer valor positivo

A média pode assumir qualquer valor

### ***Distribuição parabólica***

A distribuição parabólica é um caso especial da distribuição de beta quando Forma = Escala = 2. Os valores fecham ao mínimo e máximo tem probabilidades baixas de ocorrência ao passo que valores entre estes dois extremos têm probabilidades mais altas ou ocorrência. O mínimo e máximo são os parâmetros de distributional.

Os construtos matemáticos da distribuição parabólica são os seguintes:

$$f(x) = \frac{(x)^{(\alpha-1)}(1-x)^{(\beta-1)}}{\left[ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right]} \text{ for } \alpha > 0; \beta > 0; x > 0$$

Where the functional form above is for a Beta distribution, and for a Parabolic function, we set Alpha = Beta = 2 and a shift of location in Minimum, with a multiplicative factor of (Maximum – Minimum).

$$\text{média} = \frac{Min + Max}{2}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(Max - Min)^2}{20}}$$

$$\text{obliquidade} = 0$$

$$\text{curtose excessiva} = -0.8571$$

Requisitos de entrada:

Mínimo < Máximo

### ***Distribuição Pareto***

A distribuição Pareto é amplamente usada na investigação de distribuições associadas a fenômenos empíricos, como o tamanho da população de cidades, a ocorrência de recursos naturais, o tamanho de empresas, renda pessoal, flutuações no preço de ações e agrupamento de erros em circuitos de comunicação.

Os construtos matemáticos da distribuição Pareto são os seguintes:

$$f(x) = \frac{\beta L^\beta}{x^{(1+\beta)}} \text{ para } x > L$$

$$\text{média} = \frac{\beta L}{\beta - 1}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{\beta L^2}{(\beta - 1)^2 (\beta - 2)}}$$

$$\text{obliquidade} = \sqrt{\frac{\beta-2}{\beta} \left[ \frac{2(\beta+1)}{\beta-3} \right]}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6(\beta^3 + \beta^2 - 6\beta - 2)}{\beta(\beta-3)(\beta-4)}$$

Forma ( $\alpha$ ) e local ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição.

#### *Cálculo de parâmetros*

Há dois parâmetros padrão para a distribuição Pareto: localização e formato. O parâmetro de localização é o limite inferior da variável. Depois de selecionar o parâmetro de localização, você pode estimar o parâmetro de formato. O parâmetro de formato é um número maior que 0 e geralmente maior que 1. Quanto maior o parâmetro de formato, menor a variação e mais grossa a cauda direita da distribuição.

Requisitos de entrada:

Localização  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

Formato  $\geq 0,05$

#### ***Distribuição de Pearson V***

A distribuição de Pearson V está relacionada à distribuição gama invertida, na qual ela é a recíproca da variável distribuída de acordo com a distribuição gama. A distribuição de Pearson V também é usada para modelar atrasos de tempo nos quais haja quase certeza de algum atraso mínimo e o atraso máximo não tem limites, por exemplo, atraso na chegada de serviços de emergência e o tempo para consertar uma máquina. Alfa (também conhecido como formato) e beta (também conhecido como escala) são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição Pearson V são os seguintes:

$$f(x) = \frac{x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}}{\beta^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha, \beta/x)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\text{média} = \frac{\beta}{\alpha-1}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{4\sqrt{\alpha-2}}{\alpha-3}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{30\alpha - 66}{(\alpha-3)(\alpha-4)} - 3$$

Requisitos de entrada:

Alfa (formato) > 0

Beta (escala) > 0

### ***Distribuição de Pearson VI***

A distribuição de Pearson VI está relacionada à distribuição gama, na qual ela é a função racional de duas variáveis distribuídas de acordo com duas distribuições gama. Alfa 1 (também conhecido como formato 1), alfa 2 (também conhecido como formato 2) e beta (também conhecido como escala) são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição Pearson VI são os seguintes:

$$f(x) = \frac{(x/\beta)^{\alpha_1-1}}{\beta B(\alpha_1, \alpha_2)[1+(x/\beta)]^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

$$F(x) = F_B\left(\frac{x}{x+\beta}\right)$$

$$\text{média} = \frac{\beta\alpha_1}{\alpha_2-1}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{\beta^2\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2-1)}{(\alpha_2-1)^2(\alpha_2-2)}}$$

$$\text{obliquidade} = 2\sqrt{\frac{\alpha_2-2}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2-1)}}\left[\frac{2\alpha_1+\alpha_2-1}{\alpha_2-3}\right]$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{3(\alpha_2-2)}{(\alpha_2-3)(\alpha_2-4)}\left[\frac{2(\alpha_2-1)^2}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2-1)}+(\alpha_2+5)\right]-3$$

Requisitos de entrada:

Alfa 1 (formato 1) > 0

Alfa 2 (formato 2) > 0

Beta (escala) > 0

### ***Distribuição PERT***

A distribuição PERT é amplamente usada em gerenciamento de projetos e programas para definir os cenários de pior caso, caso nominal e melhor caso para o prazo de conclusão do projeto. Ela está relacionada às distribuições beta e triangular. A distribuição PERT pode ser usada para identificar riscos

em projetos e modelos de custo com base na probabilidade de cumprir metas e objetivos em qualquer número de componentes de projeto usando os valores mínimo, mais provável e máximo, mas foi projetada para gerar uma distribuição que se assemelhe mais a distribuições de probabilidade realistas. A distribuição PERT pode fornecer um ajuste próximo à distribuição normal ou lognormal. Assim como a distribuição triangular, a distribuição PERT dá mais ênfase ao valor "mais provável" do que às estimativas mínima e máxima. No entanto, diferentemente da distribuição triangular, a distribuição PERT constrói uma curva suavizada, que dá progressivamente mais ênfase a valores próximos ao valor mais provável, em detrimento de valores mais próximos das bordas. Na prática, isso significa que "confiamos" na estimativa para o valor mais provável e acreditamos que, mesmo se ele não for exatamente preciso (e as estimativas raramente o são), temos uma expectativa de que o valor resultante será próximo daquela estimativa. Supondo que muitos fenômenos reais são distribuídos normalmente, a vantagem da distribuição PERT é que ela produz uma curva com forma semelhante à da curva normal, sem conhecer os parâmetros precisos da curva normal relacionada. Mínimo, mais provável e máximo são os parâmetros de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição PERT são os seguintes:

$$f(x) = \frac{(x - \min)^{A1-1} (\max - x)^{A2-1}}{B(A1, A2)(\max - \min)^{A1+A2-1}}$$

$$\text{where } A1 = 6 \left[ \frac{\min + 4(\text{likely}) + \max}{6} - \min \right] \text{ and } A2 = 6 \left[ \max - \frac{\min + 4(\text{likely}) + \max}{6} \right]$$

and  $B$  is the Beta function

$$\text{média} = \frac{\text{Min} + 4\text{Mode} + \text{Max}}{6}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(\mu - \text{Min})(\text{Max} - \mu)}{7}}$$

$$\text{obliquidade} = \sqrt{\frac{7}{(\mu - \text{Min})(\text{Max} - \mu)}} \left( \frac{\text{Min} + \text{Max} - 2\mu}{4} \right)$$

Requisitos de entrada:

Mínimo ≤ Mais provável ≤ Máximo, podendo ser positivos, negativos ou zero

### ***Distribuição potencial***

A distribuição potencial está relacionada à distribuição exponencial uma vez que a probabilidade de resultados pequenos é grande, mas diminui exponencialmente à medida que o valor do resultado aumenta. Alfa (também conhecido como formato) é o único parâmetro de distribuição.

Os construtos matemáticos da distribuição potencial são os seguintes:

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$F(x) = x^\alpha$$

$$\text{média} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)}}$$

$$\text{obliquidade} = \sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha} \left( \frac{2(\alpha-1)}{\alpha+3} \right)}$$

Requisitos de entrada:

Alfa (formato) > 0

### ***Distribuição potencial multiplicativa deslocada***

A distribuição potencial está relacionada à distribuição exponencial uma vez que a probabilidade de resultados pequenos é grande, mas diminui exponencialmente à medida que o valor do resultado aumenta. Alfa (também conhecido como formato) é o único parâmetro de distribuição.

Requisitos de entrada:

Alfa (formato) > 0

Local pode ser qualquer número positivo ou negativo incluindo zero

Fator > 0

### ***Distribuição qui-quadrada***

A distribuição qui-quadrada é uma distribuição de probabilidade usada predominantemente em testes de hipóteses e está relacionada à distribuição gama e à distribuição normal padrão. Por exemplo, as somas de distribuições normais independentes são distribuídas como um qui-quadrado ( $\chi^2$ ) com  $k$  graus de liberdade.

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2 \sim \chi_k^2$$

Os construtos matemáticos da distribuição qui-quadrada são os seguintes:

$$f(x) = \frac{0.5^{-k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \text{ para todo } x > 0$$

média =  $k$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{2k}$$

$$\text{obliquidade} = 2\sqrt{\frac{2}{k}}$$

$$\text{curtose excessiva} = \frac{12}{k}$$

$\Gamma$  é a função gama. O grau de liberdade  $k$  é o único parâmetro de distribuição.

A distribuição qui-quadrada também pode ser modelada usando uma distribuição gama definindo:

parâmetro de forma =  $\frac{k}{2}$  e escala =  $2S^2$ , onde  $S$  é a escala.

Requisitos de entrada:

Graus de liberdade  $> 1$ , devendo ser um inteiro  $< 300$

### ***Distribuição t de Student***

A distribuição t de Student é a mais amplamente usada em teste de hipóteses. Essa distribuição é usada para estimar a média de uma população normalmente distribuída quando o tamanho da amostra é pequeno, sendo usada para testar a significância estatística da diferença entre duas amostras ou intervalos de confiança para amostras pequenas.

Os construtos matemáticos da distribuição t são os seguintes:

$$f(t) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{r\pi} \Gamma[r/2]} (1 + t^2/r)^{-(r+1)/2}$$

média = 0 (isso se aplica a todos os graus de liberdade  $r$  exceto se a distribuição for deslocada para outra localização central diferente de zero)

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{r}{r-2}}$$

obliquidade = 0 (se aplica a todos os graus de liberdade  $r$ )

$$\text{curtose excessiva} = \frac{6}{r-4} \text{ for all } r > 4$$

onde  $t = \frac{x - \bar{x}}{s}$  e  $\Gamma$  é a função gama.

Os graus de liberdade  $r$  são o único parâmetro de distribuição. A distribuição  $t$  está relacionada à distribuição  $F$ , como mostrado a seguir: o quadrado de um valor de  $t$  com  $r$  graus de liberdade é distribuído como  $F$  com 1 e  $r$  graus de liberdade. O formato geral da função de densidade da probabilidade da distribuição  $t$  lembra o formato de sino de uma variável normalmente distribuída com média 0 e variância 1, exceto que essa é um pouco mais baixa e mais larga e é leptocúrtica (caudas gordas nas extremidades e um pico no centro). À medida que o grau de liberdade aumenta (digamos, acima de 30), a distribuição  $t$  se aproxima da distribuição normal com média 0 e variância 1.

Requisitos de entrada:

Grau de liberdade  $\geq 1$ , devendo ser um inteiro

### ***Distribuição triangular***

A distribuição triangular descreve uma situação na qual você sabe os valores mínimo, máximo e os mais prováveis (MP) de acontecer. Por exemplo, você poderia descrever o número de carros vendidos por semana quando as vendas passadas mostrassem os números mínimo e máximo e o número normal de carros vendidos.

#### *Condições*

As três condições subjacentes à distribuição triangular são:

- O número mínimo de itens é fixo.
- O número máximo de itens é fixo.
- O número mais provável de itens encontra-se entre os valores mínimo e máximo, formando uma distribuição de formato triangular, que mostra que os valores perto do mínimo e do máximo têm menor chance de ocorrência do que aqueles perto do valor mais provável (MP).

Os construtos matemáticos da distribuição triangular são os seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x - \text{Min})}{(\text{Max} - \text{Min})(\text{MP} - \text{min})} & \text{para } \text{Min} < x < \text{Mais provavel} \\ \frac{2(\text{Max} - x)}{(\text{Max} - \text{Min})(\text{Max} - \text{MP})} & \text{para } \text{Mais provavel} < x < \text{Max} \end{cases}$$

$$\text{média} = \frac{1}{3}(\text{Min} + \text{MP} + \text{Max})$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{1}{18}(\text{Min}^2 + \text{MP}^2 + \text{Max}^2 - \text{Min Max} - \text{Min MP} - \text{Max MP})}$$

$$\text{obliquidade} = \frac{\sqrt{2}(\text{Min} + \text{Max} - 2\text{MP})(2\text{Min} - \text{Max} - \text{MP})(\text{Min} - 2\text{Max} + \text{MP})}{5(\text{Min}^2 + \text{Max}^2 + \text{MP}^2 - \text{MinMax} - \text{MinMP} - \text{MaxMP})^{3/2}}$$

curtose excessiva = -0,6 (isso se aplica a todas as entradas de *Min*, *Máx* e *Mais provável*)



O valor mínimo (*Mín*), o valor mais provável (*MP*) e o valor máximo (*Máx*) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

$Mín \leq \text{Mais provável} \leq Máx$ , podendo assumir qualquer valor

No entanto,  $Mín < Máx$ , podendo assumir qualquer valor

### ***Distribuição uniforme***

Com a distribuição uniforme, todos os valores entre o mínimo e o máximo ocorrem com a mesma probabilidade.

*Condições*

As três condições subjacentes à distribuição uniforme são:

- O valor mínimo é fixo.
- O valor máximo é fixo.
- Todos os valores entre o mínimo e o máximo ocorrem com a mesma probabilidade.

Os construtos matemáticos da distribuição uniforme são os seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{Max - Min} \quad \text{para todos os valores de forma que } Min < Max$$

$$\text{média} = \frac{Min + Max}{2}$$

$$\text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{(Max - Min)^2}{12}}$$

obliquidade = 0 (isso se aplica a todas as entradas de *Mín* e *Máx*)

curtose excessiva = -1,2 (isso se aplica a todas as entradas de *Mín* e *Máx*)

Valor máximo (*Máx*) e valor mínimo (*Mín*) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

$Mín < Máx$ , podendo assumir qualquer valor

### ***Distribuição de Weibull (distribuição de Rayleigh)***

A distribuição Weibull descreve os dados resultantes de testes de vida útil e fátiga. Normalmente ela é usada para descrever o tempo de falha em estudos de confiabilidade, como a força necessária para quebrar um material em testes de confiabilidade e controle de qualidade. As distribuições Weibull também são usadas para representar várias quantidades físicas, como velocidade do vento. A distribuição Weibull é uma família de distribuições que podem assumir as propriedades de muitas outras distribuições. Por exemplo, dependendo do parâmetro de forma que você definir, a distribuição Weibull pode ser usada para modelar as distribuições exponencial e Rayleigh, entre outras. A distribuição Weibull é muito flexível. Quando o parâmetro de forma Weibull é igual a 1,0, a distribuição Weibull é idêntica à distribuição

exponencial. O parâmetro de localização Weibull permite configurar uma distribuição exponencial para iniciar em uma localização qualquer diferente de 0,0. Quando o parâmetro de forma é menor do que 1,0, a distribuição Weibull se torna uma curva com forte inclinação decrescente. Um fabricante pode achar esse efeito útil para descrever falhas de peças durante um período de processamento. Os construtos matemáticos da distribuição Weibull são os seguintes:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{x}{\beta} \right]^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$\text{média} = \beta \Gamma(1 + \alpha^{-1})$$

$$\text{desvio padrão} = \beta^2 \left[ \Gamma(1 + 2\alpha^{-1}) - \Gamma^2(1 + \alpha^{-1}) \right]$$

$$\text{obliquidade} = \frac{2\Gamma^3(1 + \beta^{-1}) - 3\Gamma(1 + \beta^{-1})\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) + \Gamma(1 + 3\beta^{-1})}{\left[ \Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1}) \right]^{3/2}}$$

curtose excessiva =

$$\frac{-6\Gamma^4(1 + \beta^{-1}) + 12\Gamma^2(1 + \beta^{-1})\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - 3\Gamma^2(1 + 2\beta^{-1}) - 4\Gamma(1 + \beta^{-1})\Gamma(1 + 3\beta^{-1}) + \Gamma(1 + 4\beta^{-1})}{\left[ \Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1}) \right]^2}$$

Formato ( $\alpha$ ) e escala de localização central ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição e  $\Gamma$  é a função gama.

Requisitos de entrada:

Alfa da forma  $\geq 0,05$

Beta da escala  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

### ***Distribuições Weibull e Rayleigh multiplicativa deslocada***

A distribuição Weibull descreve os dados resultantes de testes de vida útil e fátiga. Normalmente ela é usada para descrever o tempo de falha em estudos de confiabilidade, como a força necessária para quebrar um material em testes de confiabilidade e controle de qualidade. As distribuições Weibull também são usadas para representar várias quantidades físicas, como velocidade do vento. A distribuição Weibull é uma família de distribuições que podem assumir as propriedades de muitas outras distribuições. Por exemplo, dependendo do parâmetro de forma que você definir, a distribuição Weibull pode ser usada para modelar as distribuições exponencial e Rayleigh, entre outras. A distribuição Weibull é muito flexível. Quando o parâmetro de forma Weibull é igual a 1,0, a distribuição Weibull é idêntica à distribuição exponencial. A escala de localização central ou o parâmetro beta Weibull permite configurar uma distribuição exponencial para iniciar em uma localização qualquer diferente de 0,0. Quando o parâmetro de forma é menor do que 1,0, a distribuição Weibull se torna uma curva com forte inclinação decrescente. Um fabricante pode achar esse efeito útil para descrever falhas de peças durante um período de processamento. Forma ( $\alpha$ ) e escala ( $\beta$ ) são os parâmetros de distribuição.

Requisitos de entrada:

Alfa da forma  $\geq 0,05$

Escala de localização central ou beta  $> 0$ , podendo ser qualquer valor positivo

Local pode ser qualquer número positivo ou negativo incluindo zero

Fator  $> 0$