

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS
GERAL POR TÉCNICAS DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

por

Ismael Rodrigo Heinen

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2009

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS
GERAL POR TÉCNICAS DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

por

Ismael Rodrigo Heinen

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dra. Cynthia Feijó Segatto (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef (IFM/UFPEL)

Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite (CNEN/RIO)

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves (IFM/UFPEL)

Prof. Dr. Horácio A Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de Janeiro de 2009

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Marco Tullio M. B. de Vilhena pela amizade e conhecimento tantas vezes manifestados durante estes anos.

Ao professor Bardo Ernst Josef Bodmann pela amizade, generosidade e pelas sugestões que foram decisivas para finalização deste trabalho.

Aos professores Sérgio Wortmann, Jorge Zabadal e Cynthia Feijó Segatto pela amizade e sugestões ao longo do trabalho.

Aos colegas e amigos do DENUC/UFRGS que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho.

Aos meus pais Alberto e Gelcy que sempre me incentivaram nos estudos.

À minha esposa Michele pela compreensão e companheirismo.

À CAPES pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

RESUMO

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS GERAL POR TÉCNICAS DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS

No presente trabalho são apresentadas soluções analíticas das equações de difusão de nêutrons bidimensionais com dois grupos de energia, a saber, nêutrons rápidos e térmicos em uma placa com propriedades homogêneas. Além disso, são resolvidos detalhadamente os problemas onde a placa homogênea é substituída por duas e quatro regiões, tornando-os não-homogêneos. A partir da aplicação da transformada de Laplace e da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), respectivamente, é resolvida em uma forma analítica o problema de autovalor resultante para o fluxo de nêutrons. No problema heterogêneo são usados filtros para homogenizar as condições de contorno não-homogêneas. Esta é a condição para a aplicação da GITT. Os três problemas mencionados acima são resolvidos aplicando primeiramente a GITT, o qual reduz a dimensão da equação de difusão, seguida da aplicação da transformada de Laplace, o qual reduz a ordem da equação. Deste procedimento, resulta um sistema de equações algébricas dependente das constantes de integração. O sistema é resolvido usando a técnica da eliminação de Gauss. Os fluxos transformados pela GITT são recuperados invertendo-se analiticamente a transformada de Laplace usando a expansão de Heaviside, os quais ainda dependem das constantes de integração. A partir da aplicação das condições de contorno e de interface (para os problemas não-homogêneos) obtém-se um sistema de equações algébricas homogêneas, de onde é determinado o fator de multiplicação efetivo k_{eff} pelo método da bissecção. As constantes de integração são determinadas fazendo uso da potência prescrita da placa. Assim, os fluxos de nêutrons transformados pela GITT ficam determinados e os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos são recuperados através da fórmula da inversa da GITT, usando a expansão do potencial. Resultados são comparados com a solução do método de diferenças finitas.

Palavras-chave: Soluções analíticas, Equações de Difusão de Nêutrons, GITT, transformada de Laplace.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR THE GENERAL NEUTRONS DIFFUSION EQUATION BY INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUES

In the present work we present analytical solutions of the bi-dimensional neutron diffusion equation with two energy groups, i.e. fast and thermal neutrons in a sheet with homogeneous properties. Further we solve the detailed problem where the homogeneous sheet is substituted by two and four regions, rendering the problem a non-homogeneous one. Upon application of the Laplace transform and Generalized Integral Transform Technique (GITT), respectively, we solve in an analytical fashion the resulting eigenvalue problem for the neutron flux. In the heterogeneous problem, we use filter functions in order to homogenize the non-homogeneous boundary conditions. This is a condition for the application of GITT. We solve the three problems mentioned above applying first GITT, which reduces the dimension of the diffusion equation followed by the Laplace transform, which reduces the order of the equation. This procedure yields a non-homogeneous algebraic system depending on integration constants. The system is solved using the elimination technique by Gauss. The transformed fluxes by GITT are recovered upon inverting analytically the Laplace transform using Heaviside's expansion which depend still on the integration constants. Upon application of the boundary and interface conditions (for the non-homogeneous problem) one obtains a system of homogeneous algebraic equations, where we determine the effective multiplication factor k_{eff} by the bisection method. The integration constants are determined making use of the predefined power of the sheet. Thus the neutron fluxes transformed by GITT are determined and the fast and thermal neutron flux are recovered by the inverse formula of GITT, using the potential expansion. Results are compared to the solution by the finite difference method.

Keywords: Analytical solutions, Neutrons Diffusion Equation, GITT, Laplace transform.

ÍNDICE

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 4 |
| | 2.1 Aspectos Físicos sobre Reatores Nucleares | 4 |
| | 2.2 Modelo da Teoria da Difusão | 11 |
| | 2.2.1 Modelo da Teoria da Difusão para um Grupo de Energia | 11 |
| | 2.2.2 Modelo da Teoria da Difusão para Multigrupo de Energia | 15 |
| | 2.2.3 Teoria da Difusão para Dois Grupos de Energia | 17 |
| 3 | O MÉTODO UTILIZADO | 19 |
| | 3.1 A GITT | 19 |
| 4 | SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HOMOGÊNEO | 23 |
| | 4.1 Resultados do Problema em Meio Homogêneo | 28 |
| 5 | SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HETEROGÊNEO PARA DUAS REGIÕES | 32 |
| | 5.1 GITT | 34 |
| | 5.2 Resultados do Problema em Meio Heterogêneo para Duas Regiões | 37 |
| 6 | SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HETEROGÊNEO PARA QUATRO REGIÕES | 41 |
| | 6.1 A sequência do algoritmo | 43 |
| | 6.2 Solução por Laplace e GITT | 45 |
| | 6.3 Resultados do Problema Heterogêneo para Quatro Regiões | 47 |
| 7 | CONCLUSÃO | 49 |
| 8 | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 51 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Placa plana bidimensional com contornos e parâmetros nucleares homogêneos. | 23 |
| 4.2 | Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados. | 30 |
| 4.3 | Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados em $y=0$ | 30 |
| 4.4 | Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados. | 31 |
| 4.5 | Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados em $y=0$ | 31 |
| 5.1 | Placa plana bidimensional com contornos e parâmetros nucleares localmente homogêneos. | 32 |
| 5.2 | Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados. | 39 |
| 5.3 | Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados em $y=0$ | 40 |
| 5.4 | Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados. | 40 |
| 5.5 | Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados em $y=0$ | 40 |
| 6.1 | Placa plana bidimensional com contornos, interfaces internas e coeficientes físicos localmente homogêneos. | 41 |
| 6.2 | Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados. | 48 |
| 6.3 | Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados. | 48 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Parâmetros nucleares para o problema em meio homogêneo. | 28 |
| 4.2 | Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Rápidos | |
| | Normalizados. | 29 |
| 4.3 | Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Térmicos | |
| | Normalizados. | 29 |
| 5.1 | Parâmetros nucleares para o problema em meio heterogêneo | |
| | para duas regiões. | 37 |
| 5.2 | Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Rápidos | |
| | Normalizados. | 38 |
| 5.3 | Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Térmicos | |
| | Normalizados. | 38 |

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

| | |
|---------------------|---|
| <i>BWR:</i> | Reator de Água em Ebulição. |
| <i>DF:</i> | Diferenças Finitas. |
| <i>D.P.:</i> | Desvio Percentual. |
| <i>EDO's:</i> | Equações Diferenciais Ordinárias. |
| <i>EDP's:</i> | Equações Diferenciais Parciais. |
| <i>GITT:</i> | Generalized Integral Transform Technique. |
| k_{eff} : | Fator de Multiplicação Efetivo de Nêutrons. |
| <i>LU:</i> | Decomposição de uma matriz como o produto de uma matriz triangular inferior (<i>L</i>) com uma matriz triangular superior (<i>U</i>). |
| <i>POA – NDIFF:</i> | Porto Alegre-Neutron Diffusion (algoritmo). |
| <i>PWR:</i> | Reator de Água Pressurizada. |
| <i>W:</i> | Watts. |

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Romanos

| | |
|---------------------|---|
| A : | operador diferencial genérico. |
| $A(y(t))$: | matriz de coeficientes do problema transformado não linear. |
| A_j^r : | integrandos resultantes da aplicação da GITT. |
| ${}_A B_{gj}^r$: | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| a_1 : | coeficiente da condição de contorno genérica. [cm] |
| a_2 : | coeficiente da condição de contorno genérica. [cm] |
| B : | operador diferencial genérico. |
| B^r : | integrandos resultantes da aplicação da GITT. |
| ${}_N B_{gj}^r$: | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| b_1 : | coeficiente da condição de contorno genérica. [cm] |
| b_2 : | coeficiente da condição de contorno genérica. [cm] |
| d^3r : | elemento de volume. [cm^3] |
| $D(r)$: | coeficiente de difusão de nêutrons, em determinado ponto r . [cm^2/s] |
| D_g^r : | coeficiente de difusão de nêutrons do grupo de energia g e região r . [cm^2/s] |
| Er : | energia liberada por fissão. [MeV] |
| G : | número de grupos de energia. |
| f : | fissão nuclear proveniente da reação de absorção. |
| $\vec{J}(r, t)$: | densidade de corrente de nêutrons. [$1/(cm^2s)$] |
| $\vec{J}(r_s, t)$: | densidade de corrente de nêutrons em um ponto de um elemento de superfície dS . [$1/(cm^2s)$] |
| $k(x)$: | função real e contínua do problema de Sturm-Liouville. |
| k : | fator de multiplicação de nêutrons. |
| k_{eff} : | fator de multiplicação efetivo de nêutrons. |
| L : | operador diferencial associado ao problema de Sturm-Liouville. |
| \mathcal{L} : | operador da transformada inversa de Laplace. |
| N : | número de autovalores da fórmula da inversa e/ou densidade do núcleo alvo. |

| | |
|-----------------------|--|
| N_i : | quadrado da norma $L^2(a, b)$ e do problema da temperatura do fluido. |
| $N(r, t)$: | densidade de nêutrons. [cm^{-3}] |
| n : | nêutron. |
| $n(r, E, t)$: | densidade do número de nêutrons dependente da energia. [$1/(cm^2s)$] |
| N_j^r : | integrandos resultantes da aplicação da GITT. |
| p : | prótons liberados na reação de absorção. |
| P : | potência prescrita na placa. [W] |
| $P_{gj}(s_i)$: | polinômio numerador usado na expansão de Heaviside. |
| Q_s : | polinômio denominador usado na expansão de Heaviside. |
| Q'_{s_i} : | derivada do polinômio denominador usado na expansão de Heaviside. |
| $q(x)$: | função real e contínua do problema de Sturm-Liouville. |
| $R(r, t)$: | taxa de reação. [$1/(cm^2s)$] |
| r_s : | ponto em um elemento de superfície dS . |
| S : | fonte genérica tanto para EDP como para problemas transformados genéricos. [$1/(cm^2s^2)$] |
| S_{f1} : | fonte de fissão de nêutrons rápidos. [$1/(cm^2s^2)$] |
| S_{f2} : | fonte de fissão de nêutrons térmicos. [$1/(cm^2s^2)$] |
| $S(r, t)$: | fonte de nêutrons em determinado ponto r e tempo. [$1/(cm^2s^2)$] |
| $S(r)$: | fonte de nêutrons, em determinado ponto r . |
| $S_f(r, t)$: | fonte de fissão de nêutrons em determinado ponto r e tempo. [$1/(cm^2s^2)$] |
| S_g^{ext} : | fonte de fissão de nêutrons externa. [$1/(cm^2s^2)$] |
| t : | variável temporal. [s] |
| AT_{gj}^r : | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| NT_{gj}^r : | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| AU_{gj}^r : | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| NU_{gj}^r : | coeficientes das matrizes resultantes da aplicação da GITT e Laplace. |
| v : | velocidade dos nêutrons. [cm/s] |
| $\overline{v_i(t)}$: | fluxo de nêutrons rápidos transformado pela GITT. |
| V : | volume arbitrário. [cm^3] |
| x_1 : | dimensão horizontal da primeira região da placa bidimensional. [cm] |
| x_2 : | dimensão horizontal da segunda região da placa bidimensional. [cm] |
| y_1 : | dimensão vertical da placa bidimensional. [cm] |

$\overline{y(s)}$: vetor de incógnitas genérico transformado por Laplace.

2. Caracteres Gregos

| | |
|-------------------------------|---|
| α : | partícula liberada na reação de absorção. |
| γ : | radiação liberada na reação de absorção. |
| Γ : | volume de interesse na placa (2-D). [cm^2] |
| $\partial\Gamma$: | contorno da placa. [cm] |
| $\partial\Gamma_{xy}$: | pedaços do contorno da placa. [cm] |
| $\partial\Gamma_{0y}$: | contorno da placa ao longo do eixo coordenado y. [cm] |
| $\partial\Gamma_{x0}$: | contorno da placa ao longo do eixo coordenado x. [cm] |
| $\partial\Gamma_{\bar{xy}}$: | contorno do final da placa paralelo ao eixo coordenado y. [cm] |
| $\partial\Gamma_{x\bar{y}}$: | contorno do final da placa paralelo ao eixo coordenado x. [cm] |
| $\bar{\delta}_{gg'}$: | delta de Kronecker. |
| ζ : | vetor utilizado na solução de um problema transformado genérico. |
| η : | número de nêutrons emitidos quando um nêutron é absorvido no núcleo. |
| $\eta_{gi}^r(y)$: | coeficiente da expansão da GITT. |
| $\tilde{\eta}^r$: | coeficiente da expansão da GITT transformado por Laplace. |
| λ ou λ_i : | autovalor dos problemas de Sturm-Liouville. |
| ν : | número médio de nêutrons emitidos por fissão nuclear. |
| $\nu\Sigma_{fg'}$: | produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão no grupo g . [cm^{-1}] |
| $\Xi_{gg'}^r$: | seções de choque de fissão e espalhamento da equação difusiva geral. [cm^{-1}] |
| $\xi_{gi}^r(x)$: | autofunções do problema de Sturm-Liouville. |
| σ : | seção de choque microscópica do alvo. [cm^2] |
| $\sigma(E)$: | seção de choque microscópica do alvo dependente da energia. [cm^2] |
| σ_c : | seção de choque microscópica de captura. [cm^2] |
| σ_f : | seção de choque microscópica de fissão. [cm^2] |
| $\sigma_f(r)$: | seção de choque microscópica de fissão em determinado ponto r . [cm^2] |
| Σ : | seção de choque macroscópica do alvo. [cm^{-1}] |
| Σ_f : | seção de choque macroscópica de fissão. [cm^{-1}] |

| | |
|-----------------------------------|--|
| Σ_c : | seção de choque macroscópica de captura. [cm^{-1}] |
| Σ_a : | seção de choque macroscópica de absorção. [cm^{-1}] |
| Σ_{ag} : | seção de choque macroscópica de absorção do grupo g . [cm^{-1}] |
| $\Sigma_a(r)$: | seção de choque macroscópica de absorção em determinado ponto r . [cm^{-1}] |
| Σ_f : | seção de choque macroscópica de fissão. [cm^{-1}] |
| $\Sigma_{gg'}$: | seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para g . [cm^{-1}] |
| Σ_t : | seção de choque macroscópica total. [cm^{-1}] |
| Σ_{tg} : | seção de choque macroscópica total do grupo g . [cm^{-1}] |
| Σ_{Rg} : | seção de choque macroscópica de remoção do grupo de energia g . [cm^{-1}] |
| Σ_{sg} : | seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons para fora do grupo de energia g . [cm^{-1}] |
| $\Sigma_{sg'g}$: | seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo de energia g' |
| $v(x, t)$: | potencial genérico. |
| $\overline{v_i(t)}$: | potencial genérico transformado pela GITT. |
| Υ_1^r e Υ_0^r : | termos que contemplam graus de liberdade provenientes da aplicação da transformada de Laplace. |
| $\phi(r, E, t)$: | fluxo de nêutrons dependente da energia. [$1/(cm^2s)$] |
| $\phi(r, t)$: | fluxo de nêutrons. [$1/(cm^2s)$] |
| $\phi_0(r)$: | condição inicial para o fluxo de nêutrons. [$1/(cm^2s)$] |
| $\varphi_{gi}(y)$: | fluxo transformado de nêutrons via GITT . |
| $\overline{\varphi_{gi}(s)}$: | fluxo transformado de nêutrons via GITT e Laplace. |
| χ_g : | espectro integrado de nêutrons de fissão no grupo g . |
| χ_1 : | espectro integrado de nêutrons de fissão no grupo de nêutrons rápidos. |
| χ_2 : | espectro integrado de nêutrons de fissão no grupo de nêutrons térmicos. |
| $\psi(x)$: | potencial genérico do problema de Sturm-Liouville. |
| $\psi_i(x)$: | autofunção do problema de Sturm-Liouville. |
| Ω_g^r : | seção de choque de remoção do grupo de energia g da equação difusiva geral. |
| ∇ : | operador gradiente. |
| ∇^2 : | operador laplaciano. |

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Existe uma vasta literatura relativa ao tópico de solução da equação de difusão de nêutrons para o modelo de multigrupo utilizando métodos numéricos. Entre os quais são citados os seguintes trabalhos: [Wachspress, 1966], [Shober, 1977], [Lawrence, 1980], [Bennewitz, 1975], [Montagnini, 1994], [Gomit, 1985] e [Claro, 1992].

Por outro lado, soluções analíticas deste tipo de problema são restritos na literatura. De fato, recentemente Lemos [Lemos, 2005] resolveu o problema de autovalor para o fluxo de nêutrons de forma analítica. Para tal, foi aplicada a transformada de Laplace no conjunto de equações de difusão unidimensionais, para uma placa plana, em um meio heterogêneo, considerando um modelo de multigrupo de energia. Como resultado foi obtido um sistema algébrico heterogêneo com constantes de integração. O fluxo escalar transformado foi determinado resolvendo-se este sistema algébrico. Já o fluxo escalar original foi recuperado através da inversão da transformada de Laplace por meio da técnica da expansão de Heaviside. As condições de contorno e continuidade de fluxo e corrente foram aplicadas de forma a obter-se um sistema algébrico homogêneo. Assim, o valor do fator de multiplicação efetivo, (k_{eff}) foi obtido pelo método da bissecção anulando-se o determinante da matriz associada ao sistema algébrico homogêneo.

Neste trabalho, dando continuidade à busca de soluções analíticas, é resolvido o problema de difusão de nêutrons em duas dimensões, em geometria cartesiana, considerando-se dois grupos de energia e meios homogêneo e heterogêneo. A idéia básica do método consiste: aplicação do método GITT em uma variável espacial e solução da equação matricial resultante pela técnica da transformada de Laplace. Cumpre observar a existência de uma vasta literatura sobre a metodologia GITT. Para ilustração e melhor compreensão desta técnica, são citados os seguintes trabalhos: [Cotta et al., 1992], [Cotta, 1993], [Mikhailov e Cotta, 1994], [Wortmann, 1995], [Guerrero e Cotta, 1996], [Wortmann, 2003] e [Heinen,

2005]. No que diz respeito a técnica da transformada de Laplace são mencionados os seguintes trabalhos: [Segatto e Vilhena, 1994], [Segatto e Vilhena, 1999], [Brancher et al., 1999], [Gonçalves, 1999], [Gonçalves et al., 2000], [Segatto et al., 2001], [Segatto et al., 2005], [Vargas et al., 2007] e [Segatto et al., 2008].

Para atingir o objetivo proposto, este trabalho é organizado da maneira que segue. No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica na qual são abordados assuntos pertinentes a reatores nucleares, tais como o funcionamento dos reatores nucleares, os tipos de reações entre nêutron incidente e o núcleo de átomos, bem como os principais fenômenos que ocorrem durante o processo de fissão nuclear, assim como tipos e estruturas de alguns reatores nucleares. Também são abordados os modelos de difusão de nêutrons para um grupo de energia e para multigrupo. São descritos os procedimentos analíticos e as aproximações efetuadas ao longo do processo de construção das equações difusivas de nêutrons, tanto para um grupo de energia, como para multigrupo, e, por fim, para dois grupos de energia, a saber, nêutrons rápidos e térmicos.

No capítulo 3 são descritos os principais passos da aplicação da GITT num problema unidimensional, transiente e genérico. Também são feitas considerações a respeito da aplicabilidade desta técnica integral. Os passos apresentados neste capítulo são aplicados na solução dos três problemas de difusão de nêutrons apresentados neste trabalho.

No capítulo 4 é apresentada a solução do problema em meio homogêneo. É considerada uma placa plana bidimensional, constituída de uma região multiplicadora de nêutrons e dois grupos de energia. É apresentado o problema auxiliar, donde obtém-se a base usada na expansão em série dos potenciais originais. São descritos os passos da aplicação da GITT em relação à variável x nas EDP's e da transformada de Laplace em relação à variável y no problema transformado, constituído de EDO's de segunda ordem. É destacada a recuperação dos fluxos transformados pela GITT através da transformada inversa de Laplace pela técnica da expansão de Heaviside. São comentados os procedimentos analíticos até a obtenção do fator de multiplicação efetivo, k_{eff} , e da solução analítica dos fluxos de nêutrons rápidos e térmicos. Por fim, são apresentados os valores dos parâmetros nucleares, bem como os resultados numéricos e gráficos para os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos obtidos a partir da solução analítica encontrada para o problema em meio homogêneo.

No capítulo 5 são descritos os passos para a solução do problema em meio heterogêneo para duas regiões e dois grupos de energia. É considerada uma placa plana bidimensional com duas regiões ao longo do eixo coordenado x , sendo uma região um meio multiplicador de nêutrons e a outra um meio moderador. No entanto, na solução deste pro-

blema, a ordem de aplicação das transformadas integrais foi alterada de forma a simplificar o procedimento de solução. Desse modo, as equações difusivas de nêutrons bidimensionais são resolvidas pelas técnicas da GITT em relação a variável y e a transformada de Laplace em relação a variável x . É importante mencionar que no problema heterogêneo, cada uma das duas regiões é tratada de forma independente, como se cada uma delas fosse um problema homogêneo. Para uní-las, são usadas as condições de continuidade de fluxo e corrente nas interfaces. Também são apresentados os valores dos parâmetros nucleares do problema em meio heterogêneo, bem como os resultados numéricos e gráficos obtidos a partir da solução analítica do problema.

No capítulo 6, são descritos os principais passos para construção de um procedimento analítico que gere soluções analíticas genéricas para as equações difusivas de nêutrons bidimensionais, para diversos grupos de energia e regiões. Este algoritmo recebe o nome de POA-NDIFF (Porto Alegre - Neutron Diffusion). Para exemplificar o funcionamento deste procedimento, são obtidas soluções analíticas para um problema heterogêneo, constituído de 2 grupos de energia e 4 regiões. Os resultados obtidos meramente demonstram o funcionamento do procedimento.

Os resultados obtidos para os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos, tanto do problema em meio homogêneo, bem como para o problema em meio heterogêneo para duas regiões, são comparados com os obtidos pelo método de Diferenças Finitas, fornecidos pelo professor Fernando Carvalho da Silva, [Silva, 2004]. Os resultados do terceiro problema ainda são preliminares, no entanto, apresentam um comportamento parecido com o problema em meio heterogêneo. Por fim, no capítulo 7, conclusões são feitas referente ao que foi apresentado neste trabalho, bem como observações para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Aspectos Físicos sobre Reatores Nucleares

Neste capítulo, são apresentados alguns tópicos sobre a física de reatores, a saber, aspectos físicos sobre reatores nucleares e como a energia nuclear é extraída dos reatores. Neste contexto, energia nuclear significa a energia liberada na fissão nuclear, devido a absorção de nêutrons pelo material físsil. Nêutrons são liberados pela fissão nuclear e, uma vez que, o número de nêutrons liberados é maior do que 1, uma reação em cadeia fica estabelecida. A quantidade de energia liberada neste processo, pode ser ajustada controlando o número de nêutrons. A energia é extraída na forma de calor por meio de um refrigerante (água) circulando no centro do reator. Encontrar a forma mais eficiente de extrair a energia resultante da fissão, é um assunto de extrema importância, uma vez que, um aumento da absorção da energia pelo refrigerante, aumenta a eficiência da conversão de energia do reator. Considerações dos limites de temperatura dos materiais e outras restrições são necessárias para manter uma densidade de potência uniforme no reator. De outro modo, é extremamente importante ter um cuidadoso controle da distribuição de nêutrons no reator. No caso de ocorrer um acidente no sistema do reator, a potência sairá do controle, ou seja, ocorre um aumento do número de nêutrons. Portanto, a teoria de reatores nucleares pode ser considerada como o estudo do comportamento dos nêutrons em um reator nuclear. Neste contexto, torna-se extremamente importante construir procedimentos, tanto numéricos como semi-analíticos e analíticos, que simulem os fluxos de nêutrons nos núcleos dos reatores da forma mais precisa possível, evitando possíveis acidentes, ou ainda, aumentando a eficiência do reator. Um reator nuclear não pode ser construído, somente causando fissões com nêutrons bombardeando núcleos, mas deve seguir determinadas condições, a saber: a reação deve ser exotérmica, sustentável como uma reação em cadeia e por fim, controlável.

As pesquisas ao longo do tempo provaram que as reações nucleares podem gerar aproximadamente 1 milhão de vezes mais energia do que as reações químicas. Comparado

com as reações químicas, as reações nucleares são muito menos prováveis de ocorrer. A primeira razão é que um núcleo é muito menor do que um átomo ou uma molécula, sendo assim, colisões são difíceis de ocorrerem. A segunda razão é que os núcleos possuem cargas positivas, e assim têm dificuldades em se aproximarem de outros, devido a repulsão da força Coulombiana. Para transpor esta repulsão, é necessária muita energia. No entanto, para os nêutrons, os quais não possuem carga elétrica, a força Coulombiana não interfere, não havendo necessidade de muita energia para os mesmos colidirem com os núcleos.

No primeiro reator nuclear, criado por Fermi, foi utilizado como combustível o plutônio-239, vindo este, e também o urânio-238 a serem usados na construção das bombas atômicas usadas na segunda Guerra Mundial. Após a guerra, iniciaram-se a construção de reatores nucleares de água leve em grande quantidade com intuito de diminuir a dependência de combustíveis fósseis. Porém, nas últimas décadas, o controle tornou-se muito mais rigoroso, em relação a liberação para a construção de reatores nucleares, devido a quesitos como segurança, lixo radioativo e a proliferação nuclear. Por outro lado, nos últimos anos, devido à deficiências energéticas e ao aumento considerável de problemas climáticos e ambientais, a energia nuclear voltou a ser um elemento importante como fonte energética, em países que detém esta tecnologia.

No estudo de Física de Reatores, existem diversas reações, podendo ocorrer tanto a emissão, bem como a absorção de nêutrons. A fissão nuclear é classificada como absorção mesmo que nêutrons sejam emitidos. Da reação do nêutron incidente com o núcleo, pode ocorrer a emissão de nêutrons tanto por espalhamento elástico, sendo este isotrópico (baixa energia) ou anisotrópico (alta energia), como por espalhamento inelástico (n, n') . Na emissão de nêutrons também podem ocorrer as seguintes reações $(n, 2n)$, $(n, 3n)$, \dots . De outra reação do nêutron incidente com o núcleo pode ocorrer a absorção, que se dá por: captura (n, γ) , (n, α) , (n, p) , \dots , e por fissão nuclear (n, f) . Todas, com exceção das reações de espalhamento, são também conhecidas por reações não-elásticas.

A fissão nuclear é observada em átomos pesados, dividindo-os em dois átomos menores de massas aproximadamente iguais e liberando aproximadamente $200MeV$ de energia por fissão. Entre os nuclídeos naturais, o urânio-235 é fissionado pelos nêutrons térmicos, sendo classificado como núcleo físsil. O urânio-238 e o tório-232 podem fissionar pela colisão de nêutrons rápidos, sendo classificados como núcleos fissionáveis. A fissão nuclear por um nêutron térmico é chamada de fissão térmica e a por nêutron rápido é chamada de fissão rápida. Os tipos e taxas de reações de nêutrons depende dos núcleos sujeitos a colisões e da energia dos nêutrons incidentes. No momento da fissão, nêutrons são gerados. E quanto

maior a energia de fissão, maior o número de nêutrons gerados. Quando nêutrons térmicos incidem no urânio-235, são liberados, em média, 2,5 nêutrons. Isto permite uma reação em cadeia e indica que a fissão nuclear pode ser eficiente na geração de energia. A energia destes nêutrons é distribuída como se os nêutrons estivessem em movimento térmico nos núcleos. Entre os produtos da fissão, existem muitos núclídeos que ainda possuem muitos nêutrons, deixando os núclídeos em estado instável, mesmo depois da geração de nêutrons resultantes da fissão. Estes núclídeos geralmente decaem por decaimento β , deixando-os estáveis. No entanto, alguns decaem emitindo nêutrons. Para distinguí-los, os nêutrons emitidos no momento da fissão são chamados de nêutrons rápidos ou prontos (10^{-14} segundos), enquanto que os emitidos depois são chamados de nêutrons atrasados ou retardados (menos de 1%). Os nêutrons atrasados são de vital importância para o controle efetivo da reação de fissão em cadeia nos reatores nucleares. Este assunto é tratado na Cinética de Reatores.

O comportamento dos nêutrons dentro do reator pode ser descrito pela ocorrência das reações mencionadas anteriormente, e pela fuga de nêutrons do reator. O número de nêutrons dentro do reator pode ser definido a partir do balanço de energia dentro do reator dado pela seguinte equação:

nêutrons gerados pela fissão nuclear + nêutrons gerados pelas reações $(n, 2n) =$
nêutrons absorvidos + fuga de nêutrons

Se isto ocorrer, o reator encontra-se em estado crítico. O número de nêutrons flutua constantemente, uma vez que o fenômeno é estocástico. Se o lado direito da equação é maior que o lado esquerdo, o número de nêutrons aumenta e o reator está em estado supercrítico. Se ocorre o contrário, o número de nêutrons diminui e o reator está em estado subcrítico.

Em sucessivas gerações de nêutrons em uma reação em cadeia, a taxa do número de nêutrons em uma geração para o número de nêutrons da geração anterior, é conhecido como fator de multiplicação de nêutrons, denotado por k . Se o reator for considerado infinitamente grande, então não ocorre fuga de nêutrons, e o fator de multiplicação é chamado de fator de multiplicação infinito e denotado por k_{∞} . Quando o tamanho do reator é levado em consideração e os nêutrons de fuga são contabilizados, o fator de multiplicação é conhecido como fator de multiplicação efetivo de nêutrons e denotado por k_{eff} . Quando $k_{eff} = 1$, o estado do reator é crítico. Se $k_{eff} < 1$, o estado do reator é subcrítico e $k_{eff} > 1$, o estado do reator é supercrítico.

A probabilidade de que uma reação entre um nêutron e um núcleo ocorra é proporcional ao tamanho dos núcleos e à velocidade com que os nêutrons viajam dentro do reator.

A quantidade de nêutrons, ou melhor, o fluxo de nêutrons é expresso por

$$\phi(r, E, t) = vn(r, E, t) \quad (2.1)$$

onde $n(r, E, t)$ é a densidade do número de nêutrons e v é a velocidade dos nêutrons. A taxa de reação é dada por:

$$R(r, t) = \int_0^{\infty} N\sigma(E)\phi(r, E, t)dE, \quad (2.2)$$

onde N é a densidade do núcleo alvo e $\sigma(E)$ é a seção de choque microscópica do alvo que o nêutron incidente $v\hat{e}$. A seção de choque microscópica é dependente da energia do nêutron, porque o tamanho da reação é dependente da energia. A seção de choque microscópica é mensurada em unidades de 1 barn = $10^{-28}m^2$. A seção de choque macroscópica Σ é dada por

$$\Sigma = \sigma N, \quad (2.3)$$

onde σ é a seção de choque microscópica do alvo.

A seção de choque é definida para cada reação. A soma das seções de choque de todas as reações é chamada de seção de choque total. Esta corresponde a probabilidade de colisão. As reações estão diretamente relacionadas a energia dos nêutrons incidentes. Para nêutrons com várias energias, reações de diferentes tipos e tamanhos podem ocorrer. A seção de choque de reação de um nêutron térmico depende significativamente do núcleo alvo. Se a energia de um nêutron é diminuída a um nível térmico, a criticalidade ocorre, pois quando a energia do nêutron é diminuída, a seção de choque de fissão do urânio-235 é aumentada muito mais do que a seção de choque de absorção. Por fim, um reator nuclear com uma taxa de fissão grande gerada por nêutrons térmicos é chamado de reator térmico.

Os nêutrons produzidos por fissão do urânio-235 possuem alta energia e quase todos têm energia entre $0.1MeV$ e $10MeV$. A maior parte dos nêutrons apresentam energia em torno de $0.7MeV$ e a energia média dos nêutrons de fissão é aproximadamente $2MeV$, e devem reduzir suas energias em reatores térmicos. Em regiões de alta energia, ocorrem o espalhamento inelástico e a reação $(n, 2n)$. No entanto, em uma larga região de baixa energia, ocorre somente espalhamento elástico reduzindo a energia dos nêutrons rápidos para tornarem-se nêutrons térmicos. A energia dos nêutrons fica reduzida a aproximadamente a mesma energia cinética dos átomos ou moléculas do meio no qual o nêutron está sujeito ao espalhamento elástico. Esta energia é somente uma pequena fração de um eletro volt em

temperaturas ordinárias ($0.025eV$ em $20^{\circ}C$), sendo freqüentemente referida como energia térmica, visto que esta é dependente da temperatura. Nuclídeos leves, como o Hidrogênio, Deutério, Hélio, entre outros, têm altos valores para as taxas de perda de energia por espalhamento elástico. Assim, nêutrons rápidos gerados por fissão colidem com núcleos leves e são moderados a nêutrons térmicos. O material usado para moderar nêutrons é chamado de moderador. Um bom material a ser usado como moderador deve seguir as seguintes propriedades: possuir uma grande seção de choque de espalhamento, uma pequena seção de choque de absorção e uma grande perda de energia por colisões. A água vem sendo muito usada como moderador.

A distribuição da energia média liberada na fissão do urânio-235 por um nêutron térmico é de $200MeV$. Grande parte da energia liberada na fissão é instantânea, sendo uma pequena parte atrasada. A energia liberada instantaneamente equivale a $187MeV$, sendo $167MeV$ em energia cinética dos produtos da fissão, $5MeV$ de energia cinética dos nêutrons liberados na fissão, $5MeV$ de energia instantânea dos raios γ e $10MeV$ de energia da captura dos raios γ . A energia liberada atrasada equivale a $23MeV$, sendo $7MeV$ das partículas β emitidos dos produtos da fissão, $6MeV$ em raios γ emitidos dos produtos da fissão e mais $10MeV$ de energia dos neutrinos. Os $10MeV$ de energia dos neutrinos não são calculados nos $200MeV$ liberados na fissão, pois não são absorvidos pelo reator. Toda energia liberada na fissão, com exceção da energia dos neutrinos, ou seja, $200MeV$, é transformada em calor através de alguns processos.

Muitos reatores nucleares usam o urânio-238 natural como combustível, sendo que este é constituído 0,0054% de urânio-233, 0,72% de urânio-235 e 99,275% de urânio urânio-238. O urânio-238 tem uma seção de choque de absorção muito grande para nêutrons com energia de $6,67eV$ ou mais, a qual é chamada de absorção de ressonância. Portanto, se por um lado, o urânio-238 é usado como combustível, por outro, muitos nêutrons são absorvidos pelo urânio-238, o que dificulta tornar o reator nuclear crítico. Embora seja custoso, uma das alternativas encontradas para resolver este problema foi enriquecer o urânio-235, ou seja, aumentar a percentual de urânio-235 no urânio-238. Outra, é separar apropriadamente o combustível e o moderador no reator.

A separação entre o combustível e o moderador num reator é conhecida como um arranjo heterogêneo. Dentro do moderador ocorre tanto a moderação como a difusão de nêutrons. Visto que os núcleos do combustível são pesados, e estes dificilmente moderam nêutrons, logo, dentro do combustível predomina a difusão de nêutrons. Então, se um reator é heterogêneo, nêutrons espalhados no combustível tendem a ter sucessivas colisões dentro do

combustível, e nêutrons espalhados no moderador tendem a ter sucessivas colisões dentro do moderador. Assim, nêutrons gerados pela fissão nuclear no combustível não são moderados no combustível, e ao entrarem na região do moderador perdem gradualmente sua energia pela moderação. Quando uma certa energia é alcançada, a maioria dos nêutrons difundem para fora da região de moderação. Na região de energia com larga ressonância de absorção, os nêutrons que estão difundindo-se da região do moderador para a região do combustível são geralmente absorvidos na superfície da região do combustível, e estes não conseguem entrar no interior da região do combustível. Este efeito é chamado de auto-blindagem. A maioria dos nêutrons são finalmente moderados para nêutrons térmicos na região do moderador e então entram na região do combustível depois de repetida difusão. Eles são então absorvidos pelo urânio-235.

Em reatores térmicos, quando a energia do nêutron torna-se grande, a seção de choque de fissão aumenta e a seção de choque de captura também aumenta quase na mesma proporção. O número de nêutrons emitidos quando um nêutron é absorvido no núcleo é

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_c} \quad (2.4)$$

onde σ_f e σ_c são as seções de choque de fissão e captura, respectivamente, e ν é o número médio de nêutrons emitidos por fissão nuclear. O valor de η depende da energia dos nêutrons incidentes. Para nêutrons térmicos η é aproximadamente 2, no entanto, quando a energia é maior do que 0.1MeV , η aumenta rapidamente. Se muitos nêutrons são gerados desta forma, não somente uma reação em cadeia pode ser mantida, mas pode ser possível que existam nêutrons em excesso. Se o urânio-238 absorve estes nêutrons e após sofrer uma seqüência de decaimentos, o plutônio-239 pode ser produzido. Isto é, pode-se produzir material físsil ao mesmo tempo em que o material físsil é consumido. Por isso, o urânio-238 é denominado um núcleo fértil. O número de átomos físses gerados por átomo físsil consumido é chamado de taxa de conversão. Se o valor de ν for maior que 2 é possível obter a taxa de conversão bem maior que 1. Assim, é possível produzir mais material físsil do que consumir. Este processo é chamado gerador, e a taxa de conversão é chamada de taxa de geração e este tipo de reator é chamado de reator gerador. Ou seja, material físsil pode ser criado usando nêutrons rápidos em um reator gerador rápido.

Um reator térmico consiste de elemento combustível, moderador, refletor, blindagem, nêutron absorvedor, refrigerante e material estrutural. Os elementos combustíveis são colocados no centro do reator. O refletor é colocado em volta do centro do reator para refletir os nêutrons de fuga de volta para o centro do reator. O material usado para o refletor geral-

mente é o mesmo do moderador. A blindagem é colocada no lado externo do reator de forma a evitar a fuga da radiação, vindo o lado externo do reator a ficar protegido contra nêutrons e raios γ . O nêutron absorvedor é usado para iniciar e desligar o reator e também controlar a produção de potência. O nêutron absorvedor é conhecido como material de controle, e é geralmente usado na forma de vara de controle. Com o progresso da queima, o material físsil no combustível diminui e os produtos da fissão acumulam, com o qual decresce o fator de multiplicação efetivo de nêutrons, k_{eff} . Em operação contínua, o combustível é geralmente carregado de forma que $k_{eff} > 1$ e então ajustado para $k_{eff} = 1$ inserindo o nêutron absorvedor. Quando a quantidade de material físsil tem diminuído e os produtos da fissão tem acumulado com o progresso da queima, um pouco do nêutron absorvedor pode ser removido. Deste modo, o nêutron absorvedor também pode ser usado para manter o reator em estado crítico. O refrigerante conduz a energia gerada no reator para fora do mesmo na forma de calor.

Em reatores rápidos, nêutrons são usados sem moderação. Os componentes de um reator rápido são os mesmos de um térmico, exceto o moderador. No entanto, uma região chamada de blanket (manta) é colocada entre o centro e o refletor. Urânio natural é colocado na manta com o propósito de produzir plutônio físsil através do urânio-238, o qual absorve os nêutrons que saem do centro do reator.

As barras de controle são materiais que absorvem nêutrons e são instalados na maioria dos reatores de forma a oferecer precisos ajustes no controle da reatividade. Estas barras de controle podem ser movidas para dentro e para fora do reator e tipicamente contém elementos como prata, índio, cádmio, boro ou háfnio, os quais apresentam uma boa seção de choque de absorção. A efetividade da barra de controle depende muito do valor da razão entre o fluxo de nêutrons no lugar da barra e o fluxo médio no reator. A barra de controle tem o efeito máximo se for colocada no reator onde o fluxo é máximo. Se o reator tiver somente uma barra, esta deve ser colocada no centro do reator.

Os reatores à água podem ser, tanto reatores de água leve como reatores de água pesada. Os reatores de água leve predominam. Os reatores de água leve podem ser reatores de água em ebulição, conhecidos como *BWR* ou reatores de água pressurizada, conhecidos como *PWR*, nos quais, a água em ebulição é suprimida pela alta pressão. No reator *BWR* a potência é gerada enviando o vapor diretamente para a turbina. Já, os reatores *PWR* consistem de dois circuitos fechados, a saber, o primário e o secundário. O primário contém água pressurizada e de certo modo radioativa, pois está diretamente ligado ao núcleo do reator, absorvendo a energia sob forma de calor, liberada pelas fissões. O circuito primário

passa por dentro do circuito secundário, liberando calor para a água do circuito secundário, que evapora. Somente então, este vapor é conduzido diretamente para as turbinas.

2.2 Modelo da Teoria da Difusão

Nesta seção é apresentada resumidamente os modelos de difusão de nêutrons para um grupo de energia e para multigrupo. O modelo de difusão para um grupo de energia, embora simples, tem um papel extremamente importante na teoria de reatores, visto que é suficientemente simples obter cálculos detalhados e também suficientemente realísticos, permitindo estudar conceitos importantes que surgem na análise de reatores nucleares. Obviamente, não podemos ter quantidades estimadas exatas para um modelo que contemple todos os nêutrons de um reator em um único grupo de energia e que relacione o transporte de nêutrons de ponto a ponto como um processo de difusão. No entanto, se as seções de choque são corretamente encontradas, pode-se usar o modelo de difusão para um grupo de energia para estimativas preliminares.

2.2.1 Modelo da Teoria de Difusão para um Grupo de Energia

Com o intuito de obter-se a equação de difusão para um grupo de energia, foi omitida a dependência de energia dos nêutrons assumindo-se que todos os nêutrons são caracterizados por uma única energia cinética. Obviamente, isto é uma aproximação grosseira, visto que a energia dos nêutrons encontrados no reator varia de $10^{-3}eV$ a 10^7eV e as seções de choque dos nêutrons depende sensivelmente de energias neste intervalo.

A distribuição de nêutrons em um reator é caracterizada pela densidade de nêutrons $N(r, t)$, a qual fornece o número de nêutrons por unidade de volume em um ponto r , num tempo t . Na prática é mais conveniente usar o fluxo de nêutrons $\phi(r, t) = vN(r, t)$, com o qual determina-se a taxa de vários tipos de reações que ocorrem por volume, simplesmente multiplicando-se o fluxo pela seção de choque correspondente. Por exemplo, a taxa de reação de fissão que ocorre por cm^3 em um ponto r é dada por $\Sigma_f(r)\phi(r, t)$.

Para obter-se a equação do fluxo de nêutrons deve-se considerar que a taxa do número de nêutrons em um dado volume deve simplesmente ser a diferença entre a taxa com que os nêutrons são produzidos no volume e a taxa com que eles são perdidos do volume devido a absorção e a fuga. É mais preciso considerar-se um volume arbitrário V de área de superfície S em algum lugar do reator. O número total de nêutrons em V no tempo t pode

ser obtido integrando-se todo o volume

$$\int_V d^3r N(r, t) = \int_V d^3r \frac{1}{v} \phi(r, t), \quad (2.5)$$

onde $N(r, t)$ é a densidade do núcleo alvo e $\phi(r, t)$ é o fluxo de nêutrons. Portanto, a taxa do número de nêutrons em V deve ser

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V d^3r N(r, t) \right] = \int_V d^3r \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = \quad (2.6)$$

$$= \text{Produção em } V - \text{absorção em } V - \text{fuga líquida de } V,$$

onde a produção em V é

$$\int_V d^3r S(r, t), \quad (2.7)$$

sendo $S(r, t)$ uma fonte de nêutrons arbitrária,

e a absorção em V

$$\int_V d^3r \Sigma_a(r) \phi(r, t), \quad (2.8)$$

sendo $\Sigma_a(r)$ a seção de choque microscópica de absorção. Para definir-se a fuga líquida de V deve-se seguir os seguintes passos:

Seja $\vec{J}(r, t)$ a densidade de corrente de nêutrons, então a taxa líquida de nêutrons que saem através de um pequeno elemento de superfície dS em um ponto r_s é $\vec{J}(r_s, t) \cdot d\vec{S}$. Portanto, a fuga líquida total através da superfície em V é

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}(r_s, t), \quad (2.9)$$

ou ainda, de acordo com o teorema de Gauss,

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}(r_s, t) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(r, t). \quad (2.10)$$

Substituindo-se as equações 2.7, 2.8 e 2.10 na equação 2.6 tem-se

$$\int_V d^3r \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = \int_V d^3r S(r, t) - \int_V d^3r \Sigma_a(r) \phi(r, t) - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(r, t), \quad (2.11)$$

ou

$$\int_V d^3r \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} - S(r, t) + \Sigma_a(r) \phi(r, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(r, t) \right] = 0. \quad (2.12)$$

Visto que o volume V é escolhido de forma arbitrária, pode-se omitir a integral na equação 2.12, obtendo-se

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(r, t) - \Sigma_a(r)\phi(r, t) + S(r, t). \quad (2.13)$$

A menos da aproximação para um grupo de energia, a equação permanece exata. A equação 2.13 contém $\phi(r, t)$ e $\vec{J}(r, t)$ desconhecidos. Infelizmente, a relação entre $\phi(r, t)$ e $\vec{J}(r, t)$ não é exata. Então deve-se recorrer a uma relação aproximada, a saber, a densidade de corrente de nêutrons, a qual é aproximadamente proporcional ao gradiente espacial negativo da densidade. Ou seja, partículas tendem a fluir de regiões de alta para baixa densidade a uma taxa proporcional ao gradiente negativo da densidade. Matematicamente significa

$$\vec{J}(r, t) \cong -D(r)\vec{\nabla}\phi(r, t), \quad (2.14)$$

onde $D(r)$ é o coeficiente de difusão e a equação 2.14 é conhecida como a Lei de Fick. Substituindo-se a equação 2.14 na equação 2.13 surge a equação da difusão para um grupo de energia

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(D(r)\vec{\nabla}\phi(r, t) \right) - \Sigma_a(r)\phi(r, t) + S(r, t), \quad (2.15)$$

sujeita à condição inicial

$$\phi(r, 0) = \phi_0(r), \quad \forall r, \quad (2.16)$$

e às condições de contorno: a) $\phi(r_s, t) = 0$; b) $\phi(r, t)$ e a componente normal de \vec{J} são contínuos na interface; c) $0 \leq \phi(r, t) < \infty$, exceto nas vizinhanças de fontes localizadas.

Em muitos casos deparamo-nos com situações em que o meio onde os nêutrons difundem-se é uniforme ou homogêneo de forma que D e Σ_a não dependem da posição. Assim, a equação 2.15 fica

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} - D\nabla^2\phi(r, t) + \Sigma_a\phi(r, t) = S(r, t). \quad (2.17)$$

No caso de considerar-se o fluxo de nêutrons em regime estacionário, obtém-se a equação de Helmholtz

$$-D\nabla^2\phi(r) + \Sigma_a\phi(r) = S(r). \quad (2.18)$$

Dividindo-se a equação 2.18 por $-D$, obtém-se

$$\nabla^2\phi(r) - \frac{1}{L^2}\phi(r) = -\frac{S(r)}{D}, \quad (2.19)$$

onde o comprimento de difusão de nêutrons $L \equiv \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$. L é essencialmente a medida do deslocamento dos nêutrons ao difundirem-se da fonte antes de serem absorvidos.

Este modelo de difusão de nêutrons para um grupo de energia pode ser estudado tanto em meios não multiplicadores, bem como em meios multiplicadores. Para o caso de se abordar o fluxo de nêutrons em um meio não multiplicador, isto é, um meio não contendo material físsil, o termo fonte $S(r)$ assume diversas fontes, como plana, pontual, etc. Para o caso de considerarmos o fluxo de nêutrons em um meio multiplicador, devemos introduzir a fissão nuclear na equação da difusão de nêutrons para um grupo de energia. Pode-se assumir que a difusão, absorção e fissão ocorrem todas na mesma energia. Então, o termo que representa a fissão pode ser obtido da taxa de densidade da reação da fissão, $\Sigma_f\phi(r, t)$. Logo, a taxa com a qual a fissão de nêutrons aparece no reator, isto é, a fonte de fissão é dada por

$$S_f(r, t) = \nu\Sigma_f\phi(r, t). \quad (2.20)$$

Se esta é a única fonte de fissão no reator, então a equação de difusão torna-se

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(r, t)}{\partial t} - D\nabla^2\phi(r, t) + \Sigma_a\phi(r, t) = \nu\Sigma_f\phi(r, t). \quad (2.21)$$

A equação 2.21 contempla somente nêutrons rápidos, ou seja, aqueles que surgem instantaneamente na fissão. Os nêutrons atrasados que surgem do decaimento dos produtos da fissão não são contemplados. Este assunto é tratado em cinética de reatores.

A condição de criticalidade no reator é alcançada, quando o fluxo de nêutrons no reator torna-se independente do tempo. Ou seja, a reação de fissão em cadeia torna-se estacionária. Ou melhor, quando o fluxo de nêutrons independente do tempo pode ser mantido no reator, na ausência de fontes, a menos da fissão. Infelizmente a equação estacionária

$$-D\nabla^2\phi(r) + \Sigma_a\phi(r) = \nu\Sigma_f\phi(r), \quad (2.22)$$

não apresenta solução, a menos que encontra-se uma combinação exata entre a composição e a geometria do núcleo, de forma que o reator seja crítico. O que pode ser feito é introduzir na equação um parâmetro arbitrário "k", conhecido como fator de multiplicação de nêutrons.

Disto resulta a seguinte equação

$$-D\nabla^2\phi(r) + \Sigma_a\phi(r) = \frac{1}{k}\nu\Sigma_f\phi(r). \quad (2.23)$$

Então, para algum valor de k , esta equação sempre terá solução. Se $k = 1$, a composição e a geometria do núcleo será crítica. Se $k \neq 1$ deve ser encontrado um novo tamanho e composição, para atingir-se a criticalidade. Claramente, haverá um conjunto de autovalores k_n para a equação 2.23. Entretanto, apenas o maior destes autovalores, isto é, apenas o autovalor dominante k_1 corresponderá a uma autofunção $\phi(r)$ que é não-negativa em todos os pontos do sistema, e portanto, fisicamente relevante.

2.2.2 Modelo da Teoria de Difusão para Multigrupo de Energia

A grande deficiência do modelo de difusão para um grupo de energia é que os nêutrons são caracterizados por uma única energia. Como mencionado anteriormente, os nêutrons dentro do reator têm energia que variam de $10^{-3}eV$ a 10^7eV . Além do mais, as seções de choque entre nêutron e núcleo dependem muito mais da energia do nêutron incidente. Na prática, os cálculos do fluxo de nêutrons em reatores requerem um tratamento mais realístico. Isto implica na necessidade de um modelo de difusão de nêutrons que contemple um maior número de grupos de energia.

A melhor maneira de se definir as equações de difusão de nêutrons para multigrupo é aplicar o conceito do balanço de nêutrons para um dado grupo de energia e o balanço de nêutrons que entram e saem deste grupo. O balanço de nêutrons deste grupo segue a seguinte idéia:

Taxa do número de nêutrons no grupo $g =$ - mudança devido à fuga - absorção no grupo $g +$ fonte de nêutrons que aparecem no grupo $g -$ nêutrons espalhados para fora do grupo $g +$ nêutrons espalhados para dentro do grupo g .

A colisão de espalhamento pode mudar a energia do nêutron e, portanto, pode tanto movê-lo do grupo g , ou se estiver inicialmente no grupo g' , espalhá-lo para o grupo g . A probabilidade de espalhamento de um nêutron do grupo g' para o grupo g é dada pela seção de choque de espalhamento diferencial $\Sigma_s(E_{g'} \rightarrow E_g)$, ou ainda, $\Sigma_{sg'g}$. A seção de choque de espalhamento do nêutron para fora do grupo g é dada por

$$\Sigma_{sg} = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sgg'}, \quad (2.24)$$

onde $\Sigma_{sgg'}$ é a seção de choque de espalhamento do nêutron do grupo g para o grupo g' .

Pode-se definir a seção de choque de absorção do grupo g por Σ_{ag} , o termo fonte S_g como a taxa com que os nêutrons provenientes da fonte aparecem no grupo g e o coeficiente de difusão D_g de forma que a difusão de nêutrons no grupo g possa ser escrita dentro da aproximação de difusão $\vec{\nabla} \cdot (D_g \vec{\nabla} \phi_g)$. Sendo assim, pode-se combinar todos estes termos de forma a representar matematicamente do balanço de nêutrons como

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - \Sigma_{ag} \phi_g + S_g - \Sigma_{sg} \phi_g + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'}, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (2.25)$$

sendo

$$S_g = \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g^{ext}, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (2.26)$$

onde χ_g é a probabilidade que um nêutron de fissão surja com a energia do grupo g , enquanto $\Sigma_{fg'}$ é a seção de choque de fissão no grupo g' e $\nu_{g'}$ é o número médio de nêutrons de fissão liberados na reação de fissão induzido por um nêutron no grupo g' . Portanto, é gerado um conjunto G de equações difusivas acopladas para G fluxos ϕ_g desconhecidos.

Uma maneira interessante de resolver estas equações é obter o comportamento médio dos nêutrons em cada grupo de energia. Isto é possível integrando a equação para o fluxo de nêutrons dependente da energia, $\phi(r, E, t)$ sobre um dado grupo de energia, $E_g < E < E_{g-1}$, com $g = 1 : G$. Assim, a equação de difusão dependente da energia fica definida como

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, E, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \phi(r, E, t)) + \Sigma_t \phi(r, E, t) = \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) \\ + \chi(E) \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(r, E', t) + S_{ext}(r, E, t), \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde Σ_t é a seção de choque macroscópica total e $S_{ext}(r, E, t)$ é uma fonte de nêutrons externa.

De uma forma geral, a equação de difusão multigrupo fica

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (D_g \vec{\nabla} \phi_g) + \Sigma_{tg} \phi_g = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (2.28)$$

onde $\Sigma_{sg'g}$ é a seção de choque de espalhamento do nêutron do grupo g' para o grupo g .

Se a energia do nêutron incidente for muito maior do que a energia térmica de um núcleo alvo, o nêutron nunca ganhará energia numa colisão de espalhamento. Tais nêutrons rápidos somente perderão energia em colisões de espalhamento. Portanto, nestes grupos

rápidos pode-se ter

$$\Sigma_{sg'g} = 0 \quad g' > g. \quad (2.29)$$

Na maior parte dos problemas de difusão de nêutrons para alguns grupos, é utilizado somente um grupo térmico que descreve os nêutrons com energia $E < 1eV$, visto que os nêutrons não podem sofrer colisões de espalhamento para grupos de energia maiores. Assim, pode-se simplificar o termo de espalhamento como segue

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \Sigma_{sgg} \phi_g. \quad (2.30)$$

Este termo significa a probabilidade de um nêutron sofrer a colisão de espalhamento e perder pouca energia de forma que o nêutron ainda permaneça no grupo. Transferindo-se este termo para o lado esquerdo da equação de multigrupo 2.28, pode-se definir a seção de choque de remoção,

$$\Sigma_{Rg} \equiv \Sigma_{tg} - \Sigma_{sgg}, \quad (2.31)$$

a qual significa a probabilidade de um nêutron ser removido do grupo g pela colisão.

Em problemas de difusão de nêutrons em multigrupo, geralmente são tratadas situações na qual a dependência temporal e a presença de uma fonte térmica são ignorados, resultando em cálculos de criticalidade. Neste caso, equações de multigrupo são escritas como

$$-\vec{\nabla} \cdot (D_g \vec{\nabla} \phi_g) + \Sigma_{Rg} \phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}, \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (2.32)$$

A equação 2.32 forma, para $g = 1 : G$, um sistema de G equações diferenciais parciais, cuja solução fundamental $\phi_g(r)$ é definida como o fluxo escalar de nêutrons que estão no grupo g de energia no núcleo do reator nuclear. O autovalor dominante k é definido como o fator de multiplicação efetivo do reator k_{eff} , e pode ser interpretado como o número que representa um balanço perfeito de nêutrons para as equações de difusão multigrupo 2.32.

2.2.3 Teoria da Difusão para Dois Grupos de Energia

Tipicamente, cálculos globais de reatores nucleares térmicos do tipo de água pressurizada, *PWR*, são realizados usando o modelo de difusão a dois grupos de energia, isto é, um grupo de nêutrons rápidos e um grupo de nêutrons térmicos. A energia de corte para

o grupo térmico é escolhida suficientemente alta, ou seja, até $1eV$, para assegurar que o espalhamento para grupos de maior energia possa ser ignorado. É importante mencionar que todos os nêutrons resultantes da fissão são do grupo rápido, o que resulta em $\chi_1 = 1$ e $\chi_2 = 0$. Desse modo, o termo de fissão somente aparecerá na equação do grupo rápido, ou seja,

$$S_{f1} = \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2, \quad (2.33)$$

$$S_{f2} = 0, \quad (2.34)$$

onde S_{f1} e S_{f2} são, respectivamente, as fontes de nêutrons rápidos e térmicos provenientes da fissão nuclear.

De acordo com as equações 2.33 e 2.34, as equações de difusão para dois grupos de energia, a saber, o rápido e o térmico, respectivamente, são

$$-\vec{\nabla} \cdot (D_1 \vec{\nabla} \phi_1) + \Sigma_{R1} \phi_1 = \frac{1}{k} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2], \quad (2.35)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot (D_2 \vec{\nabla} \phi_2) + \Sigma_{a2} \phi_2 = \Sigma_{s12} \phi_1. \quad (2.36)$$

Pode-se observar que enquanto os termos fonte no grupo rápido, equação 2.35, correspondem à fissão, o termo fonte no grupo térmico, equação 2.36, refere-se a moderação dos nêutrons do grupo rápido, ou seja, corresponde ao espalhamento do grupo rápido para o térmico.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO UTILIZADO

3.1 A GITT

Nesta seção são mostrados, resumidamente, os passos básicos para obtenção da solução de um problema unidimensional transiente pela técnica da GITT, assim como as condições de sua aplicabilidade. Para problemas multidimensionais, o procedimento é análogo. A análise é feita em geometria cartesiana. A solução do problema transformado, resultante da aplicação da GITT, não é comentada neste seção, pois é obtida através da aplicação dos conceitos básicos da transformada de Laplace.

Seja a equação

$$Av(x, t) = S, \quad \text{em} \quad a < x < b \quad \text{e} \quad t > 0, \quad (3.1)$$

sujeita às condições de contorno homogêneas e inicial

$$a_1 \frac{\partial v(a, t)}{\partial x} + a_2 v(a, t) = 0, \quad (3.1a)$$

$$b_1 \frac{\partial v(b, t)}{\partial x} + b_2 v(b, t) = 0 \quad \text{e} \quad (3.1b)$$

$$v(x, 0) = f(x). \quad (3.1c)$$

onde A é o operador diferencial parcial associado ao problema unidimensional transiente, S é o termo fonte e a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são constantes dependentes das propriedades físicas. Além disso, $|a_1| + |a_2| \neq 0$ e $|b_1| + |b_2| \neq 0$.

Por apresentar caráter espectral, este método, tem como princípio expandir a variável $v(x, t)$ em uma base apropriada. Com o objetivo de determiná-la, faz-se uso de um problema auxiliar, conhecido como problema de Sturm-Liouville. Para obtê-lo, decompõe-se o operador

A na seguinte forma

$$Av(x, t) = Bv(x, t) + Lv(x, t), \quad (3.2)$$

onde L é um operador associado ao problema de Sturm-Liouville e B é o operador associado aos termos restantes. Assim, L apresenta a seguinte forma

$$L\psi(x) \equiv \vec{\nabla} \cdot \left(k(x) \vec{\nabla} \psi(x) \right) + q(x) \psi(x). \quad (3.3)$$

As funções $k(x)$, $q(x)$, e $\psi(x)$ devem ser reais e contínuas, e ainda $k(x) > 0$ em todo o intervalo (a, b) , definido nos problemas representados pelas equações 3.1 e 3.4.

Uma vez definido o operador L , o problema de Sturm-Liouville é definido como:

$$L\psi(x) + \lambda^2 \psi(x) = 0, \quad em \ a < x < b, \quad (3.4)$$

$$a_1 \frac{d\psi(a)}{dx} + a_2 \psi(a) = 0, \quad (3.4a)$$

$$b_1 \frac{d\psi(b)}{dx} + b_2 \psi(b) = 0, \quad (3.4b)$$

O problema 3.4 é a forma geral dos chamados problemas auxiliares, na teoria da GITT. As constantes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 devem ser as mesmas do problema original 3.1. A equação 3.4 pode ser escrita para um λ_i qualquer, como segue

$$L\psi_i(x) + \lambda_i^2 \psi_i(x) = 0. \quad (3.5)$$

As funções $\psi_i(x)$ e os valores λ_i são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador L . Sendo assim, elas formam uma base para o operador L , e conseqüentemente, para o operador B .

As autofunções gozam da seguinte propriedade da ortogonalidade [Özsisik, 1980],

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_v \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (3.6)$$

onde N_i é o quadrado da norma $L^2(a, b)$ expressa por

$$N_i = \int_v \psi_i^2(x) dx. \quad (3.7)$$

Esta base é utilizada na expansão da variável $v(x, t)$. Sendo assim, a solução da equação 3.1 apresenta a seguinte forma

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.8)$$

a qual é conhecida como fórmula da inversa, onde $\overline{v_i(t)}$ é o potencial transformado.

A variável transformada é obtida da fórmula da inversa 3.8, aplicando-se o seguinte operador

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_v \cdot \psi_i(x) dx, \quad (3.9)$$

e fazendo-se uso da propriedade da ortogonalidade, equação 3.6.

Após efetuar todas as integrais, o resultado é um problema transformado que para este exemplo é um sistema de EDO's, cuja variável dependente é o potencial transformado $\overline{v_i(t)}$, e sujeita a condição inicial no tempo. Solucionando-se o sistema de equações, a variável $\overline{v_i(t)}$ fica determinada. Esta, juntamente com as autofunções $\psi_i(x)$, obtidas no problema de Sturm-Liouville, são substituídas na fórmula da inversa 3.8 para obter-se o potencial original $v(x, t)$.

A ordem de truncamento do somatório da fórmula da inversa 3.8 é muito importante para a determinação do potencial original $v(x, t)$. Cada termo do somatório corresponde a uma equação no problema transformado. Se ela for muito alta, o custo computacional da solução do problema é sensivelmente comprometido. Uma maior quantidade de autovalores também pode dificultar a convergência do algoritmo iterativo. Por outro lado, se esta ordem for muito baixa, a precisão dos resultados ficará prejudicada.

No que segue, são listados os principais passos para obter-se a solução de uma equação pela GITT:

- a) Determina-se o problema auxiliar identificando-se o operador L na equação que se quer resolver. Na equação 3.3 este operador está representado na sua forma mais completa. Entretanto, algumas de suas parcelas podem ser nulas dependendo do problema a ser resolvido. Porém, deve-se ter em mente que:
 - a.1) A função $k(x)$ não pode ser nula, podendo ser a função identidade.
 - a.2) Deve-se procurar levar para o problema auxiliar o máximo de informações do problema original. Em última análise, quanto mais informação se consegue carregar para a base de autovalores, menor será o número de termos necessários para o

truncamento da equação 3.8. A base carregará mais informação na medida em que menos termos do operador L forem nulos.

As condições de contorno aplicadas às variáveis dependentes do problema auxiliar devem ser as mesmas que aquelas aplicadas às variáveis dependentes do problema principal. Obs: caso o problema principal não tenha condições de contorno homogêneas deve-se fazer o uso de filtros.

- b) Resolve-se o o problema auxiliar.
- c) Usa-se o operador definido na equação 3.9 para transformar a equação original resultando em um sistema de equações transformado.
- d) Resolve-se o sistema de equações transformado.
- e) Trunca-se a equação 3.8, também conhecida na literatura como Fórmula da Inversa da GITT, em um valor suficientemente grande de termos para a obtenção da solução final do problema.

Para finalizar esta seção, são feitas algumas observações sobre quais os problemas que podem ser solucionados pela GITT. Existem duas condições básicas:

- a) O operador diferencial da equação que se quer resolver tem que ter um termo Laplaciano. Isto equivale a dizer que a função $k(x)$ da equação 3.3 é não nula.
- b) As variáveis que se quer transformar têm que ter dimensão finita, ou seja, têm que estar contidas dentro do intervalo $a < x < b$ citado na equação 3.4. Esta limitação pode ser contornada em, alguns casos, com a utilização de uma formulação parabólica. Este artifício é usado em escoamentos viscosos, cuja coordenada axial tem dimensão semi-finita. Para isso, estima-se um valor de b grande o suficiente para se admitir que o comportamento da solução seja aproximadamente o mesmo que para x no infinito.
- c) As condições de contorno da variável em que se aplicará a técnica devem ser homogêneas. Em casos onde isto não acontece, deve-se fazer uso de filtros.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HOMOGÊNEO

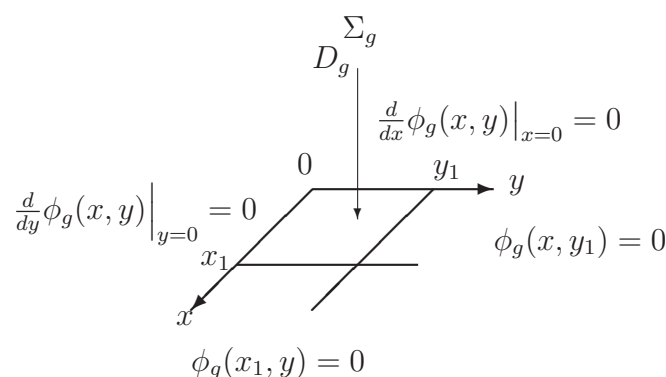


Figura 4.1 – Placa plana bidimensional com contornos e parâmetros nucleares homogêneos.

O problema de autovalor para o fluxo de nêutrons em uma placa plana bidimensional, considerando-se uma região e dois grupos de energia, é ilustrado na figura 4.1 e governado pela seguinte equação de difusão geral:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x}(D_g(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_g(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(D_g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_g(x, y)) + \Sigma_{Rg}(x, y)\phi_g(x, y) = \\
 \frac{1}{k_{eff}}\chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu\Sigma_{fg'}(x, y)\phi_{g'}(x, y) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x, y)\phi_{g'}(x, y) + S_g(x, y),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\frac{d}{dx}\phi_g(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \frac{d}{dy}\phi_g(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \phi_g(x_1, y) = 0, \quad \phi_g(x, y_1) = 0 \quad g = 1, 2,$$

(4.1a,b,c,d)

onde $D_g(x, y)$ é o coeficiente de difusão de nêutrons no grupo de energia g e na posição

(x, y) ; $\phi_g(x, y)$ é o fluxo de nêutrons no grupo g e na posição (x, y) ; $\Sigma_{Rg}(x, y)$ é a seção de choque macroscópica de remoção no grupo de energia g e na posição (x, y) ; χ_g é o espectro integrado de nêutrons de fissão no grupo g ; $\nu\Sigma_{fg'}(x, y)$ é o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão no grupo g' e na posição (x, y) ; $\Sigma_{gg'}(x, y)$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para g e na posição (x, y) ; k_{eff} é o fator de multiplicação efetivo medindo a criticalidade; $S_g(x, y)$ é a fonte de nêutrons real. Note que os termos de espalhamento misturam os grupos de energia pelo fato que um nêutron do grupo g com alta energia depois de transferir energia e momento pertence ao grupo g' com baixa energia. Outra contribuição de ambos os grupos vem do termo de fissão, o qual gera nêutrons com energia de térmica até aproximadamente 10 MeV (por fissão de urânio-235).

Com intuito de simplificar-se o problema, são tomadas as seguintes considerações: $D_g(x, y) \approx D_g$, $\Sigma_{Rg}(x, y) \approx \Sigma_{Rg}$, $\nu\Sigma_{fg'}(x, y) \approx \nu\Sigma_{fg'}$, $\Sigma_{gg'}(x, y) \approx \Sigma_{gg'}$ e $S_g(x, y) \equiv 0$. Disto, resultam as duas seguintes equações de difusão bidimensionais acopladas para dois grupos de energia:

$$\begin{aligned} -D_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_g(x, y) - D_g \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_g(x, y) + \Sigma_{Rg} \phi_g(x, y) = \\ \frac{\chi_g \nu \Sigma_{fg}}{k_{eff}} \phi_g(x, y) + \frac{\chi_g \nu \Sigma_{fg'}}{k_{eff}} \phi_{g'}(x, y) + \Sigma_{gg'} \phi_{g'}(x, y), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $g = 1, 2$ e sujeita às condições de contorno 4.1(a,b,c,d).

Seguindo a metodologia proposta, primeiramente, é aplicada a GITT em relação a x no problema composto pelas equações 4.2 e nas condições de contorno 4.1(a,c). Isto é possível, visto que as condições de aplicabilidade da GITT são satisfeitas, uma vez que estas equações dispõem de termos difusivos e as condições de contorno são homogêneas em relação a x . Conforme o formalismo da GITT, descrito no capítulo 3, é construído um problema auxiliar, de onde são extraídas as bases apropriadas para expandir os dois potenciais, a saber, o fluxo de nêutrons rápidos e térmicos. No entanto, é necessária somente uma única base para os dois potenciais, visto que tanto o domínio como as condições de contorno são os mesmos, tanto para os fluxos escalares de nêutrons rápidos, como para os térmicos. Na construção do problema auxiliar de Sturm-Liouville são utilizadas as condições de contorno 4.1(a,c) juntamente com o primeiro termo da equação 4.2, de forma a gerar a base usada na expansão dos potenciais. Em seguida, é aplicada a GITT em relação a x no problema composto pelas equações 4.2 e nas condições de contorno 4.1(b,d), de modo a reduzir suas

dimensões.

Esta base de autofunções é obtida resolvendo-se o seguinte problema auxiliar de Sturm-Liouville, como segue:

$$\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} + \lambda_i^2\psi_i(x) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\psi_i(x)}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \quad \psi_i(x_1) = 0. \quad (4.3a,b)$$

Sua solução define o seguinte espectro de autofunções e autovalores não-negativos, reais e em ordem crescente:

$$\psi_i(x) = \cos(\lambda_i x), \quad \lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{x_1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Estas autofunções satisfazem a propriedade de ortogonalidade definida como

$$\frac{1}{N_i^{1/2}N_j^{1/2}} \int_0^{x_1} w_i\psi_i(x)\psi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde w_i é a função peso e N_j é o quadrado da norma $L^2(0, x_1)$ expressa por

$$N_j = \int_0^{x_1} \psi_j^2(x)dx. \quad (4.6)$$

A base de autofunções 4.4 é usada para expandir o fluxo escalar de nêutrons através das seguintes fórmulas da inversa

$$\phi_g(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{gi}(y)\psi_i(x)}{N_i^{1/2}}, \quad g = 1, 2. \quad (4.7)$$

A equação 4.7 é substituída nas equações 4.2 e nas condições de contorno 4.1(b,d), para em seguida, aplicar-se o operador integral

$$\frac{1}{N_j^{1/2}} \int_0^{x_1} \cdot \psi_j(x)dx. \quad (4.8)$$

Fazendo-se uso da equação 4.3 e da equação 4.5, trunca-se o somatório da fórmula da inversa (4.7) em um N grande o suficiente para garantir a precisão dos resultados, resultando um sistema de $2N$ EDO's de segunda ordem e acopladas pela energia, sendo N equações para a primeira região e N para a segunda região,

$$\frac{d^2}{dy^2}\varphi_{gj}(y) + \left[\frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg}}{D_g k_{eff}} - \lambda_j^2 - \frac{\Sigma_{Rg}}{D_g}\right]\varphi_{gj}(y) + \left[\frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg'}}{D_g k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}}{D_g}\right]\varphi_{g'j}(y) = 0, \quad (4.9)$$

para $g = 1, 2$, com as seguintes condições de contorno transformadas:

$$\frac{d}{dy}\varphi_{gj}(y)|_{y=0} = 0, \quad \varphi_{gj}(y_1) = 0, \quad g = 1, 2. \quad (4.9a,b)$$

O seguinte passo consiste em reduzir a ordem das EDO's 4.9. Para isso, é aplicada a transformada de Laplace em relação a y em cada uma das EDO's deste sistema, resultando em

$$s^2\overline{\varphi_{gj}}(s) - s\varphi_{gj}(0) - \frac{d}{dy}\varphi_{gj}(0) + \left[\frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg}}{D_g k_{eff}} - \lambda_j^2 - \frac{\Sigma_{Rg}}{D_g}\right]\overline{\varphi_{gj}}(s) + \left[\frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg'}}{D_g k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}}{D_g}\right]\overline{\varphi_{g'j}}(s) = 0. \quad (4.10)$$

Substituindo-se a condição de contorno 4.9(a) nas equações 4.10, e reorganizando-se os termos resulta o seguinte sistema de $2N$ equações algébricas não homogêneas

$$\left[s^2 + \frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg}}{D_g k_{eff}} - \lambda_j^2 - \frac{\Sigma_{Rg}}{D_g}\right]\overline{\varphi_{gj}}(s) + \left[\frac{\chi_g\nu\Sigma_{fg'}}{D_g k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}}{D_g}\right]\overline{\varphi_{g'j}}(s) = s\varphi_{gj}(0), \quad (4.11)$$

onde $\varphi_{gj}(0)$, para $g = 1, 2$, são constantes de integração a serem determinadas. As equações 4.11 geram uma equação matricial não homogênea, cuja matriz associada é simbólica e de ordem $2N$, sendo N o número de termos do somatório da fórmula da inversa (4.7) da GITT. Resolvendo-se esta equação matricial pela regra de Cramer, obtém-se

$$\overline{\varphi_{gj}}(s) = \frac{P_{gj}(s)}{Q(s)} \quad g = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.12)$$

onde $P_{gj}(s)$ e $Q(s)$ são polinômios, sendo que $P_{gj}(s)$ tem grau menor do que $Q(s)$.

Em seguida, é aplicada a Transformada Inversa de Laplace por meio da técnica da Expansão de Heaviside, definida pela equação 4.13, de forma a recuperar os fluxos transformados pela GITT, em função das constantes de integração, como segue

$$\varphi_{gj}(y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_{gj}(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{P_{gj}(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i y}, \quad g = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.13)$$

onde s_i são as raízes distintas de $Q(s_i)$.

Obtidos os fluxos transformados pela GITT, faz-se uso da condição de contorno 4.9(b), de forma a gerar uma equação matricial linear homogênea de ordem $2N$. Os elementos do vetor incógnita são as constantes de integração $\varphi_{gj}(0)$ e a matriz associada é

simbólica, devido a presença do k_{eff} em alguns elementos. Esta equação matricial tem solução não trivial quando o determinante da matriz associada for nulo. O valor que anula este determinante é o valor do fator de multiplicação efetivo, k_{eff} . Para determiná-lo, é aplicado o método da bissecção.

Uma vez obtido o k_{eff} , pode-se determinar as constantes de integração, para o subsequente cálculo do fluxo de nêutrons. Porém, com a determinação do k_{eff} , a equação matricial homogênea torna-se constituída por um conjunto de equações linearmente dependentes, o que gera infinitas soluções além da solução trivial. Como é procurada uma única solução não trivial para as constantes de integração, é preciso tornar o conjunto de equações linearmente dependentes num conjunto de equações linearmente independentes. Isso é possível substituindo-se uma das duas equações coincidentes do conjunto de equações linearmente dependentes por uma outra equação apropriada, com informações físicas do problema em questão. Com isso, além de gerar um conjunto de equações linearmente independentes, a equação matricial homogênea torna-se uma equação matricial não homogênea, a qual fornece uma solução não trivial.

A equação matricial não homogênea é alcançada utilizando-se a seguinte equação da potência prescrita na placa dada por

$$P = Er \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \sum_{g=1}^2 \Sigma_{fg} \phi_g(x, y) dx dy, \quad (4.14)$$

onde Er é a energia liberada por fissão.

Substituindo-se a fórmula da inversa (4.7) na equação 4.14 e expandindo-se o somatório para os dois grupos de energia, resulta

$$P = Er \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \Sigma_{f1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{1i}(y) \psi_i(x)}{N_i^{1/2}} dx dy + Er \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \Sigma_{f2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2i}(y) \psi_i(x)}{N_i^{1/2}} dx dy. \quad (4.15)$$

Aplicando-se os operadores integrais em 4.15, é obtida a equação desejada em função das constantes de integração, que é usada para gerar a equação matricial não homogênea.

Para sabermos qual a equação do sistema de equações linearmente dependentes a ser substituída pela equação 4.15, foi aplicada a decomposição LU na matriz de entradas associada ao sistema homogêneo. Isso se fez necessário, visto que a matriz U , resultante da decomposição LU , apresenta uma linha de elementos de entrada com valores aproximadamente nulos. Sendo assim, esta linha é substituída pela equação 4.15, resultando um sistema de equações linearmente independentes. Este sistema gera uma equação matricial linear não homogênea resolvida simbolicamente, obtendo-se as soluções para as constantes

de integração.

Com as constantes de integração conhecidas, os fluxos transformados pela GITT ficam determinados. Agora que os fluxos transformados, juntamente com as autofunções obtidas pelo problema auxiliar (4.3) são conhecidos, os fluxos escalares de nêutrons rápidos e térmicos são recuperados por meio da fórmula da inversa (4.7).

4.1 Resultados do Problema em Meio Homogêneo

Com a solução analítica do problema em meio homogêneo conhecida, são apresentados resultados numéricos e gráficos para o fluxo de nêutrons rápidos e térmicos em uma placa plana bidimensional com dimensões $6\text{cm} \times 6\text{cm}$, com potência prescrita de 10^{-6}W , com o valor de E_R de $200\text{MeV}/\text{fissão}$ e para os parâmetros nucleares apresentados na tabela 4.1. Os resultados numéricos são comparados com resultados obtidos por Diferenças Finitas, para uma malha com dimensões $0.5\text{cm} \times 0.5\text{cm}$ (75×68).

A equação usada para a normalização do fluxo de nêutrons rápidos e térmicos é a seguinte:

$$\phi_{N,g}^{i,j} = \frac{\phi_g^{i,j}}{\phi_{c,g}}, \quad (4.16)$$

onde $\phi_{c,g}$ é o fluxo no ponto central, $x = 0.0\text{cm}$ e $y = 0.0\text{cm}$.

O Desvio Percentual ($D.P.$) é calculado pela seguinte equação:

$$D.P. = \frac{\phi_{DF} - \phi_{GITT}}{\phi_{DF}} \times 100. \quad (4.17)$$

O resultado obtido, via GITT e transformada de Laplace, para o valor da constante de multiplicação efetiva foi de $K_{eff} = 0.0585989$, enquanto que o valor via Diferenças Finitas é de $k_{eff} = 0.0584817$. Neste caso, o desvio percentual ($D.P.$) entre as constantes de multiplicação efetivas foi de 0.2004% .

Tabela 4.1 – Parâmetros nucleares para o problema em meio homogêneo.

| Região | Grupo | D_g | Σ_{Rg} | $\nu\Sigma_{fg}$ | $\Sigma_{g'g}$ |
|--------|-------|--------|---------------|------------------|----------------|
| 1 | 1 | 1.6497 | 0.02309 | 0.005008 | 0.01423 |
| 1 | 2 | 0.4754 | 0.07886 | 0.09713 | 0.0 |

Os resultados numéricos para os fluxos normalizados de nêutrons rápidos e térmicos são apresentados, respectivamente, nas tabelas 4.2 e 4.3. Os mesmos foram obtidos para

$N = 1$, visto que os demais termos do somatório da fórmula da inversa da GITT, equação 4.7, não contribuem mais para a solução do problema. Estes resultados são comparados com os obtidos por Diferenças Finitas, em cujas tabelas que se seguem, são expressos pelo índice superior (DF).

Tabela 4.2 – Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Rápidos Normalizados.

| y | $\phi_1(0, y)$ | $\phi_1^{DF}(0, y)$ | $D.P.$ | $\phi_1(3, y)$ | $\phi_1^{DF}(3, y)$ | $D.P.$ |
|-----|----------------|---------------------|---------|----------------|---------------------|---------|
| 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.70710 | 0.70249 | 0.65637 |
| 1.5 | 0.92388 | 0.92138 | 0.27095 | 0.65328 | 0.64726 | 0.92911 |
| 3.0 | 0.70711 | 0.70249 | 0.65667 | 0.49999 | 0.49350 | 1.31738 |
| 4.5 | 0.38268 | 0.37665 | 1.602 | 0.27059 | 0.26460 | 2.26893 |
| 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tabela 4.3 – Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Térmicos Normalizados.

| y | $\phi_2(0, y)$ | $\phi_2^{DF}(0, y)$ | $D.P.$ | $\phi_2(3, y)$ | $\phi_2^{ref}(3, y)$ | $D.P.$ |
|-----|----------------|---------------------|---------|----------------|----------------------|---------|
| 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.70710 | 0.70250 | 0.65463 |
| 1.5 | 0.92388 | 0.92139 | 0.27047 | 0.65327 | 0.64727 | 0.92689 |
| 3.0 | 0.70711 | 0.70250 | 0.65573 | 0.49999 | 0.49351 | 1.31470 |
| 4.5 | 0.38268 | 0.37665 | 1.60052 | 0.27059 | 0.26460 | 2.26893 |
| 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Analisando as tabelas 4.2 e 4.3, pode-se verificar que a solução analítica satisfaz exatamente as condições de contorno de fluxo nulo do problema em meio homogêneo. Porém, nos pontos internos da região considerada ocorre um desvio percentual entre as duas soluções, o qual aumenta ligeiramente à medida que os pontos avaliados encontram-se mais distantes da origem do sistema de coordenadas. Isso era esperado, uma vez que a solução gerada pelo método das Diferenças Finitas é aproximada. No entanto, analisando os resultados numéricos, pode-se perceber que ambas as soluções apresentam um comportamento parecido. Sendo assim, pode-se concluir que a solução analítica via GITT e transformada de Laplace para este problema em meio homogêneo é válida.

No que segue, os gráficos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 ilustram as soluções via GITT e transformada de Laplace para o problema em meio homogêneo, do fluxo de nêutrons rápidos e térmicos, não normalizados. Os valores para os fluxos são dados em nêutrons/(cm.seg).

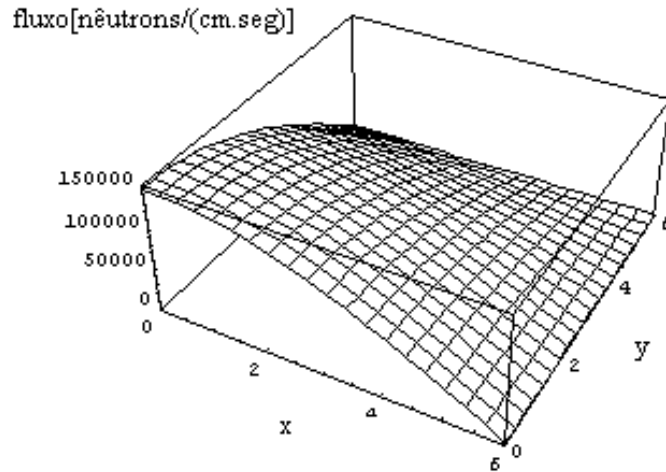


Figura 4.2 – Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados.

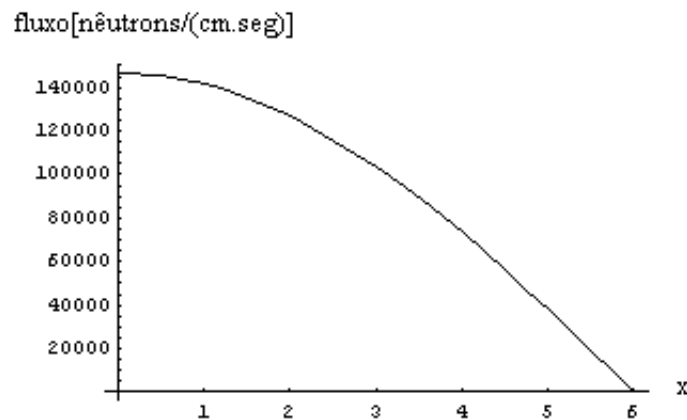


Figura 4.3 – Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados em $y = 0$.

Analisando os gráficos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 pode-se perceber que os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos apresentam comportamento semelhantes, uma vez que nesta região somente ocorre a difusão de nêutrons. No entanto, o número de nêutrons rápidos é diversas vezes maior que o de nêutrons térmicos. Isso é correto uma vez que a placa é uma região multiplicadora de nêutrons, os quais são provenientes da fissão de nêutrons. Este problema tem simetria com respeito aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$, apresentando solução somente na seção $x, y \geq 0$, conforme pode ser visto nas soluções dos gráficos 4.2 e 4.4. A solução pode ser completada usando-se operações de reflexão.

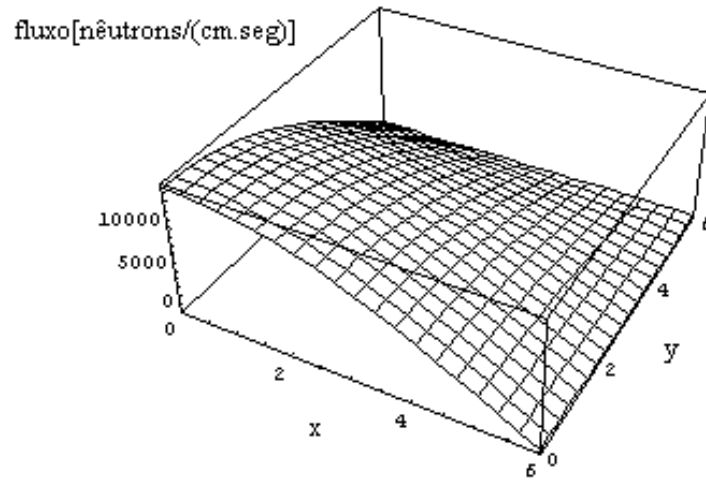


Figura 4.4 – Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados.

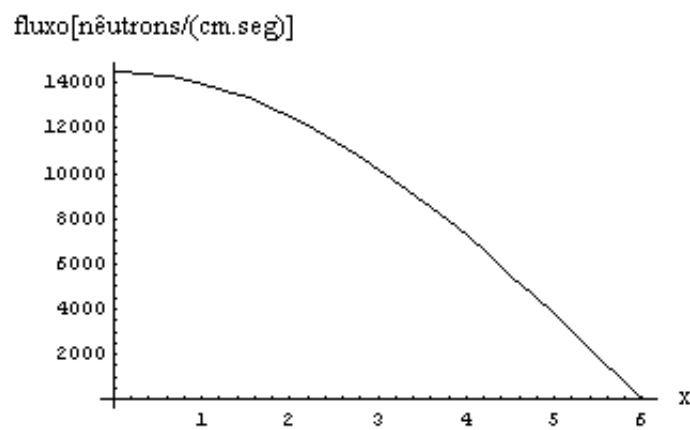


Figura 4.5 – Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados em $y = 0$.

CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HETEROGÊNEO PARA DUAS REGIÕES

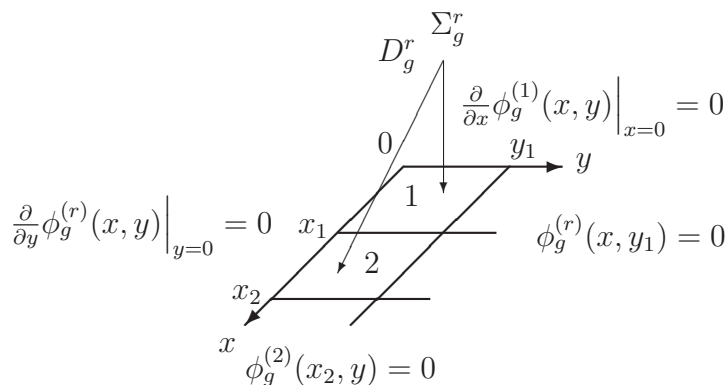


Figura 5.1 – Placa plana bidimensional com contornos homogêneos e parâmetros nucleares localmente homogêneos.

Neste capítulo é resolvido o problema de autovalor para o fluxo de nêutrons em uma placa plana bidimensional, considerando-se dois grupos de energia e duas regiões justapostas ao longo do eixo coordenado x , conforme ilustra a figura 5.1. Este problema, composto por duas regiões, é resolvido como se fossem dois problemas homogêneos, um para cada região. Sendo assim, o tratamento analítico para cada região é semelhante ao realizado na solução do problema em meio homogêneo. A solução para todo o problema é obtido unindo-se as duas soluções por meio das condições de continuidade de fluxo e corrente na interface. Deste modo, tanto as equações de difusão geral a serem resolvidas em cada região, bem como as hipóteses simplificativas são idênticas àquelas apresentadas na solução do problema em meio homogêneo, no entanto, contendo um índice superior "r", o qual corresponde às regiões, como segue

$$\begin{aligned}
& -D_g^{(r)} \frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}(x, y)}{\partial x^2} - D_g^{(r)} \frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}(x, y)}{\partial y^2} + \Sigma_{Rg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x, y) = \\
& \frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg}^{(r)}}{k_{eff}} \phi_g^{(r)}(x, y) + \frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg'}^{(r)}}{k_{eff}} \phi_{g'}^{(r)}(x, y) + \Sigma_{gg'}^{(r)} \phi_{g'}^{(r)}(x, y),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

para $g = 1, 2$ e $r = 1, 2$. As condições de contorno são dadas por

$$\left. \frac{\partial \phi_g^{(1)}(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_g^{(1)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_g^{(2)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \tag{5.1 a,b,c}$$

$$\phi_g^{(1)}(x, y_1) = 0, \quad \phi_g^{(2)}(x, y_1) = 0, \quad \phi_g^{(2)}(x_2, y) = 0 \quad g = 1, 2. \tag{5.1 d,e,f}$$

e as condições de continuidade de fluxo e corrente por

$$\phi_g^{(1)}(x_1, y) = \phi_g^{(2)}(x_1, y), \quad g = 1, 2, \tag{5.1 g}$$

$$-D_g^{(1)} \frac{\partial \phi_g^{(1)}(x_1, y)}{\partial x} = -D_g^{(2)} \frac{\partial \phi_g^{(2)}(x_1, y)}{\partial x}, \quad g = 1, 2. \tag{5.1 h}$$

De modo a simplificar a aplicação da GITT, a equação 5.1 é reorganizada resultando na seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}(x, y)}{\partial y^2} + \left[\frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg}^{(r)}}{D_g^{(r)} k_{eff}} - \frac{\Sigma_{Rg}^{(r)}}{D_g^{(r)}} \right] \phi_g^{(r)}(x, y) + \left[\frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg'}^{(r)}}{D_g^{(r)} k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(r)}}{D_g^{(r)}} \right] \phi_{g'}^{(r)}(x, y) = 0, \tag{5.2}$$

para $r = 1, 2$, $g = 1, 2$ e $g \neq g'$.

Neste problema em meio heterogêneo constituído de duas regiões, as condições na interface em $x = x_1$ são desconhecidas, ou seja, sendo as duas regiões tratadas isoladamente, surgem em ambas as regiões condições de contorno não-homogêneas em $x = x_1$. No entanto, em relação a variável y , nas duas regiões as condições de contorno são homogêneas. Sendo assim, a GITT é aplicada em relação à variável y , o que simplifica consideravelmente o procedimento de solução, se comparado à aplicação da GITT em relação a variável x . O procedimento de solução, no qual a GITT é aplicada em relação a uma variável, cujas condições de contorno não são todas homogêneas, é apresentado no capítulo 6.

5.1 GITT

A GITT é aplicada em relação a y nas equações do problema proposto, seguindo-se os passos apresentados na solução do problema homogêneo. Visto que as condições de contorno são as mesmas para cada região, e além do mais, iguais para os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos em cada região, construiu-se um único problema auxiliar de Sturm-Liouville, de forma a gerar uma única base para expandir os quatro potenciais, a saber, os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos, tanto da primeira região, bem como da segunda região, como segue

$$\frac{d^2\psi_i(y)}{dy^2} + \lambda_i^2\psi_i(y) = 0, \quad 0 < y < y_1, \quad (5.3)$$

com as respectivas condições de contorno

$$\left. \frac{d\psi_i(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad e \quad \psi_i(y_1) = 0. \quad (5.3(a, b))$$

Sua solução analítica é dada por [Özsisik, 1980]

$$\psi_i(y) = \cos(\lambda_i y), \quad (5.4)$$

onde

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{y_1} \quad e \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4 a)$$

O potencial $\phi_g^{(r)}(x, y)$ é expandido em uma base de autofunções dadas pela equação 5.4, fazendo-se uso da seguinte fórmula da inversa

$$\phi_g^{(r)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \varphi_{gj}^{(r)}(x) \psi_i(y), \quad (5.5)$$

onde $\varphi_{gj}^{(r)}(x)$ é o fluxo transformado pela GITT e N_i o quadrado da norma, definida por

$$N_i = \int_0^{y_1} \psi_i^2(y) dy. \quad (5.6)$$

Uma vez que o potencial $\phi_g^{(r)}(x, y)$ é substituído pela fórmula da inversa (5.5) nas equações 5.2, o operador integral

$$\frac{1}{N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^{y_1} \psi_j(y) dy \quad (5.7)$$

é aplicado de forma a utilizar-se a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^{y^1} \psi_i(y) \psi_j(y) dy = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (5.8)$$

O somatório da fórmula da inversa (5.5), é truncado em um N grande o suficiente para garantir a precisão dos resultados, obtendo-se um sistema de $4N$ EDO's de segunda ordem em relação a x e acopladas pela energia. Ou seja, $2N$ equações para a primeira região e $2N$ para a segunda região,

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_{gj}^{(r)}(x) + \left[\frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg}^{(r)}}{D_g^{(r)} k_{eff}} - \lambda_j^2 - \frac{\Sigma_{Rg}^{(r)}}{D_g^{(r)}} \right] \varphi_{gj}^{(r)}(x) + \left[\frac{\chi_g^{(r)} \nu \Sigma_{fg'}^{(r)}}{D_g^{(r)} k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(r)}}{D_g^{(r)}} \right] \varphi_{g'j}^{(r)}(x) = 0, \quad (5.9)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno em relação a variável x

$$\left. \frac{d\varphi_{gj}^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \varphi_{gj}^{(2)}(x_2) = 0, \quad (5.9 \text{ a,b})$$

e condições de continuidade de fluxo e corrente de nêutrons rápidos e térmicos (5.1g,h) transformadas pela GITT em relação a y , como segue

$$\varphi_{gj}^{(1)}(x_1) = \varphi_{gj}^{(2)}(x_1), \quad -D_g^{(1)} \frac{d\varphi_{gj}^{(1)}(x_1)}{dx} = -D_g^{(2)} \frac{d\varphi_{gj}^{(2)}(x_1)}{dx}, \quad (5.9 \text{ c,d})$$

para $g = 1, 2, j = 1, 2, \dots, N$.

No que segue, é aplicada a Transformada de Laplace em relação a variável x na equação 5.9, resultando, assim, dois sistemas de $2N$ equações algébricas lineares não-homogêneas, respectivamente para a primeira e segunda região,

$$s^2 \overline{\varphi_{gj}^{(1)}}(s) - s \varphi_{gj}^{(1)}(0) - \frac{d\varphi_{gj}^{(1)}(0)}{dx} + \left[\frac{\chi_g^{(1)} \nu \Sigma_{fg}^{(1)}}{D_g^{(1)} k_{eff}} - \lambda_j^2 - \frac{\Sigma_{Rg}^{(1)}}{D_g^{(1)}} \right] \overline{\varphi_{gj}^{(1)}}(s) + \left[\frac{\chi_g^{(1)} \nu \Sigma_{fg'}^{(1)}}{D_g^{(1)} k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(1)}}{D_g^{(1)}} \right] \overline{\varphi_{g'j}^{(1)}}(s) = 0, \quad (5.10)$$

$$s^2 \overline{\varphi_{gj}^{(2)}}(s) - s \varphi_{gj}^{(2)}(x_1) - \frac{d\varphi_{gj}^{(2)}(x_1)}{dx} + \left[\frac{\chi_g^{(2)} \nu \Sigma_{fg}^{(2)}}{D_g^{(2)} k_{eff}} - \lambda_{2j}^2 - \frac{\Sigma_{Rg}^{(2)}}{D_g^{(2)}} \right] \overline{\varphi_{gj}^{(2)}}(s) + \left[\frac{\chi_g^{(2)} \nu \Sigma_{fg'}^{(2)}}{D_g^{(2)} k_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(2)}}{D_g^{(2)}} \right] \overline{\varphi_{g'j}^{(2)}}(s) = 0, \quad (5.11)$$

para $g = 1, 2$ e $g \neq g'$, onde $\overline{\varphi_{gj}^{(1)}}(s)$ e $\overline{\varphi_{gj}^{(2)}}(s)$ são os fluxos transformados pela transformada de Laplace.

A equação 5.10 é simplificada utilizando-se a condição de contorno (5.9 a). Em seguida, as equações 5.10 e 5.11 são reorganizadas resultando nas seguintes equações para a primeira e segunda regiões, respectivamente

$$\left[s^2 + \frac{\chi_g^{(1)} \nu \Sigma_{fg}^{(1)}}{D_g^{(1)} K_{eff}} - \lambda_{1j}^2 - \frac{\Sigma_{Rg}^{(1)}}{D_g^{(1)}} \right] \overline{\varphi_{gj}^{(1)}}(s) + \left[\frac{\chi_g^{(1)} \nu \Sigma_{fg'}^{(1)}}{D_g^{(1)} K_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(1)}}{D_g^{(1)}} \right] \overline{\varphi_{g'j}^{(1)}}(s) = s \varphi_{gj}^{(1)}(0), \quad (5.12)$$

$$\left[s^2 + \frac{\chi_g^{(2)} \nu \Sigma_{fg}^{(2)}}{D_g^{(2)} K_{eff}} - \lambda_{2j}^2 - \frac{\Sigma_{Rg}^{(2)}}{D_g^{(2)}} \right] \overline{\varphi_{gj}^{(2)}}(s) + \left[\frac{\chi_g^{(2)} \nu \Sigma_{fg'}^{(2)}}{D_g^{(2)} K_{eff}} + \frac{\Sigma_{gg'}^{(2)}}{D_g^{(2)}} \right] \overline{\varphi_{g'j}^{(2)}}(s) = s \varphi_{gj}^{(2)}(x_1) + \frac{d\varphi_{gj}^{(2)}(x_1)}{dx}, \quad (5.13)$$

para $g = 1, 2$ e $g \neq g'$. Os termos à direita da igualdade nas equações (5.12) e (5.13) são constantes a serem determinadas, uma vez que não são conhecidos seus valores em $x = 0$ e $x = x_1$.

As equações 5.12 e 5.13 constituem um sistema de $4N$ equações algébricas lineares, cujas soluções encontram-se em função das $6N$ constantes de integração a serem determinadas $\varphi_{gj}^{(1)}(0)$, $s\varphi_{gj}^{(2)}(x_1)$ devido à equação 5.9 (c) e $\frac{d\varphi_{gj}^{(2)}(x_1)}{dx}$ devido à equação 5.9(d). Os fluxos transformados pela GITT são recuperados, aplicando-se a transformada inversa de Laplace por meio da técnica analítica da expansão de Heaviside como segue

$$\varphi_{gj}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P_{gj}^{(r)}(s)}{Q^{(r)}(s)} \right\} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{P_{gj}^{(r)}(s_i)}{Q'^{(r)}(s_i)} e^{s_i x}, \quad g = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

onde $P_{gj}^{(r)}(s)$ e $Q^{(r)}(s)$ são polinômios, s_i são as raízes distintas de $Q^{(r)}(s_i)$.

Os fluxos transformados $\varphi_{gj}^{(r)}(x)$ são utilizados nas condições de contorno (5.9b) e nas condições de continuidade de fluxo e corrente de nêutrons rápidos e térmicos transformadas pela GITT em relação a y , equações 5.9(c,d). As equações 5.9(b) e 5.9(c,d) geram um sistema de $6N$ equações lineares homogêneas, cujas incógnitas são as constantes de integração. Ou ainda, obtém-se uma equação matricial linear homogênea de ordem $6N$ e simbólica, devido a presença do fator de multiplicação efetivo, k_{eff} . Para determinar o k_{eff} , primeiramente, é calculado o determinante da matriz associada, gerando assim um polinômio em função de k_{eff} . Para determiná-lo, é aplicado o método da Bissecção.

Com o k_{eff} determinado, as constantes de integração podem ser determinadas. O procedimento adotado para determiná-las é análogo ao procedimento adotado na solução das constantes de integração do problema em meio homogêneo, capítulo 4. Primeiramente, a equação matricial linear homogênea é transformada numa não-homogênea. Para isso, fez-se uso da decomposição LU da matriz associada, de modo a substituir a linha nula da matriz

triangular superior pela equação da potência, dada por

$$P = Er \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g^{(1)}(x, y) dx dy + Er \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{y_1} \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g^{(2)}(x, y) dx dy. \quad (5.15)$$

Antes porém, os potenciais $\phi_g^{(1)}(x, y)$ e $\phi_g^{(2)}(x, y)$ são substituídos pela fórmula da inversa (5.5), resultando uma equação linear não homogênea, em função das constantes de integração. Com isso, a linha nula da matriz triangular superior é substituída pela equação 5.15, obtendo-se uma equação matricial linear não-homogênea, sendo o vetor incógnita constituído pelas constantes de integração. Esta equação matricial é resolvida simbolicamente, conhecendo-se os valores para as constantes de integração. Consequentemente, os fluxos transformados, $\varphi_{gj}^{(r)}(x)$ ficam completamente determinados. Por fim, os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos originais são recuperados fazendo-se uso da fórmula da inversa (5.5).

5.2 Resultados do Problema em Meio Heterogêneo para Duas Regiões

Nesta seção, são apresentados resultados numéricos e gráficos para a solução analítica do problema em meio heterogêneo constituída de duas regiões. São mostrados resultados para o fluxo de nêutrons em uma placa plana bidimensional com duas regiões justapostas, com dimensões totais de 18cm ao longo do eixo coordenado x e 6cm ao longo do eixo coordenado y . A primeira região, considerada multiplicadora de nêutrons, possui dimensões de $6\text{cm} \times 6\text{cm}$, enquanto que a segunda região, moderadora de nêutrons, apresenta dimensões de $12\text{cm} \times 6\text{cm}$. A potência prescrita é de 10^{-6}W , com valor de E_R de $200\text{MeV}/\text{fissão}$ e os parâmetros nucleares possuem os valores apresentados na tabela 5.1. O resultado obtido para o valor da constante de multiplicação efetiva foi de $k_{eff} = 0.138030052$, enquanto que o valor via Diferenças Finitas é de $k_{eff} = 0.137636883$. O desvio percentual ($D.P.$) entre as constantes de multiplicação efetivas foi de 0.286% .

Tabela 5.1 – Parâmetros nucleares para o problema em meio heterogêneo de duas regiões.

| Região | Grupo | D_g | Σ_{Rg} | $\nu \Sigma_{fg}$ | $\Sigma_{g'g}$ |
|--------|-------|--------|---------------|-------------------|----------------|
| 1 | 1 | 1.6497 | 0.02309 | 0.005008 | 0.01423 |
| 1 | 2 | 0.4754 | 0.07886 | 0.09713 | 0.0 |
| 2 | 1 | 0.6702 | 0.09084 | 0.0 | 0.09013 |
| 2 | 2 | 0.1509 | 0.03277 | 0.0 | 0.0 |

Os resultados numéricos para os fluxos de nêutrons rápidos normalizados em alguns

pontos da placa são apresentados na tabela 5.2. Já os fluxos de nêutrons térmicos normalizados para os mesmos pontos na placa são apresentados na tabela 5.3. Os resultados também foram obtidos para $N = 1$, e, novamente, os demais termos não contribuem mais na solução do problema. Estes resultados são comparados com os resultados obtidos por Diferenças Finitas.

Tabela 5.2 – Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Rápidos Normalizados.

| y | $\phi_1(0, y)$ | $\phi_1^{DF}(0, y)$ | <i>D.P.</i> | $\phi_1(6, y)$ | $\phi_1^{DF}(6, y)$ | <i>D.P.</i> | $\phi_1(12, 0)$ | $\phi_1^{DF}(12, 0)$ | <i>D.P.</i> |
|-----|----------------|---------------------|-------------|----------------|---------------------|-------------|-----------------|----------------------|-------------|
| 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.79039 | 0.78157 | 1.12822 | 0.05269 | 0.05199 | 1.35045 |
| 1.5 | 0.92388 | 0.92138 | 0.27120 | 0.73022 | 0.72012 | 1.40241 | 0.04868 | 0.04791 | 1.62439 |
| 3.0 | 0.70711 | 0.70249 | 0.65730 | 0.55889 | 0.54905 | 1.79278 | 0.03726 | 0.03653 | 2.01474 |
| 4.5 | 0.38268 | 0.37665 | 1.60303 | 0.30247 | 0.29438 | 2.74908 | 0.02016 | 0.01958 | 2.97212 |
| 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tabela 5.3 – Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons Térmicos Normalizados.

| y | $\phi_2(0, y)$ | $\phi_2^{ref}(0, y)$ | <i>D.P.</i> | $\phi_2(6, y)$ | $\phi_2^{ref}(6, y)$ | <i>D.P.</i> | $\phi_2(12, 0)$ | $\phi_2^{ref}(12, 0)$ | <i>D.P.</i> |
|-----|----------------|----------------------|-------------|----------------|----------------------|-------------|-----------------|-----------------------|-------------|
| 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 2.18017 | 2.23376 | -2.39888 | 1.11150 | 1.10036 | 1.01254 |
| 1.5 | 0.92388 | 0.92139 | 0.27061 | 2.01422 | 2.05815 | -2.13468 | 1.02689 | 1.01387 | 1.28510 |
| 3.0 | 0.70711 | 0.70250 | 0.65611 | 1.54162 | 1.56921 | -1.75835 | 0.78595 | 0.77301 | 1.67360 |
| 4.5 | 0.38268 | 0.37665 | 1.60113 | 0.83432 | 0.84135 | -0.8359 | 0.42535 | 0.41446 | 2.62719 |
| 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Analisando as tabelas 5.2 e 5.3, pode-se verificar que a solução analítica satisfaz exatamente as condições de contorno de fluxo nulo do problema em meio heterogêneo. Embora ambas as soluções apresentem um comportamento parecido, os resultados numéricos mostram que ocorre um desvio percentual entre as duas soluções, o qual aumenta ligeiramente à medida que os pontos avaliados encontram-se mais distantes da origem do sistema de coordenadas. Novamente isso era esperado, uma vez que a solução gerada pelo método das Diferenças Finitas é aproximada. De acordo com a análise, pode-se validar a solução analítica obtida via GITT e transformada de Laplace para este problema em meio heterogêneo constituída de duas regiões.

As soluções do fluxo de nêutrons rápidos e térmicos não normalizados para o problema heterogêneo com duas regiões, são mostradas na forma de gráficos, nas figuras 5.2,

5.3, 5.4 e 5.5. Os valores para os fluxos são dados em nêutrons/(cm.seg). Diferentemente do problema em meio homogêneo, neste problema os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos não apresentam comportamento semelhantes. Isso ocorre porque a primeira região é um meio multiplicador de nêutrons, ao passo que a segunda região é um meio moderador de nêutrons. Neste problema em meio heterogêneo com duas regiões, o número de nêutrons rápidos não é muito maior que o de nêutrons térmicos. Isso ocorre, porque na região de moderação os nêutrons rápidos são moderados a nêutrons com energia térmica. O processo ocorre da seguinte forma: na região de multiplicação de nêutrons, onde encontra-se o combustível nuclear, ocorre a fissão devido a colisão dos nêutrons térmicos com os núcleos do combustível. De acordo com a lei de Fick, os nêutrons rápidos provenientes da fissão, difundem-se da região do combustível, onde a concentração de nêutrons é maior, para a região do moderador, onde a concentração de nêutrons é menor. Ao chegarem na região do moderador, os nêutrons rápidos sofrem sucessivas colisões perdendo energia até alcançarem o equilíbrio térmico com os átomos do moderador, tornando-se nêutrons térmicos. É devido a esse processo que surge o pico de nêutrons térmicos, conforme ilustram as figuras 5.4 e 5.5 para o fluxo de nêutrons térmicos. Em seguida, devido a lei de Fick, os nêutrons térmicos da região do moderador difundem-se para a região do combustível onde reinicia-se o processo de fissão. Este problema também tem simetria com respeito aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$, apresentando solução somente na seção $x, y \geq 0$, conforme pode ser visto nas soluções dos gráficos 5.2 e 5.4. A solução pode ser completada usando-se operações de reflexão.

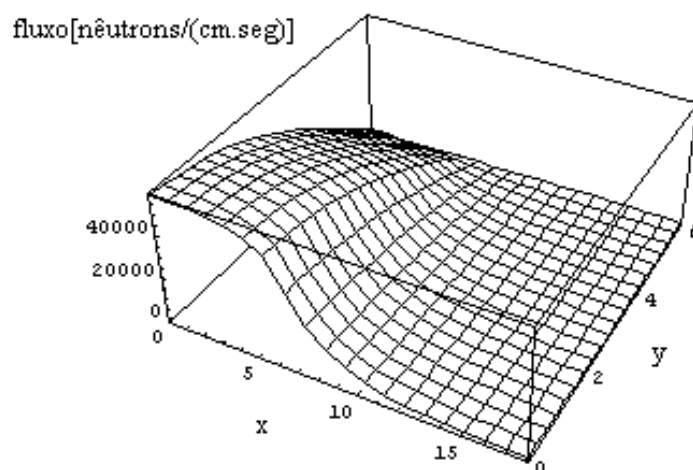


Figura 5.2 – Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados.

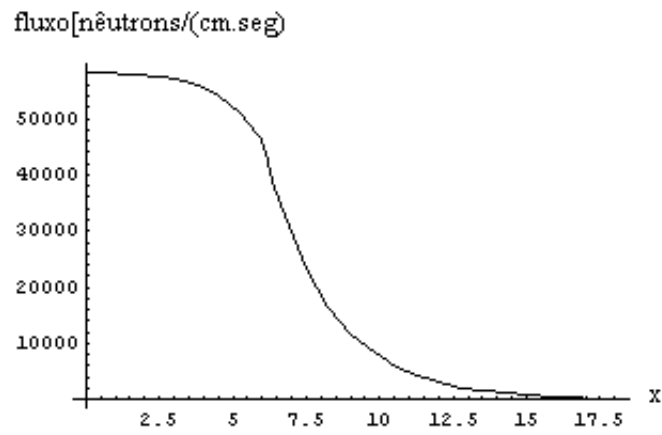


Figura 5.3 – Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados em $y = 0$.

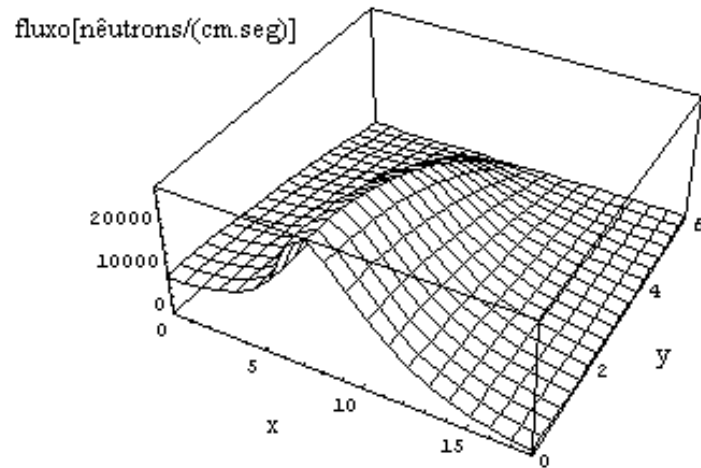


Figura 5.4 – Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados.

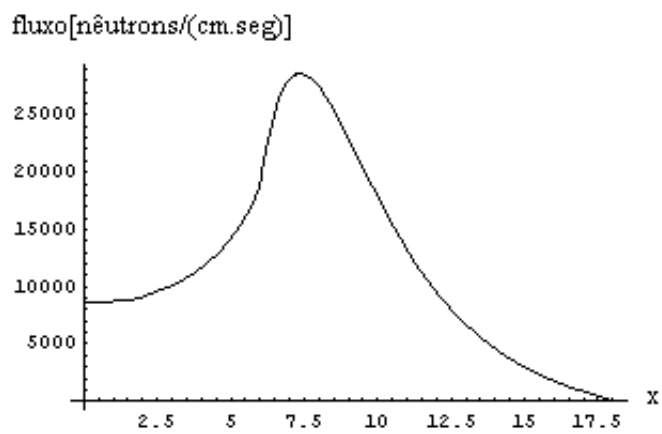


Figura 5.5 – Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados em $y = 0$.

CAPÍTULO 6

SOLUÇÃO DO PROBLEMA EM MEIO HETEROGÊNEO PARA QUATRO REGIÕES

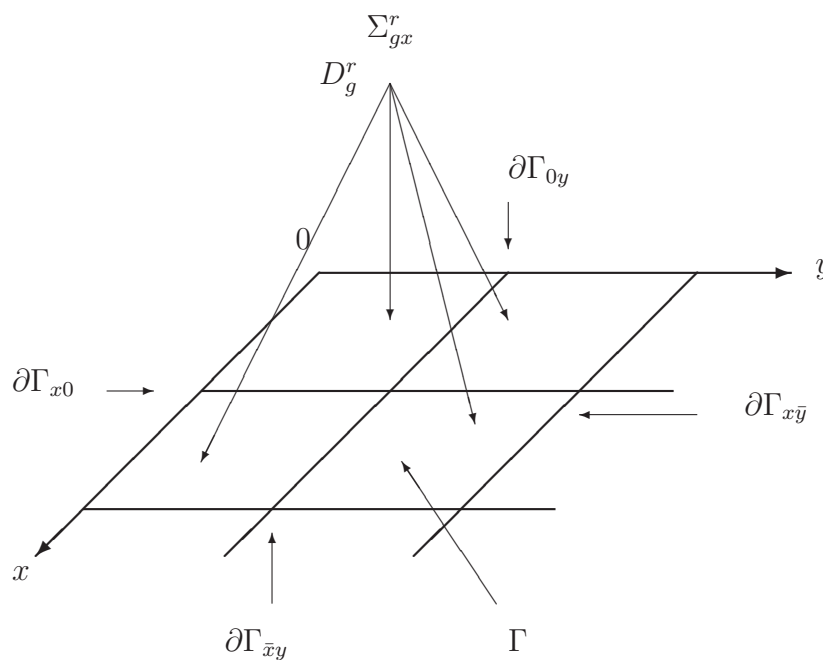


Figura 6.1 – Placa plana bidimensional com contornos, interfaces internas e coeficientes físicos localmente homogêneos.

Nos capítulos anteriores, foram apresentadas soluções analíticas da equação de difusão de nêutrons bidimensional para 2 grupos de energia, considerando um problema em meio homogêneo e outro em meio heterogêneo constituído de 2 regiões. Com isso, foi possível conhecer melhor os principais passos na aplicação das transformadas integrais GITT e Laplace nas equações difusivas, o que nos permite generalizar o procedimento de solução das equações difusivas. Sendo assim, neste capítulo, nosso principal objetivo é construir um procedimento analítico que gere soluções analíticas genéricas para a equação de difusão de nêutrons perturbativa multi-grupo bidimensional, em geometria cartesiana, pelas técnicas das transformadas integrais GITT e Laplace. Uma vez que a estrutura geral da solução é determinada, pode-se calcular diretamente o fluxo de nêutrons (o qual é uma solução analítica)

e a única quantidade, a qual é calculada numericamente no fim dos cálculos é a criticalidade.

Apresentaremos a sequência do algoritmo deste procedimento, juntamente com alguns resultados. É considerada uma placa plana bidimensional constituída de 4 regiões, nas quais são resolvidas as equações de difusão de nêutrons para 2 grupos de energia, a saber, nêutrons rápidos e térmicos. A extensão para mais do que dois grupos segue os mesmos passos e, portanto, não introduz nada de novo no formalismo. Além do mais, pode-se usar o fato de que a extensão geométrica do núcleo do reator é muito maior numa dimensão se comparada às outras duas escalas de comprimento, o qual permite cálculos neutrônicos numa descrição bidimensional.

O problema de difusão geral multi-grupo é dado pela seguinte equação

$$-\nabla \cdot (D_g(x, y)\nabla\phi_g(x, y)) + \Sigma_{Rg}(x, y)\phi_g(x, y) = \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{k_{eff}}\chi_g \sum_{g'=1}^G \nu\Sigma_{fg'}(x, y)\phi_{g'}(x, y) + \sum_{g'=1}^G \bar{\delta}_{gg'}\Sigma_{gg'}(x, y)\phi_{g'}(x, y) + S_g(x, y).$$

Aqui o símbolo $\bar{\delta}_{gg'} = (1 - \delta_{gg'})$, com $\delta_{gg'}$ o símbolo de Kronecker.

As soluções obedecerão condições de contorno de superfície seccionalmente abertas definidas pela densidade de corrente de nêutrons e fluxo escalar nos contornos das placas. Se Γ denota o (2-D) volume de interesse e $\partial\Gamma$ o contorno, então as condições $\partial\Gamma_{xy}$ são pedaços do contorno de acordo com a figura 6.1.

$$\begin{aligned} \partial_x\phi_g(\partial\Gamma_{0y}) = \frac{\partial\phi_g}{\partial x}(\partial\Gamma_{0y}) = \partial_y\phi_g(\partial\Gamma_{x0}) = \frac{\partial\phi_g}{\partial y}(\partial\Gamma_{x0}) = 0 \\ \text{e } \phi_g(\partial\Gamma_{\bar{x}y}) = \phi_g(\partial\Gamma_{x\bar{y}}) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Visto que o problema tem simetria com respeito aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$, é suficiente determinar somente a solução na seção com $x, y \geq 0$, sendo que a solução pode ser completada usando operações de reflexão.

A equação 6.1 da forma como se encontra, é improvável de ser resolvida analiticamente em forma fechada. Para introduzir uma simplificação a qual permite controlar a convergência no sentido matemático, pode-se fazer uso de um conjunto de definições físicas de escala pelo inverso da maior seção de choque macroscópica do problema em consideração e segmentar a placa em várias regiões. No presente caso, adotou-se por simplicidade somente quatro partes, desconsiderando-se este critério, visto que o objetivo é apresentar o procedimento analítico e mostrar como funciona.

Supõe-se que a única fonte de nêutrons provém da fissão e conseqüentemente ignora-se o termo de fonte ($S(x, y) \rightarrow 0$). Os coeficientes físicos são localmente homogêneos, isto é,

constante em uma região específica r .

$$D_g(x, y) \rightarrow D_g^r \quad \Sigma_{Rg}(x, y) \rightarrow \Sigma_{Rg}^r \quad \Sigma_{fg'}(x, y) \rightarrow \Sigma_{fg'}^r \quad \Sigma_{gg'}(x, y) \rightarrow \Sigma_{gg'}^r$$

A única quantidade que preserva sua dependência original nas coordenadas é o fluxo de nêutrons escalar $\phi_g^r(x, y)$, o qual é determinado em sua forma analítica em cada região. Tomando-se em consideração as modificações acima e introduzindo-se os seguintes termos $\Sigma_{Rg}^r = D_g^r \Omega_g^r$ e $\frac{\chi_g^r}{k_{eff}} \nu \Sigma_{fg'}^r + \bar{\delta}_{gg'} \Sigma_{gg'}^r = D_g^r \Xi_{gg'}^r$, resulta uma equação compacta para cada grupo de energia.

$$(\Delta - \Omega_g^r) \phi_g^r(x, y) + \sum_{g'=1}^G \Xi_{gg'}^r \phi_{g'}^r(x, y) = 0 \quad (6.3)$$

Além das condições de contorno, aparecem as condições de interface seccionalmente abertas, que combinam as soluções de cada região a uma única solução de todo o problema. Exceto para condições de interface, pode-se considerar o problema total dividido em problemas similares menores reescalados, cada um deles tendo a mesma estrutura de solução, mas com coeficientes diferentes.

$$D_g^r \nabla \phi_g^r(\partial\Gamma_{xy}) = D_g^{r'} \nabla \phi_g^{r'}(\partial\Gamma_{xy}) \quad \phi_g^r(\partial\Gamma_{xy}) = \phi_g^{r'}(\partial\Gamma_{xy}) \quad (6.4)$$

A equação 6.3 juntamente com as condições de contorno (6.2) e as condições de interface (6.4) definem o problema a ser resolvido analiticamente.

6.1 A sequência do algoritmo

O fluxo escalar pode ser substituído pela sua expansão

$$\phi_g^r = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{gi}^r(y) \xi_{gi}^r(x) \quad (6.5)$$

como o primeiro passo na decomposição das equações 6.3. O procedimento de solução utiliza, além da transformada de Laplace limitada, também GITT. Este método permite efetivamente que a equação da difusão se transforme em um conjunto de sistemas de equações lineares, as quais são então resolvidas analiticamente. Neste contexto, a ordem de aplicação das transformadas GITT e Laplace é indiferente. No entanto, para exemplificar o procedimento de solução, a GITT é aplicada em relação a variável x e a transformada de Laplace limitada em y .

No que segue, são mostrados os principais passos que definem o algoritmo de agora

em diante chamado POA-NDIFF, o qual resolve a equação 6.3 analiticamente.

1. Definições ou Parâmetros de Entrada:

- (a) número de grupos;
- (b) número de regiões;
- (c) parâmetros físicos por região e grupo:
 - i. coeficientes de difusão;
 - ii. seção de choque de absorção;
 - iii. seção de choque de fissão;
 - iv. seção de choque de espalhamento;
 - v. espectro integrado da fissão de nêutrons.
- (d) Contornos e interfaces internas entre regiões.

2. Execução da parte analítica:

- (a) transformada de Laplace limitada;
- (b) GITT;
- (c) decomposição;
- (d) solução dos componentes da transformada de Laplace;
- (e) inversão dos componentes;
- (f) unir as soluções ao longo y ;
- (g) solução das componentes do autovalor zero da GITT (contornos e condições de interface).

3. Executar parte numérica:

- (a) Determine k_{eff} da solução $\phi(x, y)$ e a potência da placa.

A conexão entre a solução da equação da difusão $\phi(x, y)$ e a potência da placa é dada por:

$$P = E_R \int_{\Gamma} \sum_g \Sigma_{fg} \phi_g(x, y) d\Gamma . \quad (6.6)$$

Visto que k_{eff} integra a solução $\phi(x, y)$ em uma forma não-linear, a integral (6.6) não é tratada de uma forma que permita resolver k_{eff} explicitamente, sendo assim, recorre-se a um procedimento numérico.

6.2 Solução por Laplace e GITT

A transformada de Laplace limitada é definida em uma única região específica e denotada por $\mathcal{L}^r[\eta(y)] = \tilde{\eta}^r(s)$ com variável dual s . O termo derivativo é definido como $\mathcal{L}^r[(\partial_y)^2\eta(y)] = s^2\tilde{\eta}^r + s\Upsilon_1^r + \Upsilon_0^r$, onde Υ_1^r e Υ_0^r são as constantes de integração. Deste procedimento resulta a equação

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left((s^2 - (\lambda_i^r)^2 - \Omega_g^r) \tilde{\eta}_{gi}^r + \sum_{g'} \Xi_{gg'}^r \tilde{\eta}_{g'i}^r + s\Upsilon_{g1i}^r + \Upsilon_{g0i}^r \right) \xi_i^r = 0, \quad (6.7)$$

onde ξ_i^r é independente do grupo g , isto é, ambos os grupos são decritos pela mesma função base.

No próximo passo, os termos com coordenadas em x são substituídos pelas soluções do problema de Sturm-Liouville,

$$(\partial_x)^2 \xi_i^r + (\lambda_i^r)^2 \xi_i^r = 0 \quad \text{com} \quad \partial_x \xi_i^r|_{a_r} = 0 \quad \text{e} \quad \xi_i^r|_{b_r} = 0 \quad (6.8)$$

para autovalores não-nulo $\lambda_i^r = \frac{(2i-1)\pi}{2(b_r-a_r)} \neq 0$, os quais fornecem uma base ortogonal para cada região. Vale lembrar que no problema em meio heterogêneo para duas regiões resolvido no capítulo 5, o autovalor λ_i não era dependente das regiões, pois as suas dimensões eram fixas. No entanto, para este problema heterogêneo com 4 regiões, o λ_i^r é dependente da região, visto que o problema é apresentado genericamente e pode apresentar dimensões quaisquer para suas regiões. As soluções da equação 6.8 com autovalor nulo são necessárias para ajustar as soluções nas interfaces. Note que esta solução é linearmente independente para as soluções com autovalor não-nulo, mas não ortogonal. Pode-se usar agora o operador projetor $\int_{a_r}^{b_r} dx [\xi_i^r]$ para decompor a equação 6.3 em um conjunto de equações lineares independentes.

$$\begin{aligned} \int_{a_r}^{b_r} \xi_j^r \xi_i^r dx &= \delta_{ij} N_j^r & \text{for } i, j \neq 0 \\ \int_{a_r}^{b_r} \xi_j^r \xi_0^r dx &= \delta_{ij} A_j^r & \text{for } j \neq 0 \\ \int_{a_r}^{b_r} \xi_0^r \xi_0^r dx &= B^r \end{aligned} \quad (6.9)$$

do qual resulta o conjunto de equações, indexadas por j

$$A_j^r \left(\underbrace{(s^2 - \Omega_g^r + \Xi_{gg}^r)}_{(A_j^r)^{-1} A T_{gj}^r} \tilde{\eta}_{g'0}^r + \underbrace{\Xi_{gg'}^r}_{(A_j^r)^{-1} A U_{g'j}^r} \tilde{\eta}_{g'0}^r + \underbrace{s \Upsilon_{g'1j}^r + \Upsilon_{g'0j}^r}_{(A_j^r)^{-1} A B_{gj}^r} \right) + \quad (6.10)$$

$$N_j^r \left(\underbrace{(s^2 - (\lambda_j^r)^2 - \Omega_g^r + \Xi_{gg}^r)}_{(N_j^r)^{-1} N T_{gj}^r} \tilde{\eta}_{gj}^r + \underbrace{\Xi_{gg'}^r}_{(N_j^r)^{-1} N U_{g'j}^r} \tilde{\eta}_{g'j}^r + \underbrace{s \Upsilon_{g'1j}^r + \Upsilon_{g'0j}^r}_{(N_j^r)^{-1} N B_{gj}^r} \right) = 0$$

Usando-se explicitamente uma aproximação a dois grupos de energia, a equação anterior é escrita na forma matricial, a qual fornece dois sistemas independentes de equações não-homogêneas, resultando na solução das funções transformadas $\tilde{\eta}_{gj}^r(s)$.

$$\begin{pmatrix} A T_{1j}^r & A U_{12j}^r \\ A T_{2j}^r & A U_{21j}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{10}^r \\ \tilde{\eta}_{20}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A B_{1j}^r \\ A B_{2j}^r \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} N T_{1j}^r & N U_{12j}^r \\ N T_{2j}^r & N U_{21j}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{1j}^r \\ \tilde{\eta}_{2j}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N B_{1j}^r \\ N B_{2j}^r \end{pmatrix} = 0 \quad (6.11)$$

As soluções são predominantemente funções racionais em s , de forma que a solução

$$\tilde{\eta}_{10}^r = \frac{Det[ABU]_j^r}{Det[ATU]_j^r} = \frac{\begin{vmatrix} A B_{1j}^r & A U_{12j}^r \\ A B_{2j}^r & A U_{21j}^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A T_{1j}^r & A U_{12j}^r \\ A T_{2j}^r & A U_{21j}^r \end{vmatrix}} \quad \tilde{\eta}_{20}^r = \frac{Det[ATB]_j^r}{Det[ATU]_j^r} = \frac{\begin{vmatrix} A T_{1j}^r & A B_{1j}^r \\ A T_{2j}^r & A B_{2j}^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A T_{1j}^r & A U_{12j}^r \\ A T_{2j}^r & A U_{21j}^r \end{vmatrix}} \quad (6.12)$$

$$\tilde{\eta}_{1j}^r = \frac{Det[NBU]_j^r}{Det[NTU]_j^r} = \frac{\begin{vmatrix} N B_{1j}^r & N U_{12j}^r \\ N B_{2j}^r & N U_{21j}^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N T_{1j}^r & N U_{12j}^r \\ N T_{2j}^r & N U_{21j}^r \end{vmatrix}} \quad \tilde{\eta}_{2j}^r = \frac{Det[NTB]_j^r}{Det[NTU]_j^r} = \frac{\begin{vmatrix} N T_{1j}^r & N B_{1j}^r \\ N T_{2j}^r & N B_{2j}^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N T_{1j}^r & N U_{12j}^r \\ N T_{2j}^r & N U_{21j}^r \end{vmatrix}}$$

pode ser invertida usando a técnica da expansão de Heaviside.

$$\eta_{1i}^r(y) = \sum_{j=1}^p \frac{Det[(A,N)BU]_i^r}{\frac{\partial}{\partial s} Det[(A,N)TU]_i^r} \Bigg|_{s=s_i} e^{s_j y}$$

$$\eta_{2i}^r(y) = \sum_{j=1}^p \frac{Det[(A,N)TB]_i^r}{\frac{\partial}{\partial s} Det[(A,N)TU]_i^r} \Bigg|_{s=s_i} e^{s_j y} \quad (6.13)$$

Recordando que as soluções $\eta_{gi}^r(y)$ ainda contém os termos devido a $\Upsilon_{(0,1)}^r$ da transformada de Laplace limitada, elimina-se estas incógnitas usando as condições de contorno e de interface

em y integrando de forma a excluir a segunda dimensão em x .

$$\begin{aligned} \sum_i \left(D_g^r \int \xi_i^r dx \frac{\partial \eta_{gi}^r}{\partial y}(b_r) - D_g^{r'} \int \xi_i^{r'} dx \frac{\partial \eta_{gi}^{r'}}{\partial y}(a_{r'}) \right) &= 0 \\ \sum_i \left(\int \xi_i^r dx \eta_{gi}^r(b_r) - \int \xi_i^{r'} dx \eta_{gi}^{r'}(a_{r'}) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Resta determinar as soluções ξ_0^r do problema de Sturm-Liouville com autovalor zero. Para as soluções constituírem uma base ortogonal por região, as condições de contorno são as mesmas do problema total com contornos $\partial\Gamma_{x0} \cup \partial\Gamma_{\bar{x}y} \cup \partial\Gamma_{x\bar{y}} \cup \partial\Gamma_{0y}$. Os únicos termos que são necessários unir as soluções locais nas interfaces são os termos lineares.

$$\begin{aligned} \sum_i \left(D_g^r \frac{\partial \xi_i^r}{\partial x}(b_r) \int \eta_{gi}^r dy \right) - D_g^{r'} \frac{\partial \xi_0^{r'}}{\partial x}(a_{r'}) \int \eta_{g0}^{r'} dy &= 0 \\ \xi_0^r(b_r) \int \eta_{g0}^r dy - \sum_i \left(\xi_i^{r'}(a_{r'}) \int \eta_{gi}^{r'} dy \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Exceto para k_{eff} a solução é conhecida em forma analítica fechada. O método de newton é usado para resolver a última incógnita, a saber, o k_{eff} através da equação (6.6).

6.3 Resultados do Problema Heterogêneo para Quatro Regiões

Os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos obtidos na solução do problema heterogêneo para quatro regiões são apresentados nas figuras 6.2 e 6.3. Os resultados deste problema são obtidos para $N = 2$, devido à limitações computacionais no cálculo dos determinantes simbólicos, utilizado na inversão da transformada de Laplace, via expansão de Heaviside. Os resultados meramente demonstram o funcionamento do procedimento. A base usada na expansão da GITT ainda não é suficiente para reproduzir as características do problema. O desenvolvimento de ferramentas computacionais, para resolver este problema estão em andamento, bem como algoritmos estão sendo desenvolvidos para calcular determinantes simbólicos de ordem maiores.

Esta placa plana bidimensional é constituída de 4 regiões, sendo a mais interna um meio multiplicador de nêutrons. As três regiões externas são considerados meios moderadores de nêutrons. Embora os resultados ainda precisam ser bastante melhorados, nas figuras 6.2 e 6.3, pode-se perceber que os resultados para os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos, respectivamente, já apresentam um comportamento ligeiramente parecido com os resultados obtidos na solução dos problemas em meio homogêneo e heterogêneo, capítulos 4 e 5, respectivamente.

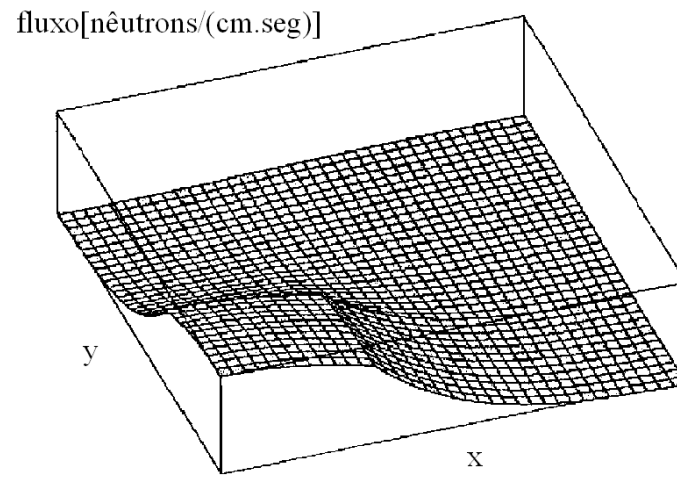


Figura 6.2 – Fluxo de Nêutrons Rápidos Não Normalizados.

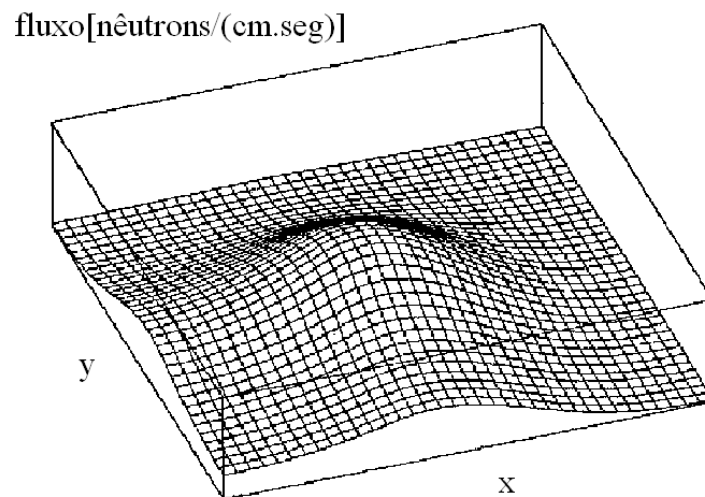


Figura 6.3 – Fluxo de Nêutrons Térmicos Não Normalizados.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se um novo algoritmo POA-NDIFF, o qual gera soluções analíticas genéricas para problemas globalmente heterogêneos de difusão de nêutrons em duas dimensões. O procedimento analítico consiste da aplicação das transformadas integrais GITT e Transformada de Laplace, que geram soluções analíticas tanto para problemas homogêneos quanto para problemas heterogêneos de difusão de nêutrons em duas dimensões. Motivado pelos recentes desenvolvimentos em conceitos de reatores, foi desenvolvido um procedimento efetivo, o qual permite analisar de forma analítica quais mudanças na geometria do núcleo do reator ou na composição ocorrem, podendo levar a uma configuração otimizada. Uma vez que a única quantidade determinada por meio numérico é o fator de multiplicação efetivo, k_{eff} , a qualidade da solução pode ser controlada por um critério de convergência matemático.

Embora as manipulações algébricas de procedimentos analíticos sejam tipicamente mais lentas na execução do que procedimentos numéricos, na presente aproximação o fato que o problema global homogenizado tem a mesma solução que um problema muito menor reescalado, restrito a uma região específica, exceto para diferenças impostas pelas condições de interface, as quais são retomadas por uma correção linear da solução, a estrutura da solução é a mesma para todas as regiões e pode também ser aplicadas para regiões externas, as quais são limitadas parcialmente por condições de contorno externas. Uma vez que o número de grupos e regiões é definido, o truncamento da solução é determinado, então pode-se preparar uma biblioteca de soluções usando o método proposto. A única tarefa a ser executada então é determinar numericamente os autovalores da GITT e os coeficientes da transformada de Laplace e resolver a integral da potência para obter-se o fator de multiplicação efetivo, k_{eff} .

As soluções analíticas determinadas para os problemas em meio homogêneo e em meio heterogêneo para duas regiões, de fluxo de nêutrons rápidos e térmicos, foram avaliadas numericamente e mostraram-se confiáveis quando comparados aos resultados numéricos, via Diferenças Finitas. Os resultados para o problema heterogêneo com quatro regiões, mera-

mente demonstram o funcionamento do procedimento e ainda precisam ser bastante melhorados. Isso deve ser alcançado, aumentando-se o número de autovalores da expansão da GITT. Neste sentido, estão sendo desenvolvidas algumas ferramentas computacionais, principalmente, no cálculo dos determinantes para ordens maiores.

Pode-se concluir que o procedimento analítico, constituído pelas transformadas integrais GITT e transformada de Laplace é uma boa ferramenta matemática na solução das equações difusivas bidimensionais de nêutrons. O novo algoritmo POA-NDIFF foi empregado para 2 grupos de energia e 4 regiões. Como próximo passo, pretende-se preparar uma biblioteca que permite calcular 2 grupos de energia para 256 regiões, o que será suficiente para calcular núcleos de reatores existentes e avaliar novos reatores. Além das extensões técnicas, pretende-se num trabalho futuro, estender o algoritmo para três dimensões e aplicá-lo em configurações como o núcleo do reator de Angra, no Rio de Janeiro, bem como o novo conceito de reator, reator *FBNR*, desenvolvido por um grupo de pesquisadores em Porto Alegre.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bennewitz, F., 1975. "Higher-Order Corrections in Nodal Reactor Calculations", **Trans. Am. Nucl.**, vol. 22, pp. 250 – 251.

Brancher, J., Vilhena, M., and Segatto, C., 1999. "The LTSn Solution for Radiative Transfer problem Without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 62(6), pp. 743 – 753.

Claro, L., 1992. "O Método dos Pseudo-Harmônicos: Uma Nova Opção Usando Discretização Nodal", Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Cotta, R. M., 1993. "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow". CRC Press, Boca Raton, FL, EUA.

Cotta, R. M., Guerrero, J. S. P., and Neto, F. S., 1992. "Hybrid Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations via Integral Transformation", **In Proc. of the 2nd Int. Conf. Advanced Comput. Methods in Heat Transfer, Heat Transfer 92, Milan, Italy**, vol. 1, pp. 735–750.

Gomit, J., 1985. "La Méthode des Pseudo-Harmoniques Théories et Application", **E.D.F. Bulletin de la Direction des Études et Recherches**, vol. Série A(1), pp. 61 – 66.

Gonçalves, G., Segatto, C., and Vilhena, M., 2000. "The LTSn Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271 – 276.

Gonçalves, G. A., 1999. "Solução LTS_N da Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons com Fonte Arbitrária para Elevada Ordem de Quadratura numa Placa Homogênea", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Guerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1996. "Benchmark Integral Transform Result for Flow Over a Backward - Facing Step", **Computiers & Fluids**, vol. 25(5), pp. 527–540.

Heinen, I. R., 2005. "**Solução Analítica da Equação da Energia Estacionária e Bidimensional para Simulação de Escoamento Plenamente Desenvolvido em Placa plana Paralela pelo Método da GILTT**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Lawrence, R., 1980. "A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations", **Nuclear Science and Engeneering**, vol. 76, pp. 218 – 231.

Lemos, R., 2005. "**Solução Analítica das Equações Difusivas da Teoria Geral de Perturbação pelo Método da Transformada de Laplace**", Tese de doutorado, PROMEC/UFRGS, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.

Mikhailov, M. D. and Cotta, R. M., 1994. "Integral Transform Method for Eigenvalue Problems", **Comm. Num. Meth. Eng.**, vol. 10, pp. 827–835.

Montagnini, B., 1994. "A Well-Balanced Coarse-Mesh Flux Expansion Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(1), pp. 45 – 53.

Segatto, C., de Vilhena, M., and Marona, D., 2008. "The LTSn Solution of the Transport Equation for One-Dimensional Cartesian Geometry with $c=1$ ", **Kerntechnik**, vol. 73, pp. 57 – 60.

Segatto, C., de Vilhena, M., and Tavares, L., 2001. "The Determination of Radiant Parameters by the LTSn Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 70, pp. 227 – 236.

Segatto, C. and Vilhena, M., 1994. "Extension of the LTSn Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimuthal Symmetry", **Annals Nuclear Energy**, vol. 21(11), pp. 701–710.

Segatto, C. and Vilhena, M., 1999. "The State-of-the-art of the LTSn Method", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1618 – 1631.

Segatto, C., Vilhena, M., and Leite, S. B., 2005. "The LTSn Angular Multigrid Approach in a Slab", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 95(3), pp. 415 – 422.

Shober, R., 1977. "Two Nodal Methods for Solving Time-Dependent Group Diffusion Equation", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 64, pp. 582 – 592.

Silva, F., 2004. "Solution of the Fixed Source Neutron Diffusion Equation by Using the Pseudo-Harmonics Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 31(14), pp. 1649 – 1666.

Vargas, R., Segatto, C., and Vilhena, M., 2007. "Solution of the Radiative Heat Transfer Equation with Internal Energy Sources in a Slab by the LTSn Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 105, pp. 1 – 7.

Wachspress, E., 1966. "Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics", Master's thesis, Prentice-Hall, New Jersey.

Wortmann, S., 1995. "Convecção Forçada Transiente no escoamento laminar em desenvolvimento simultâneo", Dissertação de mestrado, UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

Wortmann, S., 2003. "Formulação Semi-Analítica para a Equação Transformada Resultante da Aplicação da GITT em Problemas Difusivos-Advectivos", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Özisik, M. N., 1980. "Heat Conduction". John Wiley, New York.