UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

A Categoria Computável dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos, com Aplicação em Análise Real

por

RENATA HAX SANDER REISER

Dissertação submetida à avaliação como
requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio
Orientador
Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa
Co-orientador

Porto Alegre, março de 1997.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Reiser, Renata Hax Sander
Estudo da Categoria dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos com uma aplicação em Análise Numérica
121f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, BR - RS, 1997. Orientador: Claudio, Dalcidio Moraes. Co-orientador: Costa, Antônio Carlos da Rocha.

1. Teoria dos Domínios. 2. Espaços Coerentes. 3. Categorias. 4. Computação Científica. 5. Teoria dos Intervalos. I. Claudio, Dalcidio Moraes. II. Costa, Antônio Carlos da Rocha. III. Título.

Ao meu esposo Paulo
e minhas adoráveis filhas,
Carolina e Cristina

Agradecimentos

Este agradecimento estende-se a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Assim sendo, agradeço:

•de forma muito especial e carinhosa ao meu esposo Paulo pelo incansável apoio, pela segurança que me transmitiu e sobretudo pela dedicação nos momentos em que me substituiu dentro de nosso lar;

•às minhas filhas, Carolina e Cristina por todo carinho, dedicação, paciência e maturidade demonstrada;

•a todos os meus amigos, mas de forma especial a prof. Graçaliz Pereira Dimuro, não apenas pela forma competente e profissional como sempre me auxiliou mas sobretudo por ter sido uma amiga sincera, alegre e companheira e principalmente pela confiança em mim depositada;

•aos meus orientadores, prof. Dr. Dalcídio Morais Cláudio e prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa, pela dedicação e orientação dispensados ;

•aos meus colegas de curso, ao grupo de pesquisa da Matemática Computacional, em especial ao colega e amigo Marilton Sanchotene de Aguiar;

•ao corpo docente e funcionários do CPGCC, especialmente a profa. Dra. Laira Vieira Toscani pela sua conduta profissional e humana;

•à pró-reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Católica de Pelotas, UCPEL, pela manutenção de um programa eficiente de capacitação docente e incentivo à pesquisa;

•a direção, professores e funcionários da Escola de Informática e da Escola de Educação da UCPEL, pelo apoio concedido na forma de licença, auxílios e incentivo;

•aos meus alunos, em especial ao Rafael Accorsi e André DuBois pela forma independente e competente com que continuam seu trabalho como bolsistas;

•à CAPES pelo auxílio financeiro concedido em forma de bolsa.

Sumário

Lista de Símbolos

N	conjunto dos números naturais
Q	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
COSP-(STAB,LIN)	categoria dos Espaços Coerentes com funções contínuas (estáveis,lineares)
$\mathrm{I}Q \equiv (IQ, \approx)$	teia sobre IQ
X_{IQ}	família dos conjuntos de intervalos racionais ligados a intervalos racionais
X_Q	família dos conjuntos ligados a racionais
$(IQ, \approx)$	teia de intervalos racionais
$X_{\overline{Q}}$	família dos conjuntos não-ligados a racionais,
IIQ	Espaço Coerente de Intervalos Racionais
IIQ_{pos}	conjunto dos pontos positivos de IIQ
IQ_{pos}	conjunto dos intervalos positivos de IQ
IQ	Conjunto dos Intervalos Racionais
$\mathrm{A}_+ \equiv (IQ_+, \approx)$	teia gerados por intervalos racionais positivos
IIQ_+	Espaço Coerente de Intervalos Racionais Positivos
$quasitot(IIQ)_{pos}$	família dos conjuntos positivos de $quasitot(IIQ)$
$tot(IIQ)_{pos}$	família dos conjuntos positivos de $tot(IIQ)$
$\approx_{\mathrm{A}}$	relação de coerência em A
$\approx_{A'}$	Relação de coerência induzida por um conjunto básico A'
$\mathrm{A} \equiv (A, \approx_{\mathrm{A}})$	teia de um espaço coerente
$Coh(\mathrm{A})$	subconjuntos coerentes da teia A
$\mathscr{A}$	espaço coerente constituído pela coleção de subconjuntos coerentes de uma teia A parcialmente ordenados pela inclusão
$quasitot(\mathscr{A})$	conjunto dos objetos quasi-totais do espaço coerente $\mathscr{A}$
$tot(\mathscr{A})$	conjunto dos objetos totais do espaço coerente $\mathscr{A}$
A'	conjunto básico enumerável e parcialmente ordenado
$\mathrm{A} \equiv (A, \approx_{\mathrm{A}})$	teia gerada a partir de um conjunto básico
$i(x)$	de índice de um conjunto coerente $x \in IIQ$
"$\leq_{\mathrm{A}}$"	relação de ordem na teia $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_{\mathrm{A}})$
$\mathbb{A}$	espaço coerente gerado a partir de um conjunto básico
$\hat{x}$	fecho indexado de um conjunto coerente $x \in IIQ$
x	conjunto coerente
$x_{\alpha'}$	conjunto coerente ligado ao elemento básico α'
$X_{A'}$	família dos conjuntos coerentes ligados a elemento básico α'
$\overline{x}_{\alpha'}$	conjunto coerente não ligado a elemento básico α'
$X_{\overline{A'}}$	família dos conjuntos coerentes não ligados a elemento básico α'
λ'	função básica

λ	função de tokens
$\tilde{\lambda}$	pré-função
$\overline{\tilde{\lambda}}$	função de objetos
"$\leq_{\mathcal{A}}$"	relação de ordem no espaço coerente $\mathcal{A}$
$\varnothing$	conjunto coerente vazio
$\{\ \}$	token vazio
A'_i	subconjunto de A'
$\mathbf{A}_i \equiv \left(A_i, \approx_{A_i}\right)$	subteia gerada por subconjuntos A'_i
$\mathcal{A}_i$	espaço coerente gerado pelo subconjunto A'_i
λ'_i	função básica definida por subconjuntos
λ_i	função de tokens definida a partir da função básica λ'_i
$\tilde{\lambda}_i$	pré-função gerada por funções básicas λ'_i
$\overline{\tilde{\lambda}}_i$	função de objetos gerada pela função básica λ'_i
$\lambda'[X]$	imagem do conjunto X pela função λ'
$\prod \mathcal{A}_i$	espaço corente gerado pelo produto direto de subespaços
$\dot{\bigcup_i}$	união disjunta
$\dot{\mathbf{A}}$	teia gerada pela união disjuntas dos subconjuntos $A'_i \subseteq A'$,
$\dot{\lambda}'$	função básica definida pela união disjunta de subconjuntos de conjuntos básicos
$\dot{\lambda}$	função de tokens definida pelas teias formadas pela união disjuntados subconjuntos de conjuntos básicos
$\dot{\tilde{\lambda}}$	pré-função gerada pelas funções básicas $\dot{\lambda}'$
$\overline{\dot{\tilde{\lambda}}}$	função de objetos geradas pelas funções básicas $\dot{\lambda}'$
$[p,q]$	intervalo de extremos p e q
λ'_i	função básica definida entre subconjuntos básicos
λ_i	função de tokens entre as subteias
$\tilde{\lambda}_i$	pré-funções em espaços coerentes gerados pelo produto direto de sub-espaços
$\overline{\tilde{\lambda}}_i$	função de objetos em espaços gerados pelo produto direto de sub-espaços
$\cong$	isomorfismo
$(\lambda')^*$	função básica em espaços coerentes gerados pelo produto cartesiano de subteias
λ^*	função de tokens em espaços coerentes gerados pelo produto cartesiano de subteias
$\tilde{\lambda}^*$	pré-função em espaços coerentes gerados pelo produto cartesiano de subteias
$\left(\overline{\tilde{\lambda}}\right)^*$	função de objetos em espaços coerentes gerados pelo produto cartesiano de subteias
$\mathcal{A}^*$	espaço coerente gerado pelo produto cartesiano de subteias
Γ	homomorfismo entre $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}$
Ψ	isomorfismo entre $\mathcal{A}^*$ e $\prod \mathcal{A}_i$

T	homomorfismo entre $\prod$ e
$Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{A}}\right)$	família de conjuntos coerentes do espaço coerente gerado pelo produto direto de subespaços
$Coh\left(\mathbf{A}^{*}, \approx_{A^{*}}\right)$	família de conjuntos coerentes do espaço coerente gerado pelo produto cartesiano de subteias
$\sqsubseteq$	ordem de informação
$(\,)$	pré-intervalo vazio $(\varnothing, \leq_{\varnothing})$
$[\,]$	intervalo vazio $(\varnothing, \leq_{\varnothing})$
$\prod$	produto direto
$\overline{\lambda}^{*}_{(tot)}$	função de objetos restrita aos objetos totais entre espaços coerentes gerados pelo produto de subteias
STAB	subcategoria de **COSP** onde os morfismos são as funções estáveis
LIN	subcategoria de **COSP** onde os morfismos são as funções lineares
$\sqcup$	supremo
x_r	conjunto dos intervalos racionais ligados a r
$\ln$	função logarítmica de tokens
$\overline{\ln}$	pré-função logarítmica
$\overline{\overline{\ln}}$	função logarítmica de objetos
$\ln'$	função logarítmica definida nos racionais
e'	função exponencial definida nos racionais
e	função exponencial de tokens
$\overline{e}$	pré-função exponencial
$\overline{\overline{e}}$	função exponencial de objetos
$\left((\,)^{n}\right)'$	função potência definida nos racionais
$(\,)^{n}$	função potência de tokens
$\overline{(\,)^{n}}$	pré-função potência
$\overline{\overline{(\,)^{n}}}$	função potência de objetos
$\left[\sqrt[n]{(\,)}\right]'$	função raiz n-ésima definida nos racionais
$\sqrt[n]{\;}$	função raiz n-ésima de tokens
$\overline{\sqrt[n]{\;}}$	pré-função raiz n-ésima
$\overline{\overline{\sqrt[n]{\;}}}$	função raiz n-ésima de objetos
sen'	função seno definida nos racionais
sen	função seno de tokens
$\overline{\mathrm{sen}}$	pré-função seno
$\overline{\overline{\mathrm{sen}}}$	função seno de objetos
$\cos'$	função cosseno definida nos racionais
$\cos$	função cosseno de tokens
$\overline{\cos}$	pré-função cosseno
$\overline{\overline{\cos}}$	função cosseno de objetos

$\tan'$	função tangente definida nos racionais
$\tan$	função tangente de tokens
$\overline{\tan}$	pré-função tangente
$\overline{\overline{\tan}}$	função tangente de objetos
$(\text{sen}')^{-1}$	função básica arc sen ou inversa da função seno
$(\cos')^{-1}$	função básica arc cos ou inversa da função cosseno
xRy	relação R
$\wp(X)$	Conjunto das Partes do conjunto X
$(\tan')^{-1}$	função básica arc tan ou inversa da função tangente

Lista de Figuras

Resumo

Neste trabalho desenvolve-se um estudo sobre os Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos, dotados de uma estrutura adicional. Por estrutura adicional entende-se uma estrutura algébrica, de ordem pontual, de medidas, topológica e lógica. Estes espaços, denotados por $\mathcal{A}$, constituem uma subcategoria dos Espaços Coerentes, cujos objetos, ordenados pela inclusão, são conjuntos coerentes constituídos por subconjuntos do conjunto básico, os quais estão relacionados pela relação de coerência induzida, que estrutura a teia deste espaço. Os morfismos desta categoria são as funções de objetos geradas por funções básicas. As propriedades algébricas e relacionais destas funções básicas, externas ao processo de construção, ao se propagarem, passam a influenciar na verificação das propriedades internas das funções de objetos.

Contudo, este trabalho não é um estudo categórico. A metodologia adotada utiliza a linguagem simples e intuitiva da Teoria dos Conjuntos, que possibilita a visualização e a análise dos relacionamentos existentes, não apenas entre os morfismos que envolvem os objetos totais ou parciais desta categoria, mas também das estruturas ou pré-estruturas externas que os formam, representados pelas funções de tokens e funções básicas. Mostra-se que as funções de objetos são totais e bem definidas, além de serem monótonas e contínuas neste espaço. Entretanto a análise da estabilidade, e consequentemente da linearidade esta associada a injetividade das funções básicas.

Uma das características mais importantes da construção proposta é o desenvolvimento de um sistema de representação linear para funções localmente lineares, com a definição do espaço coerente $\mathcal{A}^*$, gerado pelo produto de subteias. Neste espaço, as funções de objetos são lineares e coincidem com os morfismo da categoria dos espaços coerentes. Além disso, mostra-se que $\mathcal{A}^*$ é isomorfo ao espaço coerente gerado pelo produto direto dos sub-espaços, $\prod \mathcal{A}_i$. Desta forma, toda transformação definida para um tipo de dado estruturado a partir de um conjunto básico enumerável tem uma representação linear, constituída pelos morfismos da categoria dos espaços coerentes. A existência da representação linear para as funções elementares garante a existência da representação linear para outras funções derivadas destas.

Apresenta-se ainda uma especificação desta construção, introduzindo-se o Espaço Coerente de Intervalos Racionais, *IIQ*. Na busca de uma aplicação compatível com uma abordagem computacional, em especial para Análise Real, mostra-se que, em *IIQ*, cada função real elementar esta identificada com uma função de objetos linear, definida a partir da correspondente função elementar racional. Dentre as funções que foram analisadas destacam-se: a exponencial, a logarítmica, a potência, a potência estendida, a raiz n-ésima, as funções trigonométricas como seno, cosseno e tangente e suas correspondentes funções inversas, como também a função polinomial. Verificou-se que todas estas funções de objetos são totais, bem definidas, ou pertencem ou possuem uma representação linear na categoria COSP-LIN dos espaços coerentes, além de serem fechadas para os objetos totais e quasi-totais deste espaço, sendo possível estabelecer o correspondente par-projeção para cada uma delas.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria dos Intervalos, Computação Científica, Teoria dos Domínios, Espaços Coerentes, Construção de Números Reais, Funções Lineares, Categorias.

THE COMPUTABLE CATEGORY OF THE COHERENCE SPACES GENERATED BY BASIC SETS WITH AN APPLICATION IN REAL ANALYSIS

Abstract

In this work the Coherence Spaces Generated by Basic Sets with additional structure are studied. By additional structure one means an algebraic, topological and logical structure with a punctual order and a measure system. These spaces, indicated by $\mathcal{A}$, are a subcategory of the category of Coherence Spaces, whose objects, ordered by inclusion, are coherent sets formed by the induced web coherence relation. The morphisms of this category are the functions of objects generated by basic functions. The algebraic and relational properties of these basic functions - external to the construction process - are propagated and cause important influences in the verification of the internal properties of the functions of objects.

However, this research is not a categorical study. The methodology uses the simple and intuitive language of the Set Theory, which allows the visualization and the analysis of the existing relationships, not only among the morphisms of the total and partial objects of this category, but also among their structures or pre-structures, represented by the functions of tokens and basic functions. It is shown that the functions of objects are total and well defined. They are also monotone and continuous. However the stability and the linearity of the functions of objects depend on the fact if the basic functions are injective or not.

One of the most important features of this construction is the development of a linear representation system for the local linear functions, by the definition of a coherence space $\mathcal{A}^*$, which is generated by the subweb product. In this space the functions of objects are linear and therefore they are the morphisms of the category of Coherence Spaces. Moreover, it is proved that $\mathcal{A}^*$ is isomorphic to the coherence space generated by the directed product of the subspaces, denoted by $\prod \mathcal{A}_i$. Then, for each transformation defined for a structured data type considering a denumerable basic set there exists its related linear representation. The existence of a linear representation for elementary functions guarantees the existence of a linear representation for others derived functions.

As an application of this construction, the Coherence Space of Rational Intervals, denoted by *IIQ*, is introduced. In order to show an application which is compatible to a computational approach, specially for the real analysis, each elementary real function is identified with a linear function of objects, defined considering the related elementary rational function. Some of the analyzed functions are the exponential, the logarithmic, the power , the extended power, the root, the trigonometric (sine, cosine and tangent and their relates inverses), and the polynomial functions. It is proved that all of these functions of objects are total and well defined. Moreover, either they belong to the category COPS-LIN of the coherence spaces or they have a linear representation in the same category. It is also possible to define a related projection pair for each one of them.

KEY WORDS: Interval Theory, Scientific Computation, Domain Theory, Coherence Spaces, Construction of Real Numbers, Linear Functions, Categories.

1 Introdução

Nesta primeira unidade será apresentada uma visão global do trabalho realizado, incluindo a motivação para realização do mesmo, as alternativas encontradas, os objetivos propostos e uma breve descrição de como o texto foi organizado.

1.1 Os Espaços Coerentes como Fundamentação da Computação Científica

Considerando que a *Teoria dos Domínios* é atualmente a área da *Matemática da Computação* consolidada como uma das mais empregada pela *Informática Teórica* [STO 94], são vários os tipos de domínios existentes na literatura, assim como são várias as teorias encontradas [SMY 87][ACI 91][DIM 91][STO 94][BON 95][RUT 95][ZHA 96]. Dentre esta diversidade de abordagens, salientam-se os *Espaços Coerentes*, que constituem um tipo de domínio que apresenta algumas particularidades que o distinguem dos demais, como, por exemplo, as propriedades de funções em Espaços Coerentes, que vão além da *continuidade*, como a da *estabilidade* e a da *linearidade*.

Este trabalho de pesquisa se desenvolveu no sentido de fundamentar a Análise das Funções Elementares, a partir da Teoria dos Domínios, especificamente, pelo estudo de uma categoria especial, a dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos. Entretanto este trabalho não se caracteriza por ser um estudo categórico, mas como um estudo que utiliza a linguagem da Teoria dos Conjuntos, seja pela sua simplicidade de formalismo ou pela forma como foi definida a análise interna dos objetos e morfismos que estruturam a construção que se está propondo.

Isto tem um sentido intuitivo importantíssimo, primeiro porque buscou esta fundamentação através de um processo construtivo baseado em estruturas, ou pré-estruturas, gerados a partir de conjuntos básicos, parcialmente ordenados e enumeráveis sob ponto de vista matemático, sendo portanto totalmente computáveis. E segundo porque sendo os espaços coerentes um tipo especial de domínio, é também uma estrutura que modela a noção de aproximação e sobre o qual se pode definir modelos apropriados de computação.

Além disso, os Espaços Coerentes surgem como uma alternativa no sentido de se obter uma fundamentação computacional simples e intuitiva para a *Matemática Intervalar* e *Computação Científica*, tendo em vista a complexidade apresentada por outras teorias, como, por exemplo, a *Teoria dos Domínios Contínuos* [ACI 91], [DIM 91], [BED 93] e [BED 94].

Considerando as muitas aplicações da *Teoria dos Espaços Coerentes* como uma teoria de domínios natural e de fácil compreensão, com particularidades especialmente interessantes, veja [GIR 86] [GIR 87] [GIR 89] [TRO 92][COS 94] [DIM 95], a partir dos trabalhos de [DIM 96b] e [SEL 96] já se pode dispor de textos que, além de introduzi-la formalmente como uma teoria matemático-computacional, apresentam também um estudo detalhado sobre o processo construtivo relativo aos objetos desta categoria, ou seja, os conjuntos coerentes.

A construção proposta em [DIM 96b], resumida no próximo capítulo, desenvolveu-se no sentido de se obter uma nova metodologia, e mostrou que a estrutura de corpo ordenado completo que caracteriza o conjunto dos reais pode ser sistematicamente construída de estruturas denominadas de pré-estruturas, que já estavam presentes nos conjuntos básicos, no caso os racionais, a partir dos quais a construção tem início. Esta estrutura foi identificada com o conjunto dos objetos totais do Espaço Coerente de Intervalos Racionais, *IIQ*.

1.2 Motivação

Motivados por esta construção e pelos resultados alcançados sentiu-se a necessidade da realização de um trabalho no sentido não somente de estudar as funções aritméticas, como já havia sido feito em [DIM 96a], mas também de todas as outras funções que são imprescindíveis para a estruturação da Análise, entre elas as mais imediatas são as funções elementares: função exponencial, função logarítmica, a radiciação, a potenciação, as funções trigonométricas, veja [REI 96b], e por fim a função polinomial.

Neste trabalho, restringiu-se o estudo para o caso específico de funções definidas a partir de suas correspondentes funções básicas, e aplicou-se esta construção para as funções elementares em *IIQ*, citadas no parágrafo anterior, por apresentavam este mesmo tipo de definição.

Baseado nisso, a proposta inicial deste trabalho de pesquisa era a identificação das funções elementares reais com suas correspondentes funções de objetos no Espaço Coerentes de Intervalos Racionais, sendo estas gerados no processo de construção, a partir das correspondentes funções racionais.

Entretanto, por conseqüência dos resultados parcialmente alcançados, aprofundou-se os estudos e buscou-se a generalização deste processo de construção. Desenvolveu-se então, além dos conceitos de teia e de espaços coerentes gerados a partir de conjuntos básicos e parcialmente ordenados, uma definição análoga para função de tokens, de pré-função e de função de objetos entre estes espaços, também geradas a partir das respectivas funções básicas, buscando-se uma análise da construção deste domínio.

1.3 Objetivo

Este trabalho tem como objetivos:

(i)estudar a linearidade das funções de objetos definidas a partir de funções básicas utilizando a Teoria dos Espaços Coerentes ;

(ii)desenvolver uma aplicação à Análise Real, ou seja, a construção das funções reais elementares utilizando as funções de objetos dos Espaços Coerentes de Intervalos Racionais, sendo estas, geradas a partir das funções elementares racionais;

(iii) desenvolver um texto científico e formal, de caracter introdutório, onde se possa utilizar todas as vantagens desta teoria, caracterizando os Espaços Coerentes como fundamento para Análise, sobre a qual se estrutura o Cálculo, uma das ferramentas básicas para o estudo de Sistemas Dinâmicos .

1.4 Organização do Texto

A seguir faz-se uma breve descrição das unidades que compõem este trabalho.

No capítulo 2 apresenta-se uma noção resumida de toda a fundamentação necessária para o desenvolvimento deste trabalho, com ênfase nas características mais importantes da Teoria dos Espaço Coerentes e na construção dos reais computáveis proposta por Dimuro, em [DIM 96b]. São ainda introduzidos os conceitos, definições e resultados considerados essenciais para compreensão dos próximos capítulos.

Trata-se nos capítulos 3 e 4 da construção dos espaços coerentes gerados por um conjunto básico e dos Espaços Coerentes de Intervalos, respectivamente. Apresenta-se ainda, em particular, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais.

Embora uma das mais importantes hipóteses fosse de que a partir das funções básicas pudessem ser construídas as correspondentes funções de objetos lineares, coincidindo desta forma com os morfismos da categoria dos Espaços Coerentes, isto só foi alcançado com algumas condições impostas aos conjuntos básicos. Estas condições são decorrentes da verificação de propriedades que a função básica devem satisfazer, como a injetividade, externas ao processo de construção, mas que se propagam e são determinantes para verificação das propriedades internas, como a estabilidade e a linearidade. Isto é demonstrado no capítulo 5.

Contudo, no capítulo 6 propõe-se uma alternativa para esta restrição, com a definição de espaço coerente gerado pelo produto de subteias, que por sua vez é isomorfo ao espaço coerente gerado pelo produto direto dos espaços coerentes gerados por cada uma destas subteias. Mostra-se que é possível obter uma representação linear para as funções de objetos localmente lineares.

No capítulo 7 aplica-se a construção ao Espaço Coerente de Intervalos e ao Espaço Coerente de Intervalos Racionais, e analisa-se as funções relacionadas com o mesmo e todas as proposições e teoremas que comprovam os resultados alcançados nos capítulos anteriores.

As funções elementares em *IIQ* como a função exponencial, função logarítmica, a radiciação, a potenciação, as funções trigonométricas, e a função polinomial são apresentadas no capítulo 8, onde são também ressaltadas as características de cada uma relativas as propriedades analisadas nos capítulos anteriores.

E finalmente o capítulo 9 constitui-se das conclusões finais deste trabalho, incluindo uma avaliação geral, sugestões e contribuições para futuros trabalhos de forma a dar continuidade a pesquisa aqui apresentada.

2 Revisão da Literatura

Neste capítulo apresenta-se um breve estudo da literatura básica sobre Espaços Coerentes necessário para a compreensão dos conceitos, proposições e teoremas que fazem parte desta dissertação.

Para alcançar os objetivos propostos foram fundamentais os resultados alcançados por Dimuro, [DIM 96b], na construção dos reais computáveis, utilizando os Espaços Coerentes de Intervalos Racionais, cujos aspectos principais foram selecionados, em resumo a seguir, visando com isso ressaltar a continuidade desta construção agora estendida para as funções reais elementares.

Salienta-se por último, alguns resultados importantes sobre a Teoria dos Espaços Coerentes, que embora já constem na literatura específica, foram aqui evidenciados, quer pela reconstrução de sua prova, quer pela generalização das estruturas ou pré-estruturas envolvidas, a partir dos quais fundamentam-se as provas das principais proposições e teoremas através dos quais atingiu-se os objetivos previstos.

2.1 Os Espaços Coerentes - Domínios de Girard

Girard [GIR 87] [GIR 89] introduziu o estudo de *espaços coerentes* visando dar um modelo para sua lógica linear. Existem várias discussões em torno de estudos realizados em *semântica denotacional* de cálculos formais. Segundo Girard [GIR 89], a idéia fundamental de *semântica denotacional* é permitir interpretar redução de expressões (uma noção dinâmica) por igualdade de valores (uma noção estática). Em outras palavras, são modelados os invariantes do cálculo. A *semântica denotacional* é feita com a utilização da *Teoria dos Domínios* [STO 77] [PLO 81] [DAV 91] [STO 94] [DIM 91] [ACI 91] [ESC 93] [SMY 77].

O objetivo da Teoria dos Domínios é tomar, literalmente, a interpretação ingênua (simples) de que um objeto do tipo $U \to V$ é uma função de U para V, e ver se é possível fornecer um significado computacional razoável à palavra "*função*". Segundo este ponto de vista, tenta-se evitar a obsessão pela *completeza*, procurando por idéias geométricas simples.

A primeira idéia que se tem é a seguinte: tipo = conjunto e $U \to V$ é o conjunto de todas as funções (no sentido conjunto-teorético) de U para V. Esta interpretação é aceitável, mas nada é acrescentado à noção intuitiva. Os objetos interessantes computacionalmente estão submersos em um mar de funções conjunto-teoréticas. Kreisel [GIR 89] complementou esta idéia onde: tipo = relação de equivalência parcial em N e $U \to V$ é o conjunto de (códigos de) funções recursivas parciais f tais que, se xUy, então $f(x)Vf(y)$, respeitando a relação de equivalência.

Observa-se que a idéia de Kreisel é a da compatibilidade de operações com relações entre objetos. Esta idéia foi assumida da *Teoria dos Domínios* na forma da monotonicidade das operações admissíveis para a relação de ordem de informação entre objetos. Esta abordagem se aproxima mais do paradigma computacional pesquisado por Girard [GIR 89].

Anteriormente, Scott [SCO 72] tinha apresentado uma idéia que foi considerada superior às outras anteriormente discutidas onde: tipo = espaço topológico e $U \to V$ = funções contínuas de U para V. A particularidade da idéia de Scott estava em que o tipo de espaço topológico que adotou (espaços T_0) permitiu compatibilizar a estrutura topológica com a estrutura de ordem dos objetos.

Para obter esses resultados, Scott [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82] foi conduzido a impor restrições drásticas a seus espaços topológicos,afastando-os do espírito geométrico tradicional da topologia. De fato, seus espaços são realmente apenas conjuntos parcialmente ordenados com existência de supremos de conjuntos dirigidos, onde a topologia é uma característica casual. Salienta-se, entretanto, que existe uma visão lógica da topologia, que foi estabelecida em um contexto científico computacional, [ABR 87] [SMY 83] [VIC 87].

Como não existe ainda um consenso sobre quais os espaços que atendem todas as exigências, é fundamental que pesquisas nesta área continuem buscando soluções. Neste sentido, Girard [GIR 86] [GIR 87] introduziu a noção de *espaços coerentes*, que é um tipo especial de domínio de Scott, onde os objetos são conjuntos construídos a partir de uma relação reflexiva e simétrica, denominada relação de coerência, e a ordem de informação, ou de aproximação, é a relação de inclusão entre conjuntos.

Os objetos totais de um espaço coerente, assim como Scott, na construção do limite inverso, são interpretados como supremos de *aproximações* de objetos ou dados parciais. Estes objetos parciais possuem relações estritas e bem definidas de interação e comunicação, e para os quais pode-se aplicar as funções lineares, que se constituem nos morfismos desta categoria. No caso dos espaços coerentes de intervalos racionais, busca-se uma linguagem para falar sobre aproximações em análise real que preserve vantagens computacionais como a análise automática e rigorosa do erro de resultado, das técnicas intervalares [ALE 68][ALE 83][MAR 81].

Esta abordagem tem a vantagem de ser de "*lógica construtiva*" e "*computacional*" (provê uma teoria para falar de funções lineares e computáveis), além de unificar as teorias das *semânticas de linguagens de programação* e a *Matemática Intervalar* (Análise Numérica). Ela provê uma lógica (lógica linear) para raciocinar sobre programas em Matemática Computacional.

Torna-se interessante neste momento a apresentação de algumas propriedades dos espaços coerentes, que o caracterizam como uma teoria de domínios natural e de fácil compreensão. Neste sentido salienta-se:

(i) a propriedade do fecho interior, que garante que qualquer subconjunto de um conjunto coerente é também um conjunto coerente;

(ii) a completeza binária, onde para qualquer que seja a subfamília de conjuntos coerentes, se todo subconjunto formado por dois conjuntos coerentes quaisquer, tem como supremo um conjunto coerente, então o supremo de toda a subfamília é também um conjunto coerente;

(iii) a propriedade de fechamento em relação a uniões dirigidas (relativa a $\subseteq$); e

(iv) a propriedade de fechamento em relação a interseções arbitrárias.

Assim, um espaço coerente pode ser considerado como um domínio (ordenado parcialmente pela inclusão), algébrico (todo conjunto é a união dirigida de seus subconjuntos finitos) [DAV 91] que satisfaz a propriedade de completeza binária.

O principal objetivo da teoria dos espaços coerentes é interpretar tipos de dados através de um espaço coerente, e as computações por certas funções de um espaço coerente em outro, que serão definidas unicamente por suas aproximações, e portanto contínuas. Observa-se que na análise, a monotonicidade se caracteriza por preservar aproximações enquanto a continuidade, por preservar limites. Em um contexto onde o resultado de uma computação é modelado como o supremo (limite) de conjuntos dirigidos, é natural que continuidade seja compatível com a formação de tais supremos. Assim, a teoria de Scott, [SCO 72] [SCO 76] [SCO 82] [SCO 90], e em particular a Teoria dos Espaços Coerentes, caracteriza-se pela *preservação de supremos dirigidos* [JUN 89].

Entretanto, as funções entre espaços coerentes além de serem contínuas são estáveis e lineares. A estabilidade é a propriedade que garante a existência de uma menor aproximação em certos casos, simplesmente tomando-se a interseção de conjuntos limitados superiormente, enquanto a linearidade especifica ainda mais esta menor aproximação, identificando-a com um elemento finito e atômico deste espaço.

O estudo destas propriedades será detalhado nos próximos capítulos, pois são o fundamento deste trabalho.

2.2 Uma Construção dos Reais Computáveis Usando o Espaço Coerente de Intervalos Racionais

Dimuro, [DIM 96b], estudou a Teoria dos Espaços Coerentes e como aplicação desta teoria propôs a construção dos reais computáveis utilizando Espaços Coerentes. O método utilizado possibilita que a estrutura de corpo ordenado completo do conjunto de números reais seja, sistematicamente, construída a partir de um conjunto inicial, transmitindo a definição de suas operações aritméticas, relação de ordem e propriedades topológicas, às outras estruturas ou quasi-estruturas que vão sendo obtidas no decorrer do processo construtivo.

Tomando como estrutura inicial o conjunto dos racionais Q, munido da relação de ordem padrão e das usuais operações aritméticas, obteve o Conjunto dos Intervalos Racionais IQ. O Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, denotado por IIQ, foi obtido a partir da definição de uma teia de intervalos racionais, estabelecida sobre IQ, onde é definida uma relação de coerência. As definições das operações algébricas e da relação de ordem parcial em IIQ, são características herdadas do conjunto inicial Q. Assim, pode-se interpretar o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais como um tipo e qualquer subconjunto coerente de intervalos racionais da teia deste espaço é interpretado como pontos deste espaço. Estes pontos podem ser parciais ou totais.

Dimuro mostrou ainda, que o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais é uma estrutura algébrica e ordenada, de tal forma que a definição das operações algébricas e da relação de ordem para os objetos parciais são herdadas da própria estrutura algébrica e ordenada do Conjunto de Intervalos Racionais, que por sua vez tem suas operações e relações de certa forma herdadas dos racionais.

Destacam-se os pontos quasi-totais, que, munidos de uma estrutura algébrica e ordenada adequada e de uma relação de equivalência, permitem representar aproximações (denominadas de indexadas) de dados incertos, com o objetivo de "resolver" equações com dados e parâmetros incertos (equações intervalares). Salienta-se que esta noção de índice fornece uma noção de todos objetos dos quais o conjunto coerente referido é uma aproximação.

Esta família de conjuntos coerentes de intervalos racionais tem uma característica especial, no sentido que são maximais para um determinado índice, ou seja, contém todas as suas aproximações indexadas, mas não são objetos totais do espaço coerente. Dimuro estabeleceu, também, que a família dos objetos quasi-totais, denotada por *quasitot*(*IIQ*), é uma importante parte, estável e linear do Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, *IIQ*. Pode-se, a partir disto, estabelecer um isomorfismo entre a *quasitot*(*IIQ*) e o conjunto dos intervalos reais IR.

Assim, Dimuro introduziu o conjunto de intervalos reais, obtendo a definição de intervalo real a partir da definição de pré-intervalo real. Salienta-se que, um intervalo real definido desta forma constitui, exatamente, o intervalo real definido por Moore [MOO 66] na Teoria de Intervalos.

Em [DIM 96b], é, também definido o índice real de um conjunto coerente de intervalos racionais, de maneira análoga a definição de índice de um conjunto coerente. Foi observado aí, que, o índice real sempre resulta em um intervalo real se tal conjunto coerente é não-vazio. Considerando o conjunto coerente vazio, o índice real será o próprio conjunto dos reais $\mathbb{R}$. Desta forma, foi estabelecido um isomorfismo entre a família dos objetos *quasitot*(*IIQ*) e o conjunto dos intervalos reais estendido com $\mathbb{R}$.

A família *tot*(*IIQ*), dos objetos totais do Espaço Coerente de Intervalos Racionais *IIQ* é então, identificada com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Isto significa que todo número real $w \in \mathbb{R}$ pode ser representado por um conjunto enumerável de intervalos racionais, $x_w \in tot(IIQ)$, com $x_w = \{[p,q] \in IQ | p \leq w \leq q\}$. Dentre suas características, destacam-se algumas:

(i) todo conjunto majorado e toda cadeia de *tot*(*IIQ*), tem supremo, o que caracteriza sua completude e sua consistência;

(ii) além disso, todo elemento de *tot*(*IIQ*) é supremo de cadeias de elementos que são menores que ele;

(iii) e finalmente, cada número real é dado por um conjunto coerente maximal de intervalos racionais, e portanto cada número real pode ser identificado por um conjunto enumerável de intervalos racionais.

A metodologia que caracteriza o processo de construção se divide na construção interna, obtendo os objetos parciais e totais do espaço coerente e a construção externa, que obtém a estrutura algébrica, relacional e topológica correspondente.

No presente trabalho, busca-se, além da construção das funções reais elementares, a partir dos objetos de *IIQ*, um estudo criterioso das propriedades algébrica e relacionais herdadas no processo de construção e uma análise abrangente da propagação das mesmas neste processo. Primeiramente, generalizam-se essas propriedades e definições para espaços coerentes quaisquer, e posteriormente, busca-se uma especificação das mesmas em *IIQ*. Para tal, alguns conceitos, definições e resultados observados serão considerados neste capítulo.

2.3 Conceitos Elementares

Os conceitos a seguir são considerados fundamentais para a compreensão da construção que se está propondo, e referem-se a construção do espaço coerente $\mathscr{A}$.

2.3.1 Definição. Teia

Uma *teia*, $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$, é um par formado por um conjunto A sobre o qual é definida uma relação reflexiva e simétrica, denotada por $\approx_A$, denominada de relação de coerência em A.

Do ponto de vista da Teoria dos Grafos, toda teia é um grafo reflexivo e simétrico.

2.3.2 Definição. Conjuntos coerentes

Um subconjunto x de uma teia A é *coerente* se $\forall X,Y \in x, X \approx_A Y$. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de A é denotado por Coh(A). Portanto,

$$Coh(\mathrm{A}) = Coh(A, \approx_A) = \{x \subseteq A \mid \forall X,Y \in x, X \approx_A Y\}.$$

Os conjuntos coerentes da teia são chamados *pontos*. Os pontos de uma teia são também chamados *objetos*, e classificados em objetos parciais ou totais. Os objetos totais são aqueles que contém toda informação disponível. Na terminologia da Teoria dos Grafos um ponto da teia é um clique, isto é, um subgrafo completo.

2.3.3 Definição. Espaço coerente

Um espaço coerente (ou domínio de Girard [TRO 92]) $\mathscr{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é a coleção dos subconjuntos coerentes de uma teia A, parcialmente ordenados pela inclusão.

Segundo [GIR89], os elementos de A são chamados tokens ou átomos do espaço coerente $\mathscr{A}$. Os tokens de um espaço coerente representam bits atômicos de informação, enquanto que um conjunto coerente é um parte consistente de informação. De forma análoga, pode-se dizer que coerência entre tokens é interpretada como sendo uma relação entre bits de informação referentes a pelo menos um mesmo objeto deste domínio.

Além disso, a ordem de informação é representada pela inclusão, e se $x \subseteq y$ então pode-se afirmar que y possui mais informação (no mínimo tanto quanto) do que x, isto é, x é uma aproximação de y. Se x e y não são comparáveis, $x \not\subset y$ ou $y \not\subset x$, eles não constituem informação sobre um mesmo objeto.

Define-se o *token vazio* como sendo aquele que não possui informação, ou não informa, e indica-se por $\{\ \}$. Por definição, ele é coerente com todos os outros tokens do domínio. Indica-se o conjunto coerente vazio por $\varnothing$. Os subconjuntos coerentes desta teia são os objetos parciais ou totais. Os objetos totais são aqueles que contém toda informação disponível, veja [DIM96].

2.3.4 Definição. Objeto parcial

Todo conjunto coerente, $x \in \mathscr{A}$, é um objeto parcial. Assim, todos os pontos de $\mathscr{A}$ (cliques da teia) são objetos parciais.

2.3.5 Definição. Índice de um conjunto coerente

Chama-se índice de um conjunto coerente o conjunto $i(x) = \bigcap\{X \subseteq A \mid X \in x\}$.

O índice do conjunto coerente vazio é $i(\varnothing) = A$.

Se i é o índice de um conjunto coerente x então diz-se que x é um conjunto indexado por i. Para todo conjunto coerente é possível estabelecer seu índice e usar o índice como uma propriedade intrínseca deste conjunto. Pode-se também definir classes de índice-equivalência, conforme é proposto em [DIM 96].

A definição de índice de um conjunto coerente fornece a noção de todos objetos, ou pontos, os quais tal conjunto coerente é uma aproximação. Além disso, como para cada conjunto coerente é possível estabelecer seu índice, é intuitivo pensar em completar estas aproximações de forma a se obter um objeto que apresente todos os tokens que contenham este índice. Surgiu assim a noção de objeto quasi-total, que será apresentada a seguir.

2.3.6 Definição. Objeto quasi-total

Diz-se que um conjunto coerente $x \in \mathscr{A}$ é um objeto quasi-total do Espaço Coerente $\mathscr{A} = (Coh(A, \approx_{\mathbf{A}}), \subseteq)$ se, sempre que existe $y \in \mathscr{A}$ tal que $x \subseteq y$ e $i(x) = i(y)$ então, $x = y$.

A família de objetos quasi-totais de $\mathscr{A}$ é indicada por $quasitot(\mathscr{A})$.

Observa-se que o objeto quasi-total é maximal para um índice. Entretanto não é um objeto total. Esta noção é importante, pois mostra-se neste trabalho que, a função de objetos que será definida e analisada nos próximos capítulos, é fechada e estável sobre objetos quasi-totais.

2.3.7 Definição. Objeto total

Diz-se que um conjunto coerente $x \in \mathscr{A}$ é um *objeto total* do Espaço Coerente $\mathscr{A} = (Coh(A, \approx_{\mathbf{A}}), \subseteq)$ se, sempre que existe $y \in \mathscr{A}$ tal que $x \subseteq y$, então $x = y$.

Isto significa que um objeto total x contém todas suas aproximações. Assim, $x \subseteq y$ significa, também, que não existe nenhum token de $\mathscr{A}$ que seja coerente com todos os tokens de x e não pertença a x.

Salienta-se, ainda, que um objeto total é um clique (subconjunto coerente) maximal na teia $\mathbf{A} \equiv (A, \approx_{\mathbf{A}})$.

A família de objetos totais de $\mathscr{A}$ é indicada por $tot(\mathscr{A})$.

2.3.8 Definição. Fecho indexado de um conjunto coerente

O *fecho indexado* de um conjunto coerente $x \in \mathscr{A}$, denotado por $\hat{x}$, é definido por:

$$\hat{x} = \bigcup \{ d \in \mathscr{A} \mid x \subseteq d \wedge i(x) = i(d) \}$$

Pode-se dizer, então, que o fecho de um conjunto coerente é uma operação de *completação* que, quando aplicada sobre objetos parciais, resulta em objetos quasi-totais, conforme será mostrado no próximo capítulo. Entretanto, o fecho nem sempre é um objeto total. Por exemplo, seja $x' \in \mathscr{A}$ com $i(x') \leq i(x)$. Neste caso pode ocorrer que existam $X, X' \in x$ com $X' \subset X$ e portanto X' e X são coerentes, mas $x' \not\subset \hat{x}$.

Em particular, o fecho indexado do conjunto coerente vazio é o próprio conjunto coerente vazio, ou seja, $\widehat{\varnothing} = \varnothing$.

3 Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos

Os conceitos apresentados a seguir referem-se a construção de um espaço coerente $\mathcal{A}$, gerado a partir de um conjunto básico, indicado por A'. Os elementos de A' são chamados de elementos básicos.

3.1 Teia Gerada a Partir de Um Conjunto Básico

3.1.1 Definição. Relação de coerência induzida por um conjunto básico

Seja A' um conjunto básico, enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Então, $\forall X, Y \subseteq A'$, define-se a *relação de coerência induzida por* A' como:

$$X \approx_{A'} Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in X, \forall \beta \in Y, \alpha_{min} \leq \beta_{max} \text{ e } \beta_{min} \leq \alpha_{max},$$

onde $\alpha_{min} \in min(X)$, $\alpha_{max} \in max(X)$, $\beta_{min} \in min(Y)$ e $\beta_{max} \in max(Y)$.

3.1.2 Proposição

$\forall X, Y \subseteq A'$, se $X \cap Y \neq \varnothing$, então $X \approx_{A'} Y$.

Prova:

Se $X \cap Y \neq \varnothing$, $\forall X, Y \subseteq A'$, então por definição $\exists \alpha \in X$ e $\exists \beta \in Y$ tal que $\beta_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ e $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \beta_{max}$. Logo $X \approx_{A'} Y$.♦

3.1.3 Proposição

Seja A' um conjunto enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Então a relação definida por $X \approx_{A'} Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in X, \forall \beta \in Y, \alpha_{min} \leq \beta_{max}$ e $\beta_{min} \leq \alpha_{max}$, é uma relação de coerência.

Prova:

De fato, tem-se que esta relação é:

(i)Reflexiva: $X \approx_{A'} X \Leftrightarrow \alpha_{min} = \beta_{min} \leq \alpha_{max} = \beta_{max}$ e

(ii)Simétrica: $X \approx_{A'} Y \Leftrightarrow \alpha_{min} \leq \beta_{max}$ e $\beta_{min} \leq \alpha_{max} \Leftrightarrow \beta_{min} \leq \alpha_{max}$ e $\alpha_{min} \leq \beta_{max}$. Portanto $Y \approx_{A'} X$. Mostrou-se, assim, que a relação de coerência induzida por A', $\approx_{A'}$, é uma relação de coerência.♦

3.1.4 Definição. Teia gerada a partir de um conjunto básico A'

Sejam A' um conjunto básico. Define-se teia gerada a partir do conjunto básico A' como sendo a teia, $\mathrm{A} \equiv (A', \approx_{A'})$, cujos tokens são subconjuntos $X \subseteq \wp(A')$ e onde $\approx_{A'}$ é a relação de coerência estabelecida entre estes tokens, induzida por A', conforme definição 3.1.1.

Um subconjunto x da teia $\mathrm{A} \equiv (A', \approx_{A'})$, gerada a partir do conjunto básico A', é um conjunto coerente se, $\forall X, Y \in x$, $X \approx_{A'} Y$. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes da teia $A \equiv (A', \approx_{A'})$, gerada a partir do conjunto A', é dado por $Coh(A) = Coh(A', \approx_{A'}) = \{x \subseteq A \mid \forall X, Y \in x, X \approx_{A'} Y\}$.

3.1.5 Definição. Relação de ordem na teia $A \equiv (A', \approx_{A'})$.

Seja A' um conjunto enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Define-se a relação "$\leq_A$" na teia $A \equiv (A', \approx_{A'})$, que possibilita comparar dois conjuntos ordenados $X_1, X_2 \subseteq A'$, tokens desta teia, como segue:

$$X_1 \leq_A X_2 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = X_2, \text{ ou} \\ \forall \alpha_1 \in X_1, \forall \alpha_2 \in X_2, \alpha_1 < \alpha_2. \end{cases}$$

3.1.6 Proposição.

A relação "$\leq_A$", na teia $A \equiv (A', \approx_{A'})$, é uma relação de ordem sobre A.

Prova:

A relação "$\leq_A$", na teia $A \equiv (A', \approx_{A'})$, é :

(i)Reflexiva , $\forall X \subseteq A$ tem-se que $X \leq_A X$ pois $X = X$.

(ii)Anti-simétrica, sejam $X_1, X_2 \subseteq A$, se $X_1 \leq_A X_2$ e $X_2 \leq_A X_1$ então por definição tem-se que $\forall \alpha_1 \in X_1, \forall \alpha_2 \in X_2, \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\alpha_2 \leq \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ logo $X_1 = X_2$.

(iii)Transitiva, $\forall X_1, X_2, X_3 \subseteq A$, se $X_1 \leq_A X_2$ e $X_2 \leq_A X_3$ então por definição tem-se que $\forall \alpha_1 \in X_1, \forall \alpha_2 \in X_2, \forall \alpha_3 \in X_3, \alpha_1 \leq \alpha_2, \alpha_2 \leq \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_3$ logo $X_1 \leq_A X_3$.

Portanto, "$\leq_A$" é uma relação de ordem. ♦

Entretanto, "$\leq_A$" não é uma relação de ordem total, pois se $X_1, X_2 \subseteq A$ tais que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ e tais que $\alpha_1, \alpha_2 \in X_1 \cap X_2$ e $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Então existem $\alpha_1 \in X_2, \alpha_2 \in X_1$, mas $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e, portanto X_1, X_2 não são comparáveis por essa relação.

3.2 Espaço Coerente Gerado a Partir de Um Conjunto Básico

3.2.1 Definição. Espaço coerente gerado a partir de um conjunto básico A'

O espaço coerente gerado a partir da conjunto básico A', indicado por $\mathcal{A} = (Coh(A', \approx_{A'}), \subseteq)$, é a coleção de subconjuntos coerentes de uma teia, $A \equiv (A', \approx_{A'})$, parcialmente ordenados pela inclusão. Salienta-se, aqui, que cada subconjunto X do conjunto básico, $X \subseteq \wp(A')$, determina conjuntos coerentes unitários ou átomos do espaço coerente $\mathcal{A}$, ou seja, $\forall X \subseteq \wp(A')$, $\{X\} \in \mathcal{A}$.

Analisa-se, a seguir, algumas propriedades do fecho indexado de um conjunto coerente.

3.2.2 Lema

Seja $\hat{x}$ o fecho indexado de $x \in \mathcal{A}$. Então, $\hat{x} \in \mathcal{A}$.

Prova:

Mostrar-se-á que o conjunto $\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}$ é dirigido para a relação de inclusão. De fato, dados $d_1, d_2 \in \mathcal{A}$ tal que $x \subseteq d_1 \wedge i(x) = i(d_1)$ e $x \subseteq d_2 \wedge i(x) = i(d_2)$ segue que $x \subseteq d_1 \cap d_2$ e $i(x) = i(d_1) = i(d_2) = i(d_1 \cup d_2)$. Portanto $x \subseteq d_1 \cap d_2$ e $i(x) = i(d_1 \cup d_2)$. Logo o conjunto $\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}$ é dirigido para a inclusão e consequentemente $\hat{x} = \bigcup\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\} \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}$ é uma conjunto coerente. ♦

3.2.3 Lema

Seja $\hat{x}$ o fecho indexado de $x \in \mathcal{A}$. Então tem-se que $i(\hat{x}) = i(x)$.

Prova:

É imediata pois $i(\hat{x}) = i(\bigcup\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}) = i(x)$. ♦

Observe que o lema anterior nos diz que todo conjunto coerente $x \in \mathcal{A}$ é índice-equivalente ao seu fecho indexado $\hat{x} \in \mathcal{A}$. Segundo [DIM 96b], a relação de índice define uma relação de equivalência.

3.2.4 Teorema

Para todo $x \in \mathcal{A}$, $\hat{x} \in \mathcal{A}$ é um objeto quasi-total de $\mathcal{A}$.

Prova:

Pelo lema 3.2.3, acima, $\hat{x} \in \mathcal{A}$. O conjunto coerente $\hat{x} \in \mathcal{A}$ é um objeto quasi-total do Espaço Coerente se, e somente se, sempre que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\hat{x} \subseteq y$ e $i(\hat{x}) = i(y)$, então $\hat{x} = y$. Suponha que $\hat{x} \in \mathcal{A}$ não é um objeto quasi-total. Logo existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\hat{x} \subseteq y$ e $i(\hat{x}) = i(y)$. Entretanto $\hat{x} \neq y$. Logo existe $Y \in y$ tal que, $Y \notin \hat{x}$, mas $i(\hat{x}) \subseteq Y$ e $Y \approx X, \forall X \in \hat{x}$. Seja, então, $d' = x \cup \{Y\}$. É imediato que d' é um conjunto coerente, pois $Y \approx X, \forall X \in \hat{x}$. Como $x \subseteq \hat{x}$, é um conjunto coerente, então $Y \approx X, \forall X \in x$. Sabe-se, também, que $i(\hat{x}) = i(x)$ e como $i(\hat{x}) \subseteq x$, então $i(d') = i(\hat{x}) = i(x)$. Além disso, sabe-se que $d' \in \{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}$, ou ainda $d' = x \cup \{Y\} \subseteq \bigcup\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\} = \hat{x}$. Assim, concluí-se que $Y \in \hat{x}$, o que é uma contradição. Logo $\hat{x} \in \mathcal{A}$ é um objeto quasi-total de $\mathcal{A}$.♦

3.2.5 Corolário

Para todo $x \in quasitot\,(\mathcal{A})$ tem-se que $x = \hat{x}$.

Prova:

Por definição, $x \subseteq \hat{x} = \bigcup\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}$. Para mostrar que $\hat{x} \subseteq x$, considere-se $Y \in \hat{x}$. Então existe $d' \in \mathcal{A}$, com $x \subseteq d'$ e $i(d') = i(x)$, tal que $Y \in d'$. Portanto $i(x) \subseteq Y$ e consequentemente $Y \in x$. Logo $x = \hat{x}$. ♦

Esta proposição salienta que a operação fecho é fechada, também, para os objetos quasi-totais do espaço coerente $\mathcal{A}$.

3.2.6 Definição. Conjunto de tokens ligados a um elemento básico

Seja A' o conjunto dos elementos básicos, a partir do qual se gera a teia $\mathrm{A} \equiv (A', \approx_{A'})$. Para cada $\alpha' \in A$ diz-se que $x_{\alpha'} = \{X \in \mathbf{A} | \alpha' \in X\}$ é o *conjunto de tokens ligados a* α', ou, o *conjunto coerente ligado a* α'. A família dos conjuntos de tokens ligados a α' é denotada por $X_{A'}$, ou seja, $X_{A'} = \{x_{\alpha'} | \alpha' \in A'\}$.

3.2.7 Proposição

$i(x_{\alpha'}) = i(\{X \in \mathbf{A} | \alpha' \in X\}) = \{\alpha'\}$.

Prova:

Segue imediatamente da definição. ♦

3.2.8 Proposição

$x_{\alpha'} \in tot\ (\mathcal{A})$.

Prova:

Prova-se por contradição. Suponha que $x_{\alpha'} \notin tot\ (\mathcal{A})$. Logo, existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x_{\alpha'} \subseteq y$, mas $x_{\alpha'} \neq y$. Existe, então, $Y \subseteq A'$, tal que $Y \in y, Y \notin x_{\alpha'}$. Entretanto isto leva a uma contradição, pois forçosamente $\alpha' \in Y$. Logo $Y \subseteq x_{\alpha'}$. Provou-se, assim, que $x_{\alpha'} \in tot\ (\mathcal{A})$. ♦

3.2.9 Proposição

$\hat{x}_{\alpha'} = x_{\widehat{\{\alpha'\}}}$.

Prova:

Primeiramente, $x_{\alpha'} \subseteq \hat{x}_{\alpha'}$, por definição de fecho indexado de um conjunto. Mostrar-se-á que $\hat{x}_{\alpha'} \subseteq x_{\alpha'}$. De fato, seja $Y \in \hat{x}_{\alpha'}$. Então, existe $d' \in \mathcal{A}$, com $x_{\alpha'} \subseteq d'$ e $i(d') = i(x_{\alpha'})$, tal que $Y \in d'$. Logo, $\{\alpha'\} \subseteq Y$ e consequentemente $Y \in x_{\alpha'}$. Portanto $x_{\alpha'} = \hat{x}_{\alpha'}$. ♦

Esta proposição nos diz que o fecho de um total, além de ser um objeto quasi-total, é, também, um objeto total.

Mostrou-se, na proposição 3.2.8, que os pontos da família $X_{A'} = \{x_{\alpha'} | \alpha' \in A'\}$ são (objetos) totais, ou seja, dado $\alpha' \in A'$, $x_{\alpha'}$ concentra toda informação sobre α'. Assim todo subconjunto próprio $x \subseteq x_{\alpha'}$ é uma aproximação de $x_{\alpha'}$. Existem, entretanto, objetos totais em $\mathcal{A}$ que não pertencem a importante família $X_{A'} = \{x_{\alpha'} | \alpha' \in A'\}$, isto é, que não estão ligados a algum elemento básico de A'. Portanto, o índice de tais conjuntos coerentes, embora constituídos de tokens, não constituem um token. Tal estrutura será analisada a seguir .

1.2.10 Definição. Conjunto de tokens não-ligados a um elemento básico

Sejam A' o conjunto dos elementos básicos a partir do qual se gera a teia $\mathbf{A} \equiv (A', \approx_{A'})$. Chama-se *conjunto de tokens não-ligados a um elemento básico* todo objeto total de $\mathbf{A}$ cujo índice é um conjunto unitário formado por um elemento que não pertence ao conjunto básico A'. Denota-se por $x_{\overline{\alpha'}} = \{X \in \mathbf{A} \mid \exists \alpha_1, \alpha_2 \in X \text{ com } \alpha_1 < \alpha' < \alpha_2\}$ o conjunto dos tokens ligados a $\overline{\alpha'}$. A família dos conjuntos de tokens ligados a $\overline{\alpha'}$ é denotada por $X_{\overline{A'}}$, ou seja, $X_{\overline{A'}} = \{x_{\overline{\alpha'}} \mid \overline{\alpha'} \notin A'\}$. Pode-se dizer, ainda, que $X_{\overline{A'}} = tot(\mathbf{A}) - X_{A'}$, ou seja, $X_{\overline{A'}}$ é o complemento de $X_{A'}$.

1.2.11 Proposição

$i(x_{\overline{\alpha'}}) \notin A'$.

Prova:

Segue imediatamente da definição. ♦

1.2.12 Proposição

$x_{\overline{\alpha'}} \in tot\,(\mathbf{A})$.

Prova:

Prova-se de forma análoga a proposição 1.2.8. ♦

1.2.13 Proposição

$\hat{x}_{\overline{\alpha}} = \hat{\overline{\alpha}} = x_{\hat{\overline{\alpha}}}$.

Prova:

Análoga à proposição 1.2.9. ♦

1.3 Funções no Espaço Coerente Gerado por Conjunto Básico

Define-se, a seguir, os três tipos de funções de um espaço coerente gerado a partir de um conjunto básico. Além disso, pode-se dispor de uma visão geral do processo de construção destas funções, a partir da representação gráfica apresentada ao final deste capítulo.

1.3.1 Definição. Função de Tokens

Sejam A', B' conjuntos básicos, a função básica $\lambda' : A' \to B'$ e as teias $\mathbf{A} \equiv (A', \approx_{A'})$ e $\mathbf{B} \equiv (B', \approx_{B'})$ geradas a partir de A' e B'. Define-se a *função de tokens*, $\lambda : A \to B$, por $\lambda X = \{\lambda'(\alpha) \in B \mid \alpha \in X\}$.

3.3.2 Definição. Pré-função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A', \approx_{A'}), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B', \approx_{B'}), \subseteq)$, gerados a partir dos conjuntos básicos A', B' respectivamente. Define-se a *pré-função*, $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, por $\lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\}$.

3.3.3 Definição. Função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A', \approx_{A'}), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B', \approx_{B'}), \subseteq)$, gerados a partir dos conjuntos básicos A', B', respectivamente. Define-se a *função de objetos*, $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, por:

$$\overline{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\}, \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \widehat{\lambda x} = \bigcup \{d \in \mathcal{B} \mid i(\lambda x) = i(d) \wedge \lambda x \subseteq d\}, \text{ caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\widehat{\lambda x}$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função λ. Pode-se considerar as restrições da função de objetos em relação aos $tot(\mathcal{A})$ e aos $quasitot(\mathcal{A})$.

3.4 Relação de Ordem em $\mathcal{A}$

Finalmente, pode-se estender a definição de relação de ordem para um espaço coerente $\mathcal{A} = (Coh(A', \approx_{A'}), \subseteq)$, gerado a partir de A', e estabelecer comparações entre os pontos $x_1, x_2 \subseteq \mathrm{A}$, objetos deste espaço coerente.

3.4.1 Definição. Relação "$\leq_{\mathcal{A}}$", no espaço coerente $\mathcal{A}$

A relação "menor ou igual" em $\mathcal{A}$, indicada por "$\leq_{\mathcal{A}}$", é definida da seguinte forma:

$$x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ ou} \\ x_1 <_{\mathcal{A}} x_2 \Leftrightarrow \exists X_1 \in x_1, \exists X_2 \in x_2, X_1 <_{\mathrm{A}} X_2 \end{cases}$$

3.4.2 Proposição

A relação "$\leq_{\mathcal{A}}$" no espaço coerente, $\mathcal{A} = (Coh(A', \approx_{A'}), \subseteq)$, é uma relação de ordem.

Prova:

De fato, a relação "$\leq_{\mathcal{A}}$" em $\mathcal{A}$ é:

(i)Reflexiva: $\forall x \subseteq \mathcal{A}$ e, $x = x$. Logo, $x \leq_{\mathcal{A}} x$.

(ii)Anti-simétrica: Sejam $x_1, x_2 \subseteq \mathcal{A}$, se $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2$ e $x_2 \leq_{\mathcal{A}} x_1$, então, por definição, $x_1 = x_2$ ou $\exists X_1, X_1' \in x_1, \exists X_2, X_2' \in x_2, X_1 <_{\mathrm{A}} X_2$ e $X_2' <_{\mathrm{A}} X_1'$. Logo, pela relação de coerência induzida da teia $\mathrm{A} \equiv (A', \approx_{A'})$, tem-se $X_1' \approx X_1 \Leftrightarrow X_1' \cap X_1 \neq \emptyset$ e da mesma forma $X_2' \approx X_2 \Leftrightarrow X_2' \cap X_2 \neq \emptyset$. Seja $X_1' \cap X_1 = X_1''$ e $X_2' \cap X_2 = X_2''$. Isto é uma contradição pois $X_1'' <_{\mathrm{A}} X_2 <_{\mathrm{A}} X_2''$ e $X_2'' <_{\mathrm{A}} X_1' <_{\mathrm{A}} X_1''$. Logo $x_1 = x_2$.

(iii)Transitiva: Suponha que $\forall x_1,x_2,x_3 \subseteq \mathcal{A}$, $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2$ e $x_2 \leq_{\mathcal{A}} x_3$. Então, por definição, que $\exists X_1 \in x_1, \exists X_2, X_2' \in x_2, \exists X_3 \in x_3, X_1 <_{A} X_2$ e $X_2' <_{A} X_3$.

Como $X_2' \approx X_2$ então $X_2' \cap X_2 \neq \emptyset$. Seja, então, $X_2' \cap X_2 = X_2''$, assim tem-se $\exists X_1 \in x_1, \exists X_3 \in x_3$, $X_1 <_{A} X_2'' <_{A} X_3$. Portanto $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_3$. ♦

Observa-se, entretanto, que esta relação de ordem não é total. De fato, suponha que $x_1=\{X_1\}, x_2=\{X_2\}$ tal que $X_1 \cap X_2 = X_3 \neq \emptyset$, com $x_1, x_2 \subseteq \mathcal{A}$. Então x_1, x_2 não são comparáveis por esta relação de ordem.

Por fim, encerrando este capítulo, apresenta-se uma representação gráfica composta de todas as funções envolvidas neste processo de construção, de forma a se obter uma visualização da estrutura que se está propondo. No próximo capítulo analisar-se-á essas funções, bem como suas propriedades internas, sejam elas algébricas ou relacionais.

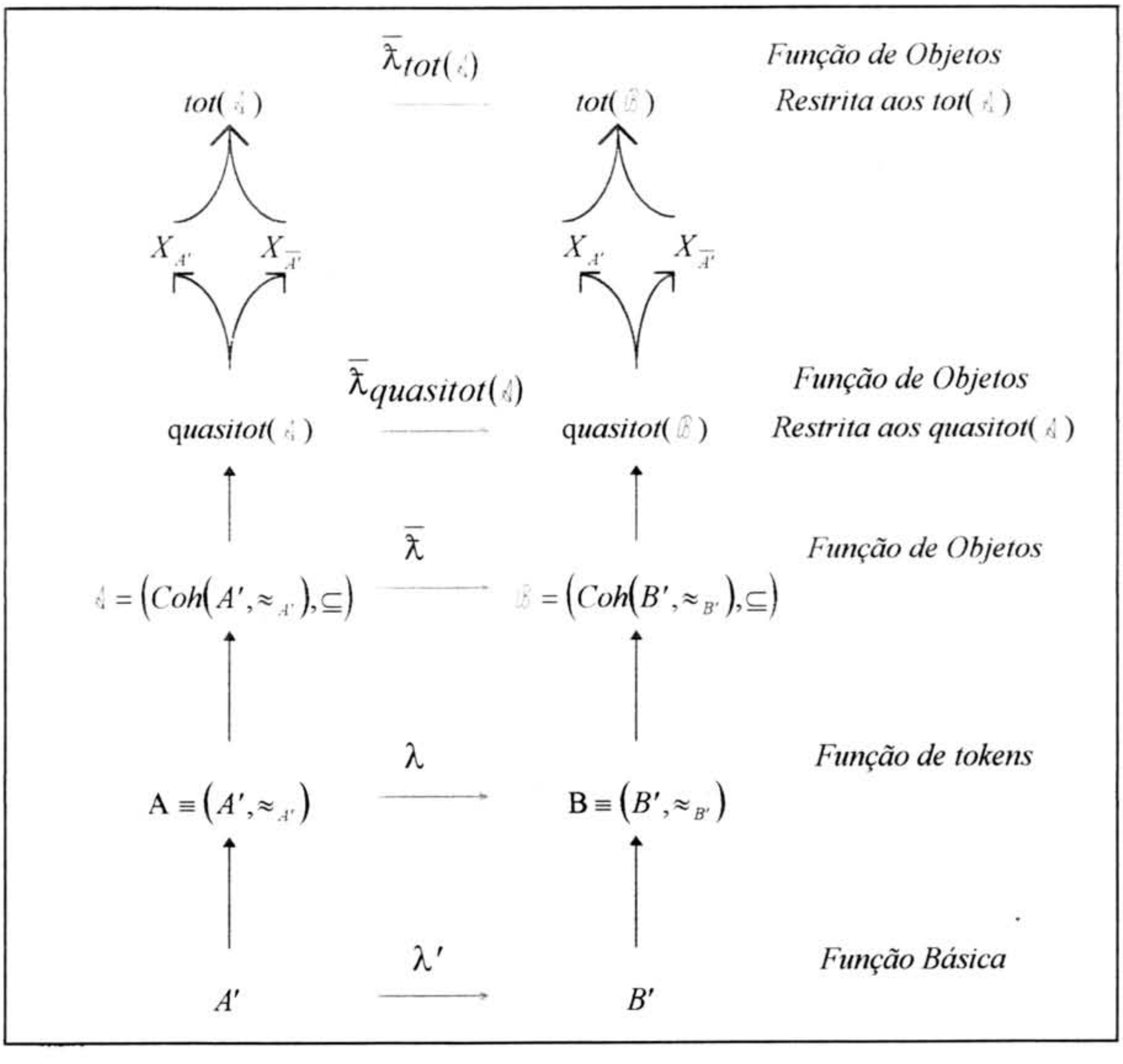

FIGURA 3.1 - Construção das funções de objetos entre espaços coerentes.

4 Espaços Coerentes de Intervalos

4.1 Teia de Intervalos

4.1.1 Definição. Pré-Intervalo

Em [DIM 96b] define-se pré-intervalo como a estrutura $X = (X', \leq_{X'})$ onde $X' \subset A'$, denominado de alcance X, é qualquer subconjunto de A' para o qual sempre que $\alpha_1', \alpha_2' \in X'$, então todo $\alpha \in A'$ tal que $\alpha_1' \leq_{A'} \alpha \leq_{A'} \alpha_2'$ tem-se que $\alpha \in X'$. A relação de ordem, $\leq_{X'}$, é uma restrição da relação de ordem $\leq_{A'}$ em A'.

Se $X' = \emptyset$ então $(\ ) = (\emptyset, \leq_{\emptyset})$ é a notação para o pré-intervalo vazio. Se $X' = A'$ então $A' = (A', \leq_{A'})$ é a notação para o pré-intervalo impróprio.

4.1.2 Definição. Intervalo

Seja A' um conjunto enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Um intervalo é uma estrutura composta de um subconjunto $X \subseteq A'$ que verifica as seguintes condições:
(i) $\inf X = p$ e $\sup X = q$;
(ii) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in X$ tem-se que $\forall \alpha \in A'$, se $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ então $\alpha \in X$.

Neste caso p e q são chamados extremos do intervalo X denotado por:

$$X = [p,q] = ([p,q], \leq_{[p,q]}) = \{\alpha \in A' / \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$

Se $p = q = \alpha$ o intervalo $X = [\alpha, \alpha]$ é denominado intervalo pontual e pode ser denotado simplesmente por α.

IA' é definido como o conjunto de todos os intervalos básicos de A'.

4.1.3 Definição. Teia sobre IA

Seja IA' o conjunto de todos os intervalos básicos de A'. A teia $\mathrm{A} \equiv (IA', \approx_A)$ é construída tomando-se cada token como um intervalo básico X e a relação de coerência induzida, definida em 3.1.1, neste caso é expressa por:

$$[p,q] \approx_A [p',q'] \Leftrightarrow \forall \alpha \in [p,q], \forall \alpha' \in [p',q'], p \leq q' \text{ e } p' \leq q \Leftrightarrow [p,q] \cap [p',q'] \neq \emptyset$$

Todo subconjunto coerente x desta teia é um conjunto de intervalos. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de A é denotado por $Coh(\mathrm{A})$. Tem-se então:

$$Coh(\mathrm{A}) = Coh(IA', \approx_A) = \{x \subseteq A \mid \forall [p,q], [p',q'] \in x, [p,q] \approx_A [p',q']\}.$$

4.1.4 Definição. Relação de ordem na teia A.

Seja A' um conjunto enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Define-se assim uma relação "$\leq_{\mathrm{A}}$" na teia $\mathrm{A} \equiv (IA', \approx_A)$ que possibilite comparar dois intervalos $[p,q],[p',q'] \subseteq IA'$, tokens desta teia, da seguinte forma:

$$[p,q] \leq_A [p',q'] \Leftrightarrow \begin{cases} [p,q] = [p',q'], \text{ ou} \\ [p,q] < [p',q'] \Leftrightarrow q < p'. \end{cases}$$

onde $p,q,p',q' \in A'$.

Em [DIM 96b] está demonstrado que esta relação é uma relação de ordem.

4.1.5 Definição

Se $X \subseteq A'$ é tal que $X = \emptyset$, define-se então $[\ ] = (\emptyset, \leq_\emptyset)$ onde a relação $\leq_\emptyset$ é uma restrição da relação "$\leq_A$".

4.2 Espaços Coerentes de Intervalos

4.2.1 Definição. Espaço Coerente de Intervalos

O espaço coerente $\mathcal{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ é a coleção de subconjuntos coerentes de intervalos de uma teia $\mathrm{A} \equiv (IA', \approx_A)$, parcialmente ordenados pela relação de inclusão.

4.3 Funções no Espaços Coerentes de Intervalos

4.3.1 Definição: Função de tokens

Sejam A',B' conjuntos básicos e a função $\lambda':A' \to B'$. Sejam também $A \subseteq \wp(A'), B \subseteq \wp(B')$ e as teias $\mathbf{A} \equiv (IA', \approx_A)$ e $\mathbf{B} \equiv (IB', \approx_B)$ geradas a partir de A' e B'. Define-se a função de tokens $\lambda: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ por:

$$\lambda[p,q] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha, \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha\right] & \text{se } \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha,\ \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \in B', \text{ e} \\ [\ ], \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

4.3.2 Definição. Pré-função no Espaço Coerente dos Intervalos

Sejam IA', IB' o conjunto de todos intervalos básicos de A', B' respectivamente, e a função básica $\lambda': A' \to B'$. Sejam $\mathrm{A} \subseteq \wp(\mathrm{A}'), \mathrm{B} \subseteq \wp(\mathrm{B}')$. Sejam também as teias $\mathbf{A} \equiv (IA', \approx_A)$ e $\mathbf{B} \equiv (IB', \approx_B)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(IB', \approx_B), \subseteq)$. Define-se a pré-função de objetos $\boldsymbol{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por:

$$\boldsymbol{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in \mathcal{B} \mid [p,q] \in x\}.$$

4.3.3 Definição. Função de objetos no Espaço Coerente dos Intervalos

Sejam IA', IB' o conjunto de todos intervalos básicos de A', B' respectivamente, e a função básica $\lambda': A' \to B'$. Sejam $\mathrm{A} \subseteq \wp(\mathrm{A}'), \mathrm{B} \subseteq \wp(\mathrm{B}')$. Sejam também as teias $\mathrm{A} \equiv (IA', \approx_A)$ e $\mathrm{B} \equiv (IB', \approx_B)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(IB', \approx_B), \subseteq)$. Define-se a função de objetos $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por :

$$\bar{\lambda}(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in \mathcal{B} \mid [p,q] \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\bar{\lambda}}x = \bigcup \{d \in \mathcal{B} \mid i(\bar{\lambda}x) = i(d) \wedge \bar{\lambda}x \subseteq d\} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\bar{\lambda}}x$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\bar{\lambda}$.

Salienta-se que todas as proposições e definições apresentadas na primeira seção deste capítulo são válidas no Espaço Coerente dos Intervalos, considerando-se para tal que cada token é um intervalo de elementos básicos do conjunto A'.

4.4 O Espaço Coerente de Intervalos Racionais

4.4.1 Definição. Teia sobre IQ

Seja o conjunto dos Racionais, Q, e a relação de ordem em Q, $\leq_Q$. Seja IQ o conjunto de todos os intervalos racionais. A teia $\mathrm{I}Q \equiv (IQ, \approx)$ é construída tornando-se cada token como um intervalo racional e a relação de coerência induzida, definida em 4.1.4, neste caso é expressa da mesma forma por:

$$[p,q] \approx [p',q'] \Leftrightarrow \forall \alpha \in [p,q], \forall \alpha' \in [p',q'], p \leq q' \text{ e } p' \leq q \Leftrightarrow [p,q] \cap [p',q'] \neq \emptyset$$

Todo subconjunto coerente x desta teia é um conjunto de intervalos. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de $\mathbf{I}Q$ é denotado por $Coh(\mathbf{I}Q)$. Tem-se então:

$$Coh(\mathrm{I}Q) = Coh(IQ, \approx) = \{x \subseteq \mathrm{I}Q \mid \forall [p,q], [p',q'] \in x, [p,q] \approx [p',q']\}.$$

4.4.2 Definição. O Espaço Coerente de Intervalos Racionais

Seja $(IQ, \approx)$ a teia de intervalos racionais. Denomina-se Espaço Coerente de Intervalos Racionais, IIQ, o domínio de Girard constituído pela coleção de subconjuntos coerentes da teia $(IQ, \approx)$ ordenados pela inclusão, isto é, $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$.

Em [DIM 96b], o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais está definido como uma estrutura algébrica ordenada, de tal forma que a definição das operações algébricas e da relação de ordem para os objetos parciais são herdadas da própria estrutura algébrica e ordenada do Conjunto de Intervalos Racionais, que por sua vez tem suas operações e relações de certa forma herdadas dos racionais. Algumas destas definições e considerações são necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, e são apresentadas a seguir.

4.4.3 Definição. Conjunto de intervalos racionais ligado a um número racional.

Sejam Q o conjunto dos racionais e IQ o conjunto dos intervalos racionais. Para cada racional $r \in Q$ diz-se que $x_r = \{[p,q] \in IQ | p \leq r \leq q\}$ é o conjunto dos intervalos racionais ligados a r.

A família dos conjuntos de intervalos racionais ligados a r é denotada por X_Q, ou seja, $X_Q = \{x_r | r \in Q\}$.

Como os pontos desta família são objetos totais, dado $r \in Q$, x_r concentra toda informação sobre r, assim como todo subconjunto próprio $x \subseteq x_r$ é uma aproximação de x_r.

Existem entretanto objetos totais em IIQ que não pertencem a importante família X_Q, isto é, que não estão ligados a algum racional. O índice de tais conjuntos coerentes, embora constituídos de intervalos racionais, não constituem um intervalo racional. Dimuro, definiu este índice como sendo o pré-intervalo racional vazio. Como exemplo, seja $\bar{x} = \{[p,q] \in IQ | (p \leq 0 \vee (p > 0 \wedge p^2 < 2)) \wedge (q > 0 \wedge q^2 > 2)\}$. Tem-se que $\bar{x} \in tot(IIQ)$ mas $\bar{x} \notin X_Q$.

4.4.4 Definição. Conjunto de intervalos racionais não-ligado a um número racional.

Chama-se IIQ o Espaço Coerente de Intervalos Racionais. Define-se conjunto de intervalos racionais não-ligado a um número racional ao conjunto formado por todos os objetos totais de IIQ cujo índice não é um número racional ou um intervalo pontual racional.

A família dos conjuntos coerentes não-ligados a racionais , denotada por $X_{\bar{Q}}$, é dada pelo conjunto $X_{\bar{Q}} = \{x \in tot(IIQ) | i(x) \notin Q\}$.

Pode-se dizer que o conjunto $X_Q \subseteq tot(IIQ)$ está identificado com o conjunto dos números racionais Q, e da mesma forma que o conjunto $X_{\bar{Q}} = tot(IIQ) - X_Q$ está identificado com o conjunto dos números irracionais.

As proposições demonstradas nas primeiras seções para os objetos totais e quasi-totais de um espaço coerente, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.5 como também 3.2.8 e 3.2.9, em particular, são válidas em IIQ.

4.4.5 Definição. Intervalo Racional Positivo

Chama-se de intervalo racional positivo todo intervalo racional $[p,q] \in IQ$ tal que $p > 0$. Se $q < 0$ então o intervalo é negativo, e se $0 \in [p,q]$, isto é, $p \leq 0 \leq q$, diz-se então que $[p,q]$ é um intervalo racional que contém o "zero". O conjunto dos intervalos racionais positivos de IQ é dado por $IQ_{pos} = \{[p,q] \in IQ | p > 0\} \subseteq IQ$.

4.4.6 Definição. Ponto Positivo

Seja IQ_{pos} o conjunto dos intervalos racionais positivos de IQ. Chama-se de ponto positivo ou conjunto coerente positivo todo conjunto coerente de intervalos racionais $x \in IIQ$ tal que existe $x \in IIQ$ tal que existe $[p,q] \in x$ com $[p,q] \in IQ_{pos}$. Quando existe $[p,q] \in x$ tal que $[p,q]$ é intervalo racional negativo, diz-se então que o ponto $x \in IIQ$ é negativo; e se $x \in IIQ$ não é ponto positivo nem negativo diz-se que x é um ponto que "aproxima" o número racional zero. O conjunto dos pontos positivos de IIQ é dado por $IIQ_{pos} = \{x \in IIQ | \exists [p,q] \in x \text{ tal que } [p,q] \in IQ_{pos}\} \subseteq IIQ$.

4.4.7 Definição. Espaço Coerente de Intervalos Racionais Positivos

Seja o conjunto dos racionais positivos, Q_+, e a relação de ordem em Q, retrita ao conjunto Q_+, $\leq_{Q_+}$. Seja IQ_+ o conjunto de todos os intervalos racionais positivos. A teia $\mathrm{A}_+ \equiv (IQ_+, \approx)$ é construída tomando-se cada token como um intervalo racional e a restrição da relação de coerência induzida, definida em 4.4.1 .

O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de A é denotado por $Coh(\mathrm{A})$. Analogamente, o conjunto de todos os subconjuntos coerentes de intervalos racionais positivos é indicado $Coh(\mathbf{A}_+) = Coh(IQ_+, \approx) = \{x \subseteq \mathbf{A}_+ \mid \forall [p,q], [p',q'] \in x,\ [p,q] \approx [p',q']\}$.

Denomina-se Espaço Coerente de Intervalos Racionais Positivos, IIQ_+, o domínio de Girard constituído pela coleção de subconjuntos coerentes da teia $\mathrm{A}_+ \equiv (IQ_+, \approx)$ ordenados pela inclusão, isto é, $IIQ_+ \equiv (Coh(IQ_+, \approx), \subseteq)$.

4.5 Funções no Espaço Coerente dos Intervalos Racionais

4.5.1 Definição. Função de tokens em IIQ

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e a função básica nos racionais, $\lambda': Q \to Q$. Define-se a função de tokens $\lambda: IQ \to IQ$ por:

$$\lambda[p,q] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \ ,\ \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha\right] & \text{se } \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha,\ \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \in Q, \text{ e} \\ [\ ], & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

4.5.2 Definição. Pré-função em IIQ

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais , a função básica nos racionais, $\lambda': Q \to Q$ e a função de tokens $\lambda: IQ \to IQ$. Define-se a pré-função de objetos $\bar{\lambda}: IIQ \to IIQ$ por:

$$\bar{\lambda} x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\}.$$

4.5.2 Definição. Pré-função em IIQ

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais , a função básica nos racionais, $\lambda': Q \rightarrow Q$ e a função de tokens $\lambda: IQ \rightarrow IQ$. Define-se a pré-função de objetos $\bar{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ por:

$$\bar{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\}.$$

4.5.3 Definição. Função de objetos em IIQ

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais , a função básica nos racionais, $\lambda': Q \rightarrow Q$ e a função de tokens $\lambda: IQ \rightarrow IQ$. Define-se a função de objetos $\overline{\bar{\lambda}}: IIQ \rightarrow IIQ$ por :

$$\overline{\bar{\lambda}}(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\lambda); \\ \widehat{\bar{\lambda}x}, \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\widehat{\bar{\lambda}x}$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\bar{\lambda}$.

5 Funções em Espaços Coerentes

Como domínios, os Espaços Coerentes são as estruturas mais simples e intuitivas para modelar a noção de aproximação e sobre a qual pode-se definir modelos apropriados de computação. Busca-se assim representar os tipos de dados como conjuntos coerentes, $Coh(\mathrm{A})$, parcialmente ordenados pela inclusão, $\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_A\right), \subseteq\right)$, e as funções computáveis por certos morfismos de um domínio em outro.

Estes morfismos são funções que satisfazem três propriedades importantes: além de serem contínuas no sentido de Scott,[SCO 82], preservam (interseções) conjunções limitadas superiormente ("pullbacks") e também comutam com uniões arbitrárias. O estudo destas propriedades definidas como continuidade, estabilidade e linearidade, bem como seu inter-relacionamento com as propriedades algébricas e relacionais do conjunto básico que gera a teia, constituem o principal objetivo deste trabalho.

Define-se a seguir as funções envolvidas no processo de construção bem como sua análise expressa em proposições e propriedades.

5.1 A Construção das Funções em Espaços Coerentes Gerados por Conjunto Básico

Sejam os conjuntos básicos A', B' e a função $\lambda' : A' \rightarrow B'$. Sejam $A \subseteq \wp(A'), B \subseteq \wp(B')$. Sejam também as teias $\mathrm{A} \equiv \left(A, \approx_A\right)$ e $\mathrm{B} \equiv \left(B, \approx_B\right)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_A\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh\left(B, \approx_B\right), \subseteq\right)$. Considere-se também:

A função de tokens $\lambda : A \rightarrow B$ onde $\lambda X = \{\lambda'\alpha \in B \mid \alpha \in X\}$.

A pré-função $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ onde $\boldsymbol{\lambda} x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid \mathrm{X} \in x\}$.

A função de objetos $\overline{\boldsymbol{\lambda}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ onde

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid \mathrm{X} \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \widehat{\boldsymbol{\lambda} x} = \bigcup\{d \in \mathcal{B} \mid i(\boldsymbol{\lambda} x) = i(d) \wedge \boldsymbol{\lambda} x \subseteq d\} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

sendo $\widehat{\boldsymbol{\lambda} x}$ o fecho indexado da imagem da pré-função $\boldsymbol{\lambda}$.

Pode-se observar que:

- A restrição de λ' a um subconjunto $X \subseteq A'$ tem como conjunto imagem, a imagem de X aplicado a função λ, isto é, $\lambda'[X] = \lambda X$.
- A restrição de λ a um subconjunto $x \subseteq A$ tem como imagem, a imagem de x pela função $\boldsymbol{\lambda}$, isto é, $\lambda[x] = \boldsymbol{\lambda} x$.
- A pré-função $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ não é total quando restrita aos objetos totais de $\mathcal{A}$, entretanto sua composição com a função fecho é uma função total para $quasitot(\mathcal{A})$.

A prova de que estas funções estão bem definidas em seus respectivos domínios é apresentada nas próximas proposições desta seção.

5.1.1 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=\left(Coh\left(A,\approx_A\right),\subseteq\right)$ e $\mathcal{B}=\left(Coh\left(B,\approx_B\right),\subseteq\right)$. A função fecho, $\hat{}:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ é total.

Prova:

Esta função esta bem definida e é total, e sua prova decorre imediatamente das proposições 3.2.2 e 3.2.4 anteriormente demonstradas.♦

Observa-se entretanto que esta função não é sobrejetora, pois apenas os objetos quasi-totais de $\mathcal{B}$ serão imagens de objetos do domínio.

5.1.2 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=\left(Coh\left(A,\approx_A\right),\subseteq\right)$ e $\mathcal{B}=\left(Coh\left(B,\approx_B\right),\subseteq\right)$. A função de tokens $\lambda\colon \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ é total.

Prova:

Se $\lambda'\colon A'\rightarrow B'$ é total então $\{\alpha\in A'|\lambda'(\alpha)\downarrow\}=A'$, ou seja, todos os elementos de A' são definidos. Portanto qualquer que seja a restrição sobre λ', onde $X\subseteq A'$, $\lambda'[X]=\lambda X$ está bem definido, ou seja, $\{X\in\mathbf{A}|\lambda(X)\downarrow\}=\mathbf{A}$. Assim $\lambda\colon\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ definida por: $\lambda X=\{\lambda'\alpha\in\mathbf{B}\mid\alpha\in X\}$ é também total. Se agora $\lambda'\colon A'\rightarrow B'$ não é total então $\exists\alpha\in A'|\lambda'(\alpha)\uparrow$, ou seja, $\lambda'(\alpha)\notin B'$. Assim, $X=\{\alpha\}$ e $\lambda X=\{\lambda'(\alpha)|\alpha\in X\}=\{\ \}$, isto é, $\lambda'[X]=\lambda X=\{\ \}$ e portanto $\lambda X\in B$, ou $\{X\in\mathbf{A}|\lambda(X)\downarrow\}=\mathbf{A}$. Mostrou-se então que $\lambda\colon\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ é sempre total. ♦

5.1.3 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=\left(Coh\left(A,\approx_A\right),\subseteq\right)$ e $\mathcal{B}=\left(Coh\left(B,\approx_B\right),\subseteq\right)$. A pré-função $\bar{\lambda}\colon\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$, definida por $\bar{\lambda}x=\{\lambda X\in\mathcal{B}\mid X\in x\}$ é total.

Prova:

Se $x\neq\emptyset$ então $\exists X\in x$ tal que λX está, ou não, definida em $\mathbf{B}$, isto é, $\lambda X\downarrow\Leftrightarrow\lambda X\in\bar{\lambda}x$ ou $\lambda X\uparrow\Leftrightarrow\lambda X\notin\bar{\lambda}x$. Se $\forall X\in x,\lambda X\uparrow$, então $\bar{\lambda}x=\emptyset$, caso contrário, se $\exists X\in x,\lambda X\downarrow$ então $\bar{\lambda}x=\{\lambda X\in\mathcal{B}\mid X\in x\}$. Portanto, $\forall x\in\mathcal{A},\exists\bar{\lambda}x\in\mathcal{B}$, o que prova que $\bar{\lambda}\colon\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ é total. ♦

5.1.4 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=\left(Coh\left(A,\approx_A\right),\subseteq\right)$ e $\mathcal{B}=\left(Coh\left(B,\approx_B\right),\subseteq\right)$. A função de objetos $\bar{\bar{\lambda}}\colon\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ definida por:

$$\bar{\bar{\lambda}}(x)=\begin{cases}\bar{\lambda}x=\{\lambda X\in\mathcal{B}\mid X\in x\} & \text{se } x\notin quasitot(\mathcal{A});\\ \hat{\bar{\lambda}}x=\bigcup\{d\in\mathcal{B}\mid i(\bar{\lambda}x)=i(d)\wedge\bar{\lambda}x\subseteq d\} & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

é total.

Prova:

A prova é imediata a partir do lema 1.2.2 e proposição 5.1.3. Em particular, se $x = \varnothing$, pela definição 3.2.16, $\overline{\lambda}(x)=\hat{\lambda}\varnothing=\varnothing\subseteq\mathcal{B}$.♦

5.1.5 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$, e a pré-função $\hat{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, definida por $\hat{\lambda}x=\{\lambda X\in\mathcal{B}\mid X\in x\}$. $\mathcal{A}_\varnothing=\{x\in\mathcal{A}\mid\hat{\lambda}x=\varnothing\}=\{\varnothing\}$ se, e somente se, $\lambda': A'\to B'$ é total.

Prova:

Suponha-se que $\lambda': A'\to B'$ não é total, ou seja, $\exists\alpha\in X|\lambda'\alpha\uparrow$. Então, por definição, $\hat{\lambda}\{\alpha\}=\varnothing$ e logo $\{\alpha\}\in\mathcal{A}_\varnothing=\{x\in\mathcal{A}\mid\hat{\lambda}x=\varnothing\}$ o que implica $\mathcal{A}_\varnothing\neq\{\varnothing\}$. Portanto, provou-se, pela contra-recíproca, que se $\mathcal{A}_\varnothing=\{x\in\mathcal{A}\mid\hat{\lambda}x=\varnothing\}=\{\varnothing\}$ então $\lambda': A'\to B'$ é total. Por contradição prova-se a seguir que, se $\lambda': A'\to B'$ é total então $\mathcal{A}_\varnothing=\{x\in\mathcal{A}\mid\hat{\lambda}x=\varnothing\}=\{\varnothing\}$. Suponha-se que $\lambda': A'\to B'$ é total e $\mathcal{A}_\varnothing\neq\{\varnothing\}$, logo $\exists x\in\mathcal{A}\mid\hat{\lambda}x=\varnothing\wedge x\neq\varnothing$ que implica $\exists X\in x|\lambda X\uparrow$, ou ainda, $\exists\alpha\in X|\lambda'\alpha\uparrow$, o que é uma contradição pois por hipótese $\lambda': A'\to B'$ é total.♦

Analisa-se agora a imagem da função de objetos $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ quando aplicada sobre os objetos totais do espaço coerente, e busca-se uma generalização de que a função $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ restrita aos totais é fechada. Observa-se que esta análise é importante para este trabalho, tendo em vista que um dos objetivos deste trabalho é a construção das funções elementares reais a partir das funções de objetos no Espaços Coerentes de Intervalos Racionais.

5.1.6 Teorema

Para todo $x\in tot(\mathcal{A})$, $\overline{\lambda}x\in tot(\mathcal{A})$.

Prova:

Se $x\in tot(IIQ)$ então pode ocorrer duas situações: $x\in X_{A'}$ ou $x\in X_{\overline{A'}}$. Mostra-se que ambas tem imagem nos $tot(\mathcal{A})$, quando é aplicada, sobre estes, a função $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$.

Suponha-se primeiramente que $x\in X_{A'}$, logo $x=x_\alpha,\alpha\in Q$. Então tem-se que:

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}x=\overline{\lambda}x_{\alpha'}&=\overline{\lambda}\{X\in\mathbf{A}\mid min\alpha\leq\alpha'\leq max\alpha\}\\
&=\hat{}\circ\hat{\lambda}\{X\in\mathbf{A}\mid min\alpha\leq\alpha'\leq max\alpha\}\\
&=\widehat{(\hat{\lambda}\{X\in\mathbf{A}\mid min\alpha\leq\alpha'\leq max\alpha\})}\\
&=\widehat{\{\lambda X\in\mathbf{A}\mid min\lambda'(\alpha)\leq\lambda'(\alpha')\leq max\lambda'(\alpha)\}}\\
&=\begin{cases}\hat{\lambda}x_{\lambda'\alpha'}, \text{ se } \lambda'(\alpha)\in A',\\ \hat{\lambda}x_{\overline{\lambda'\alpha'}}, \text{ se } \lambda'(\alpha)\notin A'.\end{cases}=\begin{cases}x_{\lambda'\alpha'}, \text{ se } \lambda'(\alpha)\in A'\\ x_{\overline{\lambda'\alpha'}}, \text{ se } \lambda'(\alpha)\notin A'\end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, para todo $x\in X_{A'}$, $\overline{\lambda}x\in tot(\mathcal{A})$.

Seja agora $x \in X_{\bar{Q}}$, logo tem-se da mesma forma que $x = x_{\overline{\alpha'}}, \overline{\alpha' \notin A'}$. Então:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}x &= \bar{\lambda}x_{\overline{\alpha'}} = \bar{\lambda}\{X \in \mathbf{A} \mid min\alpha < \alpha' < max\alpha\} \\
&= \circ\lambda\{X \in \mathbf{A} \mid min\alpha < \alpha' < max\alpha\} \\
&= \widehat{(\lambda\{X \in \mathbf{A} \mid min\alpha < \alpha' < max\alpha\})} \\
&= \widehat{\{\lambda X \in \mathbf{A} \mid min\lambda'(\alpha) < \lambda'(\alpha') < max\lambda'(\alpha)\}} \\
&= \begin{cases} \hat{\lambda}x_{\lambda'\alpha'}, \text{ se } \lambda'(\alpha) \in A', \\ \hat{\lambda}x_{\overline{\lambda'\alpha'}}, \text{ se } \lambda'(\alpha) \notin A' \end{cases} = \begin{cases} x_{\lambda'\alpha'}, \text{ se } \lambda'(\alpha) \in A' \\ x_{\overline{\lambda'\alpha'}}, \text{ se } \lambda'(\alpha) \notin A' \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, se $x \in X_{\overline{A'}}$ então também obtém-se que $\bar{\lambda}x \in tot(\mathcal{A})$, pelas proposições 3.2.8 e 3.2.12 e pelos lemas 3.2.9 e 3.2.13, ficando demonstrado o teorema. ♦

5.1.7 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$, e a função de objetos $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por:

$$\bar{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda}x = \bigcup\{d \in \mathcal{B} \mid i(\lambda x) = i(d) \wedge \lambda x \subseteq d\} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

$\mathcal{A}_\varnothing = \{x \in \mathcal{A} \mid \bar{\lambda}x = \varnothing\} = \{\varnothing\}$ se, e somente se, $\lambda': A' \to B'$ é total.

Prova:

Aplicando-se a definição da função objeto $\bar{\lambda}$, deve-se considerar duas situações:

(i) $x_1, x_2 \notin quasitot(\mathcal{A})$, e neste caso pela proposição 5.1.5 completa-se a prova.

(ii) $x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$. Assim $\bar{\lambda}(x) = \{\ \} \Leftrightarrow \hat{\lambda}(x) = \{\ \}$ e pela definição 2.3.8 tem-se $\lambda(x) = \{\ \}$. A proposição 5.1.5 completa a prova. ♦

Analisa-se a seguir como algumas das propriedades externas das funções básicas, como a injetividade, que se propagam no processo de construção e determinam propriedades internas das funções de objetos entre espaços coerentes, bem como das demais funções envolvidas, como a pré-função e a função de tokens.

5.2 Injetividade no Processo de Construção das Funções entre Conjuntos Coerentes

5.2.1 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$, e a pré-função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definida por $\lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\}$. Se $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é injetora então $\mathcal{A}_\varnothing = \{x \in \mathcal{A} \mid \lambda x = \varnothing\} = \{\varnothing\}$.

Prova:

Usando-se a contra recíproca, se $\mathcal{A}_{\varnothing} = \{x \in \mathcal{A} \mid \lambda x = \varnothing\} \neq \{\varnothing\}$ então tem-se que $\exists x \in \mathcal{A} \mid \lambda x = \{\varnothing\} = \lambda\varnothing$ o que prova que $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ não é injetora. Logo a proposição 5.2.1 é válida.♦

5.2.2 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$, e a função de objetos $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ definida por:

$$\overline{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda} x = \bigcup\{d \in \mathcal{B} \mid i(\lambda x) = i(d) \wedge \lambda x \subseteq d\} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

Se $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é injetora então $\mathcal{A}_{\varnothing} = \{x \in \mathcal{A} \mid \overline{\lambda} x = \varnothing\} = \{\varnothing\}$.

Prova:

Usando-se a contra recíproca, se $\mathcal{A}_{\varnothing} = \{x \in \mathcal{A} \mid \overline{\lambda} x = \varnothing\} \neq \{\varnothing\}$ então tem-se que $\exists x \in \mathcal{A}, x \neq \varnothing \mid \overline{\lambda} x = \{\varnothing\} = \lambda\varnothing$ o que prova que $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ não é injetora. Logo fica provada a proposição. ♦

5.2.3 Proposição

Sejam $\lambda': A' \rightarrow B'$ e a função $\lambda: A \rightarrow B$ definida por: $\lambda X = \{\lambda'\alpha \in B \mid \alpha \in X\}$. λ é injetora se, e somente se, λ' é injetora e total.

Prova:

Demostra-se a ida, usando a contra-recíproca. Se λ' não é injetora então $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in A'$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$, mas $\lambda'(\alpha_1) = \lambda'(\alpha_2)$. Logo $X = \{\alpha_1\} \neq \{\alpha_2\} = Y$ mas $\lambda X = \lambda Y$, e portanto $\lambda: A \rightarrow B$ não é injetora. Da mesma forma, se $\lambda': A' \rightarrow B'$ não é total, $\exists \alpha \in A' \mid (\lambda'\alpha)\uparrow$, e portanto $\lambda\{\alpha\} = \{\ \} = \lambda\{\ \}$, e assim $\lambda: A \rightarrow B$ também não é injetora.

Para provar a volta, deve-se mostrar que se λ' é injetora e total, $\forall X_1, X_2 \in A$ tem-se $\lambda(X_1) = \lambda(X_2)$ então $X_1 = X_2$. Prova-se por contradição, ou seja, suponha-se que λ' é injetora e total, e tal que $\exists X_1, X_2 \in A$, $X_1 \neq X_2$ e tais que $\lambda(X_1) = \lambda(X_2)$. Então, existem $\alpha_1 \in X_1 - X_2, \alpha_2 \in X_2 - X_1$, tais que duas situações pode ocorrer: ou $\lambda'(\alpha_1) = \lambda'(\alpha_2)$, o que é uma contradição, pois por hipótese λ' é injetora; ou então não possuem imagem em B, isto é, ou $\lambda'\alpha_1\uparrow$, ou $\lambda'\alpha_2\uparrow$, ou ambas são indefinidas, o que também é contraditório pois λ' é total. Portanto λ é também injetora. ♦

5.2.4 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. A pré-função $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, definida por $\lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\}$ é injetora se, e somente se, $\lambda': A' \rightarrow B'$ é uma função total, injetora.

Prova:

Mostra-se primeiramente, por contradição, se $\lambda': A' \rightarrow B'$ é uma função total, injetora então $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é injetora. Para tal, seja $\lambda': A' \rightarrow B'$ é uma função total, injetora. E suponha-se que $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, definida por $\bar{\lambda}x = \{\lambda X \in \mathbb{B} \mid X \in x\}$ não é injetora. Então existem $x_1, x_2 \in \mathbb{A}, x_1 \neq x_2$ tais que $\bar{\lambda}(x_1) = \bar{\lambda}(x_2)$. Neste caso podem ocorrer duas situações, e ambas levam a uma contradição. De fato, na primeira, tem-se que $\exists X_1 \in x_1, \exists X_2 \in x_2, X_1 \neq X_2$, tais que $\lambda X_1 = \lambda X_2$, ou seja, $\lambda: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ não é injetora. Portanto, pela proposição 5.2.3 , anterior, $\lambda': A' \rightarrow B'$ também não é injetora, o que contraria a hipótese. No segundo caso, $\exists X_1 \in x_1 | \lambda X_1 \uparrow$, o que implica em que $\exists \alpha \in X_1 | \lambda'(\alpha) \uparrow$, portanto $\lambda': A' \rightarrow B'$ não é total. Agora, para mostrar a volta, isto é, se $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é injetora então $\lambda': A' \rightarrow B'$ é uma função total e injetora, aplica-se a contra-recíproca. Se $\lambda': A' \rightarrow B'$ não é uma função total então pela proposição 5.1.7, tem-se que $\mathbb{A}_{\varnothing} = \{x \in \mathbb{A} | \bar{\lambda}x = \varnothing\} \neq \{\varnothing\}$, ou $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ não é injetora pois $\exists x \in \mathbb{A} | \bar{\lambda}x = \{\varnothing\} = \bar{\lambda}\varnothing$ e $x \neq \varnothing$. ♦

5.2.5 Proposição

A função fecho indexado, $\hat{}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, definida por $\hat{x} = \bigcup\{d \in \mathbb{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\}$, restrita aos objetos quasi-totais de $\mathbb{A}$, é injetora .

Prova:

Suponha-se que $x_1, x_2 \in quasitot(\mathbb{A})$, então $\hat{x}_1 = x_1, \hat{x}_2 = x_2$. Assim, se $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ então $x_1 = x_2$ consequentemente a função fecho é injetora. ♦

5.2.6 Proposição

Seja a pré-função $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ injetora. Então tem-se que $\{i(\bar{\lambda}(x))\} = \bar{\lambda}(\{i(x)\})$.

Prova:

Sabe-se que $\bar{\lambda}(\{i(x)\}) = \bar{\lambda}(\bigcap\{X \subseteq A' | X \in x\})$. Como a pré-função $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é injetora, pelas proposições 5.2.3 e 5.2.4 tem-se que a função de tokens $\lambda: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ é injetora, portanto $\bar{\lambda}(\{i(x)\}) = \bar{\lambda}(\{\bigcap\{X \subseteq A' | X \in x\}\}) = \{\bigcap\{\lambda X \subseteq B' | X \in x\}\} = \{i(\bar{\lambda}(x))\}$. ♦

5.2.7 Proposição

Seja a pré-função $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ injetora. Se $i(x_1) \neq i(x_2)$ então $i(\bar{\lambda}(x_1)) \neq i(\bar{\lambda}(x_2))$.

Prova:

Suponha-se que $i(x_1) \neq i(x_2)$, pela injetividade de $\bar{\lambda}$ tem-se que $\bar{\lambda}(\{i(x_1)\}) \neq \bar{\lambda}(\{i(x_2)\})$ e pela proposição 5.2.6 $i(\bar{\lambda}(x_1)) \neq i(\bar{\lambda}(x_2))$. ♦

5.2.8 Proposição

A função composta $\hat{\bar{\lambda}}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ restrita aos objetos quasi-totais de $\mathbb{A}$ é injetora se, somente se, a pré-função $\bar{\lambda}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é também injetora.

Prova :

Sejam $x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$ então se $x_1 \neq x_2$ tem-se que $i(x_1) \neq i(x_2)$. Da injetividade da pré-função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tem-se $\lambda(\{i(x_1)\}) \neq \lambda(\{i(x_2)\})$, e pela proposição 5.2.7, $i(\lambda(x_1)) \neq i(\lambda(x_2))$. Logo, por definição $\hat{\lambda}(x_1) \neq \hat{\lambda}(x_2)$ ou $(\hat{\lambda})(x_1) = (\hat{\lambda})(x_2)$. Portanto $\hat{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ restrita aos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$ é injetora. Prova-se a volta por contradição, supondo-se que $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ não é injetora. Então existem $x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$, $x_1 \neq x_2$ tais que $\lambda x_1 = \lambda x_2$, portanto $\hat{\lambda x_1} = \hat{\lambda x_2}$ e $\hat{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ restrita aos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$ não é injetora. Provou-se então a validade da proposição.♦

5.2.9 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. A função $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definida por

$$\bar{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\} & \text{se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda x} = \bigcup\{d \in \mathcal{B} \mid i(\lambda x) = i(d) \wedge \lambda x \subseteq d\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

é injetora se, e somente se, $\lambda': A' \to B'$ é uma função total, ou a pré-função função λ é injetora.

Prova:

Aplicando-se a definição da função objeto $\bar{\lambda}$, tem-se que considerar duas situações:

(i) $x_1, x_2 \notin quasitot(\mathcal{A})$. Neste caso tem-se que a função objeto $\bar{\lambda}$ coincide com a pré-função λ, e pela proposição 5.2.4, $\bar{\lambda}$ é injetora se, e somente se, a pré-função λ é injetora, ou seja, se, e somente se $\lambda': A' \to B'$ é uma função total, injetora.

(ii)ou $x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$. Agora $\bar{\lambda}$ coincide com a função $\hat{\lambda}$, logo tem-se que $\bar{\lambda}(x) = \hat{\lambda}(x)$. Assim pela proposições 5.2.8 $\bar{\lambda}$ é injetora se, e somente se, a pré-função função λ é injetora, ou ainda, pela proposição 5.2.4 se, e somente se, $\lambda': A' \to B'$ é uma função total, injetora . Ou seja, quando a função composta, construída a partir da função fecho e da pré-função de objetos, é injetora.♦

5.2.10 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$, e a pré-função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definida por $\lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid X \in x\}$. $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é injetora se, e somente se, $\mathcal{A}_\emptyset = \{x \in \mathcal{A} \mid \lambda x = \emptyset\} = \{\emptyset\}$ e $\lambda': A' \to B'$ é injetora .

Prova:

Aplicam-se as proposições 5.1.7 e 5.2.9. ♦

5.3 A Linearidade das Funções entre Conjuntos Coerentes

As proposições apresentadas a seguir, que completam este capítulo, tem por objetivo analisar a linearidade da função objeto $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, tendo em vista serem estas os morfismos da categoria em estudo. Segundo Girard, [GIR 96], uma função objeto é linear se é estável e verifica a condição de linearidade, portanto, também o conceito de estabilidade é importante para este trabalho. Sendo assim, analisam-se nesta seção as condições necessárias e, se possíveis suficientes, para garantir que as funções envolvidas preservem supremos de conjuntos dirigidos (sejam contínuas no sentido de Scott), as conjunções limitadas superiormente ("pullbacks") como também comutem com uniões arbitrárias.

5.3.1 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$. Então $\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é monótona.

Prova:

Segundo [TRO 92], a função $\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é monótona se $x'\subseteq x\in\mathcal{A}$ implica em $\lambda x'\subseteq\lambda x\in\mathcal{B}$. Supor então $x'\subseteq x$. Tem-se que $\lambda(x)=\{\lambda X/X\in x'\}\subseteq\{\lambda X/X\in x\}=\lambda(x)$ e, portanto, λ é monótona.♦

5.3.2 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$. Então $\hat{}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, restrita aos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$, verifica a condição de monotonicidade.

Prova:

Segundo [TRO 92], a função $\hat{}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ verifica a condição de monotonicidade se $x'\subseteq x\in\mathcal{A}$ implica em $\hat{x}'\subseteq\hat{x}\in\mathcal{B}$. Supor então $x'\subseteq x$ e $x',x\in quasitot(\mathcal{A})$. Tem-se que $\hat{x}'=x'\subseteq x=\hat{x}$ e, portanto, $\hat{}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é monótona.♦

5.3.3 Proposição. Monotonicidade da função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$. Então $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é monótona.

Prova:

Decorre imediatamente das proposições 5.3.1 e 5.3.2.♦

5.3.4 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$. Então $\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é contínua.

Prova:

Seja então $\mathcal{X} = \{x_i \mid x_i \in \mathcal{A}\}_{i \in I}$ um subconjunto dirigidos de $\mathcal{A}$ com relação a inclusão. A função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínua, segundo [TRO 92], se sempre que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ é um subconjunto dirigido com relação à inclusão, então tem-se que $\lambda[\mathcal{X}] \subseteq \mathcal{B}$ também é dirigido e

$$\lambda\left(\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} x_i\right) = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} \lambda(x_i)$$

ou seja, $\lambda\left(\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X}\right) = \bigcup^{\uparrow} \{\lambda(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$. Suponha-se então que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ é um subconjunto dirigido com relação à inclusão. Logo para $\forall x_j, x_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, $\exists x_i \in \mathcal{X}$ tal que $x_j \subseteq x_i$ e $x_k \subseteq x_i$. Pela proposição 5.3.1, anterior, tem-se que λ é monótona logo $\lambda(x_j) \subseteq \lambda(x_i)$ e $\lambda(x_k) \subseteq \lambda(x_i)$ e portanto $\lambda[\mathcal{X}]$ é dirigido. Além disso, como $\mathcal{A}$ é fechado para uniões dirigidas, então $\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X} \in \mathcal{A}$, veja , logo tem-se

$$\lambda(\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X}) = \lambda(\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} \{x_i \mid x_i \in \mathcal{A}\}) = \left\{\lambda P \in B \mid P \in \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} x_i \in \mathcal{A}\right\} = \bigcup_i^{\uparrow} \left\{\lambda x_i \mid x_i \in \mathcal{A}\right\} = \bigcup^{\uparrow} \lambda \mathcal{X}$$

e, portanto, λ é contínua.♦

5.3.5 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = \left(Coh(A, \approx_A), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh(B, \approx_B), \subseteq\right)$. Então $\hat{}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, restrita aos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$, verifica a condição de continuidade.

Prova:

Seja então $\mathcal{X} = \{x_i \mid x_i \in \mathit{quasitot}(\mathcal{A})\}_{i \in I}$ um subconjunto dirigidos de $\mathcal{A}$ com relação a inclusão. Segundo [DIM 96b], a função $\hat{}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ verifica a condição de monotonicidade se, sempre que $\mathcal{X} \subseteq \mathit{quasitot}(\mathcal{A})$ é um subconjunto dirigido com relação à inclusão, então tem-se que $[\hat{\mathcal{X}}] \subseteq \mathcal{B}$ também é dirigido e $\left(\widehat{\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} x_i}\right) = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} \left(\hat{x}_i\right)$ ou seja, $\left(\widehat{\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X}}\right) = \bigcup^{\uparrow} \left\{\left(\hat{x}\right) \mid x \in \mathcal{X}\right\}$. Suponha-se então que $\mathcal{X} \subseteq \mathit{quasitot}(\mathcal{A})$ é um subconjunto dirigido com relação à inclusão. Logo para $\forall x_j, x_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathit{quasitot}(\mathcal{A})$, $\exists x_i \in \mathcal{X}$ tal que $x_j \subseteq x_i$ e $x_k \subseteq x_i$. Pela proposição 5.3.2, anterior, tem-se que $\hat{}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ restrita aos objetos quasi-totais é monótona logo $\hat{x}_j \subseteq \hat{x}_i$ e $\hat{x}_k \subseteq \hat{x}_i$ e portanto $[\hat{\mathcal{X}}]$ é dirigido. Além disso, como $\mathcal{A}$ é fechado para uniões dirigidas, então $\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X} \in \mathcal{A}$, veja , logo tem-se $(\widehat{\bigcup^{\uparrow} \mathcal{X}}) = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} \{\hat{x}_i \mid x_i \in \mathcal{A}\} = \bigcup^{\uparrow} \hat{\mathcal{X}}$ e, portanto, $\hat{}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínua.♦

5.3.6 Proposição. Continuidade da função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = \left(Coh(A, \approx_A), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh(B, \approx_B), \subseteq\right)$. Então $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínua.

Prova:

Considerando-se que a composição de funções contínuas é também contínua, [DIM 96b], pelas proposições 5.3.3, 5.3.4 e 5.3.5 prova-se que a função objeto $\bar{\boldsymbol{\lambda}}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é também contínua.♦

5.3.7 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$, $\lambda': A'\to B'$ e $\boldsymbol{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$. $\boldsymbol{\lambda}$ verifica a condição de estabilidade $x\cup x'\in\mathcal{A} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')=\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$ se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Mostra-se a ida, usando-se a contra recíproca, ou seja, se λ' não é injetora então $\boldsymbol{\lambda}$ não verifica a condição de estabilidade. De fato, se a função λ' não é injetora, então pela proposição 5.2.3 λ também é injetora, logo existem $X,X'\subseteq A$ tais que $X\neq X'$, $X\in x$ e $X\notin x'$, $X'\in x'$ e $X'\notin x$ mas $\lambda X=\lambda X'$. Assim $\lambda X\in\boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')$ no entanto, $X\notin x\cap x'$ e portanto $\lambda X\notin\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$.

Para provar a volta, deve-se mostrar que se λ' é injetora e $x\cup x'\in\mathcal{A}$ então $\boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')=\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$. Seja $x\cap x'\neq\emptyset$, então para todo $X\in x\cap x'$ tem-se $\lambda X\in\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$. Mas se $X\in x$, supondo-se $\boldsymbol{\lambda}$ bem definida, então $\lambda X\in\boldsymbol{\lambda}x$ e da mesma forma, se $X\in x'$ então $\lambda X\in\boldsymbol{\lambda}x'$, o que mostra que $\lambda X\in\boldsymbol{\lambda}x\cap\boldsymbol{\lambda}x'$. Portanto $\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')\subseteq\boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')$. Agora, seja $Y\in\boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')$, e vamos supor que $Y\notin\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$. Então existe $X\in x$ tais que tal que $X\notin x'$ e $\lambda X=Y$, e existe $X'\in x'$ tais que tal que $X'\notin x$ e $\lambda X'=Y$. Conclui-se que $X\neq X'$ o que é uma contradição pois λ' é injetora por hipótese então pela proposição 5.2.3, λ também é injetora. Logo $Y\in\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$ e portanto $\boldsymbol{\lambda}(x)\cap\boldsymbol{\lambda}(x')\subseteq\boldsymbol{\lambda}(x\cap x')$.♦

5.3.8 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathcal{B}=(Coh(B,\approx_B),\subseteq)$. A função fecho indexado, $\hat{}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, restrita aos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$ verifica a condição de estabilidade, $x\cup x'\in quasitot(\mathcal{A}) \Rightarrow \hat{x}\cap\hat{x}'=\widehat{(x\cap x')}$.

Prova:

Sejam $x,x'\in quasitot(\mathcal{A})$ e tais que $x\cup x'\in\mathcal{A}\Leftrightarrow i(x)\cap i(x')\neq\emptyset$. Logo tem-se que $x\cap x'=y\in quasitot(\mathcal{A})$ e tal que $i(y)=i(x)\cup i(x')$. Assim $\widehat{x\cap x'}=\hat{y}=y=x\cap x'=\hat{x}\cap\hat{x}'$ e portanto a função fecho restrita aos totais verifica a condição de estabilidade, ou seja, $\hat{x}\cap\hat{x}'=\widehat{(x\cap x')}$.♦

5.3.9 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. A função de objetos $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ verifica a condição de estabilidade $x \cup x' \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda(x) \cap \lambda(x') = \lambda(x \cap x')$ se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Decorre imediatamente das proposições 5.3.7, 5.3.8, 5.3.8 e 5.3.9 .♦

5.3.10 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ e $\lambda': A' \to B'$ uma função básica e $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma pré-função de objetos. λ é estável se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Pelas proposições 5.3.10 , 5.3.4 e 5.3.7, λ é contínua, verifica a condição de estabilidade, logo satisfaz o pullback da figura abaixo, portanto é estável .♦

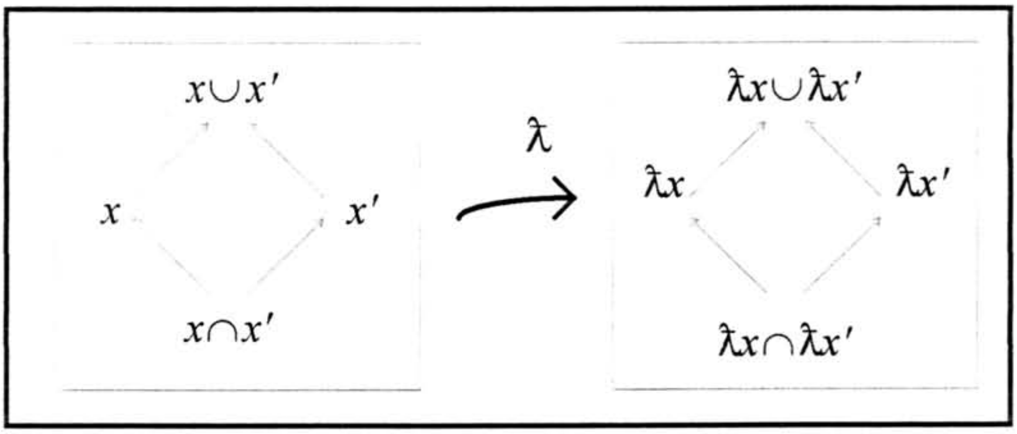

FIGURA 5.1 - Pullback para funções entre espaços coerentes.

5.3.11 Proposição. Estabilidade da função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$.A função objeto $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é estável se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Pelas proposições 5.3.3, 5.3.6 e 5.3.9 λ é contínua, verifica a condição de estabilidade, logo satisfaz o "pullback" da figura 5.3, acima apresentada, sendo portanto estável .♦

5.3.12 Proposição

Sejam $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ espaços coerentes. A pré-função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ satisfaz a condição de linearidade, isto é, se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ e $\forall x, x' \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cup x' \in \mathcal{A}$ então, tem-se que

$\lambdabar(\cup\mathcal{X}) = \cup\{\lambdabar(x) | x \in \mathcal{X}\}$.

Prova:

Suponha-se que e $\forall x, x' \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cup x' \in \mathcal{A}$. Além disso, $\bigcup\mathcal{X} \in \mathcal{A}$. Assim tem-se que

$$\lambdabar(\bigcup\mathcal{X}) = \{\lambda X \in \mathrm{B} | X \in \bigcup\mathcal{X}\} = \left\{\lambda X \in \mathrm{B} | X \in \bigcup_{i \in I} x_i\right\} = \bigcup_{i \in I}\{\lambda X \in \mathrm{B} | X \in x_i\} = \bigcup_{i \in I}\{\lambdabar(x_i) | x_i \in \mathcal{X}\} = \bigcup(\lambda\mathcal{X})$$

conforme se desejava demonstrar.♦

5.3.13 Proposição

Sejam $\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_A\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh\left(B, \approx_B\right), \subseteq\right)$ espaços coerentes. A função fecho $\hat{}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, satisfaz a condição de linearidade, isto é, se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ e $\forall x, x' \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cup x' \in \mathcal{A}$ então, tem-se que

$$\left(\bigcup\mathcal{X}\right) = \bigcup\{(\hat{x}) | x \in \mathcal{X}\}.$$

Prova:

Suponha-se que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ e que $\forall x, x' \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cup x' \in \mathcal{A}$. Neste caso deve-se considerar três possibilidades: (i) ou $x = \{\ \}$, (ii) ou $x' = \{\ \}$ e (iii) ou $i(x) \cap i(x') \neq \emptyset$. Em todos os casos tem-se que $\bigcup\mathcal{X} \in \mathcal{A}$. De fato, nos dois primeiros casos é imediato, e no terceiro caso tem-se que $x \cup x' = y \in \mathcal{A}$ e tal que $i(y) = i(x) \cap i(x')$. Assim tem-se que

$$\left(\widehat{\bigcup\mathcal{X}}\right) = \bigcup\left\{d \in \mathcal{A} | \bigcup\mathcal{X} \subseteq d \wedge i(\bigcup\mathcal{X}) = i(d)\right\} = \bigcup\left\{d \in \mathcal{A} | \bigcup\left\{x | x \in \mathcal{X}\right\} \subseteq d \wedge \bigcap i(x) = i(d)\right\}$$

$$= \bigcup\left(\bigcup\left\{d \in \mathcal{A} | x \subseteq d \wedge i(x) = i(d)\right\}\right) = \bigcup\left\{\hat{x} | x \in \mathcal{X}\right\} = \bigcup\left\{\hat{\lambda}(x) | x \in \mathcal{X}\right\}$$

conforme se desejava demonstrar.♦

5.3.14 Proposição

Sejam $\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_A\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh\left(B, \approx_B\right), \subseteq\right)$ espaços coerentes. A função de objetos $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ satisfaz a condição de linearidade, isto é, se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ e $\forall x, x' \in \mathcal{A} \Rightarrow x \cup x' \in \mathcal{A}$ então, tem-se que

$\bar{\lambda}(\bigcup\mathcal{X}) = \bigcup\{\bar{\lambda}(x) | x \in \mathcal{X}\}$.

Prova:

Decorre imediatamente das proposições 5.3.12 e 5.3.13.♦

5.3.15 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_A\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B} = \left(Coh\left(B, \approx_B\right), \subseteq\right)$. A pré-função $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é linear se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Segundo [TRO 92], a função $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é linear, pois é estável pela proposição 5.3.10 e verifica a condição de linearidade pela proposição 5.3.12. ♦

5.3.16 Proposição. Linearidade da função de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. A função de objetos $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é linear se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Segundo a função objeto $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é linear, pois é estável por 5.3.11e verifica a condição de linearidade pela proposição5.3.14. ♦

Mostrou-se até aqui que na construção proposta, as funções entre conjuntos básicos podem originar funções entre espaços coerentes. Entretanto somente as funções injetoras entre conjuntos básicos geram funções lineares entre espaços coerentes. Isto quer dizer que nem todas as funções básicas podem gerar morfismos na categoria dos espaços coerentes, pois nesta os objetos são os conjuntos coerentes mas os morfismos são as funções lineares entre conjuntos coerentes. No próximo capítulo apresenta-se uma solução para esta restrição.A seguir define-se par projeção para os espaços coerentes $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

5.4 Par Projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

5.4.1 Definição. Par projeção para pré-função

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. Um par projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é um par de pré-funções $(\lambda, \hbar)$, onde $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\hbar: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são pré-funções de objetos, tais que, $\hbar \circ \lambda = id_{\mathcal{A}}$ e $\lambda \circ \hbar(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}$.

5.4.2 Definição. Par projeção para funções de objetos

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. Um par projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é um par de funções lineares $(\overline{\lambda}, \overline{\hbar})$, onde $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\overline{\hbar}: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são funções de objetos, tais que, $\overline{\hbar} \circ \overline{\lambda} = id_{\mathcal{A}}$ e $\overline{\lambda} \circ \overline{\hbar}(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}$.

5.4.3 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. Se $(\lambda, \hbar)$ é um par projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, onde $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\hbar: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são pré-funções lineares, então suas correspondentes funções básicas são injetoras.

Prova:

Como $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\hbar: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são pré-funções de objetos, lineares, são também estáveis. Então pela proposição 5.3.7 as correspondentes funções de tokens λ:A→B e h:B→A devem ser injetoras. E pela proposição 5.1.7, λ', h' são injetoras. ♦

5.4.4 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq), \mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$. Se a função básica $\lambda': A' \to B'$ é inversível então existe um par projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Prova:

Seja $\lambda': A' \to B'$ inversível e $h': B' \to A'$ sua correspondente inversa. Supondo-se por hipótese que λ', h' são injetoras, $\lambda, \hbar$ são lineares pela proposição 5.3.15. Definindo-se $\hbar$ por:

$$\bar{\hbar}(x) = \begin{cases} \hbar(x) = \{h(X) \in \mathrm{B} \mid X \in x\}, & \text{se } x \in quasitot(\mathcal{A}), \\ \hbar(x), & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

e onde h:A→B tal que $h(X) = \{(h')^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in X\}$ e $\hbar$ a correspondente pré-função. Tem-se assim que, $\hbar \circ \lambda = id_{\mathcal{A}}$ e $\lambda \circ \hbar(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}$. Portanto $(\lambda, \hbar)$ é um par projeção para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. ♦

Baseados na relação de ordem pontual, pode-se verificar a variação do crescimento das funções de objetos, conforme é apresentada na próxima seção.

5.5 Funções Crescentes e Decrescentes em Espaços Coerentes

Sejam A', B' conjuntos e $\lambda': A' \to B'$ uma função básica. Sejam $\mathrm{A} \subseteq \wp(\mathrm{A}'), \mathrm{B} \subseteq \wp(\mathrm{B}')$. Sejam também as teias $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$ e $\mathrm{B} \equiv (B, \approx_B)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$.

5.5.1 Definição

A função de tokens $\lambda: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ definida por: $\lambda X = \{\lambda'\alpha \in \mathrm{B} \mid \alpha \in X\}$, é crescente (ou decrescente) se, e somente se, tem-se:

$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{A},\ X_1 \leq_{\mathrm{A}} X_2 \Rightarrow \lambda X_1 \leq_{\mathrm{B}} \lambda X_2$ (ou $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{A},\ X_1 \leq_{\mathrm{A}} X_2 \Rightarrow \lambda X_1 \geq_{\mathrm{B}} \lambda X_2$).

5.5.2 Definição

A pré-função objeto $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definida por: $\lambda x = \{\lambda X \in \mathcal{B} \mid \mathrm{X} \in x\}$ é crescente (ou decrescente) se, e somente se, tem-se

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A},\ x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2 \Rightarrow \lambda x_1 \leq_{\mathcal{B}} \lambda x_2$ (ou $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A},\ x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2 \Rightarrow \lambda x_1 \geq_{\mathcal{B}} \lambda x_2$).

5.5.3 Definição

A função objeto $\bar{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definida por:

$$\overline{\lambda}(x)=\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}x=\{\lambda X\in\mathcal{B}\mid X\in x\}\text{ se } x\notin quasitot(\mathcal{A});\\(\hat{\lambda}\circ\boldsymbol{\lambda})(x)=\widehat{\boldsymbol{\lambda}x}=\bigcup\{d\in\mathcal{B}\mid i(\boldsymbol{\lambda}x)=i(d)\wedge\boldsymbol{\lambda}x\subseteq d\}\text{ caso contrario.}\end{cases}$$

é crescente (ou decrescente) se, e somente se,

$$\forall x_1,x_2\in\mathcal{A},\ x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2\Rightarrow\overline{\lambda}x_1\leq_{\mathcal{B}}\overline{\lambda}x_2\ \ (\text{ou }\forall x_1,x_2\in\mathcal{A},\ x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2\Rightarrow\overline{\lambda}x_1\geq_{\mathcal{B}}\overline{\lambda}x_2\ ).$$

5.5.4 Proposição

A função básica $\lambda'\colon A'\to B'$ é crescente(ou decrescente) se, e somente se, λ:A→B é também crescente (ou decrescente).

Prova:

Suponha-se inicialmente que $\lambda'\colon A'\to B'$ é crescente e que $\forall X_1,X_2\in\mathcal{A}$, $X_1\leq_{\mathrm{A}} X_2$. Então por definição tem-se que $\forall\alpha_1\in X_1,\forall\alpha_2\in X_2,\alpha_1\leq\alpha_2$, e como λ' é crescente, $\forall\alpha_1\in X_1,\forall\alpha_2\in X_2,\lambda'\alpha_1\leq\lambda'\alpha_2$. Logo conclui-se que $\lambda X_1=\{\lambda'\alpha_1\in\mathbf{B}\mid\alpha_1\in X_1\}\leq_{\mathrm{A}}$ $\{\lambda'\alpha_2\in\mathbf{B}\mid\alpha_2\in X_2\}=\lambda X_2$. Portanto $\lambda X_1\leq_{\mathrm{B}}\lambda X_2$ e tem-se que $\lambda\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ é crescente.

Agora tomando-se como hipótese que $\lambda\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ é crescente. Então $\forall X_1,X_2\in\mathcal{A}$, $X_1\leq_{\mathrm{A}}X_2$ então $\lambda X_1\leq_{\mathrm{B}}\lambda X_2$. Pela definição de relação de ordem, se :

$$X_1\leq_{\mathrm{A}}X_2\text{ então}\begin{cases}X_1=X_2\text{ ou}\\\forall\alpha_1\in X_1,\forall\alpha_2\in X_2,\alpha_1\leq\alpha_2\end{cases}$$

e o mesmo para :

$$\lambda X_1\leq_{\mathrm{A}}\lambda X_2\text{ então}\begin{cases}\lambda X_1=\lambda X_2\text{ ou}\\\forall\lambda'\alpha_1\in\lambda X_1,\forall\lambda'\alpha_2\in\lambda X_2,\lambda'\alpha_1\leq\lambda'\alpha_2\end{cases}$$

portanto se, $\forall X_1,X_2\in\mathbf{A}$, tem-se $\forall\alpha_1\in X_1,\forall\alpha_2\in X_2,\alpha_1\leq\alpha_2\Rightarrow\lambda'\alpha_1\leq\lambda'\alpha_2$, então $\lambda'\colon A'\to B'$ é crescente. ♦

Da mesma forma se mostra para funções decrescentes.

5.5.5 Proposição

A função de tokens λ:A→B é crescente(ou decrescente) se, e somente se, a pré-função objeto $\boldsymbol{\lambda}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é também crescente (ou decrescente).

Prova:

Suponha-se primeiramente que λ:A→B é crescente e $\forall x_1,x_2\in\mathcal{A}$, $x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2$. Por definição ou $x_1=x_2$ ou $x_1<_{\mathcal{A}}x_2\Leftrightarrow\exists X_1\in x_1,\exists X_2\in x_2,X_1\leq_{\mathrm{A}}X_2$. No primeiro caso conclui-se que $\boldsymbol{\lambda}x_1=\boldsymbol{\lambda}x_2$. E no segundo caso, como λ é crescente, tem-se então que $\exists\lambda X_1\in\boldsymbol{\lambda}x_1,\exists\lambda X_2\in\boldsymbol{\lambda}x_2,\lambda X_1\leq_{\mathrm{A}}\lambda X_2\quad\Leftrightarrow\boldsymbol{\lambda}x_1<_{\mathcal{A}}\boldsymbol{\lambda}x_2$. Portanto $\forall x_1,x_2\in\mathcal{A}$, $x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2$ $\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}x_1\leq_{\mathcal{A}}\boldsymbol{\lambda}x_2$ o que prova que $\boldsymbol{\lambda}$ é crescente.

Tomando-se como hipótese que $\boldsymbol{\lambda}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é crescente. Então $\forall x_1,x_2\in\mathcal{A}$, $x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2$ então $\boldsymbol{\lambda}X_1\leq_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\lambda}X_2$. Pela definição de relação de ordem, se :

$$x_1\leq_{\mathcal{A}}x_2\text{ então}\begin{cases}x_1=x_2\text{ ou}\\\forall X_1\in x_1,\forall X_2\in x_2,X_1\leq X_2\end{cases}$$

e o mesmo para :

$$\bar{\lambda} x_1 \leq_{\mathcal{A}} \bar{\lambda} x_2 \text{ então } \begin{cases} \bar{\lambda} x_1 = \bar{\lambda} x_2 \text{ ou} \\ \forall \lambda X_1 \in \lambda x_1, \forall \lambda X_2 \in \lambda x_2, \lambda X_1 \leq \lambda X_2 \end{cases}$$

portanto se, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, tem-se $\forall X_1 \in x_1, \forall X_2 \in x_2, X_1 \leq X_2 \Rightarrow \lambda X_1 \leq \lambda X_2$, então λ:A→B é crescente.♦

Da mesma forma se mostra para funções decrescentes.

A partir das duas últimas proposições e da transitividade da relação de ordem pode-se considerar a próxima proposição.

5.5.6 Proposição

A pré-função de tokens λ:A→B é crescente(ou decrescente) se, e somente se, a função λ': $A' \rightarrow B'$ é também crescente (ou decrescente).

Prova:

É imediata, a partir das proposições 5.5.4 e 5.5.5. ♦

5.5.7 Proposição

Sejam $i(x_1), i(x_2) \in \wp(A')$. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, $x_1 <_{\mathcal{A}} x_2$ se, e somente se, $i(x_1) \lhd i(x_2)$.

Prova:

Suponha-se primeiramente que $i(x_1), i(x_2) \neq \varnothing$ e tais que $x_1 <_{\mathcal{A}} x_2$. Então pela definição 3.3.4 tem-se $\exists X_1 \in x_1, \exists X_2 \in x_2, X_1 <_{\mathrm{A}} X_2$. Se $i(x_1) \subseteq X_1$, $i(x_2) \subseteq X_2$ então $\forall r \in i(x_1), \forall r' \in i(x_2)$. Portanto $\forall \alpha \in X, \forall \beta \in Y$, e $r \leq \alpha_{max} < \beta_{minx} \leq r'$ logo $i(x_1) \lhd i(x_2)$. Por outro lado, suponha que $i(x_1), i(x_2) \neq \varnothing$, $i(x_1) \lhd i(x_2)$ mas que $x_2 <_{\mathcal{A}} x_1$. Então existe $\exists X_1 \in x_1, \exists X_2 \in x_2, X_2 <_{\mathrm{A}} X_1$. Como $i(x_1) \subseteq X_1$ e $i(x_2) \subseteq X_2$ tem-se que $r' \leq \alpha_{max} < \beta_{minx} \leq r$ o que é uma contradição pois $r < r'$. Assim se $i(x_1) \lhd i(x_2)$ então $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, $x_1 <_{\mathcal{A}} x_2$.

A igualdade neste caso só se verifica na ida, pois se $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, $x_1 =_{\mathcal{A}} x_2$ então $i(x_1) = i(x_2)$. Entretanto a volta só é válida $\forall x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$. ♦

5.5.8 Proposição

A função fecho é crescente, ou seja, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, se $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2$ então $\hat{x}_1 \leq_{\mathcal{A}} \hat{x}_2$.

Prova:

A igualdade é imediata. Suponha-se então que $i(x_1), i(x_2) \neq \varnothing$ e $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, se $x_1 <_{\mathcal{A}} x_2$. Então pela proposição 5.5.7 anterior tem-se que $i(x_1) \lhd i(x_2)$, logo como $i(x_1) \subseteq \hat{x}_1$ e $i(x_2) \subseteq \hat{x}_2$ por definição tem-se que $\hat{x}_1 <_{\mathcal{A}} \hat{x}_2$. ♦

5.5.9 Corolário

$\forall x_1, x_2 \in quasitot(\mathcal{A})$, se $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2$ então $x_1 \leq_{\mathcal{A}} x_2$.

Prova:

É imediata e decorre da proposições 5.5.8. Isto quer dizer que a função fecho restrita aos quasi-totais é sempre crescente. ♦

Pode-se agora também analisar a variação da função de objetos, baseando-se na análise da variação da função fecho e da pré-função.

5.5.10 Proposição

A função objeto $\bar{\lambda}:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ é crescente (ou decrescente) se, e somente se, $\boldsymbol{\lambda}:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ é crescente (ou decrescente) se, e somente se, λ:A→B é crescente (ou decrescente) se, e somente se, $\lambda':A'\rightarrow B'$ é crescente (ou decrescente).

Prova:

A prova decorre das proposições anteriores.5.5.4, 5.5.5, 5.5.6 e corolário 5.5.8.♦

Finalizando esta seção, deve-se salientar que a construção proposta esta ordenada a partir de duas relações de ordem diferenciadas e independentes. A primeira relativa aos objetos do espaço coerente, chamada de ordem de informação. Nesta os conjuntos coerentes estão ordenados pela inclusão, e cada um deles é interpretado como uma aproximação, total ou parcial, gerada por sucessivas computações.

A segunda, refere-se a relação de ordem externa a cada uma das etapas do processo de construção e permite que se compare os seus elementos. Esta relação de ordem entre os objetos da categoria possibilitou a análise da variação das funções de objetos quanto ao seu crescimento ou decrescimento, assim como a definição de funções de objeto crescentes e decrescentes.

6 Funções Lineares entre Espaços Coerentes

Analisa-se a seguir a propriedade de linearidade da função de objeto entre Espaços Coerentes cuja correspondente função básica não é injetora em todo seu domínio de definição A', mas pode ser dividida em regiões distintas, subdomínios A_i', nas quais a correspondente restrição passa a ser injetora.

Busca-se com isso a definição de uma nova propriedade, denominada linearidade local, e consequentemente a definição de uma função de objetos localmente linear. Assim, uma função de objetos localmente linear poderá estar associada a uma outra função de objetos, linear, se puder ser dividida em partes básicas injetoras.

Isto quer dizer que, da injetividade da função básica restrita aos subdomínios $A_i' \subseteq A'$, decorre a linearidade de cada uma das funções objetos geradas na teia produto das subteias definidas sobre estes subdomínios.

6.1 Funções Localmente Lineares

Sejam os conjuntos básicos A', B', $\mathrm{A} \subseteq \wp(A'), \mathrm{B} \subseteq \wp(B')$. Sejam também as teias $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$ e $\mathrm{B} \equiv (B, \approx_B)$, os correspondentes espaços coerentes $\mathbb{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathbb{B} = (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ e as funções:

1. $\lambda' : A' \to B'$ a função básica;
2. $\lambda : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, função de tokens, definida por $\lambda X = \{\lambda'\alpha \in \mathrm{B} \mid \alpha \in X\}$;
3. $\bar{\lambda} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, pré-função de objetos, definida por $\bar{\lambda} x = \{\lambda X \in \mathbb{B} \mid \mathrm{X} \in x\}$; e
4. $\overline{\bar{\lambda}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, função de objetos, definida por:

$$\overline{\bar{\lambda}}(x) = \begin{cases} \widehat{\bar{\lambda} x} = \bigcup \{ d \in \mathbb{B} \mid i(\bar{\lambda} x) = i(d) \wedge \bar{\lambda} x \subseteq d \} & \text{se } x \in quasitot(\mathbb{A}); \\ \bar{\lambda} x = \{ \lambda X \in \mathbb{B} \mid \mathrm{X} \in x \} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

onde $\widehat{\bar{\lambda} x}$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\bar{\lambda}$.

Considere-se ainda os conjuntos:

(i) $A_i' = \{\alpha \in A' | \alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1}\} \subseteq A'$ como subdomínios de λ' tais que λ'_{A_i} é injetora, $\bigcup_i A_i' = A'$ e $A_i' \cap A_{i-1}' = \{\alpha_i\}$; e

(ii) $B_i' \subseteq B'$ as respectivas imagens de cada A_i', ou seja, $B_i' = \lambda'[A_i']$ onde $i \in Z$.

Deve-se observar que os conjuntos $A_i' = \{\alpha \in A' | \alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1}\} \subseteq A'$ são subconjuntos enumeráveis e limitados superior e inferiormente, isto é, com elemento máximo e mínimo. Entretanto nem sempre este elemento máximo ou mínimo pertence ao conjunto básico. Quando estes extremos pertencem ao conjunto básico A', tem-se que $A_i' = \{\alpha \in A' | \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1}\} \subseteq A'$ e $A_i' \cap A_{i-1}' = \{\alpha_i\} \subseteq A'$. Caso contrário $A_i' = \{\alpha \in A' | \overline{\alpha}_i < \alpha < \overline{\alpha}_{i+1}\}$ $\subseteq A'$ mas $A_i' \cap A_{i-1}' = \{\alpha_i\} \not\subset A'$. Estes casos serão analisados no item 6.3 deste capítulo.

6.1.1 Definição. Pré-função localmente linear

Se $\lambda': A' \to B'$ não é injetora em todo seu domínio de definição, mas suas restrições $\lambda_i': A_i' \to B_i'$ são injetoras, então a correspondente pré-função de objetos $\tilde{\lambda}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é chamada *localmente linear*.

6.1.2 Definição. Função de objetos localmente linear

Se $\lambda': A' \to B'$ não é injetora em todo seu domínio de definição, mas suas restrições $\lambda_i': A_i' \to B_i'$ são injetoras, então a correspondente função de objetos $\overline{\lambda}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é chamada *localmente linear*.

A partir dos subconjuntos A_i' e de suas respectivas imagens $B_i' = \lambda'[A_i']$, constroe-se as subteias :

(i) $\mathbf{A}_i \equiv (A_i, \approx_{A_i})$ onde $A_i \subseteq \wp(A_i')$ e

(ii) $\mathbf{B}_i \equiv (A_i, \approx_{B_i})$ onde $B_i \subseteq \wp(B_i')$

e onde as relações de coerência, $\approx_{A_i}, \approx_{B_i}$, são as respectivas relações de coerência, $\approx_A, \approx_B$, herdadas de suas correspondentes teias de origem, mas restritas aos elementos de cada um dos conjuntos, A_i', B_i', que as geraram.

A partir destas subteias pode-se optar pela construção de dois espaços coerentes diferenciados:

1. $\mathbb{A}^* = (Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq)$ que representa o espaço coerente gerado pela teia $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$, construída a partir do produto cartesiano das subteias $\mathbf{A}_i \equiv (A_i, \approx_{A_i})$, isto é, da teia $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$; ou

2. $\prod \mathbb{A}_i \equiv \left(\left(Coh \dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ que representa o produto direto entre espaços coerentes e onde $\dot{\mathbb{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i}\right)$, é teia construída pela união disjunta das subteias $\mathbf{A}_i \equiv (A_i, \approx_{A_i})$.

A primeira evidencia a forma intuitiva de construção das funções lineares que atuam sobre os objetos deste espaço; enquanto a segunda formaliza a homogeneidade de construção das funções aplicada sobre o produto categórico deste espaço. Entretanto, em ambas as construções busca-se a linearização da função objeto $\overline{\lambda}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definida anteriormente. Primeiramente se apresenta a definição do espaço coerente

$\bar{\lambda}^* = \left(Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right), \subseteq\right)$ e se mostrará que as correspondentes funções de objetos, pré-funções, funções de tokens e básica estão bem definidas.

Além disso, se mostrará que a função de objetos $\bar{\lambda}^*$ é contínua, estável e linear, constituindo um morfismo da categoria em estudo.

6.2 O Espaço Coerente Gerado pelo Produto Cartesiano de Subteias

6.2.1 Definição. Função básica $(\lambda')^*$

Sejam os conjuntos:

(i) $A_i' \subseteq A'$ como subdomínios de λ' tais que λ'_{A_i} é injetora, e

(ii) $B_i' \subseteq B'$ as respectivas imagens de cada A_i', ou seja, $B_i' = \lambda'[A_i']$;

define-se a função básica $(\lambda')^* : A_0' \times A_1' \times \ldots \times A_i' \times \ldots \to B_0' \times B_1' \times \ldots \times B_i' \times \ldots$ por:

$$(\lambda')^* \alpha^* = (\lambda_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_i', \ldots)(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots) = (\lambda_0'\alpha_0, \lambda_1'\alpha_1, \ldots, \lambda_i'\alpha_i, \ldots)$$

onde $\lambda'_{A_i} = \lambda_i'$.

6.2.2 Definição. Teia produto

A partir das subteias apresentadas acima, $\mathbf{A}_i \equiv (A_i, \approx_{A_i})$ e $\mathbf{B}_i \equiv (B_i, \approx_{B_i})$ pode-se construir as teias produto:

(i) $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right) = (A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots, \approx_{\mathbf{A}^*})$ e

(ii) $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{\mathbf{B}_i}\right) = (B_0 \times B_1 \times \ldots B_i \times \ldots, \approx_{\mathbf{B}^*})$

cuja relação de coerência, $\forall (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots), (Y_0, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots) \in \mathbf{A}^*$, é definida por:

(i) $(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \approx_{\mathbf{A}^*} (Y_0, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots) \Leftrightarrow \exists X_i, Y_j \subseteq A'$ tal que $X_i \approx_{\mathbf{A}} Y_j$, e

(ii) $(\lambda_0'[X_0], \lambda_1'[X_1], \ldots, \lambda_i'[X_i], \ldots) \approx_{\mathbf{A}^*} (\lambda_0'[Y_0], \lambda_1'[Y_1], \ldots, \lambda_i'[Y_i], \ldots)$ se, e somente se $\exists \lambda_i'[X_i], \lambda_j'[Y_j] \subseteq B'$ tal que $\lambda_i' X_i \approx_{\mathbf{B}} \lambda_i' Y_j$.

6.2.3 Proposição

Se $\approx_{\mathbf{A}}$ é uma relação de coerência em $\mathbf{A}$ então $\approx_{\mathbf{A}^*}$ é também uma relação de coerência em $\mathbf{A}^*$.

Prova:

De fato esta relação é reflexiva pois $\forall X_i \in \mathbf{A}, X_i \approx_{\mathbf{A}} X_i$, logo tem-se que $(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \approx_{\mathbf{A}^*} (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots)$. Da mesma forma mostra-se que é simétrica, pois se $(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \approx_{\Lambda^*} (Y_0, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots)$ então $\exists X_i, Y_j \subseteq A'$ tal que $X_i \approx_\Lambda Y_j$, logo pela simetria em $\approx_{\Lambda^*}$ tem-se que $Y_j \approx_\Lambda X_i$ e conclui-se então que $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots) \approx_{\Lambda^*} (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots)$.♦

A seguir define-se a função de tokens que relaciona os tokens desta nova teia $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\Lambda_i}\right)$ com suas correspondentes imagens na teia $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{B_i}\right)$.

6.2.4 Definição. Função de tokens λ^*

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\Lambda_i}\right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{B_i}\right)$. A função de tokens $\lambda^*: \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ é definida por:

$\lambda^* X^* = \left\{ (\lambda')^*(\alpha^*) \in \prod_i B_i' \mid \alpha^* \in X^* \right\}$, ou ainda:

$$
\begin{aligned}
\lambda^* X^* &= (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots)(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \\
&= \{(\lambda_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_i', \ldots)(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots) | \alpha_i \in X_i\} \\
&= \{(\lambda_0'\alpha_0, \lambda_1'\alpha_1, \ldots, \lambda_i'\alpha_i, \ldots) | \lambda_i'\alpha_i \in \lambda_i X_i\} \\
&= (\lambda_0'[X_0], \lambda_1'[X_1], \ldots, \lambda_i'[X_i], \ldots) \\
&= (\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_i X_i, \ldots)
\end{aligned}
$$

Deve-se salientar que $\lambda_i X_i = \{\lambda'(\alpha) \in B' | \alpha \in X_i \subseteq A_i\} = \lambda_i'[X_i]$.

Pode-se disser que $proj_i(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_i, \ldots) = \lambda_i$.

6.2.5 Proposição

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\Lambda_i}\right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{B_i}\right)$. A função de tokens $\lambda^*: \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ definida por: $\lambda^* X^* = (\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_i X_i, \ldots)$ é total.

Prova:

Se $\lambda': A' \to B'$ é total então $\{\alpha \in A_i' | \lambda_{A_i}'(\alpha) \downarrow\} = A_i'$, ou seja, todos os elementos de A_i' são definidos logo $\lambda_i': A_i' \to B_i'$ é também total. Portanto qualquer que seja a restrição sobre λ', onde $X_i \subseteq A_i'$, $\lambda_i X_i = \{\lambda'(\alpha) \in B' | \alpha \in X_i \subseteq A_i\} = \lambda_{A_i}'[X_i]$ esta bem definido, portanto para $X^* = (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \in \mathbf{A}^*$ tem-se que esta bem definida pois $\lambda^* X^* = \{(\lambda_0'\alpha_0, \lambda_1'\alpha_1, \ldots, \lambda_i'\alpha_i, \ldots) | \lambda_i'\alpha_i \in \lambda_i X_i\}$ = $(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_i X_i, \ldots)$ e tem-se que $\{(\lambda'_0\alpha_0, \lambda'_1\alpha_1, \dots, \lambda'_i\alpha_i, \dots) \mid \lambda'_i\alpha_i \downarrow\} = \mathbf{A}^*$. Assim a função de tokens $\lambda^*: \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ esta bem definida e é também total. Se entretanto $\lambda': A' \to B'$ não é total então $\exists \alpha \in A' \mid \lambda'(\alpha)\uparrow$, ou seja, $\lambda'(\alpha) \notin B'$. Assim, $X_i = \{\alpha\}$ e $\lambda_i X_i = \{\lambda'(\alpha) \in B' \mid \alpha \in X_i\} = \emptyset$, isto é, $\lambda'_i[X_i] = \emptyset \subseteq \mathbf{B}_i$, e portanto $\lambda^* X^*$ = $(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \dots, \emptyset, \dots) \subseteq \mathbf{B}^*$. Mostrou-se então que $\lambda^*: \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ é sempre total.

Define-se a seguir o espaço coerente correspondente gerado por esta teia produto. ♦

6.2.6 Definição. Espaço Coerente $\mathcal{A}^*$

Define-se espaço coerente $\mathcal{A}^* = (Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq)$ como a coleção de subconjuntos coerentes de uma teia $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ parcialmente ordenados pela inclusão.

Tem-se agora que cada conjunto coerente, indicado por x^*, é formado por n-uplas, infinitas ou não, de subconjuntos de A', que são os tokens gerados pela teia produto $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$.

6.2.7 Definição. Pré-função objeto λ^*

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{\mathbf{B}_i}\right)$ e seus correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^* = (Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq)$ e $\mathcal{B}^* = (Coh(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}), \subseteq)$. A pré-função de objetos $\lambda^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ é definida por:

$$
\begin{aligned}
\lambda^* x^* &= \left\{\lambda^* X^* \in \prod_i B'_i \mid X^* \in x^*\right\} \\
&= \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots)(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots) \mid (X_0, X_1, \dots, X_i, \dots) \in (x_0, x_1, \dots, x_i, \dots)\}, \\
&= \{(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \dots, \lambda_i X_i, \dots) \in \mathbf{B}^* \mid (X_0, X_1, \dots, X_i, \dots) \in x\}
\end{aligned}
$$

6.2.8 Proposição

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{\mathbf{B}_i}\right)$ e seus correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^* = (Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq)$ e $\mathcal{B}^* = (Coh(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}), \subseteq)$. A pré-função $\lambda^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$

definida por: $\lambda^* x^* = \{(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots \lambda_i X_i, \ldots) \in \mathbf{B}^* | (X_0, X_1, \ldots X_i, \ldots) \in x\}$, é total, monótona, contínua, estável e linear.

Prova:

Como a definição da pré-função $\lambda^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ se reduz a definição 3.3.1, bastando para tal tomar cada token $X = (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \in \mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$, tem-se então são válidas as proposições 5.3.1, 5.3.4, 5.3.7, 5.3.10, 5.3.12 e 5.3.15, considerando-se que as funções básicas $\lambda_i' : A_i' \rightarrow B_i'$ são, por definição, injetoras na construção da teia produto $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$. Logo $\lambda^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ é uma pré-função objeto monótona, contínua, estável e linear. ♦

6.2.9 Definição. Função objeto $\overline{\lambda}^*$

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{\mathbf{B}_i} \right)$ e seus correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^* = \left(Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq \right)$ e $\mathcal{B}^* = \left(Coh(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}), \subseteq \right)$. A função de objetos $\lambda^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ é definida por:

$$\overline{\lambda}^*(x) = \begin{cases} \lambda^* x^* = \{(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_i X_i, \ldots) \in \mathbf{B}^* | (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \in x\} & \text{se } x^* \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda}^*(x^*) = \bigcup \{d^* \in \mathcal{B}^* | i(\lambda^*(x^*)) = i(d^*) \wedge \lambda^*(x^*) \subseteq d^*\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\lambda}^*(x^*)$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função λ^*.

6.2.10 Proposição

Sejam as teias $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$ e $\mathbf{B}^* \equiv \left(\prod_i \mathbf{B}_i, \approx_{\mathbf{B}_i} \right)$ e seus correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^* = \left(Coh(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}), \subseteq \right)$ e $\mathcal{B}^* = \left(Coh(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}), \subseteq \right)$. A função de objetos $\lambda^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ definida por:

$$\overline{\lambda}^*(x) = \begin{cases} \lambda^* x^* = \{(\lambda_0 X_0, \lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_i X_i, \ldots) \in \mathbf{B}^* | (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \in x\} & \text{se } x^* \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda}^*(x^*) = \bigcup \{d \in \mathcal{B} | i(\lambda^*(x^*)) = i(d) \wedge \lambda^*(x^*) \subseteq d\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

é total, monótona, contínua, estável e linear.

Prova:

A prova decorre da proposição anterior 6.2.8 e das proposições 5.3.3, 5.3.6, 5.3.11, 5.3.14 e 5.3.16. ♦

6.2.11 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}^* = \left(Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B}^* = \left(Coh\left(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}\right), \subseteq\right)$. Existe sempre um par projeção para $\left(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*\right)$, ou seja, para toda pré-função objeto $\lambda^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$, existe sempre uma função $\hbar^*: \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$, tais que, $\lambda^* \circ \hbar^* = id_{\mathcal{A}^*}$ e $\left(\hbar^* \circ \lambda^*\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}^*$.

Prova:

Como todas as funções básicas $\lambda': A' \to B'$ são injetoras por definição, tomando-se $h': \lambda'[A'] \to A', h' = (\lambda')^{-1}$, tem-se, para $\lambda^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ e $\hbar^*: \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$, que $\lambda^* \circ \hbar^* = id_{\mathcal{A}^*}$ e $\left(\hbar^* \circ \lambda^*\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}^*$. Portanto pelas proposições 5.4.3 e 5.4.4, $(\lambda^*, \hbar^*)$ é um par projeção para $(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*)$. ♦

6.2.12 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}^* = \left(Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B}^* = \left(Coh\left(\mathbf{B}^*, \approx_{\mathbf{B}^*}\right), \subseteq\right)$. Existe sempre um par projeção para $\left(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*\right)$, ou seja, para toda função objeto $\overline{\lambda}^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$, existe sempre uma função $\overline{\hbar}^*: \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$, tais que, $\overline{\lambda}^* \circ \overline{\hbar}^* = id_{\mathcal{A}^*}$ e $\left(\overline{\hbar}^* \circ \overline{\lambda}^*\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}^*$.

Prova:

Considerando-se a injetividade das funções básicas $\lambda': A' \to B'$ e as proposições 6.2.8, 6.2.10, e 6.2.11 como também a injetividade da função fecho quando restrita aos totais, pela proposição 5.2.5, e tomando-se $h': B' \to A', h' = (\lambda')^{-1}$, tem-se:

$$\overline{\hbar}^*(x) = \begin{cases} \left(\overline{\lambda}^*\right)^{-1}\left(y^*\right) = \left\{\left((\lambda_0)^{-1} Y_0, (\lambda_1)^{-1} Y_{1}, \ldots, (\lambda_i)^{-1} Y_i, \ldots\right) \in \mathbf{B}^* \,\middle|\, Y_i = \lambda_i X_i\right\} & \text{se } y^* \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \wedge & \\ \left(\overline{\lambda}^*\right)^{-1}\left(y^*\right) & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Logo tem-se para $\overline{\lambda}^*: \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ e $\overline{\hbar}^*: \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$, que $\overline{\lambda}^* \circ \overline{\hbar}^* = id_{\mathcal{A}^*}$ e $\left(\overline{\hbar}^* \circ \overline{\lambda}^*\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}^*$. Portanto pelas proposições 5.4.3 e 5.4.4, $(\overline{\lambda}^*, \overline{\hbar}^*)$ é um par projeção para $(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*)$. ♦

Apresenta-se a seguir a mesma interpretação gráfica da construção das funções apresentada no terceiro capítulo, sendo que agora na categoria LIN, das funções lineares entre espaços coerentes, conforme foi apresentado nesta seção.

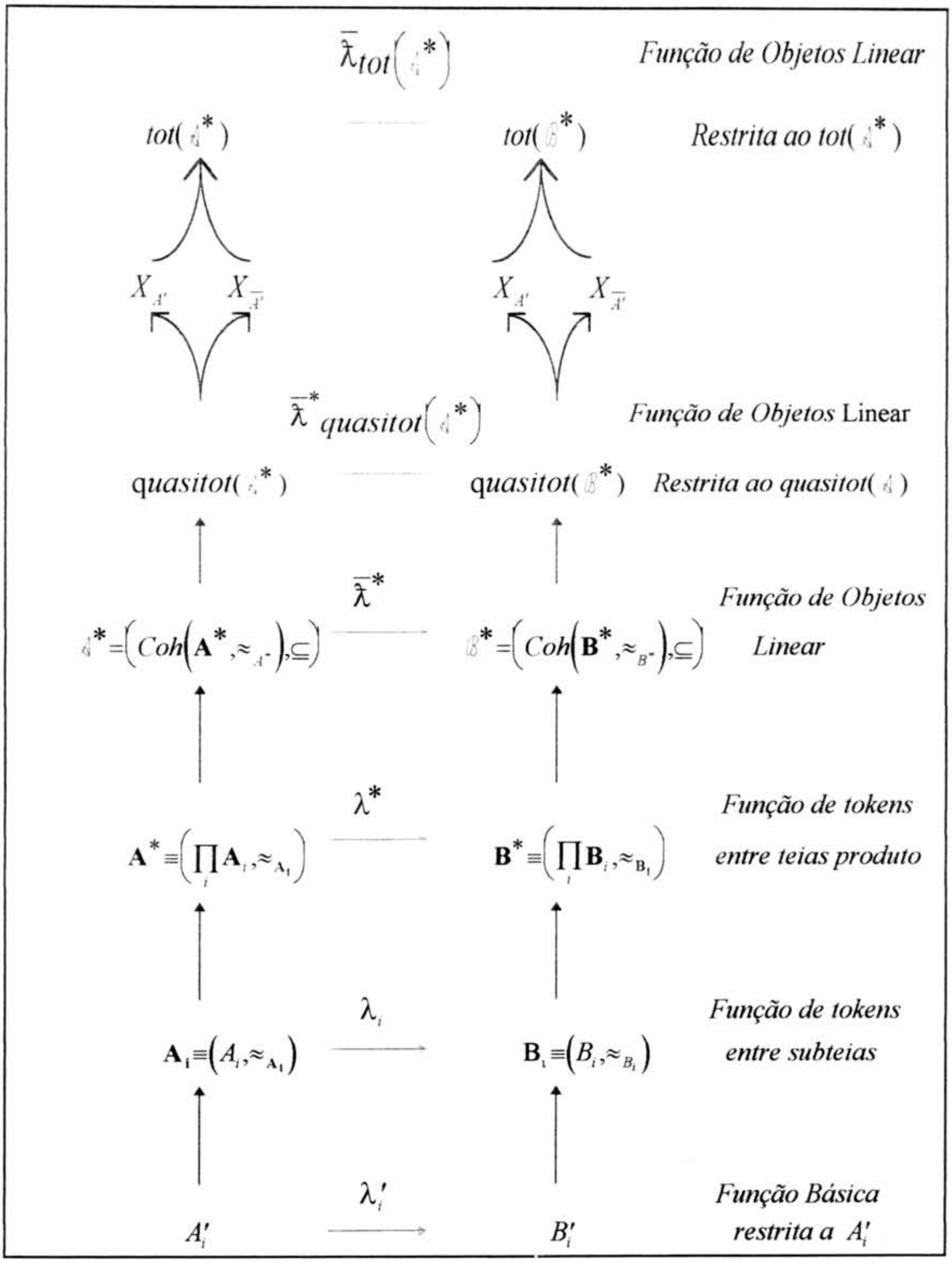

FIGURA 6.1 - Construção das funções de objetos lineares entre espaços coerentes.

6.3 Relação entre os espaços coerentes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^*$

Apresenta-se a seguir a relação existente entre a família de conjuntos coerentes de $\mathbf{A}$, $Coh(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$, e a família dos conjuntos coerentes da teia produto, $Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$, provando-se também que toda função localmente linear admite uma representação linear na categoria LIN dos espaços coerentes.

Para tal, sejam $A_i'=\{\alpha\in A' | \alpha_i<\alpha<\alpha_{i+1}\}\subseteq A'$, subdomínios de λ' tais que λ'_{A_i} é injetora. Como já foi comentado, cada A_i' é um conjunto enumerável e limitado superior e inferiormente. Deve-se considerar duas situações importantes. A primeira e mais trivial é aquela em que tanto o supremo como o ínfimo de A_i', são elementos do conjunto básico A'. Neste caso, para todo $x\in Coh(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$, tal que $x=\{X_0,X_1,\ldots,X_j,\ldots\}_{j\in N}$, tem-se $\{(X_{00},X_{10},\ldots,X_{j0},\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1},\ldots),\ldots,(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij},\ldots),\ldots\}=x^*\in Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$, de tal forma que $\bigcup_i X_{ij}=X_j$ e $X_{ij}=X_j\cap A_i'$, onde $A_i'=\{\alpha\in A' | \alpha_i\leq\alpha\leq\alpha_{i+1}\}$.

Entretanto, existem subconjuntos $A_i'=\{\alpha\in A' | \alpha_i<\alpha<\alpha_{i+1}\}\subseteq A'$, cujos correspondentes supremos e ínfimos não são elementos do conjunto básico. Suponha-se, por exemplo, que não existe ínfimo para A_i', ou seja, $\overline{\alpha}_i\notin A_i'$. Se o conjunto básico é denso, pode-se determinar um subconjunto enumerável de elementos de A', $\{\alpha_i',\alpha_i''\alpha_i''',\ldots\}$, que se aproximam de $\overline{\alpha}_i$ e tais que $\alpha_i'\geq\alpha_i''\geq\alpha_i'''\geq\ldots$ e onde $\overline{\alpha}_i$ é o supremo deste conjunto. Estes elementos básicos constituem os ínfimos para cada um dos correspondentes tokens no conjunto $\{X_1',X_i'',X_i''',\ldots\}$ onde $X_1'\subseteq X_i''\subseteq X_i'''\ldots$.

Neste segundo caso, se $x\in Coh(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$, tal que $x=\{X_0,X_1,\ldots,X_j,\ldots\}_{j\in N}$, pode-se estabelecer a seguinte representação:

$$X_0\to X_0^*=\{(X_{00},X_{10},\ldots,X_{i0}',\ldots),(X_{00},X_{10},\ldots,X_{i0}'',\ldots),(X_{00},X_{110}\ldots,X_{ii0}''',\ldots),\ldots\},$$

$$X_1\to X_1^*=\{(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1}',\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1}'',\ldots),(X_{01},X_{111}\ldots,X_{ii1}''',\ldots),\ldots\},$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$X_j\to X_j^*=\{(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}',\ldots),(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}'',\ldots),(X_{0j},X_{1j}\ldots,X_{iij}''',\ldots),\ldots\}.$$

logo tem-se que :

$\bigcup\{X_0^*,X_1^*,\ldots,X_j^*,\ldots\}=x^*\in Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$, ou ainda:

$$\{(X_{00},X_{10},\ldots,X_{i0}',\ldots),(X_{00},X_{10},\ldots,X_{i0}'',\ldots),(X_{00},X_{10},\ldots,X_{i0}',\ldots),\ldots$$
$$\ldots,(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1}',\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1}'',\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1}''',\ldots),\ldots$$
$$\ldots,(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}',\ldots),(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}'',\ldots),(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}''',\ldots),\ldots\}=x^*\in Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$$

sendo que, em especial, tem-se :

$$X_{i0}=\bigcup\{X'_{i0},X''_{i0},X'''_{i0},\ldots\}$$
$$X_{i1}=\bigcup\{X'_{i1},X''_{i1},X'''_{i1},\ldots\}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$X_{ij}=\bigcup\{X'_{ij},X''_{ij},X'''_{ij},\ldots\}$$

e da mesma forma, $\bigcup_j X_{ij}=X_i$ e $X_{ij}=X_j \cap A'_i$. Salienta-se que $\{X'_{ij},X''_{ij},X'''_{ij},\ldots\}\in A_i$ e são coerentes entre si, pois $X'_{ij}\subseteq X''_{ij}\subseteq X'''_{ij}\subseteq\ldots$

Contudo, esta representação foi simplificada, utilizando-se para tal, um exemplo de um caso em que apenas o ínfimo do subconjunto $A'_i\subseteq A'$ não pertence ao conjunto básico A'. Pode ocorrer a mesma situação para o supremo, ou até para ambos. E até mais, que em mais de um dos subconjuntos $A'_i\subseteq A'$ ocorram situações como estas. Como exemplo, considere-se o espaço coerente *IIQ* e a função polinomial de objetos definida a partir da função polinomial racional, que possui n-1 pontos de máximo ou de mínimo em seu domínio de definição, mas que nem todos pertencem aos racionais.

Mostra-se a seguir como se estrutura a representação dos objetos e morfismos da família de conjuntos coerente de $\mathbb{A}$, $Coh(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$, e a família dos conjuntos coerentes da teia produto, $Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$.

6.3.1 Proposição

Sejam $\mathbb{A}=(Coh(A,\approx_A),\subseteq)$ e $\mathbb{A}^*=(Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}),\subseteq)$ os espaços coerentes construídos sobre as correspondentes teias $\mathbf{A}=(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$ e $\mathbf{A}^*\equiv\left(\prod_i \mathbf{A}_i,\approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ geradas a partir dos conjuntos básicos A' e A'_i, que são parcialmente ordenados e densos. Existe um homomorfismo $\Gamma:\mathbb{A}\to\mathbb{A}^*$ injetivo.

Prova:

Suponha-se primeiramente que o tanto o supremo como o ínfimo de cada A'_i, são elementos do conjunto básico, ou seja, $A'_i=\{\alpha\in A' | \alpha_i<\alpha<\alpha_{i+1}\}\subseteq A'$.

Qualquer que seja $x\in Coh(\mathbf{A},\approx_{\mathbf{A}})$, tal que $x=\{X_0,X_1,\ldots,X_j,\ldots\}_{j\in N}$, tem-se que x pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\{(X_{00},X_{10},\ldots,X_{j0},\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots,X_{i1},\ldots),\ldots(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij},\ldots),\ldots\}=x^*\in Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$$

sendo portanto possível definir uma função $\Gamma:\mathbb{A}\to\mathbb{A}^*$ que para os objetos, é definida por:

$$\Gamma(x)=\Gamma\left(\left\{X_0,X_1,\ldots,X_j,\ldots\right\}\right)$$
$$=\left\{\left(X_{00},X_{10},\ldots X_{i0},\ldots\right),\left(X_{01},X_{11},\ldots X_{i1},\ldots\right),\ldots,\left(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots\right),\ldots\right\}$$
$$=\left\{\left(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots\right)\in\mathbf{A}^*\mid X_{ij}=A_i\cap \mathrm{X_j} \text{ e } \bigcup_{\mathrm{i}}\mathrm{X_{ij}}=X_j\in x\right\}=x^*$$

e aplicada sobre as funções, tem-se que

$$\Gamma(\lambda x)=\Gamma\left(\lambda\left\{X_0,X_1,\ldots,X_j,\ldots\right\}\right)$$
$$=\Gamma\left(\left\{Y_0,Y_1,\ldots,Y_j,\ldots\right\}\right)$$
$$=\left\{\left(Y_{00},Y_{10},\ldots Y_{i0},\ldots\right),\left(Y_{01},Y_{11},\ldots Y_{i1},\ldots\right),\ldots,\left(Y_{0j},Y_{1j},\ldots Y_{ij},\ldots\right),\ldots\right\}$$
$$=\left\{\lambda_o\left(X_{0j},\lambda_1X_{1j},\ldots\lambda_iX_{ij},\ldots\right)\in\mathbf{B}^*\mid \lambda_\mathrm{i}X_{ij}=A_i\cap\lambda'\left[\mathrm{X_j}\right] \text{ e } \bigcup_{\mathrm{i}}\lambda_\mathrm{i}\mathrm{X_{ij}}=\lambda X_j\in\lambda x\right\}$$
$$=(\lambda x)^*=\lambda^*\left(\Gamma(x)\right)$$

Γ é injetora, pois para todo $x',x''\in Coh\left(\mathbf{A},\approx_\mathbf{A}\right)$, se $\Gamma(x')=\Gamma(x'')$ então:

$$\left\{\left(X'_{i0},X'_{i1},\ldots,X'_{ij},\ldots\right)\in A_0\times A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\mid X'_{ij}=\mathrm{X}'_\mathrm{j}\cap A_i \text{ e } \bigcup_i X'_{ij}=X'_j\in x\right\}=$$
$$=\left\{\left(X''_{i0},X''_{i1},\ldots,X''_{ij},\ldots\right)\in A_0\times A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\mid X''_{ij}=\mathrm{X}''_\mathrm{j}\cap A_i \text{ e } \bigcup_i X''_{ij}=X_j\in x\right\}$$

e portanto $\left(\left(X'_{i0},X'_{i1},\ldots,X'_{ij},\ldots\right)=\left(X''_{i0},X''_{i1},\ldots,X''_{ij},\ldots\right)\right)_{\forall j\in N,i\in Z}\Leftrightarrow\left(X'_j=X''_j\right)_{\forall j\in N,i\in Z}\Leftrightarrow x'=x''$.

Além disso, Γ é monótona, pois $\forall x',x''\in Coh\left(\mathbf{A},\approx_\mathbf{A}\right)$, se $x'\subseteq x''$, então tem-se a inclusão $\left\{X'_0,X'_1,\ldots X'_j,\ldots\right\}\subseteq\left\{X''_0,X''_1,\ldots X''_j,\ldots\right\}$ logo:

$$\left\{\left(X'_{i0},X'_{i1},\ldots,X'_{ij},\ldots\right)\in A_0\times A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\mid X'_{ij}\in x'_i \text{ e } \bigcup_i X'_{ij}=X'_j\in\mathbf{A}\right\}\subseteq$$
$$\left\{\left(X''_{i0},X''_{i1},\ldots,X''_{ij},\ldots\right)\in A_0\times A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\mid X''_{ij}\in x''_i \text{ e } \bigcup_i X''_{ij}=X''_j\in\mathbf{A}\right\}$$

e portanto tem-se que $\Gamma(x')\subseteq\Gamma(x'')$.

Entretanto, a função Γ não é sobrejetora. De fato, existe $x^*\in Coh\left(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}\right)$, $x^*=\left\{\left(X_{0j},X_{1j},\ldots,X_{ij}\right)\right\}$ onde $X_{ij}=A'_i\cap X_j$ e $\alpha_i<minX_{ij}\leq maxX_{ij}<\alpha_{i+1}$, de tal forma que se A' e A'_i são conjuntos densos e limitados, como no caso dos intervalos, tem-se que $\bigcup X_{ij}\notin Coh\left(\mathbf{A},\approx_\mathbf{A}\right)$, ou seja, não é um token da teia $\left(\mathbf{A},\approx_\mathbf{A}\right)$. Logo $x^*\in Coh\left(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ nem sempre é imagem de algum $x\in Coh\left(\mathbf{A},\approx_\mathbf{A}\right)$.

Da mesma forma se prova para o caso em que existem subconjuntos $A_i'=\{\alpha\in A'|\alpha_i<\alpha<\alpha_{i+1}\}\subseteq A'$, cujos respectivos ínfimos, ou supremos ou ambos, não são elementos dos conjunto básico. Basta considerar cada token identificado com um conjunto enumerável de n-uplas. Assim tem-se que a função Γ definida por:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \Gamma\left(\left\{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\right\}\right) \\
&= \left\{X_0^*, X_1^*, \ldots, X_j^*, \ldots\right\} \\
&= \{ \left(X_{00}, X_{10}, \ldots X_{i0}', \ldots\right), \left(X_{00}, X_{10}, \ldots X_{i0}''', \ldots\right), \left(X_{00}, X_{10}, \ldots X_{i0}''', \ldots\right), \ldots \\
&\qquad \ldots, \left(X_{01}, X_{11}, \ldots X_{i1}', \ldots\right), \left(X_{01}, X_{11}, \ldots X_{i1}'', \ldots\right), \left(X_{01}, X_{11}, \ldots X_{i1}''', \ldots\right), \ldots \\
&\qquad \ldots, \left(X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}', \ldots\right), \left(X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}'', \ldots\right), \left(X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}''', \ldots\right), \ldots \} \\
&= \mathrm{x}^*
\end{aligned}
$$

sendo que $\{X_1', X_i'', X_i''', \ldots\}$ é o conjunto das aproximação para A_i' pois $X_1'\subseteq X_i''\sqsubseteq X_i'''\ldots$ e:

(i) $minX_1'\geq minX_i''\geq minX_i'''\ldots$ e $maxX_1'\leq maxX_i''\leq maxX_i'''\ldots$;

(ii) $\bar{\alpha}_i=\bigcap\{minX_1', minX_i'', minX_i''', \ldots\}$ e $\bar{\alpha}_{i-1}=\bigcup\{maxX_1', maxX_i'', maxX_i''', \ldots\}$.

Portanto pode-se afirmar que existe um monomorfismo $\Gamma:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^*$. ♦

6.3.2 Corolário

Sejam as funções objetos $\bar{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ e $\bar{\lambda}^*:\mathcal{A}^*\to\mathcal{B}^*$. Se $\bar{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é linear então tem-se:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \Gamma\left(\left\{X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots\right\}\right) \\
&= \left\{\left(X_0, \varnothing, \ldots \varnothing, \ldots\right), \left(\varnothing, X_{11} \ldots \varnothing, \ldots\right), \ldots, \left(\varnothing, \varnothing, \ldots X_i, \ldots\right), \ldots\right\} \\
&= \left\{\left(\varnothing, \varnothing, \ldots X_i, \ldots\right) \in \mathbf{A}^* \mid X_i \in x\right\}
\end{aligned}
$$

Prova:

Decorre imediatamente da proposição anterior. ♦

Salienta-se ainda que neste caso, como

$x^*\in\mathcal{A}^*\Rightarrow x^*=\{(X_{00}, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots), (\varnothing, X_{11}, \ldots, \varnothing, \ldots), \ldots, (\varnothing, \varnothing, \ldots, X_{ii}, \ldots), \ldots\}$, e

$\bar{\lambda}^*x^*\in\mathcal{A}^*\Rightarrow\bar{\lambda}^*x^*=\{(\lambda_0 X_{00}, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots), (\varnothing, \lambda_1 X_{11}, \ldots, \varnothing, \ldots), \ldots (\varnothing, \varnothing, \ldots \lambda_i X_{ii}, \ldots), \ldots \}$,

pode-se estabelecer que a relação entre objetos e morfismos respectivamente por:

$$
\begin{cases}
X_{ij} = X_i \text{ se } i = j, \\
X_{ij} = \varnothing \text{ se } i \neq j.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\lambda_0'=\lambda_1'=\ldots=\lambda_i'=\ldots=\lambda', \text{pois } \lambda' \text{ e injetora; e} \\
\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_i=\ldots=\lambda, \text{ pois } A_i'=A'.
\end{cases}
$$

Apresenta-se a seguir as funções objetos definidas sobre o produto direto entre espaços coerentes e onde a teia é construída pela união disjunta das subteias $\mathrm{A}_\iota \equiv \left(A_i, \approx_{A_i}\right)$.

6.4 O Espaço Coerente Gerado pelo Produto Direto entre Espaços Coerente

Mostra-se a seguir que toda função objeto localmente linear pode ser representada por uma função produto que é linear. Para tal define-se o espaço coerente resultante do produto direto, $\prod_i \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(Coh \dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$, onde os objetos, denotados por $\dot{x}$, são conjuntos coerentes que podem ser representados por n-uplas de conjuntos coerentes $x_i \in \mathcal{A}_i$, onde $\mathcal{A}_i \equiv \left(Coh\left(A_i, \approx_{A_i}\right), \subseteq\right)$, e sobre os quais são aplicadas funções lineares.

6.4.1 Definição

Define-se o espaço coerente $\mathcal{A}_i \equiv \left(Coh\left(A_i, \approx_{A_i}\right), \subseteq\right)$ como a coleção de subconjuntos coerentes gerados a partir da teia $\mathbf{A}_i \equiv \left(A_i, \approx_{A_i}\right)$ parcialmente ordenados pela inclusão.

6.4.2 Definição

Sejam os espaços coerentes $\mathcal{A}_i \equiv \left(Coh\left(A_i, \approx_{A_i}\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{B}_i = \left(Coh\left(B_i, \approx_{B_i}\right), \subseteq\right)$ gerados a partir das teias $\mathbf{A}_i \equiv \left(A_i, \approx_{A_i}\right)$ e $\mathbf{B}_i \equiv \left(B_i, \approx_{B_i}\right)$ e a função básica $\lambda_i : A_i' \to B_i'$, onde tem-se $\lambda_i' = \lambda'_{A_i}$, logo $\lambda_i X_i = \lambda_i'[X_i]$.. Define-se então :

(i) a função token, $\lambda_i : \mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_i$, por: $\lambda_i X_i = \{\lambda_i'(\alpha_i) \in B' \mid \alpha_i \in X_i\}$.

(ii) a pré-função objeto, $\lambda_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$, por: $\lambda_i x_i = \{\lambda_i X_i \in \mathcal{B}_i \mid X_i \in x_i\}$.

(iii) a função objeto, $\overline{\lambda}: \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$, por:

$$\overline{\lambda}_i(x_i) = \begin{cases} \lambda_i x_i = \{\lambda_i X_i \in \mathcal{B} \mid X_i \in x_i\} \text{ se } x_i \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\lambda}_i x_i = \bigcup\{d \in \mathcal{B} \mid i(\lambda_i x_i) = i(d) \wedge \lambda_i x_i \subseteq d\} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

6.4.3 Proposição

As pré-funções $\lambda_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ e as funções de objetos $\overline{\lambda}_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ estão bem definidas e são totais em cada um de seus respectivos domínios.

Prova:

Decorre da definição anterior e das respectivas restrições do conjunto básico, da subteia e no espaço coerente. ♦

6.4.4 Proposição

As pré-funções $\tilde{\lambda}_i:\mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

As pré-funções $\tilde{\lambda}_i:\mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ são restrições da pré-função $\tilde{\lambda}:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ portanto pelas proposições 5.3.1, 5.3.4, 5.3.7, 5.3.10, 5.3.12 e 5.3.15 são monótonas, contínuas, estáveis e lineares, pois λ_i' é injetora por definição.♦

6.4.5 Proposição

As funções de objetos $\overline{\lambda}_i:\mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

As funções de objetos $\overline{\lambda}_i:\mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ são restrições da função objeto $\overline{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ portanto, basta aplicar as proposições 5.3.2, 5.3.6, 5.3.9, 5.3.11, 5.3.14 e 5.3.16 e considerar como hipótese, que as restrições da função básica, λ_i', são funções injetoras por definição. ♦

6.4.6 Definição

Sejam os conjuntos:

(i) $A_i' \subseteq A'$ como subdomínios de λ' tais que λ_{A_i}' é injetora, e

(ii) $B_i' \subseteq B'$ as respectivas imagens de cada A_i', ou seja, $B_i' = \lambda'[A_i']$;

define-se a função básica $(\dot{\lambda}'):\dot{\bigcup_i} A_i' \to \dot{\bigcup_i} B_i'$ por:

$$\left(\dot{\lambda}'\right)\dot{\alpha} = \dot{\lambda}'\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots\} = \{\lambda_0'\alpha_0, \lambda_1'\alpha_1, \ldots, \lambda_i'\alpha_i, \ldots\} \text{ onde } \lambda_{A_i}' = \lambda_i' \text{ e } \alpha_i \in A_i'.$$

6.4.7 Definição. Produto direto entre espaços coerentes

Define-se o produto direto entre os espaços coerentes $\mathcal{A}_i$, indicado por $\prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$, como sendo o espaço coerente gerado a partir da teia $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathrm{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathrm{A}_i}\right)$ que é formada pela união disjuntas dos subconjuntos $A_i' \subseteq A'$, isto é $\dot{\bigcup_i} A_i = = \{(\{0\}\times A_0)\cup(\{1\}\times A_1)\cup\ldots\cup(\{i\}\times A_i)\cup\ldots\}$ e a relação de coerência é dada por:

$$(i, X_{j_1}) \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i} (i, X_{j_2}) \Leftrightarrow X_{j_1} \approx_{A_i} X_{j_2} \text{ e } (i_1, X_{j_1}) \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i} (i_2, X_{j_2}), \forall \mathrm{i,j} \in \mathrm{IN}$$

Em [TRO 92] afirma-se que este é o produto categórico para a categoria dos Espaços Coerentes e em [DIM 96b] constroe-se a correspondente prova. Além disso existe um isomorfismo entre a família de conjuntos coerentes do produto direto dos subconjuntos $A_i' \subseteq A'$, $Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$, e o produto cartesiano entre as respectivas famílias de conjuntos coerentes, $Coh\,A_1 \times Coh\,A_2 \times \ldots \times Coh\,A_i \times \ldots$. Por isso pode-se usar a seguinte notação:

$$Coh\left(\left(\{0\} \times A_0\right) \cup \left(\{1\} \times A_1\right) \cup \ldots \cup \left(\{i\} \times A_i\right) \cup \ldots\right) \equiv \left(CohA_0 \times CohA_1 \times \ldots \times CohA_i \times \ldots\right).$$

Assim todo conjunto coerente que pertença a esta união, pode ser representado por uma n-upla, infinita ou não, de conjuntos coerentes, isto é :

$$\dot{x} \in Coh\left(\left(\{0\} \times A_0\right) \cup \left(\{1\} \times A_1\right) \cup \ldots \cup \left(\{n\} \times A_n\right) \cup \ldots\right) \Leftrightarrow \dot{x} \equiv \left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\right);$$

E todos os tokens X do conjunto coerente $\dot{x} \in Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$ são indicados por:

$$X \in \dot{x} \Leftrightarrow X \in \left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right) \Leftrightarrow X = (i, X) = X_i .$$

Entretanto, pelo isomorfismo citado anteriormente, tem-se que:

$$X_i \in \dot{x},\ \dot{x} \equiv \left(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\right) \Rightarrow X_i \in x_i .$$

Define-se abaixo as funções de objetos e de tokens neste espaço coerente.

6.4.8 Definição

Sejam as funções básicas $\lambda_i : A_i' \to B_i'$. Seja $x \in Coh\left(\mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ tal que $x = \left\{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\right\}_{j \in N}$. Então tem-se que:

$$x \in \mathbf{A}_i \Leftrightarrow x_i = \left\{X_{io}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}, \ldots\right\} \in \dot{\mathbf{A}}$$

onde $X_{ij} = X_j \cap A_i'$. Neste caso x_i contém todos os tokens que estão na subteia A_i' e tem interseção com os tokens X_j do conjunto x. Portanto cada conjunto coerente $\dot{x} \in \prod_i A_i \equiv \left(\left(Coh \dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ será indicado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x_0 \cup x_1 \cup \ldots \cup x_i \cup \ldots \\
&= \left\{X_{00}, X_{01}, \ldots X_{0j}, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{1j}, \ldots, X_{i0}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}, \ldots\right\} \\
&\equiv \left(\left\{X_{00}, X_{01}, \ldots X_{0j}\right\}, \left\{X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{1j}\right\}, \ldots, \left\{X_{i0}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}\right\}, \ldots\right) \\
&= \left(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\right)
\end{aligned}$$

Sejam as teias $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i}\right)$ e $\dot{\mathbf{B}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{B}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{B}_i}\right)$. A função de tokens $\dot{\lambda} : \dot{\mathbf{A}} \to \dot{\mathbf{B}}$, é definida por $\dot{\lambda} X_{ij} = \lambda_i X_j = \left\{\lambda_i'(\alpha) | \alpha \in X_j\right\}$.

6.4.9 Proposição

Sejam as teias $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right)$ e $\dot{\mathbf{B}} = \left(\dot{\bigcup_i} B_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} B_i}\right)$. A função de tokens $\dot{\lambda}: \dot{\mathbf{A}} \rightarrow \dot{\mathbf{B}}$, definida por $\dot{\lambda} X_{ij} = \lambda_i X_j = \{\lambda_i'(\alpha) | \alpha \in X_j\}$ é total e bem definida.

Prova:

Se $\lambda': A' \rightarrow B'$ é total então $\{\alpha \in A_i' | \lambda_{A_i}'(\alpha)\downarrow\} = A_i'$, ou seja, todos os elementos de A_i' são definidos. Portanto qualquer que seja a restrição sobre λ', onde $X_{ij} \subseteq A_i'$, $\lambda_i X_{ij} = \{\lambda'(\alpha) \in B' | \alpha \in X_{ij} \subseteq A_i\} = \lambda'_{A_i}[X_{ij}]$ está bem definido, logo, $\{X_{ij} \in \dot{\mathbf{A}} | \dot{\lambda} X_{ij} \downarrow\} = \dot{\mathbf{A}}$. Assim a função de objetos $\dot{\lambda}: \dot{\mathbf{A}} \rightarrow \dot{\mathbf{B}}$ esta bem definida e é também total. Se agora $\lambda': A' \rightarrow B'$ não é total então $\exists \alpha \in A' | \lambda'(\alpha)\uparrow$, ou seja, $\lambda'(\alpha) \notin B'$. Assim, $X_{ij} = \{\alpha\}$ e $\lambda_i X_{ij} = \{\lambda_i'(\alpha) | \alpha \in X_{ij}\} = \{\ \}$, isto é, $\lambda_i'[X_{ij}] = \lambda_i X_{ij} = \{\ \} \subseteq \mathbf{B}_i$ e, portanto $\dot{\lambda} X_{ij} = \{\ \}_i \subseteq \dot{\mathbf{B}}$. Mostrou-se então que $\dot{\lambda}: \dot{\mathbf{A}} \rightarrow \dot{\mathbf{B}}$ é sempre total. ♦

6.4.10 Definição. Pré-função objeto $\dot{\lambda}$

Sejam também os espaços coerentes $\prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh} \dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ e $\prod \mathcal{B}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh} \dot{\bigcup_i} B_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} B_i}\right), \subseteq\right)$.

A pré-função objeto $\dot{\lambda}: \prod \mathcal{A}_i \rightarrow \prod \mathcal{B}_i$ é definida por:

$$\dot{\lambda}\dot{x} = \{\dot{\lambda} X_{00}, \dot{\lambda} X_{01}, \ldots, \dot{\lambda} X_{0j}, \dot{\lambda} X_{10}, \dot{\lambda} X_{11}, \ldots, \dot{\lambda} X_{1j}, \ldots, \dot{\lambda} X_{i0}, \dot{\lambda} X_{i1}, \ldots, \dot{\lambda} X_{ij}, \ldots\}$$

$$= \{\lambda_0 X_{00}, \lambda_0 X_{01}, \ldots, \lambda_0 X_{0j}, \ldots, \lambda_1 X_{10}, \lambda_1 X_{11}, \ldots, \lambda_1 X_{1j}, \ldots, \lambda_i X_{i0}, \lambda_i X_{i1}, \ldots, \lambda_i X_{ij}, \ldots\}$$

$$\equiv \Big(\{\lambda_0 X_{00}, \lambda_0 X_{01}, \ldots, \lambda_0 X_{0j}, \ldots\}, \{\lambda_1 X_{10}, \lambda_1 X_{11}, \ldots, \lambda_1 X_{1j}, \ldots\}, \ldots,$$

$$\ldots, \{\lambda_i X_{i0}, \lambda_i X_{i1}, \ldots, \lambda_i X_{ij}, \ldots\}\Big)$$

$$= (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots)$$

Assim pode-se ainda expressar a pré-função objeto $\dot{\lambda}: \prod \mathcal{A}_i \rightarrow \prod \mathcal{B}_i$ da seguinte forma:

$\dot{\lambda}\dot{x} \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots)(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots)$, onde λ_i são pré-funções definidas nos espaços coerentes $\mathcal{A}_i$, gerados a partir dos subconjuntos básicos A_i'.

6.4.11 Definição. Função de objetos $\dot{\bar{\lambda}}$

Sejam os espaços coerentes $\prod_i \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ e $\prod_i \mathcal{B}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} B_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} B_i}\right), \subseteq\right)$. A função objeto $\dot{\bar{\lambda}}: \prod_i \mathcal{A}_i \to \prod_i \mathcal{B}_i$ é definida por:

$$\dot{\bar{\lambda}}\left(\dot{x}\right) = \begin{cases} \ddot{\lambda x} = \left(\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots\right) \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\ddot{\lambda x}} = \bigcup\left\{ d \in \mathcal{B} \middle| i\left(\ddot{\lambda x}\right) = i(d) \wedge \ddot{\lambda x} \subseteq d \right\} = \left(\lambda_0 \hat{x}_0, \lambda_1 \hat{x}_1, \ldots, \lambda_i \hat{x}_i, \ldots\right), \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\ddot{\lambda x}}$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\dot{\lambda}$.

6.4.12 Proposição

Sejam também os espaços coerentes $\prod_i \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ e $\prod_i \mathcal{B}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} B_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} B_i}\right), \subseteq\right)$.

A pré-função $\dot{\lambda}: \prod_i \mathcal{A}_i \to \prod_i \mathcal{B}_i$ definida por:

$$\ddot{\lambda x} = \left\{ \dot{\lambda} X_{00}, \dot{\lambda} X_{01}, \ldots, \dot{\lambda} X_{0j}, \dot{\lambda} X_{10}, \dot{\lambda} X_{11}, \ldots, \dot{\lambda} X_{1j}, \ldots, \dot{\lambda} X_{i0}, \dot{\lambda} X_{i1}, \ldots, \dot{\lambda} X_{ij}, \ldots \right\}$$

é contínua, monótona, estável e linear.

Prova:

Como a definição da função objeto $\dot{\lambda}: \prod_i \mathcal{A}_i \to \prod_i \mathcal{B}_i$ se reduz a definição 3.3.1, bastando para tal tomar cada token $X = (i, X) \in \dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i}\right)$. Tem-se então válidas todas as proposições provada no capítulo anterior, ou sejam, 5.3.1, 5.3.4, 5.3.7, 5.3.10, 5.3.12 e 5.3.15, considerando-se que as funções básicas $\lambda_i': A_i' \to B_i'$ são injetoras por definição, na construção da teia $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i}\right)$. Logo $\dot{\lambda}: \prod_i \mathcal{A}_i \to \prod_i \mathcal{B}_i$ é uma função objeto monótona, contínua, estável e linear. ♦

As mesmas propriedades podem ser estendidas para as funções de objetos, conforme mostra a próxima proposição.

6.4.13 Proposição

Sejam os espaços coerentes $\prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ e $\prod \mathcal{B}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} B_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} B_i}\right), \subseteq\right)$. A função de objetos $\dot{\bar{\lambda}}: \prod \mathcal{A}_i \to \prod \mathcal{B}_i$ definida por:

$$\dot{\bar{\lambda}}\left(\dot{x}\right) = \begin{cases} \ddot{\lambda} x = \left(\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots\right) \text{ se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \hat{\ddot{\lambda}} x = \bigcup \left\{ d \in \mathcal{B} \mid i\left(\ddot{\lambda} x\right) = i(d) \wedge \ddot{\lambda} x \sqsubseteq d \right\} = \left(\hat{\lambda}_0 x_0, \hat{\lambda}_1 x_1, \ldots, \hat{\lambda}_i x_i, \ldots\right), \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

é contínua, monótona, estável e linear.

Prova:

Como a definição da função objeto $\dot{\bar{\lambda}}: \prod \mathcal{A}_i \to \prod \mathcal{B}_i$ se reduz a definição 6.4.10 ou ao fecho aplicado a esta definição, e que as funções básicas $\lambda_i': A_i' \to B_i'$ são injetoras por definição, pelas proposições 6.4.12 e 5.3.2, 5.3.6, 5.3.9, 5.3.11, 5.3.14 e 5.3.16 tem-se que a função de objetos $\dot{\bar{\lambda}}: \prod \mathcal{A}_i \to \prod \mathcal{B}_i$ é uma monótona, contínua, estável e linear. ♦

Tomando-se $\dot{x} \equiv \left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\right)$ tal que $x_i = \left\{X_j \in \mathbf{A}_i \mid X_j \in x\right\}$ tem-se que cada um destes subconjuntos, X_j, por sua vez, são os tokens das correspondentes subteias geradas pelas restrições do conjunto básico a subdomínios A_i' nos quais a função básica é injetora. Pode-se então definir:

1. a pré-função de objetos $\lambda_i: \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ na subteia $\mathbf{A}_i \equiv \left(A_i, \approx_{Ai}\right)$ da seguinte forma:

   $proj_i\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots\right) = \lambda_i$;

2. a função de objetos $\bar{\lambda}_i: \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ na subteia $\mathbf{A}_i \equiv \left(A_i, \approx_{Ai}\right)$ da seguinte forma:

   $proj_i\left(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_i, \ldots\right) = \bar{\lambda}_i$.

6.4.14 Proposição

As pré-funções projeções $proj_i: \prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right) \to \mathcal{A}_i$ definida por $proj_i\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots\right) = \lambda_i$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

Esta proposição está demonstrada em [DIM 96b]. ♦

6.4.15 Proposição

As funções projeções de objetos, $proj_i: \prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(\mathrm{Coh}\dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i A_i}}\right), \subseteq\right) \to \mathcal{A}_i$ definida por $proj_i(\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_i, \ldots) = \overline{\lambda}_i$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

Esta proposição segue da proposição anterior 6.4.14 e das proposições 4.2.19, 4.2.22, 4.2.25 e 4.2.30. ♦

6.5 Isomorfismo

Mostra-se a seguir que existe um isomorfismo entre os conjuntos coerentes do produto direto e os conjuntos coerentes gerados a partir do produto cartesiano das subteias. Desta forma, as funções de objetos $\overline{\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tem uma representação linear em cada um destes espaços produtos, e além disso, estas representações são isomorfas, de acordo com o que se apresenta na última seção, 6.6, deste capítulo.

6.5.1 Proposição

Sejam $\prod \mathcal{A}_i \equiv \left(Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right), \subseteq\right)$ e $\mathcal{A}^* = \left(Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right), \subseteq\right)$ os espaços coerentes construídos sobre as correspondentes teias $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathrm{A}_i, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$ e $\mathbf{A}^* \equiv \left(\prod_i A_i, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$. A família de conjuntos coerente do produto direto, $Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$, e a família dos conjuntos coerentes da teia produto, $Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$, são isomorfos, isto é, $Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right) \cong Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$.

Prova:

Seja $x \in Coh\left(\mathbf{A}_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ tal que $x = \{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\}_{j \in N}$. Qualquer que seja $\dot{x} \in \prod \mathcal{A}_i \equiv \left(Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right), \subseteq\right)$, tem-se que $\dot{x} = x_0 \cup x_1 \cup \ldots \cup x_i \cup \ldots$, logo,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \{X_{00}, X_{01}, \ldots X_{0j}, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{1j}, \ldots, X_{i0}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}, \ldots\} \\
&\equiv \left(\{X_{00}, X_{01}, \ldots X_{0j}\}, \{X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{1j}\}, \ldots, \{X_{i0}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}\}, \ldots\right) \\
&= (x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)
\end{aligned}
$$

Portanto qualquer que seja $\dot{x} \in \prod_i \mathcal{A}_i$, pode ser unicamente decomposto como

$$
\left\{(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{j0}, \ldots), (X_{01}, X_{11}, \ldots, X_{i1}, \ldots), \ldots, (X_{0j}, X_{1j}, \ldots, X_{ij}, \ldots), \ldots\right\} = x^* \in \cong Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)
$$

sendo portanto possível definir uma bijeção $\Psi: Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right) \to Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ dada por:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\dot{x}\right) &= \Psi\left(x_0 \cup x_1 \cup \ldots \cup x_i \cup \ldots\right) \\
&= \Psi\left(\left\{X_{00}, X_{01}, \ldots X_{0j}, \ldots, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{1j}, \ldots, X_{i0}, X_{i1}, \ldots, X_{ij}, \ldots\right\}\right) \\
&= \left\{\left(X_{00}, X_{10}, \ldots X_{i0}, \ldots\right), \left(X_{01}, X_{11}, \ldots X_{i1}, \ldots\right), \ldots, \left(X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}, \ldots\right), \ldots\right\} \\
&= \left\{\left(X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}, \ldots\right) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \mid X_{ij} \in x_i \text{ e } \bigcup_{\mathrm{i}} \mathrm{X}_{\mathrm{ij}} = X_j \in \mathbf{A}\right\} = x^*
\end{aligned}$$

De fato, Ψ é injetora, pois para todo $\dot{x}', \dot{x}'' \in Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$, se $\Psi\left(\dot{x}'\right) = \Psi\left(\dot{x}''\right)$ então

$$\Psi\left(\left\{X'_{00}, X'_{01}, \ldots X'_{0j}, \ldots, X'_{10}, X'_{11}, \ldots, X'_{1j}, \ldots, X'_{i0}, X'_{i1}, \ldots, X'_{ij}, \ldots\right\}\right) =$$

$$= \Psi\left(\left\{X''_{00}, X''_{01}, \ldots X''_{0j}, \ldots, X''_{10}, X''_{11}, \ldots, X''_{1j}, \ldots, X''_{i0}, X''_{i1}, \ldots, X''_{ij}, \ldots\right\}\right)$$

$$\left\{\left(X'_{i0}, X'_{i1}, \ldots, X'_{ij}, \ldots\right) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \mid X'_{ij} \in x_i \text{ e } \bigcup_i X'_{ij} = X_j \in \mathbf{A}\right\} =$$

$$\left\{\left(X''_{i0}, X''_{i1}, \ldots, X''_{ij}, \ldots\right) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \mid X''_{ij} \in x_i \text{ e } \bigcup_i X''_{ij} = X_j \in \mathbf{A}\right\}$$

$$\left(\left(X'_{i0}, X'_{i1}, \ldots, X'_{ij}, \ldots\right) = \left(X''_{i0}, X''_{i1}, \ldots, X''_{ij}, \ldots\right)\right)_{\forall j \in N, i \in Z} \Leftrightarrow \left(X'_{ij} = X''_{ij}\right)_{\forall j \in N, i \in Z} \Leftrightarrow \dot{x}' = \dot{x}''$$

A função Ψ também é sobrejetora, pois para todo $x^* \in Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ existe $\dot{x} \in Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$ tal que $\Psi\left(\dot{x}\right) = x^*$. Além disso, Ψ é monótona, pois para todo $\dot{x}', \dot{x}'' \in Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$, se $\dot{x}' \subseteq \dot{x}''$ então:

$$\left\{X'_{00}, X'_{01}, \ldots X'_{0j}, \ldots, X'_{10}, X'_{11}, \ldots, X'_{1j}, \ldots, X'_{i0}, X'_{i1}, \ldots, X'_{ij}, \ldots\right\} \subseteq$$

$$\left\{X''_{00}, X''_{01}, \ldots X''_{0j}, \ldots, X''_{10}, X''_{11}, \ldots, X''_{1j}, \ldots, X''_{i0}, X''_{i1}, \ldots, X''_{ij}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\left(X'_{i0}, X'_{i1}, \ldots, X'_{ij}, \ldots\right) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \mid X'_{ij} \in x'_i \text{ e } \bigcup_i X'_{ij} = X'_j \in \mathbf{A}\right\} \subseteq$$

$$= \left\{\left(X''_{i0}, X''_{i1}, \ldots, X''_{ij}, \ldots\right) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \mid X''_{ij} \in x''_i \text{ e } \bigcup_i X''_{ij} = X''_j \in \mathbf{A}\right\}$$

e tem-se que $\Psi\left(\dot{x}'\right) \subseteq \Psi\left(\dot{x}''\right)$.

Portanto $Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right) \cong Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$. ♦

6.5.2 Proposição

A função $\Psi\!:\!Coh\left(\dot{\mathbf{A}},\approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)\rightarrow Coh\left(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ dada por:

$$\Psi\left(\dot{x}\right)=\Psi\left(x_0\cup x_1\cup\ldots\cup x_i\cup\ldots\right)$$

$$=\Psi\left(\left\{X_{00},X_{01},\ldots X_{0j},\ldots,X_{10},X_{11},\ldots,X_{1j},\ldots,X_{i0},X_{i1},\ldots,X_{ij},\ldots\right\}\right)$$

$$=\left\{\left(X_{00},X_{10},\ldots X_{i0},\ldots\right),\left(X_{01},X_{11},\ldots X_{i1},\ldots\right),\ldots,\left(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots\right),\ldots\right\}$$

$$=\left\{\left(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots\right)\in A_0\times A_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\mid X_{ij}\in x_i \text{ e } \bigcup_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_{\mathrm{ij}}=X_j\in\mathbf{A}\right\}=x^*$$

é linear em cada um de seus argumentos.

Prova:

Segundo [DIM96], uma função $\Psi\!:\!Coh\left(\dot{\mathbf{A}},\approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)\rightarrow Coh\left(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ é linear em cada um de seus argumentos se a função $\Psi_i\!:\!x_i\mapsto\Psi(x_i)=\Psi\left(a,b,\ldots,x_i,\ldots\right)$ é linear. Isto será mostrado a seguir.

Ψ_i é monótona pois sejam $x_i'\subseteq x_i''$ logo tem-se que $\left\{X_{i0}',X_{i1}',\ldots,X_{ij}',\ldots\right\}\subseteq\left\{X_{i0}'',X_{i1}'',\ldots,X_{ij}'',\ldots\right\}$. Assim

$$\Psi(x_i')=\Psi\left(a,b,\ldots,x_i',\ldots\right)$$

$$=\left\{\left(A_0,B_0,\ldots,X_{io}',\ldots\right),\left(A_1,B_1,\ldots,X_{i1}',\ldots\right),\ldots,\left(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}',\ldots\right),\ldots\right\}$$

$$\subseteq\left\{\left(A_0,B_0,\ldots,X_{i0}'',\ldots\right),\left(A_1,B_i,\ldots,X_{i1}'',\ldots\right),\ldots,\left(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}'',\ldots\right),\ldots\right\}$$

$$=\Psi\left(a,b,\ldots,x_i'',\ldots\right)=\Psi(x_i'')$$

Ψ_i é contínua pois é monótona conforme o demonstrado acima e além disso, suponha-se $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{A}_i\equiv\left(Coh\left(A_i,\approx_{A_i}\right),\subseteq\right)$ um subconjunto dirigido em relação à inclusão. Então $\bigcup\mathcal{X}\in\mathcal{A}_i$ e $\Psi_i[\mathcal{X}]\in\mathcal{A}^*$ é dirigido. Portanto tem-se que:

$$\bigcup\Psi_i[\mathcal{X}]=\bigcup\Psi\left\{\left(a,b,\ldots,x_i,\ldots\right)\middle|x_i\in\mathcal{X}\right\}$$

$$=\bigcup\left\{\left\{\left(A_o,B_0,\ldots X_{i0}',\ldots\right),\left(A_1,B_1,\ldots X_{i1}',\ldots\right),\ldots,\left(A_i,B_i,\ldots X_{ij}',\ldots\right)\right\},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\left\{\left(A_o,B_0,\ldots,X_{i0}^{(k)},\ldots\right),\left(A_1,B_1,\ldots,X_{i1}^{(k)},\ldots\right),\ldots,\left(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}^{(k)},\ldots\right)\right\}\right\}$$

$$=\left\{\left(A_o,B_0,\ldots,\bigcup X_{i0},\ldots\right),\left(A_1,B_1,\ldots,\bigcup X_{i1},\ldots\right),\ldots,\left(A_i,B_i,\ldots,\bigcup X_{ij},\ldots\right)\right\}$$

$$=\Psi\left(\bigcup\left\{\left(a,b,\ldots,x_i,\ldots\right)\middle|x_i\in\mathcal{X}\right\}\right)=\Psi_i\left[\bigcup\mathcal{X}\right]$$

Ψ_i é estável, pois já mostrou-se que é contínua e além disso verifica a condição de estabilidade. De fato, suponha-se que $x_i' \cup x_i'' \in \mathcal{A}_i$ então tem-se que

$$\Psi_i(x_i' \cap x_i'') = \Psi(a,b,\ldots,x_i' \cap x_i'',\ldots)$$
$$= \{(A_0,B_0,\ldots,X_{i0}' \cap X_{i0}'',\ldots),(A_1,B_1,\ldots,X_{i1}' \cap X_{i1}'',\ldots),\ldots,(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}' \cap X_{ij}'',\ldots)\}$$
$$= \{(A_0,B_0,\ldots,X_{i0}',\ldots),(A_1,B_1,\ldots,X_{1i1}',\ldots),\ldots,(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}',\ldots)\} \cap$$
$$\{(A_0,B_0,\ldots,X_{i0}'',\ldots),(A_1,B_1,\ldots,X_{1i1}'',\ldots),\ldots,(A_i,B_i,\ldots,X_{ij}'',\ldots)\}$$
$$= \Psi(a,b,\ldots,x_i',\ldots) \cap \Psi(a,b,\ldots,x'',\ldots) = \Psi_i(x_i') \cap \Psi_i(x_i'')$$

E finalmente pode-se afirmar que Ψ_i é linear, pois é estável e sendo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_i \equiv (Coh(A_i,\approx_{A_i}),\subseteq)$ tal que todo $x_i',x_i'' \in \mathcal{A}_i$ tem-se que $x_i' \cup x_i'' \in \mathcal{A}_i$ então $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{A}_i$, e portanto :

$$\bigcup \Psi_i[\mathcal{X}] = \bigcup \Psi\{(a,b,\ldots,x_i,\ldots) | x_i \in \mathcal{X}\}$$
$$= \bigcup\{\{(A_o,B_0,\ldots X_{i0}',\ldots),(A_1,B_1,\ldots X_{i1}',\ldots),\ldots,(A_i,B_i,\ldots X_{ij}',\ldots)\},\ldots$$
$$\ldots,\{(A_o,B_0,\ldots,X_{i0}^k,\ldots),(A_1,B_1,\ldots,X_{i1}^k,\ldots),\ldots,(A_{i1},B_i,\ldots,X_{ij}^k,\ldots)\}\}$$
$$= \{(A_o,B_0,\ldots,\bigcup X_{i0},\ldots),(A_1,B_1,\ldots,\bigcup X_{i1},\ldots),\ldots,(A_i,B_i,\ldots,\bigcup X_{ij},\ldots)\}$$
$$= \Psi(\bigcup\{(a,b,\ldots,x_i,\ldots) | x_i \in \mathcal{X}\}) = \Psi_i[\bigcup \mathcal{X}]$$

Logo provou-se que a função $\Psi : Coh(\dot{\mathbf{A}}.\approx_{\dot{\mathbf{A}}}) \to Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$ é linear em cada um de seus argumentos. ♦

6.5.3 Proposição

A função $\Psi : Coh(\dot{\mathbf{A}}.\approx_{\dot{\mathbf{A}}}) \to Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*})$ dada por:

$$\Psi(\dot{x}) = \Psi(x_0 \cup x_1 \cup \ldots \cup x_i \cup \ldots)$$
$$= \Psi(\{X_{00},X_{01},\ldots X_{0j},\ldots,X_{10},X_{11},\ldots,X_{1j},\ldots,X_{i0},X_{i1},\ldots,X_{ij},\ldots\})$$
$$= \{(X_{00},X_{10},\ldots X_{i0},\ldots),(X_{01},X_{11},\ldots X_{i1},\ldots),\ldots,(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots),\ldots\}$$
$$= \left\{(X_{0j},X_{1j},\ldots X_{ij},\ldots) \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots | X_{ij} \in x_i \text{ e } \bigcup_{\mathrm{i}} \mathbf{X}_{\mathrm{ij}} = X_j \in \mathbf{A}\right\} = x^*$$

é linear.

Prova:

Por [DIM96], $\Psi: Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right) \rightarrow Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right)$ é linear se é linear em cada um de seus argumentos, logo a prova decorre imediatamente da proposição anterior. ♦

6.6 Relação entre os espaços coerentes $\mathcal{A}$ e $\prod \mathcal{A}_i$

Apresenta-se a seguir a relação existente entre a família de conjuntos coerente, $Coh(\mathbf{A}, \approx_{\mathbf{A}})$, e a família dos conjuntos coerentes da teia produto, $Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$.

6.6.1 Proposição

Sejam $\mathcal{A} = \left(Coh(A, \approx_A), \subseteq\right)$ e $\prod \mathcal{A}_i \equiv \left(\left(Coh \dot{\bigcup_i} A_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} A_i}\right), \subseteq\right)$ os espaços coerentes construídos sobre as correspondentes teias $\mathbf{A} = (\mathbf{A}, \approx_{\mathbf{A}})$ e $\dot{\mathbf{A}} = \left(\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i, \approx_{\dot{\bigcup_i} \mathbf{A}_i}\right)$. Existe um homomorfismo $T: \mathcal{A} \rightarrow \prod \mathcal{A}_i$ injetivo.

Prova:

Qualquer que seja $x \in Coh(\mathbf{A}, \approx_{\mathbf{A}})$, tal que $x = \{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\}_{j \in N}$, tem-se que x pode ser decomposto da seguinte:

$$\{X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{j0}, \ldots, X_{01}, X_{11}, \ldots, X_{i1}, \ldots, \ldots, X_{0j}, X_{1j}, \ldots, X_{ij}, \ldots\} = \dot{x} \in Coh\left(\dot{\mathbf{A}}, \approx_{\dot{\mathbf{A}}}\right)$$

sendo portanto possível definir uma função $T: \mathcal{A} \rightarrow \prod \mathcal{A}_i$ que aplicada sobre os objetos é dada por:

$T(x) = T\left(\{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\}\right) = \{X_{00}, X_{10}, \ldots X_{i0}, \ldots, X_{01}, X_{11}, \ldots X_{i1}, \ldots, X_{0j}, X_{1j}, \ldots X_{ij}, \ldots\}$ ou ainda $T(x) = \left\{\bigcup_i X_{ij} \in \dot{\mathbf{A}} \mid X_{ij} = A_i \cap \mathrm{X_j} \text{ e } \bigcup_i \mathrm{X_{ij}} = X_j \in x\right\}$.

E sobre as funções:

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= T\left(\lambda\{X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots\}\right) \\ &= T\left(\{\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_j, \ldots\}\right) \\ &= \{\lambda_o X_{00}, \lambda_o X_{10}, \ldots \lambda_o X_{i0}, \ldots, \lambda_1 X_{01}, \lambda_1 X_{11}, \ldots \lambda_1 X_{i1}, \ldots, \lambda_i X_{0j}, \lambda_i X_{1j}, \ldots \lambda_i X_{ij}, \ldots\} \\ &= \dot{\lambda}(T(x)) \end{aligned}$$

Aplicando-se as proposições 6.3.1 e 6.5.1 e tomando-se $T = \Psi \circ \Gamma$ prova-se a proposição. ♦

A seguir tem-se a representação gráfica desta relação.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} = \left(Coh\left(A, \approx_{A}\right), \subseteq\right) \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & \prod \mathcal{A}_i = \left(Coh \bigcup\limits_i A_i, \approx_{\bigcup\limits_i A_i}, \subseteq\right) \arrow[d, "\Psi"] \\
 & \mathcal{A}^* = \left(Coh\left(\mathbf{A}^*, \approx_{\mathbf{A}^*}\right), \subseteq\right)
\end{tikzcd}$$

FIGURA 6.2. - Relação entre os espaços $\mathcal{A}$, $\prod \mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}^*$

Este capítulo apresentou uma das características mais importantes da construção proposta, o desenvolvimento de um sistema de representação linear para funções localmente lineares, com a construção e definição do espaço coerente gerado pelo produto de subteias, denotado por $\mathcal{A}^*$. Estas subteias se caracterizam por serem geradas por subconjuntos do conjunto básico nos quais a correspondente restrição da função básica é injetora. Mostrou-se ainda que as funções de objetos $\overline{\lambda}^*$, definidas entre espaços coerentes assim estruturados são lineares e coincidem com os morfismos da categoria dos espaços coerentes. Além disso correspondem a representação linear das funções de objetos $\overline{\lambda}$, a partir da definição do homomorfismo Γ entre os espaços $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$.

Mostrou-se ainda que o espaço $\mathcal{A}^*$ é isomorfo ao espaço coerente gerado pelo produto direto dos sub-espaços, sendo este último gerado pelas respectivas subteias e denotado por $\prod \mathcal{A}_i$ e sobre o qual pode-se determinar também as representações lineares da função de objetos $\overline{\lambda}$.

Interpretando os resultados alcançados, tem-se que toda transformação definida para um tipo de dado estruturado a partir de um conjunto básico enumerável tem uma representação linear, constituída pelos morfismos da categoria dos espaços coerentes. Esta representação linear é justamente a representação construída neste capítulo.

7 O Espaço Coerente dos Intervalos Racionais

7.1 O Espaço Coerente dos Intervalos

Neste capítulo define-se as funções objetos para Espaços Coerentes cuja teia é formada por tokens que são primeiramente intervalos do conjunto básico, e posteriormente, intervalos de racionais.

7.1.1 Definição. Pré-Intervalo

Em [DIM 96a], define-se pré-intervalo como sendo a estrutura $X = (X', \leq_{X'})$ onde $X' \subset A'$, denominado de alcance X, é qualquer subconjunto de A' para o qual sempre que $\alpha_1', \alpha_2' \in X'$, então todo $\alpha \in A'$ tal que $\alpha_1' \leq_{A'} \alpha \leq_{A'} \alpha_2'$ tem-se que $\alpha \in X'$. A relação de ordem, $\leq_X$ que é uma restrição da relação de ordem $\leq_{A'}$ em A'.

Se $X' = \varnothing$ então $(\ ) = (\varnothing, \leq_{\varnothing})$ é a notação para o pré-intervalo vazio.; Se $X' = A'$ então $A' = (A', \leq_{A'})$ é a notação para o pré-intervalo impróprio.

7.1.2 Definição. Intervalo

Seja A' um conjunto enumerável e parcialmente ordenado por uma relação de ordem "$\leq$". Um intervalo é uma estrutura composta de um subconjunto $X \subseteq A'$ que verifica as seguintes condições:
(i) $\inf X = p$ e $\sup X = q$;
(ii) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in X$ tem-se que $\forall \alpha \in A'$, se $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ então $\alpha \in X$.
E uma relação de ordem, $\leq_X$ que é uma restrição da relação de ordem $\leq_{A'}$ em A'.

Neste caso p e q são chamados extremos do intervalo X denotado por:

$$X = [p,q] = ([p,q], \leq_{[p,q]}) = \{\alpha \in A' / \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$

Se $p = q = \alpha$ o intervalo $X = [\alpha, \alpha]$ é denominado intervalo pontual e pode ser denotado simplesmente por α.

IA' é definido como o conjunto de todos os intervalos básicos de A'.

7.1.3 Definição. Teia sobre IA

Seja IA' o conjunto de todos os intervalos básicos de A'. A teia $\mathrm{A} \equiv (IA', \approx_A)$ é construída tomando-se cada token como um intervalo básico X e a relação de coerência induzida, definida em (1.4.1), neste caso é expressa por:

$$[p,q] \approx_A [p',q'] \Leftrightarrow \forall \alpha \in [p,q], \forall \alpha' \in [p',q'], p \leq q' \text{ e } p' \leq q \Leftrightarrow [p,q] \cap [p',q'] \neq \varnothing$$

Todo subconjunto coerente x desta teia é um conjunto de intervalos. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de A é denotado por Coh(A). Tem-se então:

$$Coh(\mathrm{A}) = Coh(IA', \approx_A) = \{x \subseteq A \mid \forall [p,q],[p',q'] \in x,\ [\mathrm{p,q}] \approx_A [p',q']\}.$$

7.1.4 Definição

Se $X \subseteq A'$ é tal que $X = \varnothing$, define-se então $[\ \ ]=(\varnothing,\leq_{\varnothing})$ onde a relação $\leq_{\varnothing}$ é uma restrição da relação $\leq_A$.

7.1.5 Definição. Espaço Coerente de Intervalos

O espaço coerente $\mathbb{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ é a coleção de subconjuntos coerentes de intervalos de uma teia $\mathbf{A} \equiv (IA', \approx_A)$, parcialmente ordenados pela relação de inclusão.

7.1.6 Definição. Função no Espaço Coerente dos Intervalos

Sejam IA', IB' o conjunto de todos intervalos básicos de A', B' respectivamente, e a função básica $\lambda': A' \to B'$. Sejam $\mathrm{A} \subseteq \wp(\mathrm{A}'), \mathrm{B} \subseteq \wp(\mathrm{B}')$. Sejam também as teias $\mathbf{A} \equiv (IA', \approx_A)$ e $\mathbf{B} \equiv (IB', \approx_B)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathbb{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ e $\mathbb{B} = (Coh(IB', \approx_B), \subseteq)$. Define-se:

1. a função básica $\lambda' : A' \to B'$.
2. a função de tokens $\lambda: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ por:

$$\lambda[p,q] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha, \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha\right] & \text{se } \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha,\ \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \in B', \text{ e} \\ [\ \ ], & \text{caso contrario.} \end{cases},$$

3. a pré-função de objetos $\boldsymbol{\lambda}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ por:

$$\boldsymbol{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in \mathbb{B} \mid [p,q] \in x\}.$$

4. a função de objetos $\overline{\boldsymbol{\lambda}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ por :

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in \mathbb{B} \mid [p,q] \in x\} & \text{se } x \notin quasitot(\mathbb{A}); \\ (\hat{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda})(x) = \widehat{\boldsymbol{\lambda}x} = \bigcup\{d \in \mathbb{B} \mid i(\boldsymbol{\lambda}x) = i(d) \wedge \boldsymbol{\lambda}x \subseteq d\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\lambda}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ corresponde a função fecho definida por $\hat{\boldsymbol{\lambda}}x = \hat{x}$.

7.1.7 Proposição

Sejam $\mathbb{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ e $\mathbb{B} = (Coh(IB', \approx_B), \subseteq)$ são espaços coerentes de intervalos. A pré-função objeto $\boldsymbol{\lambda}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, a função objeto $\overline{\boldsymbol{\lambda}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e a função de tokens $\lambda: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ estão bem definidas e são totais, em cada um de seus respectivos domínios.

Prova:

Decorre imediatamente das proposições 3.1.3, 3.1.4 e 3.1.5. ♦

7.1.8 Proposição

Sejam $\mathbb{A} = (Coh(IA', \approx_A), \subseteq)$ e $\mathbb{B} = (Coh(IB', \approx_B), \subseteq)$ são espaços coerentes de intervalos. A pré-função $\tilde{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ e a função objeto, $\overline{\tilde{\lambda}}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, são monótonas e contínuas, e serão também estáveis e lineares se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

É imediata a partir dos resultados das proposições 3.3.1, 3.3.4 e 3.3.3, 3.3.6 tem-se que $\tilde{\lambda},\overline{\tilde{\lambda}}$ são monótonas e contínuas. Pelas proposições 3.3.10, 3.3.15 e 3.3.11, 3.3.16 serão estáveis e lineares se λ' é injetora. Observa-se entretanto que $\tilde{\lambda},\overline{\tilde{\lambda}}$ verificam a propriedade da linearidade, pelas proposições 3.3.12 e 3.3.14. ♦

7.1.9 Proposição

Seja o espaço coerente de intervalos $\mathcal{A}=\left(Coh\left(IA,\approx_A\right),\subseteq\right)$, e a função básica $\lambda': A'\to B'$. Então define-se :

(i) a função de tokens $\lambda\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ por:

$$\lambda[p,q]=[\lambda'p,\lambda'q]\ \left(\lambda[p,q]=[\lambda'q,\lambda'p]\right), \text{ e}$$

(ii) a pré-função de objetos $\tilde{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ por:

$$\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}\ \left(\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'q,\lambda'p]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}\right),$$

(iii) a função de objetos $\overline{\tilde{\lambda}}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ por :

$$\overline{\tilde{\lambda}}(x)=\begin{cases}\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\} \text{ se } x\notin quasitot(\mathcal{A});\\ \left(\hat{\tilde{\lambda}}\circ\tilde{\lambda}\right)(x)=\hat{\tilde{\lambda}x}=\bigcup\left\{d\in\mathcal{B}\mid i(\tilde{\lambda}x)=i(d)\wedge\tilde{\lambda}x\sqsubseteq d\right\} \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

se, e somente se, $\forall\alpha\in[p,q]$ tem-se que $\lambda'p\le\lambda'\alpha\le\lambda'q\ \left(\lambda'q\le\lambda'\alpha\le\lambda'p\right)$.

Prova:

Se $\forall\alpha\in[p,q],\lambda'p\le\lambda'\alpha\le\lambda'q$ então $\min_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha=\lambda'p$ e $\max_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha=\lambda'q$, portanto:

(i) $\lambda[p,q]=[\min_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha\ ,\ \max_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha]=[\lambda'p,\lambda'q]$,

(ii) $\tilde{\lambda}x=\left\{\lambda[p,q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}=\left\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}$ e

(iii) $$\overline{\tilde{\lambda}}(x)=\begin{cases}\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\} \text{ se } x\notin quasitot(\mathcal{A});\\ \left(\hat{\tilde{\lambda}}\circ\tilde{\lambda}\right)(x)=\hat{\tilde{\lambda}x}=\bigcup\left\{d\in\mathcal{B}\mid i(\tilde{\lambda}x)=i(d)\wedge\tilde{\lambda}x\sqsubseteq d\right\} \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

Assim pelas proposições 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6, 5.2.7, 5.2.8, 5.2.9 e 5.2.10 completa-se a prova da proposição. ♦

Como um caso particular desta proposição, tem-se o corolário a seguir.

7.1.10 Corolário

Seja o espaço coerente de intervalos $\mathcal{A}=\left(Coh\left(IA,\approx_A\right),\subseteq\right)$, e a função básica $\lambda': A'\to B'$. Então, se λ' é crescente (decrescente), define-se :

(i) a função de tokens $\lambda\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ por:

$$\lambda[p,q]=[\lambda'p,\lambda'q],\ \left(\lambda[p,q]=[\lambda'q,\lambda'p]\right)\text{e}$$

(ii) a função de objetos $\tilde{\lambda}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ por:

$$\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}\left(\tilde{\lambda}x=\left\{[\lambda'q,\lambda'p]\in\mathcal{B}\mid [p,q]\in x\right\}\right),$$

(iii) a função de objetos

$$\overline{\lambdabar}(x)=\begin{cases} \lambdabar x=\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B} \mid [p,q]\in x\} \; (\lambdabar x=\{[\lambda'p,\lambda'q]\in\mathcal{B} \mid [p,q]\in x\}) & \text{se } x\notin quasitot(\mathcal{A}); \\ (\hat{\lambda}\circ\lambdabar)(x)=\hat{\lambdabar x}=\bigcup\{d\in\mathcal{B} \mid i(\lambdabar x)=i(d)\wedge\lambdabar x\subseteq d\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Prova:

De fato, se λ' é crescente em $[p,q]$, então certamente pode-se afirmar que $\forall\alpha\in[p,q]$, $p\leq\alpha\leq q$ implica $\lambda'p\leq\lambda'\alpha\leq\lambda'q$. Portanto a condição da proposição 7.1.9 é satisfeita e pode-se aplicar a definição citada anteriormente. ♦

7.1.11 Definição

Seja $\mathcal{A}=(Coh(IA,\approx_A),\subseteq)$. Se $\lambda': A'\to B'$ não é injetora em todo seu domínio de definição, mas suas restrições $\lambda'_i: A'_i\to B'_i$ são injetoras, então a correspondente função de objetos $\overline{\lambdabar}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ e a pré-função $\lambdabar:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ são *localmente lineares*.

Decorre desta definição que as funções $\overline{\lambdabar}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ e $\lambdabar:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ admitem uma representação linear de $\mathcal{A}^*=(Coh(\mathbf{A}^*,\approx_{\mathbf{A}^*}),\subseteq)$ em $\mathcal{B}^*=(Coh(\mathbf{B}^*,\approx_{\mathbf{B}^*}),\subseteq)$, conforme mostra a próxima proposição.

7.1.12 Proposição

Sejam também as teias $\mathbf{A}^*\equiv\left(\prod_i IA_i,\approx_{A_i}\right)$ e $\mathbf{B}^*\equiv\left(\prod_i IB_i,\approx_{B_i}\right)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^*=(Coh(IA^*,\approx_{IA^*}),\subseteq)$ e $\mathcal{B}^*=(Coh(IB^*,\approx_{IB^*}),\subseteq)$. A pré-função de $\lambdabar^*:\mathcal{A}^*\to\mathcal{B}^*$ e a função de objetos $\overline{\lambdabar}^*:\mathcal{A}^*\to\mathcal{B}^*$ são totais e bem definidas.

Prova:

Prova-se aplicando-se os resultados da proposição 3.2.8 e 3.2.10. ♦

7.1.13 Proposição

Sejam também as teias $\mathbf{A}^*\equiv\left(\prod_i IA_i,\approx_{A_i}\right)$ e $\mathbf{B}^*\equiv\left(\prod_i IB_i,\approx_{B_i}\right)$ e os correspondentes espaços coerentes $\mathcal{A}^*=(Coh(IA^*,\approx_{IA^*}),\subseteq)$ e $\mathcal{B}^*=(Coh(IB^*,\approx_{IB^*}),\subseteq)$. A pré-função de $\lambdabar^*:\mathcal{A}^*\to\mathcal{B}^*$ e a função de objetos $\overline{\lambdabar}^*:\mathcal{A}^*\to\mathcal{B}^*$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

Decorre das proposições 3.2.8 e 3.2.10. ♦

Apresenta-se a seguir o Espaço Coerente de Intervalos Racionais, onde o conjunto básico é o conjunto dos racionais e onde os tokens que formam os conjuntos coerentes são intervalos de racionais.

7.2 Espaço Coerente de Intervalos Racionais

7.2.1 Definição

Seja $(IQ,\approx)$ a teia de intervalos racionais. Denomina-se Espaço Coerente de Intervalos Racionais, IIQ, o domínio de Girard constituído pela coleção de subconjuntos coerentes da teia $(IQ,\approx)$ ordenados pela inclusão, isto é, $\mathrm{II}Q \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$.

Conforme [DIM96], o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais é uma estrutura algébrica ordenada, de tal forma que a definição das operações algébricas e da relação de ordem para os objetos parciais são herdadas da própria estrutura algébrica e ordenada do Conjunto de Intervalos Racionais, que por sua vez tem suas operações e relações de certa forma herdadas dos racionais. Seguindo este mesmo tipo de construção, busca-se aqui analisar as funções elementares, bem como suas propriedades mais importantes, durante o processo de construção . Portanto algumas definições e considerações são necessárias, e são apresentadas a seguir.

7.2.2 Definição. Funções em IIQ

Seja $\mathrm{II}Q \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. Define-se:

1. a função básica elementar $\lambda' : Q \to Q$ nos racionais;
2. a função de tokens $\lambda : IQ \to IQ$ por:

$$\lambda[p,q] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]} \lambda'\alpha \;,\; \max\limits_{\alpha\in[p,q]} \lambda'\alpha\right] & \text{se } \min\limits_{\alpha\in[p,q]} \lambda'\alpha,\ \min\limits_{\alpha\in[p,q]} \lambda'\alpha \in Q, \text{ e} \\ [\;], \text{ caso contrario.} \end{cases},$$

3.a pré-função de objetos $\check{\lambda} : IIQ \to IIQ$ por:

$$\check{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\}.$$

4.a função de objetos $\overline{\lambda} : IIQ \to IIQ$ por :

$$\overline{\lambda}(x) = \begin{cases} \check{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\} \text{ se } x \notin quasitot(\check{\lambda}); \\ (\hat{\lambda} \circ \check{\lambda})(x) = \hat{\check{\lambda}}x \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\lambda} : IIQ \to IIQ$ corresponde a função fecho , e $\hat{\lambda}x = \hat{x} = \bigcup\{d \in IIQ | i(x) = i(d) \wedge x \subseteq d\}$.

7.2.3 Corolário

Seja $\mathrm{II}Q \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, $\check{\lambda} : IIQ \to IIQ$, a pré-função elementar em $Coh(IQ,\approx)$, e $\lambda : IQ \to IQ$ a correspondente função elementar nos tokens da teia $(IQ,\approx)$. Assim, se $[p,q] \in x$, então $\lambda[p,q] \in \check{\lambda}x$.

Prova:

Segue imediatamente da definição acima. ♦

7.2.4 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\lambda: IIQ \rightarrow IIQ$, a pré-função elementar e $\bar{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ a função objeto em $Coh(IQ,\approx)$. Se $x \in IIQ$ então $\lambda x \in IIQ$, como também $\bar{\lambda} x \in IIQ$.

Prova:

Se $x = \varnothing$ então $\lambda\varnothing = \varnothing \in IIQ$. Supor então $x \neq \varnothing$. Para todo $[p_1,q_1],[p'_1,q'_1] \in x$ tem-se que $[p_1,q_1] \approx [p'_1,q'_1]$. Pela proposição 3.1.2 em [DIM96], tem-se $p_1 \leq q'_1 \, e \, p'_1 \leq q_1$ ou $[p_1,q_1] \cap [p_2,q_2] \neq \varnothing$. Logo, $\forall \lambda[p_1,q_1], \lambda[p_2,q_2] \in \lambda x$, tem-se que $\lambda[p_1,q_1] = \left[\min\limits_{\alpha \in [p_1,q_1]} \lambda\alpha \, , \, \max\limits_{\alpha \in [p_1,q_1]} \lambda\alpha\right]$ e $\lambda[p_2,q_2] = \left[\min\limits_{\alpha \in [p_1,q]} \lambda\alpha \, , \, \max\limits_{\alpha \in [p_1,q_1]} \lambda\alpha\right]$. Existe então $\alpha' \in [p_1,q_1] \cap [p_2,q_2]$ tal que $\min\limits_{\alpha \in [p_1,q_1]} \lambda\alpha \leq \lambda\alpha' \leq \max\limits_{\alpha \in [p_1,q_1]} \lambda\alpha$ e $\min\limits_{\alpha \in [p_2,q_2]} \lambda\alpha \leq \lambda\alpha' \leq \max\limits_{\alpha \in [p_2,q_2]} \lambda\alpha$. Daí tem-se $\lambda\alpha' \in \lambda[p_1,q_1]$ e $\lambda\alpha' \in \lambda[p_2,q_2]$, ou ainda, $\lambda[p_1,q_1] \cap \lambda[p_2,q_2] \neq \varnothing$ e portanto $\lambda x \in IIQ$, ou seja , λx é um conjunto coerente de intervalos racionais. Mostrou-se assim que $\lambda x \in Coh((IQ,\approx),\subseteq)$. ♦

Do corolário e da proposição anteriores pode-se afirmar que a pré-função elementar λ está sempre bem definida em IIQ. E consequentemente $\bar{\lambda} x \in IIQ$ também.

7.2.5 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\lambda: IIQ \rightarrow IIQ$, a pré-função elementar e $\bar{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ a função objeto em $Coh(IQ,\approx)$. $\lambda, \bar{\lambda}$ são monótonas e contínuas, e serão também estáveis e lineares se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Decorre imediatamente da proposição 7.1.8 . ♦

7.2.6 Definição

Se a função básica nos racionais não é injetora, mas localmente injetora, então a pré-função e a função objeto admitem representação linear no Espaço Coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{IQ^*}\right), \subseteq\right)$. Define-se então a função objeto $\bar{\lambda}^*: IIQ^* \rightarrow IIQ^*$ por:

$$\bar{\lambda}^*(x^*) = \begin{cases} \lambda^* x^* \text{ se } x^* \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \left(\hat{\lambda} \circ \lambda^*\right)(x^*) = \hat{\lambda^*}(x^*) \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

como também a pré-função $\lambda^*: IIQ^* \rightarrow IIQ^*$ por :

$$\lambda^* x^* = \left\{ \left(\lambda_0[p_0,q_0], \lambda_1[p_1,q_1], \ldots, \lambda_i[p_i,q_i], \ldots\right) \in \mathbf{I}Q^* \,|\, \left([p_0,q_0],[p1,q_1], \ldots, [p_i,q_i], \ldots\right) \in x^* \right\},$$

onde $\hat{\lambda}$ corresponde a função fecho em IIQ.

Assim, sejam a correspondente subteia $\mathbf{Q_i} = \left(IQ_i, \approx_{Q_i}\right)$ onde $\mathbf{Q_i} \subseteq \wp(Q_i)$, $IQ_i = \{[p,q] \in IQ \,|\, \alpha_{i-1} \leq p \leq q \leq \alpha_i\}$ e onde a relação de coerência, $\approx_{Q_i}$, é a relação de coerência, $\approx_Q$, herdada da correspondente teia de origem, mas restrita aos elementos do conjunto, $Q_i \subseteq Q$, que a gerou.

A partir destas subteias pode-se construir a teia:

$\mathbf{Q}^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{Q^*} \right) = \left(IQ_0 \times IQ_1 \times \ldots \times IQ_i, \approx_{Q^*} \right)$ e

cuja relação de coerência para todo $(X_0, X_1, \ldots, X_i), (Y_0, Y_1, \ldots, Y_i) \in \mathbf{Q}^*$, onde tem-se $X_i = [p_i, q_i]$, $Y_i = [p'_i, q'_i] \subseteq IQ$, é definida por:

$(X_0, X_1, \ldots, X_i) \approx_{Q^*} (Y_0, Y_1, \ldots, Y_i) \Leftrightarrow \exists X_i, Y_j \subseteq IQ$ tal que $X_i \approx_{\mathbf{Q}} Y_j$, isto é, $\exists X_i, Y_j \subseteq IQ$ tal quer $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$, $\forall i = 1(1)n$.

7.2.7 Proposição

Sejam a teia $\mathbf{I}Q^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$ e seu correspondente espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*} \right), \subseteq \right)$. A pré-função $\lambda^* : IIQ^* \to IIQ^*$ e a função objeto $\bar{\lambda}^* : IIQ^* \to IIQ^*$ são totais e bem definidas.

Prova;

Segue da proposição 7.1.12 . ♦

7.2.8 Proposição

Sejam a teia $\mathbf{I}Q^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$ e seu correspondente espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*} \right), \subseteq \right)$. A função objeto $\bar{\lambda}^* : IIQ^* \to IIQ^*$ definida por:

$$\bar{\lambda}^*(x^*) = \begin{cases} \lambda^* x^* \text{ se } x^* \notin quasitot(\hat{\mathbb{A}}); \\ (\hat{\lambda} \circ \lambda^*)(x^*) = \hat{\lambda}^*(x^*) \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

é monótona, contínua, estável e linear.

Prova:

Segue da proposição 7.1.13. ♦

E de forma análoga ao que foi construído anteriormente, pode-se definir um par projeção para $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*} \right), \subseteq \right)$.

7.2.9 Proposição

Sejam a teia $\mathbf{I}Q^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{\mathbf{A}_i} \right)$ e $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*} \right), \subseteq \right)$ o correspondente espaço coerente gerado. Existe sempre um par projeção para $\left(IIQ^{*}, IIQ^{*}\right)$, ou seja, para toda função objeto $\bar{\lambda}^{*}: IIQ^{*} \rightarrow IIQ^{*}$, existe sempre uma função $\bar{\hbar}^{*}: IIQ^{*} \rightarrow IIQ^{*}$, tais que, $\lambda^{*} \circ \hbar^{*} = id_{A^{*}}$ e $\left(\bar{\hbar}^{*} \circ \bar{\lambda}^{*}\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in \mathcal{B}^{*}$.

Prova:

Segue da proposição 4.3.12. ♦

7.3 Objetos Totais e Quasi-totais de *IIQ*

7.3.1 Representação dos reais como conjuntos coerentes enumeráveis

Estuda-se a seguir as funções objetos restritas aos objetos totais e quasi-totais do Espaço Coerente de Intervalos Racionais.

Segundo [DIM96a], conjunto dos objetos totais de *IIQ* é um corpo ordenado completo e constitui o corpo dos números reais. Estes objetos totais são os conjuntos coerentes de intervalos racionais que são maximais para a inclusão.

Alguns objetos totais são formados por intervalos racionais cuja interseção em *IQ* é um intervalo racional pontual, e irão constituir uma subfamília de objetos totais, a família de intervalos racionais ligados a um número racional, isomorfa ao corpo ordenado dos racionais.

7.3.2 Definição. Conjunto de intervalos racionais ligado a um número racional

Sejam Q o conjunto dos racionais e IQ o conjunto dos intervalos racionais. Para cada racional $r \in Q$ diz-se que $x_r = \{[p,q] \in IQ \mid p \leq r \leq q\}$ é o conjunto dos intervalos racionais ligados a *r*.

A família dos conjuntos de intervalos racionais ligados a *r* é denotada por X_Q, ou seja, $X_Q = \{x_r \mid r \in Q\}$.

Como os pontos desta família são objetos totais, dado $r \in Q$, x_r concentra toda informação sobre *r*, assim como todo subconjunto próprio $x \subseteq x_r$ é uma aproximação de x_r.

Existem entretanto objetos totais em *IIQ* que não pertencem a importante família X_Q, isto é, que não estão ligados a algum racional. O índice de tais conjuntos coerentes, que embora constituídos de intervalos racionais, não constituem um intervalo racional. Dimuro, definiu este índice como sendo o pré-intervalo racional vazio. Como exemplo, seja $\bar{x} = \{[p,q] \in IQ \mid (p \leq 0 \vee (p > 0 \wedge p^2 < 2)) \wedge (q > 0 \wedge q^2 > 2)\}$. Tem-se que $\bar{x} \in tot(IIQ)$ mas $\bar{x} \notin X_Q$, veja [DIM 96a].

7.3.3 Definição. Conjunto de intervalos racionais não-ligado a um número racional

Chama-se *IIQ* o Espaço Coerente de Intervalos Racionais. Define-se conjunto de intervalos racionais não-ligado a um número racional ao conjunto formado por todos os objetos totais de IIQ cujo índice não é um número racional ou um intervalo pontual racional.

A família dos conjuntos coerentes não-ligados a racionais , denotada por $X_{\bar{Q}}$, é dada pelo conjunto $X_{\bar{Q}}=\{x \in tot(IIQ) | i(x) \notin Q\}$.

Pode-se dizer que o conjunto $X_Q \subseteq tot(IIQ)$ está identificado com o conjunto dos números racionais Q, e da mesma forma que o conjunto $X_{\bar{Q}}=tot(IIQ)-X_Q$ está identificado com o conjunto dos números irracionais. As proposições demonstradas no primeiro capítulo para os objetos totais de um espaço coerente, 1.3.14, 1.3.15, e 1.3.16 como também 1.3.18, 1.3.19, e 1.3.20, são agora aplicadas em IIQ.

Analisa-se a seguir a função $\bar{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ restrita aos objetos totais de IIQ .

7.3.4 Corolário

Para todo $x \in tot(IIQ)$, $\bar{\lambda}(x) \in tot(IIQ)$.

Prova:

Este corolário é conseqüência imediata do teorema 2.1.7, bastando considerar o conjunto básico A' como sendo os racionais, α' um número racional e $\overline{\alpha'}$ um número irracional. ♦

7.3.5 Proposição

A função objeto restrita aos objetos totais , $\bar{\lambda}^*_{(tot)}$, é monótona, contínua, estável e linear.

Decorre das proposições 4.2.10, 3.3.12 e 3.3.13. ♦

Na construção proposta em [DIM 96b], cada número real está identificado por um conjunto coerente maximal de intervalos racionais, isto é, por um conjunto enumerável de intervalos racionais. Motivados pelos resultados alcançados, busca-se a generalização desta construção, no caso especial das funções elementares de reais, utilizando como estrutura as funções objetos lineares, que são os morfismos da categoria COSP-LIN dos Espaços Coerentes. Esta construção é importante, conforme se mostra no próximo capítulo, pois permite a utilização da Teoria dos Espaços Coerentes, no caso o Espaço Coerente de Intervalos Racionais, como fundamento para Análise Real.

8 Funções Elementares em *IIQ*

Apresenta-se agora a construção das funções de objetos em *IIQ* geradas a partir das funções elementares dos conjuntos básicos.

8.1 Função Exponencial

8.1.1 Definição. Função de objetos exponencial

Sejam os espaços coerentes $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e $IIQ_+\equiv(Cho(IQ_+,\approx),\subseteq)$ e a função exponencial nos racionais, $e':Q\rightarrow Q_+$. Define-se então:

(i) a função exponencial de tokens, ou seja, $e:IQ\rightarrow IQ_+$, por:

$$[e^p,e^q]=\begin{cases}[e^p,e^q] & \text{se } e^p,e^q\in Q_+,\\ [\ ], & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

(ii) a pré-função exponencial $\overline{e}: IIQ\rightarrow IIQ_+$, por:

$$\overline{e}^x=\{[e^p,e^q]\in IQ_+[p,q]\in x\}$$

(iii) a função de objetos exponencial, $\overline{\overline{e}}: IIQ\rightarrow IIQ_+$, por :

$$\overline{\overline{e}}^{\,x}=\begin{cases}\overline{e}^x=\{[e^p,e^q]\in IIQ_{pos}\mid [\mathrm{p,q}]\in x\} & \text{se } x\notin quasitot(IIQ);\\ \hat{\overline{e}}^x, & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

$\hat{\overline{e}}^x$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\overline{e}$.

Como a função logarítmica é também estritamente crescente na base *e*, pode-se então definir a função logarítmica em *IIQ* de forma análoga.

8.2 Função Logarítmica

Sejam os espaços coerentes $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e $IIQ_+\equiv(Cho(IQ_+,\approx),\subseteq)$ e a função logarítmica nos racionais, $\ln':Q_+\rightarrow Q$. Define-se então:

(i) a função logarítmica em *IQ*, ou seja, $\ln:IQ_+\rightarrow IQ$, por:

$$\ln[\mathrm{p,q}]=\begin{cases}[\ln(p),\ln(q)] & \text{se } ln(\mathrm{p}),\ln(q)\in Q;\\ [\ ], & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

(ii) a pré-função logarítmica $\overline{\ln}: IIQ_+\rightarrow IIQ$, por:

$$\overline{\ln}(\mathrm{x})=\{[\ln(p),\ln(q)][p,q]\in x\}$$

(iii) a função logarítmica de objetos, $\overline{\overline{\ln}}: IIQ_{pos}\rightarrow IIQ$, por :

$$\overline{\overline{\ln}}(x)=\begin{cases}\overline{\ln}(x)=\{[\ln(p),\ln(q)]\in IIQ \mid [p,q]\in x\} & \text{se } x\notin quasitot(IIQ);\\ \overset{\wedge}{\overline{\ln}}(x), & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

onde $\overset{\wedge}{\overline{\ln}}(x)$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\overline{\ln}$.

8.2.1 Proposição

Sejam $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e $IIQ_+\equiv(Cho(IQ_+,\approx),\subseteq)$ os espaços coerentes onde a função exponencial $\overline{\overline{e}}: IIQ\rightarrow IIQ_+$, e a função logarítmica $\overline{\overline{\ln}}: IIQ_+\rightarrow IIQ$, estão definidas. A função de objetos $\overline{\overline{\lambda}}\in\{\overline{\overline{\ln}},\overline{\overline{e}}\}$ é total e bem definida.

Prova;
Segundo o corolário 7.2.1 e a proposição 7.2.2 as funções exponencial e logarítmica de objetos estão bem definidas e são funções totais em IIQ. ♦

8.2.2 Proposição

Sejam $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e $IIQ_+\equiv(Cho(IQ_+,\approx),\subseteq)$ os espaços coerentes onde a função exponencial $\overline{\overline{e}}: IIQ\rightarrow IIQ_+$, e a função logarítmica $\overline{\overline{\ln}}: IIQ_+\rightarrow IIQ$, estão definidas. A função de objetos $\overline{\overline{\lambda}}\in\{\overline{\overline{\ln}},\overline{\overline{e}}\}$ é monótona, contínua, estável e linear.

Prova:
Como as correspondentes funções básicas são injetoras em Q, tanto a função exponencial como a função logarítmica são monótonas, contínuas, estáveis e lineares no sentido da definição 3.3.1, segundo a proposição 7.2.3. ♦

8.2.3 Proposição

Sejam os espaços coerentes $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e $IIQ_+\equiv(Cho(IQ_+,\approx),\subseteq)$. A função de objetos $\overline{\overline{\lambda}}\in\{\overline{\overline{\ln}},\overline{\overline{e}}\}$, a pré-função $\overline{\lambda}\in\{\overline{\ln},\overline{e}\}$ e a função token $\lambda\in\{e,\ln\}$ não são injetoras.

Prova:
Como a função básica $\lambda': Q\rightarrow Q$ é parcial, pela proposições 5.2.3 , 5.2.4 e 5.2.9 a função de objetos $\overline{\overline{\lambda}}\in\{\overline{\overline{\ln}},\overline{\overline{e}}\}$, a pré-função $\overline{\lambda}\in\{\overline{\ln},\overline{e}\}$, assim como a função token $\lambda\in\{e,\ln\}$ não são injetoras. ♦

Por definição uma função parcial $\lambda{::}Q\xrightarrow{p}Q$ é uma operação que a cada elemento de Q pode ou não associar um elemento em Q. Assim, a seguir apresenta-se alguns exemplos triviais em que esta associação não ocorre:

$[0,1]\in IQ$ mas $e^{[0,1]}=[\ ]$ em IQ, pois $e\notin Q$;

$[1,2]\in IQ$ mas $\ln[1,2]=[\ ]$ em IQ, pois $\ln 2\notin Q$.

Em [NIV 15], mostra-se que o número e é transcendente, portanto irracional. O mesmo se prova para a função logarítmica, e em especial com base e. Portanto, ao se tomar intervalos cujos extremos racionais são tais que a função λ' não está definida, certamente sua imagem correspondente será indefinida em Q. Isto ocorre porque tanto a função exponencial quanto a função logarítmica, neste conjunto, não possuem a propriedade de fechamento, em Q.

8.2.4 Corolário

As funções $(\overline{\overline{e}},\overline{\overline{\ln}})$ formam um par projeção para (IIQ,IIQ_+), onde $\overline{\overline{\ln}}\circ\overline{\overline{e}}=id_{IIQ}$ e $\left(\overline{\overline{e}}\circ\overline{\overline{\ln}}\right)(y)\subseteq y, \forall y\in IIQ_+$.

Prova:

Como a função básica e' corresponde a inversa da função básica $\ln'$, pela proposição 5.4.4 tem-se que as funções de objetos $\overline{\overline{\ln}}: IIQ_+\to IIQ$ e $\overline{\overline{e}}: IIQ\to IIQ_+$ formam um par projeção para (IIQ,IIQ_+). ♦

8.3 Função Potência

Apresenta-se a definição da função de tokens de duas formas distintas, segundo [DIM 91], e por conseqüência, as correspondentes função de objetos e pré-função, também podem ser definidas de duas formas distintas, entretanto ambas definições baseiam-se na função potência nos racionais.

8.3.1 Definição. Função potência

Sejam $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e a função básica potência, $(\ )^n: Q\to Q$, definida nos racionais. Define-se então:

(i) a função potência em IQ, ou seja, $pot: IQ\to IQ$, por:

$$[p,q]^n=\begin{cases}[1,1] \text{ se n=0;}\\ \underbrace{[p,q]*[p,q]*\ldots*[p,q]}_{n\ vezes}=[p^n,q^n] \text{ se n}\geq 1\text{; e}\\ [\ ] \text{ se } [p,q]=[\ ].\end{cases}$$

(ii)a pré-função potência $\overline{(\ )^n}: IIQ\to IIQ$, por $\overline{(x)}^n=\left\{([p,q])^n [p,q]\in x\right\}$.

(iii)a função potência de objetos, $\overline{\overline{(\ )^n}}: IIQ\to IIQ$, por :

$$\overline{\overline{(x)^n}}=\begin{cases}\overline{(x)^n}=\left\{([p,q])^n\in IIQ \mid [p,q]\in x\right\} \text{ se } x\notin quasitot(IIQ);\\ \overline{\widehat{(x^n)}} \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

onde a operação "$*$" é a multiplicação em IQ, descrita em [DIM 91].

8.3.2 Definição. Função potência estendida

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ e a função básica potência, $(\ )^n : Q \to Q$, definida nos racionais. Define-se então:

(i)a função potência em IQ, ou seja, $pot: IQ \to IQ$, por:

$$pot([p,q]) = \begin{cases} [p^n, q^n] & \text{se } p>0 \text{ ou n é ímpar;} \\ [q^n, p^n] & \text{se } q<0 \text{ e n é par;} \\ [0, |[p,q]|^n] & \text{se } 0 \in [p,q] \text{ e n é par;} \\ [\ ] & \text{se } [p,q] = [\ ]. \end{cases}$$

(ii)a pré-função $\overline{\text{pot}} : IIQ \to IIQ$, por:

$$\overline{\text{pot}}(x) = (x)^n = \{([p,q])^n \, [p,q] \in x\}$$

(iii)a função de objetos potência, $\overline{\overline{\text{pot}}} : IIQ \to IIQ$, por :

$$\overline{\overline{pot}}(x) = \begin{cases} \overline{pot}(x) = \{([p,q])^n \in IIQ \mid [p,q] \in x\} & \text{se } x \notin quasitot(IIQ); \\ \hat{\overline{pot}}(x), & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\overline{pot}}(x)$ corresponde ao fecho indexado da pré-função $\overline{pot}(x)$.

8.3.3 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e $x \in IIQ$. A função potência(estendida) em IIQ, $\overline{\overline{\text{pot}}} : IIQ \to IIQ$, a pré-função $\overline{\text{pot}} : IIQ \to IIQ$ e a função de tokens $pot: IQ \to IQ$, são funções bem definidas e totais.

Prova:

É imediata, pelo corolário 6.2.3 e as proposições 6.2.4 e 6.2.5. ♦

8.3.4 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. Então $IIQ_{\varnothing} = \{x \in IIQ \mid \overline{\lambda} x = \varnothing\} = \{\varnothing\}$, onde $\overline{\lambda} : IIQ \to IIQ$ é a função potência (estendida) em IIQ.

Como a potenciação é fechada em Q, tem-se que $\forall \alpha \in Q, \lambda'(\alpha) = \alpha^n \in Q$ com $n \in IN$, logo pela proposição 3.1.8 tem-se que $IIQ_{\varnothing} = \{x \in IIQ \mid \overline{\lambda} x = \varnothing\} = \{\varnothing\}$. ♦

8.3.5 Proposição

Seja $Q \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função $\overline{pot} : IIQ \to IIQ$ dada por $\overline{\text{pot}}(x) = (x)^n = \{([p,q])^n \, [p,q] \in x\}$ é uma pré-função monótona e contínua entretanto não é estável e nem linear se n é par.

Prova:

Como a potenciação não é injetora em Q,. tem-se que a correspondente pré-função de objetos em IIQ, não é estável pela proposição 6.3.11, portanto não é também linear pela proposição 6.3.14, apesar de verificar a condição de linearidade conforme proposição 6.3.13. As proposições 6.3.9 e 6.3.10 asseguram que a função potência $\lambda : IIQ \rightarrow IIQ$ é monótona e linear. ♦

8.3.6 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função de objetos $\overline{\overline{pot}} : IIQ \rightarrow IIQ$ é função monótona e contínua entretanto não é estável e nem linear se n é par.

Prova:

Decorre da proposição anterior, 8.3.5 e da proposição 6.1.8, pois a função básica em Q não é injetora se n é par. ♦

8.3.7 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função de objetos $\overline{\overline{pot}} : IIQ \rightarrow IIQ$ é localmente linear.

Prova:

Se n é impar, pelas proposições anteriores $\overline{\overline{pot}} : IIQ \rightarrow IIQ$ é linear, logo é localmente linear. Para $\forall n$ par, quando $\alpha = 0 \in Q$ a função básica nos racionais assume um máximo ou mínimo, logo tem-se $Q = Q_- \cup Q_+$, onde, conforme definição 6.1.1, pode-se afirmar que a função de objetos potência é localmente linear. Admite portanto uma representação linear no espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right), \subseteq\right)$, construído a partir do produto das subteias, $\mathbf{Q}^* \equiv \left(Q_- \Pi Q_+, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right)$, de acordo com a proposição 4.2.10 e 6.2.7. ♦

Observa-se que, para a função potência estendida de objetos, tem-se:

a) $x \in IIQ^* \Rightarrow x = \{([p,0],[0,q]) \in \mathbf{Q}^*\}$ e

$$\text{b) } (x)^n \in IIQ^* \Rightarrow (x)^n = \begin{cases} \{([p^n,0],[0,q^n]) \in \mathbf{Q}^*\} & \text{se n impar;} \\ \{([0,p^n],[0,q^n]) \in \mathbf{Q}^*\} & \text{se n par.} \end{cases}$$

8.3.8 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A pré-função $\overline{pot}$: $IIQ \rightarrow IIQ$ é uma função monótona, contínua, estável e linear se n é ímpar.

Prova:

Como a função básica é injetora tem-se que, pela proposição 6.1.8

$\overline{pot}: IIQ \to IIQ$ é uma função monótona, contínua, estável e linear se n é ímpar. ♦

8.3.9 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função de objetos $\overline{\overline{pot}}: IIQ \to IIQ$ é função monótona, contínua, estável e linear se n é ímpar.

Prova:

Decorre da proposição 6.1.8, pois a função básica nos racionais é injetora quando n é ímpar.

Neste caso sua representação linear em $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{Q^*}\right), \subseteq\right)$ coincide com sua definição em IIQ. ♦

8.4 Função Raiz N-ésima

8.4.1 Definição.

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e considerando-se primeiramente o caso em que n é par, seja a função básica $\lambda': Q_+ \to Q$, definida por $\lambda'(\alpha) = \sqrt[n]{\alpha} = \{\beta \in Q \mid \beta^n = \alpha\}$. Define-se :

(i) função raiz n-ésima de tokens por:

$$\lambda: IQ_+ \to IQ,\ \sqrt[n]{[p,q]} = \begin{cases} \left[\sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{q}\right], & \text{se } \sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{q} \in Q; \\ [\ ], & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(ii) a pré-função raiz n-ésima, como:

$$\overline{\sqrt[n]{\lambda}}: IIQ_+ \to IIQ,\ \overline{\lambda}(x) = \overline{\sqrt[n]{x}} = \left\{\sqrt[n]{[p,q]} \mid [p,q] \in x\right\}.$$

(iii) a função de objetos raiz n-ésima, $\overline{\overline{\lambda}}: IIQ_{pos} \to IIQ$, por:

$$\overline{\overline{\lambda}}(x) = \overline{\overline{\sqrt[n]{(x)}}} = \begin{cases} \overline{\sqrt[n]{x}} = \left\{\sqrt[n]{[p,q]}^{\,n} \in IQ \mid [p,q] \in x\right\} & \text{se } x \notin quasitot(IIQ); \\ \widehat{\left(\overline{\sqrt[n]{x}}\right)}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

E sendo n é ímpar, a partir da função básica $\lambda': Q \to Q$ definida por $\lambda'(\alpha) = \sqrt[n]{\alpha} = \{\beta \in Q \mid \beta^n = \alpha\}$, tem-se que :

(i) a função de tokens raiz n-ésima, $\lambda: IQ \to IQ$ é definida por:

$$\sqrt[n]{[p,q]} = \begin{cases} \left[\sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{q}\right], & \text{se } \sqrt[n]{p}, \sqrt[n]{q} \in Q \\ [\ ], & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(ii) a pré-função raiz n-ésima, $\overline{\sqrt[n]{\lambda}}: IIQ \to IIQ$, é definida por:

$$\overline{\sqrt[n]{x}} = \left\{\sqrt[n]{[p,q]} \mid [p,q] \in x\right\};\ \text{e}$$

(iii) a função de objetos raiz n-ésima, $\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ \rightarrow IIQ$, por:

$$\overline{\overline{\sqrt[n]{(x)}}}=\begin{cases}\overline{\sqrt[n]{x}}=\left\{\sqrt[n]{[p,q]}^{n}\in IQ \,\middle|\, [\mathrm{p,q}]\in x\right\} & \text{se } x\notin quasitot(IIQ);\\ \widehat{\left(\overline{\sqrt[n]{x}}\right)} & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

onde, em ambas definições, tem-se que $\widehat{\left(\overline{\sqrt[n]{x}}\right)}$ é o fecho indexado da imagem da pré-função $\overline{\sqrt[n]{x}}$.

8.4.2 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e $x \in IIQ$. A função de objetos raiz n-ésima em IIQ, $\overline{\overline{\sqrt[n]{\mathrm{x}}}}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ_{pos} \rightarrow IIQ\right)$, a pré-função $\overline{\sqrt[n]{\mathrm{x}}}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ_{pos} \rightarrow IIQ\right)$ e a função de tokens $\sqrt[n]{x}: IQ \rightarrow IQ$ $\left(\sqrt[n]{\ }: IQ_{pos} \rightarrow IQ\right)$, estão bem definidas e são totais em seus respectivos domínios de definição.

Prova:

É imediata, pelo corolário 6.2.3 e as proposições 6.2.4 e 6.2.5. ♦

8.4.3 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função de objetos $\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ_{+} \rightarrow IIQ\right)$, a pré-função $\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ_{+} \rightarrow IIQ\right)$ e a função de tokens $\sqrt[n]{\ }: IQ \rightarrow IQ$ $\left(\sqrt[n]{\ }: IQ_{+} \rightarrow IQ\right)$ não são injetoras em seus correspondentes domínios de definição .

Prova:

Como a função básica $\sqrt[n]{\ }: Q \rightarrow Q$ é parcial, pela proposições 5.2.3 , 5.2.4 e 5.2.9 a função de objetos $\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ_{+} \rightarrow IIQ\right)$, a pré-função $\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ \rightarrow IIQ$ $\left(\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ_{+s} \rightarrow IIQ\right)$, assim como a função token $\sqrt[n]{\ }: IQ \rightarrow IQ$ $\left(\sqrt[n]{\ }: IQ_{+} \rightarrow IQ\right)$ não são injetoras. ♦

Assim, como a radiciação não é fechada nos racionais, a função raiz n-ésima restrita a Q_{pos} é também, por este motivo, uma função parcial em Q e consequentemente tem-se que as correspondentes funções de objetos e de tokens em IQ e IIQ, respectivamente, não são injetoras. Por exemplo:

$[1,3],[2,5] \in IQ$ mas $\sqrt[3]{[1,3]} = [\ ] = \sqrt[3]{[2,5]}$ em IQ, pois $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5} \notin Q$.

8.4.4 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função de objetos $\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ \to IIQ$ $\left(\overline{\overline{\sqrt[n]{\ }}}: IIQ_+ \to IIQ\right)$, a pré-função $\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ \to IIQ$ $\left(\overline{\sqrt[n]{\ }}: IIQ_+ \to IIQ\right)$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

Decorre da injetividade da função básica, $\sqrt[n]{\ }: Q \to Q$ $\left(\sqrt[n]{\ }: Q_+ \to Q\right)$, definida por $\sqrt[n]{\alpha} = \{\beta \in Q \mid \beta^n = \alpha\}$, e pela proposição 7.2.5. ♦

Portanto, sua representação linear no espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{Q^*}\right), \subseteq\right)$, construído a partir da teia produto $\mathbf{Q}^* \equiv \left(Q_- \Pi Q_+, \approx_{Q^*}\right)$, coincide com sua representação (localmente) linear no espaço coerente $\Pi Q \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, constituído pela coleção de subconjuntos coerentes da teia $(IQ,\approx)$ ordenados pela inclusão.

Em particular, para $n = 2$, pode-se definir a função raiz quadrada em IIQ_+.

8.4.5 Definição. Função raiz quadrada

Seja $IIQ_+ \equiv (Coh(IQ_+,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais. A função raiz quadrada $\overline{\overline{\sqrt{\ }}}: IIQ_+ \to IIQ_+$ é definida por:

$$\overline{\overline{\sqrt{(x)}}} = \begin{cases} \overline{\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{[p,q]}^{\,n} \in IQ \mid [p,q] \in x \right\} & \text{se } x \notin quasitot(\mathbb{A}); \\ \widehat{\left(\sqrt{x}\right)}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\sqrt{[p,q]}$ é a imagem da função raiz quadrada em IQ, $\sqrt{\ }: IQ_+ \to IQ$, definida por $\sqrt{[p,q]} = [\sqrt{p}, \sqrt{q}]$ sempre que $\min_{\alpha \in [p,q]} \sqrt{\alpha} = \sqrt{p}$, $\max_{\alpha \in [p,q]} \sqrt{\alpha} = \sqrt{q} \in Q$, ou seja, sejam elementos da imagem da função básica correspondente $\lambda': Q_+ \to Q$ onde tem-se que $\sqrt{\alpha} = \{\beta \in Q \mid \beta^2 = \alpha\}$.

8.4.6 Corolário

As funções potência n-ésima e raiz n-ésima definidas acima formam um par projeção para (IIQ^*, IIQ^*).

Prova:

Prova-se ao aplicar definição 7.2.9, pois a função raiz n-ésima é inversa da função potência n-ésima em Q.

A seguir apresenta-se a definição das funções trigonométricas e de suas inversas, em IIQ, bem como a análise de suas propriedades, da mesma for que foi feito o estudo das funções transcendentes, ou seja, exponencial e logarítmica. ♦

8.5 Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas em IIQ são definidas a seguir:

8.5.1 Definição. Funções Trigonométricas

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e $\lambda': Q \to Q$, $\lambda' \in \{\text{sen}', \cos', \tan'\}$ a função trigonométrica definida nos racionais . A partir da definição 7.2.2, define-se:

(i) $\lambda: IQ \to IQ$, tal que $\lambda \in \{\text{sen}, \cos, \tan\}$, como a correspondente função trigonométrica nos tokens da teia $(IQ,\approx)$, isto é:

$$\lambda[p,q] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \,,\ \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \right] & \text{se } \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha,\ \min\limits_{\alpha \in [p,q]} \lambda'\alpha \in Q, \\ [\ ], & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(ii) $\tilde{\lambda}: IIQ \to IIQ$, com $\tilde{\lambda} \in \{\overline{\text{sen}}, \overline{\cos}, \overline{\tan}\}$, como a pré-função trigonométrica sobre os objetos do espaço coerente $Coh(IQ,\approx)$,onde :

$$\tilde{\lambda}(x) = \{\lambda[p,q] \,|\, [p,q] \in x\},$$

(iii) $\overline{\tilde{\lambda}}: IIQ \to IIQ$, com $\overline{\tilde{\lambda}} \in \{\overline{\overline{\text{sen}}}, \overline{\overline{\cos}}, \overline{\overline{\tan}}\}$, como a função de objetos trigonométrica sobre os objetos do espaço coerente $Coh(IQ,\approx)$, sendo:

$$\overline{\tilde{\lambda}}(x) = \begin{cases} \tilde{\lambda}x = \{\lambda[p,q] \in IIQ \mid [p,q] \in x\} & \text{se } x \notin quasitot(\mathcal{A}); \\ \widehat{\tilde{\lambda}x}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

e onde $\widehat{\tilde{\lambda}x} = \bigcup \{d \in IIQ \,|\, i(\tilde{\lambda}x) = i(d) \wedge \tilde{\lambda}x \subseteq d\}$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\tilde{\lambda}$.

8.5.2 Corolário

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e $x,y \in IIQ$. As pré-funções trigonométricas em IIQ podem ser calculadas explicitamente como:

(i) seno: $\overline{\text{sen}}\,x = \{\text{sen}[p,q] \in IQ \,|\, [p,q] \in x\} = \left\{ \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \text{sen}'\alpha, \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \text{sen}'\alpha \right] \middle| [p,q] \in x \right\}$;

(ii) coseno: $\overline{\cos}\,x = \{\cos[p,q] \in IQ \,|\, [p,q] \in x\} = \left\{ \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \cos'\alpha, \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \cos'\alpha \right] \middle| [p,q] \in x \right\}$;

(iii) tangente: se $\{90^\circ \pm 180^\circ \kappa\}_{\kappa \in Z} \not\subset [p,q]$ para todo $[p,q] \in x$,

$$\overline{\tan}\,x = \{\tan[p,q] \in IQ \,|\, [p,q] \in x\} = \left\{ \left[\min\limits_{\alpha \in [p,q]} \tan'\alpha, \max\limits_{\alpha \in [p,q]} \tan'\alpha \right] \middle| [p,q] \in x \right\}.$$

Prova:

Segue imediatamente da definição 6.2.2. ♦

8.5.3 Corolário

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, $\bar{\lambda} \in \{\overline{\overline{\mathrm{sen}}},\overline{\overline{\mathrm{cos}}},\overline{\overline{\mathrm{tan}}}\}$ uma função de objetos trigonométrica em IIQ, $\text{ƛ} \in \{\overline{\mathrm{sen}},\overline{\mathrm{cos}},\overline{\mathrm{tan}}\}$ uma pré-função trigonométrica em IIQ e $\lambda \in \{\mathrm{sen},\mathrm{cos},\mathrm{tan}\}$ uma função trigonométrica em IQ. Assim, se $[p,q] \in x$, então $\lambda[p,q] \in \text{ƛ}x$, como também $\lambda[p,q] \in \bar{\lambda}x$.

Prova:

Segue imediatamente do corolário 7.1.3 e 7.1.4. ♦

8.5.4 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e a função trigonométrica $\bar{\lambda} \in \{\overline{\overline{\mathrm{sen}}},\overline{\overline{\mathrm{cos}}},\overline{\overline{\mathrm{tan}}}\}$. Se $x \in IIQ$ então $\text{ƛ}x \in IIQ$ como também $\bar{\lambda}x \in IIQ$.

Prova:

Segue imediatamente proposição 7.2.1 e 7.2.2.

Estes dois últimos resultados mostram que a pré-função trigonométrica ƛ em IIQ e a função trigonométrica $\bar{\lambda}$ em IIQ estão bem definidas. ♦

8.5.5 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\lambda \in \{\mathrm{sen},\mathrm{cos},\mathrm{tan}\}$ uma função trigonométrica em IQ, $\text{ƛ} \in \{\overline{\mathrm{sen}},\overline{\mathrm{cos}},\overline{\mathrm{tan}}\}$ uma pré-função trigonométrica e $\bar{\lambda} \in \{\overline{\overline{\mathrm{sen}}},\overline{\overline{\mathrm{cos}}},\overline{\overline{\mathrm{tan}}}\}$ uma função de objetos trigonométrica, ambas definidas em IIQ. Então a função de tokens λ em IQ, a pré-função ƛ e a função de objetos $\bar{\lambda}$ em IIQ são totais.

Prova: Decorre imediatamente das proposições 7.1.1. ♦

8.5.6 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\bar{\lambda} \in \{\overline{\overline{\mathrm{sen}}},\overline{\overline{\mathrm{cos}}},\overline{\overline{\mathrm{tan}}}\}$ uma função de objetos trigonométrica e $\text{ƛ} \in \{\overline{\mathrm{sen}},\overline{\mathrm{cos}},\overline{\mathrm{tan}}\}$ uma pré-função trigonométrica ambas definidas em IIQ, como também $\lambda \in \{\mathrm{sen},\mathrm{cos},\mathrm{tan}\}$ uma função trigonométrica em IQ. Assim, tem-se que $\bar{\lambda}, \text{ƛ}$ e λ não são injetoras em todo seu domínio de definição.

Prova:

Como a função básica $\lambda': Q \to Q$ é parcial e não injetora, logo pelas proposições 5.2.3, 5.2.4, 5.2.9 suas correspondentes funções de tokens e de objetos não são injetoras.

Apresenta-se alguns exemplos triviais em que isto ocorre:

$$\begin{cases} [0^\circ,45^\circ] \in IQ \text{ mas sen}[0^\circ,45^\circ] = [\ ] \text{ em IQ, pois } \max_{\alpha \in [0^\circ,45^\circ]} \text{sen}'\alpha \notin Q, \\ [0^\circ,30^\circ] \in IQ \text{ mas cos}[0^\circ,30^\circ] = [\ ] \text{ em IQ, pois } \max_{\alpha \in [0^\circ,30^\circ]} \cos'\alpha \notin Q, \\ [0^\circ,60^\circ] \in IQ \text{ mas tan}[0^\circ,60^\circ] = [\ ] \text{ em IQ, pois } \max_{\alpha \in [0^\circ,60^\circ]} \tan'\alpha \notin Q. \end{cases}$$

logo $\text{sen}[0°,45°] = \cos[0°,30°] = \tan[0°,60°]$ e portanto λ não é injetora. ♦

Em [NIV 82], mostra-se que, com algumas poucas e óbvias exceções, as funções trigonométricas de qualquer arco α igual a um número inteiro de graus, minutos e segundos são irracionais. Portanto com respectiva imagem $\lambda'(\alpha)$ indefinida em Q. E estas exceções aparecem no caso de $0°,30°,45°,60°$ e para todos os ângulos obtidos a partir destes pela adição ou subtração de múltiplos inteiros de $90°$. Isto não quer dizer que todas as funções trigonométricas de $30°$, por exemplo, sejam racionais, mas que pelo menos uma é racional.

Portanto, ao se tomar intervalos de racionais que contém alguns destes arcos, e nos quais a função λ' assume valor máximo ou mínimo, certamente a imagem correspondente será igual, para todos estes casos, ao intervalo vazio, $[\ ]$.

Além disso, correspondente função básica não é injetora em Q, nem tampouco é total. Generalizando está exemplificação tem-se que:

- se $\lambda = \tan$, então $\forall[p,q] \in IQ,\ 0° \le p,q \le 90°,\ \exists[p+180°,q+180°] \in IQ$ onde
$$\tan[p,q] = \tan[p+180°,q+180°];$$
- se $\lambda \in \{\text{sen},\cos\}$ tem-se que $\forall[p,q] \in IQ,\ 0° \le p,q \le 90°$, $\exists\ [p+360°,q+360°]$, $[90°-p,90°-q]$ e $[360°-p,360°-q] \in IQ$ onde
$$\text{sen}[p,q] = \text{sen}[p+360°,q+360°] = [90°-p,90°-q], \text{ e}$$
$$\cos[p,q] = \cos[p+360°,q+360°] = \cos[360°-p,360°-q].$$

8.5.7 Lema

Seja $[p,q] = \{r \in Q | p \le r \le q\} \in IQ$ e $\lambda \in \{\text{sen},\cos,\tan\}$ uma função trigonométrica em IQ. Então a função λ só é monótona se $\lambda = \tan$. Caso contrário, para $\lambda = \{\text{sen},\cos\}$, a monotonicidade não é satisfeita.

Prova:

Considere-se a relação de ordem parcial "$\le$ " em IQ e suponha-se que $\lambda = \tan$, deve-se mostrar que λé monótona. De fato, $\forall[p,q],[p',q'] \in IQ$ se $[p,q] \le_{IQ} [p',q']$ então pela relação de ordem em IQ tem-se que $p \le_Q q \le_Q p' \le_Q q'$. Como a tangente é monótona em Q e definida para todo racional diferente de $(90° \pm 180°\kappa)_{\kappa \in Z}$, conclui-se $\tan' p \le_Q \tan' q \le_Q \tan' p' \le_Q \tan' q'$, $[\tan' p, \tan' q] \le_{IQ} [\tan' p', \tan' q']$, ou de outra forma, $\left[\min_{\alpha \in [p,q]} \tan'\alpha, \max_{\alpha \in [p,q]} \tan'\alpha\right] \le_{IQ} \left[\min_{\alpha \in [p',q']} \tan'\alpha, \max_{\alpha \in [p',q']} \tan'\alpha\right]$. Assim $\tan[p,q] \le_{IQ} \tan[p',q']$.

Entretanto, para λ=seno tem-se que, $\forall p,q \in Q$ tal que $45° < p' \le q' < 60°$, $\sqrt{2}/2 < \underset{\alpha \in [p,q]}{\text{sen}'\alpha} < \sqrt{3}/2$ e então $\min_{\alpha \in [p,q]} \text{sen}'\alpha > \sqrt{2}/2$. Da mesma forma $\forall p',q' \in Q$ tal que $0 < p' \leq q' < 30^\circ$, $0 < \underset{\alpha \in [p,q]}{\text{sen}'\alpha} < 1/2$ e então $\underset{\alpha \in [p',q']}{max}\ \text{sen}'\alpha < 1/2$. Assim, pela relação de ordem em IQ tem-se que $\text{sen}[p,q] \geq \text{sen}[p',q']$ embora $[p,q] \leq [p',q']$. Da mesma forma se pode mostrar para $\lambda = \cos$. ♦

8.5.8 Proposição

Seja $[p,q] = \{r \in Q | p \leq r \leq q\} \in IQ$ e $\lambda = \tan$ a função trigonométrica tangente em IQ. Então a função λ é definida por:

$$\tan[p,q] = \begin{cases} [\tan'\text{p}, \tan'\text{q}] & \text{se } \tan'\text{p},\ \tan'\text{q} \in Q \text{, e} \\ \varnothing, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Prova: Decorre da proposição 7.1.4 e do lema anterior, pois a função básica tangente é estritamente crescente. ♦

8.5.9 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$ $\overline{\lambda} \in \{\overline{\overline{\text{sen}}}, \overline{\overline{\cos}}, \overline{\overline{\tan}}\}$ uma função de objetos trigonométrica e $\lambda \in \{\overline{\text{sen}}, \overline{\cos}, \overline{\tan}\}$ uma pré-função trigonométrica, ambas definidas em IIQ. A pré-função λ e a função de objetos $\overline{\lambda}$ são monótonas e contínuas, entretanto não são estáveis e nem lineares em IIQ.

Prova:

Pela proposição 7.2.3, a pré-função λ é monótona e contínua em IIQ. Pela mesma proposição observa-se que função de objetos $\overline{\lambda}$ também é monótona e contínua em IIQ mas como $\lambda{:}':Q \to Q$ não é injetora, a pré-função λ e a função trigonométrica $\overline{\lambda}$, não são estáveis e nem lineares.

Esta proposição mostra que a estabilidade da função de objetos não se verifica se a função básica não é injetora. Ou seja, $\exists x, y \in IIQ$ tais que $\lambda(x \cap y) \neq \lambda x \cap \lambda y$. Como exemplo, sejam $x = \{[p,q],[r,s]\}, y = \{[p+360^\circ, q+360^\circ],[u,v]\}$ onde $p,q,r,s \in Q$ e tais que $x \cap y = \varnothing$. Então para $\lambda = \text{sen}$, se $\text{sen}[p,q] \in IQ$ e $\text{sen}[p,q] \neq \varnothing$ tem-se que:

$$\overline{\text{sen}}(x \cap y) = \varnothing \neq \overline{\text{sen}}x \cap \overline{\text{sen}}y = \{\text{sen}[p,q]\}.$$

Portanto não é linear, embora verifique a condição de linearidade, conforme proposições 5.3.12 e 5.3.14. ♦

8.5.10 Proposição

Seja $IIQ \equiv (Coh(IQ, \approx), \subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, a função de objetos $\overline{\lambda}: IIQ \to IIQ$, $\overline{\lambda} \in \{\overline{\overline{\text{sen}}}, \overline{\overline{\cos}}, \overline{\overline{\tan}}\}$ é uma função trigonométrica localmente linear.

Prova:

Seja a função $\overline{\lambda}: IIQ \to IIQ$ onde $\overline{\lambda} = \overline{\overline{\text{sen}}}$ e sejam os subconjuntos $Q_i' = \{\alpha \in Q |\ -90^\circ + 180^\circ i \leq \alpha \leq 90^\circ + 180^\circ i, \forall i \in Z\} \subseteq Q$, tais que $\bigcup Q_i' = Q$ e

$\lambda'[Q_i]=[-1,1]$. Observa-se que $\bigcap Q_i=\{90^\circ+180^\circ i | i\in Z\}$ coincide com os pontos de máximo e mínimos em que a função $\lambda'=\text{sen}'$ assume em Q. Logo pela definição 6.1.2, $\overline{\lambda}=\overline{\overline{\text{sen}}}$ é localmente linear.

Seja a função $\overline{\lambda}:IIQ\to IIQ$ onde $\overline{\lambda}=\overline{\overline{\cos}}$. Sejam os subconjuntos $Q_i'=\{\alpha\in Q|\ 0^\circ+180^\circ i\le\alpha\le 180^\circ(1+i), \forall i\in Z\}\subseteq Q$, tais que $\bigcup Q_i'=Q$ e $\lambda'[Q_i]=[-1,1]$. Observa-se que $\bigcap Q_i=\{\alpha\in Q|180^\circ i, \forall i\in Z\}$ coincide com os pontos de máximo e mínimos em que a pré-função $\lambda'=\cos'$ assume em Q. Logo pela definição 6.1.2, $\overline{\lambda}=\overline{\overline{\cos}}$ é localmente linear.

Seja a função $\overline{\lambda}:IIQ\to IIQ$ onde $\overline{\lambda}=\overline{\overline{\tan}}$. Considerando-se $Q_i'=\{\alpha\in Q|\ -90^\circ+180^\circ i<\alpha<90^\circ+180^\circ i, \forall i\in Z\}\subseteq Q$ como os subconjuntos de racionais tais que $\bigcup Q_i'=\{\alpha\in Q\ |\ \alpha\neq 90^\circ+180^\circ i, \forall i\in Z\}$, ou seja, coincide com o domínio de definição da função $\lambda'=\tan'$ e cuja imagem coincide com os racionais, $\lambda'[Q_i']=Q$. Observa-se que $\{\alpha\in Q|\alpha=90^\circ+180^\circ i, \forall i\in Z\}$ é o conjunto dos pontos em que a função é descontínua em Q, logo são pontos indefinidos. Pela definição 6.1.2, $\overline{\lambda}=\overline{\overline{\tan}}$ é localmente linear. ♦

Da proposição 7.2.4 pode-se afirmar que a função de objetos $\overline{\lambda}:IIQ\to IIQ$, $\overline{\lambda}\in\{\overline{\overline{\text{sen}}},\overline{\overline{\cos}},\overline{\overline{\tan}}\}$ admite uma representação linear no espaço coerente $IIQ^*=(Coh(\mathbf{Q}^*,\approx_{\mathbf{Q}^*}),\subseteq)$, construído a partir da teia produto $\mathbf{Q}^*\equiv\left(\prod_i Q_i,\approx_{\mathbf{Q}^*}\right)$.

A partir da restrição da função básica aos subconjuntos Q_i', pode-se construir as subteias $\mathbf{Q}_i\equiv(Q_i,\approx_{Q_i})$ onde $Q_i\subseteq\wp(Q_i')$ e onde a relação de coerência, $\approx_{Q_i'}$, é a respectivas relação de coerência, $\approx_Q$, herdadas de suas correspondentes teias de origem, mas restritas aos elementos de cada um dos conjuntos, Q_i', que as geram. Para $\lambda'=\text{sen}'$ tem-se $Q_i'=[-90^\circ+180^\circ i, 90^\circ+180^\circ i]$, e sua correspondente função de tokens $\text{sen}_i: Q_i^*=([-90^\circ+180^\circ i, 90^\circ+180^\circ i],\approx_{I^*})\to I_{[-1,1]}^*=([-1,1],\approx_{I^*})$, definida por

$$\text{sen}_i[p,q]=\begin{cases}\left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]}\text{sen}'\alpha\ ,\ \max\limits_{\alpha\in[p,q]}\text{sen}'\alpha\right]=[\text{sen}'p,\text{sen}'q], & \text{se } \text{sen}'p,\text{sen}'q\in Q,\\ \varnothing, & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

Para $\lambda' = \cos'$ tem-se $Q_i' = [0^\circ + 180^\circ i, 180^\circ + 180^\circ i]$, e sua correspondente função de tokens $\cos_i: Q_i{}^* = ([0^\circ + 180^\circ i, 180^\circ + 180^\circ i], \approx_{Q^*}) \to I_{[-1,1]}{}^* = ([-1,1], \approx_{Q^*})$, definida por

$$cos_i[\mathrm{p,q}] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha\in[\mathrm{p,q}]} \cos'\alpha \ , \ \max\limits_{\alpha\in[\mathrm{p,q}]} \cos'\alpha\right] = [\cos' p, \cos' q], \text{ se } \cos' p, \cos' q \in Q, \\ \varnothing, \quad \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Para $\lambda' = \tan'$ tem-se $Q_i' = (-90^\circ + 180^\circ i, 90^\circ + 180^\circ i)$, e sua correspondente função de tokens $\tan_i: Q_i{}^* = ((-90^\circ + 180^\circ i, 90^\circ + 180^\circ i), \approx_{I^*}) \to IQ$, é definida por:

$$\tan_i[\mathrm{p,q}] = \begin{cases} \left[\min\limits_{\alpha\in[\mathrm{p,q}]} \tan'\alpha \ , \ \max\limits_{\alpha\in[\mathrm{p,q}]} \tan'\alpha\right] = [\tan' p, \tan' q], \text{ se } \tan' p, \tan' q \in Q, \\ \varnothing, \quad \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Assim, considerando-se a função de objetos $\overline{\lambda}: IIQ \to IIQ$, $\overline{\lambda}^* \in \{\overline{\overline{\text{sen}}}, \overline{\overline{\cos}}, \overline{\overline{\tan}}\}$, no espaço coerente $IIQ^* = (Coh(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}), \subseteq)$, construído a partir da teia $\mathbf{Q}^* \equiv \left(\prod_i Q_i, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right)$, tem-se que:

$x^* \in IIQ^* \quad \Rightarrow \quad x^* = \{\ldots(\ldots, X_{0j}, X_{1j}, \ldots, X_{ij}, \ldots), \ldots | i \in Z \text{ e } j \in IN\}$, onde cada token $X_{ij} = [p_{ij}, q_{ij}] \subseteq Q_i'$.

$\overline{\lambda}^* x^* \in IIQ^* \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda}^* x^* = \{\ldots(\ldots, \lambda_0 X_{0j}, \lambda_1 X_{1j}, \ldots, \lambda_i X_{ij}, \ldots), \ldots | i \in Z \text{ e } j \in IN\}$, onde cada token $\lambda_i X_{ij} = [\lambda_i' p_{ij}, \lambda_i' q_{ij}] \subseteq \lambda'[Q_i']$.

8.5.11 Proposição

A função de objetos $\overline{\lambda}^*: IIQ^* \to IIQ^*$, $\overline{\lambda}^* \in \{\overline{\overline{\text{sen}}}, \overline{\overline{\cos}}, \overline{\overline{\tan}}\}$ no espaço coerente $IIQ^* = (Coh(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}), \subseteq)$, definida por:

$$\overline{\lambda}^*(x^*) = \begin{cases} \overline{\lambda}^* x^* \text{ se } \quad x^* \notin quasitot(IIQ^*); \\ \widehat{\overline{\lambda}^*(x^*)} \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

e construído a partir da teia $\mathbf{Q}^* \equiv \left(\prod_i Q_i, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right)$ é monótona, contínua, estável e linear.

Prova:
Decorre imediatamente da proposição 7.2.6. ♦

8.6 Funções Trigonométricas Inversas

Apresenta-se a seguir as definições das funções trigonométricas inversas.

8.6.1 Definição

Seja o espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right), \subseteq\right)$, construído a partir da teia produto $\mathbf{Q}^* \equiv \left(\prod_i Q_i, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right)$. Sejam também as funções básicas:

$$\left(\mathrm{sen}'_i\right)^{-1}: [-1,1] \to Q'_i = \{\alpha \in Q | -90^\circ + 180^\circ i \leq \alpha \leq 90^\circ + 180^\circ i\},$$

$$\left(\cos'_i\right)^{-1}: [-1,1] \to Q'_i = \{\alpha \in Q | 0^\circ + 180^\circ i \leq \alpha \leq 180^\circ + 180^\circ i\}, \text{ e}$$

$$\left(\tan'_i\right)^{-1}: Q \to Q'_i = \{\alpha \in Q | -90^\circ + 180^\circ i < \alpha < 90^\circ + 180^\circ i\},$$

que correspondem as funções trigonométricas inversas das funções básicas $\lambda'_i: Q_i \to Q_i$, $\lambda'_i \in \{\mathrm{sen}'_i, \cos'_i, \tan'_i\}$, e cujas definições são dadas por $\left(\lambda'_i\right)^{-1}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \lambda'_i(\beta) = \alpha$, onde $\left(\lambda'_i\right)^{-1} \in \left\{\left(\mathrm{sen}'_i\right)^{-1}, \left(\cos'_i\right)^{-1}, \left(\tan'_i\right)^{-1}\right\}$.

Define-se então as funções de tokens nas subteias $\mathbf{Q}_i \equiv \left(Q_i, \approx_{Q_i}\right)$ onde $Q_i \subseteq \wp(Q'_i)$:

$$\left(\mathrm{sen}_i\right)^{-1}: IQ_{[-1,1]} \to IQ_i,$$

$$\left(\cos_i\right)^{-1}: IQ_{[-1,1]} \to IQ_i, \text{ e}$$

$$\left(\tan_i\right)^{-1}: IQ \to IQ_i, \quad \text{por:}$$

$$\left(\lambda_i\right)^{-1}[p,q] = \begin{cases} \left[\min_{\alpha \in [p,q]} \left(\lambda'_i\right)^{-1}(\alpha)\ ,\ \max_{\alpha \in [p,q]} \left(\lambda'_i\right)^{-1}(\alpha)\right] & \text{se } \min_{\alpha \in [p,q]} \left(\lambda'_i\right)^{-1}(\alpha),\ \min_{\alpha \in [p,q]} \left(\lambda'_i\right)^{-1}(\alpha) \in Q, \text{ e} \\ \varnothing, \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

ou ainda,

$$\left(\lambda_i\right)^{-1}[\mathrm{p},\mathrm{q}] = \begin{cases} \left[\left(\lambda'_i\right)^{-1}(p), \left(\lambda'_i\right)^{-1}(q)\right], & \text{se } \left(\lambda'_i\right)^{-1}(p), \left(\lambda'_i\right)^{-1}(q) \in Q, \\ \varnothing \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

sempre que $\left(\lambda_i\right)^{-1} \in \left\{\left(\mathrm{sen}_i\right)^{-1}, \left(\cos_i\right)^{-1}, \left(\tan_i\right)^{-1}\right\}$.

Para definir as pré-funções deve-se considerar como o espaço coerente formado pela família de conjuntos coerentes da teia produto $\left(IQ^*_{[-1,1]}, \approx_{I^*}\right)$ ordenados pelas inclusão, $IIQ^*_{[-1,1]} \equiv \left(Coh\left(I^*_{[-1,1]}, \approx_I\right), \subseteq\right)$. As pré-funções correspondentes serão definidas em:

$$\left(\overline{\mathrm{sen}}\right)^{-1}: IIQ^*_{[-1,1]} \to IIQ^*,$$

$$\left(\overline{\cos}\right)^{-1}: IIQ^*_{[-1,1]} \to IIQ^*, \text{ e}$$

$$\left(\overline{\tan}\right)^{-1}: IIQ^* \to IIQ^*,$$

por $\breve{\lambda}^{-1}(x) = \{\lambda^{-1}[p,q] \| [p,q] \in x\}$ sempre que $(\breve{\lambda})^{-1} \in \{(\overline{sen})^{-1}, (\overline{cos})^{-1}, (\overline{tan})^{-1}\}$.

E finalmente define-se a função de objetos $(\overline{\lambda})^{-1} \in \left\{\left(\overline{\overline{sen}}\right)^{-1}, \left(\overline{\overline{cos}}\right)^{-1}, \left(\overline{\overline{tan}}\right)^{-1}\right\}$ em:

$\left(\overline{\overline{sen}}\right)^{-1} : IIQ^*_{[-1,1]} \to IIQ^*$,

$\left(\overline{\overline{cos}}\right)^{-1} : IIQ^*_{[-1,1]} \to IIQ^*$, e

$\left(\overline{\overline{tan}}\right)^{-1} : IIQ^* \to IIQ^*$,

por:

$$\left((\overline{\lambda})^{-1}\right)(x) = \begin{cases} (\breve{\lambda}^{-1})(x) \text{ se } & x \notin quasitot(IIQ); \\ \left(\hat{\ } \circ \breve{\lambda}^{-1}\right)(x) = \widehat{(\breve{\lambda}^{-1})}(x), & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\widehat{(\breve{\lambda}^{-1})}(x)$ é o fecho indexado da imagem da pré-função $\breve{\lambda}^{-1}$.

Salienta-se que nesta definição, 8.6.1, omitiu-se o símbolo "*" nas funções $\lambda', \lambda, \breve{\lambda}$ e $\overline{\lambda}$ assim também dos argumentos correspondentes, $\alpha'[p,q]$ e x, com a intenção de facilitar a notação, embora fique claro o domínio de definição de cada uma das funções envolvidas.

8.6.2 Proposição

Sejam $IIQ^* \equiv \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right), \subseteq\right)$ e $IIQ^*_{[-1,1]} \equiv \left(Coh\left(I^*_{[-1,1]}, \approx_I\right), \subseteq\right)$ os espaços coerentes, então as pré-funções $(\breve{\lambda})^{-1} \in \{(\overline{sen})^{-1}, (\overline{cos})^{-1}, (\overline{tan})^{-1}\}$ e as funções de objetos trigonométricas inversas $(\overline{\lambda})^{-1} \in \left\{\left(\overline{\overline{sen}}\right)^{-1}, \left(\overline{\overline{cos}}\right)^{-1}, \left(\overline{\overline{tan}}\right)^{-1}\right\}$ são monótonas, contínuas, estáveis e lineares.

Prova:

Decorre imediatamente da proposição 7.2.6 e 7.2.7. ♦

8.6.3 Proposição

Sejam $IIQ^* \equiv \left(Coh\left(\mathbf{Q}^*, \approx_{\mathbf{Q}^*}\right), \subseteq\right)$ e $IIQ^*_{[-1,1]} \equiv \left(Coh\left(I^*_{[-1,1]}, \approx_I\right), \subseteq\right)$ os espaços coerentes, então os pares de funções de objetos:

$\left(\overline{\overline{sen}}, \left(\overline{\overline{sen}}\right)^{-1}\right)$, $\left(\overline{\overline{cos}}, \left(\overline{\overline{cos}}\right)^{-1}\right)$ e $\left(\overline{\overline{tan}}, \left(\overline{\overline{tan}}\right)^{-1}\right)$

são pares projeção para $\left(IIQ^*, IIQ^*_{[-1,1]}\right)$.

Prova:

Decorre imediatamente da proposição 7.2.8. ♦

8.6.1 Proposição

A função de objetos $\overline{\overline{\tan x}}$ pode ser expressa pelo quociente entre as funções $\overline{\overline{\operatorname{sen} x}}$ e $\overline{\overline{\cos x}}$, sempre que $x=\{[p,q]\in IQ | \{0\}\notin \cos[p,q]\}$.

Prova:

Sejam $x\in IIQ$, $[p,q]\in x$ e as funções de objetos $\overline{\overline{\operatorname{sen} x}}$, $\overline{\overline{\cos x}}$ e $\overline{\overline{\tan x}}$ como definidas em 8.5.1. Em [DIM 96b], mostra-se que a divisão de conjuntos coerentes é também um conjunto coerente, logo $\dfrac{\overline{\overline{\operatorname{sen} x}}}{\overline{\overline{\cos x}}}\in IIQ$, e além disso está bem definida sendo monótona e contínua. Portanto, tem-se que

$$\frac{\overline{\overline{\operatorname{sen} x}}}{\overline{\overline{\cos x}}}=\frac{\left\{\left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]}\operatorname{sen}'\alpha,\max\limits_{\alpha\in[p,q]}\operatorname{sen}'\alpha\right] \middle| [p,q]\in x\right\}}{\left\{\left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]}\cos\alpha,\max\limits_{\alpha\in[p,q]}\cos\alpha\right] \middle| [p,q]\in x\right\}}=\left\{\frac{\left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]}\operatorname{sen}'\alpha,\max\limits_{\alpha\in[p,q]}\operatorname{sen}'\alpha\right]}{\left[\min\limits_{\alpha\in[p,q]}\cos\alpha,\max\limits_{\alpha\in[p,q]}\cos\alpha\right]} \middle| [p,q]\in x\right\}$$

$$=\left\{\left[\min_{\alpha\in[p,q]}\frac{\operatorname{sen}'\alpha}{\cos'\alpha},\max_{\alpha\in[p,q]}\frac{\operatorname{sen}'\alpha}{\cos'\alpha}\right] \middle| [p,q]\in x\right\}=\left\{\left[\min_{\alpha\in[p,q]}\tan'\alpha,\max_{\alpha\in[p,q]}\tan'\alpha\right] \middle| [p,q]\in x\right\}=\overline{\overline{\tan x}}$$

Assim provou-se que $\overline{\overline{\tan x}}=\dfrac{\overline{\overline{\operatorname{sen} x}}}{\overline{\overline{\cos x}}}$. ♦

Isto significa que se pode determinar a tangente de um conjunto coerente de racionais e associá-la de forma única a divisão de dois conjuntos coerentes de racionais, respectivamente, seno e coseno do correspondente conjunto coerente.De forma análoga pode-se definir as funções trigonométricas: cossecante, a cotangente e a secante.

8.7 Funções Algébricas em *IIQ*

Considerando-se agora as funções algébricas, a função de objetos polinomial em *IIQ* é apresentada a seguir, bem como a correspondente análise das suas propriedades internas, durante o seu processo de construção.

8.7.1 Definição. Função de Objetos Polinomial

Sejam $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais e $\lambda':Q\to Q$ uma função básica polinomial nos racionais onde:

$\lambda'(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n$, onde $a_0,a_1,\ldots,a_n\in Q$ e $n\in IN$.. Define-se então:

(i) a função básica $\lambda: IQ\to IQ$ como a correspondente função polinomial nos tokens da teia $(IQ,\approx)$, ou seja:

$$\lambda[p,q]=\begin{cases}\left[\min_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha\ ,\ \max_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha\right] & \text{se } \min_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha,\ \min_{\alpha\in[p,q]}\lambda'\alpha\in Q, \text{ e}\\ [\ ], \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

(ii) a pré-função $\lambda\!\!\!\lambda: IIQ \to IIQ$, como a função polinomial em $Coh(IQ,\approx)$, onde:

$$\lambda\!\!\!\lambda(x) = \{\lambda[p,q] \mid [p,q] \in x\}$$

(iii) a função de objetos $\overline{\lambda\!\!\!\lambda}: IIQ \to IIQ$, como a função polinomial em $Coh(IQ,\approx)$, onde:

$$\overline{\lambda\!\!\!\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda\!\!\!\lambda x=\{\lambda[p,q]\in IIQ \mid [p,q]\in x\} & \text{se } x\notin quasitot(\lambda\!\!\!\lambda);\\ \widehat{\lambda\!\!\!\lambda x}, \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

onde $\widehat{\lambda\!\!\!\lambda x}=\bigcup\{d\in IIQ \mid i(\lambda\!\!\!\lambda x)=i(d)\wedge\lambda\!\!\!\lambda x\subseteq d\}$.

8.7.2 Corolário

Seja $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, $\lambda\!\!\!\lambda: IIQ \to IIQ$, a função polinomial nos objetos do espaço coerente $Coh(IQ,\approx)$, e $\lambda: IQ \to IQ$ a correspondente função polinomial nos tokens da teia $(IQ,\approx)$. Assim, se $[p,q] \in x$, então $\lambda[p,q] \in \lambda\!\!\!\lambda x$.

Prova:

Segue imediatamente da definição acima. ♦

8.7.3 Proposição

Seja $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$ o Espaço Coerente dos Intervalos Racionais, $\lambda\!\!\!\lambda: IIQ \to IIQ$, a pré-função e $\overline{\lambda\!\!\!\lambda}: IIQ\to IIQ$ a função objeto polinomial em $Coh(IQ,\approx)$. Se $x\in IIQ$ então $\lambda\!\!\!\lambda x\in IIQ$ assim como $\overline{\lambda\!\!\!\lambda}x\in IIQ$.

Prova:

Segue da proposição 7.2.4.

Do corolário e da proposição anteriores pode-se afirmar que as funções polinomiais $\lambda,\lambda\!\!\!\lambda,\overline{\lambda\!\!\!\lambda}$ estão bem definida e são totais em IIQ. Entretanto isto não basta para assegurar sua linearidade, conforme proposição a seguir. ♦

8.7.4 Proposição

Sejam $IIQ\equiv(Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\lambda\!\!\!\lambda: IIQ \to IIQ$, a pré-função elementar e $\overline{\lambda\!\!\!\lambda}: IIQ\to IIQ$ a função objeto em $Coh(IQ,\approx)$. $\lambda\!\!\!\lambda,\overline{\lambda\!\!\!\lambda}$ são monótonas e contínuas, e serão também estáveis e lineares se, e somente se, λ' é injetora.

Prova:

Como a função polinomial básica em Q, para qualquer que seja $n\in IN$, nem sempre é injetora, pela proposição 7.2.5, $\lambda\!\!\!\lambda,\overline{\lambda\!\!\!\lambda}$ não verificam a condição de estabilidade, portanto não são estáveis e consequentemente também não são lineares, embora pelas proposições 5.3.12 e 5.3.14 verifiquem a condição de linearidade. ♦

8.7.5 Proposição

Sejam $IIQ \equiv (Coh(IQ,\approx),\subseteq)$, $\lambda: IIQ \rightarrow IIQ$, a pré-função e $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ a função objeto polinomial em $Coh(IQ,\approx)$. A função de objetos $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ é *localmente linear*.

Prova:

Sabe-se que $\lambda': Q \rightarrow Q$, $\forall n \in IN$, não é injetora em todo seu domínio de definição, entretanto a função polinomial básica λ' terá até n-1 pontos de máximo ou de mínimos em todo seu domínio de definição. Sejam então os subconjuntos $Q_n \subseteq Q$ como os n subdomínios de λ' tais que λ'_{Q_n} é injetora, isto é, estritamente monótona segundo a ordem $\leq_Q$, onde $n \in IN$. Tem-se então que $Q_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$, onde α_{n-1}, α_n constituem os pontos de máximo e de mínimo em todo o domínio de definição da função λ'. Portanto pelas considerações do item 6.3 e definições 6.1.2 função de objetos $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ é *localmente linear*. ♦

Em particular, quando $\overline{\lambda}$ é constante tem-se que $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow \{a\}$, $\overline{\lambda}(x) = a, \forall x \in IIQ$, existem infinitos subdomínios de λ' tais que λ'_{Q_n} é injetora, ou seja, $Q_n = \{\alpha\}, \forall \alpha \in Q$. E no caso em que $n=1$, $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ é linear e coincide com sua representação linear.

Decorre desta proposição que as funções $\overline{\lambda}: IIQ \rightarrow IIQ$ e $\lambda: IIQ \rightarrow IIQ$ admitem uma representação linear em $IIQ^* = (Coh(IQ^*, \approx_{IQ^*}),\subseteq)$.

8.7.6 Definição

Seja o espaço coerente $IIQ^* = (Coh(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*}),\subseteq)$. Define-se então:

(i) a pré-função $\lambda^*: IIQ^* \rightarrow IIQ^*$ por :

$$\lambda^* x^* = \left\{ \left(\lambda_0[p_0,q_0], \lambda_1[p_1,q_1], \ldots \lambda_i[p_i,q_i], \ldots\right) \in \mathbf{I}Q^* \mid \left([p_0,q_0],[p1,q_1], \ldots [p_i,q_i], \ldots\right) \in x^* \right\},$$

(ii) a função objeto $\overline{\lambda}^*: IIQ^* \rightarrow IIQ^*$ por:

$$\overline{\lambda}^*(x^*) = \begin{cases} \lambda^* x^* \text{ se } & x^* \notin quasitot(\mathbb{A}); \\ \hat{\lambda}^*(x^*), & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

onde $\hat{\lambda}^*(x^*)$ corresponde ao fecho indexado da imagem da pré-função $\lambda^*(x^*)$.

8.7.7 Proposição

Sejam a teia $\mathbf{I}Q^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ e seu correspondente espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*}\right), \subseteq\right)$. A pré-função $\lambda^* : IIQ^* \to IIQ^*$ e a função de objetos polinomial $\overline{\lambda}^* : IIQ^* \to IIQ^*$ são totais e bem definidas.

Prova:

Segue da proposição 7.2.7. ♦

8.7.8 Proposição

Sejam a teia $\mathbf{I}Q^* \equiv \left(\prod_i IQ_i, \approx_{\mathbf{A}_i}\right)$ e seu correspondente espaço coerente $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*}\right), \subseteq\right)$. A função de objetos polinomial $\overline{\lambda}^* : IIQ^* \to IIQ^*$ é monótona, contínua, estável e linear.

Prova:

Segue da proposição 7.2.8. ♦

8.7.9 Proposição

Seja $IIQ^* = \left(Coh\left(\mathbf{I}Q^*, \approx_{\mathbf{I}Q^*}\right), \subseteq\right)$. Existe sempre um par projeção para $\left(IIQ^*, IIQ^*\right)$, ou seja, para toda função objeto polinomial $\overline{\lambda}^* : IIQ^* \to IIQ^*$, existe sempre uma função $\overline{\hbar}^* : IIQ^* \to IIQ^*$, inversa da função polinomial $\overline{\lambda}^*$ tais que, $\lambda^* \circ \hbar^* = id_{{}_{\mathbf{I}}*}$ e $\left(\overline{\hbar}^* \circ \overline{\lambda}^*\right)(y) \subseteq y$, para cada $y \in IIQ^*$.

Prova:

Segue da proposição 7.2.8. ♦

9 Conclusões

Neste último capítulo apresenta-se um resumo dos principais resultados alcançados, incluindo sugestões de continuidade do trabalho em pesquisas futuras.

9.1 Principais Resultados Alcançados pela Pesquisa

Neste trabalho desenvolveu-se um estudo sobre os Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos, parcialmente ordenados e enumeráveis. Nesta categoria, denotada por $\mathcal{A}$, os objetos estão ordenados pela inclusão e são conjuntos coerentes constituídos por tokens. Estes tokens por sua vez, são subconjuntos do conjunto básico, os quais estão relacionados pela relação de coerência induzida que estrutura a teia deste espaço.

Os morfismos desta categoria são as funções de objetos lineares, geradas por funções básicas. As propriedades algébricas e relacionais destas funções básicas, são identificadas como propriedades externas ao processo de construção dos morfismos desta categoria. Assim a construção proposta e apresentada neste trabalho possibilita a visualização e análise dos relacionamentos existentes, não apenas dos morfismos que envolvem os objetos totais ou parciais desta categoria, mas também das estruturas que os formam, representados pelas pré-funções e funções de tokens.

Mostrou-se então que a partir da definição das funções básicas obtém-se as correspondentes funções de objetos, e provou-se serem estas bem definidas, totais, monótonas e contínuas neste espaço. Entretanto, concluiu-se que, apesar de verificarem a condição de linearidade, nem todas as funções de objetos são lineares, pois nem sempre verificam a condição de estabilidade, e consequentemente não são estáveis. Isto só foi alcançado com algumas condições impostas a estas funções básicas, conforme mostrou-se no capítulo 5. Estas condições são decorrentes da verificação de propriedades que as funções básicas devem satisfazer, como a injetividade, externas ao processo de construção, mas que ao se propagarem, tornam-se relevantes para verificação de propriedades internas, como a estabilidade e consequentemente a linearidade.

Como uma solução para esta restrição, no capítulo 6 propõe-se um sistema de representação linear para funções localmente lineares, baseado na construção de dois espaços coerentes isomorfos, dentro categoria COSP-LIN dos espaços coerentes. O primeiro evidenciou a forma intuitiva de construção das funções lineares que atuam sobre os objetos deste espaço; enquanto o segundo formalizou a homogeneidade de construção das funções aplicada sobre o produto categórico deste espaço. Entretanto, em ambas as construções buscou-se a linearização da função objeto $\overline{\lambda}$.

O espaço coerente $\mathcal{A}^*$ é construído a partir da teia gerada pelo produto cartesiano das subteias A_i. Estas subteias são induzidas pelos subconjuntos A_i', do conjunto básico, nos quais a correspondente restrição da função básica é injetora. Mostrou-se que as funções de objetos $\overline{\lambda}^*$, definidas entre espaços coerentes assim estruturados são lineares, e portanto coincidem com os morfismo da categoria em estudo. A partir da determinação do homomorfismo injetivo $\Gamma:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}^*$, foi possível também identificar as funções $\bar{\lambda}^*$ como a correspondente representação linear das funções de objetos $\bar{\lambda}$.

Ao considerar-se os sub-espaços $\mathcal{A}_i$ como sendo aqueles gerados por cada uma das subteias A_ι, definiu-se também o espaço coerente $\prod\mathcal{A}_i$, gerado pelo produto direto destes sub-espaços. Neste caso, tem-se que os objetos são os conjuntos coerentes indexados pela teia formada pela união disjunta dos subconjuntos A_i'. Do isomorfismo determinado pela função linear $\Psi:\mathcal{A}^*\rightarrow\prod\mathcal{A}_i$, estabeleceu-se a identificação entre os objetos e morfismos de ambos espaços e obteve-se então as funções $\dot{\bar{\lambda}}$ como uma nova representação linear para $\bar{\lambda}$, isomorfo a $\bar{\lambda}^*$.

Interpretando os resultados alcançados, tem-se que toda transformação definida para um tipo de dado estruturado a partir de um conjunto básico enumerável tem uma representação, constituída pelos morfismos da categoria dos espaços coerentes. Esta representação é justamente a representação linear introduzida neste trabalho. A existência da representação linear para as funções elementares garante a existência da representação linear para outras funções derivadas destas.

Na construção proposta neste trabalho está implícita duas relações de ordem, a primeira relativa aos objetos do espaço coerente, chamada de ordem de informação. Nesta os conjuntos coerentes estão ordenados pela inclusão, e cada um deles é interpretado como uma aproximação, total ou parcial, gerada por sucessivas computações. A segunda refere-se a relação de ordem em cada uma das etapas do processo de construção e permite que se compare dois elementos de determinada estrutura que define uma determinada etapa do processo de construção. Esta relação de ordem entre os objetos da categoria possibilitou a definição de funções de objeto crescentes e decrescentes, apresentada no capítulo 4.

Apresentou-se ainda uma especificação desta construção ao introduzir-se uma subcategoria, a dos Espaços Coerentes de Intervalos, onde cada token passa a ter a estrutura de um intervalo. E dentro desta subcategoria salienta-se o estudo do Espaço Coerente de Intervalos Racionais.

Em *IIQ*, cada uma das funções reais elementares mostrou estar associada a uma função de objetos linear, definida a partir da correspondente função elementar racional. Entre as funções que foram analisadas destacam-se: a função exponencial, a função logarítmica, a função potência, a função raiz n-ésima, as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e as respectivas inversas, como também a função polinomial.

Das definições construídas e das proposições demonstradas, verificou-se que todas estas funções de objetos são totais, bem definidas, ou pertencem ou possuem uma representação linear na categoria COSP-LIN dos espaços coerentes, além de serem fechadas para os objetos totais e quasi-totais deste espaço, sendo possível estabelecer o correspondente par-projeção para cada uma delas.

Em analogia a construção proposta em [DIM 96b], deve-se ressaltar que, se cada número real está identificado por um conjunto coerente maximal de intervalos racionais, isto é, por um conjunto enumerável de intervalos racionais, então em correspondência, cada função elementar real está identificada com uma função de objetos, quando esta se restringe aos seus objetos totais , que é linear ou admite representação linear nesta categoria.

Assim, o processo de construção aplicado em *IIQ*, teve como objetivo principal assegurar a computabilidade desta funções elementares reais, tendo em vista que os objetos envolvidos são conjuntos coerentes de intervalos racionais, portanto estruturas enumeráveis sob o ponto de vista matemático.

9.2 Contribuições e Sugestões para Continuidade da Pesquisa

Apresenta-se por último, algumas sugestões de continuidade deste trabalho. Além disso, a especificação de alguns aspectos importantes para esta continuidade foram restringidos no decorrer deste trabalho, devido ao tempo previsto e as prioridades estipuladas , mas que devem ser agora lembrados.

9.2.1 Representação linear das funções de objetos

No capítulo 6 propõe-se um sistema de representação linear apenas para as funções localmente lineares, tendo em vista que as funções elementares reais verificam esta condição. Entretanto um estudo mais amplo pode ser muito proveitoso, e pode resultar num sistema de representação mais abrangente ou até mesmo generalizado para o espaço funcional.

9.2.2 Estruturação do Cálculo nos domínios dos espaços coerentes

Este trabalho vem consolidar a estruturação da Análise nos domínios de Espaços Coerentes. Portanto o objetivo mais imediato a ser alcançado é a estruturação do Cálculo nos domínios de Espaços Coerentes, a partir da fundamentação dada por esta referida Análise. Para alcançar tal construção, algumas questões de pesquisa serão fundamentais. Entre estas salientam-se, a seguir, as mais relevantes.

(i) Funções Recursivas

A verificação e análise de uma construção análoga a que foi aqui proposta, para as funções objetos entre espaços coerentes definidas a partir de suas correspondentes funções básicas, pode ser estruturada para as funções definidas recursivamente. Busca-se assim, mostrar que também as funções reais definidas recursivamente podem ser construídas, e com as mesmas garantidas, a partir de correspondentes funções recursivas entre conjuntos coerentes de intervalos racionais.

(ii) Funções de Vários Argumentos

Conforme o que foi estudado, assim como as funções elementares localmente lineares possuem sempre representação linear correspondente no espaço gerado pelo produto categórico, pode-se pensar numa representação linear ainda mais genérica abrangendo as funções de vários argumentos, que também são de grande interesse computacional, pois vários são as modelagens a elas associadas em Sistemas Dinâmicos, [LUE 79], e a partir das quais estruturam-se as soluções associadas as equações diferenciais e(ou) equações de diferenças finitas envolvidas.

(iii) Equações Diferenciais e Equações de Diferenças Finitas

O interesse nas equações com diferenças finitas, também como um objeto de pesquisa, deve-se ao fato de que elas aparecem com freqüência nas aplicações e porque surgem em numerosos métodos de resolução aproximada de equações diferenciais em que estas são substituídas por equações com diferenças finitas.

A análise das propriedades externas comuns como o número de soluções que satisfazem as condições iniciais, os métodos para determinar as respectivas soluções, o princípio da superposição para equações lineares homogêneas, o cálculo de coeficientes constantes, e outras mais podem ser investigadas e analisadas, verificando se sua propagação no processo de construção.

Além disso, a própria natureza de definição das equações com diferenças permite obter como soluções funções recursivas. Concluí-se que estes três objetos de pesquisa mantém um relacionamento que deve ser caracterizado também no processo de construção que se esta propondo. Da mesma forma, o estudo das equações diferenciais pressupõe um estudo de conceitos como limites dirigidos, e de operações como derivação e diferenciação nos domínios dos Espaços Coerentes.

9.2.3 Aplicação em Sistemas Dinâmicos

Importantes questões de investigação surgem, por exemplo, como a formalização dos relacionamentos entre as equações de diferenças finitas, as equações diferenciais e as funções recursivas definidas e estruturadas nos domínios dos Espaços Coerentes. Como se fará a análise da aplicação das mesma pela teoria dos Sistemas Dinâmicos? Este relacionamento é relevante para o desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que estuda, entre outras coisas, métodos de análise qualitativa e quantitativa do conjunto de todas as curvas que são soluções para um sistema de equações diferenciais ordinárias, em determinado estado ou condições iniciais. Além disso, existe o interesse em representar o comportamento de um determinado sistema de equações diferenciais em termos de suas características geométricas em determinada fase, ou ainda mais, a análise automática das estruturas topológicas envolvidas.

Salienta-se que muitos trabalhos já relacionaram alguns dos objetos de pesquisa mencionados, por exemplo, Scott propôs a construção das funções recursivas usando a estrutura de domínios, veja [SCO72][SCO76]. Entretanto seria interessante, além da uniformidade de construção tanto da Análise quanto do Cálculo utilizando especificamente a categoria dos Espaços Coerentes, servir-se de toda esta fundamentação para trabalhar com Sistemas Dinâmicos visando aplicações em ciência e tecnologia.

9.3 Considerações Finais

Quando da elaboração deste texto, buscou-se dispor de mais um trabalho de fundamentação sobre espaços coerentes, de caracter introdutório, que possa servir de suporte para outros trabalhos em Ciência da Computação, sejam estes na área da Matemática da Computação, como também nas áreas da Teoria da Computação, Lógica Linear, Computação Científica, Matemática Intervalar, Sistemas Dinâmicos, dentre outras, dando continuidade não somente à aplicação em estudo, mas também possibilitando a generalização dos resultados obtidos para outras aplicações.

10 Bibliografia

[ABR 87] ABRAMSKY, S. **Domain Theory in Logical Form.** London: Department of Computer Science/Imperial College, 1987.

[ACI 90] ACIÓLY, B.; DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. Uma Teoria de Informação - Uma Abordagem para a Teoria dos Intervalos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 13., 1990, Águas de Lindóia. **Resumos das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1990. 184 p. p.22.

[ACI 91] ACIÓLY, B. M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 253p.

[ACI 91a] ACIÓLY, B. ; CLAUDIO, D. M.; DIMURO, G. P. Toward a Computational Interval Mathematics. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER ARTHMETIC AND SCIENTIFIC COMPUTING, 1991, Oldenburg. **Proceedings...** Oldenburg: Universität Oldenburg, 1991.

[ACI 92] ACIÓLY, B. M. **Um Misto de Visão Clássica e Moderna de Topologia.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 114p. (RP - 191)

[AGU 95] AGUIAR, M. S.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Uma Biblioteca Matricial Intervalar para o Ambiente de Técnicas Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais**... Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. v.1, p.155-159.

[ALE 83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations**. New York: Academic Press, 1983.

[ALE 68] ALEFELD, G. **Intervallrechnung úber den komplexen Zahlen und einig Anwendungen.** [S.l.]: Universität Karlsuhe, 1968. Thesis.

[ARA 88] ARAPIS, C.; KAPPEL, G. Organizing Objetcts in a Object Software Base. In: TSICHRITZIS, Dennis C. (Ed.). Active Object Environment. Genève: Centre Universitaire d'Informatique/Université de Genève, 1988. p.32-50.

[BAR 92] BARBOZA, L. V.; DIMURO. G. P. Por que o Computador Erra? Uma Visão Didática. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 15., 1992, São Carlos. **Resumo das Comunicações**. São Carlos: SBMAC, 1992. 152p. p.66.

[BAR 93] BARBOZA, L. V.; DIMURO. G. P. Avaliação de Funções Intervalares Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.157.

[BAU 8?] BAUMANN, E. Optimal Centered Forms. In: FREIBURGER INTERVAL-BERICHT. **Proceedings...** Freiburg: Universität Freiburg/West Germany, [198?]. p. 5-21.

[BED 93] BEDREGAL, B.R.C. Rational Intervals: An Effectively Given Information System for the Real Numbers. **Scientific Computation and Mathematical Modelling**, Sofia: (S.Markov (ed.), DATECS Publishing), 1993.p.159-170.

[BED 94] BEDREGAL, B.R.C. **Sistemas de Informação Contínuos.** Recife: CPGCC da UFPE, 1994. 109 p.

[BER 78] BERRY, G. Stable Models of Typed Lambda-Claculi. In: ICALP CONFERENCE, 5., 1978, Udine. **Proceedings...** Udine: [s.n.], 1978.

[BER 91] BERRY, J. **Programando em C++**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1991.

[BET 91] BETHKE, I. Coherence Spaces are Untopological. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v. 85, p.353-357.

[BON 95] BONSANGUE, F.; BREUGEL, F.; RUTTEN, J.J.M.M. **Generalized Ultrametric Spaces:** Completion, Topology, and Powerdomains via the Yoneda Embedding. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1995. 43p. (Report, CS-R9560).

[CAD 93] CADORE, L.; CLAUDIO, D. M. Aritmética Intervalar Estendida com Intervalos Dirigidos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p. 153.

[CEC 66] CECH, E. **Topological Spaces.** New York: Wiley, 1966. 893 p.

[CLA 89] CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico e Computacional - Teoria e Prática.** São Paulo: Atlas, 1989. 464p.

[CLA 92] CLAUDIO, D.M.; ESCARDÓ, M.N. ; FRANCIOSI, B.R.T. An Order-Theoretic Approach to Interval Analyis. **Interval Computations,** Moscow, v.3, n.5, p.38-45, 1992.

[CLA 94] CLAUDIO, D. M. **Interval Approximation Theory.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 17p. (RP 226).

[COE 91] COELHO, A. et al.Métodos Computacionais Intervalares para o Cálculo de Imagens de Funções Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 14., 1991, Nova Friburgo. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1991. 154p. p.38.

[COR 88] CORLISS, G. F. **How Can You Apply Interval Techniques in an Industrial Setting?.**Milwaukee: Marquette University, 1988. (Technical Report, 301).

[COS 94] COSTA, Antônio Carlos da Rocha. **$\Re$ as a Coherence Space.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 2p. Notas de Pesquisa.

[DAV 91] DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. **Introduction to Lattices and Order**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 248p.

[DED 01] DEDEKIND, R. **Essays on the Theory of Numbers.** New York: Dover Publications Inc., 1901. 115p.

[DEV 91] DEVLOO, P. R. B.; ALVES FILHO, J. S. R. **On the Use of the Object Oriented Programming Philosophy in Scientific Computing**. São José dos Campos: Divisão de Engenharia Mecânica do INPE, 1991.

[DIM 89] DIMURO, G. P. **A Teoria dos Intervalos e Métodos Computacionais para Imagens de Funções**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1989. 127 p. (T.I - 115).

[DIM 91] DIMURO, G. P. **Domínios Intervalares da Matemática Computacional**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 321p.

[DIM 91a] DIMURO, G. P.; ACIÓLY, B. M.; CLAUDIO, D. M. About Range of Functions - A Domain Approach. In: INTERNATIONAL AMSZE CONFERENCE "INFORMATION & SYSTEM", 1991, Hangzhou. **Proceedings...** Beijing: International Academic Publishers, 1991. v.2., p. 553-556.

[DIM 91b] DIMURO, G. P.; ACIÓLY, B. M.; CLAUDIO, D. M. The Partial Real Interval Domain. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER ARITHMETIC AND SCIENTIFIC COMPUTAION, 1991, Oldenburg. **Proceedings...** Oldenburg: Universität Oldenburg, 1991.

[DIM 91c] DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. Aritmética Intervalar no Domínio Contínuo $\Re$ dos Intervalos Reais Parciais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 14., 1991, Nova Friburgo. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1991. 154 p. p. 37.

[DIM 92] DIMURO, G. P.; BARBOZA, L. V.. A Programação Orientada a Objetos na Computação Científica e sua Aplicação na Teoria Dos Domínios Contínuos Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 15., 1992, São Carlos. **Resumo das Comunicações**. São Carlos: SBMAC, 1992. 152p. p.142.

[DIM 93] DIMURO, G. P. et al. Uma Biblioteca Intervalar Orientada a Objetos para Controle Automático do Erro em Computação Científica. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.155.

[DIM 93] DIMURO, G. P.; BARBOZA, L. V.; SANTOS, C. P. A Matemática Intervalar em Ciência e Tecnologia - Uma Aplicação Técnica segundo uma Abordagem Orientada a Objetos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.155.

[DIM 94] DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. A Matemática Intervalar como Fundamentação para a Análise Numérica e Computação Científica. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Vitória: SBMAC, 1994. v.1, p.137-141.

[DIM 95] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; CLAUDIO, D. M.. Espaços Coerentes. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. v.1, p.188-192.

[DIM 96] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; CLAUDIO, D. M.. A Coherence Space of Rational Intervals. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.26-28.

[DIM 96a] DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Uma Construção dos Números Reais Computáveis Utilizando Espaços Coerentes de Intervalos Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p.130-131

[DIM 96b] DIMURO, G. P. **Uma Construção dos Reais Computáveis utilizando Espaços Coerentes de Intervalos**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 150 p. (E.Q. - 05).

[DIN 92] DIMITROVA, N. S.; MARKOV, S. M.; POPOVA, E. D. Extended Interval Arithmetics: New Results ans Applications. **Computer Arithmetic and Enclosure Methods**, Amsterdam, p.225-234, 1992.

[DIV 95] DIVERIO, T.A. **Uso Efetivo da Matemática Intervalar em Supercomputadores Vetoriais.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995. 291p.

[EDA 95] EDALAT, A. Domain Theory and Integration. **Theotetical Computer Science,** Amsterdam, v.151, n.1, p.163-193, Nov. 1995. Trabalho apresentado no Workshop on Topology and Completion in Semantics, 1993, Chartres, France.

[EDA 95a] EDALAT, A.; ESCARDÓ, M. H. **Integration in Real PCF.** London: Department of Computing/Imperial College, 1995. 10p.

[EDA 95b] EDALAT, A. Dynamical Systems, Measures and Fractals via Domain Theory. **Information and Computation,** Cambridge, v.120, n.1, p.32-48, July 1995.

[EDA 96] EDALAT, A. Power Domains and Iterated Functions Systems. **Information and Computation,** Cambridge, v.124, n.2, p.182-197, Feb. 1996.

[ESC 93] ESCARDÓ, M. H.; CLAUDIO, D. M. **Scott Domain Theory as a Foundation for Interval Analysis.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1993. 41p. (RP-218).

[ESC 94] ESCARDÓ, M. H. **Towards a Notion of Primitive Recursive Real Function.** London: Department of Computing/Imperial College, 1994. 23p.

[ESC 95] ESCARDÓ, M. H. **Induction and Recursion on the Real Line.** London: Department of Computing/Imperial College, 1995. 26p.

[ESC 9?] ESCARDÓ, M. H. PCF Extended With Real Numbers. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, [199?]. A ser publicado.

[GIE 80] GIERS, K. et al. **A Compedium of Continuous Lattice**. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[GIR 86] GIRARD, Jean-Yves. The Dystem F of Variable Types, Fifteen Years Later. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, n.45, p.159-192, 1986.

[GIR 87] GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, n.50, p.1-102, 1987.

[GIR 89] GIRARD, Jean-Yves; LAFONT, Y.;TAYLOR, P. **Proofs and Types.** Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 176p.

[GIR 90] GIRARDI, M. R.; PRICE, R. T. O Paradigma de Desenvolvimento por Objetos. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, Porto Alegre, v.2, n.1, p.69-94, maio 1990.

[GIR 96] GIRARD, Jean-Yves. **Coherent Banach Spaces:** A Continuous Denotational Semantics. Marseille: Institut de Mathématique de Luminy, 1996. 23p.

[GOR 79] GORDON, M. J. C. **The Denotational Description of Programming Languages, an Introduction.** Berlin: Spring-Verlag, 1979.

[HAN 69] HANSEN, E. R. The Centered Forms. **Topics in Interval Analysis.** Oxford: Hansen, 1969.

[HAN 80] HANSEN, E. R. Global Optimization using Interval Analysis - the Multidimensional Case. **Numerisch Mathematik**, [S.l.], v.34, n.1, p.247-270, 1980.

[HOL 96] HOLBIG, C.A. **Métodos Intervalares para Resolução de Sistemas de Equações Lineares.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 96p.

[HUT 95] HUTH, M. A Maximal Monoidal Closed Category of Distributive Algebraic Domains. **Information and Computation,** Cambridge, v.116, n.1, p.10-25, Jan. 1995.

[JUN 89] JUNG, A. **Cartesian Closed Categories of Domains.** Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science, 1989.

[KAN 84] KANIMURA, T.; TANG, A. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, v.1, n.2, p. 155-66, Mar. 1984.

[KAN 84a] KANIMURA, T.; TANG, A. **Total Objects of Domains**. Lawrence: Department of Computer Science/University of Kansas, 1984.

[KAN 84b] KANIMURA, T.; TANG, A. Effectively Given Spaces. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, n.29, p.155-166, 1984.

[KOR 94] KORZENOWSKI, H. Estudo Sobre Resoluções de Equações de Coeficientes Intervalares. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 132p.

[KUL 81] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. New York: Academic Press, 1981.

[KUL 83] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. A New Approach to Scientific Computation. In: SIMPOSIUM ON A NEW APPROACH TO SCIENTIFIC COMPUTATION, 1982, Yorktown Heights. **Proceedings...** New York: Academic Press, 1983. 384 p.

[LAF 88] LAFONT, Y. **Introduction to Linear Logic.** Isle of Thorns: [s.n.], 1988. (Lecture Notes for the Summer School on Constructive Logics and Category Theory)

[LAV 8?] LAVEUVE, S. E. **Definition Einer Kahan-arithmetik Und Ihre Implementierung.** [S.l.]: Institut für Praktisch Mathematik/Universität Karlsruhe/ BRD, [198?]. p.236-245.

[LAW 87] LAWSON, S. D. **The Versatile Continuous Order**. Baton Range: Department of Mathematics/ Louisiana State University, 1987.

[LAW 73] LAWVERE, F. W. Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories. In: SEMINÁRIO MATEMÁTICO E FÍSICO DE MILANO, 43., 1973, Milão. **Rendiconti.** [S.l]: [s.n.], 1973. p.135-166.

[LOR 9?] LORKOWSKI, J.; KREINOVICH, V. **If We Measure a Number, We Get an Interval. What If We Measure a Function Or an Operator?** El Paso: Computer Science Departament/University of Texas, [199?]. 12p.

[LUE 79] LUENBERGER, D.G.; **Introduction to Dynamics Systems - Theory, Models and Applications.** New York: Wiley, 1979. 446p.

[MAR 81] MARKOV, S. On an Interval Arithmetic and its Application. In: SYMPOSIUM ON COMPUTER ARITHMETIC, 5., 1981, Ann Arbor. **Proceedings...** Ann Arbor: IEEE Computer Cociety Press, 1981. p.274-277.

[MAR 92] MARKOV, S. On the presentation of Ranges of Monotonic Functions using Interval Arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL AND STOCHASTIC METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING, 1992, Moscou. **Proceedings...** Moscou: Ed. A. Voshinin, 1992.

[MAR 92a] MARKOV, S. Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals. **Mathematica Balkanica**, [S.l.], v.6, n.3, p.269-304, 1992.

[MAR 94] MARKOV, S. **On an Arithmetic for Directed Intervals and its Application:** the Real Arithmetic Case. Sofia: Ann. Univ. Sofia/ Fac. Math.,1994.

[MAR 95] MARKOV, S. On Directed Interval Arithmetics and its Applications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL NUMBERS AND COMPUTERS, 1995, Saint-Etienne. **Proceedings...** Sofia: U. of Mines, 1995. p.249-260.

[MAR 9?] MARKOV, S.; POPOVA, E. ; ULLRICH, C. **On the Solution of linear Algebraic Equations Involving Interval Coefficients**. [S.l.]: Institute of Biophysics/Bulgarian Academy of Sciences and Institute of informatis/University of Basel, [199?]. 10p.

[MOO 66] MOORE , R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.

[MOO 79] MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979. 190p.

[MOO 88] MOORE, R. E. **Realiability in Computing:** The Role of Interval Methods in Scientific Computing. New York: Academic Press, 1988.

[NEU 89] NEUMAIER, A. **Interval Methods for Systems of Equations.** Freiburg: Cambridge University Press, 1989. 359p.

[NIC 75] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1975.

[NIV 84] NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[NIC 85] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1985.

[OLI 95] OLIVEIRA, P. W. **Análise Intervalar.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995. 182p.

[PHO 94] PHOA, W. From Terms Models to Domais. **Information and Computation**, Orlando, v.109, n.1-2, p.211-255, Feb./Mar 1994.

[PLO 77] PLOTKIN, G. LFC considered as a Programming Language. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.5, n.1, p.233-255, 1977.

[PLO 81] PLOTKING, G. **Post-Graduate Lecture Notes in Advanced Domain Theory.** Edinburgh: Department of Computer Science/University of Edinburgh, 1981.

[RAL 86] RALL, L. B. Improved Interval Bounds for Range of Functions. In: SYMPOSIUM ON INTERVAL MATHEMATICS, 1985, Freiburg. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1986. p.143-150. (Lecture Notes in Computer Science, n.212).

[RAT 84] RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **Computer Methods for the Range of Functions**. England: Ellis Horwood, 1984. 168p.

[RAT 88] RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimazation**. England: Ellis Horwood, 1988. 229p.

[REI 94] REISER. R.H.S.; DIMURO, G.P. Álgebra Matricial Intervalar. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1994. v.1, p.352-356.

[REI 95] REISER. R.H.S.; CLAUDIO, D. M.; DIMURO, G.P. Precondicionamento em SELAS Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. 130 p. p. 123-126.

[REI 96] REISER, R.H.S. **Uma Introdução à Álgebra Linear Computacional com Ênfase aos Métodos Intervalares de Resolução de Sistemas de Equações Lineares Algébricas.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 107p. (TI - 512).

[REI 96a] REISER, R.H.S.;DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. A The Interval Gauss-Seidel Iteration. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.72-74.

[REI 96b] REISER. R.H.S.; DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; et al. Estudo da Linearidade das Funções Trigonométricas no Espaço Coerente de Intervalos Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p. 116-117

[REN 94] REISSIG, N. C.; DIMURO. G. P. O Ambiente de Técnicas Intervalares. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE INFORMATICA, 20., 1994, Estado de Mexico. **Memorias.** Estado de Mexico: Megabyte Ed., 1994. 1470p. p.861-872.

[RUT 95] RUTTEN, J. J. M. M. **Elements of Generalized Ultrametric Domain Theory.** Amsterdam: CWI, 1995. (Report, CS-R9507)

[SAN 94] SANTOS, C. P.; AGUIAR, M. S. ; DIMURO, G. P. As Técnicas Intervaloares em Substituição ao Método Clássico de Estimativa de Erro. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1994. v.1, p.309-313.

[SCO 72] SCOTT, D. Continuous Lattices. **Springer Lecture Notes in Matehematics**, Berlin, n. 274, p.97-136, 1972.

[SCO 72a] SCOTT, D. Lattice Theory, Data Types and Semantics. **Formal Semantics and Programming Languages**. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1972. p.65-106.

[SCO 76] SCOTT, D. Data Types as Lattices. **SIAM Journal of Computing,** Philadelphia, v.5, n.1, p.522-587, 1976.

[SCO 82] SCOTT, D. Domains for Denotational Semantics. **Springer Lecture Notes in Computer Science,** Berlin, n.140, p.577-613, 1982.

[SCO 82a] SCOTT, D. Lectures on a Mathematical Theory of Computation. In: **Theoretical Foundations of Programming Methodology**. [S.l.]: D. Reidel, 1982. p.145-292.

[SCO 90] SCOTT, D.; GUNTER, C. A. Semantic Domains. **Handbook of Theoretical Computer Science.** [S.l.]: Elsevier Science, p.635-674, 1990.

[SEL 96] SELLANES, R. G. S. **Estratégias de Computação Seqüenciais e Paralelas sobre Espaços Coerentes.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 143p.

[SIE 52] SIERPINSKI, W. **General Topology.**[S.l.]: University of Toronto Press, 1952.

[SMA 90] SMALE, S. Some Remarks on the Foundation of Numerical Analysis. **SIAM Review**, [S.l.], v.32, n.2, p.211-220, June 1990.

[SMY 77] SMYTH, M. B. Effectively given Domains. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, v.5, n.1, p.257-274, 1977.

[SMY 83] SMYTH, M. B. Powerdomains and Predicate Transformers: a Topological View. In: COLLOQUIUM ON AUTOMATA LANGUAGES AND PROGRAMMING, 10., 1983, Barcelona. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1983. p.662-675.

[SMY 87] SMYTH, M. B. **Quasi Uniformities:** Reconciling Domains with Metric Spaces. [S.l.]: Springer-Verlag, 1987. p.236-253 (Lectures Notes in Computer Science, v. 298). Trabalho apresentado no Workshop on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics, 3., 1987, New Orleans.

[SMY 90] SMYTH, M. B. Topology. In: **Handbook of Logic in Computer Science**. Oxford: [s.n.], 1990.

[SMY 91] SMYTH, M. B. Totally Bounded Spaces and Compact Ordered Spaces as Domais of Computation. **Topology and Category Theory In Computer Science**.[S.l.]: Oxford University Press, p.207-229, 1991.

[SMY 95] SMYTH, M. B. Semi-metrics, Closure Spaces and Digital Topology. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.151, n.1, p.257-276, Nov. 1995.

[STO 77] STOY, J. E. **Denotational Semantics**: The Scott-Strachey Aproach To Programming languages. Cambridge: MIT Press, 1977.

[STO 94] STOLTENBERG-HANSEN, V.; LINDSTRÖM, I.; GRIFFOR, E. R. **Mathematical Theory of Domains.** Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 349p.

[STR 86] STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. Menlo Park: Addison-Wesley, 1986.

[SUN 95] SÜDERHAUF, P. A Faithful Computational Model of the Real Numbers. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.151, n.1, p.277-294, Nov. 1995.

[TRO 88] TROELSTRA, A. S.; DALEN, D. V. **Constructivism in Mathematics, an Introduction.** Amsterdam: Elsevier Science, 1988. v.1. 314p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, n.121)

[TRO 92] TROELSTRA, A. S. **Lectures on Linear Logic.** Stanford: CSLI/Leland Stanford Junior University, 1992. (Lecture Notes, n.29).

[TSI 88] TSICHRITZIS, D. C.; NIERSTRASZ, O. Aplication Development Using Objects. In: TSICHRITZIS, Dennis C. (Ed.). **Active Object Environment**. Genève: Centre Universitaire d'Informatique/Université de Genève, juin 1988. p.18-31.

[VIC 87] VICKERS, S. **Topology via Logic.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[WIE 91] WIENER, R. S.; PINSON, L. J. **C++- Programação Orientada a Objetos - Manual Prático e Profissional**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1991.

[WIE 91a] WIENER, R. S.; PINSON, L. J. **Introdução a Programação Orientada a Objetos - Manual Prático e Profissional**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1991.

[ZHA 91] ZHANG, G. **Logic of Domains**. Boston: Birkhäuser, 1991. (Progress in Theoretical Computer Science).

[ZHA 92] ZHANG, G. Stable Neighbourhoods. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.93, n.1, p.143-157, Feb. 1992.

[ZHA 92a] ZHANG, G. d-I Domains as Prime Informationa Systems. **Information and Computation,** Orlando, v.100, n.2, p.151-177, Oct. 1992.

[ZHA 96] ZHANG, G. Quasi-Prime Algebraic Domains. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, Elsevier, v.155, n.1, p.221-264, Feb. 1996.

Informática *UFRGS*

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Estudo da Categoria Computável dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos com aplicação em Análise Real

por

Renata Hax Sander Reiser

Dissertação apresentada aos Senhores:

Prof. Dr. Tiarajú Asmuz Diverio

Profa. Dra. Laira Vieira Toscani

Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler (PUC-RJ)

Prof. Dr. Benedito Melo Acioly (UFPE)

Vista e permitida a impressão.
Porto Alegre, 03/04/97.

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio,
Orientador.

Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa,
Co-orientador.

Prof. Flávio Rech Wagner
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
[illegible]